О ЛАБОРАТОРНОЙ ПО МАРКОВСКИМ ЦЕПЯМ…

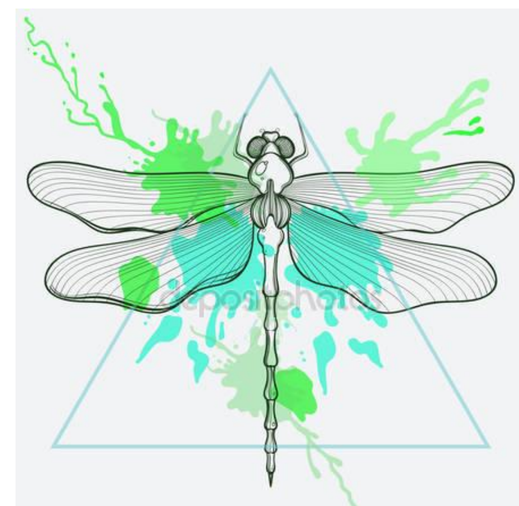
Поглощающие цепи

Поглощающее состояние — состояние, из которого нельзя попасть ни в какое другое, то есть S_i — поглощающее состояние, если $p_{ii}=1$.

Поглощающей называется марковская цепь, в которой есть хотя бы одно поглощающее состояние и из любого состояния достижимо хотя бы одно поглощающее.

Эргодические марковские цепи

- Эргодические марковские цепи описываются сильно связным графом. Это означает, что в такой системе возможен переход из любого состояния S_i в любое состояние S_j за конечное число шагов.
- Существует единственная неподвижная точка: $tP=t$. Вектор-строка t определяет предельное распределение.



О лабораторной по марковским цепям…

Задача про пьяницу с

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Находим фундаментальную матрицу:

$$E-Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь Q – правый нижний блок матрицы P, он отвечает за переходы из непоглощающих состояний в непоглощающие.

$$N=(E-Q)^{-1}=\begin{pmatrix} 5/3 & 2 & 2/3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1/3 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Элементы фундаментальной матрицы – среднее время жизни в том или ином состоянии в зависимости от того из кого начали

Так, в данном случае жизнь до падения пьяницы, если он начал, стоя на двух ногах, - это сумма второй строчки: 1+3+1=5

О лабораторной по марковским цепям…

Находим матрицу B:

$$B=NR=\begin{pmatrix} 5/3 & 2 & 2/3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1/3 & 1 & 4/3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/9 & 4/9 \\ 1/3 & 2/3 \\ 1/9 & 8/9 \end{pmatrix}.$$

Здесь R – левый нижний блок матрицы P, он отвечает за переходы из непоглощающих состояний в поглощающие.

Элементы матрицы B – вероятность поглощения в том или ином состоянии в зависимости от того из кого начали.

Так, в данном случае вероятность упасть в речку для пьяницы в 8 раз меньше вероятности упасть на копья, если он начал, с правой ноги - это элементы третьей строчки: 1/9 и 8/9.

Сравнения теоретической вероятности из матрицы B с полученной долей падения, например, в речку, можно сделать не с помощью критерия χ^2, но и с помощью схемы Я.Бернулли.

Например, пусть начиная с левой ноги пьяница падал в 50 случаях из 100 в речку. Мы проверяем гипотезу H_0: p=5/9. При этом оценка равна 0,5.

Выборочное значение критерия$=\sqrt{n}\,(p^*-p_0)/\sqrt{p_0(1-p_0)} = \sqrt{100}\,(0{,}5-5/9)/\sqrt{\frac{5}{9}*\frac{4}{9}}=-1{,}12$.

Теоретическое значение находим по таблице функции Лапласа (используем центральную предельную теорему в виде Муавра-Лапласа). Для уровня значимости 0,05 получаем значение 1,96, что больше модуля выборочного – результаты имитации соответствуют теоретическим результатам.

