เอกสารประกอบการสอน

วิชา 198 215

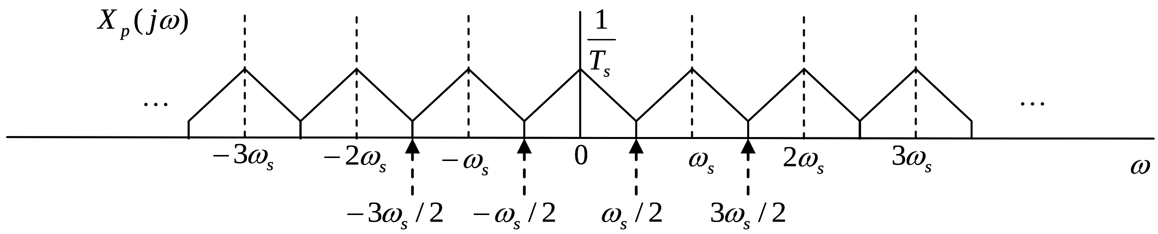
Circuits Signals and Systems

ภาคปลาย ปีการศึกษา 2556

ชุดที่ 5

เรื่อง การแปลงฟูเรียร์ และการประยุกต์ใช้งาน

The Fourier transform and its applications



อ.ดร.นวภัค เอื้ออนันต์

26 กุมภาพันธ์ 2557

การแปลงฟูเรียร้ และการประยุกต์ใช้งาน
The Fourier transform and its applications

เนื้อหาในบทที่ 3 - 4 ที่ผ่านมาเป็นเรื่อง Laplace transform และ Z-transform ซึ่งมักจะใช้ในการวิเคราะห์ระบบ LTI และโจทย์ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์และสมการเชิงผลต่าง โดยคำตอบที่ได้มักจะออกมาในรูปสัญญาณใน Time domain การวิเคราะห์โดยใช้ Laplace transform และ Z-transform สามารถบอกได้ว่าระบบมีเสถียรภาพหรือไม่ สามารถตอบสนองได้ทันต่อความต้องการหรือไม่ นอกจากนี้รูปแบบของ Transfer function ยังสามารถเพิ่มตำแหน่ง Pole และ Zero เพื่อควบคุมให้ระบบเป็นไปตามต้องการได้ง่าย จึงทำให้การแปลงทั้งสองนี้เป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสูงและนิยมใช้ในการออกแบบระบบควบคุมต่างๆ อย่างไรก็ตามในสาขาการสื่อสารแล้ว สิ่งที่วิศวกรสื่อสารต้องการนั้นมีความแตกต่างไปจากสิ่งที่วิศวกรควบคุมต้องการ เช่นในการกำหนดช่องสัญญาณต่างๆ วิศวกรสื่อสารจะจัดสรรช่องสัญญาณโดยการแบ่งย่านความถี่ของสัญญาณสื่อสารเป็นหลัก ในการนี้วิศวกรสื่อสารต้องการทราบในเรื่อง Bandwidth ของสัญญาณที่จะส่งไป และการตอบสนองเชิงความถี่ของระบบสื่อสาร เป็นต้น ซึ่งข้อมูลเหล่านี้ไม่อาจใช้ Laplace transform และ Z-transform วิเคราะห์ได้อย่างสะดวกนัก แต่มีการแปลงอย่างหนึ่งซึ่งสามารถนำมาใช้ได้เป็นอย่างดีและทำให้เกิดแนวคิดด้าน Frequency domain ขึ้นมา การแปลงที่ว่านี้ก็คือการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform)

การแปลงฟูเรียร์เป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสูงในการวิเคราะห์สัญญาณใน Frequency domain และมีสูตรสำหรับสัญญาณและระบบที่เป็น Continuous-time และ Discrete-time นอกจากนี้ยังมี Algorithm ในการคำนวณการแปลงฟูเรียร์แบบเร็ว (Fast Fourier transform) ซึ่งทำให้การนำคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ใช้ในการประมวลผลสัญญาณเชิงดิจิทัลใน Frequency domain เป็นไปได้อย่างสะดวกรวดเร็วและแพร่หลาย ดังนั้น<u>การแปลงฟูเรียร์จึงเป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับวิศวกรสื่อสารและผู้ที่ต้องทำงานที่เกี่ยวข้องกับสัญญาณต่างๆ</u>

ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับบทนี้

เนื้อหาในบทนี้เกี่ยวข้องกับสัญญาณ Complex exponential และจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งอาศัยพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในเรื่องต่อไปนี้ซึ่งนักศึกษาควรทำความคุ้นเคยกับสูตรเหล่านี้

1. Euler’s formula

Euler’s formula มีใจความดังนี้

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \text{และ} \quad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

ความสำคัญของ Euler formula อยู่ที่ว่า Euler formula มักใช้ในการแปลงไปมาระหว่าง Exponential form $e^{j\theta}$ กับ $\cos\theta$ และ $\sin\theta$

2. จำนวนเชิงซ้อน (Complex number)

จำนวนเชิงซ้อนมักนิยมเขียนในรูป Rectangular coordinate ดังนี้

$$x = a + jb$$

โดย a คือส่วนที่เป็นจำนวนจริง (Real part) และ b คือส่วนที่เป็นจำนวนจินตภาพ (Imaginary part) จำนวนเชิงซ้อนนี้อาจเขียนอีกรูปฟอร์มหนึ่งได้เป็น Polar coordinate

$$x = |x| e^{j\phi}$$

โดย $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$ คือ Magnitude ของ x และ $\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ คือ Phase ของ x และเมื่อใช้ Euler formula แทนลงไป จะได้ว่า

$$x = |x|\cos\phi + j|x|\sin\phi = a + jb$$

สำหรับ Operation ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้กับจำนวนจริงทุก Operation ก็สามารถนำมาใช้กับจำนวนเชิงซ้อนได้ และจำนวนเชิงซ้อนยังมี Operation พิเศษอีก 1 Operation เพิ่มเข้ามาคือ การทำ Conjugate โดยใช้สัญลักษณ์เป็นเครื่องหมาย * (เครื่องหมายนี้เป็น “ดอกจันทร์ที่เป็นตัวยก” ซึ่งแตกต่างจากเครื่องหมาย $*$ ตัวธรรมดาที่สำหรับใช้แทนการทำ Convolution) การทำ Conjugate มีนิยามว่าดังนี้ กำหนดให้

$$x = a + jb$$

จะได้ว่า Conjugate ของ x หรือ x^* เป็น

$$x^* = a - jb$$

การทำ Conjugate นี้ได้ใช้บ่อยในเรื่องการคำนวณหา Power หรือ Energy ของฟังก์ชันที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน เนื่องจากว่า

$$x \cdot x^* = (a + jb)\cdot(a - jb) = a^2 + b^2 = |x|^2$$

3. สัญญาณ Sinusoidal signal

สัญญาณ Continuous-time sinusoidal signal มีรูปแบบดังนี้

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

โดย $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ คือความถี่เชิงมุมโดย ω มีหน่วยเป็น Radian/second ในขณะที่ f คือความถี่ของสัญญาณ Continuous-time มีหน่วยเป็น Cycles/second และ T คือคาบ มีหน่วยเป็น Second ค่าที่เป็นไปได้ของ ω คือค่าจำนวนจริงในช่วง $(-\infty, \infty)$ โดยความถี่ที่แตกต่างกันจะให้กราฟ Sinusoidal ที่แตกต่างกัน ในกรณีที่สัญญาณเป็น Complex signal เราสามารถเขียนสัญญาณ Complex sinusoidal signal ในรูป $x(t) = Ae^{j(\omega t + \phi)} = A(\cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi))$ ซึ่งจะพบบ่อยในเนื้อหาของ Fourier transform

ในทำนองเดียวกัน สัญญาณ Discrete-time sinusoidal signal มีรูปแบบดังนี้

$$x(n) = A\cos(\Omega n + \phi)$$

โดย $\Omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{N}$ คือความถี่เชิงมุมโดย Ω มีหน่วยเป็น Radian/sample ในขณะที่ F คือความถี่ของสัญญาณ Discrete-time มีหน่วยเป็น Cycles/sample และ N คือคาบซึ่งเป็นเลขจำนวนเต็ม (เรื่องหน่วยของตัวแปรในบทนี้สำคัญมาก เพราะจะช่วยให้เราทราบถึงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณที่เป็น Continuous-time กับสัญญาณ Discrete-time ทั้งใน Time domain และ Frequency domain ซึ่งจะอยู่ในเรื่องทฤษฎีการชักตัวอย่าง (Sampling theorem))

มีข้อควรคำนึงอย่างหนึ่งเกี่ยวกับความถี่ Ω ของ Discrete-time signal คือ Ω ไม่ได้มีขอบเขตเหมือนกับความถี่ ω ของสัญญาณ Continuous-time ที่มีค่าเป็นจำนวนจริงในช่วง $(-\infty,\infty)$ เนื่องจากถ้าให้ Ω_1 และ Ω_2 เป็นความถี่ที่แตกต่างกันและให้ $\Omega_2 = \Omega_1 + 2\pi k$ และให้ $x_1(n) = A\cos(\Omega_1 n + \phi)$ และ $x_2(n) = A\cos(\Omega_2 n + \phi)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x_2(n) &= A\cos\big((\Omega_1 + 2\pi k)n + \phi\big) = A\cos\big(\Omega_1 n + 2\pi kn + \phi\big) \\ &= A\cos\big(\Omega_1 n + \phi\big) = x_1(n) \end{aligned}$$

ดังนั้นจะพบว่า $x_1(n) = x_2(n)$ โดยที่ $\Omega_1 \neq \Omega_2$ หมายความว่าความถี่ Ω_1 และ Ω_2 ที่แตกต่างกันเป็นจำนวนเต็มเท่าของ 2π จะให้สัญญาณ Sinusoidal ที่เหมือนกัน แยกกันไม่ออก ดังนั้นเพื่อป้องกันไม่ให้เกิดการใช้ความถี่ที่แตกต่างกันแต่ได้สัญญาณ Sinusoidal ที่เหมือนกัน จึงมีการจำกัดขอบเขตของตัวแปร Ω ให้อยู่ในช่วงระยะ 2π โดย Ω จะมี Fundamental range ในช่วง $[-\pi,\pi]$ Radian/sample

ในกรณีที่สัญญาณเป็น Complex signal สัญญาณ Complex sinusoidal signal สามารถเขียนในรูป $x(n) = Ae^{j(\Omega n+\phi)} = A\big(\cos(\Omega n + \phi) + j\sin(\Omega n + \phi)\big)$

สูตรต่างๆเหล่านี้นักศึกษาควรทำความคุ้นเคยเพื่อความสะดวกในการอ่านเนื้อหาต่อๆไป

4. หน่วยของตัวแปร

หน่วยของตัวแปรในบทนี้มีความสำคัญมาก ซึ่งสรุปได้ดังแสดงในตารางที่ 5.1 นี้

ตารางที่ 5.1 ตัวแปรใน Continuous-time และ Discrete-time domain

ตัวแปร	t	n	f	ω	F	Ω
หน่วย	Second	Sample	Cycle/sec	Radian/sec	Cycle/sample	Radian/sample
ความหมาย	Time	Time	Frequency	Angular frequency	Frequency	Angular frequency
ชนิด	Continuous	Discrete	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous
Range	$(-\infty,\infty)$	Integer $(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$	$[-0.5,0.5]$	$[-\pi,\pi]$

ที่มาของ Fourier transform

ที่มาของการแปลงฟูเรียร์ ใช้แนวคิดเรื่อง Eigen function เช่นเดียวกับที่มาของ Laplace transform และ Z-transform แนวคิดเรื่อง Eigen function นี้เป็นแนวคิดที่สำคัญมากแนวคิดหนึ่งในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งไม่ได้จำกัดเฉพาะการแปลงฟูเรียร์ การแปลงลาปลาซ และการแปลงแซดเท่านั้นแต่ยังสามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์เมตริกซ์ได้อีกด้วย

พิจารณา Output ของระบบ LTI ที่ได้จากสูตรสังวัตนการ

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

โดย $x(t)$ คือ Input และ $h(t)$ คือ Unit impulse response ของระบบ เมื่อแทน Input ด้วย Complex sinusoidal signal $e^{j\omega t}$ จะได้

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau$$

เนื่องจากการอินทีเกรตนั้นเป็นการอินทีเกรตเทียบกับตัวแปร τ ดังนั้นเราสามารถดึง $e^{j\omega t}$ ที่ไม่เกี่ยวข้องกับตัวแปร τ ออกไปนอกเครื่องหมายอินทีเกรตได้ จะได้

$$y(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \right) e^{j\omega t} \qquad (5.1)$$

จะสังเกตได้ว่า Output ในสมการที่ (5.1) อยู่ในรูปของค่า $\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right)$ คูณกับ Input $e^{j\omega t}$ ลักษณะนี้จะตรงกับนิยามของ Eigen function ที่ว่าถ้าให้ $T(\ )$ แทนระบบหนึ่ง และถ้าให้ Input เป็น $\phi(t)$ แล้วได้ Output เป็น

$$y(t) = T(\phi(t)) = k \cdot \phi(t)$$

จะได้ว่า $\phi(t)$ เป็น Eigen function ของ $T(\ )$ และ k เป็น Eigen value

ในกรณีนี้จะได้ว่า $e^{j\omega t}$ เป็น Eigen function ของระบบ Continuous-time LTI และได้ $\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right)$ เป็น Eigenvalue ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร ω สูตรนี้คือที่มาของสูตรการแปลงฟูเรียร์สำหรับสัญญาณต่อเนื่องเชิงเวลา (Continuous-time Fourier transform) หรือเรียกย่อว่า Fourier transform

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (5.2)$$

ในที่นี้จะเห็นว่าการแปลง Fourier transform มีสูตรคล้ายกับ Laplace transform มาก กล่าวคือ Laplace transform มีสูตรว่า

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

ดังนั้น จะเห็นว่าถ้าแทน s ด้วย $j\omega$ ลงในสูตรของ Laplace transform จะได้ Fourier transform กล่าวคือ

$$X(j\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega} \qquad (5.3)$$

ดังนั้นในหนังสือบางเล่มจึงเขียน Fourier transform ในรูปฟังก์ชันของตัวแปร $j\omega$ แทนที่จะเป็นตัวแปร ω เฉยๆ (ตรงนี้ นักศึกษาอย่าสับสน หนังสือบางเล่มจะใน $X(j\omega)$ แต่บางเล่มอาจจะใช้ $X(\omega)$ ในการแทน Fourier transform ซึ่งเป็นความหมายเดียวกัน) สำหรับตัวแปร ω คือตัวแปรความถี่สำหรับสัญญาณแบบ Continuous-time ซึ่งมีหน่วย Radian/second

ในกรณีของระบบ Discrete-time LTI นั้นสูตรสำหรับ Discrete-time Fourier transform มีที่มาคล้ายกับ Z-transform โดยเริ่มจากสูตร Convolution sum ดังนี้

พิจารณา Output ของระบบ Discrete-time LTI ที่ได้จากสูตรสังวัตนการ

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

โดย $x(n)$ คือ Input และ $h(n)$ คือ Unit impulse response ของระบบ เมื่อแทน Input ด้วยสัญญาณ Complex sinusoidal $e^{j\Omega n}$ จะได้

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\Omega(n-k)} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k}\right]e^{j\Omega n}$$

จะสังเกตได้ว่า Output อยู่ในรูปของค่า $\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k}\right)$ คูณกับ Input $e^{j\Omega n}$ ซึ่งตรงกับนิยามของ Eigen function คล้ายกับกรณีของ Fourier transform ในกรณีนี้จะได้ว่า $e^{j\Omega n}$ เป็น Eigen function ของระบบ Discrete-time LTI และได้ $\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k}\right)$ เป็น Eigen value ซึ่งจะเป็นฟังก์ชันของตัวแปร Ω สูตรนี้คือที่มาของสูตรการแปลงฟูเรียร์สำหรับสัญญาณไม่ต่อเนื่องเชิงเวลา (Discrete-time Fourier transform) หรือเรียกย่อว่า DTFT

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \qquad (5.4)$$

ในที่นี้จะเห็นว่าการแปลง DTFT มีสูตรคล้ายกับ Z-transform มาก กล่าวคือ Z-transform มีสูตรว่า

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

ดังนั้น จะเห็นว่าถ้าแทน z ด้วย $e^{j\Omega}$ ลงในสูตรของ Z-transform จะได้ Discrete time Fourier transform กล่าวคือ

$$X(e^{j\Omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} \qquad (5.5)$$

ดังนั้นในหนังสือบางเล่มจึงเขียน DTFT ในรูปฟังก์ชันของตัวแปร $e^{j\Omega}$ แทนที่จะเป็นตัวแปร Ω เฉยๆ (ตรงนี้ นักศึกษาอย่าสับสน หนังสือบางเล่มจะใช้ $X(e^{j\Omega})$ แต่บางเล่มอาจจะใช้ $X(\Omega)$ ในการแทน Discrete-time Fourier transform ซึ่งเป็นความหมายเดียวกัน) สำหรับตัวแปร Ω คือตัวแปรความถี่สำหรับสัญญาณแบบ Discrete-time ซึ่งมีหน่วย Radian/sample

มาถึงตรงนี้ นักศึกษาควรจะเข้าใจเนื้อหาต่อไปนี้

[ ] ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์

[ ] ที่มาของ Fourier transform และ DTFT

[ ] สัญลักษณ์และตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ ในกรณีของ Continuous-time และ Discrete-time

