WMuEMaL

Friedrich-Schiller-Universität Jena

Fakultät für Mathematik und Informatik
INSTITUT FÜR INFORMATIK
Prof. E.G. Schukat-Talamazzini

WERKZEUGE MUSTERERKENNUNG & MASCHINELLES LERNEN

Aufgabenblatt 3

(Ausgabe am Fr 4.5.2018 — Abgabe bis So 13.5.2018)

Aufgabe 1 — *10 P*

Die Koeffizienten der diskreten Fouriertransformation (DFT) einer N-periodischen Abtastfolge $[f_n]_{n\in\mathbb{Z}}$ lauten

$$F_\nu \overset{def}{=} \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-2\pi i \cdot \nu n/N} \;, \qquad \nu = 0,\ldots,N-1$$

(ME-Skript III.4, Blatt 9). Die DFT als Vektorabbildung von $\boldsymbol{f} = (f_0,\ldots,f_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ nach $\boldsymbol{F} = (F_0,\ldots,F_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ ist durch eine (komplexwertige) $(N\times N)$-Abbildungsmatrix $\boldsymbol{W}_N$ definiert, welche die obigen Exponentialterme $\exp(-2\pi \cdot \nu n/N)$ als Einträge enthält.

(a) *Schreiben Sie eine 'R'-Funktion* `DFTmat(N)` *zur Erzeugung der N-dimensionalen DFT-Matrix. Verwenden Sie* `outer(x,y)` *für eine vektorisierte Implementierung!*

(b) *Welches Resultat ergibt der Aufruf* `Conj(W) %*% W` *mit der Matrix* `W <- DFTmat(5)` *und wie passt dieses Ergebnis zu der Formel (ME-Skript) für die inverse DFT?*

(c) *Schreiben Sie eine 'R'-Funktion* `powspec(x)` *zur Berechnung des Betragsquadratspektrums der Abtastfolge* `x` *in Dezibel. Beschränken Sie den Rückgabevektor auf den relevanten Teil des Spektrums (Kreisfrequenz $[0,\pi]$). Realisieren Sie die DFT mit Hilfe Ihrer Funktion* `DFTmat()` *und der Matrixmultiplikation* `%*%`.
TIPP: Sie können die Korrektheit Ihrer Realisierung durch Vergleichsaufrufe mit der 'R'-Funktion `fft()` *überprüfen!*

(d) *Schreiben Sie nun eine 'R'-Funktion* `plot.powspec(x,ATF=?,...)` *zur Grafikausgabe der Abtastfolge* `x` *(Abtastfrequenz* `ATF` *Hertz) sowie ihres Dezibel-Spektrums (Zeitachse in ms, Frequenzachse in Hz). Das Jokerargument* `...` *reichen Sie an den ersten Grafikausfruf weiter.*

(e) *In zwei (3×2)-Grafikfenster sollen zunächst die vier Abtastfolgen*

#1:	`rep(seq(0,1,len=16),T/16)`
#2:	`rep(rep(0:1,each=8),T/16)`
#3:	`rnorm(T,0,3)`
#4:	`cos((1:T)*2)+cos((1:T)*1.2)+cos((1:T)*0.6)`

sowie ihre Spektren gezeichnet werden. Für die Achsenbeschriftungen gehen Sie bitte von einer Abtastperiode von $1/10$ Millisekunde aus; die Länge der Abtastfolgen sei $T = 256$.

(f) *In die fünfte und sechste Zeile zeichnen Sie bitte Welle und Spektrum für die erste (diskrete) Ableitung ($h_n = f_n - f_{n-1}$) und für das (diskretisierte) Integral ($h_n = f_n + h_{n-1}$) des Signals #4.*

Abzuliefern ist die 'R'-Programmdatei `power.R`.

Aufgabe 2 **10 P**

Wir interessieren uns für das Betragsquadratspektrum $|G(e^{i\omega})|^2$ eines kausalen FIR-Systems mit der Impulsantwort $\boldsymbol{g} = \langle g_0, \ldots, g_{n-1} \rangle$; das LSI-System $\mathfrak{T}$ operiert also gemäß

$$h_j \;=\; f_j \cdot g_0 + f_{j-1} \cdot g_1 + f_{j-2} \cdot g_2 + \ldots + f_{j-n+1} \cdot g_{n-1}$$

(ME-Skriptum III.3, Blatt 5ff.) für alle Abtastpunkte $j \in \mathbb{Z}$. Wir schreiben drei unterschiedliche 'R'-Funktionen zur Berechnung des diskreten Spektrums und eine weitere Funktion zur vergleichenden graphischen Darstellung; mit zahlreichen Beispielaufrufen überzeugen wir uns von der Übereinstimmung.

