دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی برق

سیگنال ها و سیستم ها

مقدمه ی اول:

از آنجایی که شبیه سازی ها در محیط متلب و با کامپیوتر انجام می شود، همه ی سیگنال هایی که در شبیه سازی ها با آن ها سر و کار داریم سیگنال های گسسته است. لذا همه ی نتایج باید با عناوین مطرح شده در کلاس در حوزه ی گسسته تطابق داشته باشد. اما همان گونه که چندین بار سر کلاس مطرح شد دو حوزه ی گسسته و پیوسته، روابط بسیار نزدیکی دارند و مفاهیم آنها با یکدیگر در تطابق است.

فرض کنید در متلب، یک سیگنال (بردار) x به طول N سمپل و T ثانیه داریم ($t_s = \frac{1}{f_s} = \frac{T}{N-1}$) و می خواهیم از آن تبدیل فوریه بگیریم. در واقع f_s فرکانس نمونه برداری و t_s فاصله ی زمانی بین دو سمپل را نشان می دهد. این دو پارامتر به ما می گویند که از سیگنال پیوسته اصلی به چه صورت نمونه برداری شده است و سیگنال گسسته ی فعلی تولید شده است. برای رسم دقیق سیگنال در حوزه ی زمان اگر بازه ی زمانی مربوط به سیگنال معلوم باشد $t = t_{start}: t_s: t_{end}$ به طوری که $t_{start} - t_{end} = T$ ، می توان به راحتی آن را با دستور $\text{plot}(t, x)$ رسم کرد.

برای گرفتن تبدیل فوریه از دستور $y = \text{fftshift}(\text{fft}(x))$ استفاده می کنیم. خروجی این دستور یعنی y یک بردار با N سمپل است که هر درایه ی آن یک عدد مختلط است لذا هر درایه یک اندازه و یک فاز دارد. نکته ی مهم در این جا این است که هر یک از این N عدد به دست آمده متعلق به چه فرکانسی می باشد؟

فرکانس ها به صورت $f = \frac{-f_s}{2} : \frac{f_s}{N-1} : \frac{f_s}{2}$ خواهند بود. بنابراین برای رسم اندازه ی تبدیل فوریه می توان از دستور $\text{plot}(f, \text{abs}(y))$ و برای رسم فاز تبدیل فوریه می توان از دستور $\text{plot}(f, \text{angle}(y))$ استفاده کرد.

راجع به بازه ی فرکانس های در نظر گرفته شده (هایلایت سبز)، سه نکته ی زیر حائز اهمیت هستند:

نکته ی اول:

در کلاس برای تطابق با کتاب اپنهایم، کلمه ی فرکانس به ω اطلاق شد ولی در این تمرین کامپیوتری به $f = \frac{\omega}{2\pi}$ عنوان فرکانس می دهیم. دلیل این امر این است که از دست عدد π راحت شویم.

نکته ی دوم:

اگر خاطرتان باشد در کلاس گفتیم بیشترین فرکانس (از منظر تغییرات سریع زمانی) در حوزه ی گسسته فرکانس $\frac{1}{2}$ است که در این جا می بینید جای آن عدد $\frac{f_s}{2}$ نشسته است. در واقع در سرتاسر درس سیگنال نرخ نمونه برداری برابر $f_s = 1$ هرتز در نظر گرفته می شود. از این نکته می توان نتیجه گرفت هر چه از سیگنال پیوسته در حوزه ی زمان با نرخ بالاتری نمونه برداری کنیم ($f_s \uparrow$)، در سیگنال گسسته به دست آمده، می توان فرکانس های بالاتر را نیز (در صورت وجود) مشاهده کرد چون بازه ی فرکانسی قابل مشاهده افزایش پیدا می کند. در حالت حدی، اگر نرخ نمونه برداری به سمت بی نهایت برود (یا به عبارت دیگر $t_s \to 0$) برود، عملا سیگنال گسسته به دست آمده با سیگنال پیوسته اصلی یکی خواهد بود و هر مولفه ی فرکانسی که در سیگنال اصلی بوده است، در سیگنال گسسته نیز مشاهده می شود. در این قسمت کاملا باید درک کرده باشید که در sampling که یک سیگنال پیوسته را به یک سیگنال گسسته تبدیل می کند چه چیزی از بین می رود.

