Pesquisa Operacional

Lista de Exercícios

1

Conjuntos : P - produtos
V.D : x_p quantidade do produto p produzido em Kg.
F.O : $\sum_{p=1}^{P} x_p * c_p$, onde c_p é o custo de venda do produto p.

S.R:
(matéria prima) : $\sum_{p=1}^{P} Q_p * x_p \leq Q_m$, onde Q_p é a quantidade de matéria prima m necessária para produzir uma unidade do produto p, e Q_m é a quantidade disponível de matéria prima m.

(mão de obra) : $\sum_{p=1}^{P} t_p * x_p \leq T_p$, onde t_p é o tempo necessário para produzir o produto p, e T_p é a quantidade de horas disponíveis para produzir o produto p.

(demanda) : $x_p \leq Dmax_p$, $\forall p \in P$, onde $Dmax_p$ é a demanda máxima para o produto x.

(não negatividade) : $x_p \geq 0$, $\forall p \in P$.

2

Conjuntos : P - produtos, M - matéria prima
V.D : x_p quantidade do produto p produzido em toneladas.
F.O : $max\ z = \sum_{p=1}^{P} x_p * c_p$, onde c_p é a contribuição do produto p.

S.R:
(produção) : $k_1 + x_1 \leq T_1$, onde k_1 é a quantidade total de matéria prima a utilizada na produção do produto p, e T_1 é a produção mínima de 1.
$x_p \leq p_p$, $\forall p \in P$ e $p \neq 1$, onde p_p é a capacidade máxima de produção do produto p.

(demanda) : $x_p \leq D_p$, $\forall p \in P$, onde D_p é a demanda do produto p.

(matéria prima) : $\sum_{p=1}^{p} kpm * x_p \leq K_m$, onde kpm é a quantidade de matéria prima m necessária para produzir uma unidade do produto p, e K_m é a quantidade disponível de matéria prima m.

(não negatividade) : $x_p \geq 0$, $\forall p \in P$.

3

Conjuntos : P - produtos
V.D : x_p quantidade do produto p que é colocado à venda.
F.O : $max\ z = \sum_{p=1}^{P} x_p * l_p$, onde l_p é o lucro obtido na venda do produto p.

S.R:
(demanda) : $x_p \leq Dmax_p$, $\forall p \in P$, onde $Dmax_p$ é a demanda máxima para o produto x.

(espaço) : $\sum_{p \in P} x_p * a_p \leq A$, onde a_p é a área utilizada na prateleira do produto p, e A é a área total do supermercado.

(não negatividade) : $x_p \geq 0$, $\forall p \in P$.

6

Conjuntos : P - produtos
V.D : x_p quantidade do produto p a ser produzida.
F.O : $max\ z = \sum_{p=1}^{P} v_p * x_p$, onde v_p é o preço de venda do produto p.

S.R:
(demanda) : $x_p \geq 0, \forall p \in P$, onde $Dmax_p$ é a demanda máxima para o produto x.

(mão de obra) : $\sum_{p=1}^{P} x_p * a_p \leq A$, onde a_p é o tempo para acabamento do produto p, e A é o tempo total disponível para o acabamento.

(não negatividade) : $x_p \geq 0, \forall p \in P$.

7

Conjuntos : P - produtos
V.D : x_p quantidade de acres plantados do produto p.
F.O : $max\ z = \sum_{p=1}^{P} x_p * c_p * v_p$, onde c_p é o rendimento do produto p por acre, e v_p é o valor do produto.

S.R:
(mão de obra) : $\sum_{p=1}^{P} t_p * x_p \leq T_p$, onde t_p é o tempo necessário para produzir o produto p, e T_p é o tempo total disponível para o produzir o produto.

(demanda) : $x_p * c_p \geq D_p, \forall p \in P$, onde D_p é a demanda máxima para o produto x, e c_p é a produtividade de p.

(não negatividade) : $x_p \geq 0, \forall p \in P$.

8

Conjuntos : P - produtos
V.D : x_p quantidade a ser produzida do produto p.
F.O : $max\ z = \sum_{p=1}^{P} x_p * v_p$, onde v_p é o preço de venda do produto p.

S.R:
(mão de obra) : $\sum_{p=1}^{P} t_p * x_p \leq T_p$, onde t_p é o tempo necessário para produzir o produto p, e T_p é o tempo total disponível para o produzir o produto.

(matéria prima) : $\sum_{p=1}^{P} q_p * x_p \leq Q$, onde q_p é a quantidade de matéria prima necessária para produzir uma unidade do produto p, e Q é a quantidade de horas disponíveis para o produzir o produto.

