

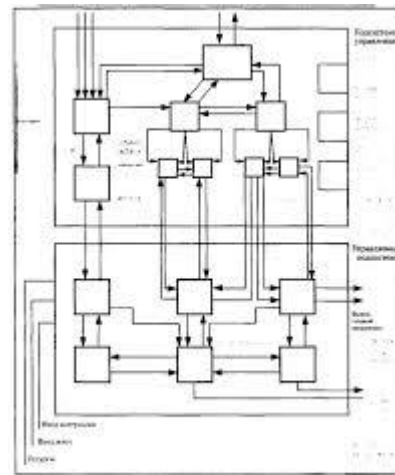
$$p(t)=0,997$$

Анализ надежности сложной резервируемой системы

Надежность информационных систем

22/04/2020 Кабелянц Петр Степанович

Христос воскрес!

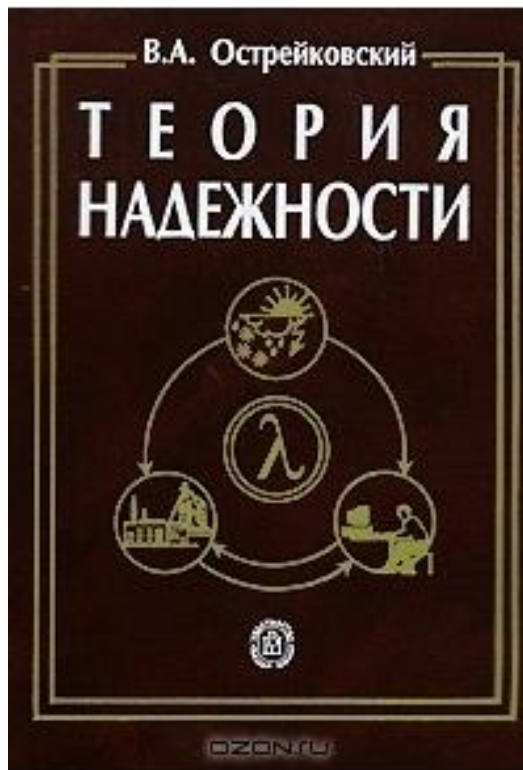


План



1. Метод перебора гипотез – формулы сложения и умножения вероятностей случайных событий. Примеры.
2. Использование формулы полной вероятности.
3. Метод минимальных путей и минимальных сечений. Использование булевых функций. Алгоритм разрезания.
4. Живучесть сетей.

Литература





Сложная система

система, состоящая из множества взаимодействующих составляющих (подсистем), вследствие чего она приобретает новые свойства, которые отсутствуют на подсистемном уровне и *не могут быть сведены к свойствам подсистемного уровня.*

Метод перебора гипотез

Система из элементов n , число состояний системы 2^n
гипотезы:

H_0 – все элементы работают нормально, $P(H_0)=p_1p_2\ldots p_n$

H_i – отказал i -й элемент, $P(H_i)=p_1p_2\ldots q_i\ldots p_n$

$H_{i,j}$ – отказали i -й и j -й элементы

$P(H_{i,j})=p_1p_2\ldots q_i\ldots q_j\ldots p_n$

$H_{1,2,\ldots,n}$ – отказали все элементы

$P(H_{1,2,\ldots,n})=q_1q_2\ldots q_n$

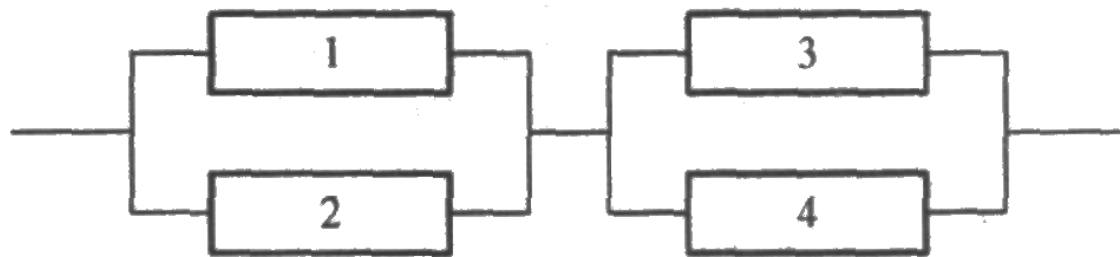
Вероятность безотказной работы:

