Bilgisayar Mühendisliğine Giriş

Yrd.Doç.Dr.Hacer KARACAN

BOOLE CEBRİ

- Boole Cebrinin Esasları
- Lojik Kapılar ve Doğruluk Tabloları
- Lojik İfadelerin İndirgenmesi

Boole Cebri

- Önermeler ya da nesneler arasındaki ilişkileri betimleyen simgesel matematiksel bir mantık sistemidir.

- Boole Cebri fikri ilk olarak George Boole tarafından 19. yüzyılın ortalarında ortaya atılmıştır.

- Boole cebirinin en önemli uygulaması elektronik devre tasarım ve analizidir.
  - Bundan dolayı bilgisayarlar, telefon sistemleri ve elektronik kontrol sistemleri gibi sayısal cihazların tasarımında çok etkin bir şeklide kullanılmaktadır.

Boole Cebri

- Sayısal bilgisayarlar ve sayısal elektronik devreler ikili sayı sistemini (0'lar ve 1'ler) kullanarak işlem yaparlar.

- Boole cebri {0,1} kümesini kullanarak işlemler ve kurallar tanımlar.

- En çok kullanılan üç işlem:
  - DEĞİL (NOT)
  - VEYA ($\vee$ - OR)
  - VE ($\wedge$ - AND)

- DEĞİL işleminde değerler:
  - $1 \rightarrow 0$ $0 \rightarrow 1$

- Mantıksal toplama – OR işleminde değerler:
  - $1+1 = 1$ $1+0 = 1$ $0+1= 1$ $0+0 = 0$

- Mantıksal çarpma - AND işleminde değerler:
  - $1 \bullet 1 = 1$ $1 \bullet 0 = 0$ $0 \bullet 1= 0$ $0 \bullet 0 = 0$

Boole Cebri Teoremleri

1. a-) $a+b=b+a$ — Değişme Özelliği
   b-) $a \cdot b = b \cdot a$

2. a-) $a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$ — Birleşme Özelliği
   b-) $a \cdot b \cdot c=(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$

3. a-) $a+b \cdot c=(a+b) \cdot (a+c)$ — Dağılma Özelliği
   b-) $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$

4. a-) $a+a=a$ — Değişkende Fazlalık Özelliği
   b-) $a \cdot a=a$

5. a-) $a+a \cdot b=a$ — Yutma Özelliği
   b-) $a \cdot (a+b)=a$

Boole Cebri Teoremleri

6. a-) $\overline{(a)} = \overline{a}$ — İşlemde Fazlalık Özelliği

   b-) $\overline{(\overline{a})} = a$

7. a-) $\overline{(a+b+c+\ldots)} = \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\ldots$ — De Morgan Kuralı

   b-) $\overline{(a\cdot b\cdot c\cdot\ldots)} = \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\ldots$

8. a-) $a+\overline{a}=1$ — Sabit Özelliği

   b-) $a\cdot\overline{a}=0$

9. a-) $0+a=a$ — Etkisizlik Özelliği

   b-) $1\cdot a=a$

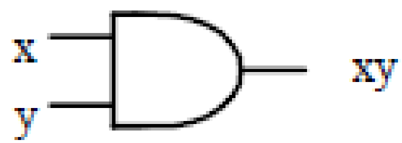
10. a-) $1+a=1$ — Yutan Sabit Özelliği

    b-) $0\cdot a=0$

Lojik Kapılar ve Doğruluk Tabloları

- **VE kapısı (AND gate):**

x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



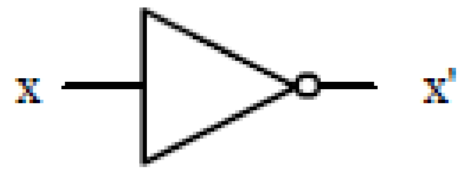
- **VEYA kapısı (OR gate):**

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Lojik Kapılar ve Doğruluk Tabloları

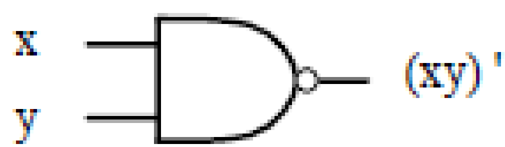
- **DEĞİL kapısı (NOT gate):**

x	x'
0	1
1	0



- **VE DEĞİL kapısı (NAND gate):**

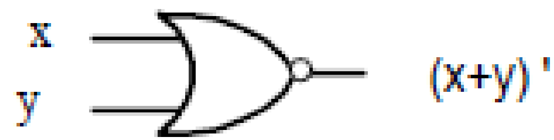
x	y	(xy) '
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Lojik Kapılar ve Doğruluk Tabloları

