

圆锥样条曲面拟合

张雪晴¹, 伯彭波¹, 郑玉健¹, 张彩明²

(1 哈尔滨工业大学(威海)计算机科学与技术学院 威海 264209; 2 山东大学计算机科学与技术学院 济南 250100)
(pbbo@hit.edu.cn)

摘要: 为了生成给定曲面模型的逼近圆锥样条曲面表示, 我们提出一种圆锥样条曲面的逼近算法. 该算法迭代两个步骤, 即曲面上圆锥曲面区域的自动分割和圆锥几何约束下的曲面逼近. 在逼近误差驱动下, 自适应的生成圆锥面片的分布和逼近圆锥的形状参数. 该方法是首个圆锥样条曲面的逼近算法, 能够将一个曲面形状转化为一个由圆锥面的光滑拼接表示, 为曲面模型的加工制造带来了新的技术手段.

关键词: 圆锥样条; 曲面逼近; 曲面重建; 曲面加工制造
中图法分类号: TP391.41

Cone spline surface fitting

Zhang Xueqing¹, Bo Pengbo¹, Zheng Yujian¹, Zhang Caiming²

(1 Harbin Institute of Technology, Weihai 264209; 2 Shandong University, Jinan 250100)

Abstract: We propose an approach for computing a cone spline surface approximating a given target model. This method contains two basic steps, i.e., conical region detection on a surface and cone spline surface approximation under the geometric constraints of cones. The distribution of conical patches and shape parameters of conical patches are computed adaptively as a result of minimizing the approximation error to target model. The proposed approach enables us to convert a surface model into a representation composed of conical patches which facilitates the manufacturing of surface models.

Key words: cone spline surface, surface approximation, surface reconstruction, surface manufacturing

1 相关工作及贡献

圆锥样条曲面是由圆锥曲面片光滑拼接构成的曲面, 其特殊的几何性质使得它在机械加工制造领域有广泛的应用. 例如在钢板的成型技术中经常采用辊压法, 非圆锥面的直纹面的辊压制造工艺较为复杂, 而圆锥面片和圆柱面片的辊压法制造技术较为简单, 因此圆锥样条曲面逼近技术具有重要的应用价值.

圆锥样条曲面构造的关键问题是要确定圆锥

面的分布和圆锥的参数, 使曲面逼近给定的模型. 已有圆锥样条曲面逼近工作只讨论目标模型是可展曲面的情形, 也没有讨论如何在圆锥样条曲面的逼近误差驱动下得到圆锥面的分布和圆锥参数.

本文提出一种逼近给定曲面模型的圆锥样条曲面计算方法. 该算法极小化圆锥样条曲面的逼近误差, 自动识别和优化表面上的圆锥区域以及拟合圆锥的形状参数, 实现了圆锥曲面片的自动识别和重建. 本文的主要贡献有两点:

(1) 提出基于局部逼近圆锥轴线分类的圆锥

区域分割方法, 自动识别表面上的近似圆锥曲面.

(2) 提出基于直纹面表示的圆锥样条曲面逼近算法, 自动优化曲面的圆锥区域分割和圆锥的形状参数.

1.1 相关工作

已有工作研究了单个圆锥曲面的数据点逼近问题. Lukács 等研究了基于最小二乘法的特殊曲面的拟合, 包括圆锥, 圆柱, 圆环面等[1]. Séquin 等研究了一般的二次代数曲面的数据点拟合问题[2]. 一些工作研究了运动曲面的逼近问题, 圆锥曲面和圆柱面作为特殊的旋转曲面, 也是运动曲面的一种[3].

现有的关于圆锥样条曲面建模的工作研究了将可展曲面转化为圆锥样条曲面的技术. Leopoldseder 和 Pottmann 提出了用圆锥样条曲面逼近一个可展曲面的算法[4]. 首先在可展曲面上选定一些母线, 得到给定可展曲面的一个区域分割, 然后在相邻两个选定母线之间采用 Hermite 插值思想计算两个光滑拼接的圆锥面. 该方法不能自动得到最好的曲面分割, 而本文方法在逼近误差函数的驱动下自动生成曲面分割和圆锥逼近. 杨勋年等提出了基于胖圆锥样条曲线(fat conic spline)拟合思想的圆锥样条曲面逼近直纹面的方法[5], 但是该方法要求曲面的边界曲线位于两个平行的平面上, 本文方法则没有这个限制.