$$P=\sum P(H_\alpha)$$

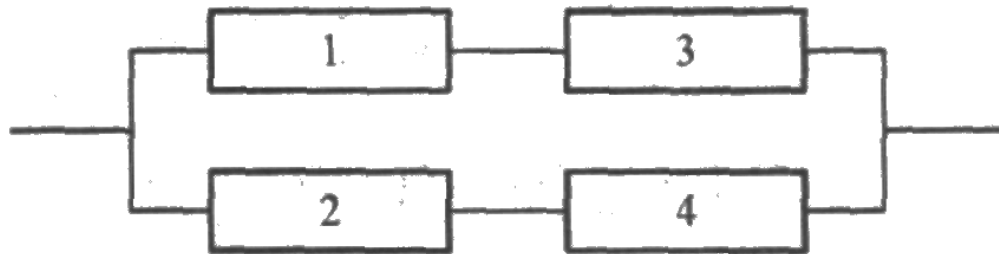
по всем гипотезам, соответствующим
работоспособным состояниям системы



Пример:
раздельное (а) и общее резервирование (б)

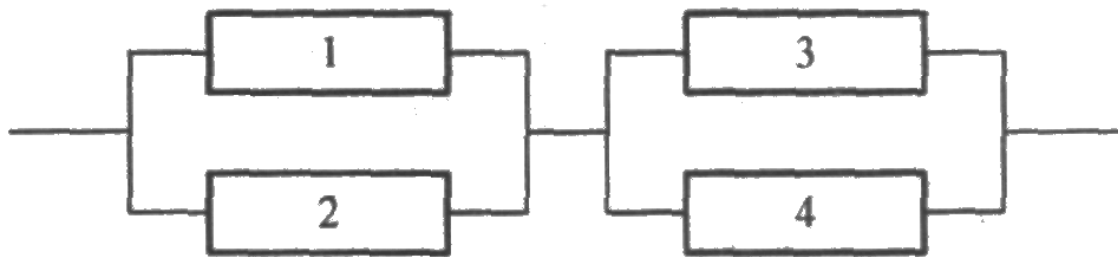


a



б

раздельное резервирование

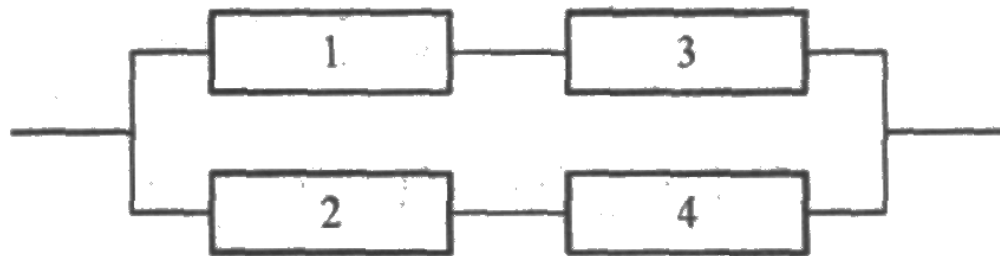


$$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) = q_1 q_2, \quad P(\bar{A}_3 \bar{A}_4) = P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) = q_3 q_4, \quad 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = 1 - q_1 q_2, \quad 1 - P(\bar{A}_3 \bar{A}_4) = 1 - q_3 q_4.$$