(não negatividade) : $x_p \geq 0, \forall p \in P$.

1

$max(z) = 8x_1 + 4x_2$

$Z - 8x_1 + 4x_2$ (0)

S.R:

$4x_1 + 2x_2 \leq 16$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

$4x_1 + 2x_2 + S_1 \leq 16$ (1)

$x_1 + x_2 + S_2 \leq 6$

var. bas	Eq	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	const
Z	0	1	-8	-4	0	0	0
S_1	1	0	4	2	1	0	16
S_2	2	0	1	1	0	1	6

Nova linha pivô = $\frac{linha\ atual\ piv\hat{o}}{n^{\circ}\ do\ piv\hat{o}}$

Nova linha pivô = (0 4 2 1 0 16)/4 = (0 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ 0 4)

Nova linha Z = (1 -8 -4 0 0 0) - (-8)*(0 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ 0 4) = (1 0 0 2 0 32)

Nova linha S_2 = (0 1 1 0 1 6) - 1*(0 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ 0 4) = (0 0 $\frac{1}{2}$ -$\frac{1}{4}$ 0 12)

var. bas	Eq	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	const
Z	0	1	0	0	2	0	32
S_1	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	4
S_2	2	0	0	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{4}$	0	12

Solução (x_1, x_2, S_1, S_2) = (4, 0, 0, 12)

2

$max(z) = 3x_1 + 5x_2$

$Z - 3x_1 + 5x_2$ (0)

S.R:

$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 + S_1 \leq 4$ (1)

$2x_2 + S_2 \leq 12$ (2)

$3x_1 + 2x_2 + S_3 \leq 6$ (3)

var. bas	Eq	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	const
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	-
S_1	1	0	1	0	1	0	0	4
S_2	2	0	0	2	0	1	0	12
S_3	3	0	3	2	0	0	1	18

Nova linha pivô = $\frac{linha\ atual\ pivô}{n° \ do\ pivô}$

Nova linha pivô = (0 0 2 0 1 0 12)/2 = (0 0 1 0 $\frac{1}{2}$ 0 6)

Nova linha Z = (1 -3 -5 0 0 0) - (-5)*(0 0 1 0 $\frac{1}{2}$ 0 6) = (1 2 0 0 $\frac{5}{2}$ 0 30)

Nova linha S_1 = (0 1 0 1 0 0 4) - 0*(0 0 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ 0 6) = (0 1 0 1 0 0 4)

Nova linha S_3 = (0 3 2 0 0 1 18) - 2*(0 0 1 0 $\frac{1}{2}$ 0 6) = (0 3 2 -2 0 0 4)

var. bas	Eq	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	const
Z	0	1	2	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
S_1	1	0	1	0	1	0	0	4
S_2	2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
S_3	3	0	3	2	-2	0	0	4

Solução (x_1, x_2, S_1, S_2, S_3) = (0, 6, 4, 0, 4)

3

$max(z) = 5x_1 + 4x_2$

S.R:

$6x_1 + 4x_2 \leq 24$

$x_1 + 2x_2 \leq 6$

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

$Z - 5x_1 + 4x_2$ (0)

$6x_1 + 4x_2 + S_1 \leq 24$ (1)

$x_1 + 2x_2 + S_2 \leq 6$ (2)

$-x_1 + x_2 + S_3 \leq 1$ (3)

$x_2 + S_4 \leq 2$ (4)

var. bas	Eq	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	const
Z	0	1	-5	-4	0	0	0	0	-
S_1	1	0	6	4	1	0	0	0	4
S_2	2	0	1	2	0	1	0	0	6
S_3	3	0	-1	1	0	0	1	0	-1
S_4	4	0	0	1	0	0	0	0	-

Nova linha pivô = $\frac{linha\ atual\ pivô}{n° \ do\ pivô}$

Nova linha pivô = (0 6 4 1 0 0 0 24)/6 = (0 1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ 0 0 0 4)

Nova linha Z = (1 -5 -4 0 0 0 0 0) - (-5)*(0 1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ 0 0 0 4) = (1 0 -$\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ 0 0 0 20)

Nova linha S_2 = (0 1 2 0 1 0 0 6) - 1*(0 1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ 0 0 0 4) = (0 0 $\frac{4}{3}$ -$\frac{1}{6}$ 1 0 0 2)

Nova linha S_3 = (0 -1 1 0 0 1 0 1) - (-1)*(0 1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ 0 0 0 4) = (0 0 $\frac{5}{3}$ $\frac{1}{6}$ 0 1 0 5)