圆锥样条曲面是一种特殊的可展曲面. 参数可展曲面的建模问题得到了广泛的研究, 已有方法或者基于 B 样条曲面或者 Bézier 曲面表示形式[6][7][8][9], 把可展性作为非线性约束求解曲面的形状参数; 或者利用可展曲面的对偶表示形式, 通过控制可展曲面的切平面生成可展曲面[10][11]. Tang 等综合利用了可展曲面的 B 样条形式和对偶形式, 提出可展曲面交互设计方法[12]. 郑玉健等提出插值给定边界曲线的 B 样条可展曲面的构造方法[13]. 最近 Fernández-Jambrina 证明了文献[8]方法生成的 Bézier 可展曲面是所有的退化线(regression curve)为多项式曲线的可展曲面[14].

2 算法描述

由于圆锥的形状参数比较少, 圆锥样条曲面又要求相邻圆锥面之间光滑拼接, 这使得圆锥样条曲面拟合问题求解比较困难. 本文方法以直纹面表示作为中间形式, 在圆锥几何约束下优化曲面的逼近精度, 自动识别和优化圆锥的分布以及圆锥的形状. 算法包括 3 个步骤: 1) 近似圆锥区域的自动分割(2.1 节); 2) 基于 B 样条直纹面的圆锥样条曲面逼近(2.2 节); 3) 精确圆锥样条曲面的生成(2.3 节).

初始化. 给定目标曲面 M , 首先利用已有方法计算逼近 M 的可展曲面[13], 采用 B 样条直纹面表示形式

$$S(u, v) = a(u) \cdot (1 - v) + b(u) \cdot v, \quad u, v \in [0, 1] \quad (1)$$

其中 $a(u)$ 和 $b(u)$ 是该曲面的两条边界曲线, 采用 3 次 B 样条曲线. 注意, 即使得到了目标模型的逼近可展曲面, 已有方法也无法以曲面的逼近误差为指导得到曲面的圆锥区域分割[4].

2.1 圆锥区域的分割

寻找曲面 S 的一个区域分割, 要求每一个分割区域尽量接近一个圆锥面. 考虑曲面上母线处的局部逼近圆锥 ψ_i , 曲面 S 的一个分割区域接近一个圆锥面意味着该区域所有局部逼近圆锥的轴线比较接近. 基于该思想, 我们提出基于圆锥轴线聚类的曲面分割方法.

(1) 局部逼近圆锥轴线的计算. 若 $S(u, v)$ 是非平面可展曲面, 则容易计算母线 $S(u_j, v)$ 处与 S 具有 2 阶切触的圆锥的轴线. 设点 $P_1 = S(u_j, 0)$ 处非零主曲率是 ρ_1 , $N(u, v)$ 是曲面 S 的法矢量. 向量 $N_1 = \text{sign}(\frac{dS^2(u_j, 0)}{du^2} \cdot N(u_j, 0))N(u_j, 0)$ 在 P_1 点垂直于曲面 S 且指向密切圆圆心, 其中 $\text{sign}(v)$ 取 v 的正负号. 在曲面上 P_1 点处沿法矢量 N_1 方向取一点 $C_1 = P_1 + N_1 \cdot \frac{1}{\rho_1}$, 该点到曲面 S 的距离等于曲面 S 在点 P_1 处的最大主曲率对应的曲率半径, 且 C_1 位于曲面凹的一面. 类似地可以在曲面的另一条边界曲线点 $P_2 = S(u_j, 1)$ 处沿曲面法向取点 C_2 , 则线段 C_1C_2 是在母线 P_1P_2 处与曲面 S 具有二阶切触的圆

锥的轴线. 见图 1 所示.

若 $S(u, v)$ 非精确可展, ρ_1 可取最大的主曲率大小, 即 $\rho_1 = \max\{\|\bar{\rho}_1\|, \|\bar{\rho}_2\|\}$, 其中 $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$ 是点 P_1 处的主曲率. 计算出曲面 $S(u, v)$ 上所有采样母线处的逼近圆锥的轴线(见图 2(a)), 接下来基于这些轴线进行圆锥区域分割.

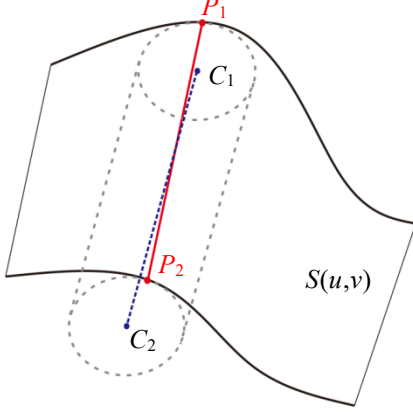


图 1 曲面 S 局部逼近的圆锥曲面

(2) 圆锥区域分割. 记母线 L_i 对应的圆锥轴线为 A_i , 对曲面 S 上所有采样母线对应的圆锥轴线 A_i 进行分类, 实现对曲面 S 的区域分割. 为了定义轴线之间的距离, 这里采用直线的 Plücker 坐标表示.

