ІНФАРМАТЫКА

Адводзім вочы ад прыставак, кансоляў, кампутара – і раптам нам ужо падабралі рэкляму й мы апынуліся ў сьвеце кантэнту бязь межаў. Заслугоўвае ён нашай увагі ці паўтараецца з дня ў дзень?

Восеньскі дзень ці вечар, глядзім фільм. А на наступны дзень атрымваем падбор з падобных стужак у сэрвісах *Google, Netflix* ці [устаўце-свой-назоў], можа, нават водгукі ў тым сама стылі. Абмяркоўваем зь сябрам ці сваяком новую пакупку ці праблему? Рэкамэндацыя ўжо неўзабаве. Мае яна сэнс ці нам паказваюць халадню іншае фірмы, хаця нам толькі што прывезьлі замоўленую? Падбор актуалізаваўся ці штораз аднолькавы? Нам прапануюць той сама сок ці газаваны напой? Але ж рэкляма мае палепшаць, яна мусіла б паказаць нам тое, што мы хацелі б зьесьці, а ня тое, што мы зьелі ці не, і яе заданьне – зафіксаваць зроблены выбар, каб умацаваць сувязь у далейшым?

Смартфон, кампутар, сучасныя альгарытмы... Учора мы намагаліся нешта знайсьці, а сёньня нам ужо кажуць, што нам трэба (на іхны погляд). Ня важна, спадабаецца ці не: заўтра прапануюць тое, што спадабалася, а пасьлязаўтра – нешта, у чым мы напраўду зацікаўленыя.

Ёсьць цёмны й сьветлы бакі: некалі гэтак пазбавіліся мануфактуры – можа, час пазбавіцца руціны. Можа, будзем прымаць усё, што нам даюць. А можа, гэта крок на патэнцыйна новы ровень: будзем сядзець удома, генэраваць ідэі, а працэс тварэньня застанецца на баку машыны. Чаму б і не? Давайце разьбірацца, сябар ці вораг, памочнік ці небясьпечная існасьць гэты штучны інтэлект (ШІ).

ЯК МЫ ТУТ АПЫНУЛІСЯ?

– Што там было ў пачатку?
– У самым?
– Не-не, мы пра ШІ тут гаворым.
– Ах так…

Кампутар на стале, даступны для агульнага карыстаньня, інтэрнэт прыходзіць як другая ступень камунікацыяў, а ўва ўнівэрсытэцкіх лябараторыях паралельна дасьледуюцца й ствараюцца інтэлектуальныя працэсы. Пачыналася з наступных заданьняў: што і як зрабіць, як пэўныя працэсы аптымізаваць, пераўтварыць, пабудаваць штучны розум. Ідэя існавала даўно, стагодзьдзямі, яшчэ альхімікі спрабавалі ўзнавіць чалавекападобную істоту. Магчыма, з часу, як зьявілася рэлігія, чалавек час ад часу кідаў ёй выклікі (тэма для асобнага дасьледаваньня). Нават цяпер фокус зрушваецца ў кірунку біялёгіі ды ўзнаўленьня / паляпшэньня чалавека з дапамогаю біяінжынэрыі. А мы вернемся да кампутараў. Калі ён зьявіўся, паралельна пачалі вывучацца мазгі, нэўронныя працэсы, як усё зьвязанае і працякаюць працэсы. Зарадзілася надзея. Гэтак і запачатковаліся альгарытмы, што далей сфармавалі кірунак „нэўронныя сеткі".

Далей дасьледавалі ды адладжвалі. Міне колькі дзесяцігодзьдзяў, спады й рост папулярнасьці кірунку. У выніку колькі разнастайных тыпаў мадэляў скіраваныя на наступныя заданьні: клясыфікацыя, аналіз, прагноз, клястэрызацыя зьвестак. Збоку працэс можа выглядаць даволі гладкім, аднак, як часта бывае ў дасьледаваньнях, гэта толькі адчуваньні: калі заглыбіцца ў кожны кампанэнт паасобку, мы ня зьмесьцімся ў межы артыкулу, каб асьвятліць усе падрабязнасьці, таму пакіну спасылку на матэрыял для самастойнага вывучэньня.

Вось мы й наблізіліся да спаборніцтваў ШІ у шахматах і *Go*, перакладу тэкстаў, аналізу паказьнікаў кампаніяў, прагнозаў выдаткаў і прыбыткаў, пошуку заканамернасьцяў, навучаньня чалавека- і жывёлападобным паводзінам робатаў (хадзіць, бегаць, скакаць), стварэньня тэкстаў – як пісьменьнік, выяваў – як мастак, відэа – як рэжысэр. (Нешта ўдалося, нешта – не.) А калі ў лябараторыі час выдаткаваны і патэнцыял адчувальны, то наступным крокам мае быць манэтызацыя. Укараненьне й рэкляма тэхналёгіі, асьвятленьне, дасьледаваньні, наданьне сэрвэраў і плятформаў для дасьледаваньняў, наладаў і кампанэнтаў для правяраньня дасьледчых тэорыяў і экспэрымэнтаў, продаж згенэраваных выяваў і тэкстаў, інструмэнтаў, плятформаў і праграмаў з убудаванымі магчымасьцямі ШІ. Калі задумацца пра абсталяваньне, з гэтым усё складана ў хатніх умовах: патрэбныя воблачныя сховішчы, а з сэрвісамі генэрацыі тэкстаў і выяваў дасьледнік-пачатковец можа паспаборнічаць, ужываючы адкрыты выходны код. Дасьледнікі і буйныя кампаніі дзеляцца часткаю напрацаванага – магчыма, з мэтаю рэклямы, але прэтэнзіяў на распаўсюджвальны кантэнт не выстаўляюць, накладваюць абмежаваньні адно на ліцэнзійныя пагадненьні, што распаўсюджваюцца з гэтым кодам. Бяры, разьбірайся, рабі, але нават гэтак бывае складана ўдома дайсьці да роўню гігантаў, што беспасярэдне ўкладваюцца ў дасьледаваньне, каб атрымаць прыбытак дзень пры дні. Варта адзначыць, што дасьледніцкія працы, зьвязаныя з распрацаваньнямі ці новымі ідэямі ў будаваньні мадэлі заўтрашняга дня, могуць быць знойдзеныя на *archive.org*, дзе пры наяўнасьці ведаў у галіне можна азнаёміцца і ўзнавіць разьвязаньне самастойна.

Пачаўшы дасьледаваньне, тэхнічныя кампаніі, зацікаўленыя ў гэтай тэхналёгіі, стварылі новыя прадукты, тыя набралі абароты – і зья-

ASTRABIJALOHIJA

Звычайна, калі пачынаем казаць пра пазазямное жыццё, так ці інакш шмат якія разважанні скочваюцца ў канспіралагічныя тэорыі. Масавая культура прапанавала дастаткова ежы для разваг пра зялёных чалавечкаў, шматрукіх гуманоідаў і сутнасці, якія складаюцца толькі з энергіі. Але што пра гэта думае навука? Няма дакладных падставаў меркаваць, што жыццё ёсць на Марсе, Юпітэры або любым іншым нябесным целе, апроч Зямлі. Як і няма падставаў сцвярджаць адваротнае. А каб пачаць разбірацца ў гэтым пытанні, звернемся да астрабіялогіі.

АСТРАБІЯЛОГІЯ IS WHO?

Калі тэатр пачынаецца з вешалкі, то астрабіялогія пачынаецца з пытання „што наагул такое жыццё?". У 2003 годзе ў Модэне *(Modena)* адбыўся ўоркшоп, удзельнікі якога далі 78 паняткаў тэрміну „жыццё" з апісаннем фізічных, хімічных і біялагічных характарыстык. Яны апісалі тое, што можа залучаць у сябе жыццё, але не тое, чым яно ёсць.

Аднак гісторыя астрабіялогіі зарадзілася не ў пачатку XXI стагоддзя. Як асобная дысцыпліна яна аформілася ў сярэдзіне XX стагоддзя, у перыяд касмічнай гонкі ды развіцця інжынерыі авіяцыйнай і касмічнай тэхнікі. Глабальна астрабіялогія – на стыку астраноміі і біялогіі: выкарыстоўвае тэарэтычныя напрацоўванні ў галіне планеталогіі і астрафізікі разам з практычнымі падыходамі мікрабіялогіі, біяхіміі і экалогіі. Калі біялогія даследуе жыццё само па сабе, то астрабіялогія спрабуе зразумець, як узнікла жыццё і наколькі гэта ўнікальная для Сусвету з'ява.