Вероятность безотказной работы:

$$P = (1 - q_1 q_2)(1 - q_3 q_4).$$

общее резервирование



Вероятность отказа системы:

$$Q = (1 - p_1 p_3)(1 - p_2 p_4).$$

Вероятность безотказной работы:

$$P = 1 - (1 - p_1 p_3)(1 - p_2 p_4).$$

Пример: метод разложения относительно особого элемента

H_1 – элемент 3 работает нормально, $P(H_1) = p_3$

H_2 – элемент 3 отказал, $P(H_2) = q_3$

A – система работает нормально

Условные вероятности:

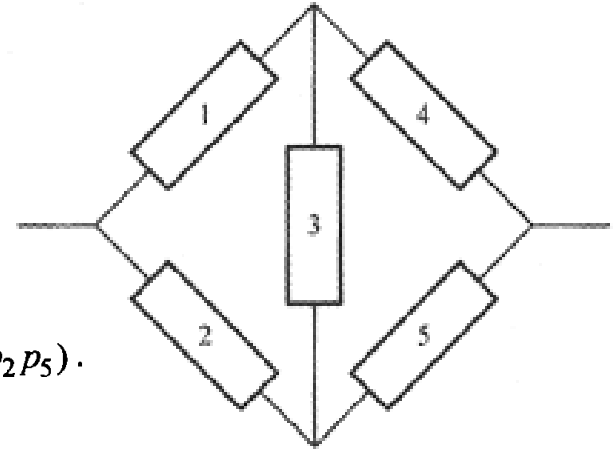
$$P(A/H_1) = (1 - q_1 q_2)(1 - q_4 q_5), \quad P(A/H_2) = 1 - (1 - p_1 p_4)(1 - p_2 p_5).$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2).$$

Вероятность безотказной работы:

$$P = p_3(1 - q_1 q_2)(1 - q_4 q_5) + q_3(1 - (1 - p_1 p_4)(1 - p_2 p_5)).$$





Минимальный путь и минимальное сечение

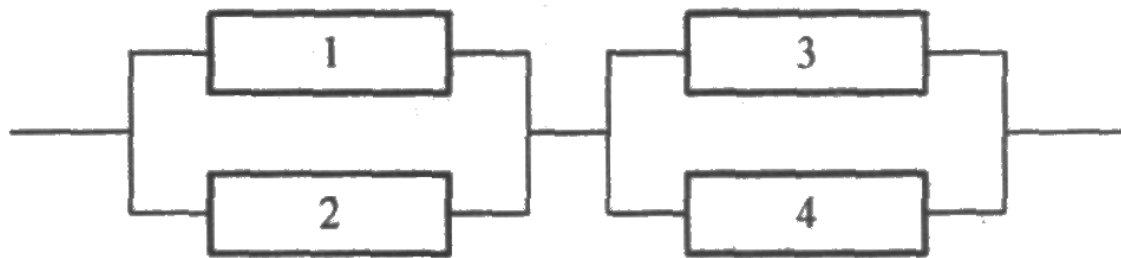
- *Минимальный путь* — такой набор элементов в структуре, при котором система исправна, если исправны все элементы этого набора; отказ любого из элементов ведет к отказу системы.
- *Минимальное сечение* — такой набор элементов в структуре, при котором система неисправна, если неисправны все элементы этого набора; исключение любого элемента из набора переводит систему в исправное состояние.

Формула сложений для минимальных путей и для минимальных сечений

$$P = P\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right) = \sum_{i=1}^r P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{r-1} P(A_1 A_2 \dots A_r).$$

$$Q = P\left(\bigcup_{i=1}^s B_i\right) = \sum_{i=1}^s P(B_i) - \sum_{i < j} P(B_i B_j) + \sum_{i < j < k} P(B_i B_j B_k) - \dots + (-1)^{s-1} P(B_1 B_2 \dots B_s).$$

раздельное резервирование



Минимальные пути: 1—3, 1—4, 2—3, 2—4.