假设直线上不同的两点 a, b , 令 $d = \frac{b-a}{\|b-a\|}$,

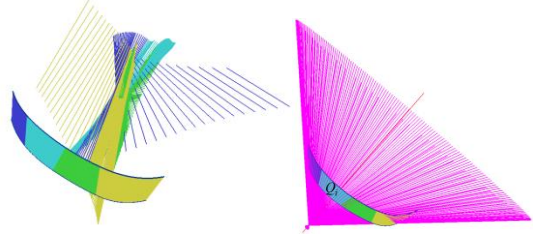
$m = a \times b$, Plücker 表示用一个 6 维向量 $r = (d[0], d[1], d[2], m[0], m[1], m[2])$ 来表示一条直线, 因为这里 d 是单位向量, 所以这种直线的表示是唯一的.

为了处理曲面上距离较远的区域对应的圆锥轴线比较接近的情况, 需要考虑曲面母线间的欧氏距离. 用母线的端点 $p_j = S(u_j, 0)$ 代表母线 L_j 的位置, 用一个 9 维向量表示一条母线对应的圆锥轴线

$$g = \left(\frac{r}{R_r}, k \frac{p}{R_p} \right),$$

其中 R_r 表示所有轴线的 Plücker 表示的最大值 $R_r = \max\{\|r_j\|\}$, R_p 表示所有对应母线端点的最大值 $R_p = \max\{\|p_j\|\}$. 系数 k 的作用是权衡两个部分的权重, 实验中采用 $k=10$ 能得到满意效果. 基于这个直线的表示, 假设两条轴线 A_i, A_j 的表示为 g_i, g_j , 定义 A_i, A_j 的距离为

$$d(A_i, A_j) = \sqrt{\sum_{n=0}^8 (g_i[n] - g_j[n])^2}.$$



(a) 轴线分类结果 (b) 一个分类区域的逼近圆锥

图 2 基于轴线分类的曲面分割

基于上述距离定义采用 K-means 聚类方法对轴线进行分类. 记一个分割区域为 Q_i , 其中心轴线(分类中心)是直线 π_i , 轴线的分类结果给出了曲面 S 的一个区域分割. 每一个分割区域近似一个圆锥面. 图 2(a) 是一个轴线分类和曲面区域分割结果, 不同的颜色区分了 4 个分类. 每一个分割区域对应的轴线的分类中心代表该区域的逼近圆锥的轴线. 利用该区域内的采样母线计算和中心轴线的平均夹角, 得到该区域的一个逼近圆锥. 图 2(b) 显示了曲面上其中一个分割区域的逼近圆锥. 这个粗略的区域分割和逼近圆锥的质量还需要进一步优化改善.

2.2 圆锥样条曲面逼近

2.2.1 节点插入. 要保证每一个圆锥分割区域内具有足够的 B 样条控制点. 首先在相邻两个圆锥分割区域公共母线对应的参数位置插入一个新的节点, 使得每一个分割区域对应一段节点区间. 在控制点个数较少的分割区域内通过节点插入适当增加控制点数目. 已有工作表明 3 次多项式曲线能够高精度表达不超过 180 度的圆弧[15]. 虽然 3×1 次的 B 样条曲面逼近圆锥的能力证明更为困难, 但这启发我们在每一段分割区域内采用 4 个控制点, 本文实验部分给出了实验数据说明这个问题.

2.2.2 曲面逼近. 曲面逼近目标函数的构造类似已有工作[16]. 曲面逼近的目标函数定义为

$$F_{Appro} := \sum_{p_i \in M} d^2(p_i, S) + \lambda_1 \sum_{p_i \in \partial M} d^2(p_i, \partial S) + \lambda_2 F_{Fair}(S),$$

其中第 1 项定义目标曲面上的数据点到拟合曲面 S

的距离: $d(p, S) = (p - \pi(p)) \cdot N$, 其中 $\pi(p)$ 表示点 p 在 S 上的最近点, N 表示 S 在 $\pi(p)$ 处的法向量. 第 2 项定义目标曲面的边界数据点到拟合曲面的边界曲线的切线距离的平方: $d^2(p, \partial S) = \tau^T \tau$, 其中 $\tau = (p - \chi(p)) - (p - \chi(p) \cdot T)T$, $\chi(p)$ 表示 p 点在 S 的边界曲线上的最近点, T 是边界曲线在 $\chi(p)$ 点相切的单位矢量. 第 3 项是曲面 S 的光顺函数, 定义为曲面边界曲线 $a(t)$, $b(t)$ 二阶导矢大小的平方的积分 [16].

