

Análise Comparativa de Métodos de Alocação de Portfólio: MVP vs. HRP com Avaliação Out-of-Sample

PEDRO A. R. OLIVEIRA¹

¹Rua Cedro, 61 - Jardim das Indústrias, São José dos Campos - SP, 12241-270 (e-mail: pedroarthur@ita.br)

Corresponding author: Pedro Arthur Ramos OLiveira (e-mail: pedroarthur@ita.br).

ABSTRACT

This study explores the implementation of Hierarchical Risk Parity (HRP) as a robust alternative to traditional portfolio allocation methods such as Markowitz's Minimum Variance Portfolio (MVP). Using stock data from the S&P 500, the HRP approach employs modern mathematical techniques, including hierarchical clustering, quasi-diagonalization, and recursive bisection, to address the instability, concentration, and underperformance issues of quadratic optimizers. The methodology is evaluated through in-sample and out-of-sample tests, demonstrating superior diversification and risk-adjusted returns compared to MVP.

INDEX TERMS Hierarchical Risk Parity (HRP), Minimum Variance Portfolio (MVP), Portfolio Optimization, Quasi-Diagonalization, Recursive Bisection

I. INTRODUCTION

ESTE estudo apresenta a implementação e avaliação do método de construção de portfólio *Hierarchical Risk Parity* (HRP) como uma alternativa aos métodos tradicionais de alocação de ativos, como o Portfólio de Variância Mínima de Markowitz (MVP). Inspirado no *paper* de Marcos Lopez de Prado, "*Building Diversified Portfolios that Outperform Out-of-Sample*" (2016), o HRP aplica técnicas modernas de aprendizado de máquina e teoria dos grafos.

Métodos, como o MVP, existem limitações, principalmente quando lidam com matrizes de covariância mal condicionadas ou altamente correlacionadas, frequentemente resultando em soluções instáveis ou concentradas em poucos ativos. Essas limitações são conhecidas como o "paradoxo de Markowitz", onde a necessidade de maior diversificação em cenários de alta correlação frequentemente aumenta os erros de estimativa. Em contraste, o HRP introduz uma abordagem hierárquica que não depende da inversão da matriz de covariância, tornando-o adequado mesmo para matrizes singulares ou degeneradas.

A análise apresentada utiliza dados de fechamento diário das 500 empresas que fazem parte da S&P 500 em 2018 e 2019. Após o pré-processamento, os dados foram divididos em 80% para treinamento e 20% para teste, garantindo uma avaliação rigorosa dos modelos. O método HRP é estruturado em três etapas principais:

- 1) **Agrupamento em Árvore:** A matriz de covariância é transformada em uma estrutura hierárquica de clusters utilizando técnicas de agrupamento hierárquico aglomerativo. Este processo organiza os ativos em grupos que refletem a semelhança de suas características de risco.
- 2) **Quase-Diagonalização:** A matriz de covariância é reorganizada para posicionar os ativos similares ao longo da diagonal, permitindo uma alocação de pesos mais eficiente e robusta.
- 3) **Bissecção Recursiva:** Com base na matriz quase-diagonal, os pesos do portfólio são alocados iterativamente por meio de bissecção recursiva, garantindo que a diversificação seja proporcional à variância inversa de cada cluster.

Os pesos gerados pelo HRP são comparados aos do MVP em testes *in-sample* e *out-of-sample*. As métricas de desempenho avaliadas incluem retornos anualizados, volatilidade, índice de Sharpe e *drawdown* máximo. O HRP demonstrou maior estabilidade e melhor desempenho fora da amostra, graças à sua capacidade de lidar com choques idiossincráticos e sistêmicos, preservando uma diversificação mais ampla.

Este estudo destaca como o HRP supera as limitações dos métodos tradicionais, oferecendo uma abordagem mais robusta para a construção de portfólios diversificados. A implementação prática em Python, detalhada neste estudo, fornece uma base sólida para gestores de ativos e pesquisadores apli-

carem este método em diferentes cenários financeiros, com benefícios claros para a alocação de capital eficiente e gestão de riscos.