- **VEYA DEĞİL kapısı (NOR gate):**

x	y	(x+y) '
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



- **YADA kapısı (XOR gate):**

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Minimum ve Maksimum Terimler

- x ve y şeklindeki iki değişkenden VE işlemiyle birbirine bağlı $\overline{x}\,\overline{y}$, $\overline{x}y$, $x\overline{y}$ ve xy şeklinde ,herbirine minimum terim (minterm) adı verilen ,dört farklı kombinasyon tanımlanabilir.

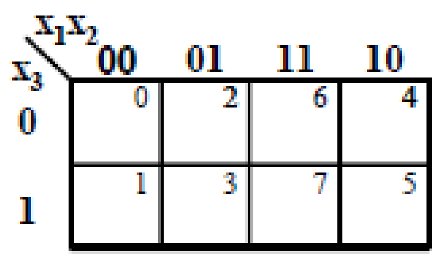
x	*y*	*Minterm*	*m'ye indis*	*Maksterm*	*M'ye İndis*
0	0	$\overline{x} \cdot \overline{y}$	m_0	$x + y$	M_0
0	1	$\overline{x} \cdot y$	m_1	$x + \overline{y}$	M_1
1	0	$x \cdot \overline{y}$	m_2	$\overline{x} + y$	M_2
1	1	$x \cdot y$	m_3	$\overline{x} + \overline{y}$	M_3

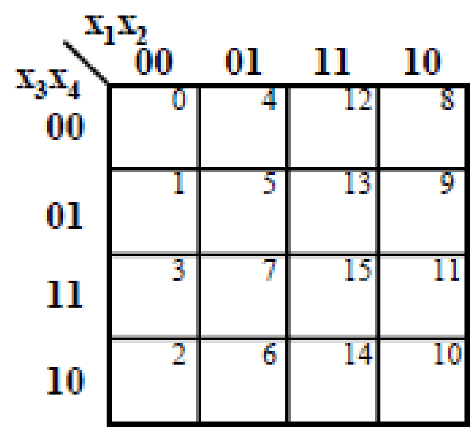
- Benzer şekilde, x ve y şeklindeki iki değişkenden VEYA işlemiyle birbirine bağlı $x+y$, $x+\overline{y}$, $\overline{x}+y$ ve $\overline{x}+\overline{y}$ şeklinde ,herbirine maksimum terim (maksterm) adı verilen ,dört farklı kombinasyon tanımlanabilir.

- Her bir maksterm kendisine karşılık düşen mintermin tümleyeni olup bunun tersi de doğrudur.

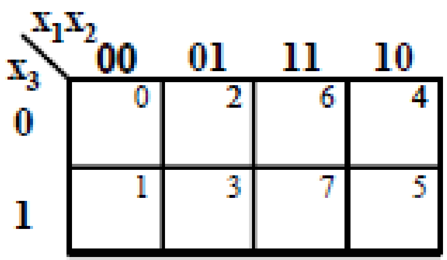
Karnaugh diyagramları

- Dört veya beş değişkenliye kadar fonksiyonların indirgenmesini hızlandıran bir yöntem, Karnaugh diyagramı yöntemidir.
- Karnaugh diyagramı, Boole fonksiyonun doğruluk tablosunun, amaca yardımcı olacak biçimde, düzenlenmesidir.
- Üç ve Dört değişkenli fonksiyonlara ilişkin Karnaugh diyagramları:





Karnaugh diyagramları



- Üç değişkenli fonksiyonlara ilişkin diyagramlarda, sütunlar x_1x_2 bağımsız değişkenlerinin ikili değer permütasyonlarını (00, 01, 11, 10), satırlar ise x_3 bağımsız değişkeninin değerlerini (0,1) göstermektedir.

- i. satır ile j. sütunun kesiştiği kareye, sütun ve satırlar permütasyonlarının oluşturduğu tanım elemanına karşı düşen, fonksiyonun değeri yazılır.
  - örneğin 3. sütun ve 2. satırın kesiştiği yere $f(x_1x_2x_3) = f(1,1,1)$ için fonksiyonun aldığı değer yazılır.