2.2.3 圆锥约束. 计算曲面 S 逼近目标模型的同时需要: 1) 改善曲面 S 上圆锥曲面分割结果; 2) 使每一个分割区域高精度近似一个圆锥面.

首先给出采用的圆锥表示方法. 考虑非平面的圆锥 ϕ_i 的轴线 $\pi_i = (M_i, V_i)$, 其中 M_i 是轴线上一点参考点, V_i 是与轴线平行的单位矢量, 指向圆锥的顶点. 对于圆柱面, 不存在圆锥顶点, 则 V_i 的指向任意.

假设圆锥的母线和轴线的夹角是 θ_i , 点 M_i 到圆锥母线的距离是 d_i . 注意参数 $(M_i, V_i, \theta_i, d_i)$ 能确定 2 个圆锥, 如图 3(a) 所示. 若是圆柱, $\theta_i = 0$, 则表示唯一. 下面基于这个表达定义圆锥约束.

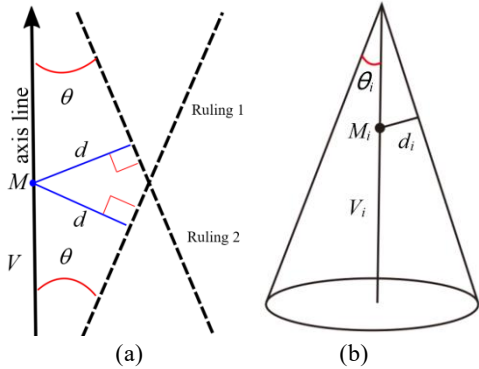


图 3 圆锥(圆柱)的表达

假设曲面上的区域 Q_i 内的采样母线为 $L_{i,j}$, $j=0, \dots, k$, 其两个端点是 $S(u_j, 0)$ 和 $S(u_j, 1)$. 要求母线拟合圆锥意味着母线要满足下述约束条件(参见图 3(b)).

(1) 角度约束. 母线与圆锥轴线的夹角恒定, 即

$$\frac{V_i \cdot (S(u_j, 0) - S(u_j, 1))}{\|V_i\| \cdot \|S(u_j, 0) - S(u_j, 1)\|} = \cos(\theta_i) \quad (2)$$

(2) 距离约束. 圆锥轴线上的参考点 M_i 到母

线的距离恒定, 即

$$d(M_i, L_{i,j}) = d_i,$$

其中 $d(M, L)$ 表示点 M 到直线 L 的距离. 若母线 $L_{i,j}$ 由其上一点 $P = S(u_j, 0)$ 和母线 $L_{i,j}$ 的单位向量

$$L = \frac{S(u_j, 0) - S(u_j, 1)}{\|S(u_j, 0) - S(u_j, 1)\|}$$

表示, 则平方距离为

$$d^2(M, L_{i,j}) = \|M - P\|^2 - ((M - P) \cdot L)^2 \quad (3)$$

上述两个条件不足以保证圆锥的唯一性(图

3a)). 取轴线上的另一点 $M_i^* = M_i + c \frac{V_i}{\|V_i\|}$, 其中 c

是常数. 容易得到 M_i^* 到圆锥面的距离是 $d_i^* = d_i - c \sin(\theta_i)$ (图 3(b)). 要求点 M_i^* 到母线的距离恒定, 即

$$d^2(M_i^*, L_{i,j}) = (d_i^*)^2 \quad (4)$$

约束(2),(3),(4)可唯一确定一个圆锥(圆柱).

(3) 拼接约束. 为了保证相邻的圆锥光滑拼接, 相邻两个圆锥区域的公共母线处需要具有平行的法矢量. 假设两个圆锥区域在公共母线上的法向分别是 N_i 和 N_j , 则拼接约束是

$$\|N_i \times N_j\| = 0.$$

一个圆锥的母线处的法向可以如下求解. 如图 3(a)所示, 假设圆锥的轴线表示为 (M, V) , 圆锥的一个母线 $P_1 P_2$ 与轴线在一个平面内. 易知圆锥曲面在母线 $P_1 P_2$ 上的法向 N 也在同一平面内, 且与 $P_1 P_2$ 垂直. 轴线上的参考点 M 到 $P_1 P_2$ 的最近点为

$$Q = P_1 + (M - P_1) \cdot (P_2 - P_1) \frac{P_2 - P_1}{(P_2 - P_1) \cdot (P_2 - P_1)},$$

则向量 $Q - M$ 与圆锥垂直, 即 $N = Q - M$.

