

# 基于 $L_0$ 范数最小化的噪声数据可展曲面重建

伯彭波<sup>1\*</sup>, 王峥<sup>1</sup>, 张彩明<sup>2\*</sup>, 郑玉健<sup>1</sup>

1. 哈尔滨工业大学(威海)计算机科学与技术学院, 威海 264209

2. 山东大学计算机科学与技术学院, 济南 250100

\* 通信作者. E-mail: pengbo@hitwh.edu.cn, czhang@sdu.edu.cn

收稿日期: 2016-07-15; 接受日期: 2016-10-24; 网络出版日期: 2017-03-01

国家自然科学基金(批准号: 61672187, 61371078)和中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: HIT.NSRIF.201711)资助项目

**摘要** 提出噪声数据的可展曲面重建方法. 基于  $L_0$  范数定义法向量场的优化目标函数, 其极小化得到反映曲面可展几何特征的法向量场. 基于优化后的法向量场利用变分逼近算法对模型进行区域分割, 得到平面区域的序列. 通过对拟合分割区域的简单 B 样条曲面进行合并得到覆盖目标模型整体区域的初始近似可展曲面, 最后通过可展曲面的拟合优化得到重建的 B 样条可展曲面. 该方法对恢复带噪声模型的可展几何信息效果较好, 能重建出高质量的可展曲面. 文中通过几个例子展现了该方法的有效性.

**关键词** 可展曲面, 曲面重建, 曲面拟合,  $L_0$  范数, 曲面分割

## 1 引言

可展曲面是不经拉伸和裁剪可以展开到平面的一类曲面, 在建筑几何、船体造型、服装设计等应用领域有重要应用. 已有工作研究了可展曲面的交互造型和重建等问题, 但是带噪声数据的可展曲面重建没有得到解决, 主要原因是曲面的可展几何特征对噪声很敏感, 噪声的干扰给可展曲面的重建带来了困难. 本文提出噪声数据的可展曲面自动重建方法.

由于样条曲面在工业应用中的重要性, 已有工作广泛研究了可展样条曲面的造型技术. Aumann<sup>[1]</sup>构造插值两条边界曲线的 B 样条直纹曲面, 并且给出曲面是可展曲面时控制顶点要满足的条件. Chen 等<sup>[2]</sup>提出可展 Bézier 参数曲面构造方法. Bo 等<sup>[3]</sup>利用曲面的从切面(rectifying plane)表示形式, 构造插值空间曲面的可展曲面建模方法, 该空间曲线是可展曲面上的测地线. Tang 等<sup>[4]</sup>提出了基于快速优化策略的交互折纸及造型方法. Li 等<sup>[5]</sup>首先计算空间曲线上的曲率、法线等信息, 然后计算出可展曲面的母线, 进而得到可展曲面的参数形式. Zhao 等<sup>[6]</sup>提出插值一条空间曲线的可展曲面构造方法, 并给出了曲面的多项式表示形式.

**引用格式:** 伯彭波, 王峥, 张彩明, 等. 基于  $L_0$  范数最小化的噪声数据可展曲面重建. 中国科学: 信息科学, 2017, doi: 10.1360/N112016-00179  
 Bo P B, Wang Z, Zhang C M, et al. Developable surface reconstruction from noisy data with  $L_0$ -norm minimization (in Chinese). Sci Sin Inform, 2017, doi: 10.1360/N112016-00179

三角网格模型表示的可展曲面建模在折纸造型和建筑几何等领域得到研究。Wang 等<sup>[7]</sup> 使用均匀的三角网格表示近似可展曲面，通过优化方法改善网格曲面的可展性。Liu 等<sup>[8]</sup> 以平面四边形网格表示可展曲面，通过优化网格上四边形的平面性和细分操作的交替执行进行离散可展曲面的建模。Solomon 等<sup>[9]</sup> 提出了基于四边形网格表示的可展曲面建模技术，通过曲面的一个能量函数控制曲面的形状。Rose 等<sup>[10]</sup> 提出基于草图的可展曲面构造方法，自动生成插值三维边界曲线的可展曲面。Liu 等<sup>[11]</sup> 提出交互的可展曲面设计系统，通过交互绘制的曲线来生成离散可展曲面。Zhang 等<sup>[12]</sup> 提出插值给定曲率线的离散可展曲面构造方法。这些可展曲面造型方法无法用于解决可展曲面的重建问题。

可展曲面逼近问题也得到了深入研究。Pottmann 等<sup>[13]</sup> 研究了单片可展 Bézier 曲面的逼近问题，利用了可展曲面的对偶形式，并提出奇异线的控制方法。该方法只讨论了简单的单片曲面的情形。Pottmann 等<sup>[14]</sup> 提出用可展曲面条模型 (d-strip) 逼近任意曲面的方法，并将 d-strip 应用于建筑外观设计中。Kilian 等<sup>[15]</sup> 提出从带折痕的纸造型扫描数据重建可展曲面模型的方法。该方法利用原始模型的平面展开，基于四边形网格的表示，通过优化网格到平面展开模型的距离保持网格的可展性，同时优化网格曲面到目标模型的逼近距离。Bo 等<sup>[16]</sup> 提出利用变分拟合算法的模型区域分割和可展曲面重建方法。一些工作通过曲面的微分几何量识别出模型上的可展曲面区域<sup>[17~19]</sup>。这些方法要求给定模型的质量较好，不能带有噪声。

已有可展曲面重建方法需要首先计算出正确的可展曲面母线序列或者平面族逼近表示<sup>[13~17]</sup>，这些几何量的估算强烈依赖于模型的质量。在有噪声的数据模型上，这些几何量的正确估算都是困难的。关于噪声数据的可展曲面重建工作较少。针对点云数据的可展曲面重建，Paternell<sup>[20]</sup> 提出基于 Blaschke 模型的重建方法，但该方法无法处理具有拐线 (inflection line) 的可展曲面。带噪声数据的可展曲面重建可以利用可展曲面的拟合方法得到<sup>[4]</sup>，但是拟合算法需要一个初始曲面，不好的初始曲面会使拟合失败。Tang 等<sup>[4]</sup> 提出了通过交互手段给出初始拟合曲面的方法，而本文提出自动的初始化方法。

本文主要贡献是基于对可展曲面法向量场的稀疏性观察，提出基于  $L_0$  范数进行法向量场优化，实现对噪声模型的法向量进行去噪的同时保持模型的可展几何信息，从而恢复噪声模型的可展几何信息。

## 2 保持可展几何特征的法向量优化

本文从噪声模型的法向量中提取曲面的可展几何信息。可展曲面的法向量在单位球上的映射呈现曲线的形式，但是法向量对噪声比较敏感，噪声数据的法向量在单位球上的映射形成散乱点集，不能反映模型的可展几何特征。本节提出方法对噪声数据的法向量进行保持模型可展几何信息的优化，使得优化后的法向量在单位球上形成曲线。

考虑法向量场的模型去噪方法得到了广泛研究<sup>[21~24]</sup>，但是已有的噪声模型上法向量的估算方法并不针对可展曲面。常用的最小二乘方法基于  $L_2$  范数定义光顺函数，能够得到光顺的法向量场，但是无法恢复模型的可展几何特征。 $L_0$  范数的极小化在网格模型和点云数据的保持特征的降噪中取得了较好的效果<sup>[22~24]</sup>，该方法在进行模型去噪的同时能够保持模型的上特征线和尖点等形状特征。受该工作的启发和基于对可展曲面的法向量场的稀疏性观察，本文利用基于  $L_0$  范数的模型法向量场优化，实现对噪声模型上的向量场进行去噪和光顺的同时保持模型的可展几何特征，进而利用优化后的法向量场信息构造重建的可展曲面。