สำหรับเนื้อหาในบทนี้ สิ่งใหม่ที่มีเพิ่มเข้ามาคือแนวคิดเรื่อง Frequency domain ซึ่งเป็นมุมมองใหม่ที่เราใช้อธิบายสัญญาณและระบบในเชิงความถี่ แทนที่แต่เดิมที่เราคุ้นเคยคือการอธิบายสัญญาณและระบบใน Time domain แต่ในเรื่อง Frequency domain นี้ เราจะอธิบายสัญญาณและระบบในเชิงความถี่โดยใช้สูตรของ Fourier representation ชนิดต่างๆมาอธิบาย โดยถ้าแบ่งสัญญาณออกตามลักษณะความต่อเนื่องของตัวแปรเวลาและลักษณะความเป็น Periodic จะได้สัญญาณ 4 ชนิดดังนี้

1. Continuous-time periodic signal
2. Discrete-time periodic signal
3. Continuous-time non periodic signal
4. Discrete-time non periodic signal

สัญญาณเหล่านี้สามารถอธิบายในเชิงความถี่ได้ดังนี้

1. Fourier representation for continuous-time periodic signal

แนวคิดเรื่องของ Fourier transform และ Frequency domain มีจุดเริ่มต้นมาจากความคิดของนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ Joseph Fourier (ค.ศ. 1768-1830) ที่อยู่ในสมัยเดียวกับนโปเลียนมหาราช ที่มีความคิดว่าสัญญาณ Continuous-time ที่เป็น Periodic สามารถเขียนในรูปผลรวมของสัญญาณ Sinusoidal ที่มีความถี่เป็นความถี่หลัก (fundamental frequency) และฮาร์โมนิกของมัน (สัญญาณฮาร์โมนิกคือสัญญาณที่มีความถี่เป็นจำนวนเต็มเท่าของความถี่หลัก) กล่าวคือ

ถ้า $x(t)$ เป็น Periodic โดยมีคาบ (Period) เท่ากับ T กล่าวคือ

$$x(t) = x(t+T)$$

สัญญาณ $x(t)$ จะสามารถเขียนอธิบายในรูป

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t} \qquad (5.6)$$

โดย $e^{j\omega_0 t}$ คือสัญญาณ Continuous-time complex sinusoidal ที่ความถี่ Fundamental เท่ากับ $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ Radian/second และ $e^{jk\omega_0 t}$ คือสัญญาณ Continuous-time complex sinusoidal ที่ความถี่ฮาร์โมนิกที่ k และ $X(k)$ เรียกว่า สัมประสิทธิ์ของ Fourier series (Fourier series coefficient) ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก

$$\int_{t=-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{t=-T/2}^{T/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t} \right) e^{-jm\omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt \qquad (5.7)$$

พิจารณาเฉพาะพจน์ $\int_{t=-T/2}^{T/2} e^{j(k-m)\omega_0 t}dt$ เมื่อ $k=m$ จะพบว่า

$$\int_{t=-T/2}^{T/2} e^{j(k-m)\omega_0 t}dt = \int_{t=-T/2}^{T/2} e^{j(0)\omega_0 t}dt = \int_{t=-T/2}^{T/2} dt = T$$

และเมื่อ $k \neq m$ โดยให้ $p = k-m$ จะพบว่า

$$\int_{t=-T/2}^{T/2} e^{j(k-m)\omega_0 t}dt = \int_{t=-T/2}^{T/2} e^{jp\omega_0 t}dt = \int_{t=-T/2}^{T/2} e^{jp\frac{2\pi}{T}}dt = \frac{1}{j2\pi p/T} e^{jp\frac{2\pi}{T}t}\Big|_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{e^{jp\frac{2\pi}{T}T/2} - e^{-jp\frac{2\pi}{T}T/2}}{j2\pi p/T} = \frac{\left(e^{jp\pi} - e^{-jp\pi}\right)}{j2\pi p/T} = \frac{(1-1)}{j2\pi p/T} = 0$$

ดังนั้นในสมการที่ 5.7 พจน์ของฮาร์โมนิกต่างๆที่ $k \neq m$ จะหายไปหมด ส่วนพจน์ที่ m จะเหลือเพียงพจน์เดียว ดังนั้นจะได้

$$\int_{t=-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)\int_{-T/2}^{T/2} e^{j(k-m)\omega_0 t}dt = T \cdot X(m)$$

ดังนั้นจะได้
$$X(m) = \frac{1}{T}\int_{t=-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt$$

ซึ่งกลายมาเป็นสูตรคำนวณ Fourier series coefficient:

$$X(k) = \frac{1}{T}\int_{t=-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad (5.8)$$

พร้อมกันนี้ จะได้

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t} \qquad (5.6)$$

สูตรที่ 5.8 เรียกว่า Analysis formula สำหรับ Fourier series เนื่องจากใช้สำหรับวิเคราะห์ Frequency component ของสัญญาณ $x(t)$ และสูตรที่ 5.6 เรียกว่า Synthesis formula สำหรับ Fourier series เนื่องจากสูตรนี้ใช้ในการสร้างสัญญาณ $x(t)$ มีข้อสังเกตว่า $X(k)$ มี Index k เป็นเลขจำนวนเต็มและมีขอบเขตตั้งแต่ $k=-\infty$ ถึง $k=\infty$ เมื่อนำ $X(k)$ ไป plot เป็นกราฟเทียบกับตัวแปร k จะได้กราฟแบบไม่ต่อเนื่อง

<u>หมายเหตุ:</u> ในสูตรที่ 5.8 นี้ ขอบเขตการอินทีเกรตจะอยู่ระหว่าง $t=-T/2$ ถึง $t=T/2$ แต่ในความจริงเราสามารถเปลี่ยนขอบเขตการอินทีเกรตให้อยู่ภายใน 1 คาบก็ได้ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เท่ากัน เช่น ถ้ากำหนดให้ขอบเขตของการอินทีเกรตเป็น $t=0$ ถึง $t=T$ จะได้สูตร

$$X(k) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad (5.8b)$$

ทั้งนี้การเลือกใช้สูตร 5.8 หรือ 5.8b ขึ้นอยู่กับความเหมาะสม บางสัญญาณอาจคำนวณโดยใช้สูตร 5.8 ได้ง่าย บางสัญญาณอาจจะเหมาะกับสูตร 5.8b โดยทั่วไปสูตรการคำนวณ Fourier series coefficient จะเป็น

$$X(k)=\frac{1}{T}\int_{T}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad (5.8c)$$

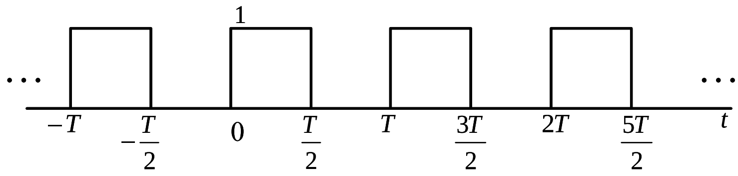
โดย $\int_{T}$ หมายถึงการอินทีเกรตในช่วง 1 คาบของสัญญาณ

อย่างไรก็ตาม การคำนวณหาค่า $X(k)$ ตามสมการที่ 5.8 นั้นไม่ใช่ว่าจะใช้ได้กับสัญญาณ Continuous-time periodic ทุกสัญญาณ สัญญาณที่สามารถหาค่า Fourier series coefficient ได้จะต้องมีคุณสมบัติตาม Dirichlet condition ดังนี้

1. $x(t)$ ต้องมีค่าภายในขอบเขตที่จำกัด (Bounded)
2. $x(t)$ ต้องมีจำนวนจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดภายใน 1 คาบเป็นจำนวนจำกัด
3. $x(t)$ ต้องมีจำนวนจุดที่ไม่ต่อเนื่องภายใน 1 คาบเป็นจำนวนจำกัด

ในการตีความหมายของ Fourier series นั้นค่า $|X(k)|$ ที่คำนวณได้ จะหมายถึง ขนาด (Magnitude) ของสัญญาณ $e^{jk\omega_0 t}$ ดังนั้น Fourier series บอกให้ทราบว่าสัญญาณ $x(t)$ ประกอบด้วยสัญญาณ Sinusoidal ที่ความถี่เท่าใดและเป็นขนาดเท่าใดบ้าง เราจึงกล่าวได้ว่า $X(k)$ เป็น Frequency domain representation ของ $x(t)$ แนวคิดนี้เองเป็นที่มาของการวิเคาะห์สัญญาณใน Frequency domain ซึ่งในภายหลัง หลักการของ Fourier series ได้พัฒนาต่อไปเป็น Fourier transformation สำหรับใช้กับสัญญาณทั่วไป

<u>ตัวอย่างที่ 5.1</u> จงหา Fourier series coefficients สำหรับสัญญาณ Square pulse ต่อไปนี้

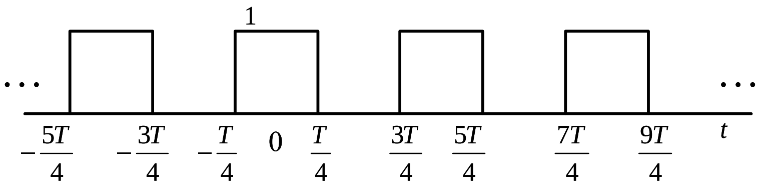


<u>วิธีทำ</u> ใช้สูตร Fourier series จะได้

$$X(k)=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T/2}1\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt==\frac{1}{T}\cdot\frac{T}{-j2\pi k}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\Big|_{0}^{T/2}$$

$$=\frac{1-e^{-j\pi k}}{j2\pi k}=\frac{e^{-j\frac{\pi k}{2}}}{\pi k}\left(\frac{e^{j\frac{\pi k}{2}}-e^{-j\frac{\pi k}{2}}}{j2}\right)=e^{-j\frac{\pi k}{2}}\left(\frac{1}{\pi k}\right)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$ <u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่างที่ 5.2</u> จงหา Fourier series coefficients สำหรับสัญญาณ Square pulse ต่อไปนี้



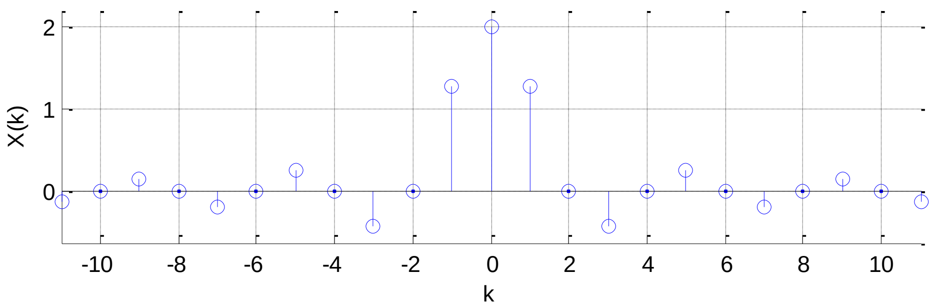
<u>วิธีทำ</u> ตัวอย่างในข้อนี้แตกต่างจากข้อที่แล้วตรงที่จุดเริ่มต้นของลูกคลื่น โดยลูกคลื่นของสัญญาณในข้อนี้เริ่มต้นที่ $t = -\frac{T}{4}$ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการ

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T}{4} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

เลือกใช้สูตร 5.8b จะได้

$$X(k) = \frac{1}{T}\int_{t=-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{t=-T/4}^{T/4} 1\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{-j2\pi k}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\Big|_{-T/4}^{T/4} = \left(\frac{e^{j\frac{\pi k}{2}} - e^{-j\frac{\pi k}{2}}}{j2\pi k}\right) = \left(\frac{1}{\pi k}\right)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$ <u>ตอบ</u>



รูปที่ 5.1 กราฟแสดง Fourier series coefficients ของสัญญาณในตัวอย่าง 5.2

2. Fourier representation for discrete-time periodic signal

ในกรณีของสัญญาณ Discrete-time periodic เราสามารถอธิบายสัญญาณในรูปที่คล้ายกับ Fourier series ของสัญญาณ Continuous-time periodic ได้เช่นกัน แต่สมการที่ได้จะมีลักษณะที่มาแตกต่างกัน เพื่อให้ไม่ซ้ำกับ Fourier series เราจึงใช้ชื่อ Discrete-time Fourier series (DTFS) สำหรับสัญญาณแบบ Discrete-time periodic ที่มาของสูตร DTFS เป็นดังนี้

ถ้า $x(n)$ เป็นสัญญาณแบบ Discrete-time periodic โดยมีคาบ (Period) เท่ากับ N กล่าวคือ

$$x(n) = x(n+N)$$

สัญญาณ $x(n)$ สามารถเขียนอธิบายในรูป

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk\Omega_0 n} \qquad (5.9)$$

โดย $e^{j\Omega_0 n}$ คือสัญญาณ Discrete-time complex sinusoidal ที่ความถี่ Fundamental frequency $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ Radian/sample และ $e^{jk\Omega_0 n}$ คือสัญญาณ Discrete-time complex sinusoidal ที่ความถี่ฮาร์โมนิกที่ k

ในสมการที่ 5.9 จะพบว่า index k เป็นเลขจำนวนเต็มและมีขอบเขตตั้งแต่ $k=0$ ถึง $k=N-1$ ซึ่งผิดกับค่า k ของ Fourier series ที่มีขอบเขตตั้งแต่ $k=-\infty$ ถึง $k=\infty$ ทั้งนี้เนื่องมาจากว่าสัญญาณ Complex sinusoidal $e^{jk\Omega_0 n}$ มีค่าเท่ากับสัญญาณ $e^{j(k+N)\Omega_0 n}$ ซึ่งพิสูจน์ได้จาก

$$e^{j(k+N)\Omega_0 n}=e^{j(k+N)\cdot\frac{2\pi}{N}n}=e^{jk\frac{2\pi}{N}n}e^{jN\frac{2\pi}{N}n}=e^{jk\frac{2\pi}{N}n}e^{j2\pi n}=e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=e^{jk\Omega_0 n}$$

ดังนั้นจำนวน Frequency component ของ DTFS ในสมการ 5.9 จึงจำกัดที่ $k=0,\ldots,N-1$ เท่านั้น

จากสมการที่ 5.9 $X(k)$ สามารถคำนวณได้จาก

$$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jm\Omega_0 n}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{jk\Omega_0 n}e^{-jm\Omega_0 n}=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(k-m)\Omega_0 n} \qquad (5.10)$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะพจน์ $\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(k-m)\Omega_0 n}$ จะพบว่าเมื่อให้ $k=m$ จะได้

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(k-m)\Omega_0 n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(0)\Omega_0 n}=\sum_{n=0}^{N-1}1=N$$

และเมื่อให้ $k\neq m$ โดยให้ $p=k-m$ จะพบว่า

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(k-m)\Omega_0 n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{jp\Omega_0 n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{jp\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1-e^{jp\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{jp\frac{2\pi}{N}}}=\frac{1-e^{j2\pi p}}{1-e^{jp\frac{2\pi}{N}}}=\frac{1-1}{1-e^{jp\frac{2\pi}{N}}}=0$$

ดังนั้นในสมการที่ 5.10 พจน์ของฮาร์โมนิกต่างๆที่ $k\neq m$ จะหายไปหมด ส่วนพจน์ที่ m จะเหลือเพียงพจน์เดียว ดังนั้นจะได้

$$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jm\Omega_0 n}=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(k-m)\Omega_0 n}=NX(m)$$

ดังนั้น $X(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jm\Omega_0 n}$ ซึ่งกลายมาเป็นสูตรคำนวณ Discrete-time Fourier series coefficient:

$$X(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}, \qquad k=0,\ldots,N-1 \qquad (5.11)$$

พร้อมกันนี้จะได้

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{jk\Omega_0 n}, \qquad n=0,\ldots,N-1 \qquad (5.9)$$

โดย $\Omega_0=\frac{2\pi}{N}$

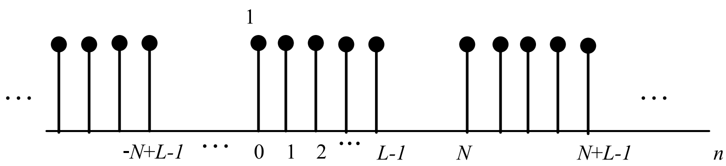
สูตรที่ 5.11 เรียกว่า Analysis formula สำหรับ DTFS เนื่องจากใช้สำหรับวิเคราะห์ Frequency component ของสัญญาณ $x(n)$ ดังนั้น $X(k)$ ก็คือ Frequency domain representation ของ $x(n)$ นั่นเอง ส่วนสูตรที่ 5.9 เรียกว่า Synthesis formula สำหรับ DTFS เนื่องจากสูตรนี้ใช้ในการสร้างสัญญาณ $x(n)$

ค่า Index n ของ summation ในสมการที่ 5.11 มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง $N-1$ แต่เราสามารถเปลี่ยนแปลงขอบเขตนี้ได้โดยให้เป็นการ Summation ภายใน 1 คาบของ $x(n)$ ก็จะให้ผลเท่ากัน มีข้อสังเกตว่า

$$X(k+N)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j(k+N)\Omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}e^{-jN\frac{2\pi}{N}n}$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}e^{-j2\pi n}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=X(k)$$

ซึ่งจะได้ว่า $X(k)=X(k+N)$ นั่นหมายความว่า $X(k)$ เป็น Periodic และมี Period เท่ากับ N ซึ่งสรุปได้ว่าทั้ง $x(n)$ และ $X(k)$ เป็น Discrete และ Periodic โดยมี Period เท่ากับ N

<u>ตัวอย่าง 5.3</u> จงคำนวณ Discrete-time Fourier series coefficients ของสัญญาณต่อไปนี้



<u>วิธีทำ</u> สัญญาณนี้เป็นสัญญาณ Periodic มี Period เท่ากับ N ใน 1 คาบ สัญญาณนี้สามารถเขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$x(n)=\begin{cases}1 & \text{for} \quad n=0,1,\ldots,L-1\\ 0 & \text{for} \quad n=L,\ldots,N-1\end{cases}$$