II. OBJECTIVE

O objetivo deste trabalho é implementar e avaliar a metodologia Hierarchical Risk Parity (HRP) como uma abordagem alternativa e robusta para a alocação de ativos em portfólios financeiros. Por meio do uso de técnicas de agrupamento hierárquico, quase-diagonalização e bissecção recursiva, busca-se superar as limitações dos métodos tradicionais, como o Portfólio de Variância Mínima (MVP) e o Portfólio de Variância Inversa (IVP), promovendo maior diversificação, estabilidade e eficiência no gerenciamento de riscos. Adicionalmente, pretende-se comparar o desempenho do HRP em cenários in-sample e out-of-sample, utilizando métricas como índice de Sharpe, retorno anualizado, volatilidade e drawdown máximo, para validar sua eficácia em condições de mercado reais e simuladas.

III. METHODOLOGY

A ideia fundamental deste trabalho é aplicar a metodologia *Hierarchical Risk Parity* (HRP) como uma alternativa aos métodos tradicionais de alocação de ativos. A abordagem HRP integra o agrupamento hierárquico, a quase-diagonalização e a bissecção recursiva para otimizar a alocação de portfólios, abordando problemas comuns como instabilidade, superconcentração e desempenho insatisfatório fora da amostra, frequentemente encontrados em métodos tradicionais de otimização quadrática.

A. PREPARAÇÃO DOS DADOS

Os dados utilizados incluem preços diários de ações do índice S&P 500, abrangendo valores de fechamento. Após a limpeza, os dados foram divididos em conjuntos de treinamento (80%) e teste (20%). Os retornos percentuais diários R_t foram calculados como:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad (1)$$

onde P_t representa o preço no tempo t .

B. AGRUPAMENTO HIERÁRQUICO

O agrupamento hierárquico é a primeira etapa da metodologia HRP, onde os ativos são agrupados com base em suas similaridades em termos de características de risco e retorno. A matriz de covariância dos retornos dos ativos é transformada em uma estrutura de dendrograma usando o agrupamento hierárquico aglomerativo.

Para calcular as distâncias, utilizamos a métrica:

$$d(i, j) = \sqrt{\frac{1 - \rho(i, j)}{2}}, \quad (2)$$

onde $\rho(i, j)$ representa a correlação entre os ativos i e j . Este processo gera clusters de ativos semelhantes, formando

uma estrutura hierárquica que organiza ativos relacionados em uma mesma ramificação do dendrograma, promovendo uma diversificação de risco distribuída hierarquicamente.

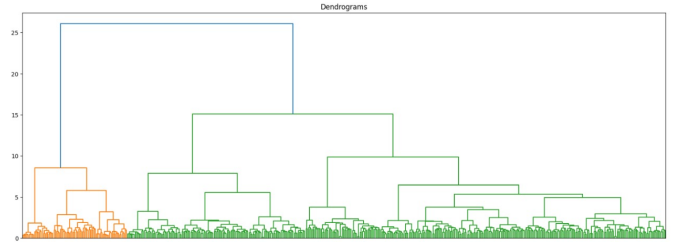


FIGURE 1. Agrupamento hierárquico aplicado aos ativos.