本文算法的输入是有噪声的三角网格曲面模型,该离散曲面上的法向量可以定义在网格顶点上,也可以定义在三角面上。由于网格顶点上的法向量没有好的定义,很多网格去噪方法考虑三角面片上的法向量。本节的法向量优化算法适用于以上两种法向量的定义方式。为了方便将本文算法推广到空间散乱点集上,考虑定义在网格顶点上的法向量。初始的顶点法向量通过与顶点相邻的三角面的法向量的平均得到。设顶点  $p$  相邻的三角面为  $F_i, i = 0, \dots, h$ , 三角面  $F_i$  的法向量为  $N_{F_i}$ 。定义顶点  $p$  上的法向量为  $N_p = \frac{\bar{N}_p}{\|\bar{N}_p\|}$ , 其中  $\bar{N}_p = \frac{\sum_{i=0, \dots, h} N_{F_i}}{h+1}$ 。噪声模型的初始法向量较杂乱,通过求解以下极小化问题对法向量场进行优化

$$\min_{N, \|N_i\|=1} \|N - \hat{N}\|^2 + \eta \|\Theta(N)\|_0, \quad (1)$$

其中向量  $N$  是模型所有顶点的单位法向量,即

$$N = (N_0^x \ N_0^y \ N_0^z \cdots N_n^x \ N_n^y \ N_n^z)^T,$$

其中  $\hat{N}$  表示初始的法向量;操作符  $\Theta(N)$  定义一个顶点的法向量和它邻域内的顶点法向量的差。假设网格模型的顶点数目是  $n$ ,令

$$\Theta(N) = (\theta(N_0) \ \theta(N_1) \cdots \theta(N_n))^T,$$

其中  $\theta(N_i)$  定义顶点  $P_i$  的法向量和  $P_i$  邻域内顶点法向量的差别。假设  $P_i$  的邻域  $A_i$  内有  $k$  个顶点,标记为  $Q_1, \dots, Q_k$ ,则

$$\theta(N_i) = (\Delta_1 \cdots \Delta_k),$$

其中  $\Delta_j = (N_i^x - Q_j^x \ N_i^y - Q_j^y \ N_i^z - Q_j^z)$ 。文献 [23, 24] 采用了和式 (1) 类似的目标函数,其中文献 [24] 利用三角面的法向量作为优化变量,取得了较好的保形状特征的模型去噪效果。这些工作中数据点或者面片的邻域定义为其 1- 邻域或者限定在一定距离范围内,这种邻域的定义方法并不适合可展曲面特征的保持。保持模型的可展曲面特征的去噪,需要定义一个数据点的邻域为数据点局部的可展区域。由于噪声的影响,局部可展区域不容易识别,本文采用如下点的邻域计算方法。

**数据点邻域的计算。**模型  $M$  上一个顶点  $P$  的邻域定义为  $P$  周围接近平面的区域范围内的所有顶点。设  $\rho$  是指定的邻域距离(本文采用  $\rho = 0.01$ ),计算  $P$  点的邻域  $r_\rho(P)$  的步骤如下:

- Step1. 找到距离顶点  $P$  的欧氏距离小于  $\rho$  的所有顶点,记为集合  $\Phi$ 。
- Step2. 通过对点集  $\Phi$  做 PCA 分析,得到拟合  $\Phi$  的平面  $T$ 。
- Step3. 计算  $\Phi$  内每一点  $q_i$  到平面  $T$  的距离  $d_i$ ,计算平均距离为  $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^m d_i}{m}$ ,其中  $m$  是  $\Phi$  内数据点的个数。将满足  $d_i < \epsilon \cdot \bar{d}$  的数据点集合  $A_i$  定义为点  $P_i$  的邻域。本文的例子中  $\epsilon = 0.3$ 。

如果模型上点的分布比较均匀,可以找到一个合适的  $\rho$  值使得每一个点的邻域不为空。但是如果点集的质量较差,存在孤立的点  $P$ ,其邻域为空,则找到  $P$  的最近点作为  $P$  的邻域。

对于没有噪声的模型,上述计算得到的数据点的邻域能够反映模型的可展几何特征。例如目标模型是没有噪声的圆柱曲面时,点的邻域呈现沿母线方向的狭长区域。但是对于具有噪声的模型,并非每一个数据点的邻域都能正确反映模型的可展几何特征。图 1 给出一个带噪声的圆柱模型。得到每一个点的邻域后,计算出邻域的拟合平面四边形。图 1(b) 给出了几个局部平面区域的拟合结果,可以看到有些拟合四边形没有沿圆柱的母线走向。

**优化问题求解。**为求解上述带有  $L_0$  范数的函数极小化问题,引入附加变量  $\alpha$ ,它是维度和  $\Theta(N)$  相等的向量。将目标函数改写为

$$\min_{N, \alpha, \|N_i\|=1} \|N - \hat{N}\|^2 + \beta \|\Theta(N) - \alpha\|^2 + \eta \|\alpha\|_0.$$

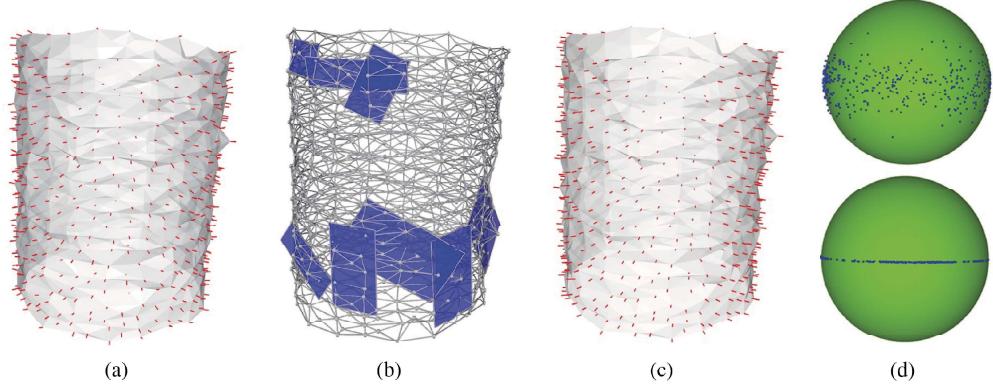


图 1 (网络版彩图) 保持可展几何特征的模型法向量场优化

**Figure 1** (Color online) Optimization of normal vector field preserving developability. (a) Original noisy model with normal vector field; (b) neighborhood of data points; (c) optimized normal vector field; (d) original normal vectors on Gaussian sphere (up) and optimized normal vectors on Gaussian sphere (down)

求解算法是一个迭代算法, 每一次迭代中执行以下两个步骤, 分别求解未知量  $N$  和  $\alpha$ .

- Step1. 固定  $N$ , 求解以下极小化问题得到  $\alpha$ ,

$$\min_{\alpha} \beta \|\Theta(N) - \alpha\|^2 + \eta \|\alpha\|_0,$$

该极小化问题的解为

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{if } \frac{\eta}{\beta} > \|\Theta(N)_i\|^2, \\ \Theta(N)_i, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Step2. 固定  $\alpha$ , 求解  $N$ .  $N$  是下面极小化问题的解,

$$\min_{N, \|N_i\|^2=1} \|N - \hat{N}\|^2 + \beta \|\Theta(N) - \alpha\|^2. \quad (2)$$

这是带有 2 次约束的 2 次函数极小化问题. 采用类似参考文献 [4] 的优化方法, 将 2 次约束  $\|N_i\|^2 = 1$  线性化后得到  $\langle N_i, N_i^* \rangle = 1$ , 其中  $N_i^*$  是当前迭代的值. 为函数 (2) 增加一项  $(\langle N_i, N_i^* \rangle - 1)^2$ , 求解以下最小二乘问题,

$$\min_N \|N - \hat{N}\|^2 + \beta \|\Theta(N) - \alpha\|^2 + \lambda \sum (\langle N_i, N_i^* \rangle - 1)^2.$$

该优化保证法向量具有近似单位长度, 为保证法向量的单位化, 在向量场优化每次迭代后将数据点的法向量进行单位化处理.