基于上述约束定义极小化的目标函数, 令

$\omega_i = \cos(\theta_i)$ 作为优化变量. 变量包括拟合圆锥的形状参数 $(M_i, V_i, \omega_i, d_i)$ 以及 B 样条曲面的控制点. 建立以下的目标函数:

$$F_{\text{ConeAngle}}^{Q_i} = \sum_{j=0}^k \left(\frac{V_i}{\|V_i\|} \cdot \frac{S(u_j, 0) - S(u_j, 1)}{\|S(u_j, 0) - S(u_j, 1)\|} \cdot \omega_i \right)^2,$$

$$F_{\text{ConeDl}}^{Q_i} = \sum_{j=1}^n \left(d^2(M_i, L_{i,j}) - d_i^2 \right)^2,$$

$$F_{ConeD2}^{Q_i} = \sum_{j=1}^n \left(d^2(M_i + c \frac{V_i}{\|V_i\|}, L_{i,j}) - (d_i - c\sqrt{1-\omega_i^2})^2 \right)^2$$

$$F_{ConeSmooth}^{Q_i, Q_j} = \|N_{i,j} \times N_{j,i}\|^2,$$

其中 Q_i 表示一个分割区域, $N_{i,j}$ 表示区域 Q_i 上和 Q_j 邻近的母线上的法向量.

圆锥样条曲面逼近问题的求解通过极小化下面的目标函数实现.

$$F(\Pi) := F_{Appro} + \lambda_3 \sum_{Q_i} (F_{ConeAngle}^{Q_i} + \beta F_{ConeD1}^{Q_i} + \beta F_{ConeD2}^{Q_i}) + \lambda_4 \sum_{Q_i, Q_j} F_{ConeSmooth}^{Q_i, Q_j} \quad (5)$$

其中 Π 表示所有的变量. 用 L-BFGS 数值优化算法极小化目标函数(5), 函数对变量的导数可以解析求出. 为了使圆锥约束满足, 在迭代过程中逐渐增大 λ_3, λ_4 的值, 直到圆锥约束项的值小于 $1 \cdot 10^{-5}$ 时迭代停止.

误差控制. 如果优化曲面结果 $S(u,v)$ 的逼近误差不能满足要求, 可以通过增加圆锥曲面的片数来增加造型自由度, 对曲面做进一步优化. 过程是基于当前优化结果曲面 $S(u,v)$ 采用更多的曲面分类数目, 重复算法的步骤 1 和步骤 2, 降低距离误差, 该过程可以迭代多次执行. 第 3 节给出了一个模型的实验结果(图 10).

2.3 精确圆锥样条曲面的生成

三次 B 样条曲面无法精确表示一个圆锥曲面, 优化得到的逼近曲面上每一个区域 Q_i 对应的参数 $(M_i, V_i, \omega_i, d_i)$ 确定一个精确圆锥 Λ_i . 由于优化数值误差的存在, 这些圆锥面不是严格光滑拼接的. 我们将优化得到的圆锥面映射到精确圆锥样条曲面空间, 构造精确圆锥样条曲面. 图 4 显示了一个优化曲面上每一个区域的圆锥. 为了清楚显示圆锥, 图中的母线被延长了.

假设优化结果给出圆锥面序列 $X_i; (\Lambda_i, L_{i,1}, L_{i,2})$, $i=1, \dots, K$. 其中 $L_{i,1}, L_{i,2}$ 是圆锥 Λ_i 上的两个母线, 母线间的区域定义了一个圆锥面片. 计算一个刚体变换 M_i , 将圆锥面 X_{i+1} 拼接到 X_i 上, 使得圆锥面 X_{i+1} 做变换后, 母线 $M_i L_{i+1,1}$ 与 $L_{i,2}$ 重合且光滑拼接.