نکته ی سوم:

نکته ی آخر راجع به رزولوشن فرکانسی است که ایجاد شده است یعنی $\delta_f = \frac{f_s}{N-1}$ (هایلات سبز). اگر از رابطه ای که با هایلایت زرد رنگ مشخص شده است استفاده کنید می توان دید که رزولوشن فرکانسی برابر است با $\delta_f = \frac{1}{T}$، یعنی رزولوشن فرکانسی برابر با عکس طول زمانی سیگنال است و هیچ ربطی هم به نرخ نمونه برداری f_s ندارد. هرچه می خواهید نرخ نمونه برداری را افزایش دهید اما رزولوشن فرکانسی مادامی که طول زمانی سیگنال (T ثانیه) تغییری نکند هیچ تغییری نمی کند. حال ببینیم مفهوم رزولوشن چیست؟ رزولوشن فرکانسی گام های فرکانسی است که می توان در نظر گرفت تا سیگنال گسسته را در فضای فوریه توصیف کرد. این مفهوم را با یک مثال توضیح می دهیم. فرض کنید طول زمانی یک سیگنال $T = 1$ ثانیه است و نرخ نمونه برداری $f_s = 20\ Hz$ است. بنابراین رزولوشن فرکانسی برابر $\delta_f = 1\ Hz$ می شود و بازه ی فرکانسی که در تبدیل فوریه ی سیگنال نمونه برداری شده می توان مشاهده کرد به صورت $f = -10 : 1 : 10$ هرتز خواهد بود (هایلات سبز). اگر سیگنال اصلی حاوی دو سیگنال تک تُن به صورت

$$x_1(t) = \exp(1j * 2\pi * 5 * t) + \exp(1j * 2\pi * 8 * t)$$

باشد، طبیعتا قله هایی در اندازه ی تبدیل فوریه سیگنال در فرکانس های 8 و 5 هرتز مشاهده خواهید کرد.

حال فرض کنید سیگنال اصلی حاوی دو سیگنال تک تن به صورت

$$x_2(t) = \exp(1j * 2\pi * 5 * t) + exp(1j * 2\pi * 5.1 * t)$$

باشد. در این حالت فقط یک قله در اندازه ی تبدیل فوریه سیگنال در فرکانس 5 هرتز مشاهده خواهید کرد و دیگر توانایی تفکیک این دو سیگنال را در حوزه ی فرکانس نخواهید داشت زیرا اختلاف فرکانس دو سیگنال تک تُن کمتر از $\delta_f = 1\ Hz$ می باشد. بنابراین رزولوشن فرکانسی قدرت تفکیک پذیری فرکانسی را در تبدیل فوریه نشان می دهد. حتما این مثال را به عنوان **"تمرین شماره ی صفر"** در نظر بگیرید و آن را در متلب شبیه سازی کنید و نتایج را گزارش کنید تا بهتر آن را درک کنید. بازه ی زمانی سیگنال را از $t_{start} = 0$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه در نظر بگیرید.

حال به سراغ سایر تمارین می رویم. قبل از آن توجه داشته باشید در هر سوالی که از شما خواسته شده اندازه تبدیل فوریه را رسم کنید، ماکزیمم خروجی را برابر یک در نظر بگیرید. برای این کار کافی است خروجی دستور($\text{fftshift}(\text{fft}(x))$ یعنی y را به $\max(\text{abs}(y))$ تقسیم کنید. دلیل این است که دستور fft یک ضریب ثابتی به تبدیل فوریه اضافه می کند که برای ما اهمیتی ندارد. همچنین از دستورهای ylim و xlim به درستی استفاده کنید تا سیگنال ها به خوبی نمایش داده شوند.