(a) *Die Funktion* `sms.Gz (g, n)` *berechnet die Werte $|G(e^{i\omega})|^2$ der Frequenzantwort $G(z)$ des FIR-Systems (Impulsantwort im Argument* `g`*) an* `n` *äquidistanten Kreisfrequenzen ω im Intervall $[0, \pi]$. Implementieren Sie einfach die Skriptformel für $G(z)$ in komplexer 'R'-Arithmetik.*

(b) *Die Funktion* `sms.fft (g, n)` *berechnet dasselbe Spektrum, verwendet aber die diskrete Fouriertransformation (schnelle DFT, siehe* `?fft`*) dazu. Wie müssen Sie* `fft()` *aufrufen, um die geforderte Frequenzauflösung* `n` *zu erhalten?*

(c) *Die Funktion* `sms.conv (g, n, f=seq(0,1,len=n))` *schließlich berechnet das Spektrum mit Hilfe des Faltungssatzes*

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} \star \boldsymbol{g} \qquad \Leftrightarrow \qquad H_\nu = F_\nu \cdot G_\nu$$

für die DFT aus einem mehr oder weniger beliebigen Eingabesignal `f`*. Zuerst nutzen Sie bitte einen Aufruf von* `convolve()`*, um die Filterantwort $\boldsymbol{h}$ durch Faltung von $\boldsymbol{f}$ mit $\boldsymbol{g}$ zu gewinnen. Deren beide Spektren erhalten Sie mit zwei* `sms.fft`*-Aufrufen und den Rest erledigen Sie nach Faltungssatz.*

(d) *Die Funktion* `smsplot (g, n=24, ...)` *zeichnet die drei Spektren der FIR-Impulsantwort* `g` *in ein gemeinsames Koordinatensystem mit Kreisfrequenzen $\omega \in [0, \pi]$. Das Jokerargument* `...` *reichen Sie an den ersten Grafikaufruf weiter.*

(e) *Und nun rufen Sie bitte für nachfolgende Impulsantworten* `smsplot (g, main='«Filtertyp»')` *mit Angabe des Filtertyps (Bandpass/Hochpass/Tiefpass/Kerbfilter) auf:*

- *Vier Filter $\boldsymbol{g} = (1, -2, 1)$ und $\boldsymbol{g} = (1, 2, 1)$ und $\boldsymbol{g} = (1, 0, -1)$ und $\boldsymbol{g} = (1, 0, 1)$*
- *Vier Mittelwertfilter $\boldsymbol{g} = (1/m, \ldots, 1/m)$ der Durchmesser $m \in \{2, 4, 7, 11\}$*
- *Vier Filter mit gaußschen Koeffizienten* `dnorm(seq(-1,+1,length=2*m+1))` *und Radien $m \in \{2, 4, 7, 11\}$*
- *Vier normierte Exponentialfilter $\boldsymbol{g} = (1-\lambda)\cdot(\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \ldots)$ mit $\lambda \in \{1/2, 3/4, 7/8, 15/16\}$ Dieses IIR-Filter ist nach den ersten $n_{max} = 24$ Koeffizienten auf Null zu setzen!*

Sind die IIR-Aufrufe auch mit $n_{max} = 30$ erfolgreich? Warum nicht?

Abzuliefern ist Ihre Programmdatei `fir.R` *und eine kurze Antwort zur Frage in (e).*

Hinweise zum Übungsablauf

- Die wöchentliche WMM-Vorlesung findet am Mittwoch um 12:15 Uhr statt.
  Das Aufgabenblatt gibt es immer am Freitag (PDF im Netz).
  Der späteste Abgabetermin ist Sonntag 23:59 Uhr.

- Die Übungsaufgaben dürfen natürlich (und sollten sogar) in Gruppenarbeit (2 Mitglieder) gelöst werden.

- Schriftliche Lösungen („*Textantworten*“) sind als PDF beizufügen oder direkt im e-Mail-Textkörper unterzubringen.

- Alle anderen Lösungen (Programmieraufgaben, Daten und Grafiken) sind als elektronischer Anhang der Lösungs-e-Mail abzuliefern.

- Programmcode (Dateien `*.R`) muss auch wirklich in 'R' ausführbar sein.
  (Kommando `Rscript «name.R»` auf einem der Rechner des FRZ-Pools)

- Ganz wichtig:
  Schriftliche Antworten werden von mir gedruckt, gelesen, kommentiert und korrigiert.
  Deshalb diese Textteile bitte **niemals** im abgegebenen Programmcode verstecken!

- Je Gruppe und je Aufgabenblatt ist **genau eine** e-Mail zu senden:

  - Vermerk »**WMM**/n« und Gruppenname im `subject`-Feld
    ($n \in \mathbb{N}$ ist die laufende Nummer des Übungsblattes)
  - die Namen der beteiligten Gruppenmitglieder im Textrumpf
  - Tabellen, Bilder, Programmcode, Sensordaten als Attachments
    (elektronische Anlagen)
  - etwaige schriftliche Antworten im Textrumpf der Post oder als Attachment
    (Text/PDF)

- Einige Aufgabentexte verweisen Sie zum Nachschlagen von Details auf das Folienskript zur Vorlesung Mustererkennung; Sie finden es unter der URL
  `http://www.minet.uni-jena.de/fakultaet/schukat/ME/Scriptum/`.
  Die Angabe *ME-Skript II.6* bedeutet: Kapitel II, Abschnitt 6

WWW: `http://www.minet.uni-jena.de/www/fakultaet/schukat/WMM/SS18`
e-Mail: `EG.Schukat-Talamazzini@uni-jena.de`