



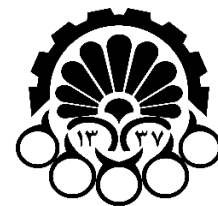
به نام خدا

تمرین امتیازی

معماری کامپیوتر

دکتر شریعتمداری مرتضوی

نیمسال دوم 1401-1402



دانشگاه صنعتی امیرکبیر

پیاده سازی الگوریتم CORDIC

واژه CORDIC مخفف عبارت Coordinate Rotation Digital Computer است و از نقطه نظر پیاده سازی یک الگوریتم کمال بهینه یا اصطلاحاً Hardware-Efficient است که با استفاده از یک متد تکرار شونده مبتنی بر چرخش و دوران، برای پیاده سازی سخت افزاری رنج وسیعی از توابع پایه‌ای ریاضی بکار برده می شود. برای آشنایی اولیه با الگوریتم CORDIC به لینک زیر مراجعه و مطالب آن را مطالعه نمایید:

<https://hexalinx.com/software/use-the-xilinx-cordic-to-generate-sine-and-cosine-functions>

اسالیده‌های فایل CORDIC_ppt.pdf به طور کامل الگوریتم CORDIC و پیاده‌سازی آن را مورد بررسی قرار می‌دهد. به منظور درک کامل الگوریتم پیشنهاد می شود که پس از مطالعه‌ی مطلب سایت hexalinx، این اسالیدها را مطالعه کنید.

علاوه بر اینها، در ادامه‌ی صورت گزارش، فرمول کلی الگوریتم و مثالی برای پیاده‌سازی-Fixed Point این الگوریتم برای محاسبه‌ی Sinh و Cosh ارائه شده است.

فرمول کلی الگوریتم CORDIC به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m\delta_k 2^{-k} \\ \delta_k 2^{-k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix}$$
$$Z_{k+1} = Z_k + \delta_k \theta_k,$$

جدول مربوط به CORDIC با تعریف X, Y, Z به عنوان پارامترهای مربوطه در ادامه آمده است:

m	$Z_K \rightarrow 0$	$Y_K \rightarrow 0$
1	$X_K = K_1(X_0 \cos(Z_0) - Y_0 \sin(Z_0))$ $Y_K = K_1(Y_0 \cos(Z_0) + X_0 \sin(Z_0))$	$X_K = K_1 \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$ $Z_K = Z_0 + \arctan(Y_0/X_0)$
0	$X_K = X_0$ $Y_K = Y_0 + X_0 \times Z_0$	$X_K = X_0$ $Z_K = Z_0 + Y_0/X_0$
-1	$X_K = K_{-1}(X_0 \cosh(Z_0) - Y_0 \sinh(Z_0))$ $Y_K = K_{-1}(Y_0 \cosh(Z_0) + X_0 \sinh(Z_0))$	$X_K = K_{-1} \sqrt{X_0^2 - Y_0^2}$ $Z_K = Z_0 + \tanh^{-1}(Y_0/X_0)$

همانطور که مشاهده می‌شود، برای محاسبه‌ی $\cosh(z_0)$ و $\sinh(z_0)$ باید $m = -1$ باشد و در مود rotation ($Z_k \rightarrow 0$) عمل کنیم در صورتی که $Y_0 = 0$ و $X_0 = 1/K_{-1}$ قرار دهیم، $X_k = \sinh(z_0)$ و $Y_k = \cosh(z_0)$ خواهد بود. در ادامه جدول مربوط به نحوه محاسبه زوایای تتا دنباله‌ی شیفت‌هایی که باید بدهیم و ضربی که در شعاع ضرب می‌شود ($K_{-1} = 0.8$) آمده است.