تمرین 1-1)

سیگنال $x_1(t) = \cos(10\,\pi t)$ را در نظر بگیرید.

الف) این سیگنال را در حوزه ی زمان با در نظر گرفتن بازه ی زمانی $t_{start} = -1$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 50\ Hz$ رسم کنید.

ب) اندازه ی تبدیل فوریه ی این سیگنال را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید.

ج) به صورت تئوری تبدیل فوریه ی پیوسته این سیگنال را حساب کنید. همان طور که مشاهده می کنید شکل کلی نتیجه به دست آمده با نتیجه ی قسمت ب تطابق دارد.

تمرین 1-2)

سیگنال $x_2(t) = \prod(t)$ را در نظر بگیرید.

الف) این سیگنال را در حوزه ی زمان با در نظر گرفتن بازه ی زمانی $t_{start} = -1$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 50\ Hz$ رسم کنید.

ب) اندازه ی تبدیل فوریه ی این سیگنال را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید.

ج) به صورت تئوری تبدیل فوریه ی پیوسته این سیگنال را حساب کنید. همان طور که مشاهده می کنید شکل کلی نتیجه به دست آمده با نتیجه ی قسمت ب تطابق دارد.

تمرین 1-3)

سیگنال $x_3(t) = x_1(t)x_2(t) = \cos(10\,\pi t)\prod(t)$ را در نظر بگیرید.

الف) این سیگنال را در حوزه ی زمان با در نظر گرفتن بازه ی زمانی $t_{start} = -1$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 50\ Hz$ رسم کنید.

ب) اندازه ی تبدیل فوریه ی این سیگنال را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید.

ج) به صورت تئوری تبدیل فوریه ی پیوسته این سیگنال را حساب کنید. همان طور که مشاهده می کنید شکل کلی نتیجه به دست آمده با نتیجه ی قسمت ب تطابق دارد.

* توجه داشته باشید هر چه طول پالس Π افزایش پیدا کند، سیگنال $x_3(t)$ به سیگنال $x_1(t)$ شبیه تر خواهد شد و بنابراین دو ضربه در فرکانس های 5 و 5- هرتز بهتر نشان داده خواهند شد.

تمرین 1-4)

سیگنال $x_4(t) = \cos\left(30\,\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ را در نظر بگیرید.

الف) اندازه ی تبدیل فوریه ی این سیگنال را با در نظر گرفتن بازه ی زمانی $t_{start} = 0$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 100\ Hz$ رسم کنید.

ب) فاز تبدیل فوریه ی این سیگنال را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید. برای این کار ابتدا فاز فرکانس هایی که اندازه ی تبدیل فوریه در آنها ناچیز است را برابر صفر کنید و سپس فاز را به صورت مضربی از π نمایش دهید. برای این کار از دستور زیر استفاده کنید.

```
tol = 1e-6;
y(abs(y) < tol) = 0;

theta = angle(y);

plot(f,theta/pi)
xlabel 'Frequency (Hz)'
ylabel 'Phase / \pi'
```

ج) به صورت تئوری تبدیل فوریه ی پیوسته این سیگنال را حساب کنید. آیا نتایج به دست آمده در قسمت الف و ب با مقدار تئوری مطابقت دارد؟

تمرین 1-5)

سیگنال $x_5(t) = \sum_{k=-9}^{9} \prod(t-k)$ را در نظر بگیرید.

الف) این سیگنال را در حوزه ی زمان با در نظر گرفتن بازه ی زمانی $t_{start} = -10$ تا $t_{end} = 10$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 50\ Hz$ رسم کنید.

ب) اندازه ی تبدیل فوریه ی این سیگنال را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید.