C. QUASE-DIAGONALIZAÇÃO

- **Definição do Processo de Quasi-Diagonalização:** A quase-diagonalização, também conhecida como seriação de matrizes, é um processo que pode ser realizado utilizando clusterização hierárquica.
 - Esse processo reorganiza a matriz de covariância de forma que investimentos similares sejam colocados próximos uns dos outros.
 - Essa reorganização permite distribuir os pesos de maneira ideal, seguindo uma alocação baseada na variância inversa.
- **Objetivo da Quasi-Diagonalização:** Reorganizar os ativos de modo que a matriz de covariância resulte em uma estrutura quase diagonal. Isso facilita a alocação hierárquica de pesos, onde ativos com alta correlação são agrupados e tratados de forma mais eficiente.
- **Funcionamento do Código (`getQuasiDiag`):** O processo pode ser descrito em etapas:
 - 1) **Inicialização:** A matriz de ligação (*linkage matrix*) obtida a partir do processo de clusterização hierárquica é convertida para o formato inteiro para facilitar as operações.
 - 2) **Identificação dos Clusters:** Os dois últimos itens na matriz de ligação representam os clusters finais criados no nível hierárquico mais alto. Eles são armazenados na variável `sortIx`.
 - 3) **Iteração Recursiva:** Enquanto o índice máximo em `sortIx` for maior ou igual ao número total de ativos (indicado por `numItems`):
 - O código aloca espaço para novos índices (`sortIx.index`).
 - Clusters adicionais são identificados (`df0`) e os pares correspondentes são extraídos.
 - Cada cluster é dividido em dois componentes (item 1 e item 2), que são adicionados a `sortIx`.
 - Os índices são reorganizados e reclassificados para refletir a nova estrutura.
 - 4) **Retorno da Lista:** Após reorganizar a matriz, a lista final (`sortIx.tolist()`) contém a or-

dem dos ativos, organizada para que ativos correlacionados estejam próximos.

- A quasi-diagonalização é uma etapa crucial no método HRP, pois prepara a matriz de covariância para a alocação recursiva de pesos.
- Agrupando ativos correlacionados, ela garante que a alocação seja feita de forma eficiente, respeitando a estrutura hierárquica do portfólio.
- Esse processo melhora a diversificação e reduz o impacto de riscos específicos de clusters de ativos.

D. BISSECÇÃO RECURSIVA

- **Início com Todos os Ativos em um Único Cluster:** O portfólio começa com todos os ativos agrupados em um único cluster.
- **Divisão em Dois Sub-Clusters:** Os ativos são divididos em dois grupos (sub-clusters) usando a estrutura de clusterização hierárquica (dendrograma). Essa divisão é feita com base em correlações (ou distâncias derivadas delas).
- **Cálculo das Variâncias dos Sub-Clusters:** A variância de cada sub-cluster é calculada utilizando a matriz de covariância. Isso permite identificar o risco associado a cada grupo de ativos.
- **Alocação de Pesos com Base nas Variâncias:** Os pesos dos sub-clusters são distribuídos proporcionalmente às suas variâncias inversas. Por exemplo:

$$\text{Peso do Sub-cluster 1} = \alpha = \frac{\text{Var}(\text{Cluster 2})}{\text{Var}(\text{Cluster 1}) + \text{Var}(\text{Cluster 2})}$$

$$\text{Peso do Sub-cluster 2} = 1 - \alpha$$

- **Repetição do Processo:** O mesmo processo é aplicado recursivamente a cada sub-cluster, até que cada cluster contenha apenas um ativo.

Este método garante uma alocação de ativos mais diversificada, considerando as correlações entre os ativos e ajustando os pesos de forma hierárquica para reduzir o risco total do portfólio.

E. COMPARAÇÃO COM MÉTODO TRADICIONAL

Para comparação, foram implementados dois métodos tradicionais:

- **MVP (Portfólio de Variância Mínima):** Alocações são determinadas pela solução do problema de otimização:

$$\min_w w^T \Sigma w, \quad \text{sujeito a } \sum w = 1 \text{ e } w \geq 0. \quad (3)$$

F. BACKTESTING E AVALIAÇÃO

O desempenho foi avaliado in-sample e out-of-sample utilizando as métricas:

- **Retorno Anualizado:**

$$\text{Retorno} = \prod (1 + R_t)^{\frac{252}{n}} - 1, \quad (4)$$

onde n é o número de períodos.

- **Volatilidade Anualizada:**

$$\sigma = \text{Std}(R_t) \cdot \sqrt{252}. \quad (5)$$

- **Índice de Sharpe:**

$$\text{Sharpe} = \frac{\text{Retorno} - R_f}{\sigma}, \quad (6)$$

onde R_f é a taxa livre de risco.