Nova linha S_4 = (0 0 1 0 0 0 1 2) - 0*(0 1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ 0 0 0 4) = (0 0 1 0 0 0 1 2)

var. bas	Eq	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	const
Z	0	1	0	-$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	0	0	30
S_1	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	6
S_2	2	0	0	$\frac{4}{3}$	-$\frac{1}{6}$	1	0	0	$\frac{3}{2}$
S_3	3	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	3
S_4	4	0	0	1	0	0	0	1	2

Nova linha pivô = (0 0 $\frac{4}{3}$ -$\frac{1}{6}$ 1 0 0 2)/$\frac{4}{3}$ = (0 0 1 -$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{4}$ 0 0 $\frac{3}{2}$)

Nova linha Z = (1 0 -$\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ 0 0 0 20) + ($\frac{2}{3}$)*(0 0 1 -$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{4}$ 0 0 $\frac{3}{2}$) = (1 0 0 $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ 0 0 21)

Nova linha x_1 = (0 1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ 0 0 0 4) - ($\frac{2}{3}$)*(0 0 1 -$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{4}$ 0 0 $\frac{3}{2}$) = (0 0 0 $\frac{1}{4}$ -$\frac{1}{2}$ 0 0 3)

Nova linha S_3 = (0 0 $\frac{5}{3}$ $\frac{1}{6}$ 0 1 0 5) - ($\frac{5}{3}$)*(0 0 1 -$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{4}$ 0 0 $\frac{3}{2}$) = (0 0 0 $\frac{5}{8}$ -$\frac{5}{4}$ 1 0 $\frac{5}{2}$)

Nova linha S_4 = (0 0 1 0 0 0 1 2) - 1*(0 0 1 -$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{4}$ 0 0 $\frac{3}{2}$) = (0 0 0 $\frac{1}{8}$ -$\frac{3}{4}$ 0 1 $\frac{1}{2}$)

var. bas	Eq	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	const
Z	0	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	21
S_1	1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	-$\frac{1}{2}$	0	0	3
S_2	2	0	0	1	-$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$
S_3	3	0	0	0	$\frac{5}{8}$	-$\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{5}{2}$
S_4	4	0	0	0	$\frac{1}{8}$	-$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$

Solução (x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4) = (3, $\frac{3}{2}$, 0, 0, $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{2}$)

Z = 21.

6 a)

$max(z) = x_1 + x_2$

$Z - x_1 - x_2$ (0)

S.R:

$x_1 - x_2 = 1$

$-x_1 + x_2 = 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 - x_2 + S_1 = 1$ (1)

$x_1 + x_2 + S_2 = 1$ (2)

var. bas	Eq	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	const
Z	0	1	-1	-1	0	0	-
S_1	1	0	1	-1	1	0	1
S_2	2	0	1	0	0	-1	1

Na segunda iteração foi obtido que as divisões resultaram em número negativos ou não resulta em um número. Portanto, o sistema é insolucionável.

var. bas	Eq	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	const
Z	0	1	0	-2	1	0	-$\frac{1}{2}$
x_1	1	0	1	-1	1	0	-1
S_2	2	0	0	0	-1	1	$\frac{2}{0}$

6 b)

$max(z) = y_1 + y_2$

$Z - y_1 - y_2$ (0)

S.R:

$y_1 - y_2 \geq 1$
$-y_1 + y_2 \geq 1$
$y_1, y_2 \geq 0$

$y_1 - y_2 + S_1 = 1$ (1)
$-y_1 + y_2 + S_2 = 1$ (2)

var. bas	Eq	Z	y_1	y_2	S_1	S_2	const
Z	0	1	-1	-1	0	0	-
S_1	1	0	1	1	1	0	1
S_2	2	0	-1	1	0	1	1

Assim como ocorreu no item a, após a primeira iteração, as divisões resultaram em número negativos ou não resulta em um número. Portanto, o sistema é insolucionável.

var. bas	Eq	Z	y_1	y_2	S_1	S_2	const
Z	0	1	0	-2	1	0	-$\frac{1}{2}$
x_1	1	0	1	-1	1	0	-1
S_2	2	0	0	0	-1	1	$\frac{2}{0}$

Cálculo das linhas

Nova linha pivô (x_1, y_1) = (0 1 -1 1 0 1)/1 = (0 1 -1 1 0 1)

Novas linhas Z (x, y)= (1 -1 -1 0 0 0) + 1*(0 1 -1 1 0 1) = (1 0 -2 1 0 1)

Novas linhas S_1, S_2 = (0 -1 1 0 1 1) + 1*(0 1 -1 1 0 1) = (0 0 0 1 1 2)