通过一个圆柱模型的例子来考察该优化方法的效果, 一个精确圆柱曲面的法向量场映射到单位球上是球的一个最大圆, 因此通过模型法向量在单位球上的映射来考察法向量场所反映的可展几何特征. 图 1 给出一个带噪声的圆柱模型, 每一个数据点上的单位向量由其相邻三角面的法向量之平均进行单位化后得到. 初始法向量场比较混乱, 在单位球上形成较为分散的点集 (图 1(d), 上图). 优化后的法向量在单位球上形成一条曲线 (图 1(d), 下图), 该曲线基本位于球的最大圆位置. 这表明优化后的法向量场较为正确地反映了圆柱曲面的可展几何信息.

### 3 初始可展曲面的构造

由于可展曲面的法向量在单位球面上形成的曲线可发生自交甚至重叠,因此通过拟合球面上的数据点来重建可展曲面比较困难.本节利用优化后的法向量信息,将模型划分为一些局部平面区域,基于该区域分割结果进行可展曲面的重构.

#### 3.1 基于模型分割的局部可展几何重建

通过计算给定模型的一组平面逼近表示来进行可展曲面重构.根据可展曲面是单参数平面族的包络面这一几何事实,模型数据点的法向量在单位球上的映射应形成一条曲线,因此上一节的法向量优化是本节算法能够得到满意结果的基础.

采用变分逼近算法对模型进行处理<sup>[25]</sup>,目的是得到一些拟合平面  $P = \{T_i(P_i, N_i)\}$ ,其中  $P_i$  表示平面内一个点,  $N_i$  表示平面的单位法向量.将模型  $M$  的三角片分别归属为不同的区域,形成一个区域划分  $R = \{R_i\}$ ,并且区域  $R_i$  对应平面  $T_i$ .目标是极小化下面的函数:

$$F = \sum_{R_i \in R} E(R_i, T_i),$$

其中  $E(R_i, T_i) = \sum_{t \in R_i} \|N(t) - N_i\|^2$ ,  $N(t)$  表示三角面  $t$  的单位法向量,初始值为其顶点上优化后法向量的平均.假设分割区域的数目为  $m$ ,区域分割算法的步骤如下:

- Step1. 在模型  $M$  上随机选取  $m$  个种子三角片  $s_i$ , 基于三角片所在的平面构造  $m$  个拟合平面  $T_i$ .
- Step2. 将模型  $M$  上的每一个三角片  $t$  赋给某一平面  $T_i$ .这通过从种子三角片  $s_i$  出发,进行基于  $E(t, T_i)$  的值为优先级的区域扩散算法得到<sup>[23]</sup>.区域扩散的结果是给出模型  $M$  的一个区域分割  $R$ .
- Step3. 对每一个分割区域  $R_i$ ,计算一个新的拟合平面  $T_i(P_i, N_i)$ , 法向  $N_i$  为区域  $R_i$  所有三角片法向的基于三角片面积的加权平均;  $P_i$  是区域  $R_i$  的重心.找出区域  $R_i$  内最接近平面  $T_i$  的三角片作为新的种子三角片.

算法中 Step2, Step3 经过多次迭代,当区域分割的结果比较稳定时,停止迭代.算法的输出为  $M$  的区域分割  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,以及每个区域  $R_i$  的拟合平面  $T_i$ .将每一个区域  $R_i$  内的点投影到对应的拟合平面  $T_i$  上,计算投影后的点的四边形包围盒.得到的平面四边形集合定义了重构的可展曲面模型.为了得到连续的可展 B 样条曲面,需要进一步构造样条曲面表示.

#### 3.2 初始近似可展曲面的构造

得到给定模型的分割后,每一个分割区域近似一个平面区域.接下来的目标是得到逼近给定模型的 B 样条近似可展曲面.算法的基本思想是首先对每一个分割区域拟合一个简单的 3 次 B 样条曲面,然后融合邻近的拟合曲面,得到覆盖模型整体的 B 样条曲面.

首先对每一个内部的分割区域  $\Omega_i$ ,找到两个适当的邻接区域  $\Omega_k, \Omega_j$ ,使得区域  $\Omega_k \Omega_i \Omega_j$  构成一个序列,对应的拟合平面片构成给定模型的逼近表示.根据可展曲面的几何性质,当分割数目足够多时,每一个分割区域的形状是狭长的,因此在  $\Omega_i$  所有邻接区域里寻找公共边界最长的两个作为  $\Omega_k, \Omega_j$ (参考图 2(a)).两个区域  $\Omega_i, \Omega_j$  的公共边界是它们之间所有边界三角形集合(一个三角形  $t \in \Omega_i$  是相对于  $\Omega_j$  的边界三角形,如果存在一个三角形  $t^*$  与  $t$  相邻,并且  $t^* \in \Omega_j$ ).得到区域的邻接信息后,利用以下算法构造初始 B 样条曲面:

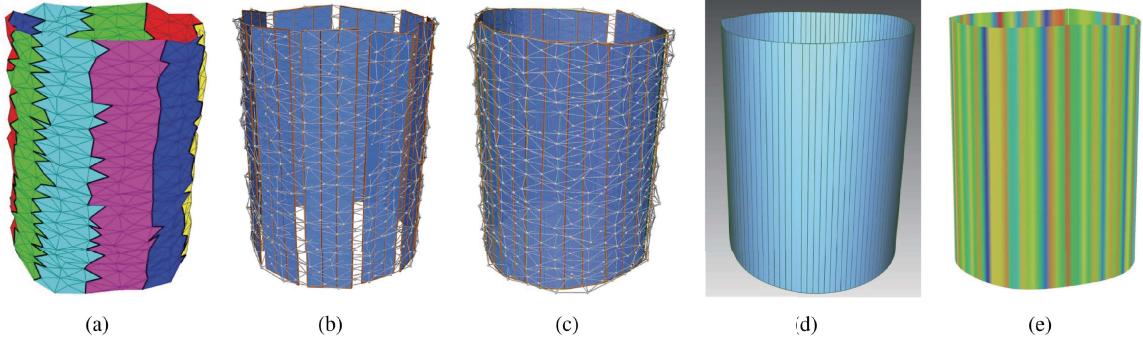


图 2 (网络版彩图) 初始近似可展 B 样条曲面的构造

**Figure 2** (Color online) Process of generating initial B-spline surface. (a) Segmentation result (10 segments); (b) local fitting B-spline surfaces; (c) global initial B-spline surface; (d) reconstructed developable surface; (e) color coding of approximation error between reconstructed developable surface and noisy target model, with approximation error in [0.01, 0.03]

- Step1. 对模型内部的一个区域  $\Omega_k$ , 假设其邻接分割区域分别为  $\Omega_i, \Omega_j$ . 通过最小二乘方法对两个公共边界拟合得到直线段  $L_{ki}, L_{kj}$ . 假设  $L_{ki}$  的两个端点是  $a_1, b_1$ ;  $L_{kj}$  的两个端点是  $a_2, b_2$ ; 且向量  $a_1 - b_1$  与  $a_2 - b_2$  的夹角为锐角. 则区域  $\Omega_k$  的初始 B 样条曲面为

$$S(u, v) = (1 - v)a(u) + vb(u), \quad (3)$$

其中  $a(u)$  和  $b(u)$  是 3 次 B 样条曲线;  $a(u)$  的控制点是  $a_1, (a_1 + a_2)/3, (a_1 + a_2)2/3, a_2$ ;  $b(u)$  的控制点是  $b_1, (b_1 + b_2)/3, (b_1 + b_2)2/3, b_2$ .