$$P = p_1 p_3 + p_1 p_4 + p_2 p_3 + p_2 p_4 - p_1 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 - p_1 p_2 p_4 - p_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 p_3 p_4.$$

Минимальные сечения: 1—2, 3—4.

$$Q = q_1 q_2 + q_3 q_4 - q_1 q_2 q_3 q_4.$$

Формула, которая была на слайдах раньше: $P = (1 - q_1 q_2)(1 - q_3 q_4).$

Оценка вероятности безотказной работы

$$\prod_{i=1}^s (1 - P(B_i)) \leq P \leq 1 - \prod_{i=1}^r (1 - P(A_i)).$$

Верхняя оценка вероятности безотказной работы определяется как вероятность безотказной работы параллельного соединения минимальных путей.

Верхняя оценка вероятности отказа системы определяется как вероятность отказа последовательного соединения минимальных сечений.

Пример: мостиковая система

Минимальные пути:

$$A_1: 1-4, P(A_1) = p_1 p_4;$$

$$A_2: 2-5, P(A_2) = p_2 p_5;$$

$$A_3: 1-3-5, P(A_3) = p_1 p_3 p_5;$$

$$A_4: 2-3-4, P(A_4) = p_2 p_3 p_4.$$

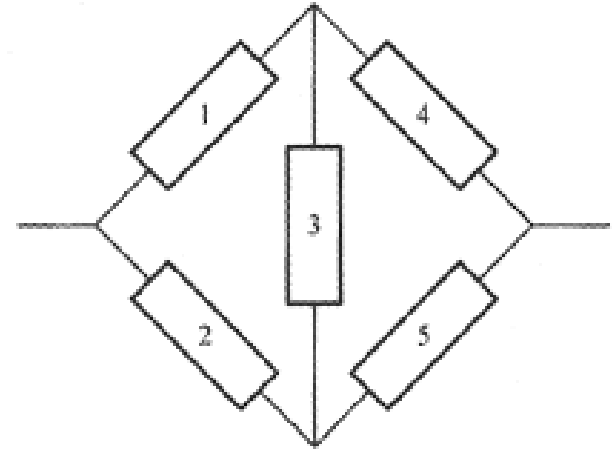
Минимальные сечения:

$$B_1: 1-2, P(B_1) = q_1 q_2;$$

$$B_2: 4-5, P(B_2) = q_4 q_5;$$

$$B_3: 1-3-5, P(B_3) = q_1 q_3 q_5;$$

$$B_4: 2-3-4, P(B_4) = q_2 q_3 q_4.$$



Нижняя оценка: $P \geq (1 - q_1 q_2)(1 - q_4 q_5)(1 - q_1 q_3 q_5)(1 - q_2 q_3 q_4),$

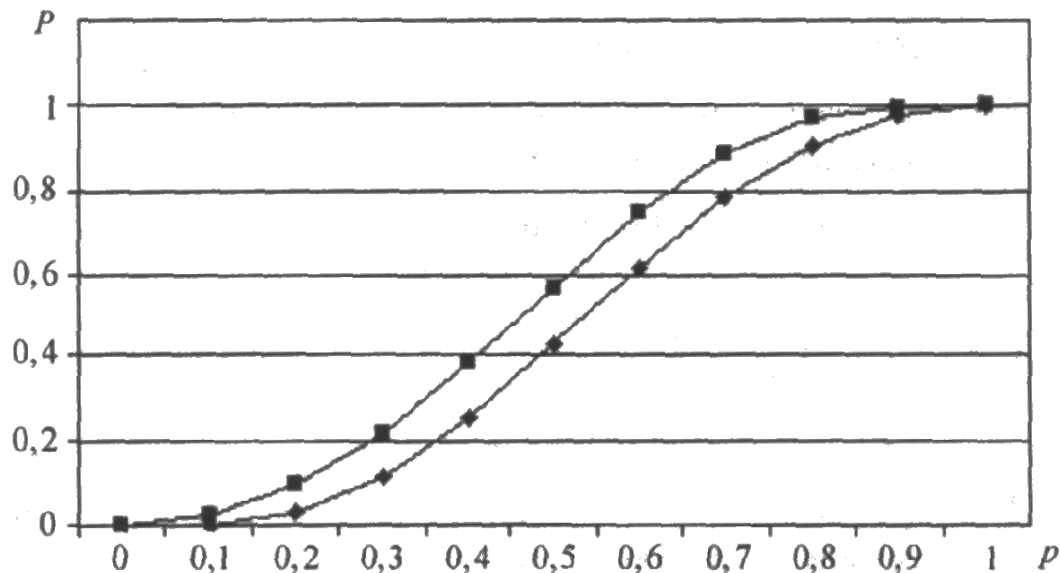
Верхняя оценка: $P \leq 1 - (1 - p_1 p_4)(1 - p_2 p_5)(1 - p_1 p_3 p_5)(1 - p_2 p_3 p_4).$