„LIFE IS…"

Добра, дык што там з вызначэннямі? У гэтым выпадку ўсё пачынаецца з апісання ўнікальных асаблівасцяў жыцця. Але якія яны могуць быць? Можа, характэрная асаблівасць жыцця – вызваляць энергію? Агонь як тэрмахімічная рэакцыя таксама выпрацоўвае энергію, але не ёсць жыццём. Ці жыццё валодае дакладнаю малекулярнаю структураю? Аднак крышталі неарганічнай солі – напрыклад, спажыўной – таксама маюць дакладную структуру. Жыццё здольнае да росту, развіцця і ўмірання? Гэта так, але такія характарыстыкі ўласцівыя любой тэрмадынамічнай сістэме. А можа, унікальная рыса жыцця – узнаўляць сабе падобных? Далёка не кожны жывы арганізм пакідае пасля сябе патомства, гэта частка натуральнага адбору. Акрамя гэтага, існуюць бясплодныя гібрыды – мулы і лашакі. Ці перастаюць яны быць жывымі, калі не здольныя перадаць гены і ўзнаўляць патомства?

Зыходзячы з цэлага шэрагу такіх разважанняў, навукоўцы прыйшлі да высновы: пакуль варта пакінуць адкрытым гэтае пытанне. Паколькі дакладнага вызначэння няма, ад розных спецыялістаў можна пачуць розныя фармулёўкі. Аднак мы можам узяць за арыенцір тую, што прапанавала ў кастрычніку 1992 году Экзабіялагічная праграма *NASA:*

„Жыццё – гэта самападтрымная хімічная сістэма, здольная зазнаваць дарвінаўскую эвалюцыю"[1].

Гэтае вызначэнне бярэ за аснову дзве цэнтральныя характарыстыкі зямнога жыцця: гамеастаз і эвалюцыю. Гамеастаз характарызуе здольнасць арганізму падтрымваць стан нутраных сістэмаў для аптымальнага існавання. У той жа час эвалюцыя характарызуе генетычную зменлівасць, дзе выпадковыя змены ў ДНК прыводзяць да мутацыяў, што адсяваюць непажаданыя прыкметы і выхоўваюць карысныя адаптыўныя ўласцівасці віду. Так ці інакш, абедзвюма гэтымі характарыстыкамі валодаюць усе жывыя арганізмы на планеце.

ПЫТАННЕ ТЭРМАДЫНАМІКІ

Частка даследнікаў спадзяецца ў пытаннях вызначэння жыцця на тэрмадынаміку. У кнізе „Што такое жыццё?" Эрвін Шрэдынґер *(Erwin Schrödinger)* пісаў: „...[арганізм] імкнецца наблізіцца да небяспечнага стану максімальнай энтрапіі, які ўяўляе сабою смерць. Ён можа пазбегчы гэтага стану, гэта значыць, заставацца жывым, толькі ўвесь час здабываючы з наваколля яго адмоўную энтрапію…" У гэтым выпадку пад адмоўнай энтрапіяй маецца на ўвазе ежа – спарадкаваная стабільная форма энергіі, якую арганізм засвойвае з дапамогаю стрававання. Такі працэс харчавання характэрны эвалюцыйна прасунутым жывёлінам – гетэратрофам. У той жа час існуюць аўтатрофныя і аўтагетэратрофныя формы жыцця, здольныя вырабляць ежу самастойна, спажываючы з наваколля толькі неарганічныя кампаненты. Тыповыя прадстаўнікі аўтатрофаў – расліны, да аўтаге-

[1] *„Life is a self-sustained chemical system capable of undergoing Darwinian evolution".*

тэратрофаў адносяць найпрасцейшыя і прымітыўныя формы жывёлы, гэта пратысты, лішайнікі, брыханогія малюскі *Elysia chlorotica* і г. д.

Пры такім падыходзе ідэал спарадкаванае структуры з нізкай энтрапіяй – канвектыўнае вочка, дысіпатыўная структура, якая не ёсць жывым арганізмам. Акрамя таго, вызначэнне „адмоўнай энтрапіі" навукова не абгрунтаванае, таму гэты падыход у астрабіялогіі не сустракае шырокага падтрымання.

СТАТЫСТЫКА ЖЫЦЦЯ

У 1960-х гадах у Ґрын-Бэнку ў ЗША адбылася канферэнцыя, на якой прэзентавалі формулу. Яна пазней зробіцца вядомая як формула Сэйґана *(Carl Sagan)*, Ґрын-Бэнка або Дрэйка *(Frank Donald Drake)* і выглядае наступным чынам:

$$N = N^* \cdot f_p \cdot n_e \cdot f_i \cdot f_l \cdot f_c \cdot L \div T_g,$$

дзе

N – лік разумных цывілізацыяў,

N^* – лік зорак у нашай галактыцы,

f_p – доля сонцападобных зорак, якія валодаюць планетамі,

n_e – сярэдні лік нябесных целаў з прыдатнымі ўмовамі для зараджэння жыцця,

f_i – імавернасць узнікнення разумных формаў жыцця на планеце, на якой ёсць жыццё,

f_l – імавернасць зараджэння жыцця на планеце з прыдатнымі ўмовамі,

f_c - суадносіны планетаў з разумным развітым жыццём да ліку планетаў, на якіх ёсць разумнае жыццё,

L – час, на працягу якога разумнае жыццё існуе, можа ўступіць у кантакт і жадае гэтага,

T_g – час жыцця нашае галактыкі.

Гэтую формулу стварыў Фрэнк Дрэйк, але папулярызаваў яе Карл Сэйґан. Яна вызначае колькасць магчымых развітых пазазямных цывілізацыяў, з якімі чалавецтва здольнае ўступіць у кантакт. У свой час тэорыю ўспрынялі занадта аптымістычна, што дапамагло стварыць праграму *SETI* – спецыяльны праект пошуку пазазямнога розуму. Формула больш сімвалічнага характару, чымся практычнага. Зыходзячы з розных разлікаў, яна як пацвярджае ўнікальнасць зямнога жыцця, гэтак і адмаўляе яго.

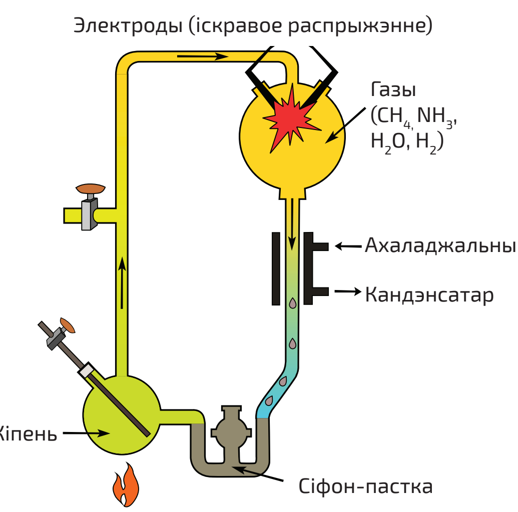
ПЫТАННЕ КРЫТЫКІ

Формула Дрэйка, як і канцэптуальны апарат жыцця, будуецца вакол антрапацэнтрычнага погляду на ўвесь прадмет астрабіялогіі. Магчыма, за нястачаю патрэбнай колькасці навуковых звестак мы недастаткова разумеем складана ўладкаванае жыццё. Гэтак, напрыклад, не ведаючы пра планетарную мадэль атама, людзі практычна не мелі ўяўлення аб працы шмат якіх хімічных і фізічных працэсаў.

Што цікава і лагічна, супрацьстаянне поглядаў прысутнічае і ў коле астрабіёлагаў. Гэтак, адна частка з іх найперш імкнецца знайсці жыццё па-за Зямлёй, другая імкнецца зразумець, як менавіта з'явілася жыццё на Зямлі. І яны маюць адказ. У нейкім родзе.

ПРЭБІЯТЫЧНАЯ ХІМІЯ

У 1953 годзе Стэнлі Мілер *(Stanley Miller)* і Гаральд Юры *(Harold Urey)* на аснове здагадкі Аляксандра Апарына і Джона Голдэйна *(John Haldane)* правялі эксперымент, у якім мадэляваліся ўмовы ранняе Зямлі з удзелам неарганікі і электрычнасці. Рэакцыя была здагадкай аб прэбіётыцы, гіпатэтычным этапе развіцця жыцця, калі яно магло з'явіцца з найпрасцейшай арганікі на ўжо сфармаванай планеце.