- Step2. 如果两个曲面片  $S_i, S_j$  都是对方的邻接曲面片, 则将  $S_i$  和  $S_j$  进行拼接, 得到新的曲面片记为  $S_k$ ; 同时对分割区域进行合并, 记为  $R_k = R_i + R_j$ . 假设一个 B 样条直纹面边界曲线的控制点分别为  $P_1, \dots, P_n$  和  $Q_1, \dots, Q_n$ ; 相邻的 B 样条曲面对应的边界曲线控制点为  $A_1, \dots, A_n$  和  $B_1, \dots, B_n$ , 则合并后的 B 样条曲面的边界曲线控制点为  $P_1, \dots, P_{n-1}, \frac{(P_n+A_1)}{2}, A_2, \dots, A_n$  和  $Q_1, \dots, Q_{n-1}, \frac{(Q_n+B_1)}{2}, B_2, \dots, B_n$ .

对所有满足条件的曲面进行拼接后, 得到覆盖模型整体的 B 样条曲面, 根据上述构造过程可知该曲面是近似可展的. 图 2 给出一个实验结果, 实验采用的模型是图 1 中的圆柱曲面. 在噪声曲面的法向量场经过优化后, 给出了利用 3.1 小节的变分逼近算法得到曲面区域分割的结果, 如图 2(a). 该结果中每一个分割区域近似一个平面区域, 呈现狭长的形状, 所有分割区域形成一个序列. 图 2(b) 给出每一个分割区域拟合一个简单 B 样条曲面的结果; 图 2(c) 给出局部拟合曲面合并后得到的整体 B 样条曲面.

## 4 可展曲面的拟合

上述方法得到的 B 样条曲面是近似可展的, 并且曲面逼近给定模型. 为了得到高质量的重建可展曲面, 通过曲面拟合算法改进曲面的逼近质量, 同时优化曲面的可展性. 已有工作已经提出了可展曲面的拟合算法<sup>[4, 14]</sup>, 本文利用类似的方法进行可展曲面的拟合. 设  $S$  为 B 样条表示的直纹面 (式 (3)), 其中边界曲线  $a(u), b(u)$  是 B 样条曲线, 其控制点分别为  $a_0, \dots, a_n$  和  $b_0, \dots, b_n$ . 极小化以下目标函

数(4), 实现同时优化曲面  $S$  的可展性并且减少  $S$  到参考模型的距离,

$$W = \sum_{p_i \in \text{In}(M)} d(p_i, S) + \sum_{p_i \in \text{B}(M)} d(p_i, S) + \lambda \Theta(S) + \beta F(S), \quad (4)$$

其中  $\text{In}(M)$  表示模型  $M$  内部的数据点;  $\text{B}(M)$  表示模型边界上的数据点. 函数(4)中的项定义如下:

- 目标数据点到可展曲面的距离误差函数定义为

$$d(p_i, S) = \langle p_i - f_i, N_i \rangle^2,$$

其中  $p_i$  是目标模型上的点,  $f_i$  是  $p_i$  在可展曲面  $S$  上的最近点(垂足),  $N_i$  是曲面  $S$  在  $f_i$  处的切平面的法向.

- 为了拟合给定模型的边界, 对模型边界的数据点, 其距离误差定义为点到拟合曲面边界曲线上的最近点之间的距离平方. 误差函数定义为

$$d_p(p_i, B(S)) = \langle p_i - f_i, p_i - f_i \rangle,$$

这里  $f_i$  是数据点  $p_i$  到拟合曲面  $S$  边界上的最近点.

- $\Phi(S)$  定义曲面  $S$  的可展性. 可展曲面上每一条母线上所有的点具有相同的法向. 对于 B 样条直纹曲面, 要求曲面有限数目的采样母线具有这样的性质可以保证曲面是可展曲面. 假设一个母线的两个端点为  $a(u_i)$  和  $b(u_i)$ , 定义  $\bar{a}(u_i) = a(u_i) + a'(u_i)$ ,  $\bar{b}(u_i) = b(u_i) + b'(u_i)$  为曲线切线上的点. 可展曲面约束要求这 4 个点位于同一平面上.

经过优化后的曲面法向量在单位球上的映射为一条曲线的形式. 利用曲面  $S$  的法向量曲线  $n(u)$  可以简化曲面可展性约束<sup>[4]</sup>. 曲面可展性约束函数定义为

$$\Phi(S) = \sum_{i=0, \dots, m} (\rho_1(u_i) + \rho_2(u_i) + \rho_3(u_i)),$$

其中

$$\rho_1 = \langle n(u_i), \bar{a}(u_i) - \bar{b}(u_i) \rangle^2, \quad \rho_2 = \langle n(u_i), \bar{a}(u_i) - a(u_i) \rangle^2, \quad \rho_3 = \langle n(u_i), \bar{b}(u_i) - b(u_i) \rangle^2.$$

在实现中, 为曲面  $S$  的每一个采样母线  $L_i$  增加法向量  $n_i$  作为优化变量, 其初始化从优化后的法向量场获得.

- $F(S)$  是曲面的光顺函数, 通过控制边界曲线的光顺性来避免可展曲面内部出现自交. 函数定义为曲面的两个边界曲线  $a(u)$  和  $b(u)$  的能量, 即

$$F(S) = \int_0^1 \|a''(u)\|^2 du + \int_0^1 \|b''(u)\|^2 du.$$

目标函数优化. 利用法向曲线的可展约束是二次函数, 目标函数(4)也是二次函数, 其极小化利用 Gauss Newton 法求解, 其中的变量是 B 样条曲面的控制点和采样法向量  $n_i$ . 在每次迭代中, 更新目标数据点  $p_i$  在拟合曲面  $S$  上的垂足点  $f_i$  和相应的曲面法向  $N_i$ . 在优化的迭代过程中, 逐渐增加系数  $\lambda$  的值, 得到拟合目标模型的可展 B 样条曲面. 由于初始曲面的构造利用了模型的可展几何信息, 因此优化算法可以快速收敛. 本文的例子只需 10 次迭代即可得到满意的结果. 图 2(d) 给出了圆柱模型的拟合可展曲面, 图中同时绘出了可展曲面的母线; 图 2(e) 显示了拟合误差的颜色编码.

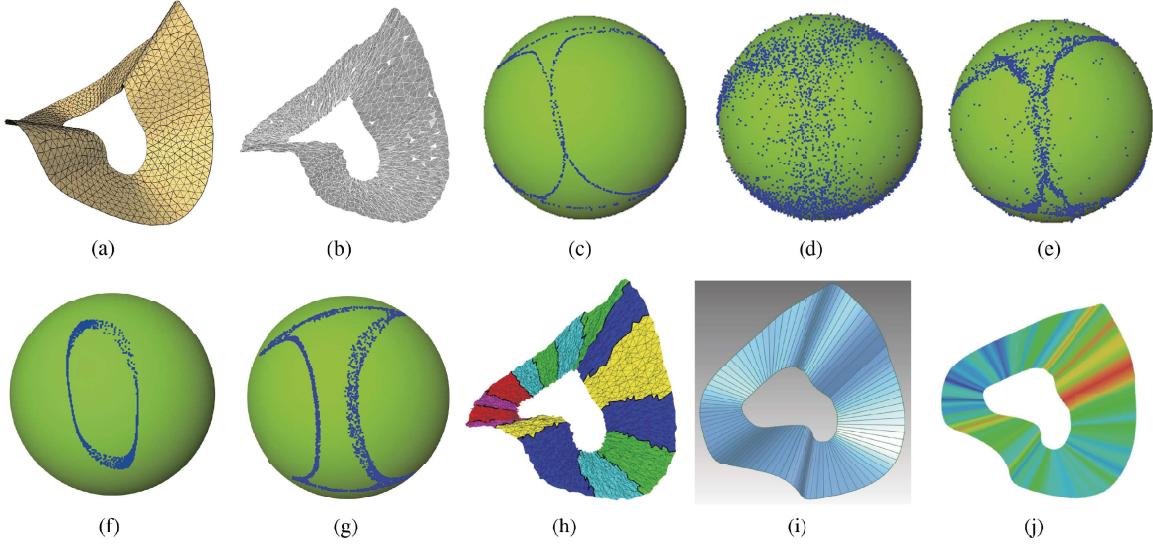


图 3 (网络版彩图) 环状模型的实验结果

**Figure 3** (Color online) Closed belt surface. (a) Original model without noise; (b) noisy model; (c) normal vectors of original model on Gaussian sphere; (d) normal vectors of noisy model; (e) optimized normal vectors with 1-ring neighborhood; (f) optimized normal vectors with neighborhood in equal distance; (g) optimized normal vectors with local neighborhood computed with our new method; (h) segmentation result based on optimized normal vector field; (i) reconstructed developable surface; (j) color coding of approximation error between reconstructed surface and target noisy model, with approximation error in [0.005, 0.013]