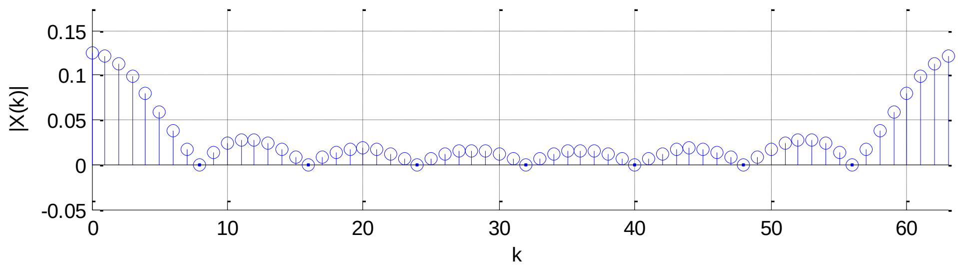
ใช้สูตร DTFS ใน (5.11) โดย $\Omega_0=\frac{2\pi}{N}$ ได้

$$X(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1}1\cdot e^{-jk\frac{2\pi n}{N}}$$

ใช้สูตรอนุกรมเรขาคณิต จะได้

$$X(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1}e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}\left(\frac{1-e^{-jk\frac{2\pi L}{N}}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}\right)=\frac{1}{N}\cdot\frac{e^{-j\frac{k\pi L}{N}}}{e^{-j\frac{k\pi}{N}}}\cdot\left(\frac{e^{j\frac{k\pi L}{N}}-e^{-j\frac{k\pi L}{N}}}{e^{jk\frac{\pi}{N}}-e^{-jk\frac{\pi}{N}}}\right)=\frac{e^{-j\frac{k\pi(L-1)}{N}}}{N}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{k\pi L}{N}\right)}{\sin\left(k\frac{\pi}{N}\right)}\right)$$

<u>ตอบ</u>



รูปที่ 5.2 กราฟแสดงค่า Magnitude ของ Discrete-time Fourier series coefficients ของสัญญาณในตัวอย่างข้อ 5.3 โดยมี $N=64$ และ $L=8$

3. Fourier representation for continuous-time non periodic signal

ในกรณีที่ $x(t)$ เป็นสัญญาณ Continuous-time non periodic การวิเคราะห์สัญญาณในเชิงความถี่ (Frequency domain analysis) ไม่สามารถทำได้โดยใช้ Fourier series เนื่องจากสัญญาณ Continuous-time non periodic เป็นสัญญาณที่ไม่สามารถหาคาบได้ หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นสัญญาณที่มีคาบยาวเป็นอนันต์ ในกรณีนี้จะต้องใช้ Fourier transform ในสมการ 5.2 แทน กล่าวคือ

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (5.2)$$

โดย ตัวแปร ω คือตัวแปรความถี่เชิงมุม ซึ่งเป็นตัวแปรที่ต่อเนื่อง (Continuous variable) และมีหน่วยเป็น Radian/second สำหรับสูตรของ Inverse Fourier transform เป็นดังนี้

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (5.12)$$

สำหรับที่มาของ Fourier transform และ Inverse Fourier transform จะไม่ขอกล่าวในที่นี้

สูตรที่ 5.2 เรียกว่าว่า Analysis formula สำหรับ Fourier transform เนื่องจากใช้สำหรับวิเคราะห์ Frequency ของสัญญาณ $x(t)$ และเรียก $X(j\omega)$ ว่าเป็น Frequency domain representation ของ $x(t)$ ส่วนสูตรที่ 5.12 เป็นสูตร Synthesis formula สำหรับ Fourier transform เนื่องจากสูตรนี้ใช้ในการสร้างสัญญาณ $x(t)$ สูตร Fourier transform นี้สำคัญมากเพราะเป็นสูตรที่ใช้ได้กับสัญญาณทั่วไปโดยไม่จำกัดว่าต้องเป็นสัญญาณแบบ Periodic เท่านั้น อย่างไรก็ตามไม่ใช่ว่าทุกสัญญาณที่เป็น Continuous-time nonperiodic จะสามารถหา Fourier transform ได้ สัญญาณที่จะสามารถหา Fourier transform ได้จะต้องมีคุณสมบัติตาม Dirichlet condition สำหรับกรณีสัญญาณเป็น Continuous-time non periodic ดังนี้

1. $x(t)$ ต้องเป็น Absolute integrable $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt < \infty$
2. $x(t)$ ต้องมีจำนวนจุดสูงสุด จุดต่ำสุด และจุดที่ไม่ต่อเนื่องภายในช่วงเวลาที่จำกัด เป็นจำนวนจำกัด
3. ความไม่ต่อเนื่องภายใน $x(t)$ (ถ้ามี) ต้องมีขนาดจำกัด

<u>ตัวอย่างที่ 5.4</u> จงหา Fourier transform สำหรับ $\delta(t)$

<u>วิธีทำ</u> $\delta(t)$ มีนิยามว่า $\delta(t) = 0$ เมื่อ $t \neq 0$ และ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1$

นอกจากนี้ $\delta(t)$ ยังมีคุณสมบัติการกรอง (Sifting property) : $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)x(t)dt = x(t_0)$

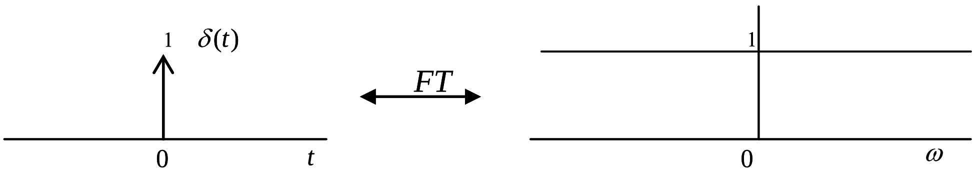
ดังนั้นเมื่อคำนวณ Fourier transform ของ $\delta(t)$ จะได้

$$FT\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt = e^0 = 1$$

ดังนั้นจะได้ว่า

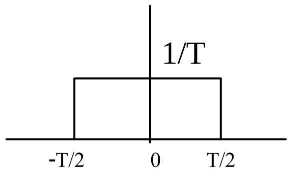
$$\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า $\delta(t)$ ประกอบด้วยความถี่ทุกความถี่เท่าๆกัน (มีขนาดเท่ากับ 1 ทั้งหมด)



รูปที่ 5.3 $\delta(t)$ และ Fourier transform ของ $\delta(t)$ ในตัวอย่างที่ 5.4

<u>ตัวอย่างที่ 5.5</u> จงหา Fourier transform สำหรับ $x(t)$ ต่อไปนี้



<u>วิธีทำ</u> สัญญาณนี้เป็นสัญญาณ Non periodic สามารถเขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

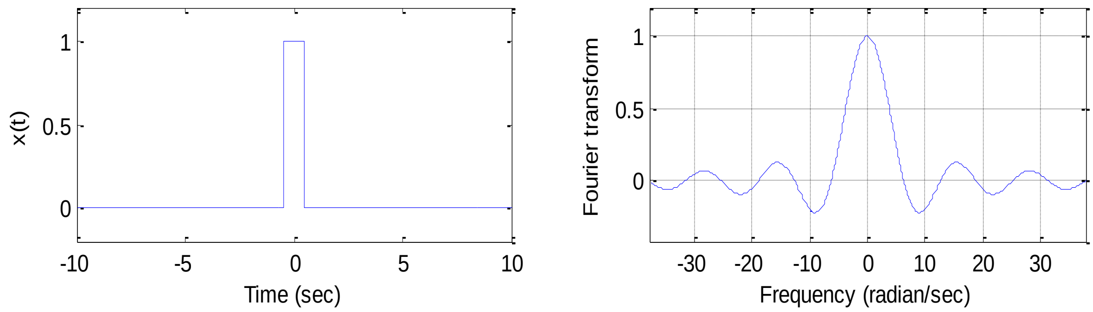
$$x(t) = \begin{cases} 1/T & \text{for } -T/2 \le t \le T/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ใช้สูตร Fourier Transform จะได้

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{1}{T}\right) \cdot e^{-j\omega t}dt = \left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega T}\right|_{t=-T/2}^{T/2} = \frac{1}{j\omega T}\left(e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}\right)$$

<u>ตอบ</u>

$$= \frac{2}{\omega T}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



รูปที่ 5.4 กราฟแสดง Fourier transform ของสัญญาณ $x(t)$ ในตัวอย่าง 5.5 โดยมีค่า $T = 1$

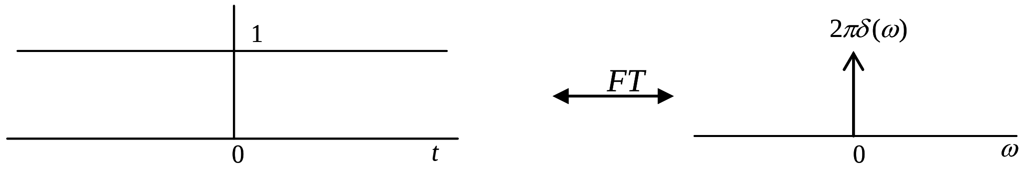
<u>ตัวอย่างที่ 5.6</u> จงหา Inverse Fourier transform สำหรับ $2\pi\delta(\omega)$

<u>วิธีทำ</u> ใช้สูตร Inverse Fourier Transform จะได้

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{2\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = 1$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$1 \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega)$$ <u>ตอบ</u>



รูปที่ 5.5 กราฟค่าคงที่ 1 และ Fourier transform ของ 1 ในตัวอย่างที่ 5.6

4. Fourier representation for discrete-time non periodic signal

ในกรณีที่ของสัญญาณ Discrete-time non periodic การวิเคราะห์สัญญาณ $x(n)$ ในเชิงความถี่จะต้องใช้ Discrete-time Fourier transform ตามสมการ 5.4 กล่าวคือ

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \qquad (5.4)$$

โดย ตัวแปร Ω คือตัวแปรความถี่เชิงมุม ซึ่งเป็นตัวแปรที่ต่อเนื่อง (Continuous variable) และมีหน่วยเป็น Radian/sample เงื่อนไขสำหรับสัญญาณ $x(n)$ ที่จะสามารถหา DTFT ได้จะต้องเป็นดังนี้

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

ส่วนสูตรของ Inverse Discrete-time Fourier transform เป็นดังนี้

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega \qquad (5.13)$$

ที่มาของ Inverse discrete-time Fourier transform จะไม่ขอกล่าวไว้ในที่นี้

สูตรที่ 5.4 เรียกว่า Analysis formula สำหรับ Discrete-time Fourier transform เนื่องจากใช้สำหรับวิเคราะห์ Frequency ของสัญญาณ $x(n)$ และสูตรที่ 5.13 เรียกว่า Synthesis formula สำหรับ Discrete-time Fourier transform เนื่องจากสูตรนี้ใช้ในการสร้างสัญญาณ $x(n)$ มีข้อสังเกตุว่าเมื่อแทน Ω ด้วย $\Omega + 2\pi$ จะได้

$$X(e^{j(\Omega+2\pi)}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\Omega+2\pi)n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}e^{-j2\pi n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} = X(e^{j\Omega})$$

นั่นคือ $X(e^{j\Omega}) = X(e^{j(\Omega+2\pi)})$ ซึ่งหมายความว่า $X(e^{j\Omega})$ เป็น Periodic function มี Period กับ 2π นอกจากนี้ $X(e^{j\Omega})$ ยังเป็น Continuous function

<u>ตัวอย่างที่ 5.7</u> จงหา Discrete-time Fourier transform สำหรับ $\delta(n)$

<u>วิธีทำ</u> $\delta(n)$ มีนิยามว่า $\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$

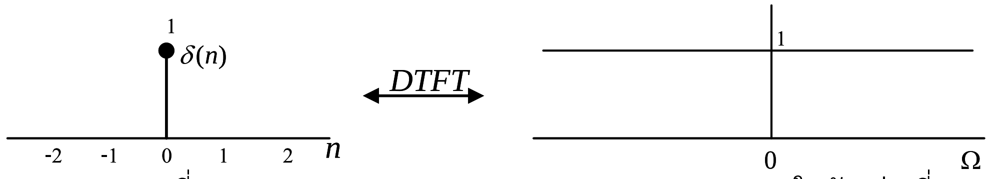
ดังนั้นเมื่อคำนวณ Discrete-time Fourier transform ของ $\delta(n)$ จะได้

$$DTFT\{\delta(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\Omega n} = e^{0} = 1$$

ดังนั้นจะได้ว่า

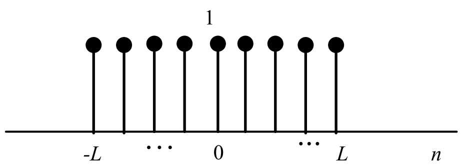
$$\delta(n) \xleftrightarrow{DTFT} 1$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า $\delta(n)$ ประกอบด้วยความถี่ทุกความถี่ที่มีขนาดเท่ากับ 1 ทั้งหมด ดังรูปที่ 5.6



รูปที่ 5.6 กราฟ $\delta(n)$ และ Fourier transform ของ $\delta(n)$ ในตัวอย่างที่ 5.7

<u>ตัวอย่างที่ 5.8</u> จงหา Discrete-time Fourier transform สำหรับ $x(n)$ ดังรูป



<u>วิธีทำ</u> $x(n)$ สามารถเขียนเป็นสูตรได้ว่า

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = -L, \ldots, L \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

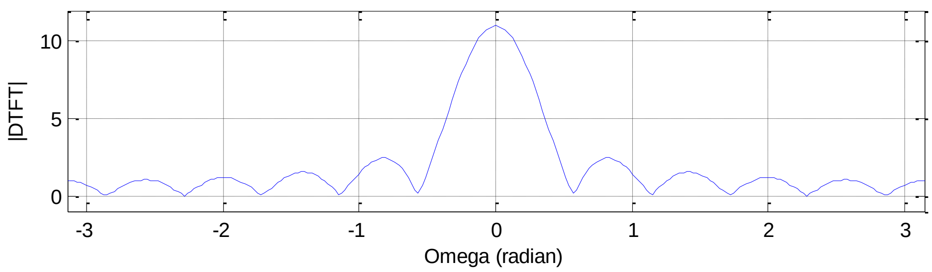
ดังนั้นเมื่อคำนวณ Discrete-time Fourier transform ของ $x(n)$ จะได้

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-L}^{L} 1 \cdot e^{-j\Omega n}$$

แทน n ด้วย $m-L$ เมื่อ $n=-L$ จะได้ $m=0$ และ เมื่อ $n=L$ จะได้ $m=2L$ ดังนั้นจะได้

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-L}^{L} e^{-j\Omega n} = \sum_{m=0}^{2L} e^{-j\Omega(m-L)} = e^{j\Omega L} \sum_{m=0}^{2L} e^{-j\Omega m} = e^{j\Omega L} \left(\frac{1-e^{-j\Omega(2L+1)}}{1-e^{-j\Omega}} \right)$$

<u>ตอบ</u>



รูปที่ 5.7 กราฟแสดง Magnitude ของ Discrete-time Fourier transform ของสัญญาณในตัวอย่างข้อ 5.8 โดยมี $L=5$

ตารางที่ 5.2 Fourier representation of 4 types of signals

Time domain signals	Frequency domain representation
Continuous-time periodic $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$ คุณสมบัติ: $x(t)$ เป็น Continuous, Periodic with period = T (Sec)	Fourier series (FS) $X(k)=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ คุณสมบัติ: $X(k)$ เป็น Discrete, Non periodic $\omega_0=2\pi/T$ Rad/sec
Continuous-time non periodic $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ คุณสมบัติ: $x(t)$ เป็น Continuous, Non periodic	Fourier transform (FT) $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ คุณสมบัติ: $X(j\omega)$ เป็น Continuous, Non periodic
Discrete-time periodic $x(n)=\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk\Omega_0 n}, \quad n=0,\ldots,N-1$ คุณสมบัติ: $x(n)$ เป็น Discrete, Periodic with period = N	Discrete-time Fourier series (DTFS) $X(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}, \quad k=0,\ldots,N-1$ คุณสมบัติ: $X(k)$ เป็น Discrete, Periodic with period = N , $\Omega_0=2\pi/N$ Rad/Sample
Discrete-time non periodic $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$ คุณสมบัติ: $x(n)$ เป็น Discrete, Non periodic	Discrete-time Fourier transform (DTFT) $X(e^{j\Omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$ คุณสมบัติ: $X(e^{j\Omega})$ เป็น Continuous, Periodic with period = 2π

Fourier representation ทั้ง 4 แบบสามารถสรุปได้ดังตารางที่ 5.2 โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างคุณสมบัติ Periodicity และ Continuity ใน Time domain กับ Frequency domain เป็นดังนี้

1. ความเป็น Continuous-time จะทำให้ได้ Fourier representation เป็น Non periodic และในทางกลับกันด้วย

2. ความเป็น Discrete-time จะทำให้ได้ Fourier representation เป็น Periodic และในทางกลับกันด้วย

3.ความเป็น Periodic ใน Time domain จะทำให้ได้ Fourier representation เป็น Discrete และในทางกลับกันด้วย

4. ความเป็น Non periodic ใน Time domain จะทำให้ได้ Fourier representation เป็น Continuous และในทางกลับกันด้วย

