# **Final**

# Ⅰ叙述定理

- 1. Cauchy积分公式
- 2. 留数定理
- 3. Liouville定理
- 4. Rouche定理
- 5. Jensen公式

#### П

#### **II.1**

a>0, 计算 $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bxdx$ 和 $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bxdx$ .

#### 11.2

己知,

$$\sum_{-\infty}^{\infty}rac{1}{\left(m+ au
ight)^{2}}=rac{\pi^{2}}{\sin^{2}(\pi au)}.$$

计算

$$\sum_{m\geq 1,\; m$$
  $\mathbb{L}_{ ilde{ heta}}} rac{1}{m^2} \; lackslash \; \sum_{m\geq 1} rac{1}{m^2}.$ 

#### **II.3**

记

$$F\left(x
ight) = \sum_{n=0}^{\infty} p\left(n
ight) x^{n} = \prod_{n=1}^{\infty} rac{1}{1 - x^{n}}$$

为这种划分的生成函数。

证明, 当 $x \rightarrow 1$ 且0 < x < 1时,

$$\log F\left( x
ight) \sim rac{\pi ^{2}}{6\left( 1-x
ight) }.$$

### Ш

证:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdots (2n)}\pi.$$

#### IV

证:

$$\int_0^{2\pi} rac{d heta}{\left(a + \cos heta
ight)^2} = rac{2\pi a}{\left(a^2 - 1
ight)^{3/2}}, \;\;\; a > 1.$$

### V

 $z^4 - 6z + 3 = 0$ 在1 < |z| < 2上有多少根?

#### VI

f在 $D_r$  (r=1)上有界全纯,  $f(0) \neq 0$ . 设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为其零点, 且 $|z_n| < 1$ .

证:

$$\sum_n \left(1-|z_n|\right) < \infty.$$

## VII

#### a.

证:

$$\zeta\left(s
ight) = \sum_{1 \leq n < N} n^{-s} - rac{N^{s-1}}{s-1} + \sum_{n \geq N} \int_{n}^{n+1} \left(rac{1}{n^{s}} - rac{1}{x^{s}}
ight) dx$$

对所有 $\Re(s) > 0$ 和N > 1均成立.

#### b.

证:

当 $t \to \infty$ 时,

$$|\zeta(1+it)| \leq C \log |t|,$$

上式中C为一常数.