Рэакцыя Мілера – Юры

Рэакцыя Мілера – Юры будуецца на выкарыстанні метану і вуглякіслага газу, якія пад уздзеяннем іянізавальнага выпраменьвання і распрыжэнняў (або раз-

РЭЦЭПТ НА СЬНЯДАНАК

ЯСЬ БАРАДЗЕНЬ

Ідэя і аўтарства ілюстрацыі
Каця Першына

Прыведзены мной прыклад раўнаньня трэцяй ступені – адзін з стандартных і сустракаецца шмат дзе.

Доказ тэарэмы Бонэты я запазычыў з старонкі https://www.cut-the-knot.org/Curriculum /Geometry /Bottema.shtml (тамсама ёсьць рысунак, на якім пункт C можна рухаць і назіраць у дынаміцы, як працуе тэарэма). Доказ жа стандартны.

У наступных частках, калі яны зьявяцца, мы прыгледзімся да іншых лікавых сыстэм, падобных да камплексных лікаў. Нечакана акажацца, што апісваюць яны ня зыклую нам геамэтрыю, а геамэтрыю часапрасторы і маюць беспасярэдняе дачыненьне да кінэматыкі (ужо цяпер чытач можа падумаць, колькі розных лікавых сыстэм можна атрымаць, выбіраючы розныя значэньні i^2 і якія ўласьцівасьці гэтыя сыстэмы будуць мець). І апошняе: хто на фота ніжэй? Адказ – у наступным артыкуле аўтара.

радаў) маланкі маглі ствараць сінільную кіслю (або кісліну, кіслату), фармальдэгід і аміяк. Гэтыя кампаненты ў далейшым маглі па працэсе Штрэкера *(Strecker)* ўтвараць амінакіслі і розныя біяарганічныя малекулы тыпу цукроў і рыбозы.

Раней гэты эксперымент крытыкавалі праз ужыванне арганічных кампанентаў. Аднак пазней у адкрытым космасе былі знойдзеныя арганічныя малекулы. Пасля сфармавалася тэорыя, паводле якой найпрасцейшыя арганічныя малекулы і, магчыма, нават кампаненты амінакісляў маглі фармавацца ў планетэзімалым *(planetesimal)* дыску, прабацькy планеты. У гэтай рэакцыі дасюль застаюцца пытанні. Аднак сама па сабе яна сведчыць пра тое, што мы мала ведаем пра зараджэнне жыцця, і адкрывае перад намі даследчыя перспектывы.

ЗРАБІ МНЕ СІГНУ!

У астрабіялогіі ёсць эксперыментальная і тэарэтычная спадчына, але разам з тым – практычная сучаснасць. Цяпер астрабіёлагі разлічваюць на маркеры жыцця і экстрэмафільную мікрабіялогію. Першыя можна ўжыць як мернік для пошукаў развітога жыцця, а другую – для вывучэння адаптыўных магчымасцяў жыцця да розных умоваў. Атрымліваючы спадарожнікавыя здымкі Зямлі, даследнікі ствараюць адмысловыя біямаркеры – пазнакі, паводле якіх можна вызначыць выпраменьванне ў розных дыяпазонах. Ужыўшы гэтыя біямаркеры на розных экзапланетах, навукоўцы могуць адшукаць падобныя сігналы і выказаць здагадку, што на гэтых нябесных аб'ектах таксама ёсць развітое жыццё. У далейшым гэта дазволіць сканцэнтраваць увагу на гэтых планетах і, магчыма, адшукаць жыццё.

Цяжка сказаць, што чакае навуку. Ці сустрэнем мы найбліжэйшым часам прадстаўнікоў пазазямных цывілізацыяў і ці сустрэнем жыццё па-за Зямлёю наагул. Але адно можна сказаць пэўна: у космасе чалавецтва чакае шмат адкрыццяў, і астрабіялогія будзе адною з навук, што дапаможа разгадаць таямніцы Сусвету. А калі вам захацелася лепей азнаёміцца з гэтаю навукаю, я рэкамендую вывучыць кнігу *„Handbook of Astrobiology"* *Vera M. Kolb*, у ёй сканцэнтраваныя найбольш поўныя веды пра астрабіялогію за апошняе дзесяцігоддзе.

КРЫНІЦЫ:

1. G. Horneck, P. Rettberg. Complete Course in Astrobiology, 2007. ISBN: 978-3-527-40660-9
2. J. Seckbach, H. Stan-Lotter. Extremophiles as Astrobiological Models, 2021. ISBN: 978-1-119-59168-9
3. V. M. Kolb. Handbook of Astrobiology, 2017. ISBN: 9781138065123
4. Д. Кетлинг. Астробиология: очень краткое введение, 2013. ISBN: 978–0–19–958645–5

КАМПЛЕКСНЫЯ ЛІКІ І ГЕАМЭТРЫЯ

ЯЎГЕН ПЯТЛІЦКІ

ІДЭЯ І АЎТАРСТВА ІЛЮСТРАЦЫЯЎ
LETUCIENIE

значыць, што нейкі камплексны лік насамрэч рэчаісны? Возьмем лік $a + ib$, ён рэчаісны, калі $b = 0$, а гэта тое самае, што сказаць, што лік роўны свайму спалучанаму ліку. Лёгка паказаць, што спалучэньне сумы, рознасьці, дзелі і здабытку – сума, рознасьць, дзель і здабытак спалучэньня (чытач дакажа гэта сам, правёўшы адпаведныя простыя вылічэньні). Гэтак, маем умову

$$\frac{z - z_0}{u} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{\bar{u}}.$$

Памножыўшы і перанёсшы ўсё на адзін бок, атрымліваем

$$\bar{u}z - u\bar{z} + u\bar{z}_0 - \bar{u}z_0 = 0,$$

пазначыўшы $B = \bar{u}$, $C = u\bar{z}_0 - \bar{u}z_0$, атрымліваем раўнаньне простай у выглядзе

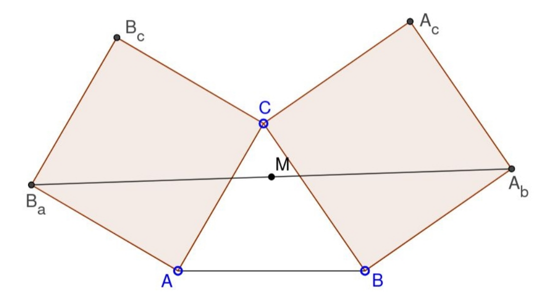
$$Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0,$$

дзе B – любы ненулявы камплексны лік, а C – чыста ўяўны лік (чаму так, чытач праверыць).

Аналягічным чынам можна вывесьці раўнаньне акружыны (чытач паспрабуе зрабіць гэта самастойна), якое мае выгляд

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0,$$

дзе B – любы камплексны лік, а A і C – чыста ўяўныя. Нарэшце, раю чытачу нарысаваць нашыя разважаньні пра простую і свае разважаньні пра акружыну. Важны складнік матэматыкі – бачыць геамэтрыю за формуламі. На заканчэньне гэтай часткі дакажам тэарэму Ботэмы (*Oene Bottema*).



Тэарэма Ботэмы

Тэарэма сьцьвярджае наступнае: няхай нам дадзеныя два пункты A і B, калі мы выберам любы пункт C з аднаго з бакоў ад простай AB і пабудуем звонку ад трыкутніка ABC квадраты на баках AC і BC, то сярэдзіна адцінку, які злучае вяршыні квадратаў, супрацьлеглыя пункту C, не залежыць ад таго, дзе пункт C выбраны (гэтую тэарэму можна сфармуляваць больш агульна, у кожным разе малюнак паказвае, што мы хочам давесьці лепей за слоўнае апісаньне). Дзеля доказу тэарэмы заўважым, што аварот на $90°$ супраць гадзіньнікавай стрэлкі – гэта множаньне на i, а супрацьлеглы аварот – множаньне на $-i$. Тады ў абазначэньнях з рысунку маем:

$$B_a = A + (C - A)i,$$

$$A_b = B + (C - B)(-i).$$

Пункт M знаходзім зусім проста:

$$M = \frac{B_a + A_b}{2} = \frac{B + A}{2} + i\frac{B - A}{2}.$$

Як і сьцьвярджае тэарэма, пункт M не залежыць ад пункту C (цяпер чытач можа паспрабаваць сфармуляваць тэарэму ў зьлёгку агульнейшым выглядзе, пазбавіўшыся патрабаваньня да пункту C і адпаведна вызначыўшы спосаб пабудовы квадратаў).

ЛІТАРАТУРА І ШТО ДАЛЕЙ

Мы кранулiся тэмы камплексных лікаў і іхнага выкарыстаньня ў геамэтрыі. Пра яе існуе шмат кніг.