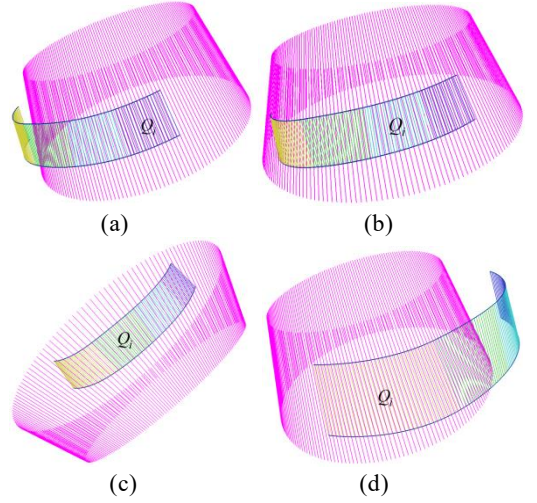


图 4 区域逼近圆锥

参考图 5 的示意图(误差夸大). 假设母线 $L_{i,2}$ 的两个顶点是 (a_i, b_i) , $L_{i+1,1}$ 的两个顶点是 (a_{i+1}, b_{i+1}) . 刚体变换 $M_i = m_3 m_2 m_1$ 是如下几何变换的组合: 平移变换 m_1 将 a_{i+1} 移动到 a_i (图 5(b)); 旋转变换 m_2 使两个母线重合 (图 5(c)); 旋转变换 m_3 使得两个母线上的法向重合 (图 5(d)). 拼接过程从 X_0 出发进行到最后的圆锥面 X_K , 得到精确的圆锥样条曲面. 因为 2.2 节优化得到的圆锥面已经以较高的质量满足约束, 因此这一步的映射引起的圆锥面的变化微小.

边界裁剪. 虽然在目标函数中包含边界距离误差函数, 但是结果圆锥的边界一般不严格对目标模型的边界, 不过很容易对优化结果圆锥的母线进行裁剪, 得到高质量的圆锥曲面边界.

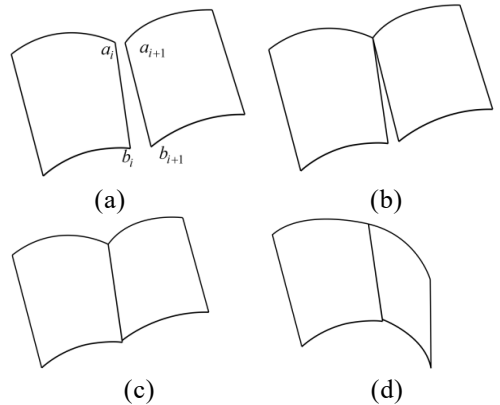


图 5 精确圆锥样条曲面构造

3 实验和讨论

本节给出一些实验结果, 实验的输入是带状的三角网格模型, 其大小经过放缩, 使得模型的长方体包围盒最长边为 1. 为了衡量得到的圆锥样条曲面的逼近误差, 我们在圆锥面的母线上采一些点 p_{ij} , 计算 p_{ij} 到目标曲面的距离, 将每一条母线上的采样点平均距离作为该母线的逼近误差. 在实验结果中利用颜色编码显示距离误差, 红色表示最大误差, 蓝色表示最小误差. 本节实验的圆锥样条曲面的逼近误差数据见表 2.

3.1 实验结果

(1) 实验结果. 图 6, 图 7 给出了两个模型和实验结果. 图 6 的模型上存在一个比较平坦的区域. 当圆锥比较接近于一个平面时, 意味着圆锥的半径比较大, 圆锥轴线距离圆锥母线的距离较远. 如果目标模型上存在精确的平面区域, 我们的方法会生成一个半径较大的圆锥面, 而无法生成精确的平面. 图 7 中存在曲面凹凸区域的变化, 因此存在 reflection line. 我们的方法能够自动生成合理的圆锥曲面分布和圆锥参数, 得到满意的圆锥样条曲面.

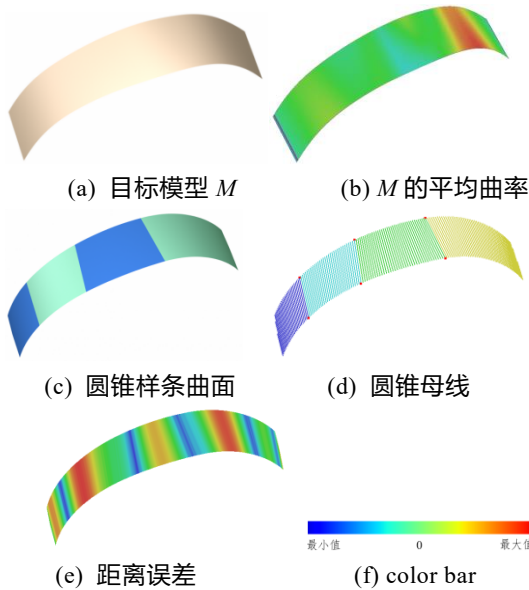


图 6 C 状模型. (a) 目标模型 (b) 目标模型的平均曲率 (c) 逼近的圆锥样条曲面 (d) 圆锥的母线 (e) 逼近误差颜色编码 (f) color bar.

