

# Cálculo de Determinantes mediante Diferentes Métodos

Patricio Alejandro Ricardí Alvarez

## 1. Método de Pivote (Expansión de Laplace)

Se tiene la matriz general:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

El método de pivote (Expansión de Laplace) consiste en descomponer el determinante en términos de determinantes menores:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ &= (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh) \end{aligned}$$

Este método se generaliza a matrices de cualquier tamaño.

## 2. Método de la Lluvia y Método de la Estrella (La regla de Sarrus)

El método de la lluvia (La regla de Sarrus) se basa en expandir la matriz copiando las dos primeras columnas a la derecha:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

Luego, se suman los productos de las diagonales descendentes y se restan los productos de las diagonales ascendentes:

$$\det(A) = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh)$$

El método de la estrella es idéntico al método de la lluvia, pero sin copiar las primeras dos columnas. Se observa que estos métodos son equivalentes al método de pivote.

### 3. Problema a Resolver

Aplique el método de la lluvia a la siguiente matriz  $4 \times 4$ :

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

**1. ¿Es posible aplicar el método de la lluvia a una matriz  $4 \times 4$ ? Justifique su respuesta.**

No, no es posible aplicar el método de la lluvia (regla de Sarrus) a una matriz  $4 \times 4$ . La regla de Sarrus solo es válida para matrices  $3 \times 3$ , ya que se basa en un truco visual que involucra la copia de las dos primeras columnas y el cálculo de diagonales. Este método no se puede generalizar a matrices de mayor tamaño, como las matrices  $4 \times 4$  o más grandes.

**2. Si no es posible, explique por qué y qué método alternativo recomendaría para calcular el determinante.**

El método de la lluvia no es aplicable a matrices  $4 \times 4$  porque la regla de Sarrus está diseñada específicamente para matrices  $3 \times 3$ . Para matrices más grandes, como una matriz  $4 \times 4$ , se recomienda utilizar el **método de expansión de Laplace** (también conocido como expansión por cofactores). Este método consiste en descomponer el determinante en términos de determinantes menores, reduciendo el problema a calcular determinantes de matrices más pequeñas hasta llegar a matrices  $2 \times 2$  o  $3 \times 3$ , que son más fáciles de manejar.

Por ejemplo, para una matriz  $4 \times 4$ , se puede expandir el determinante a lo largo de una fila o columna, calculando los cofactores correspondientes. Este método es más general y puede aplicarse a matrices de cualquier tamaño.

### Ejemplo de Expansión de Laplace para una Matriz $4 \times 4$

Para la matriz  $B$  dada, el determinante se puede calcular expandiendo a lo largo de la primera fila:

$$\det(B) = a \cdot C_{11} - b \cdot C_{12} + c \cdot C_{13} - d \cdot C_{14}$$

Donde  $C_{ij}$  son los cofactores de la matriz  $B$ . Cada cofactor  $C_{ij}$  se calcula como:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$$

Donde  $M_{ij}$  es la matriz menor que resulta de eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$  de la matriz  $B$ .

Este proceso se repite hasta reducir el problema a determinantes de matrices  $3 \times 3$ , que luego pueden resolverse usando la regla de Sarrus.