З самімі камплекснымі лікамі можна пазнаёміцца ў любых уводзінах у камплексны аналіз (добры выбар – кніга Б. Шабата „Введение в комплексный анализ", калі чытач зробіць практыкаваньні да першага раздзелу, то даведаецца пра адну з наступных лікавых сыстэм, зь якімі мы будзем знаёміцца). Пытаньні геамэтрыі асьветленыя, напрыклад, у кнізе І. Яглома „Комплексные числа и их применение в геометрии". Наагул, магу з чыстым сумленьнем рэкамэндаваць любую кнігу Яглома – усе яны напісаныя зь любоўю і майстэрствам.

Клясычная кніга пра старажытную матэматыку, што захоўвае сваю актуальнасьць, – B.L. van der Waerden „Ontwakende wetenschap", перакладзеная на розныя мовы (я карыстаўся баўгарскім тэкстам Ван дер Варден „Пробуждаща се наука", які ў сваю чаргу перакладзены з расейскай, расейскі ж пераклад бярэ пад увагу тое, што было ў перакладах ангельскім і нямецкім, гісторыя выданьняў і перакладаў гэтай кнігі пра гісторыю сама вартая асобнага вывучэньня). Вартыя ўвагі і працы Ота Нойгебаўэра (*Otto Eduard Neugebauer*). З таго часу зьявілася нямала новай гістарычнай літаратуры, аднак, на жаль, я належу да той групы аўтараў, якія гісторыі ня ведаюць, таму ўстрымаюся ад далейшых парадаў.

сымэтрыямі. То бок якія пераўтварэньні пераводзяць разгляданыя намі аб'екты ў роўныя ім.

Для Эўклідавай (*Ευκλείδης*) геамэтрыі на плоскасьці сымэтрыі – гэта пераўтварэньні, якія захоўваюць адлегласьці паміж пунктамі. Як у нашым апісаньні вызначыць тыя адлегласьці? Вельмі проста: узяць модуль рознасьці адпаведных радыюс-вэктараў. Такім чынам, няхай мы маем два пункты $z = a + bi$ і $w = c + di$, адлегласьць паміж імі выглядае гэтак (абазначым яе $d(z, w)$):

$$d(z, w) = |z - w| = |a + bi - c - di| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2},$$

ізноў знаёмая нам тэарэма Пітагора.

Мы навучыліся выражаць з дапамогай апэрацыяў над камплекснымі лікамі тры тыпы пераўтварэньняў, што захоўваюць адлегласьць: **зрух** (дадаваньне камплекснага ліку), **аварот** (множаньне на лік модуля адзін) і **адбіцьцё адносна восі** OX (камплекснае спалучэньне). Аказваецца, іншых пераўтварэньняў, якія захоўваюць адлегласьці (то бок модулі рознасьцяў лікаў), няма. Гэта нескладана давесьці, але мы ня будзем. Няма ў тым сэнсе, што любое пераўтварэньне атрымліваецца як камбінацыя пералічаных.

Як напісана вышэй, уласьцівасьці, што маюць геамэтрычны сэнс, захоўваюцца такімі пераўтварэньнямі. На іх можна глядзець як на зьмену сыстэмы адліку, якую мы выкарыстоўваем. Гэтак, дадаючы да радыюс-вэктара кожнага пункту той самы вэктар, мы проста пераносім пачатак адліку ў іншы пункт. Паварочваючы кожны радыюс-вэктар на пэўны кут, мы насамрэч паварочваем сыстэму адліку ў супрацьлеглы бок. І гэтак далей. Геамэтрычнасьць уласьцівасьці азначае, што яна захоўваецца адносна гэтай зьмены сыстэмы каардынат. Запомнім тое слова – „адносна". Яно нам яшчэ спатрэбіцца.

Прывяду прыклад: трыкутнік застаецца трыкутнікам пры нашых пераўтварэньнях. Значыць „быць трыкутнікам" – геамэтрычная ўласьцівасьць, якую мы ў нашай геамэтрыі дасьледуем. Даўжыні бакоў захоўваюцца. Куты паміж бакамі трыкутніка таксама захоўваюцца, то бок і яны маюць геамэтрычны сэнс. А вось кут паміж зададзеным бокам трыкутніка і восьсю абцыс пры павароце сыстэмы каардынат зьменіцца. Значыць, ён не належыць да тых велічыняў, якімі мы цікавімся і лічым геамэтрычнымі. Геамэтрычная таксама: напрыклад, плошча і пэрымэтар фігуры. Можна сказаць прасьцей: уласьцівасьці трыкутніка не залежаць ад таго, у якім месцы на дошцы мы яго нарысуем і як павернем.

Натуральна, тое, што нас цікавіць у той ці іншай сытуацыі, залежыць ад сытуацыі. Напрыклад, мы маглі б дадаць да нашых пераўтварэньняў гаматэтыю, тады падобныя трыкутнікі сталіся б для нас аднолькавымі.

У нашым апісаньні геамэтрыі прысутнічае вызначаны пункт – пачатак каардынат, і вызначаныя кірункі – восі. Мы можам перайсьці да іншага – эквівалентнага – апісаньня, выкарыстаўшы пераўтварэньні, што захоўваюць адлегласьць (гэта зьвядзецца да пераносу пачатку адліку і павароту восей, магчыма, з адбіцьцём). Нашая геамэтрыя не залежыць ад выбару сыстэмы каардынат. Гэтак, маем пэўны прынцып адноснасьці, які больш удала было б назваць **прынцыпам інварыянтасьці**: геамэтрычныя ўласьцівасьці не залежаць ад таго, адносна якой сыстэмы каардынат мы іх разглядаем (то бок яны інварыянтныя).

Узброеныя новым інструмэнтам, паспрабуем апісаць простыя геамэтрычныя аб'екты і нават даказаць якую-небудзь тэарэму. Першае лягічнае пытаньне: як апісаць простую? Простую мы можам задаць досыць лёгка: узяць любы пункт на ёй, назавем яго z_0 (нагадаю: для нас пункты плоскасьці і камплексныя лікі – гэта тыя самыя аб'екты), і паралельны ёй вэктар, назавем яго u (нагадаю, вэктары для нас – гэта таксама камплексныя лікі). Тады любы пункт на простай будзе мець выгляд $z_0 + ru$, дзе r – рэчаісны лік. Ці можам мы запісаць гэта ў выглядзе раўнаньня? Давайце паспрабуем. Няхай будзе $z = z_0 + ru$, гэта азначае, што $ru = z - z_0$, то бок $r = \frac{z - z_0}{u}$. Усё амаль добра, але ж мы пакуль ня ўмеем дзяліць на камплексныя лікі! Давайце навучымся. Што азначае *падзяліць на лік* z? Гэта значыць памножыць на лік z^{-1} такі, што $zz^{-1} = 1$. Ці можам мы знайсьці такі лік? Лёгка:

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = 1,$$

то бок $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$. Уся магія ў тым, што $z\bar{z}$ – рэчаісны лік, а на рэчаісныя лікі дзяліць мы ўмеем (натуральна, мы разглядаем выпадак $z \neq 0$).

Вяртаемся да нашых пошукаў раўнаньня простай. Пункт z ляжыць на нашай простай, калі $\frac{z - z_0}{u}$ – рэчаісны лік. Кожны пункт простай знаходзіцца такім чынам. Але што

Першая частка папулярнага матэматычнага тэксту пра тры лікавыя сыстэмы ды іх сувязь з геамэтрыяй разьлічаная на школьнікаў старэйшых клясаў альбо дарослых, якія не забыліся, што ім расказвалі ў школе. Паколькі чытач можа быць не прызвычаены да матэматычных тэкстаў, адразу заўважу: каб дасягнуць прасьвятленьня, чытаць трэба з паперай і асадкаю пад рукою ды правяраць тое, пра што піша аўтар. Месцы ж, дзе аўтар сьцьвярджае, што нешта „лёгка паказаць", належыць трактаваць як практыкаваньні.

Тут, магчыма, будзе да месца барадатая показка пра Ліфшыца і Ландаў. Злыя языкі расказваюць, што аднойчы Ліфшыц па дарозе на працу забыўся ў трамваі стос – аркушаў на дваццаць – з вывадам для чарговага тому курсу тэарэтычнае фізікі. Прыйшоўшы да Ландаў, ён пачаў скардзіцца, што давядзецца доўга аднаўляць матэрыял – з тыдзень-два на тое пойдзе. А тэрміны падціскаюць. На што Ландаў сказаў: „Не перамайся, у гэтым месцы напішам «як лёгка заўважыць»".