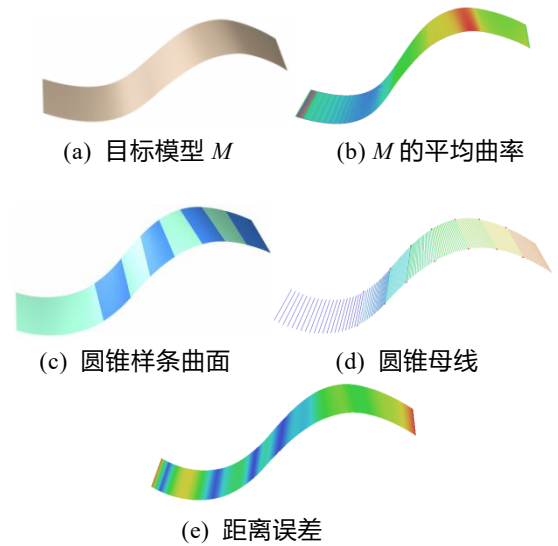


图 7 S 状模型. (a) 目标模型 (b) 目标模型的平均曲率 (c) 逼近的圆锥样条曲面 (d) 圆锥曲面的母线. (e) 逼近误差颜色编码

图 8 中的模型是一个螺旋状曲面模型, 结果分别是圆锥曲面片数目 8 和 13. 不同于已有方法[5], 本文方法不要求圆锥样条曲面的边界曲线位于平行的平面上. 图 9 给出了一个宽度变化的模型实验结果, 曲面的中部较窄, 两端较宽. 这个模型的形状弯曲度比较大, 得到的圆锥样条曲面的逼近误差较其它模型要大.

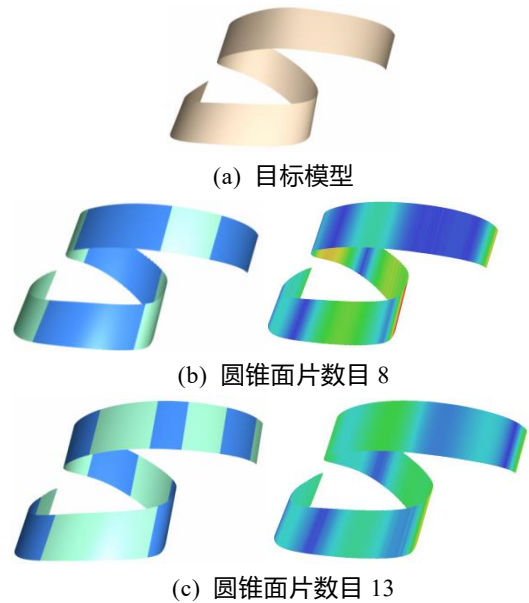


图 8 螺旋状模型. (b) 片数 8 的结果; (c) 片数 13 的结果

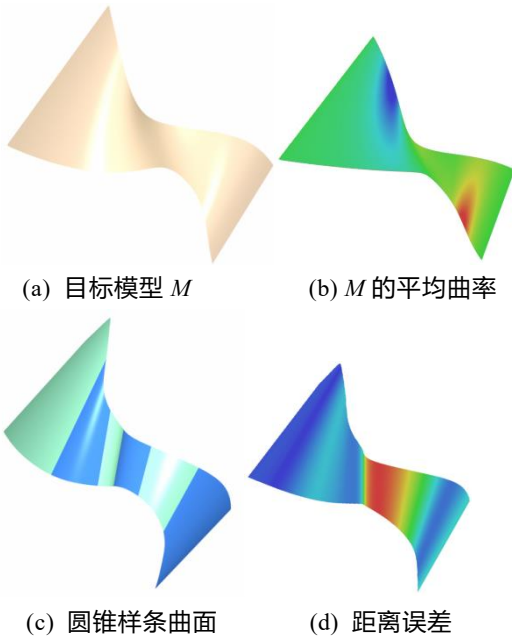


图 9 变宽模型. (a) 目标模型; (b) 平均曲率; (c) 逼近圆锥样条曲面, 含 6 片圆锥面; (d) 逼近误差颜色编码

(2) 控制点数目与距离误差的关系. 在一般的 B 样条曲面逼近问题中, 更多的控制点数目引入更多的造型自由度, 能够减小逼近误差. 对于圆锥曲面片的逼近, 我们通过实验验证了不同控制点数目对逼近误差的影响. 对于图 10 中的模型, 当分割区域为 4 类时, 每一个分割区域采用不同数目控制点时逼近距离误差的结果见表 1. 结果显示更多的控制点对逼近误差的改善作用并不明显, 而且会使得优化变得困难. 这说明对于圆锥曲面片模型, 太多的控制点数目是没有必要的. 在我们的实现中每一个分割区域的控制点数目为 4.

