Projeto e Análise de Algoritmos
Exercícios: **Equação de Recorrência e Análise Assintótica**

1. **Uma pessoa sobe uma escada composta de n degraus, com passos que podem alcançar entre 1 e $k \leq n$ degraus. Escrever equações de recorrência que permitem determinar o número de modos distintos da pessoa subir a escada.**

   $T_k(n) = n^2$ modos distintos de subir a escada de n degraus com passos de tamanho 1 até k.

   Para k¡n, se for dado um passo de tamanho 1, teremos que calcular o número de modos distintos para subir os n-1 degraus restantes. Se for dado um passo de tamanho 2, teremos que calcular n número de modos distintos para subir os n-2 degraus restantes. E assim por diante, até k. Assim, temos:

   $$T_k(n) = T_k(n-1) + T_k(n-2) + ... + T_k(n-k)$$

   Para k=n, segue-se a mesma lógica, porém, até n-1 e soma-se 1 para contabilizar a possibilidade de dar um passo de tamanho k. Logo:

   $$T_k(n) = T_k(n-1) + T_k(n-2) + ... + T_k(1) + 1$$

   Quando houver apenas um degrau, haverá apenas uma possibilidade:

   $$T_k(1) = 1$$

   Caso ocorra $k \geq n$, considera-se $k = n$.

   Assim, temos a seguinte equação de recorrência:

   $$T_k(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}_k(n-i), & \text{se } k < n \\ (\sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{T}_k(n-i)) + 1, & \text{se k} \geq n \\ 1 & \text{se n=1} \end{cases}$$

2. **Prove as seguintes afirmações sobre notação assintótica:**

- $n^3/100 - 25n^2 - 100n + 7$ é $\Omega(\mathrm{n}^2)$ e $\Theta(\mathrm{n}^3)$
  - $^3/100 - 25n^2 - 100n + 7 \geq \Omega(\mathrm{n}^2)$
    $n^3/100 - 25n^2 - 100n^2 \geq \Omega(\mathrm{n}^2)$
    $n^3/100 - 125n^2 \geq \Omega(\mathrm{n}^2)$
    $n^3/100 - 12500n^2/100 \geq \Omega(\mathrm{n}^2)$
    $2n^3/200 - 25000n^2/200 \geq \Omega(\mathrm{n}^2)$
    $2n^3/200 - (n * n^2)/200 \geq \Omega(\mathrm{n}^2)$
    $2n^3/200 - (n^3)/200 \geq \Omega(\mathrm{n}^2)$
    $n^3/200 \geq \Omega(\mathrm{n}^2)$
    Assim, temos: $n'_0 \geq 25000$ e $c_1 = 1/200$
  - $n^3/100 - 25n^2 - 100n + 7 \leq \Theta(\mathrm{n}^3)$
    $n^3/100 \leq \mathrm{O}(\mathrm{n}^3)$
    Assim, temos: $n''_0 = 1$ e $c_2 = 1/100$
  - Portanto, para ser válido, devemos ter:
    $n_0 \geq 25000$
    $c_1 = 1/200$
    $c_2 = 1/100$
- $77n^3 - 13n^2 + 29n - 5$ é $O(n^4)$ e $\Omega(\mathrm{n}^3)$
  - $77n^3 - 13n^2 + 29n - 5 \leq \mathrm{O}(\mathrm{n}^4)$
    $77n^3 + 29n^3 \leq \mathrm{O}(\mathrm{n}^4)$
    $106n^3 \leq \mathrm{O}(\mathrm{n}^4)$
    $n * n^3 \leq \mathrm{O}(\mathrm{n}^4)$
    $n^4 \leq \mathrm{O}(\mathrm{n}^4)$
    Assim, temos: $n'_0 \geq 106$ e $c_1 = 1$
  - $77n^3 - 13n^2 + 29n - 5 \geq \mathrm{O}(\mathrm{n}^3)$
    $77n^3 - 13n^2 - 5n^2 \geq \mathrm{O}(\mathrm{n}^3)$
    $77n^3 - 18n^2 \geq \mathrm{O}(\mathrm{n}^3)$
    $77n^3 - n * n^2 \geq \mathrm{O}(\mathrm{n}^3)$
    $77n^3 - n^3 \geq \mathrm{O}(\mathrm{n}^3)$
    $76n^3 \geq \mathrm{O}(\mathrm{n}^3)$
    Assim, temos: $n''_0 \geq 18$ e $c_2 = 76$
  - Portanto, para ser válido, devemos ter:
    $n_0 \geq 106$
    $c_1 = 1$
    $c_2 = 76$

- $34n \log_7 n^2 + 13n$ é $\Omega(n)$ e $O(n^2)$
  - $34n \log_7 n^2 + 13n \geq \Omega(n)$
    $13n \geq O(n^2)$
    Assim, temos: $n'_0 = 1$ e $c_1 = 13$
  - $34n \log_7 n^2 + 13n \leq O(n^2)$
    $34n * 2 \log_7 n + 13n \leq O(n^2)$
    $34n * 2 \log_7 7 + 13n \leq O(n^2)$
    $34n * 2 * 1 + 13n \leq O(n^2)$
    $34n * 2 + 13n \leq O(n^2)$
    $68n \leq O(n^2)$
    $81n \leq O(n^2)$
    $81n^2 \leq O(n^2)$
    Assim, temos $n''_0 = 7$ e $c_2 = 81$
  - Portanto, devemos ter:
    $n_0 = 7$
    $c_1 = 13$
    $c_2 = 81$