Што да асобных гістарычных рэмарак аўтара, іх успрымайце як показку вышэй, то бок як показку.

СТАРАЖЫТНАСЬЦЬ

Адна з задачаў школьнай альгебры – разьвязаць квадратнае раўнаньне $ax^2 + bx + c = 0$. Зь ім – нават бяз нашай абстрактнай сыстэмы запісу – справіліся яшчэ старажытныя бабілёнцы. Яны ж умелі разьвязваць прынамсі некаторыя раўнаньні трэцяе ступені. Дакладны ровень іхнае матэматычнае навукі застаецца для нас таямніцаю з дзьвюх прычынаў: частковасьць зьвестак, што дайшлі да нас, і той факт, што людзі, якія разумеюць матэматыку, зь людзьмі, якія разумеюць акадзкую мову, амаль не перасякаюцца. Як пісаў Весялоўскі ў прадмове да кнігі Бартэла ван дэр Вардэна *(Bartel Leendert van der Waerden)* пра гісторыю матэматыкі (пераклад з баўгарскага выданьня мой): *„Аўтараў, якія пішуць пра гісторыю навукі, можна падзяліць на чатыры групы. Да першай належаць тыя, хто добра ведае сваю навуку, але ня мае дастатковых ведаў з гісторыі, да другой, – наадварот, тыя, хто добра ведае гісторыю, але ня ёсьць спэцыялістам у навуцы (да гэтае групы належаць амаль усе гісторыкі...). На жаль, асабліва вялікая група – гэта аўтары, якія ня ведаюць належным чынам ані гісторыі, ані навукі, а тых, хто добра ведае сваю навуку і цалкам разумее значэньне гістарычных умоваў, у якіх яна разьвівалася, – надта мала".*

Што да частковасьці наяўных зьвестак, трэба памятаць: гісторыя наагул і гісторыя навукі ў прыватнасьці выглядае як шэраг сьветлых плямаў у акіяне цемры. У прыватнасьці, мы маем значна больш арыгінальных пісьмовых крыніцаў, што апісваюць сівую даўніну шумэрскіх і акадзкіх часоў, чымся крыніцаў, якія расказвалі б нам пра ранньяе Сярэднявечча ў Эўропе.

Зьвязана гэта з матэрыялам, які ўжывалі для пісьма: нічога больш надзейнага для архіваў за керамічныя таблічкі чалавецтва пакуль што не прыдумала. Дзякуючы тым крыніцам мы маем пэўнае ўяўленьне пра пачаткі матэматыкі.

Гліняная таблічка | Аўтар – *Osama Shukir Muhammed Amin FRCP (Glasg)* | Крыніца: www.wikipedia.org

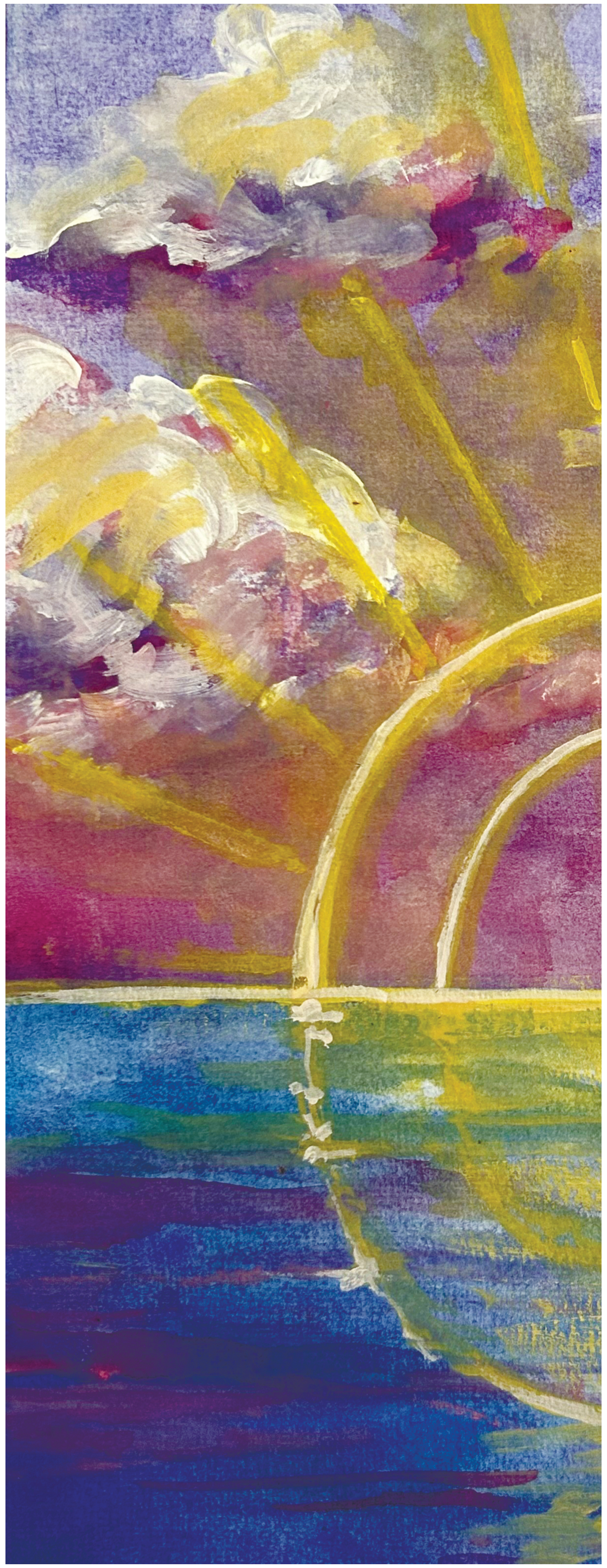
Насуперак распаўсюджанаму меркаваньню пра тое, што эгіпцяне мелі надта разьвітую матэматыку, якую ў іх запазычылі грэкі, зь вядомых нам крыніцаў вынікае: у Бабілёне ровень быў значна вышэйшы (хаця, магчыма, у нас проста замала эгіпэцкіх крыніцаў), і менавіта адтуль грэкі зачэрпнулі тое, што потым вырасла ў сучасную матэматыку. Пад словам „бабілёнцы" я маю на ўвазе (магчыма, не да канца карэктна) шумэраў і акадцаў. Шумэры першыя прыдумалі пісьмо і стварылі шмат рэчаў, якія пазьней леглі ў аснову нашае цывілізацыі (хаця акурат пісьмом мы карыстаемся ня іхным, а эгіпэцкім, у тым сэнсе, што нашыя літары – і кірыліца, і лацінка – узыходзяць да эгіпэцкіх герогліфаў). Шумэрскую культуру зьмяніла акадзкая. Прычым у выпадку акадзкае мовы мы ня толькі ў стане расшыфраваць сэнс напісанага, але нават прыкладна ведаем яе гучаньне. Шумэрская і акадзкая мовы вымерлі, не пакінуўшы моваў-нашчадкаў (у адрозьненьне ад эгіпэцкай, якая ўсё яшчэ жыве, пад імем копцкай). Практычнымі вымярэньнямі і разьлікамі шумэры пачалі займацца прыкладна за 4 тысячы гадоў да нашай эры. Для практычных патрэбаў яны распрацавалі шасьцідзесятковую сыстэму зьлічэньня і табліцы, якія дазвалялі выконваць арытмэтычныя апэрацыі над лікамі.