## 5 实例和分析

本节给出一些实验结果, 首先在一个光滑的可展曲面模型  $M'$ (三角网格曲面) 上增加噪声, 得到带噪声的网格模型  $M$ . 噪声的生成采用如下方法: 首先对于一个给定的网格模型, 将其进行放缩变换, 使之位于最大边长 1 的包围盒内. 对模型  $M'$  上每一个数据点  $P'$ , 将其位置移动到

$$P = P' + V \cdot d, \quad (5)$$

其中  $V$  是一个随机生成的单位三维向量, 即  $V = \frac{V'}{\|V'\|}$ , 其中向量  $V'$  的分量是随机数;  $d$  是沿着  $V$  方向移动的距离,  $d$  的大小决定了噪声的水平.

### 5.1 邻域计算的讨论

基于  $L_0$  范数的法向量场优化中需要利用每一个数据点的邻域, 对于没有噪声的弯曲可展曲面模型, 2.1 小节给出的邻域计算方法得到的邻域接近一个狭长区域, 该区域的走向能够大概反映模型的母线方向. 对于有噪声的模型, 由于噪声的影响, 邻域的形状不一定能完全反映模型的可展几何特征. 假设一个邻域点集为  $T = \{P_i\}$ . 利用最小二乘拟合点集  $T$  得到一个平面  $\Pi$ , 然后将  $T$  内的点投影到  $\Pi$  上, 并通过 PCA 分析构造投影点的矩形包围盒. 图 1(b) 给出了一个模型上几个点的邻域计算结果和拟合矩形. 通过拟合矩形的形状可知, 某些点的邻域内的可展几何信息被噪声破坏, 邻域计算结果不是很令人满意.

在已有的基于  $L_0$  范数最小化的网格模型或点云模型的去噪中, 一个点的邻域设为该点的 1 环邻域或者给定距离范围内的所有点, 这些邻域的计算方法没有考虑模型的可展几何特征, 不适合噪声数据的可展曲面重建. 图 3 给出一个环状模型的实验结果. 图 3(e)~(g) 分别给出了采用 1 环邻域、固定

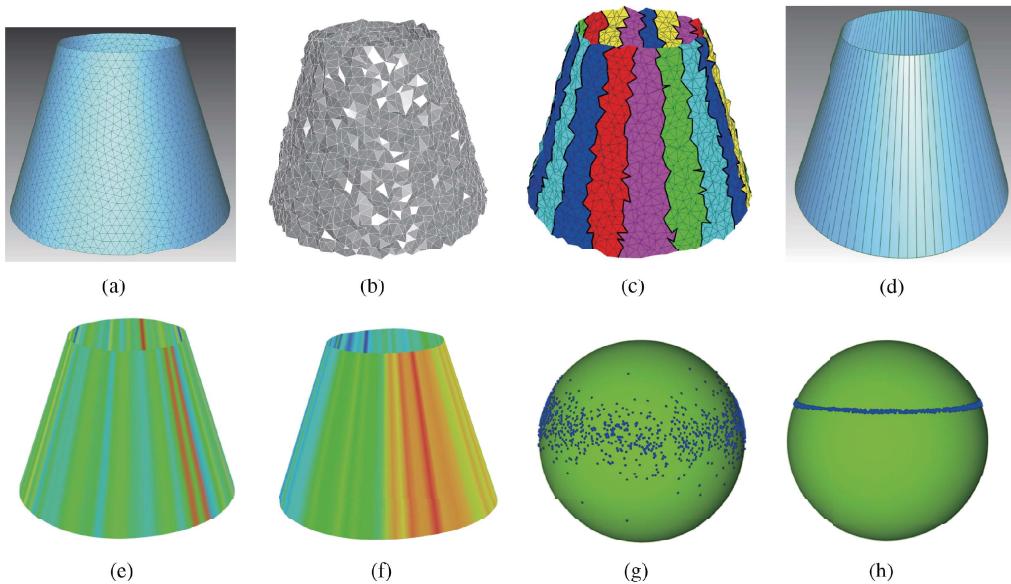


图 4 (网络版彩图) 圆锥模型的重构

**Figure 4** (Color online) Cone model. (a) Original cone surface; (b) cone model with noise; (c) segmentation result based on optimized normal vector field; (d) reconstructed developable surface; (e) color coding of approximation error between reconstructed surface and target noisy model, with approximation error in [0.01, 0.02]; (f) color coding of approximation error between reconstructed surface and original model, with approximation error in [0.01, 0.02]; (g) original normal vectors on Gaussian sphere; (h) optimized normal vectors on Gaussian sphere (down)

距离邻域和本文的邻域定义时,采用本文法向优化方法得到的结果。可以看到,用本文的邻域定义得到的法向优化结果保持了原始模型的法向量(图 3(c))在单位球上曲线的尖点特征,同时去除了模型的法向量中的噪声,得到的法向量在单位球上呈现保持尖点特征的曲线。

## 5.2 可展曲面重建的实验结果

图 3~7 给出一些例子。这些噪声模型由光滑的可展曲面三角网格利用式(5)添加噪声后得到,式(5)中反映噪声的水平的  $d$  值见表 1。从这些结果中可以看出,即使初始的法向量场非常混乱,在单位球上的映射形成散乱的数据点集,经过优化后的点集呈现曲线的形状。因此优化后的法向量场提供了良好的可展曲面重建的信息。基于优化后的法向量场,变分逼近算法能够将噪声模型分成一个区域序列,每一个区域近似于一个狭长的平面四边形。这一平面四边形序列给出了重建可展曲面的有用信息,进而得到良好的初始拟合可展曲面。图 5 和 6 的初始法向量场在单位球上的映射基本看不出任何模式,经过优化后呈现出清晰的曲线模式。

本文的方法利用了可展曲面拟合算法得到最终的拟合可展曲面,但是由于曲面拟合采用的优化算法是局部优化算法,因此拟合的效果和效率高度依赖初始曲面。已有工作没有给出噪声模型的自动初始拟合曲面构造方法;本文给出了噪声模型的可展曲面拟合自动初始化方法。根据前面的分析,初始的曲面是近似可展的,并且很好地逼近给定的模型。因此可展曲面的拟合算法可以快速得到高质量的逼近可展曲面。另外在曲面拟合的过程中,我们通过简单的曲面扩张调节曲面的大小。目标函数(4)中包含边界距离误差项,其作用是使优化得到的可展曲面的边界拟合给定模型的边界,从图 2~7 的拟合曲面结果中可以看到边界拟合的效果。