Parseval's Relation

จากเนื้อหาที่ผ่านมา จะเห็นได้ว่าสิ่งที่เรียกว่า "สัญญาณ" สามารถแปลงไปมาระหว่าง Time domain และ Frequency domain ซึ่งหมายความว่าสิ่งๆนี้สามารถมองในรูป Time domain signal หรือ Fourier representation ก็ได้ เหมือนการมองวัตถุสิ่งเดียวกันจากคนละด้าน ก็จะเห็นคนละรูปลักษณ์กันแม้ว่าจะเป็นสิ่งเดียวกัน อย่างไรก็ตามไม่ว่าจะมองสัญญาณในมุมมองใด เราจะพบคุณสมบัติหนึ่งของสัญญาณที่จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงไม่ว่าจะคำนวณใน Time domain หรือใน Frequency domain สิ่งนั้นคือพลังงาน (หรือกำลัง) ซึ่งปรากฏการณ์นี้อธิบายได้โดยใช้ Parseval's relation ซึ่งเป็นตัวอย่างหนึ่งของกฎทรงพลังงานที่พบในทางฟิสิกส์ทั่วไป Parseval's relation อธิบายว่า พลังงาน (หรือ กำลัง) ของสัญญาณคำนวณใน Time domain จะเท่ากับพลังงาน(หรือกำลัง) ของสัญญาณที่คำนวณใน Frequency domain
Parseval's relation อธิบายได้ดังนี้

1. กรณีสัญญาณแบบ Continuous-time non periodic

พลังงานใน Time domain สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt \qquad (5.14)$$

โดย $|x(t)|^2 = x(t)\cdot x^*(t)$ (มาจากคุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน $|x|^2 = x\cdot x^*$)
ดังนั้นจะได้

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot x^*(t)dt \qquad (5.15)$$

จากสูตร Inverse Fourier transform (5.12)

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

เมื่อทำ Conjugate จะได้

$$x^*(t)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right)^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

นำไปแทนลงใน $x^*(t)$ ในสมการ 5.15 จะได้

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot x^*(t)dt=\int_{t=-\infty}^{\infty}x(t)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}X^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega\right)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}X^*(j\omega)\left(\int_{t=-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}\right)dtd\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(j\omega)\cdot X(j\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega \qquad (5.16)$$

ซึ่งสูตรใน 5.16 คือสูตรการคำนวณ Energy ของ Fourier transform นั่นเอง จะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega \qquad (5.17)$$

สมการ 5.17 คือ Parseval's relation ในกรณีของสัญญาณ Continuous-time non periodic ซึ่งตีความหมายได้ว่า <u>พลังงานของสัญญาณแบบ Continuous-time non periodic ที่คำนวณใน Time domain จะเท่ากับพลังงานของ Fourier transform ที่คำนวณใน Frequency domain</u>

2. กรณีสัญญาณแบบ Continuous-time periodic

กำลังใน Time domain สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$P = \frac{1}{T}\int_{0}^{T}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)\cdot x^*(t)dt \qquad (5.18)$$

จากสูตร Synthesis (5.6) ของ Fourier series

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$$

เมื่อทำ Conjugate จะได้

$$x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^*(k)e^{-jk\omega_0 t}$$

นำไปแทนลงใน $x^*(t)$ ในสมการ 5.18 จะได้

$$P = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)\cdot x^*(t)dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)\cdot\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X^*(k)e^{-jk\omega_0 t}\right)dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^*(k)\frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^*(k)\cdot X(k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}|X(k)|^2 \qquad (5.19)$$

ซึ่งสูตร 5.19 คือสูตรคำนวณ Energy ของ Fourier series coefficients ทั้งหมดนั่นเอง จะได้ว่า

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}|x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|X(k)|^2 \qquad (5.20)$$

สมการ 5.20 คือ Parseval's relation ในกรณีของสัญญาณแบบ Continuous-time periodic ซึ่งตีความหมายได้ว่า <u>กำลังของสัญญาณแบบ Continuous-time periodic ที่คำนวณใน Time domain จะเท่ากับพลังงานของ Fourier series coefficients ที่คำนวณใน Frequency domain</u>

3. กรณีสัญญาณแบบ Discrete-time non periodic

พลังงานใน Time domain สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot x^*(n) \qquad (5.21)$$

จากสูตร Inverse discrete-time Fourier transform (5.13)

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$

เมื่อทำ Conjugate จะได้

$$x^*(n)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega\right)^* =\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X^*(e^{j\Omega})e^{-j\Omega n}d\Omega$$

นำไปแทนลงใน $x^*(n)$ ในสมการ 5.21 จะได้

$$\begin{aligned}E&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\cdot x^*(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X^*(e^{j\Omega})e^{-j\Omega n}d\Omega\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X^*(e^{j\Omega})\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\cdot e^{-j\Omega n}\right)d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X^*(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega})d\Omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\Omega})\right|^2d\Omega\end{aligned}\tag{5.22}$$

ซึ่งสูตรที่ 5.22 คือสูตรคำนวณ Power ของ Discrete-time Fourier transform นั่นเอง จะได้ว่า

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\Omega})\right|^2d\Omega\tag{5.23}$$

สมการ 5.23 คือ Parseval’s relation ในกรณีของสัญญาณ Discrete-time non periodic ซึ่งตีความหมายได้ว่า <u>พลังงานของสัญญาณแบบ Discrete-time non periodic ที่คำนวณใน Time domain จะเท่ากับกำลังของ Discrete-time Fourier transform ที่คำนวณใน Frequency domain</u>

4. กรณีสัญญาณแบบ Discrete-time periodic

กำลังใน Time domain สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$P=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot x^*(n)\tag{5.24}$$

จากสูตร Synthesis ของ Discrete-time Fourier series (5.9)

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{jk\Omega_0 n},\quad n=0,\ldots,N-1$$

เมื่อทำ Conjugate จะได้

$$x^*(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)e^{-jk\Omega_0 n}$$

นำไปแทนลงใน $x^*(n)$ ในสมการ 5.24 จะได้

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot x^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot\left(\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)e^{-jk\Omega_0 n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{-jk\Omega_0 n}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)X(k) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left|X(k)\right|^2 \qquad (5.25)
\end{aligned}
$$

ซึ่งสูตรที่ 5.25 คือสูตรคำนวณ Power ของ Discrete-time Fourier series coefficients นั่นเอง จะได้ว่า

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2 \qquad (5.26)$$

สมการที่ 5.26 คือ Parseval's relation ในกรณีของสัญญาณ Discrete-time periodic ซึ่งตีความหมายได้ว่า กำลังของสัญญาณแบบ Discrete-time periodic ที่คำนวณใน Time domain จะเท่ากับกำลังของ Discrete-time Fourier series coefficients ที่คำนวณใน Frequency domain

ความสัมพันธ์ระหว่าง Fourier transform กับ Laplace transform และ Discrete-time Fourier transform กับ Z-transform

สำหรับนักศึกษาที่มีความคุ้นเคยกับ Laplace transform และ z-transform นั้น การศึกษาเรื่อง Fourier transform และ DTFT ไม่ใช่เรื่องยากเนื่องจาก Transform เหล่านี้มีความคล้ายคลึงกันดังที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้น โดย Fourier transform จะสัมพันธ์กับ Laplace transform ดังนี้

จาก FT ที่มีสูตรเป็น $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ เมื่อเทียบกับ Laplace transform ที่มีสูตรเป็น $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$ จะเห็นว่า ถ้าแทน s ด้วย $j\omega$ ลงในสูตร Laplace transform จะได้ Fourier transform ดังนั้น

$$X(j\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega} \qquad (5.3)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ DTFT ที่มีสูตรเป็น $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$ เมื่อเทียบกับ z-transform ที่มีสูตรเป็น $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ จะเห็นว่าถ้าแทน z ด้วย $e^{j\Omega}$ ลงในสูตรของ z-transform จะได้ DTFT ดังนั้น

$$X(e^{j\Omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} \qquad (5.5)$$

ความสัมพันธ์ในสมการที่ 5.3 และ 5.5 สำคัญมาก จะช่วยให้เราเข้าใจคุณสมบัติต่างๆของ Fourier transform และ DTFT ได้ง่าย เนื่องจาก Fourier transform จะมีคุณสมบัติคล้ายกับคุณสมบัติที่ Laplace transform มี ส่วน DTFT ก็จะมีคุณสมบัติคล้ายจะกับคุณสมบัติที่ Z-transform มี

ข้อดีของการใช้ Fourier transform และ DTFT ในการวิเคราะห์สัญญาณนั้น ส่วนหนึ่งมาจากการที่ตัวแปรความถี่ ω ของ FT และ Ω ของ DTFT เป็นตัวแปร 1 มิติทำให้ได้กราฟของ

$X(j\omega)$ และ $X(e^{j\Omega})$ เป็นกราฟ 1 มิติที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน ทำให้เราเห็นภาพได้ง่าย ในขณะที่ Laplace transform และ Z-transform นั้นตัวแปร s ของ Laplace transform และตัวแปร z ของ Z-transform เป็นตัวแปรชนิด Complex ที่มีทั้งส่วน Real part และ Imaginary part ซึ่งเป็นตัวแปรแบบ 2 มิติ ทำให้ $X(s)$ และ $X(z)$ เป็น Function 2 มิติ ซึ่งมีลักษณะเป็นพื้นผิว 2 มิติที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน การนำเสนอและตีความหมาย $X(s)$ และ $X(z)$ จึงทำได้ยากกว่า อย่างไรก็ตามทั้ง Fourier transform และ DTFT กับ Laplace transform และ Z-transform ต่างก็มีความเหมาะสมกับงานคนละอย่าง โดย Laplace transform และ Z-transform เหมาะกับงานวิเคราะห์ระบบควบคุมในวิชา Control ส่วน Fourier transform และ DTFT เหมาะสำหรับวิชาสื่อสาร

การเรียกชื่อของ Fourier transform

Fourier transform มีชื่อเรียกหลายชื่อตามแต่สถานการณ์เช่นถ้า $x(t)$ เป็นสัญญาณใน Time domain แล้ว ในบางโอกาสเราจะเรียก Fourier transform $X(j\omega)$ ของสัญญาณ $x(t)$ ว่าเป็น <u>Spectrum</u> ของ $x(t)$ ซึ่ง $X(j\omega)$ มีความหมายเดียวกับ Spectrum ของแสงในวิชาฟิสิกส์ที่เกิดจากการแยกแสงสีผสมออกเป็นแสงสีต่างๆโดยใช้ปริซึ่ม นอกจากนี้เราเรียก $|X(j\omega)|^2$ ว่าเป็น <u>Power spectrum</u> ของสัญญาณ $x(t)$

ในขณะเดียวกันถ้าพูดถึงระบบ LTI ที่มี Transfer function เป็น $H(s)$ และมี Unit impulse response เป็น $h(t)$ เราเรียก Fourier transform $H(j\omega)$ ซึ่งได้มาจาก

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} \quad \text{หรือ} \quad H(j\omega) = FT\{h(t)\}$$

ว่าเป็น <u>Frequency response</u> ของระบบ

มาถึงตรงนี้ นักศึกษาควรจะเข้าใจเนื้อหาต่อไปนี้

[ ] Fourier representation ของสัญญาณแต่ละชนิด

[ ] สามารถคำนวณหา FS, FT, DTFS, DTFT และ Inverse transform ต่างๆได้

[ ] ความสัมพันธ์ระหว่างคุณสมบัติ Periodicity และ Continuity ใน Time domain และ Frequency domain

[ ] ความสัมพันธ์ระหว่าง FT กับ Laplace transform และ DTFT กับ Z-transform

คุณสมบัติของ Fourier transform และ Discrete-time Fourier transform

คุณสมบัติของ Fourier transform และ Discrete-time Fourier transform จะมีความคล้ายคลึงกับคุณสมบัติของ Laplace transform และ z-transform เราสามารถสืบหาที่มาของคุณสมบัติเหล่านี้ได้ไม่ยากหากเคยได้เข้าใจคุณสมบัติของ Laplace transform และ z-transform มาแล้ว

1. Linearity

คุณสมบัตินี้มีในทั้ง Fourier transform และ DTFT

$$ax(t)+by(t)\xleftrightarrow{FT}aX(j\omega)+bY(j\omega) \qquad (5.27)$$

$$ax(n)+by(n)\xleftrightarrow{DTFT}aX(e^{j\Omega})+bY(e^{j\Omega}) \qquad (5.28)$$

2. Time shifting

คุณสมบัตินี้มีในทั้ง Fourier transform และ DTFT

$$x(t-\tau)\xleftrightarrow{FT}e^{-j\omega\tau}X\left(j\omega\right) \qquad (5.29)$$

$$x(n-n_0)\xleftrightarrow{DTFT}e^{-j\Omega n_0}X\left(e^{j\Omega}\right) \qquad (5.30)$$

<u>ที่มา</u> FT:

$$FT\{x(t-\tau)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)e^{-j\omega t}dt$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก $t-\tau$ เป็น u และ t เป็น $u+\tau$ และ dt เป็น du จะได้

$$FT\{x(t-\tau)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{-j\omega(u+\tau)}du=e^{-j\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{-j\omega u}du=e^{-j\omega\tau}X(j\omega)$$

<u>ที่มา</u> DTFT:

$$DTFT\{x(n-n_0)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-n_0)e^{-j\Omega n}$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก $n-n_0$ เป็น m และ n เป็น $m+n_0$ จะได้

$$DTFT\{x(n-n_0)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-n_0)e^{-j\Omega n}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)e^{-j\Omega(m+n_0)}$$

$$=e^{-j\Omega n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)e^{-j\Omega m}=e^{-j\Omega n_0}X(e^{j\Omega})$$

3. Frequency shifting

คุณสมบัตินี้มีในทั้ง Fourier transform และ DTFT และเหมาะจะใช้อธิบายการทำ Amplitude Modulation และ Demodulation

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{FT} X\left(j(\omega-\omega_0)\right) \qquad (5.31)$$

$$e^{j\Omega_0 n}x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X\left(e^{j(\Omega-\Omega_0)}\right) \qquad (5.32)$$

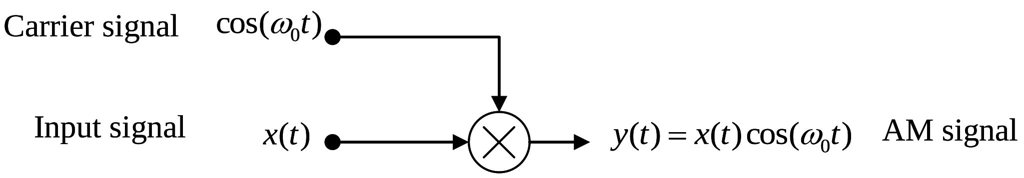
<u>ที่มา</u> FT:

$$FT\{e^{j\omega_0 t}x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t}x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt = X(j(\omega-\omega_0))$$

<u>ที่มา</u> DTFT

$$DTFT\{e^{j\Omega_0 n}x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\Omega_0 n}e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\Omega-\Omega_0)n} = X(e^{j(\Omega-\Omega_0)})$$

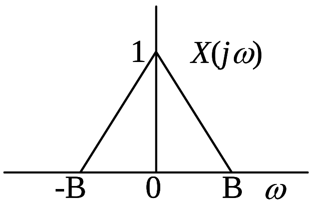
<u>ตัวอย่างที่ 5.9</u> การทำ Amplitude Modulation (AM) ในการสื่อสารทำได้โดยการนำสัญญาณตั้งต้นมาคูณกับสัญญาณ Sinusoidal signal ดังรูปที่ 5.8



รูปที่ 5.8 Block diagram ของการทำ Amplitude Modulation

กำหนดให้สัญญาณ $x(t)$ มี Fourier transform ดังรูปขวา

จงวาดรูป Fourier transform ของ $y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$



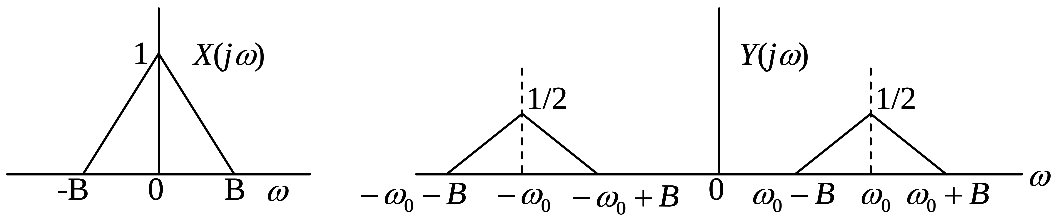
<u>วิธีทำ</u> สัญญาณ $\cos(\omega_0 t)$ สามารถเขียนในรูป $\dfrac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$ ดังนั้น

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2}x(t) + \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2}x(t)$$

เมื่อทำ Fourier transform จะได้

$$Y(j\omega) = \frac{X(j(\omega-\omega_0))}{2} + \frac{X(j(\omega+\omega_0))}{2}$$

ดังนั้น $Y(j\omega)$ จะประกอบด้วยสำเนา (Copy) ของ $X(j\omega)$ 2 รูปที่มี Center ที่ $\omega = \pm\omega_0$ และมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของ $X(j\omega)$ ดังรูปที่ 5.9



รูปที่ 5.9 Fourier transform ของสัญญาณตั้งต้น (ซ้าย) และสัญญาณ AM (ขวา) ของตัวอย่างที่ 5.9

ในวิชาสื่อสาร สมการ $y(t)=x(t)\cos(\omega_0 t)$ เป็นการทำ Amplitude modulation (AM) โดยมี $x(t)$ เป็น Input และ $\cos(\omega_0 t)$ เป็นสัญญาณพาห์ (Carrier signal) การทำเช่นนี้เท่ากับเป็นการยกระดับความถี่ของสัญญาณให้สูงขึ้นเพื่อให้เหมาะสมในการส่งสัญญาณ

<u>ตัวอย่างที่ 5.10</u> จงคำนวณ Fourier transform ของสัญญาณ Complex sinusoidal signal $e^{j\omega_0 t}$