ج) سیگنال $x_5(t)$ به نوعی متناوب شده ی سیگنال $x_2(t) = \prod(t)$ است. چرا یک تعدادی ضربه در خروجی مشاهده می کنید؟ فواصل ضربه هایی که مشاهده می کنید چه قدر است؟ همان طور که مشاهده می کنید نتایج با آنچه در درس تحت موضوع "**تبدیل فوریه سیگنال های متناوب**" آموختیم تطابق دارد.

مقدمه ی دوم:

فرکانس یعنی تغییرات در حوزه زمان و تبدیل فوریه قرار است ما را از حوزه زمان به حوزه فرکانس ببرد. پس هرچه تغییرات در حوزه زمان شدید تر باشد یعنی تابع ما دارای فرکانس های بالا تری است و وقتی از آن تبدیل فوریه بگیریم فرکانس های بالاتری در تبدیل فوریه آن ظاهر میشود.

شدید ترین تغییرات در حوزه زمان چیست؟ مسلما ناپیوستگی شدید ترین تغییرات در حوزه زمان است پس تمام توابعی که ناپیوستگی دارند تبدیل فوریه آن ها باید بزرگترین فرکانس ها را نیز شامل شود. این یعنی باید فرکانس های بی نهایت و منفی بی نهایت را نیز داشته باشد. هم چنین برای بیان کردن این تغییرات تعداد محدودی فرکانس پاسخ گو نخواهد بود پس تبدیل فوریه آن فقط روی بخش محدودی از محور فرکانس مقدار ندارد و باید از ∞- تا ∞+ گسترده باشد.

کندترین تغییرات در زمان چیست؟ طبیعتا تابع ثابت هیچ تغییری در حوزه ی زمان ندارد که تبدیل فوریه ی آن فقط یک ضربه در فرکانس صفر می شود. بنابراین اگر یک تابع در حوزه زمان تغییرات زیادی نداشته باشد و ناپیوستگی هم نداشته باشد دارای فرکانس های بالایی نیست و با فرکانس های پایین تغییرات آن قابل بیان است.

حال با توجه به مقدمه ی دوم به تمارین بعدی پاسخ دهید.

تمرین 2-1)

سیگنال $x_6(t) = \delta(t)$ را در نظر بگیرید.

الف) این سیگنال را در حوزه ی زمان با در نظر گرفتن بازه ی زمانی $t_{start} = -1$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 50\ Hz$ رسم کنید.

ب) اندازه ی تبدیل فوریه ی این سیگنال را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید.

ج) با توجه به مقدمه ی دوم، دلیل آنچه مشاهده می کنید را شرح دهید. همچنین به صورت تئوری تبدیل فوریه ی پیوسته این سیگنال را حساب کنید.

تمرین 2-2)

سیگنال $x_7(t) = 1$ را در نظر بگیرید.

الف) این سیگنال را در حوزه ی زمان با در نظر گرفتن بازه ی زمانی $t_{start} = -1$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 50\ Hz$ رسم کنید.

ب) اندازه ی تبدیل فوریه ی این سیگنال را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید.

ج) با توجه به مقدمه ی دوم، دلیل آنچه مشاهده می کنید را شرح دهید. همچنین به صورت تئوری تبدیل فوریه ی پیوسته این سیگنال را حساب کنید.

نکات کلی:

- تمام پیاده سازی ها باید در محیط MATLAB باشد.
- فایل نهایی شما باید به صورت یک فایل زیپ شامل گزارشکار به فرمت PDF و کد های متلب و سایر فایل های خواسته شده باشد.

- **مهم ترین معیار برای یادگیری عمیق این درس، همین تمارین کامپیوتریست؛ فلذا تمام تلاشتان را بکار بگیرید که وقت بگذارید و ماحصل زحمات خودتان را آپلود کنید.**

(هم فکری تا زمانی که ماهیت مشورت داشته باشد، بسیار پسندیده است.)