本文方法的一个优点是能够处理带有拐线(inflexion line)的可展曲面模型,这种情况已有方法无

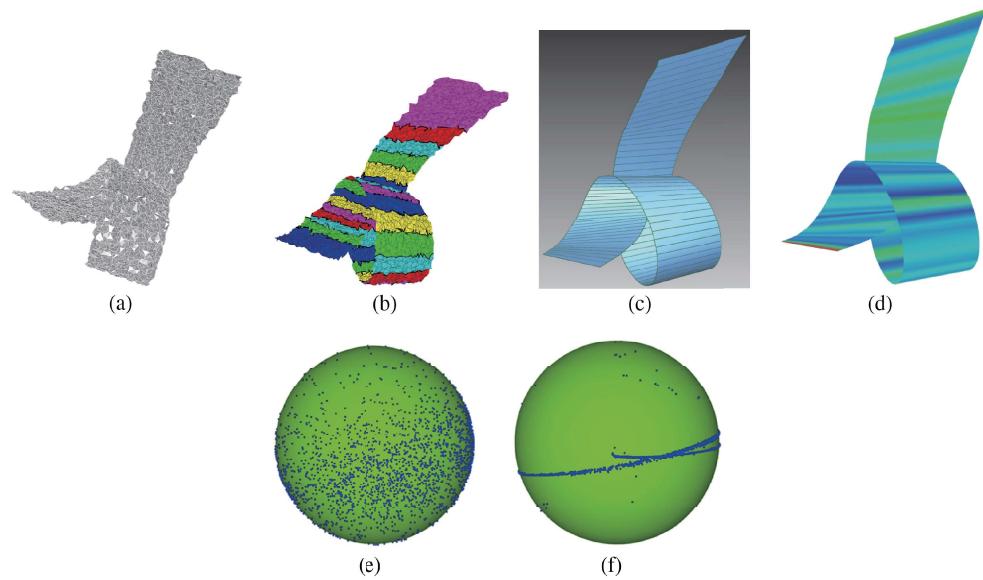


图 5 (网络版彩图) 具有近似等宽度的带状可展曲面重构

**Figure 5** (Color online) Belt surface of constant width. (a) Target noisy model; (b) segmentation result based on optimized normal vector field; (c) reconstructed developable surface; (d) color coding of approximation error between reconstructed surface and target noisy model, with approximation error in [0.006, 0.02]; (e) original normal vectors on Gaussian sphere; (f) optimized normal vectors on Gaussian sphere

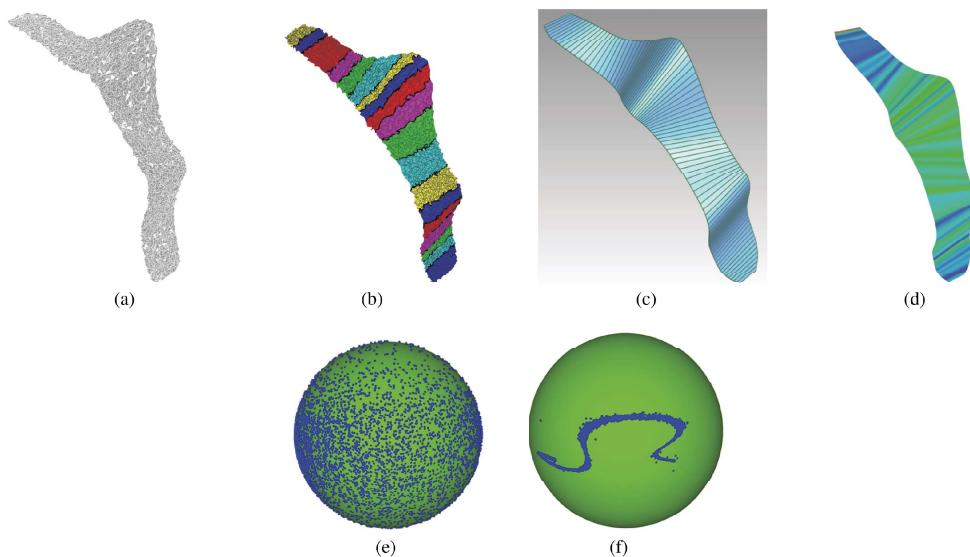


图 6 (网络版彩图) 宽度变化的带状可展曲面重构

**Figure 6** (Color online) Belt surface of varying width. (a) Target noisy model; (b) segmentation result based on optimized normal vector field; (c) reconstructed developable surface; (d) color coding of approximation error between reconstructed surface and target noisy model, with approximation error in [0.003, 0.007]; (e) original normal vectors on Gaussian sphere; (f) optimized normal vectors on Gaussian sphere

法处理 [20]. 图 3, 6 和 7 中的例子都具有拐线. 图 7 中的曲面近似为广义的圆柱面, 其法向量在单位球上的映射是折叠在一起的曲线. 论文 [20] 中的方法基于 Blaschke 模型识别出可展曲面的几何特征,

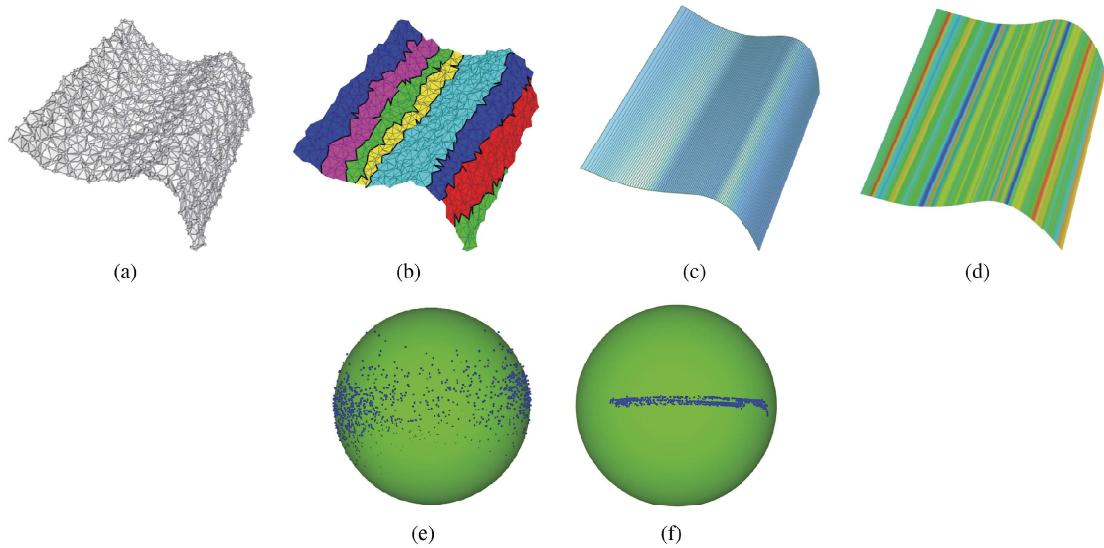


图 7 (网络版彩图) 广义圆柱面的重构

**Figure 7** (Color online) Generalized cylinder. (a) Target noisy model; (b) segmentation result based on optimized normal vector field; (c) reconstructed developable surface; (d) color coding of approximation error between reconstructed surface and target noisy model, with approximation error in [0.010, 0.018]; (e) original normal vectors on Gaussian sphere; (f) optimized normal vectors on Gaussian sphere

表 1 算法运行时间  
Table 1 Computation time

Model	#Vertex	$d$ in Eq. (5)	Time of normal optimization (s)	Time of surface fitting (s)
Figure 2	820	0.08	20	7
Figure 3	2720	0.08	61	13
Figure 4	1999	0.05	42	9
Figure 5	4769	0.08	133	25
Figure 6	5297	0.1	178	31
Figure 7	992	0.08	28	11

通过在 Blaschke 模型上构造拟合曲线实现空间数据点的可展曲面拟合. 该方法不够直观, 而且不能处理具有拐线的可展曲面, 因此只能用来重构比较简单的特殊可展曲面. 本文算法的整个过程都针对三维欧氏空间的几何信息, 可展曲面的拟合目标函数具有直观的几何意义. 在这些方面, 本文算法较论文 [20] 的算法更具优势.