<u>วิธีทำ</u> โจทย์ข้อนี้เป็นข้อพิเศษ ซึ่งโดยปกติ Fourier transform จะใช้กับสัญญาณ Non periodic แต่สัญญาณข้อนี้เป็น Periodic ซึ่งถ้าใช้สูตร Fourier transform โดยตรงจะได้

$$FT\{e^{j\omega_0 t}\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=\frac{1}{j(\omega-\omega_0)}e^{-j(\omega-\omega_0)t}\Big|_{t=-\infty}^{\infty}$$

ซึ่งจะคำนวณลำบาก แต่โชคดีที่สามารถนำคุณสมบัติ Frequency shifting มาช่วยได้ โดยจากตัวอย่างในข้อ 5.6 จะได้ $1\xleftrightarrow{FT}2\pi\delta(\omega)$

ซึ่งสัญญาณ $e^{j\omega_0 t}$ ก็คือ $1\cdot e^{j\omega_0 t}$ ดังนั้น

$$e^{j\omega_0 t}\xleftrightarrow{FT}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

<u>ตอบ</u>

4. Convolution in time domain

คุณสมบัตินี้มีในทั้ง Fourier transform และ DTFT และใช้อธิบายการกรองสัญญาณโดยใช้ตัวกรองสัญญาณ

$$x(t)*y(t)\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)\cdot Y(j\omega) \tag{5.33}$$

$$x(n)*y(n)\xleftrightarrow{DTFT}X(e^{j\Omega})\cdot Y(e^{j\Omega}) \tag{5.34}$$

<u>ที่มา</u> FT:

$$FT\{x(t)*y(t)\}=FT\{\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau\}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right)e^{-j\omega t}dt$$

เปลี่ยนลำดับการอินทีเกรตใหม่โดยอินทีเกรตเทียบกับตัวแปร t ก่อนจะได้

$$FT\{x(t)*y(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\left(\left(\int_{\infty}^{\infty}y(t-\tau)\right)e^{-j\omega t}dt\right)d\tau$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก $t-\tau$ เป็น u และ t เป็น $u+\tau$ และ dt เป็น du จะได้

$$FT\{x(t)*y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-j\omega(u+\tau)}du\right)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-j\omega u}du\right)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-j\omega u}du\right) = X(j\omega)\cdot Y(j\omega)$$

<u>ที่มา</u> DTFT:

$$DTFT\{x(n)*y(n)\} = DTFT\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)\right)e^{-j\Omega n}$$

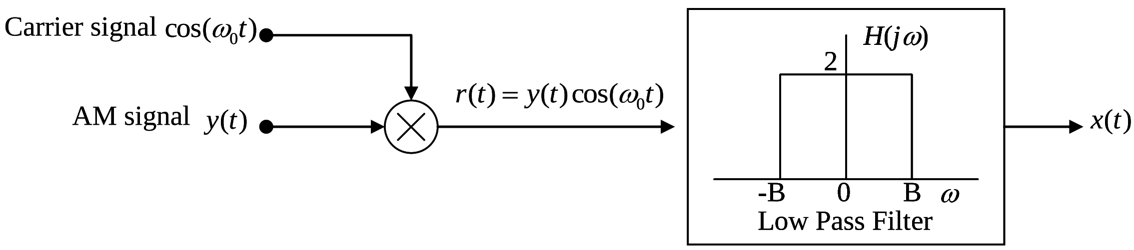
เปลี่ยนตัวแปรจาก $n-k$ เป็น m และ n เป็น $m+k$ จะได้

$$DTFT\{x(n)*y(n)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(m)\right)e^{-j\Omega(m+k)}$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\Omega k}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)e^{-j\Omega m}\right) = X(e^{j\Omega})\cdot Y(e^{j\Omega})$$

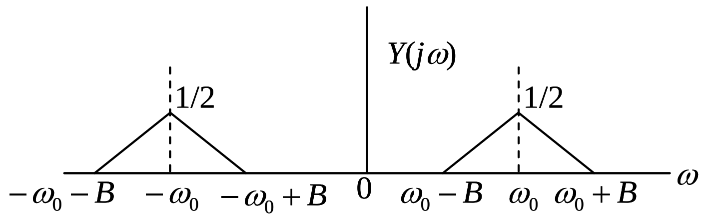
คุณสมบัติข้อนี้เป็นคุณสมบัติที่สำคัญมากในวิชาสื่อสารและวิชาการออกแบบตัวกรองสัญญาณ (Filter design) กล่าวคือ ในกรณีที่สัญญาณ Input ประกอบด้วยสัญญาณหลายความถี่ ถ้าต้องการจะเลือกเอาความถี่ใดความถี่หนึ่งออกมา เราสามารถทำได้โดยการนำสัญญาณนี้ไปผ่านตัวกรองสัญญาณที่ยอมให้ความถี่ที่ต้องการผ่านได้ สัญญาณที่ความถี่อื่นจะไม่สามารถเล็ดรอดออกมา ลักษณะนี้ทำให้เราสามารถส่งสัญญาณได้หลายสัญญาณในเวลาเดียวกันโดยกำหนดให้สัญญาณแต่ละสัญญาณมีความถี่ไม่เท่ากัน เมื่อสัญญาณเดินทางถึงปลายทาง เราสามารถแยกเอาสัญญาณแต่ละความถี่ออกจากกันได้โดยใช้ Filter ที่มีความถี่ที่เหมาะสม

<u>ตัวอย่างที่ 5.11</u> การทำ AM demodulation เป็นการแปลงสัญญาณ AM ให้กลับคืนมาเป็นสัญญาณตั้งต้น โดยสามารถทำได้โดยการนำสัญญาณ AM มาผ่าน Block diagram ของ AM demodulator ดังรูปที่ 5.10



รูปที่ 5.10 Block diagram ของการทำ AM demodulation

โดย Low pass filter ในรูปคือตัวกรองสัญญาณความถี่ต่ำที่ยอมให้สัญญาณในช่วงความถี่ $\pm B$ ผ่านได้ การทำงานของ AM demodulator เป็นดังนี้ จากตัวอย่างที่ 5.9 สัญญาณ $y(t)$ มี Fourier transform ดังรูปที่ 5.11



รูปที่ 5.11 Fourier transform ของสัญญาณ AM ของตัวอย่างที่ 5.9

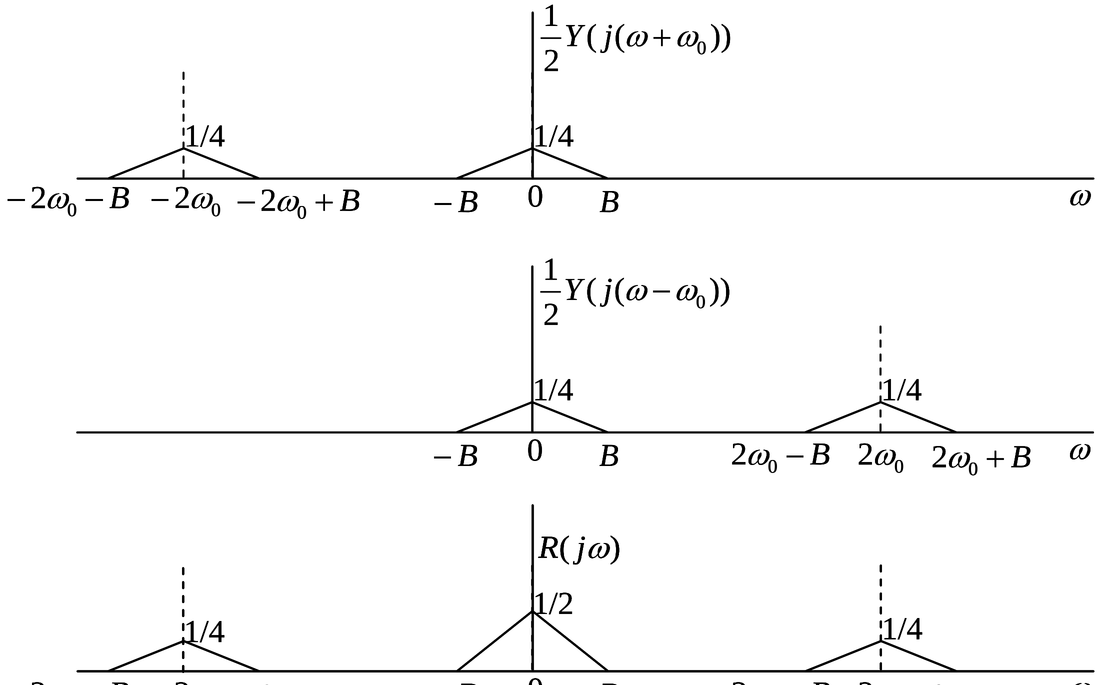
สัญญาณ $r(t)$ สามารถเขียนเป็น

$$r(t) = y(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2} y(t) + \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2} y(t)$$

จากคุณสมบัติ Frequency shifting เมื่อทำ Fourier transform จะได้

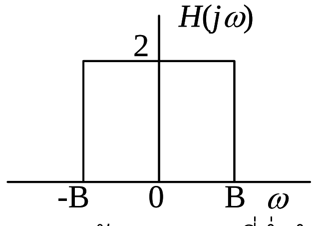
$$R(j\omega) = \frac{Y(j(\omega - \omega_0))}{2} + \frac{Y(j(\omega + \omega_0))}{2}$$

ดังนั้น $R(j\omega)$ จะประกอบด้วยสำเนา (Copy) ของ $Y(j\omega)$ 2 รูปที่มี Center ที่ $\omega = \pm\omega_0$ และมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของ $Y(j\omega)$ รูปข้างล่างแสดงถึงกราฟ $\frac{Y(j(\omega+\omega_0))}{2}$, $\frac{Y(j(\omega-\omega_0))}{2}$ และ $R(j\omega)$ ตามลำดับ

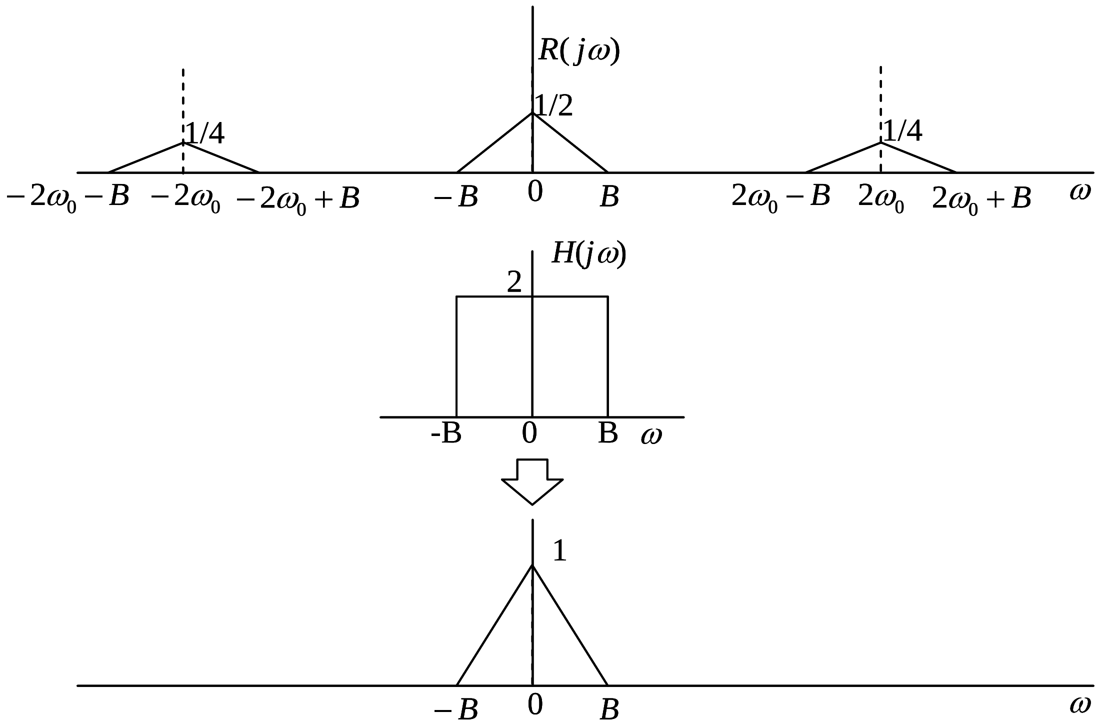


รูปที่ 5.12 Fourier transform ของสัญญาณ $r(t)$ ของตัวอย่างที่ 5.11

จากกราฟ $R(j\omega)$ จะพบว่ามีกราฟที่มีรูปเหมือน $X(j\omega)$ อยู่ 3 รูปโดยมีศูนย์กลางอยู่ที่ $\omega = 0,\ 2\omega_0$ และ $-2\omega_0$ ถ้านำสัญญาณ $r(t)$ มาผ่านตัวกรองสัญญาณความถี่ต่ำที่มี Frequency response $H(j\omega)$ ดังรูปที่ 5.13 จะได้ผลลัพธ์ใน Frequency domain เทียบเท่ากับการนำ $R(j\omega)$ คูณกับ $H(j\omega)$ ทำให้ได้ผลลัพธ์เป็น Fourier transform ดังแสดงในรูปที่ 5.14 ซึ่งจะตรงกับ $X(j\omega)$ ทุกประการ ถ้ามองใน Time domain การผ่านสัญญาณ $r(t)$ เข้าไปในตัวกรองสัญญาณเป็นการทำ Convolution ระหว่าง $r(t)$ กับ Unit impulse response ของตัวกรองสัญญาณ ซึ่งจะได้สัญญาณ $x(t)$ เป็น Output ออกมาจากตัวกรองสัญญาณความถี่ต่ำนี้



รูปที่ 5.13 Frequency response ของตัวกรองความถี่ต่ำสำหรับการทำ AM demodulation



รูปที่ 5.14 Fourier transform ของสัญญาณ Output เมื่อผ่านตัวกรองความถี่ต่ำสำหรับการทำ AM demodulation

หมายเหตุ ตัวกรองสัญญาณในรูปที่ 5.13 จัดเป็น Ideal filter คือเป็นตัวกรองสัญญาณในอุดมคติที่ยอมให้ความถี่ที่ต้องการผ่านได้ 100% แต่ความถี่อื่นที่ไม่ต้องการผ่านไม่ได้เลย ในทางปฏิบัติเราไม่สามารถจะสร้างตัวกรองสัญญาณในอุดมคติที่มี Frequency response $H(j\omega)$ ดังรูปที่ 5.13 ได้ เนื่องจากตัวกรองสัญญาณนี้มี Unit impulse response ใน Time domain ที่มีความยาวเป็นอนันต์ และเป็น Non causal ในทางปฏิบัติ เราจะใช้ตัวกรองสัญญาณที่มี Frequency response ใกล้เคียงกับตัวกรองสัญญาณในอุดมคติแทน

5. Differentiation in frequency domain

คุณสมบัตินี้มีในทั้ง Fourier transform และ DTFT

$$-jtx(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{d}{d\omega}\left(X(j\omega)\right) \tag{5.35}$$

$$-jnx(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{d}{d\Omega}\left(X\left(e^{j\Omega}\right)\right) \tag{5.36}$$

ที่มา FT:

จากนิยามของ Fourier transform

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

ทำการ Differentiate $X(j\omega)$ เทียบกับตัวแปร ω จะได้

$$\frac{d}{d\omega}\left(X(j\omega)\right) = \frac{d}{d\omega}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right) = \int_{-\infty}^{\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t}dt$$

เมื่อเทียบฟอร์มกับ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ จะได้ว่า $-jtx(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{d}{d\omega}\left(X(j\omega)\right)$

ที่มา DTFT:

จากนิยามของ DTFT

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

ทำการ Differentiate $X(e^{j\Omega})$ เทียบกับตัวแปร Ω จะได้

$$\frac{d}{d\Omega}\left(X(e^{j\Omega})\right) = \frac{d}{d\Omega}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -jnx(n)e^{-j\Omega n}$$

เมื่อเทียบฟอร์มกับ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$ จะได้ว่า $-jnx(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{d}{d\Omega}\left(X\left(e^{j\Omega}\right)\right)$

6. Differentiation in time domain

คุณสมบัตินี้มีเฉพาะใน Fourier transform

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{FT} j\omega X(j\omega) \tag{5.37}$$

ที่มา จากสูตร Inverse Fourier transform

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

ทำการ Differentiate เทียบกับตัวแปร t ได้

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

เมื่อเทียบฟอร์มกับ $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ จะได้ว่า $\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{FT} j\omega X(j\omega)$

7. Integration in time domain

คุณสมบัตินี้มีเฉพาะใน Fourier transform

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{FT} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(j0)\delta(\omega) \tag{5.38}$$

8. Multiplication in time domain

คุณสมบัตินี้มีในทั้ง Fourier transform และ DTFT

$$x(t)\cdot y(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi}X\left(j\omega\right) * Y(j\omega) \tag{5.39}$$

$$x(n)\cdot y(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi}X\left(e^{j\Omega}\right) * Y(e^{j\Omega}) \tag{5.40}$$

ที่มา กรณีของ Fourier transform

จากสูตร Inverse Fourier transform

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(ju)e^{jut}du \text{ และ } y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(jv)e^{jvt}dv$$

จะได้ว่า

$$x(t)\cdot y(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(ju)e^{jut}du\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(jv)e^{jvt}dv\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{v=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} X(ju)Y(jv)e^{j(u+v)t}dudv$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก u เป็น $\omega - v$, $u + v$ เป็น ω และ du เป็น $d\omega$ จะได้

$$x(t)\cdot y(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{v=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} X(ju)Y(jv)e^{j(u+v)t}dudv$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{v=-\infty}^{\infty}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} Y(jv)X(j(\omega-v))e^{j\omega t}d\omega dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{v=-\infty}^{\infty} Y(jv)X(j(\omega-v))dv\right]e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)\right]e^{j\omega t}d\omega$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$x(t)\cdot y(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)$$