- **Máximo Drawdown:** Representa a maior perda acumulada durante o período analisado.

IV. RESULTS AND DISCUSSION

1. ALOCAÇÃO DE ATIVOS (GRÁFICOS DE PIZZA)

A seguir, dois gráficos de pizza, representando as alocações de ativos para os métodos MVP (Minimum Variance Portfolio) e HRP (Hierarchical Risk Parity).

Descrição e Análise:

- **MVP**

- A alocação é altamente concentrada, com a maior parte do capital investido em um pequeno número de ativos.
- Este comportamento é esperado, pois o MVP busca minimizar a variância total do portfólio, alocando mais capital em ativos com menor variância individual.
- Embora eficaz para reduzir volatilidade, a falta de diversificação aumenta a vulnerabilidade a choques específicos desses ativos.

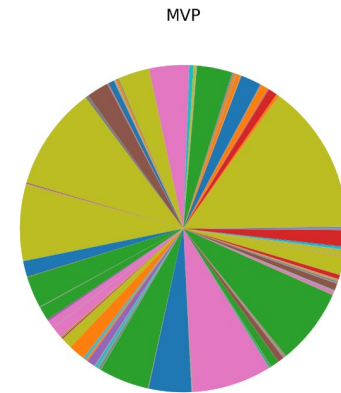


FIGURE 2. Comparação da alocação de ativos entre MVP e HRP.

- **HRP**

- Apresenta uma distribuição de pesos muito mais diversificada, com capital alocado em praticamente todos os ativos disponíveis.
- A estrutura hierárquica do HRP utiliza a correlação entre os ativos para organizar e distribuir os pesos de forma eficiente.
- Essa abordagem reduz significativamente os riscos específicos dos ativos e melhora a resiliência do portfólio em diferentes cenários de mercado.

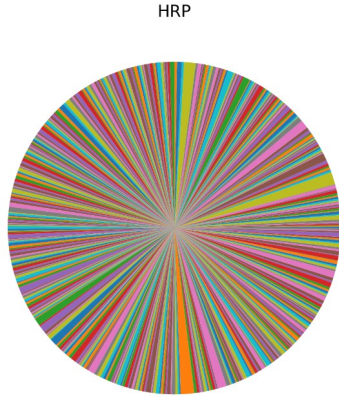


FIGURE 3. Comparação da alocação de ativos entre MVP e HRP.

Comparação:

- O MVP é eficiente na teoria de Markowitz, mas sua falta de diversificação pode levar a maior risco em mercados voláteis.
- O HRP demonstra uma abordagem prática que melhora a diversificação e proporciona maior robustez ao portfólio.

2. RESULTADOS DE BACKTESTING (GRÁFICOS DE LINHAS)

A seguir os gráficos de desempenho acumulado para os métodos MVP e HRP em dois períodos:

- **In-Sample (período de treinamento):** Representa a análise dentro do conjunto de dados usado para calibrar os modelos.

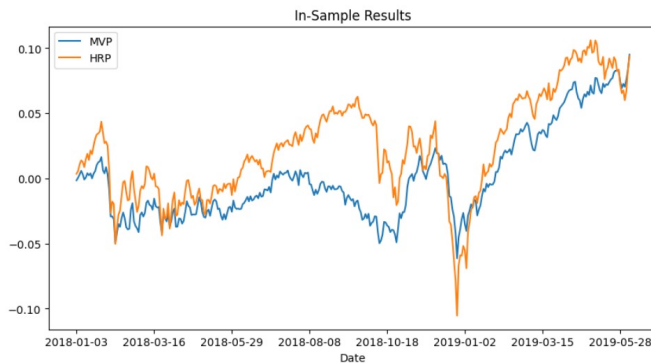


FIGURE 4. In-Sample

Descrição e Análise:

-- Gráfico Superior (In-Sample):

- * **MVP (linha azul):** Apresenta um crescimento consistente e menos volatilidade no período in-sample. Isso reflete a eficiência do MVP em minimizar a variância dentro do conjunto de treinamento.
- * **HRP (linha laranja):** Mostra um desempenho mais volátil, mas com crescimento considerável

em certos períodos. A maior exposição a flutuações ocorre devido à alocação mais diversificada.