О лабораторной по марковским цепям…

Задача про муху с

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Находим неподвижную вектор-строку t=(x y z): tP=t

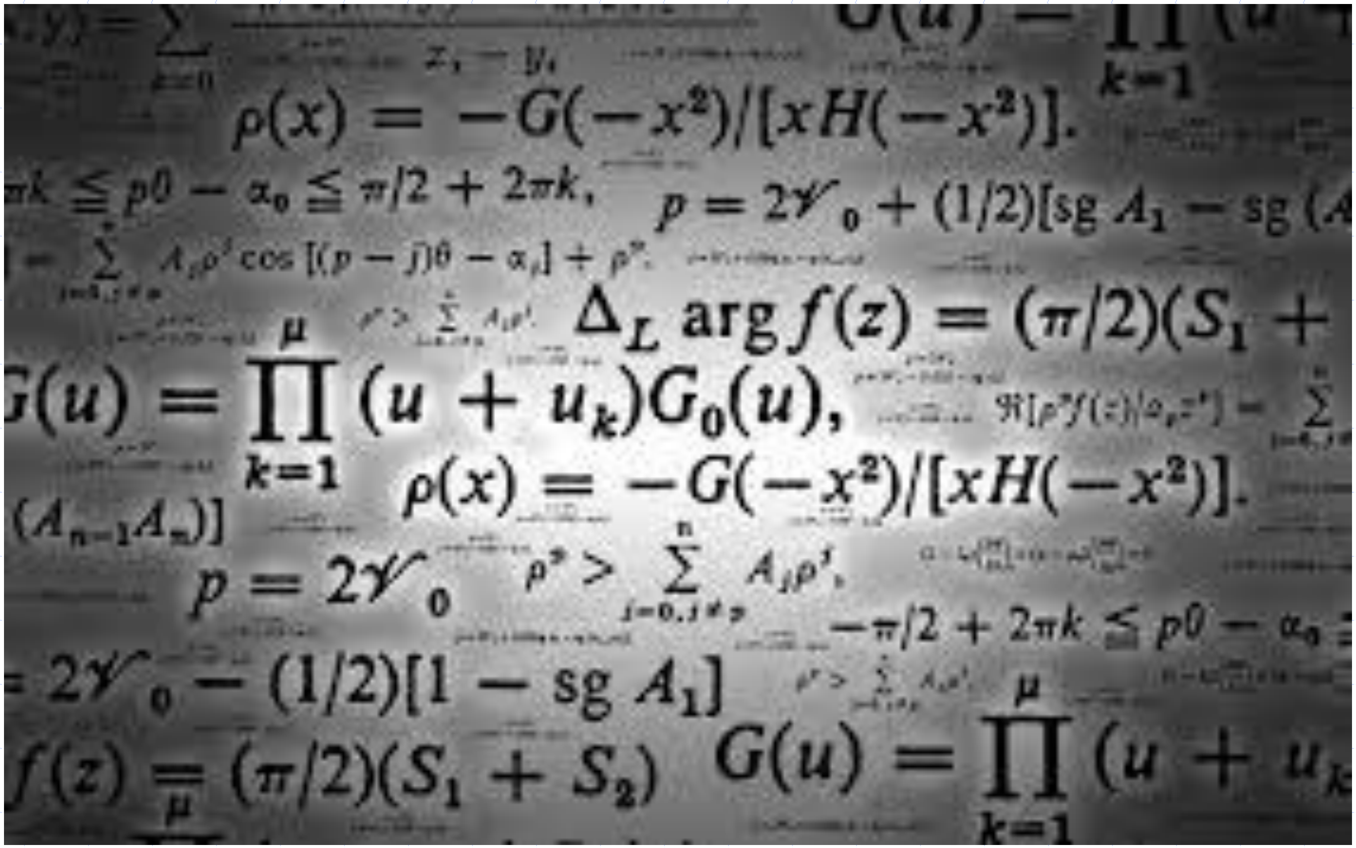
$$\begin{cases} \frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=x \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{6}y+\frac{1}{2}z=y \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y=z \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Получаем: t=(21/71 24/71 26/71)

Обратные элементы вектора t – среднее время до первого возвращения

Так, в данном случае в среднем первый раз возвращение происходит через 71/21 = 3,4 шага (для мухи - секунд).

Математика поможет:



Спасибо за терпение!