Формула, которая была на слайдах раньше:

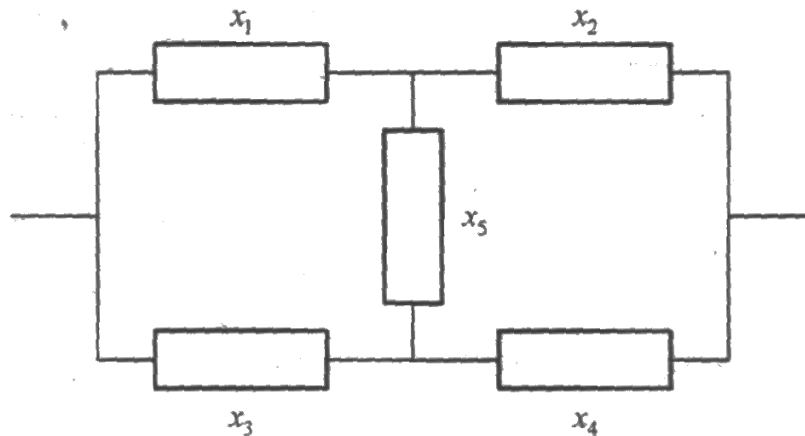
$$P = p_3(1 - q_1 q_2)(1 - q_4 q_5) + q_3(1 - (1 - p_1 p_4)(1 - p_2 p_5)).$$

Оценка для «мостикового» примера, случай равнонадежных элементов

$$(1 - q^2)^2(1 - q^3)^2 \leq P \leq 1 - (1 - p^2)^2(1 - p^3)^2.$$



Функции алгебры логики (ФАЛ)



Булевские переменные:

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{если элемент в отказовом состоянии;} \\ 1, & \text{если элемент в исправном состоянии.} \end{cases}$$

Минимальные пути:

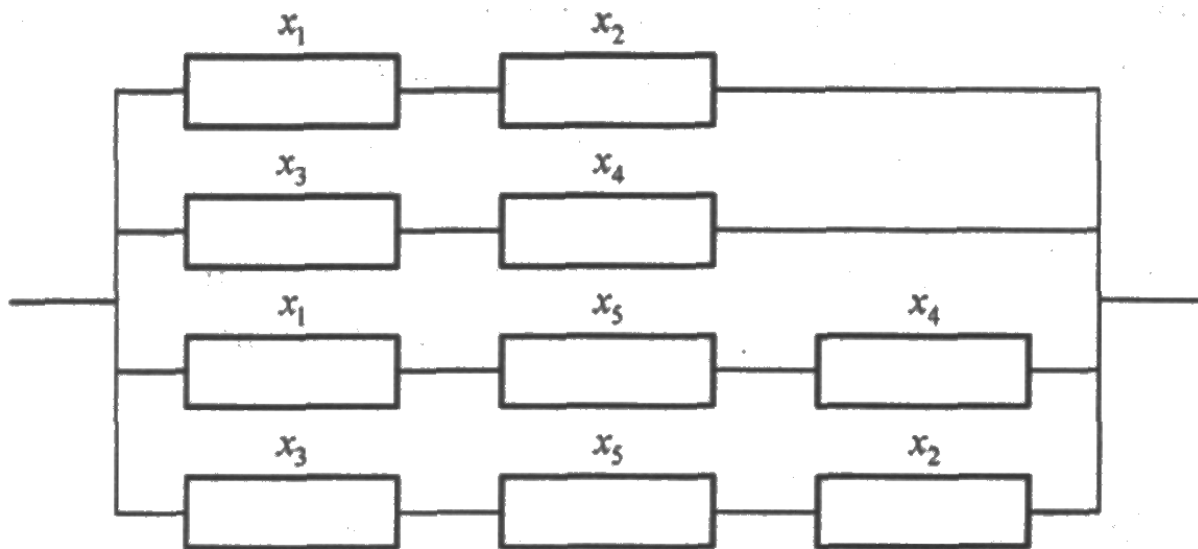
$$x_1 x_2, x_3 x_4, x_1 x_5 x_4, x_3 x_5 x_2$$

Минимальные сечения:

$$x_1 x_3, x_2 x_4, x_1 x_5 x_4, x_3 x_5 x_2$$

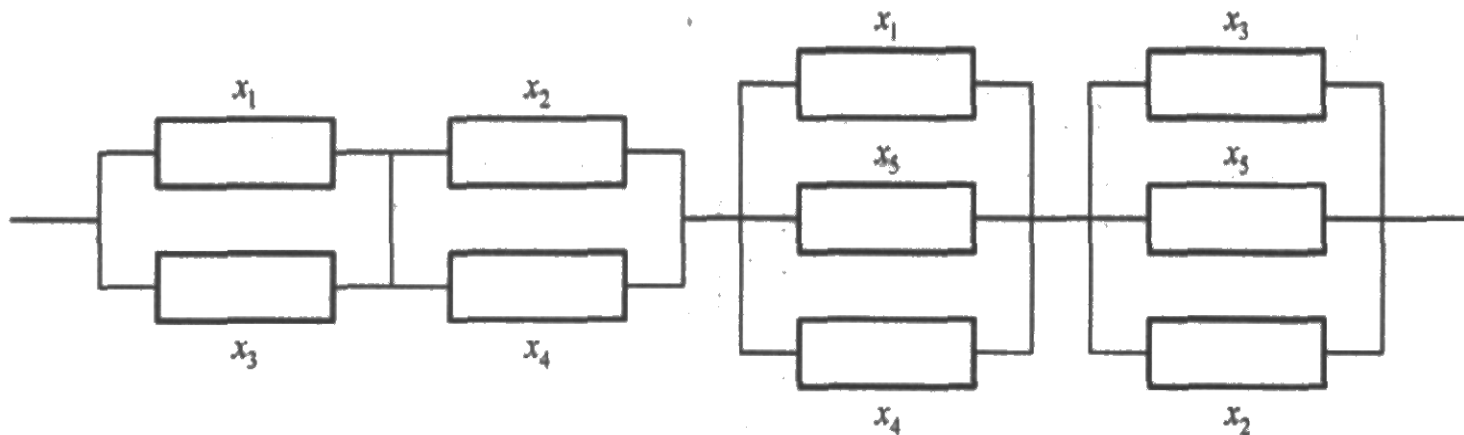
Функция работоспособности

$$y = x_1 x_2 \vee x_3 x_4 \vee x_1 x_5 x_4 \vee x_3 x_5 x_2 .$$



Функция неработоспособности

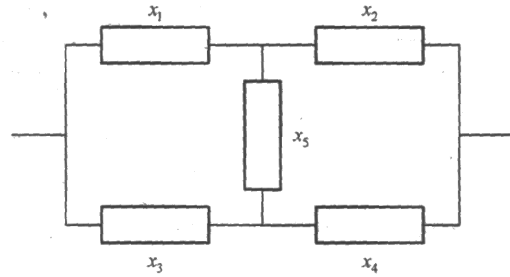
$$y = x_1 x_3 \vee x_2 x_4 \vee x_1 x_5 x_4 \vee x_3 x_5 x_2 .$$