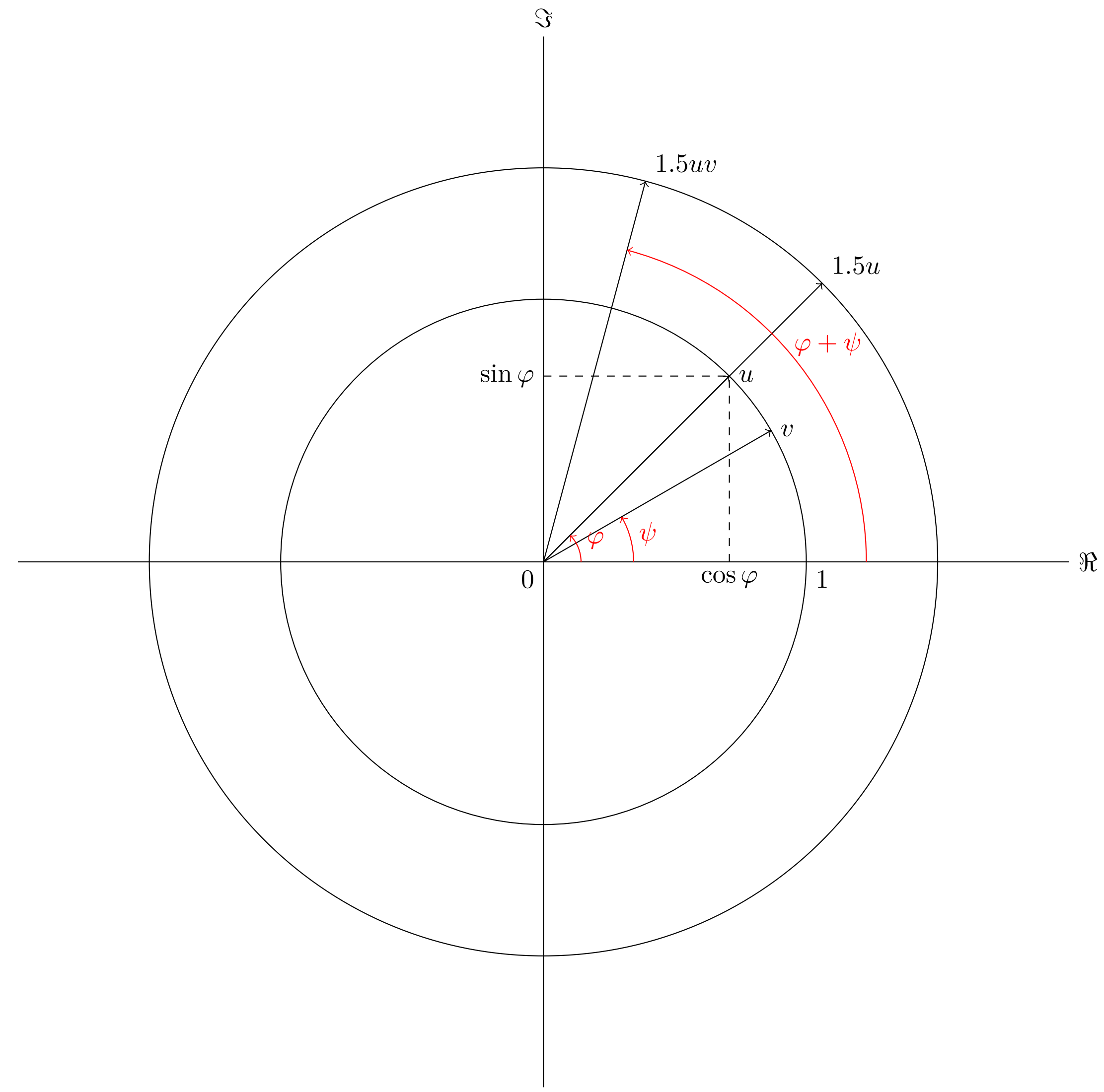
З практыкі вырасла ў тым ліку і патрэба разьвязваць раўнаньні. У прыватнасьці, для кубічных раўнаньняў бабілёнцы склалі табліцы, якія для лікаў выгляду $n^2(n + 1)$ дазвалялі знайсьці n. Гэтага дастаткова, каб знаходзіць набліжанае значэньне караня раўнаньня $ax^3 + bx^2 = c$ (чытач можа самастойна зрабіць патрэбныя пераўтварэньні альбо нават паспрабаваць скласьці адпаведныя табліцы).

Грэкі, якія перанялі матэматыку ад бабілёнцаў і, як здаецца, упершыню ў гісторыі пачалі даказваць матэматычныя сьцьверджаньні, на чым палягае сутнасьць гэтае навукі, цікавіліся найперш геамэтрыяй, разумеючы лікі таксама з геамэтрычнага пункту гледжаньня. Не ў апошнюю чаргу дзякуючы геамэтрычнаму разуменьню грэкі адкрылі ірацыянальныя лікі (дыяганаль квадрата не выражаецца рацыянальна праз яго бок).

Калі гаворка пра доказы, то грэкі першыя зразумелі неабходнасьць даводзіць „відавочнае". Хаця яны так і ня здолелі цалкам запоўніць прагалы ў аксіяматыцы геамэтрыі (гэта толькі ў XIX стагодзьдзі зрабіў нямецкі матэматык Морыц Паш – *Moritz Pasch*) і распрацаваць сыстэму лёгікі (што таксама ў XIX стагодзьдзі зрабіў нямецкі матэматык Ґотлёб Фрэґе (*Gottlob Frege*), аднак лёгіка, якая беспасярэдне фармалізавала спосаб разважаньняў матэматыка, – наагул прадукт 1930-х, яе стварыў Ґергард Ґенцэн (Gerhard Gentzen) – нямецкі матэматык, які загінуў у чэхаславацкім канцлягеры).

Як і бабілёнцы, грэкі ўмелі разьвязваць раўнаньні. Прычым, напрыклад, Дыяфант (Διόφαντος) займаўся праблемамі, разьвязаньня якіх ня ведае ня толькі сярэднестатыстычны школьнік, але і тыповы студэнт фізыка-матэматычнага кірунку.





Пры нагодзе не магу прайсьці міма сувязі трыганамэтрычных функцыяў і экспанэнты. Чытач, знаёмы з дыфэрэнцыйным зьлічэньнем (а знаёмства зь ім уваходзіць у школьную праграму), памятае, што

$$\sin' x = \cos x,$$
$$\cos' x = -\sin x,$$
$$(e^{ax})' = ae^{ax}.$$

Дапусьцім, нейкім спосабам мы вызначылі функцыю e^{ix} для рэчаісных x, тады

$$\left(e^{-ix}\right)' = -ie^{-ix},$$

што разам з прыведзенымі роўнасьцямі дае нам $\left(e^{-ix}(\cos x + i \sin x)\right)' = 0$, то бок функцыя ў дужках – канстанта. Яе значэньне ў нулі нам вядомае – гэта адзін. У выніку мы атрымліваем знакамітую формулу Ойлера (*Leonhard Euler*)

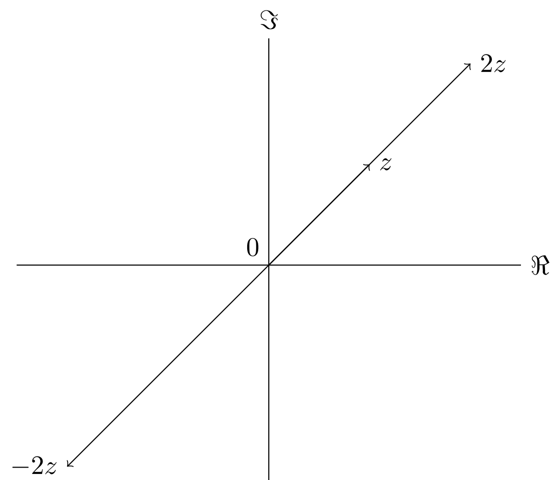
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

што ня толькі дае нам кароткі спосаб запісу камлексных лікаў модуля адзін, але і дазваляе выводзіць трыганамэтрычныя формулы з формул для экспанэнты.

Падсумуем: мы знайшлі лікавую сыстэму, у якой кожны пункт плоскасьці адпавядае дакладна аднаму ліку, і знайшлі геамэтрычную інтэрпрэтацыю альгебраічных дзеяньняў у гэтай лікавай сыстэме.

КРЫХУ ГЕАМЭТРЫІ

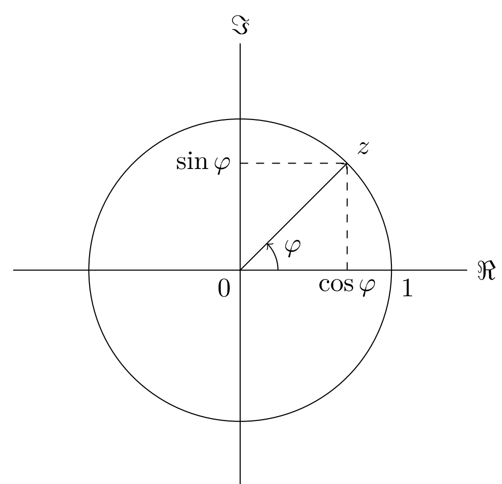
Аказваецца, любое геамэтрычнае пытаньне, датычнае плоскасьці, можна сфармуляваць на мове камплексных лікаў. Але што значыць „геамэтрычнае пытаньне"? Над гэтым шмат думаў Фэлікс Кляйн (*Felix Klein*). Заўважце, што гэта пытаньне другога парадку: матэматыкі вельмі любяць пераходзіць ад канкрэтных пытаньняў да пытаньняў пра пытаньні. І матэматык прыйшоў да высновы, што сутнасьць геамэтрыі – у тым, якія пераўтварэньні мы лічым ліку, а множаньне на адмоўны лік зводзіцца да адбіцьця адносна пачатку каардынат і расьцяжэньня.