กรณีของ Discrete-time Fourier transform

จากสูตร Inverse discrete-time Fourier transform

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jU})e^{jUn}dU \text{ และ } y(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{jV})e^{jVn}dV$$

จะได้ว่า

$$x(n)\cdot y(n) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jU})e^{jUn}dU\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{jVn})e^{jVn}dV\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{V=-\pi}^{\pi}\int_{U=-\pi}^{\pi} X(e^{jU})Y(e^{jV})e^{j(U+V)n}dUdV$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก U เป็น $\Omega - V$, $U + V$ เป็น Ω และ dU เป็น $d\Omega$ จะได้

$$x(n)\cdot y(n) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{V=-\pi}^{\pi}\int_{U=-\pi}^{\pi} X(e^{jU})Y(e^{jV})e^{j(U+V)n}dUdV$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{V=-\pi}^{\pi}\int_{\Omega=-\pi}^{\pi} X(e^{j(\Omega-V)})Y(e^{jV})e^{j\Omega n}d\Omega dV$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega=-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{v=-\infty}^{\infty} Y(e^{jV})X(e^{j(\Omega-V)})dv\right]e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega=-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}X(e^{j\Omega})*Y(e^{j\Omega})\right]e^{j\Omega n}d\Omega$$

ดังนั้น

$$x(n)\cdot y(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi}X(e^{j\Omega})*Y(e^{j\Omega})$$

9. Time scaling

คุณสมบัตินี้มีเฉพาะ Fourier transform

$$x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{|a|} X(j\frac{\omega}{a}) \tag{5.41}$$

<u>ที่มา</u> เมื่อให้ $a > 0$, $FT\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt$

เปลี่ยนตัวแปรจาก at เป็น u , t เป็น $\frac{u}{a}$ และ dt เป็น $\frac{du}{a}$ จะได้

$$FT\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u} \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)u} du = \frac{1}{a} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

เมื่อให้ $a < 0$, $FT\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt$

เปลี่ยนตัวแปรจาก at เป็น u , t เป็น $\frac{u}{a}$ และ dt เป็น $\frac{du}{a}$ และเปลี่ยนขอบเขตการอินทีเกรต จาก $t = -\infty$ เป็น $u = \infty$ และจาก $t = \infty$ เป็น $u = -\infty$ จะได้

$$FT\{x(at)\} = \int_{\infty}^{-\infty} x(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u} \frac{du}{a} = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)u} du = -\frac{1}{a} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

เมื่อรวมทั้งสองกรณี $a > 0$ และ $a < 0$ จะได้

$$x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{|a|} X(j\frac{\omega}{a})$$

10. Symmetry property

คุณสมบัตินี้มีในทั้ง Fourier transform และ DTFT ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่เพิ่มเข้ามา โดย Laplace transform และ Z-transform จะไม่มีคุณสมบัตินี้

10.1 ในกรณีที่ $x(t)$ เป็น Real signal

$$X^*(j\omega) = X(-j\omega) \tag{5.42}$$

<u>ที่มา:</u> จาก $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

จะได้ $X^*(j\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\left(e^{-j\omega t}\right)^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}dt$

กรณีที่ $x(t)$ เป็น Real signal จะได้ว่า $x^*(t) = x(t)$ ดังนั้น

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}dt = X(-j\omega)$$

10.2 ในกรณีที่ $x(t)$ เป็น Real signal และเป็น Even function

$$X^*(j\omega) = X(j\omega) \tag{5.43}$$

และ $X(j\omega)$ มีเฉพาะ Real part และเป็น Even function ด้วย

<u>ที่มา:</u> จาก $$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\left(e^{-j\omega t}\right)^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt$$

กรณีที่ $x(t)$ เป็น Real signal และเป็น Even จะได้ว่า $x^*(t) = x(t) = x(-t)$ ดังนั้น

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega(-t)} dt$$

แทน $-t$ ด้วย τ และ dt ด้วย $-d\tau$ และแทนขอบเขตการอินทีเกรตจาก $t=-\infty$ เป็น $\tau=\infty$ และจาก $t=\infty$ เป็น $\tau=-\infty$ จะได้

$$X^*(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} x(-t)e^{-j\omega(-t)} dt = -\int_{\tau=\infty}^{\tau=-\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau)} d\tau$$

$$= \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau)} d\tau = X(j\omega)$$

ดังนั้น

$$X^*(j\omega) = X(j\omega)$$

และจาก

$$X(j\omega) = \mathrm{Re}(X(j\omega)) + j\,\mathrm{Im}(X(j\omega))$$

และ

$$X^*(j\omega) = \mathrm{Re}(X(j\omega)) - j\,\mathrm{Im}(X(j\omega))$$

เมื่อให้ $X^*(j\omega) = X(j\omega)$ จะได้

$$\mathrm{Re}(X(j\omega)) + j\,\mathrm{Im}(X(j\omega)) = \mathrm{Re}(X(j\omega)) - j\,\mathrm{Im}(X(j\omega))$$

ดังนั้นแสดงว่า

$$j\,\mathrm{Im}(X(j\omega)) = -j\,\mathrm{Im}(X(j\omega)) = 0$$

และจากคุณสมบัติใน 5.42 และ 5.43 จะได้

$$X^*(j\omega) = X(-j\omega) = X(j\omega)$$

ดังนั้น $X(j\omega)$ จึงเป็น Even function

10.3 ในกรณีที่ $x(t)$ เป็น Imaginary signal

$$X^*(j\omega) = -X(-j\omega) \tag{5.44}$$

<u>ที่มา:</u> จาก $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ จะได้

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\left(e^{-j\omega t}\right)^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt$$

กรณีที่ $x(t)$ เป็น Imaginary signal จะได้ว่า $x^*(t) = -x(t)$ ดังนั้น

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}dt = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}dt = -X(-j\omega)$$

สำหรับคุณสมบัติ Symmetry ของ DTFT ใช้การพิสูจน์แบบเดียวกันซึ่งจะพบว่า

ในกรณีที่ $x(n)$ เป็น Real signal

$$X^*(e^{j\Omega}) = X(e^{-j\Omega}) \tag{5.45}$$

ในกรณีที่ $x(n)$ เป็น Imaginary signal

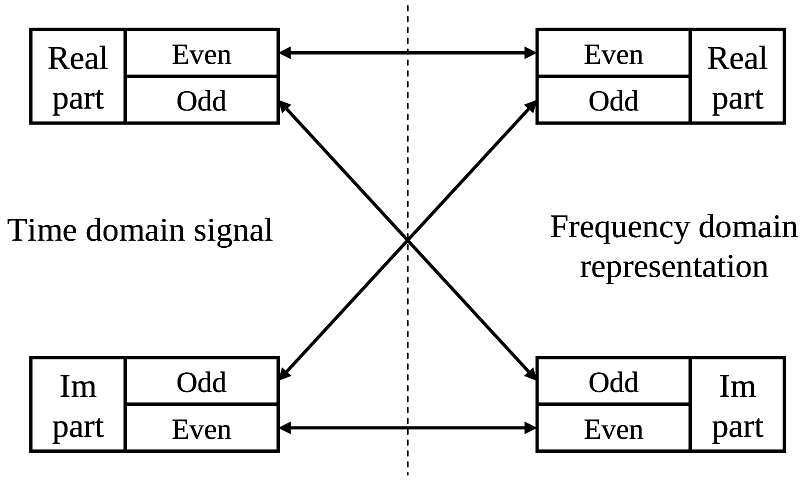
$$X^*(e^{j\Omega}) = -X(e^{-j\Omega}) \tag{5.46}$$

ในกรณีที่ $x(n)$ เป็น Real signal และ Even function

$$X^*(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) \tag{5.47}$$

โดย $X(e^{j\Omega})$ มีเฉพาะ Real part และเป็น Even function ด้วย

คุณสมบัติ Symmetry property ของ Fourier transform และ DTFT สรุปได้ดังรูปที่ 5.15



รูปที่ 5.15 ความสัมพันธ์ระหว่างส่วนประกอบที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพและ Even และ Odd ของสัญญาณใน Time domain และใน Frequency domain representation

มาถึงตรงนี้ นักศึกษาควรจะเข้าใจเนื้อหาต่อไปนี้

[ ] ที่มาของคุณสมบัติต่างๆของ Fourier transform และ DTFT

[ ] สามารถนำเอาคุณสมบัติต่างๆของ Fourier transform และ DTFT มาใช้งานวิเคราะห์สัญญาณได้

ตาราง 5.3 สรุปคุณสมบัติของ Fourier transform และ DTFT

Property	Time – frequency relation
Linearity	$ax(t)+by(t)\xleftrightarrow{FT}aX(j\omega)+bY(j\omega)$ $ax(n)+by(n)\xleftrightarrow{DTFT}aX(e^{j\Omega})+bY(e^{j\Omega})$
Time shifting	$x(t-\tau)\xleftrightarrow{FT}e^{-j\omega\tau}X(j\omega)$ $x(n-n_0)\xleftrightarrow{DTFT}e^{-j\Omega n_0}X\left(e^{j\Omega}\right)$
Frequency shifting	$e^{j\omega_0 t}x(t)\xleftrightarrow{FT}X\left(j(\omega-\omega_0)\right)$ $e^{j\Omega_0 n}x(n)\xleftrightarrow{DTFT}X\left(e^{j(\Omega-\Omega_0)}\right)$
Convolution	$x(t)*y(t)\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)\cdot Y(j\omega)$ $x(n)*y(n)\xleftrightarrow{DTFT}X\left(e^{j\Omega}\right)\cdot Y(e^{j\Omega})$
Differentiation in frequency domain	$-jtx(t)\xleftrightarrow{FT}\dfrac{d}{d\omega}\left(X(j\omega)\right)$ $-jnx(n)\xleftrightarrow{DTFT}\dfrac{d}{d\Omega}\left(X\left(e^{j\Omega}\right)\right)$
Differentiation in time domain	$\dfrac{d}{dt}x(t)\xleftrightarrow{FT}j\omega X(j\omega)$
Integration in time domain	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\xleftrightarrow{FT}\dfrac{X(j\omega)}{j\omega}+\pi X(j0)\delta(\omega)$
Multiplication in time domain	$x(t)\cdot y(t)\xleftrightarrow{FT}\dfrac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)$ $x(n)\cdot y(n)\xleftrightarrow{DTFT}\dfrac{1}{2\pi}X\left(e^{j\Omega}\right)*Y(e^{j\Omega})$
Symmetry	$x(t)$ = Real signal $X^*(j\omega)=X(-j\omega)$ $x(t)$ = Real signal + Even $X^*(j\omega)=X(j\omega)$ $x(t)$ = Imaginary signal $X^*(j\omega)=-X(-j\omega)$ $x(n)$ = Real signal $X^*(e^{j\Omega})=X(e^{-j\Omega})$ $x(n)$ = Real signal + Even $X^*(e^{j\Omega})=X(e^{j\Omega})$ $x(n)$ = Imaginary signal $X^*(e^{j\Omega})=-X(e^{-j\Omega})$

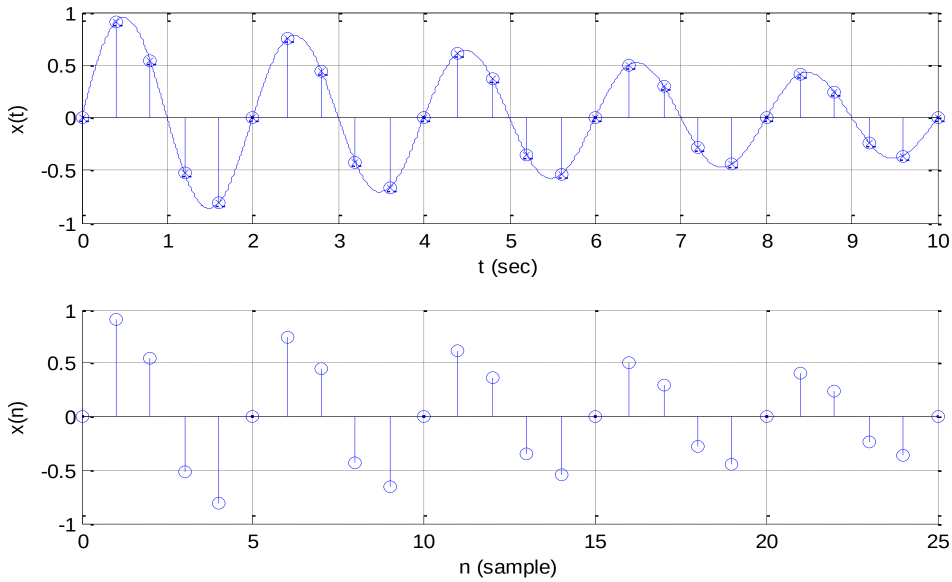
Sampling theorem

ทฤษฎีการสุ่ม หรือ ทฤษฎีการชักตัวอย่าง เป็นทฤษฎีที่บอกถึงความสัมพันธ์ทั้งใน Time domain และ Frequency domain ระหว่างสัญญาณ Continuous-time $x(t)$ และสัญญาณ Discrete-time $x(n)$ ที่เกิดจากการ Sampling สัญญาณ $x(t)$ ความรู้เรื่อง ทฤษฎีการสุ่มนี้สำคัญมากสำหรับวิศวกรไฟฟ้าสื่อสารที่จะต้องทราบว่าเราควรจะสุ่มสัญญาณโดยใช้ความถี่ในการสุ่ม (Sampling rate) เท่าใดจึงจะเหมาะสม เพื่อไม่ให้สูญเสียข้อมูลที่แฝงอยู่ใน $x(t)$

พิจารณาสัญญาณ $x(t)$ เมื่อเราสุ่มโดยใช้คาบการสุ่ม (Sampling period) เป็น T_s เราจะได้สัญญาณ $x(n)$ โดย

$$x(n) = x(t)\big|_{t=nT_s} \qquad (5.48)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ดังแสดงในตัวอย่างในรูปข้างล่าง



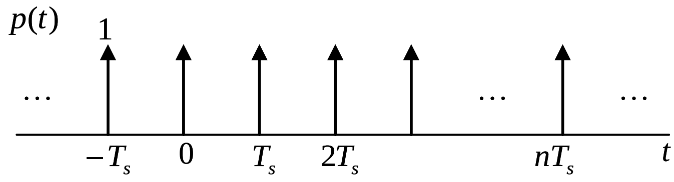
รูปที่ 5.15 การ Sampling สัญญาณ $x(t)$ ที่ Sampling period $T_s = 0.4$ วินาที (Sampling frequency $f_s = 1/T_s = 2.5$ Samples/sec)

สมการ 5.48 บอกถึงความสัมพันธ์ระหว่าง $x(t)$ และ $x(n)$ ใน Time domain คำถามต่อมาคือ แล้วความสัมพันธ์ระหว่าง $X(j\omega)$ ซึ่งเป็น Fourier transform ของ $x(t)$ กับ $X(e^{j\Omega})$ ซึ่งเป็น Discrete-time Fourier transform ของ $x(n)$ จะเป็นเช่นไร คำตอบนี้อธิบายได้โดยใช้ Sampling theorem ดังนี้

กำหนดให้สัญญาณ $p(t)$ เป็น Unit impulse train ตามสมการที่ 5.49 ดังรูปที่ 5.16

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \qquad (5.49)$$

<u>หมายเหตุ</u> Train ในที่นี้มีความหมายคล้ายกับ ขบวนรถไฟ แต่หมายถึงขบวนของ impulse ที่มีความยาวเป็นอนันต์



รูปที่ 5.16 กราฟของ Unit impulse train $p(t)$

สัญญาณ $p(t)$ ประกอบด้วย Unit impulse function จำนวนนับไม่ถ้วนและ Unit impulse แต่ละลูกตั้งอยู่ ณ ตำแหน่งเวลา $t = nT_s,\ n = -\infty,\ldots,\infty$ ดังรูปที่ 5.16 จากกราฟจะสังเกตุได้ว่าสัญญาณ $p(t)$ เป็น Periodic โดยมีคาบเท่ากับ T_s และสามารถอธิบายได้ว่า

$$p(t) = \delta(t) \quad \text{for} \quad t \in [0, T_s)$$

เมื่อนำสัญญาณ $p(t)$ ไปคูณกับสัญญาณ $x(t)$ จะได้

$$x_p(t) = x(t) \cdot p(t) \qquad (5.50)$$

เราสามารถสร้าง $x(n)$ ได้ดังนี้

$$x(n) = x(t)\big|_{t=nT_s} = x_p(t)\big|_{t=nT_s} \qquad (5.51)$$

ในสมการที่ 5.50 สัญญาณ $x_p(t)$ เกิดจากการคูณกันระหว่าง $x(t)$ และ $p(t)$ ดังนั้นใน Frequency domain จะได้

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) \qquad (5.52)$$

(ดูคุณสมบัติ Multiplication in time domain) โดย $P(j\omega)$ คือ Fourier transform ของ $p(t)$

เนื่องจาก $p(t)$ เป็น Periodic โดยมีคาบเท่ากับ T_s ดังนั้น $p(t)$ สามารถเขียนในรูป Fourier series ได้เป็น

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(k) e^{jk\omega_s t}$$

โดย $\omega_s = 2\pi / T_s$ และ

$$P(k) = \frac{1}{T_s} \int_{t=0}^{T_s} p(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{t=0}^{T_s} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}$$

ดังนั้น

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} e^{jk\omega_s t}$$

เมื่อคำนวณ Fourier transform ของ $p(t)$ จะได้

$$P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} FT\{e^{jk\omega_s t}\}$$

จากตัวอย่างที่ 5.10 เราได้ว่า $e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