Алгоритм разрезания

$$y(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i y(x_1, x_2, \dots, 1, \dots, x_n) \vee \bar{x}_i y(x_1, x_2, \dots, 0, \dots, x_n).$$

Алгоритм разрезания для мостика



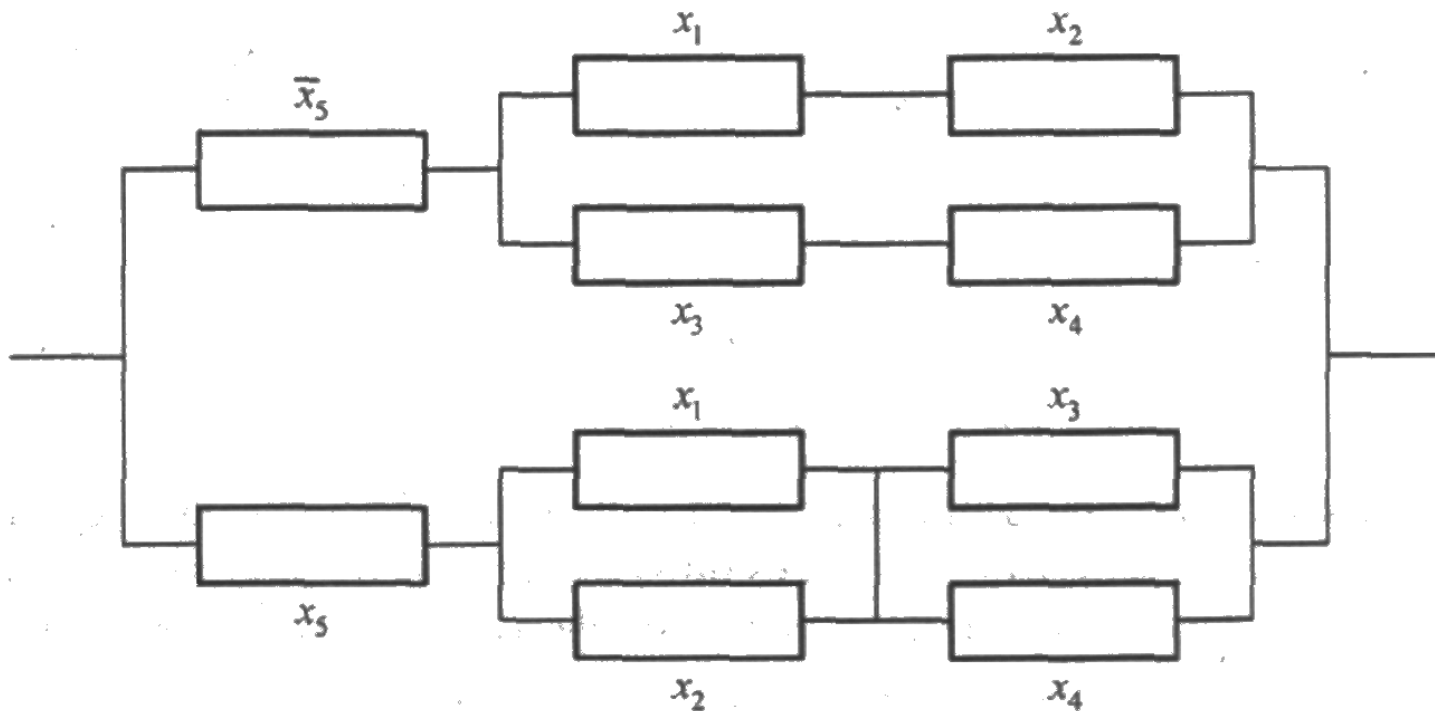
$$y = x_1 x_2 \vee x_3 x_4 \vee x_1 x_5 x_4 \vee x_3 x_5 x_2 .$$