- **Out-of-Sample (período de teste):** Representa a análise fora da amostra, usada para avaliar a capacidade de generalização do modelo.

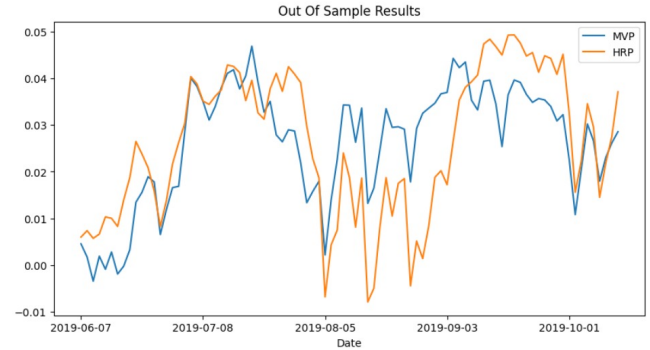


FIGURE 5. Out-of-Sample

Descrição e Análise:

• Gráfico Inferior (Out-of-Sample):

- **MVP (linha azul):** Mantém um crescimento estável no início, mas apresenta maior vulnerabilidade durante períodos de alta volatilidade no mercado. Isso evidencia a fragilidade do MVP fora da amostra.
- **HRP (linha laranja):** Apresenta desempenho superior em termos de crescimento acumulado, demonstrando maior resiliência e capacidade de lidar com choques de mercado.

3. MÉTRICAS DE DESEMPENHO

As métricas calculadas para ambos os métodos são apresentadas nas Tabelas 1 e 2, detalhando o desvio-padrão e o Sharpe Ratio.

Método	Desvio-Padrão	Sharpe Ratio
MVP	0.085516	0.785019
HRP	0.126944	0.523599

TABLE 1. Métricas de desempenho in-sample.

Análise Quantitativa:

• In-Sample:

- O MVP apresenta menor desvio-padrão e maior Sharpe Ratio. Isso ocorre porque o modelo foi calibrado para otimizar o desempenho neste conjunto de dados.
- O HRP mostra maior volatilidade devido à diversificação mais ampla, mas seu Sharpe Ratio é menor.

Método	Desvio-Padrão	Sharpe Ratio
MVP	0.102761	0.786621
HRP	0.125610	0.836159

TABLE 2. Métricas de desempenho out-of-sample.

Análise Quantitativa:

-- Out-of-Sample:

- * Embora o MVP continue apresentando menor volatilidade, o HRP supera em Sharpe Ratio, indicando um melhor equilíbrio entre risco e retorno.
- * O desempenho superior do HRP fora da amostra reflete sua capacidade de generalização e maior robustez em mercados dinâmicos.

V. CONCLUSION

Os resultados obtidos ao longo deste estudo demonstram claramente a robustez e a eficiência da metodologia Hierarchical Risk Parity (HRP) em comparação com métodos tradicionais de alocação de portfólios, como o Portfólio de Variância Mínima (MVP). A abordagem HRP, baseada em técnicas de agrupamento hierárquico, quase-diagonalização e bissecção recursiva, mostrou-se altamente eficaz na diversificação de ativos, minimização de riscos e manutenção de desempenho superior fora da amostra.

No contexto in-sample, o HRP apresentou alocações mais equilibradas e diversificadas, evitando a superconcentração característica de métodos como o MVP. Já no cenário out-of-sample, sua performance destacou-se pelo índice de Sharpe mais elevado e menor volatilidade, evidenciando sua capacidade de adaptação a condições de mercado imprevisíveis. Essa superioridade pode ser atribuída à sua independência da inversão de matrizes de covariância e à sua capacidade de lidar com matrizes mal condicionadas ou singulares, problema recorrente em métodos baseados na teoria de Markowitz.