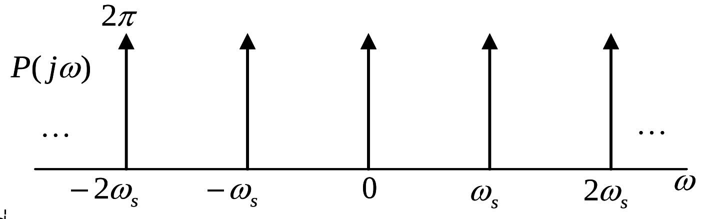
ดังนั้น

$$P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_s} \delta(\omega - k\omega_s) \qquad (5.53)$$

จะได้ว่า

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \xleftrightarrow{FT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_s} \delta(\omega - k\omega_s) = P(j\omega)$$

ซึ่งจะพบว่า Fourier transform ของ Unit impulse train $p(t)$ ก็เป็น Impulse train เช่นเดียวกันแต่มีความสูงเป็น $2\pi/T_s$ และมี Period เป็น ω_s ดังแสดงในรูปที่ 5.17



รูปที่ 5.17 Fourier transform $P(j\omega)$ ของ Unit impulse train $p(t)$

เมื่อแทน $P(j\omega)$ ลงในสมการที่ 5.52 จะได้

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_s} \delta(\omega - k\omega_s) \qquad (5.54)$$

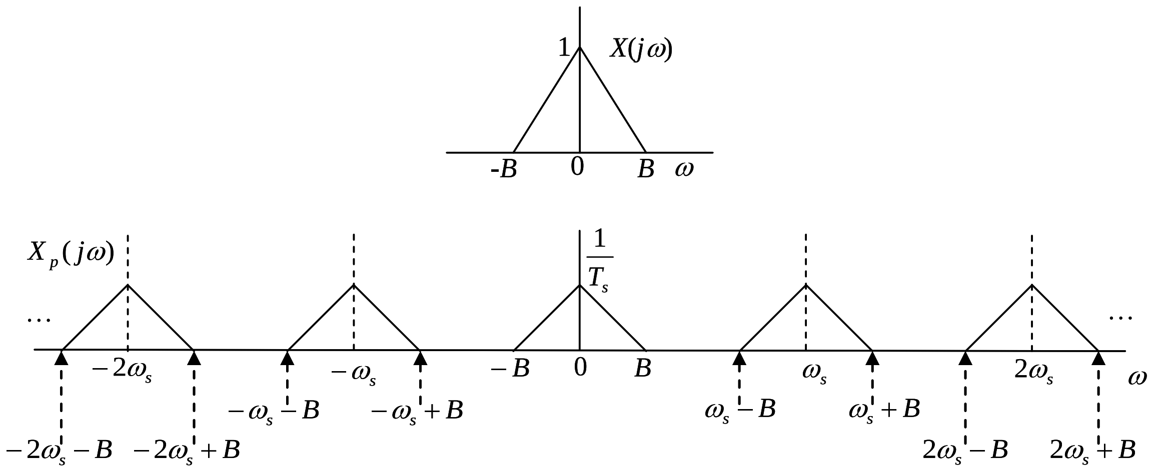
และเนื่องจากคุณสมบัติของ Impulse function ที่ว่า

$$X(j\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = X\big(j(\omega - \omega_0)\big)$$

ดังนั้นสมการที่ 5.54 สามารถเขียนได้เป็น

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_s} \delta(\omega - k\omega_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} X\big(j(\omega - k\omega_s)\big) \qquad (5.55)$$

สมการ 5.55 แสดงถึงว่ากราฟ $X_p(j\omega)$ ประกอบด้วยรูปกราฟของ $X(j\omega)$ จำนวนนับไม่ถ้วน โดยกราฟ $X(j\omega)$ แต่ละรูปมีความสูงเป็น $1/T_s$ และตั้งอยู่ ณ ตำแหน่ง $\omega = k\omega_s,\ k = -\infty, \ldots, \infty$ ดังแสดงในรูปที่ 5.17



รูปที่ 5.17 ตัวอย่าง Fourier transform $X(j\omega)$ (บน) ของสัญญาณ $x(t)$ และ $X_p(j\omega)$ (ล่าง) ของสัญญาณ $x_p(t)$

สมการที่ 5.55 อธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่าง $X_p(j\omega)$ กับ $X(j\omega)$ ซึ่งเกือบจะอธิบายทฤษฎีการสุ่มได้แล้ว แต่สิ่งที่เราต้องการคือความสัมพันธ์ระหว่าง $X(e^{j\Omega})$ กับ $X(j\omega)$ เมื่อย้อนกลับไปดูสมการที่ 5.48 ถ้าให้ $x(t)=e^{j\omega t}$ และ $x(n)=e^{j\Omega n}$ จะได้ $x(n)=e^{j\Omega n}=x(t)\big|_{t=nT_s}=e^{j\omega nT_s}$

จะพบว่า $$\Omega n=\omega nT_s$$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่เชิงมุม ω (มีหน่วย Radian/sec) ของสัญญาณ Continuous-time และความถี่เชิงมุม Ω (มีหน่วยเป็น Radian/sample) ของสัญญาณ Discrete-time เป็น

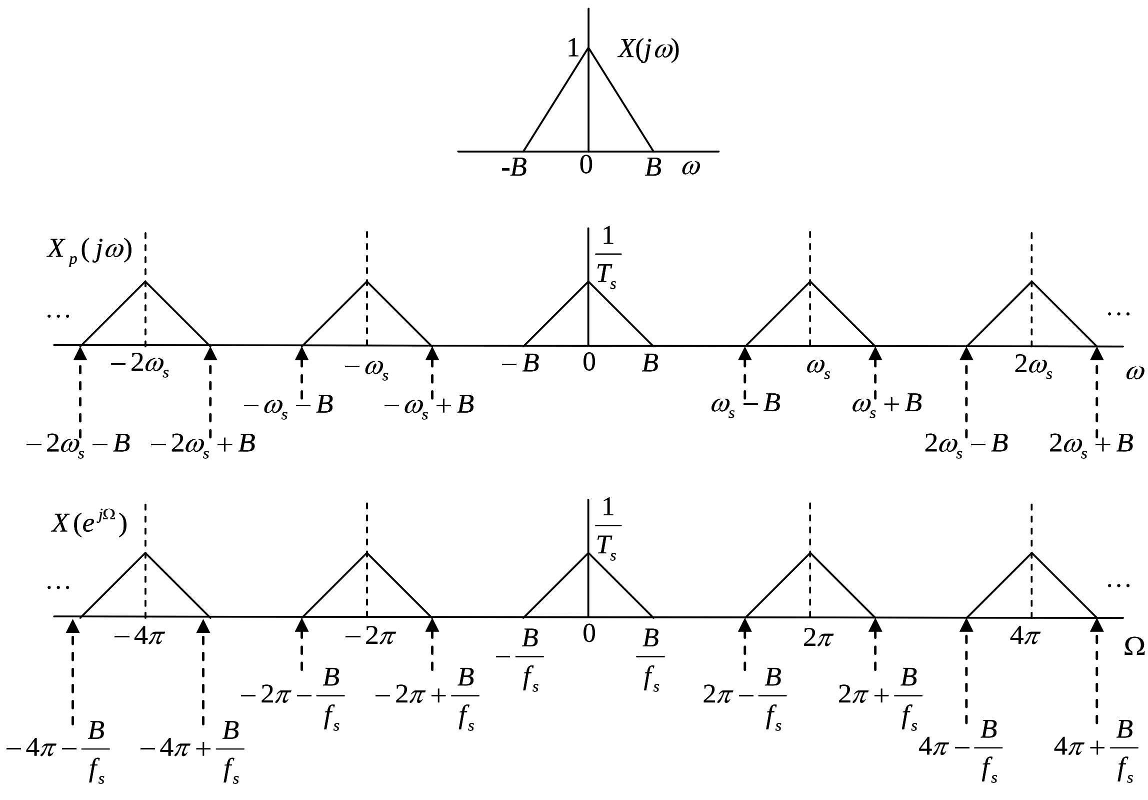
$$\Omega=\omega T_s=\frac{\omega}{f_s} \tag{5.56}$$

สมการนี้อาจหาได้จากการตรวจสอบหน่วยของตัวแปร กล่าวคือ ω มีหน่วย Radian/sec, เมื่อหารด้วยหน่วยของ Sampling rate f_s คือ Sample/sec จะเหลือ Radian/sample ซึ่งเป็นหน่วยของ Ω พอดี

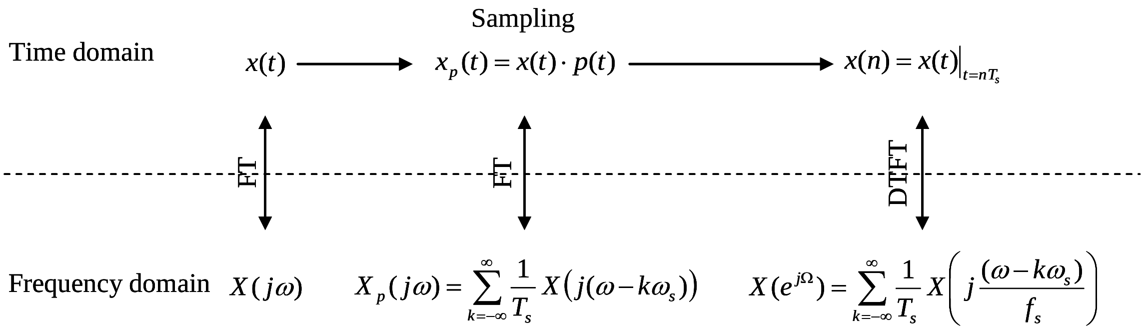
จากสมการที่ 5.56 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $X(e^{j\Omega})$ กับ $X(j\omega)$ เป็น

$$X(e^{j\Omega})=X_p(j\frac{\omega}{f_s})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_s}X\left(j\frac{(\omega-k\omega_s)}{f_s}\right) \tag{5.57}$$

ซึ่งเท่ากับการเปลี่ยน Scale แกนความถี่ของ $X_p(j\omega)$ โดยนำค่า ω หารด้วย f_s ตลอดตามแนวแกนนอนซึ่งจะได้กราฟดังรูปที่ 5.18



รูปที่ 5.18 ตัวอย่างกราฟของ $X(j\omega)$, $X_p(j\omega)$ และ $X(e^{j\Omega})$



รูปที่ 5.19 ความสัมพันธ์ใน Time domain และ Frequency domain ระหว่างสัญญาณ Continuous-time $x(t)$ และสัญญาณ Discrete-time $x(n)$ ที่เกิดจากการชักตัวอย่าง $x(t)$

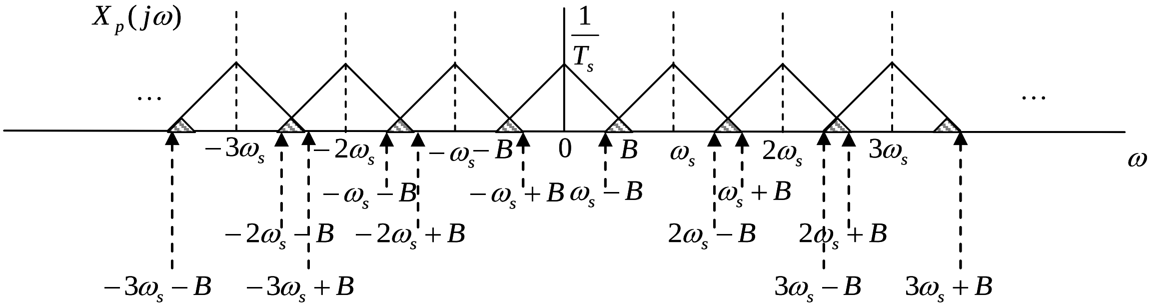
ความสัมพันธ์ใน Time domain และ Frequency domain ระหว่างสัญญาณ $x(t)$ และสัญญาณ $x(n)$ ที่เกิดจากการชักตัวอย่างสัญญาณ $x(t)$ แสดงไว้ในรูปที่ 5.19 แสดง

Nyquist rate

สมการที่ 5.55 และ 5.57 บอกถึงความสัมพันธ์ระหว่าง $X(j\omega)$, $X_p(j\omega)$ และ $X(e^{j\Omega})$ คำถามที่สำคัญถัดมาคือ เมื่อกำหนดให้ $x(t)$ มีความถี่สูงสุดเป็น B (rad/sec) Sampling frequency ที่เหมาะสมควรจะเป็นเท่าไร คำตอบอยู่ที่เหตุผล 2 ข้อ

1. ถ้ากำหนดให้ $x(t)$ มีความถี่สูงสุดเป็น B (rad/sec) แล้ว Fourier transform $X(j\omega)$ ของ $x(t)$ จะมีขอบเขตจาก $-B$ ถึง B รวมเป็นความกว้างทั้งหมด $2B$
2. กราฟ $X_p(j\omega)$ ประกอบด้วยรูปกราฟ $X(j(\omega - k\omega_s))$ เป็นจำนวนอนันต์ ซึ่งแต่ละรูปอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง ω_s

ดังนั้นถ้าจะไม่ให้กราฟ $X(j(\omega - k\omega_s))$ แต่ละรูปในกราฟ $X_p(j\omega)$ ทับกันนั้น ω_s จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ $2B$ กล่าวคือ ความถี่ต่ำสุดในการสุ่มจะต้องเป็นสองเท่าของความถี่สูงสุดของสัญญาณ Input แต่ถ้าลองให้ $\omega_s < 2B$ จะได้กราฟ $X_p(j\omega)$ ดังรูปที่ 5.20 ซึ่งจะเห็นได้ว่า



รูปที่ 5.20 ตัวอย่างกราฟของ $X_p(j\omega)$ ในกรณีที่ $\omega_s < 2B$

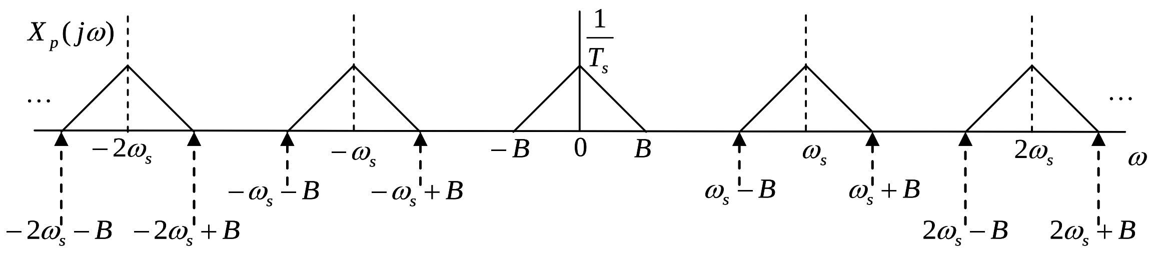
ขอบของกราฟ $X(j(\omega - k\omega_s))$ แต่ละรูปจะทับกับขอบของกราฟรูปถัดไป ทำให้ข้อมูลเกิดความผิดพลาด การทับกันของรูปกราฟที่ติดกันนี้เราเรียกว่า Frequency aliasing ซึ่งทำให้ข้อมูลผิดพลาด

โดยสรุปสำหรับสัญญาณ Continuous-time $x(t)$ ที่มีความถี่สูงสุดไม่เกิน B ถ้าจะป้องกันไม่ให้เกิด Frequency aliasing จะต้องเลือก Sampling frequency $\omega_s \geq 2B$ ซึ่งเราเรียก Sampling frequency ω_s ที่ต่ำสุดที่เป็นไปได้ $(\omega_s = 2B)$ ที่จะไม่เกิด Frequency aliasing ว่าเป็น Nyquist rate

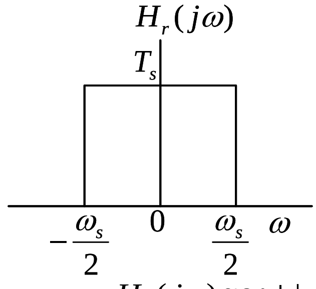
การสร้างสัญญาณ Continuous-time กลับคืนจากสัญญาณ Discrete-time

การแปลงสัญญาณ $x(t)$ ไปเป็นสัญญาณ $x(n)$ มีพบเห็นบ่อยๆ เช่นการใช้ Sound card ของเครื่องคอมพิวเตอร์บันทึกเสียงที่รับเข้ามาทางไมโครโฟนซึ่งไฟล์เสียงจะถูกบันทึกในรูปสัญญาณ Digital โดยใช้กระบวนการชักตัวอย่าง ในขณะเดียวกันการสร้างสัญญาณ $x(t)$ กลับคืนจากสัญญาณ $x(n)$ ก็มีพบเห็นบ่อยๆเช่นในกรณีของการนำไฟล์เสียงเพลงที่บันทึกในคอมพิวเตอร์หรือในแผ่น CD มาเล่นออกมาเป็นเสียงที่ออกทางลำโพง วิธีการแปลงจากสัญญาณ $x(n)$ ไปเป็นสัญญาณ $x(t)$ ในทางทฤษฎีสามารถทำได้ง่ายมากดังนี้

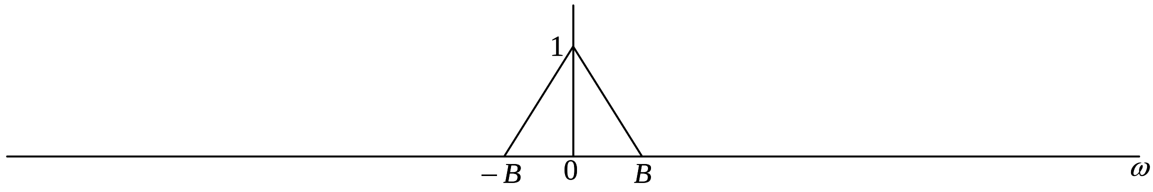
พิจารณากราฟ $X_p(j\omega)$ ดังรูปที่ 5.21 ถ้าต้องการทำใหกราฟ $X_p(j\omega)$ กลับมาเป็น $X(j\omega)$ จะต้องตัดกราฟ $X(j(\omega - k\omega_s))\big|_{k\neq 0}$ ออกไปทุกตัวให้เหลือเฉพาะกราฟตัวที่อยู่ตรงกลางคือ $X(j(\omega - k\omega_s))\big|_{k=0}$ ซึ่งเท่ากับ $X(j\omega)$ พอดี ซึ่งสามารถทำได้โดยการนำ Ideal low pass filter ที่มี Frequency response เป็น $H_r(j\omega)$ ที่มี Cut-off frequency เท่ากับ $\frac{\omega_s}{2}$ และมีความสูงเท่ากับ T_s ดังรูปที่ 5.22 ซึ่งเรียกว่า Ideal reconstruction filter มากรองสัญญาณ $x_p(t)$