$$\begin{aligned} y &= x_5 (x_1 x_2 \vee x_3 x_4 \vee x_1 1 x_4 \vee x_3 1 x_2) \vee \bar{x}_5 (x_1 x_2 \vee x_3 x_4 \vee x_1 0 x_4 \vee x_3 0 x_2) = \\ &= x_5 (x_1 x_2 \vee x_3 x_4 \vee x_1 x_4 \vee x_3 x_2) \vee \bar{x}_5 (x_1 x_2 \vee x_3 x_4) . \end{aligned}$$

$$x_1 x_2 \vee x_3 x_4 \vee x_1 x_4 \vee x_3 x_2 = x_1 (x_2 \vee x_4) \vee x_3 (x_2 \vee x_4) = (x_1 \vee x_3) (x_2 \vee x_4) .$$

$$y = x_5 (x_1 \vee x_3) (x_2 \vee x_4) \vee \bar{x}_5 (x_1 x_2 \vee x_3 x_4) .$$

Алгоритм разрезания для примера



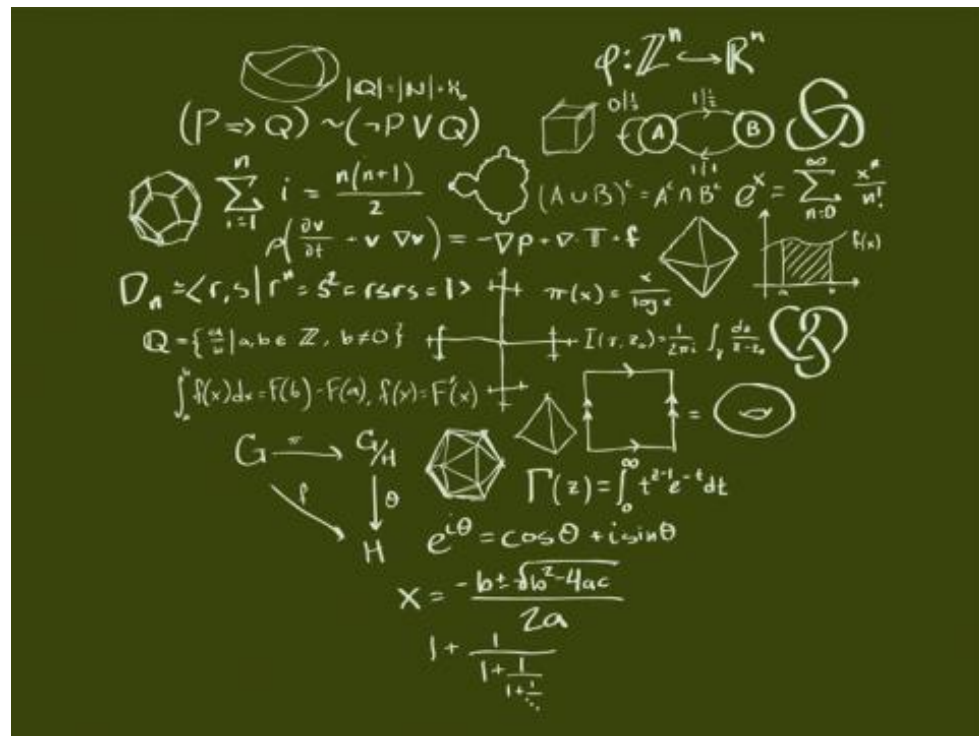
Свели мостик к последовательным и параллельным соединениям



Живучесть сетей

Каким условиям должна удовлетворять последовательность чисел, чтобы быть степенями вершин или как построить граф с заданными степенями?

Математика поможет:



Спасибо за терпение!