Множаньне комплекснага ліку на рэчаісны

Прыгледзімся да наступнага частковага выпадку: множаньне на комплексны лік z такі, што $|z| = 1$. Для пачатку падумаем, што гэта за лікі? Чатыры мы можам назваць адразу: $1, -1, i$ і $-i$. Ці ёсьць яшчэ? Выпішам адпаведную ўмову ў выглядзе раўнаньня

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} = 1 \implies a^2+b^2 = 1.$$



Комплексныя лікі модуля адзін

Як выглядае мноства пунктаў на плоскасьці, для якіх сума квадратаў каардынат роўная адзінцы? Адказ мы ведаем з школы: гэта акружына радыюса адзін з цэнтрам у пачатку каардынат. Хто памятае трыганамэтрыю, згадае, што каардынаты пунктаў на адзінкавай акружыне выражаюцца з дапамогай сынуса і косынуса (прыйсьці да такой высновы мы маглі б, параўнаўшы раўнаньні $a^2+b^2=1$ і $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, запомнім гэты ход на будучыню, ён нам спатрэбіцца). Гэтак, камплексныя лікі, модуль якіх роўны адзінцы, маюць выгляд

$$\cos\varphi + i\sin\varphi,$$

дзе φ – кут паміж восьсю абцыс і адпаведным вэктарам.

Лёгка можна ўбачыць, што для любога ненулявога камплекснага ліку z ягоны модуль $|z|$ таксама ненулявы. Такім чынам, маем права падзяліць любы ненулявы камплексны лік $z = a+bi$ на яго модуль. У выніку атрымаем новы камплексны лік. Паглядзім, які будзе яго модуль (мы лічым квадрат модуля, бо так прасьцей, палічыць корань мы заўжды зможам пазьней, больш за тое, у некаторых разьдзелах матэматыкі ў якасьці падставовае велічыні разглядаюць менавіта квадрат нашага модуля і менавіта яго называюць модулем):

$$\left|\frac{z}{|z|}\right|^2 = \left|\frac{a+bi}{|z|}\right|^2 = \left|\frac{a}{|z|} + i\cdot\frac{b}{|z|}\right|^2 = \frac{a^2}{|z|^2} + \frac{b^2}{|z|^2} = \frac{a^2+b^2}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1.$$

Таму можам запісаць кожны ненулявы камплексны лік у выглядзе ru, дзе r – яго модуль, а u – камплексны лік з модулем роўным адзінцы. Гэта так званая **палярная форма камплекснага ліку**: r задае даўжыню адпаведнага вэктара, а u – яго кут адносна восі абцыс.

Цяпер мы гатовыя знайсьці геамэтрычны сэнс множаньня на лік модуля адзін. Няхай нам дадзены камплексны лік у палярнай форме $z = ru$ і камплексны лік модуля адзін v. З разважаньняў вышэй вынікае, што $u = \cos\varphi + i\sin\varphi$, а $v = \cos\psi + i\sin\psi$, дзе φ і ψ – куты паміж адпаведнымі вэктарамі і восьсю абцыс. Памятаючы элемэнтарныя трыганамэтрычныя формулы, лічым

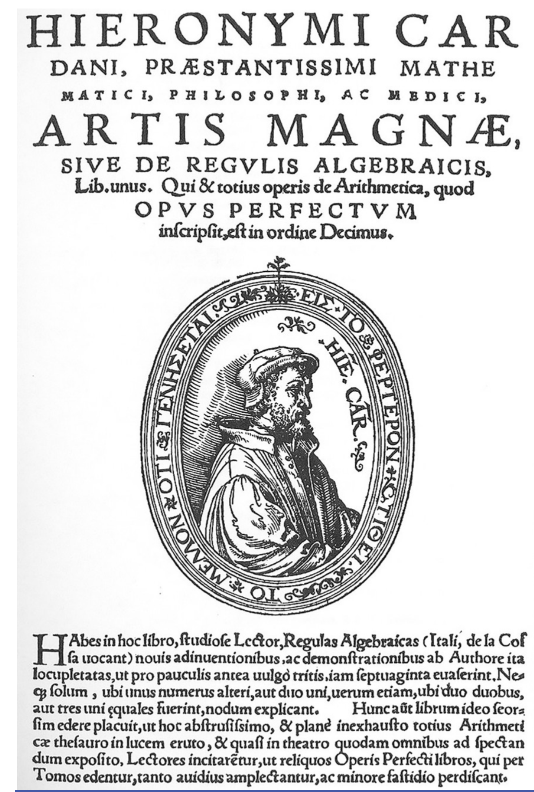
$$\begin{aligned} ruv &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \\ &r(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + \\ &i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) = \\ &r(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)). \end{aligned}$$

Гэтак, множаньне на лік модуля адзін паварочвае вэктар на адпаведны кут. Сумяшчаючы два разгледжаныя выпадкі, ведаем, што робіць множаньне на любы камплексны лік – паварочвае на адпаведны кут і расьцягвае адпаведна модулю.

Аднак Дыяфантавы раўнаньні – частка тэорыі лікаў, пра якую гэтым разам гаворкі ня будзе. Што цікава, ужо ў наш час выявілі вельмі глыбокую сувязь Дыяфантавых раўнаньняў з геамэтрыяй.

РАЎНАНЬНІ ТРЭЦЯЕ СТУПЕНІ

У агульным выглядзе, наколькі можна меркаваць, раўнаньні трэцяй і чацьвертай ступеняў упершыню разьвязалі італьянцаў ў XVI стагодзьдзі: Шыпіёнэ дэль Фэра, Нікалё Тартальля, Джэроляма Кардана і Лёдавіка Фэрары *(Scipione del Ferro, Niccolò Tartaglia, Gerolamo Cardano, Lodovico Ferrari)*. Гісторыя адкрыцьця цікавая і поўная драматызму, скандалаў ды канфліктаў вакол прыярытэту.

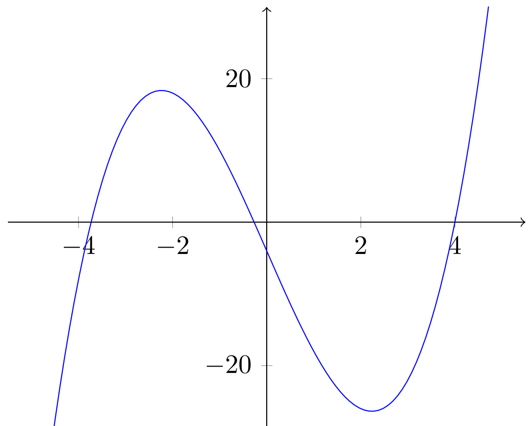

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HIE. CAR.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Вялікае мастацтва | Аўтар – *JCSantos*
Крыніца: www.wikipedia.org

І тут іх чакаў сюрпрыз, нават шок. Разгледзім, напрыклад, раўнаньне $x^3 = 15x + 4$. Будуючы графік функцыі $y = x^3 - 15x - 4$, можна лёгка пераканацца, што гэтае раўнаньне мае тры рэчаісныя карані (пытаньні чытачу: чаму раўнаньне трэцяе ступені з рэчаіснымі каэфіцыентамі заўжды мае хаця б адзін рэчаісны корань? Ці можа яно мець два рэчаісныя карані? Калі так, то ў якім сэнсе іх два? Як наагул належыць лічыць карані?). Аднак пры спробе выкарыстаць агульную формулу (знаную згаданым італійцам) мы сутыкаемся з пэўнымі цяжкасьцямі.



Тры рэчаісныя карані

Для раўнаньня $x^3 = px + q$ адно з разьвязаньняў дае простая для запамінаньня формула

$$x = \left(\frac{q}{2} - \sqrt{-\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

У якасьці практыкаваньня чытач паспрабуе вывесьці яе і ацаніць веліч італьянскае матэматыкі XVI стагодзьдзя.