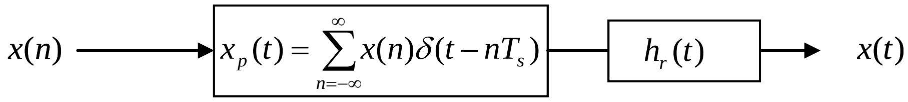
รูปที่ 5.21 ตัวอย่างกราฟของ $X_p(j\omega)$ ในการสร้าง $x(t)$ กลับคืนจาก $x(n)$



รูปที่ 5.22 Frequency response $H_r(j\omega)$ ของ Ideal reconstruction filter



รูปที่ 5.23 Fourier transform ของสัญญาณ Output ที่ออกมาจาก Ideal reconstruction filter



รูปที่ 5.24 Block diagram ของการการสร้าง $x(t)$ กลับคืนจาก $x(n)$

ผลที่ได้เมื่อนำสัญญาณ $x_p(t)$ ผ่าน Ideal reconstruction filter จะเหลือกราฟดังรูปที่ 5.23 ซึ่งตรงกับกราฟ $X(j\omega)$ พอดี ดังนั้น Output ที่ออกจาก Ideal reconstruction filter ก็คือ $x(t)$ นั่นเอง โดยสรุป กระบวนการสร้างสัญญาณ $x(t)$ กลับคืนมาจาก $x(n)$ เป็นดังนี้

1. นำสัญญาณ Discrete-time $x(n)$ มาสร้างเป็นสัญญาณ $x_p(t)$ ซึ่งเป็น Impulse train โดยให้ระยะห่างระหว่าง Impulse แต่ละลูกเป็น T_s

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\delta(t-nT_s)$$

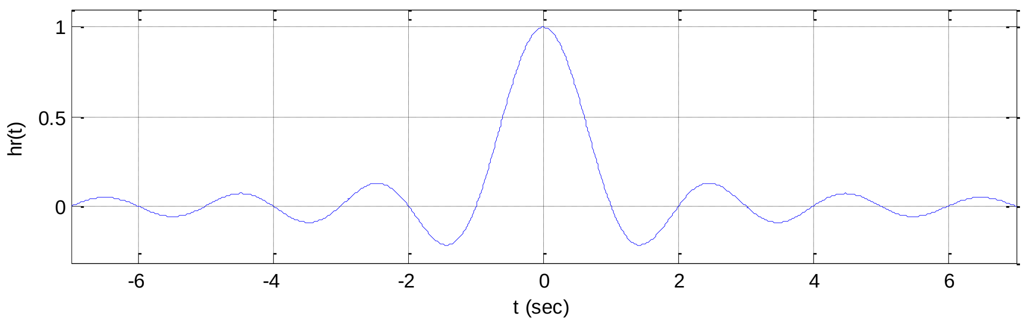
2. นำสัญญาณ $x_p(t)$ ที่ได้จากข้อ 1 มาผ่าน Ideal reconstruction filter $h_r(t)$ ที่มี Frequency response เป็น $H_r(j\omega)$ ดังรูปที่ 5.24

สำหรับ Unit impulse response $h_r(t)$ ของ Ideal reconstruction filter หาได้จากการแปลง Inverse Fourier transform ของ $H_r(j\omega)$ ดังนี้

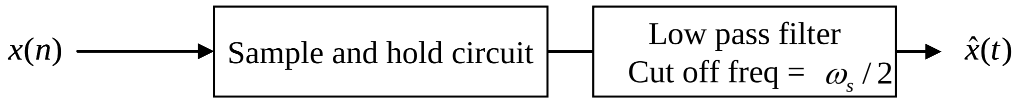
$$h_r(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}H_r(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{T_s}{2\pi}\int_{\omega=-\omega_s/2}^{\omega_s/2}e^{j\omega t}d\omega=\frac{T_s}{2\pi}\cdot\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\Big|_{\omega=-\omega_s/2}^{\omega_s/2}=\frac{T_s}{\pi t}\cdot\frac{e^{j\omega_s t/2}-e^{-j\omega_s t/2}}{j2}$$

$$=\frac{T_s}{\pi t}\cdot\frac{e^{j\pi/T_s}-e^{-j\pi/T_s}}{j2}=\frac{T_s}{\pi t}\sin\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)$$

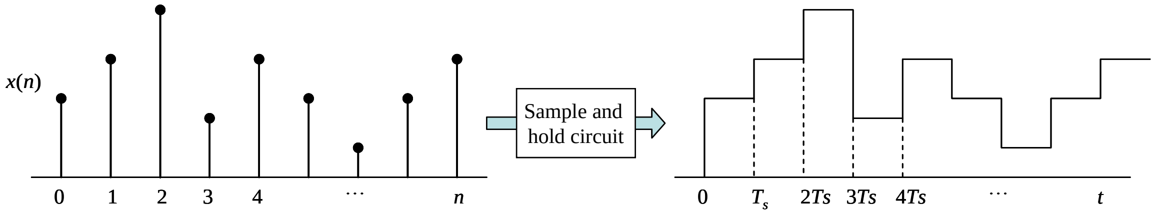
Unit impulse response $h_r(t)$ ของ Ideal reconstruction filter ที่มี $T_s=1$ แสดงดังรูปที่ 5.25



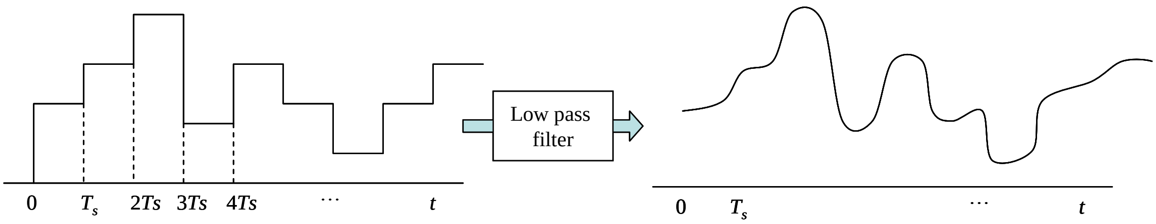
รูปที่ 5.25 Unit impulse response $h_r(t)$ ของ Ideal reconstruction filter ที่มี $T_s=1$



รูปที่ 5.26 Block diagram ของการการสร้าง $x(t)$ กลับคืนจาก $x(n)$ ในทางปฏิบัติ



รูปที่ 5.27 ตัวอย่างกราฟสัญญาณที่ได้จากวงจร Sample and hold



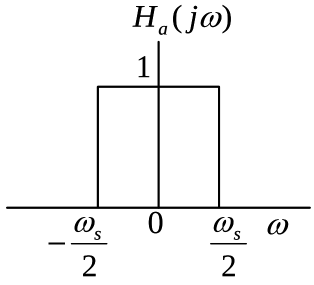
รูปที่ 5.28 ตัวอย่างกราฟสัญญาณจากวงจร Sample and hold เมื่อผ่านตัวกรองสัญญาณความถี่ต่ำ

การทำ Signal reconstruction ในทางปฏิบัติเราไม่สามารถใช้ Ideal reconstruction filter ได้เนื่องจาก $h_r(t)$ เป็น Filter ที่เป็น Non causal และมีความยาวเป็นอนันต์ ดังนั้นการทำ Signal reconstruction ในทางปฏิบัติส่วนใหญ่จะใช้ Block diagram ดังแสดงในรูปที่ 5.26 โดยวงจร Sample and hold เป็นวงจรที่ทำหน้าที่แปลงสัญญาณแบบ Discrete-time ไปเป็นสัญญาณแบบขั้นบันไดดังรูปที่ 5.27 จากนั้นสัญญาณแบบขั้นบันได้เมื่อผ่านตัวกรองสัญญาณความถี่ต่ำจะได้สัญญาณ $\hat{x}(t)$ ดังรูปที่ 5.28 ที่ใกล้เคียงกับ $x(t)$

การป้องกันการเกิด Frequency aliasing

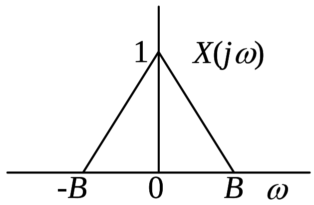
การป้องกันการเกิด Frequency aliasing ทำได้ 2 วิธีคือ

1. เลือกใช้ Sampling frequency ให้สูงกว่าหรือเท่ากับ 2 เท่าของความถี่สูงสุดของสัญญาณ Input ที่เราต้องการ Sampling
2. ถ้าในกรณีที่ไม่สามารถเลือก Sampling frequency ที่มีความถี่ที่สูงพอได้ ให้ทำการลดความถี่สูงสุดของสัญญาณ Input ที่จะทำการ Sampling ไม่ให้เกินครึ่งหนึ่งของ Sampling frequency โดยการนำสัญญาณ Input ไปผ่าน Anti-aliasing filter ที่เป็น Ideal low pass filter ที่มี Cut-off frequency เท่ากับ $\omega_s / 2$ ดังรูปที่ 5.29

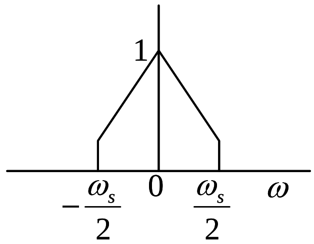


รูปที่ 5.29 Frequency response $H_a(j\omega)$ ของ Anti-aliasing filter

<u>ตัวอย่างที่ 5.12</u> สำหรับ $X(j\omega)$ ที่มีรูปดังกราฟด้านขวา

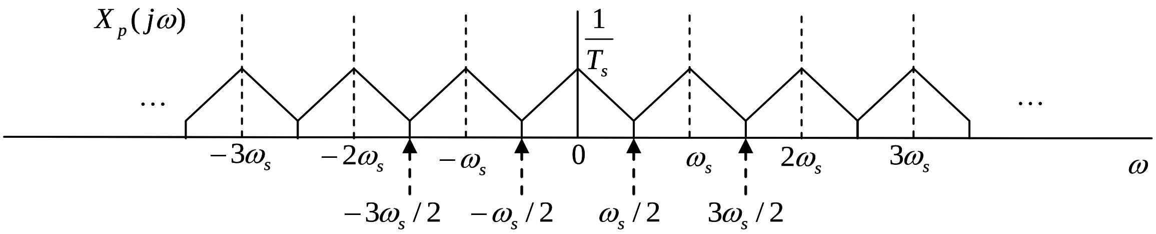


เมื่อผ่าน Anti-aliasing filter จะเหลือ



และเมื่อนำไปชักตัวอย่างจะได้กราฟ $X_p(j\omega)$ เป็นดังรูปที่ 5.30

ซึ่งจะไม่เกิดการทับซ้อนกันของ Spectrum ของกราฟรูปที่ติดกัน จึงไม่เกิด Frequency aliasing ขึ้น



รูปที่ 5.23 Fourier transform $X_p(j\omega)$ ของสัญญาณที่ผ่าน Anti-aliasing filter แล้วนำไปชักตัวอย่าง

มาถึงตรงนี้ นักศึกษาควรจะเข้าใจเนื้อหาต่อไปนี้

[ ] ความสัมพันธ์ระหว่าง $x(t)$, $x(n)$, $X(j\omega)$, $X_p(j\omega)$ และ $X(e^{j\Omega})$ และรูปกราฟต่างๆ

[ ] ความหมายของ Nyquist rate, Frequency aliasing

[ ] การทำ Signal reconstruction, การป้องกันการเกิด Frequency aliasing, anti-aliasing filter

---

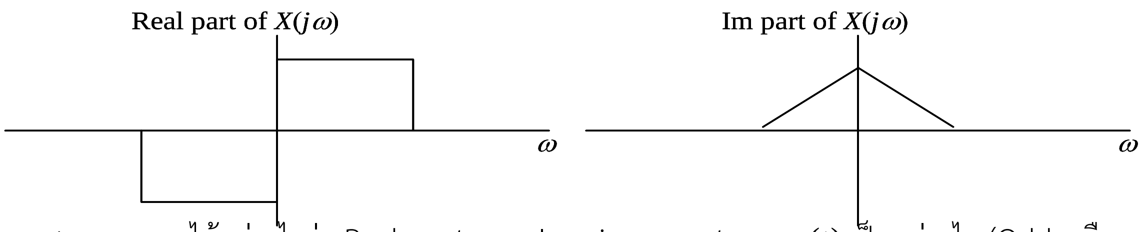
พึงมีสติปัญญารักษาใจ ให้คิดแต่สิ่งดี พูดแต่สิ่งดี ทำแต่สิ่งดี

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิสูจน์คุณสมบัติ Symmetry properties ของ Fourier transform ต่อไปนี้
$X^*(j\omega) = -X(j\omega)$ และ $X(j\omega)$ มีเฉพาะส่วนที่เป็น Imaginary
เมื่อ $x(t)$ เป็น Real และเป็น Odd function

---

2. ถ้า Fourier transform ของสัญญาณหนึ่งเป็นดังรูป



เราสามารถบอกได้อย่างไรว่า Real part และ Imaginary part ของ $x(t)$ เป็นอย่างไร (Odd หรือ Even function) *Hint: ดูคุณสมบัติ Symmetry properties ของ Fourier transform*

---

3. จงเขียนสัญญาณ $x(t) = \cos(\pi t)\cos(7\pi t)$ ในรูป Fourier series $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$
Hint: ใช้สูตรทางตรีโกณมิติเข้าช่วย และใช้วิธีการเทียบฟอร์มกับ Fourier series

---

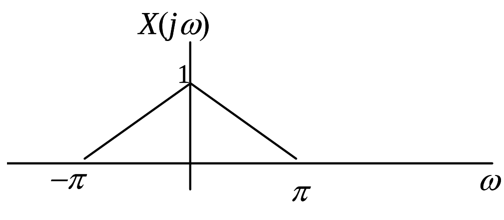
4. กำหนดให้ $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N}$ จงพิสูจน์ว่า $\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_0 n} = 0$ เมื่อ $k \neq m$ และ $\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_0 n} = N$ เมื่อ $k = m$ และจงบอกว่า คุณสมบัตินี้เอาไปใช้คำนวณอะไรได้ (*Hint: ดูที่มาของสูตร DTFS*)

---

5. จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$ เมื่อ $X(k)$ เป็น Discrete time Fourier series coefficient ของ $x(n)$ เมื่อให้ $x(n)$ เป็น Periodic discrete time signal และมี Period = N
Hint: Parseval's relation

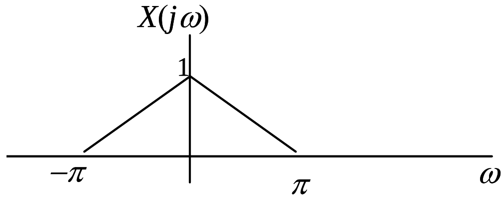
---

6. สัญญาณ $x(t)$ มี Fourier transform ดังรูป
จงวาดรูป Fourier transform ของสัญญาณ
$y(t) = x(t)\cdot\cos(4\pi t)$ และ $z(t) = y(t)\cdot\cos(6\pi t)$
Hint: ดูเรื่อง Modulation



---

7. สัญญาณ $x(t)$ ในข้อ 6 เมื่อทำการ Sampling ด้วยความถี่ 0.75 Sample/sec จงวาด Fourier transform ของ $x_p(t) = x(t)\cdot\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\right)$ และ DTFT ของ $x(n) \equiv x(t)\big|_{t=nT_s}$ และบอกด้วยว่า มี Frequency aliasing เกิดขึ้นหรือไม่ ถ้ามี



7.1 จะต้องใช้ Sampling rate เท่าใดจึงจะไม่เกิด Aliasing

7.2 ถ้า Sampling rate เป็นเท่าเดิม (0.75 Sample/sec) จะต้องนำ $x(t)$ ผ่าน Ideal low pass filter ที่มี cut off frequency เท่าไรจึงจะไม่เกิด Aliasing

---

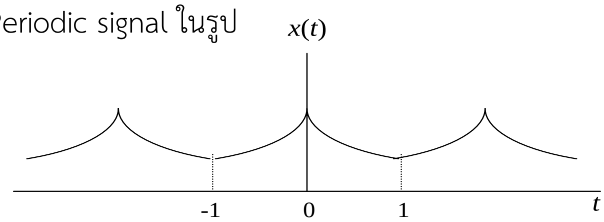
8. จงแสดงให้เห็นว่า

$e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(j(\omega - k\omega_0))$

---

9. จงหา Fourier Series Coefficient ของ Periodic signal ในรูป

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{for } 0 \le t < 1 \\ e^{t} & \text{for } -1 \le t < 0 \end{cases}$$



10.จงแสดงให้เห็นว่าสัญญาณ Complex sinusoidal signal $e^{j\Omega n}$ เป็น Eigen function ของระบบ Discrete time LTI system

---

11. กำหนดให้วงจรหนึ่งเป็นดังนี้
จงหา Frequency response ของระบบ
และอธิบายว่าระบบนี้เป็น Filter ประเภทใด