Final

I 叙述定理

1. Cauchy积分公式
2. 留数定理
3. Liouville定理
4. Rouche定理
5. Jensen公式

II

II.1

$a > 0$, 计算$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx$和$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx$.

II.2

已知,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+\tau)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)}.$$

计算

$$\sum_{m\geq 1,\ m\text{是奇数}} \frac{1}{m^2} \text{ 以及 } \sum_{\mathrm{m}\geq 1} \frac{1}{\mathrm{m}^2}.$$

II.3

记

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n}$$

为这种划分的生成函数。

证明, 当$x \to 1$且$0 < x < 1$时,

$$\log F(x) \sim \frac{\pi^2}{6(1-x)}.$$

III

证:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\pi.$$

IV

证:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}, \quad a>1.$$

V

$z^4-6z+3=0$在$1<|z|<2$上有多少根?

VI

f在$D_r\ (r=1)$上有界全纯, $f(0)\neq 0$. 设$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$为其零点, 且$|z_n|<1$.

证:

$$\sum_n (1-|z_n|)<\infty.$$

VII

a.

证:

$$\zeta(s)=\sum_{1\leq n<N} n^{-s}-\frac{N^{s-1}}{s-1}+\sum_{n\geq N}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx$$

对所有$\Re(s)>0$和$N>1$均成立.

b.

证:

当$t\to\infty$时,

$$|\zeta(1+it)|\leq C\log|t|,$$

上式中C为一常数.