Mode	Angle θ_k	Shift sequence	Radius factor
circular $m = 1$	$\tan^{-1}(2^{-k})$	0, 1, 2, ...	$K_1 = 1.65$
linear $m = 0$	2^{-k}	1, 2, ...	$K_0 = 1.0$
hyperbolic $m = -1$	$\tanh^{-1}(2^{-k})$	1, 2, 3, 4, 4, ...	$K_{-1} = 0.80$

زوایایی که از رابطه‌ی بالا به دست آمده در جدول 3 قابل مشاهده است. زوایا برحسب رادیان، به صورت-Fixed 8 Point بیتی با 7 بیت اعشار و بدون علامت تبدیل و استفاده شده‌اند.

نحوه‌ی به دست آمدن	زاویه (درجه)	زاویه (رادیان)	زاویه (fixed-point)
$Atanh(2^{-1})$	۳۱.۴۷۲۹	۰.۵۴۹۳	"۰۱۰۰۰۱۱۰"
$Atanh(2^{-2})$	۱۴.۶۳۴۱	۰.۲۵۵۴	"۰۰۱۰۰۰۰۱"
$Atanh(2^{-3})$	۷.۲۰۰۰	۰.۱۲۵۷	"۰۰۰۱۰۰۰۰"
$Atanh(2^{-4})$	۳.۵۸۵۷	۰.۰۶۲۵۸	"۰۰۰۰۱۰۰۰"
$Atanh(2^{-5})$	۱.۷۹۱۱	۰.۰۳۱۲۶	"۰۰۰۰۰۱۰۰"
$Atanh(2^{-6})$	۰.۸۹۵۳	۰.۰۱۵۶۳	"۰۰۰۰۰۰۱۰"
$Atanh(2^{-7})$	۰.۴۴۷۶	۰.۰۰۷۸۱۳	"۰۰۰۰۰۰۰۱"

نکته‌ی دیگری که باید به آن اشاره شود، نحوه‌ی محاسبه‌ی $K-1$ و تکرار (Repetition) بعضی از تکرارها (Iteration) (4,13,40,121,...) و محدوده‌ی مجاز برای زاویه‌ی Z_0 برای رسیدن به همگرایی است. $K-1$ همان ضریبی است که برای داشتن چرخش خالص آن را از ابتدا حذف کرده‌ایم و سپس تاثیر کلی آن را روی اندازه‌ی بردار اعمال می‌کنیم. این مقدار از فرمول زیر قابل محاسبه است:

$$K_{-1} = \prod_{i=1}^n \cosh(\alpha_i)$$

برای از بین بردن اثر آن کافی است که مقدار X_0 ورودی را برابر معکوس این مقدار قرار دهیم که برابر 1.2 خواهد بود. اگر کل زاویه‌ها به دست آمده را با یکدیگر جمع کنیم، محدوده‌ی همگرایی به دست می‌آید. برای رسیدن به همگرایی نیاز است که بعضی از تکرارها مجدداً انجام شوند که شماره‌ی آنها در پاراگراف قبلی آمده است. با توجه به ذات \sinh و \cosh و پیرویدیک نبودن آن، زوایای بیشتر و کمتر از این مقدار با این الگوریتم قابل محاسبه نخواهد بود. محدوده‌ی همگرایی این الگوریتم به صورت زیر خواهد بود:

$$-\sum_{k=1}^n \theta_k \leq \emptyset < \sum_{k=1}^n \theta_k$$

هدف از این تمرین، پیاده‌سازی الگوریتم CORDIC برای محاسبه‌ی موارد زیر است:

1. $\tan^{-1} X$

2. $\sin^{-1} X$

3. E^x

برای گرفتن نمره کامل امتیازی کافی است 2 مورد از موارد بالا رو کدنویسی کنید. توجه داشته باشید که برای هرکدام باید 1 پروژه جدا تعریف کنید نمره امتیازی حداکثر 1.5 نمره دارد و مهلت انجام آن هم تا انجام پروژه اصلی درس است. در گزارش کار نیاز است موارد زیر قرار گیرد :

1. شماتیک مدار

2. تست بنچ

3. توضیحات کارهای انجام شده

4. سطح مصرفی و منابع مصرفی