Калі мы скарыстаемся з прыведзенай формулы для раўнаньня $x^3 - 15x - 4 = 0$, то знойдзем адказ:

$$x = (2 + 11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (2 - 11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}.$$

Перакладаць з італьянскае на беларускую сказанае Кардана, калі той убачыў падобнае, я, бадай што, ня стану (рэдакцыя не прапусьціць). Кожны, хто бачыў графік парабалы, разумее, што $\sqrt{-1}$ сярод рэчаісных лікаў знайсьці немагчыма. Аднак на хвіліну забудземся пра той графік і будзем апэраваць з $\sqrt{-1}$ фармальна. Пры такім падыходзе можна лёгка пераканацца, што маюць месца наступныя роўнасьці:

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

і

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

(чытач палічыць гэта карыстаючыся з школьнай альгебры ды памятаючы, што $(\sqrt{-1})^2 = -1$).

Маючы гэтыя роўнасьці, можам лёгка знайсьці

$$x = (2 + 11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (2 - 11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Рэчаісны корань, як мы і чакалі, гледзячы на графік функцыі! Гэтак, апэраваньне зь няісным лікам $\sqrt{-1}$ дае сэнсоўныя вынікі.

КАМПЛЕКСНЫЯ ЛІКІ

Прымірыцца з існаваньнем $\sqrt{-1}$ чалавецтву было нялёгка, але прасьцей як з адмоўнымі ці ірацыянальнымі лікамі. Досыць скора матэматыкі ўсьвядомілі карыснасьць такіх лікаў для народнае гаспадаркі, а Жан-Рабэр Арґан, Каспар Вэсэль і Карл Фрыдрых Ґаўс (*Jean-Robert Argand, Caspar Wessel, Carl Friedrich Gauß*) неўзабаве – на мяжы XVIII і XIX стагодзьдзяў – знайшлі для камплексных лікаў (так назвалі лікі формы $a + bi$, дзе a і b – рэчаісныя, а $i = \sqrt{-1}$) геамэтрычную інтэрпрэтацыю.

Як жа выглядае гэтая інтэрпрэтацыя? Як знаўцы графіку парабалы, мы ведаем, што на рэчаіснай восі месца для $\sqrt{-1}$ няма. Але што, калі выкарыстаць плоскасьць? Невыпадкова камплексныя лікі маюць форму $a + bi$ з рэчаіснымі a і b, кожнаму такому ліку мы можам паставіць у адпаведнасьць пункт з каардынатамі (a, b), скарыстаўшыся вынаходніцтвам вялікіх французаў – Рэнэ Дэкарта і П'ера дэ Фэрмы (*René Descartes, Pierre de Fermat*).

Далей я буду запісваць радыюс-вэктары ў выглядзе параў каардынат (a, b) і атаясамляць радыюс-вэктар з адпаведным пунктам.

Пару слоў пра тэрміналёгію. Лікі на гарызантальнай восі – восі абцыс – мы называем **рэчаіснымі**, гэта лікі формы a, нашыя старыя знаёмцы з школы. Лікі на вэртыкальнай восі – восі ардынат – мы называем **чыста ўяўнымі**, яны маюць постаць bi альбо ib (усё адно, зь якога боку пісаць i, нашае множаньне камутатыўнае). Нарэшце, лікі агульнай формы $a + ib$, як было сказана вышэй, называюць **камплекснымі** (менавіта з такім націскам, комплексны, як вядома, – абед у сталоўцы, а лік – камплексны).

Пры такой інтэрпрэтацыі дадаваньне лікаў зводзіцца да звычайнага дадаваньня адпаведных радыюс-вэктараў:

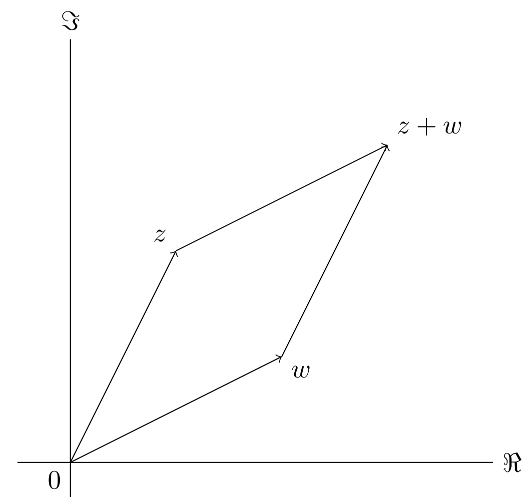
$$(a, b) + (c, d) = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i = (a + c, b + d),$$

а вось множаньне выглядае значна хітрэй:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ac - bd, ad + bc).$$

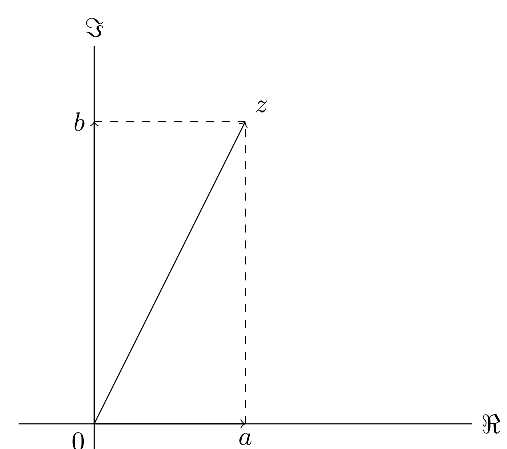
У разьліках вышэй мы памятаем, што

$$i^2 = -1.$$



Дадаваньне камплексных лікаў

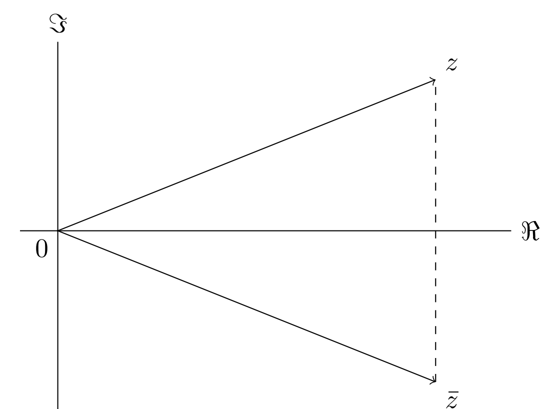
Ці можна знайсьці геамэтрычны сэнс апэрацыі множаньня камплексных лікаў? Выглядае яна, скажам шчыра, ня тое каб натхняльна. Для пошуку глыбіннага сэнсу мы можам скарыстацца старым добрым прыёмам: разгледзім частковыя выпадкі.



Модуль камплекснага ліку і тэарэма Пітагора

Але спачатку нам спатрэбяцца некалькі геамэтрычных характарыстык радыюс-вэктараў. Як мы ведаем з школы, даўжыня вэктара (a, b) роўная $\sqrt{a^2 + b^2}$ (тэарэма Пітагора, якая была вядомая задоўга да Пітагора (*Πυθαγόρας*): згодна з прынцыпам Арнольда матэматычны аб'ект заўжды называюць ня імем таго, хто яго адкрыў, прычым прынцып Арнольда самапрымяняльны). Даўжыня вэктара, які адпавядае ліку $z = a + bi$, называецца **модулем** гэтага ліку і пазначаецца $|z|$. Калі z – рэчаісны лік (то бок $b = 0$) мы атрымліваем звычайны модуль рэчаіснага ліку.

Уважліва паглядзеўшы на формулу множаньня камплексных лікаў, убачым, што $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Лік $a - bi$ называецца **спалучаным** да ліку $a + bi$. Геамэтрычны сэнс спалучэньня – адбіцьцё адносна восі абцыс (восі OX). Спалучэньне ліку пазначаецца рыскай над ім, напрыклад, калі $z = a + bi$, то $\bar{z} = a - bi$.



Спалучэньне камплекснага ліку

Цяпер, ведаючы, як выражаецца даўжыня вэктара, можам высьветліць геамэтрычны сэнс множаньня камплексных лікаў. Пачнем з простага выпадку: множаньня на рэчаісны лік. А менавіта, мы маем камплексны лік $a + bi$ і множым яго на рэчаісны лік r. Што адбудзецца з адпаведным вэктарам? Адказ можна адгадаць: даўжыня вэктара павялічыцца ў r разоў. Простыя разьлікі пацьвярджаюць здагадку:

$$r \cdot (a + bi) = ra + rbi,$$

даўжыню знойдзем з дапамогай тэарэмы Пітагора:

$$|ra + rbi| = \sqrt{r^2a^2 + r^2b^2} = r\sqrt{a^2 + b^2} = |r| \cdot |a + bi|.$$

Пры гэтым, калі $r < 0$, то вынік множаньня будзе скіраваны ў бок, процілеглы кірунку арыгінальнага вэктара. Такім чынам, множаньне на дадатны рэчаісны лік расьцягвае вэктар, які адпавядае камплекснаму