### 5.3 运行时间

算法的主要时间花费在法向量场的优化以及曲面拟合. 表 1 给出本文中例子的运行时间. 平台是笔记本电脑, 配置为 2.2 G 4 核 CPU, 内存是 16 G.

### 5.4 误差分析

图 2~7 的例子中给出了重建可展曲面的拟合误差的颜色编码. 每一条母线上选取 10 个采样点, 计算母线上采样点的平均误差作为母线位置的拟合误差. 每一个模型的包围盒放缩到单位大小 (包围

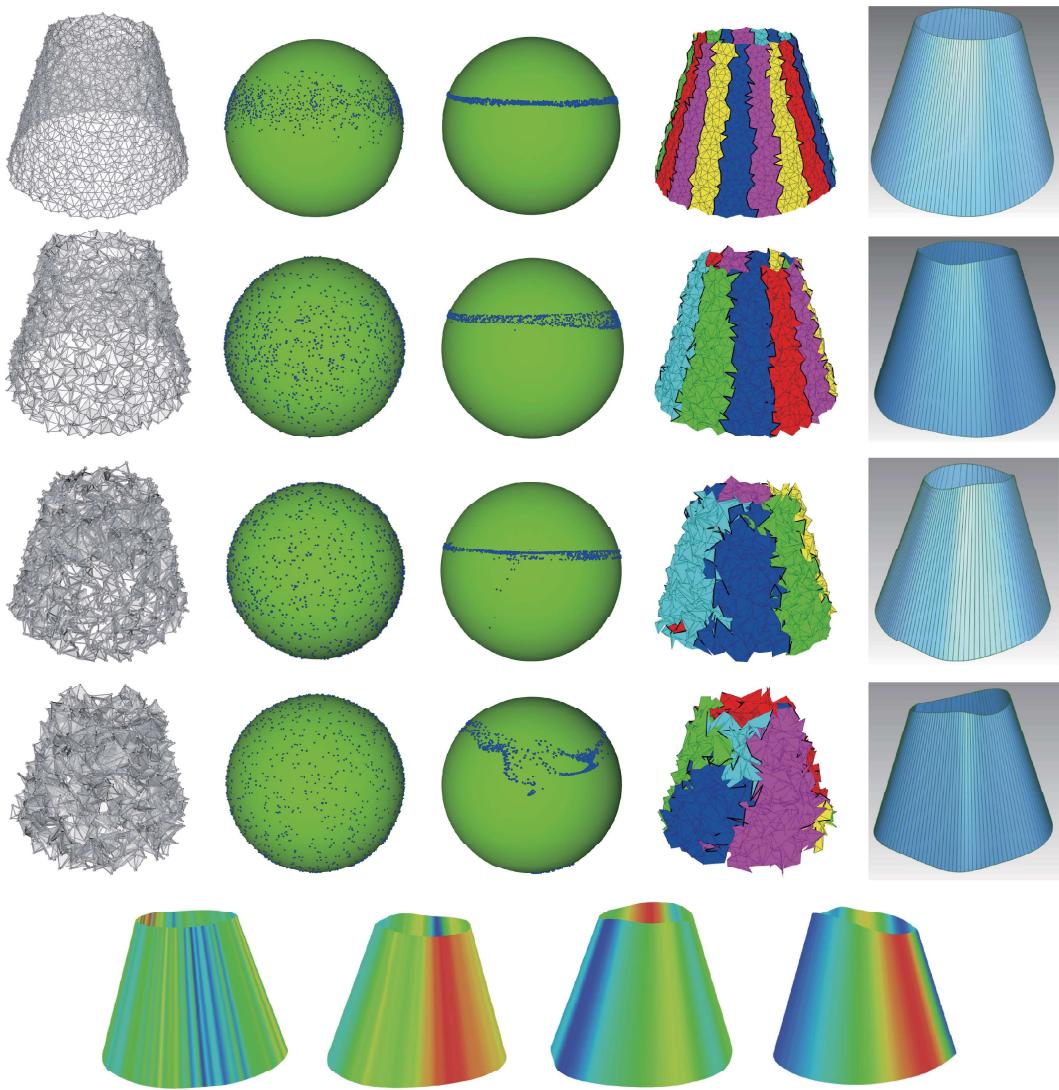


图 8 (网络版彩图) 重建结果受噪声水平的影响

**Figure 8** (Color online) Reconstructed surface with various level of noise. From row 1 to row 4, the level of noise are  $d=0.04$ ,  $d=0.1$ ,  $d=0.2$ ,  $d=0.3$ . Number of segment are respectively 20, 14, 10, 10. From left to right: target noisy model, normal vectors of target noisy model, optimized normal vectors, segmentation result, fitting developable surface. The bottom row: color coding of approximation error between reconstructed developable surface and original cone surface, margin of approximation error: [0.01, 0.07] for  $d=0.04$ ; [0.01, 0.03] for  $d=0.1$ ; [0.02, 0.06] for  $d=0.2$ ; [0.03, 0.08] for  $d=0.3$

盒最长的边为 1). 从误差的范围可以看出, 重建可展曲面的逼近质量较好.

### 5.5 噪声水平对重建结果的影响

显然噪声越大, 可展曲面的重建越困难. 通过一个例子说明本文方法的效果受噪声影响的程度, 采用的模型是图 4 中的圆锥模型. 通过逐渐增大 (5) 中  $d$  的值来逐渐增加噪声的水平, 观察本文方法的结果.

图 8 给出了  $d$  由小变大的一些实验结果. 可以看出, 随着噪声增加, 模型法向量映射到单位球上形成散乱点. 经向量优化后, 法向量在单位球上接近曲线的形状, 这说明算法较好地恢复了模型的可

展几何信息。随着噪声的增加,基于优化后的法向量的模型平面分割结果越来越不规则,但是依然可以反映模型局部可展几何特征。在此分割结果的基础上,可展曲面的拟合算法进一步改善曲面的拟合误差和可展性,得到重建的可展曲面。这个圆锥的例子形状较简单,对于更加复杂的例子,能够得到满意结果允许的噪声水平更小。这个实验说明基于  $L_0$  范数的保可展几何特征的向量场优化方法对噪声具有较好的鲁棒性。

分割数目较多时,分割区域可能不形成一个序列,这给曲面重建带来了困难,特别是当噪声比较大时。适当减小分割数目,可以改善分割区域的质量。图 8 中,当  $d = 0.1$ , 分割数目 20 时,分割区域不形成一个序列,分割数目设为 14 得到了满意的分割结果;当噪声水平增加到  $d > 0.2$  时,不容易得到满意的结果。图 8 最下面一行的例子,噪声水平  $d = 0.3$ , 区域分割的结果不构成完美的序列,但是利用本文算法,一些质量不好的分割区域会被自动忽略掉,仍然可以得到一个质量不高的初始曲面,经过可展曲面拟合算法的改进,最终可以得到重建的可展曲面。当噪声非常大时,本文方法会失败。

## 5.6 算法的缺点和局限性

本文的可展曲面重构方法针对光滑的可展曲面,这样的可展曲面是一单参数平面组的近似。对于有折痕的可展曲面,需要研究更加复杂的法向量场优化模型。由于本文的法向量场的优化目标函数中的向量  $\Theta$  考虑的是法向量的分量,理论上可能出现两个法向量的某些分量相等,而其余分量差别较大的情况。另外本文采用的优化算法效率不令人十分满意,可以考虑其他高效的优化方法,或者算法的并行化。