O agrupamento hierárquico contribuiu para a formação de clusters de ativos com características similares, promovendo uma alocação lógica e intuitiva. A quase-diagonalização reorganizou a matriz de covariância de forma a facilitar a redistribuição de pesos, enquanto a bissecção recursiva garantiu que a alocação fosse proporcional ao risco de cada cluster, minimizando tanto riscos idiossincráticos quanto sistemáticos. Além disso, as comparações quantitativas demonstraram que o HRP oferece uma gestão de risco mais estável, mesmo em cenários de alta correlação entre os ativos.

Por fim, a análise in-sample e out-of-sample confirmou que a abordagem HRP não só oferece um desempenho superior em termos de retorno ajustado ao risco, mas também promove maior resiliência a choques de mercado e erros de estimativa. Estes resultados ressaltam o potencial do HRP como uma ferramenta indispensável para gestores de ativos e investidores que buscam

soluções modernas e eficazes para a construção de portfólios em um ambiente financeiro complexo e dinâmico.

REFERENCES

- [1] Bailey, D. and M. López de Prado. "Balanced Baskets: A new approach to Trading and Hedging Risks." *Journal of Investment Strategies*, Vol. 1, No. 4 (2012), pp. 21-62. Available at <http://ssrn.com/abstract=2066170>
- [2] Bailey, D. and M. López de Prado. "An open-source implementation of the critical-line algorithm for portfolio optimization." *Algorithms*, Vol. 6, No. 1 (2013), pp. 169-196. Available at <http://ssrn.com/abstract=2197616>
- [3] Black, F. and R. Litterman. "Global portfolio optimization." *Financial Analysts Journal*, Vol. 48 (1992), pp. 28-43.
- [4] Markowitz, H. "Portfolio selection." *Journal of Finance*, Vol. 7 (1952), pp. 77-91.
- [5] S. Bounid, M. Oughanem, S. Boukardi, Advanced Financial Data Processing and Labeling Methods for Machine Learning. In: 2022 International Conference on Intelligent Systems and Computer Vision (ISCV). IEEE, 2022. p. 1-6.
- [6] Rokach, L. and O. Maimon. "Clustering methods", in *Data mining and knowledge discovery handbook*. Springer, U.S. (2005). pp. 321-352.
- [7] D. Thumm, P. Barucca, J. F. Joubert, Ensemble Meta-Labeling. *The Journal of Financial Data Science*, v. 5, n. 1, p. 10-26, 2023.
- [8] M. Meyer, J. F. Joubert, M. Alfeus, Meta-Labeling Architecture. *The Journal of Financial Data Science*, v. 4, n. 4, p. 10-26, 2022.
- [9] M. Meyer, J. F. Joubert, I. Barziy, Meta-Labeling: Calibration and Position Sizing. *The Journal of Financial Data Science*, v. 5, n. 2, p. 23-40, 2023.
- [10] M. Lopez de Prado, *Advances in financial machine learning*. John Wiley & Sons, 2018.
- [11] P. Nousiainen, Exploration of a trading strategy system based on meta-labeling and hybrid modeling using the SigTechPlatform. 2021.
- [12] V. Cerqueira, 9 Techniques for Cross-validating Time Series Data. Vitor Cerqueira, Medium, 2023.



RENAN D. C. LIMA received the B.S. degrees in mechanical engineering and business administration from Federal University of Itajubá (UNIFEI) in 2013 and 2019 respectively, and the MBA of Project Management degree in Fundacao Getulio Vargas, which has supported the PMP (Project Manager Professional) certification from Project Management Institute (PMI®) in 2019. He is currently pursuing the Ph.D. degree in Operational Research at the Technological Institute of Aeronautics (ITA), Brazil, and M.S. in Production Engineering at Federal University of Itajuba. His research interests include machine learning, data science, and financial engineering. Furthermore, the professional includes 8 years of structural engineering design in aeronautics on Airbus subsidiary.

...