## 6 结论

本文提出了噪声数据的可展曲面重建方法,利用基于  $L_0$  范数定义的模型法向优化算法,能够较好恢复曲面的法向量信息,同时保持模型的可展几何特征;基于优化后的法向量场,变分拟合算法能够得到模型的平面片逼近表示,进而构造出初始的近似可展曲面模型;最后利用可展曲面拟合算法改善曲面逼近的质量以及曲面的可展性。实验表明该方法具有较好的效果。

接下来的工作将研究有噪声的更为复杂形状的可展曲面模型的重建,例如带折痕的可展曲面模型。我们也将研究基于  $L_0$  范数法向量场优化的自由曲面上可展区域的识别和重建,并研究一些具体的应用问题,例如服装造型、船体造型和建筑造型等。实验中的目标模型是带有噪声的三角网格,本文方法容易推广到目标模型是点云的情形。另外我们也将考虑更高效的优化算法和算法的并行化。

## 参考文献

- 1 Aumann G. Degree elevation and developable Bézier surfaces. *Comput Aided Geom Design*, 2004, 21: 661–670
- 2 Chen D R, Wang G J. Developable Bézier parametric surfaces. *J Comput-Aided Design Comput Graph*, 2003, 15: 570–575 [陈动人, 王国谨. 可展 Bézier 参数曲面. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15: 570–575]
- 3 Bo P B, Wang W P. Geodesic-controlled developable surfaces for modeling paper bending. *Comput Graph Forum*, 2007, 26: 365–374
- 4 Tang C C, Bo P B, Wallner J, et al. Interactive design of developable surfaces. *ACM Trans Graph*, 2016, 35: 1–12
- 5 Li C Y, Wang R H, Zhu C G. An approach for designing a developable surface through a given line of curvature. *Comput Aided Design*, 2013, 45: 621–627
- 6 Zhao H, Wang G. A new method for designing a developable surface utilizing the surface pencil through a given curve. *Progress Natural Sci*, 2008, 18: 105–110

- 7 Wang C L. Towards flattenable mesh surfaces. *Comput Aided Design*, 2008, 40: 109–122
- 8 Liu Y, Pottmann H, Wallner J, et al. Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces. *ACM Trans Graph*, 2006, 25: 681–689
- 9 Solomon J, Vouga E, Wardezky M, et al. Flexible developable surfaces. *Comput Graph Forum*, 2012, 31: 1567–1576
- 10 Rose K, Sheffer A, Wither J, et al. Developable surfaces from arbitrary sketched boundaries. In: *Proceedings of Symposium on Geometry Processing 2007*. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2007. 163–172
- 11 Liu Y, Tang K, Gong W, et al. Industrial design using interpolatory discrete developable surfaces. *Comput Aided Design*, 2011, 43: 1089–1098
- 12 Zhang W, Wang G J. Constructing quasi-developable meshes through a given discrete line of curvature. *J Comput-Aided Design Comput Graph*, 2015, 27: 1950–1955 [张威, 王国谨. 以离散曲线为曲率线构造拟可展离散曲面. 计算机辅助设计与图形学学报, 2015, 27: 1950–1955]
- 13 Pottmann H, Wallner J. Approximation algorithm for developable surfaces. *Comput Aided Geom Design*, 1999, 16: 539–556
- 14 Pottmann H, Schiftner A, Bo P, et al. Freeform surfaces from single curved panels. *ACM Trans Graph*, 2008, 27: 76
- 15 Kilian M, Flöry S, Chen Z, et al. Curved folding. *ACM Trans Graph*, 2008, 27: 1–9
- 16 Bo P B, Yuan Y, Zhang C M. Developable surface recognition and reconstruction. *J Comput-Aided Design Comput Graph*, 2016, 28: 1428–1435 [伯彭波, 袁野, 张彩明. 可展曲面的识别与重建. 计算机辅助设计与图形学学报, 2016, 28: 1428–1435]
- 17 Julius D, Kraevoy V, Sheffer A. D-charts: quasi-developable mesh segmentation. *Comput Graph Forum*, 2005, 24: 581–590
- 18 Yamauchi H, Gumhold S, Zayer R, et al. Mesh segmentation driven by Gaussian curvature. *Visual Comput*, 2005, 21: 659–668
- 19 Xiao D, Lin H, Xian C, et al. CAD mesh model segmentation by clustering. *Comput Graph*, 2011, 35: 685–691
- 20 Peternell M. Developable surface fitting to point clouds. *Comput Aided Geom Design*, 2004, 21: 785–803
- 21 Wang R M, Yang Z W, Liu L G, et al. Decoupling noises and features via weighted L1-analysis compressed sensing. *ACM Trans Graph*, 2014, 33: 1–12
- 22 He L, Schaefer S. Mesh denoising via  $L_0$  minimization. *ACM Trans Graph*, 2013, 32: 1–8
- 23 Sun Y, Schaefer S, Wang W. Denoising point sets via  $L_0$  minimization. *Comput Aided Geom Design*, 2015, 35: 2–15
- 24 Cheng X, Zeng M, Liu X G. Feature-preserving filtering with  $L_0$  gradient minimization. *Comput Graph*, 2013, 38: 150–157
- 25 David C S, Pierre A, Mathieu D. Variational shape approximation. *ACM Trans Graph*, 2004, 23: 905–914

## Developable surface reconstruction from noisy data with $L_0$ -norm minimization

Pengbo BO<sup>1\*</sup>, Zheng WANG<sup>1</sup>, Caiming ZHANG<sup>2\*</sup> & Yujian ZHENG<sup>1</sup>

1. School of Computer Science and Technology, Harbin Institute of Technology at Weihai, Weihai 264209, China;  
2. School of Computer Science and Technology, Shandong University, Ji'nan 250100, China

\* Corresponding author. E-mail: pengbo@hitwh.edu.cn, czhang@sdu.edu.cn

**Abstract** A novel method is proposed for developable surface reconstruction from noisy model. An optimization approach is employed to smooth normal vector field of given model via  $L_0$ -norm minimization. This optimization method has the capability of preserving geometric information concerning developability. Based on the optimized normal vector field, a variational shape approximation procedure is utilized to divide the target model into a sequence of planar segments. After each segment is assigned with an initial B-spline surface, a patch merging procedure is used to obtain a B-spline ruled surface which is nearly developable and covers the whole target model. Finally, a developable surface fitting process is used to improve the quality of fitting surface both in approximation error and developability. The presented method shows pleasing performance in recovering developable information in noisy model and consequently is capable of reconstructing high quality developable surfaces. Some experiments are included to demonstrate the performance of the presented method.

**Keywords** developable surface, surface reconstruction, surface fitting,  $L_0$  norm, surface segmentation



**Pengbo BO** is an associate professor in School of Computer Science and Technology, Harbin Institute of Technology at Weihai. He received his Ph.D. degree in 2010 in Department of Computer Science at the University of Hong Kong. He worked as a postdoctor in Visual Computing Center at King Abdullah University of Science and Technology (KAUST) from 2013 to 2014. His research interests include geometric modeling, information visualization, and image processing.



**Zheng WANG** is an associate professor in School of Computer Science and Technology, Harbin Institute of Technology at Weihai. He received a Master's degree of architecture in Harbin Institute of Technology in 1996. His research interests include computer graphics, computer games and digital entertainment.



**Caiming ZHANG** is a professor and doctoral supervisor of the School of Computer Science and Technology at Shandong University. He received a B.S. degree and an M.E. degree in computer science from Shandong University in 1982 and 1984, respectively, and a Ph.D. degree in computer science from the Tokyo Institute of Technology, Japan, in 1994. From 1997 to 2000, he has held visiting position at the University of Kentucky, USA. His research interests include computer aided geometric design, computer graphics, information visualization and image processing.



**Yujian ZHENG** is an undergraduate student in School of Computer Science and Technology, Harbin Institute of Technology at Weihai. Supervised by Pengbo Bo, he is currently working on geometric modeling using numerical optimization. His research interests include developable surface modeling and mesh denoising.