表 1 控制点数与距离误差的关系

控制点个数	最大误差	平均误差
4	0.0386	0.0122
6	0.0384	0.0113
8	0.0387	0.0121
10	0.0388	0.0123

(3) 片数和距离误差的关系. 采用更多的圆锥面能够提供更多的造型自由度, 从而得到更小的逼近误差. 图 10 给出一个增加圆锥面片数的实验.

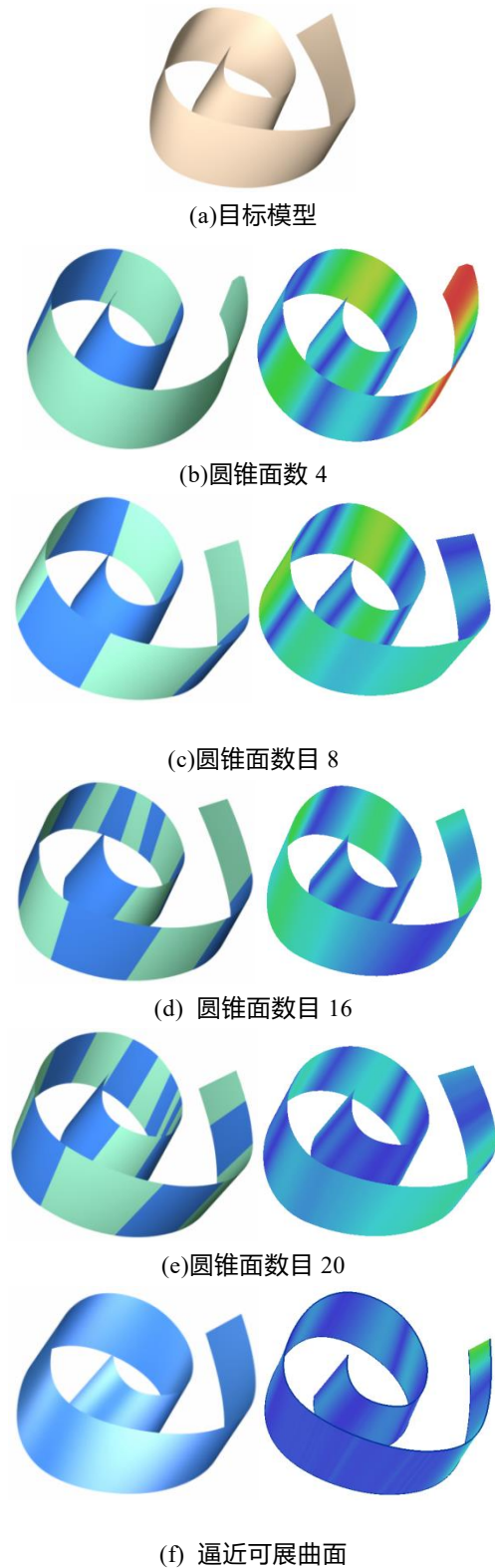


图 10 不同分片数目的实验. 每一行显示逼近曲面(左图)和距离误差(右图).

通过迭代本文算法的步骤 1(2.1 节)和步骤 2(2.2 节), 逐渐增加片数, 增加曲面优化的自由度, 降低逼近曲面的距离误差. 为了探究圆锥样条曲面的逼近误差随着圆锥面片数变化的趋势, 我们逐渐增加圆锥面片数, 数目为 4, 8, 12, 16, 20. 实验结果表明, 随着片数的增加, 距离误差逐步减少. 表 2 中给出了不同圆锥面数目时结果的最大距离误差和平均距离误差. 图 11 给出了最大距离误差和平均距离误差随片数增加的减少趋势.

理论上圆锥面的片数越多, 圆锥样条曲面的造型能力就越接近一个一般的可展曲面, 因此圆锥样条曲面的逼近误差不会优于一般可展曲面. 文献[13]提供了一种计算逼近目标模型的 B 样条可展曲面方法, 我们利用该方法得到逼近目标模型的 3×1 次的 B 样条可展曲面, 与本文方法得到的圆锥样条曲面的距离误差进行对比. 图 10(f)显示了一个逼近可展曲面和它的距离误差. 最大距离误差: 0.017, 平均距离误差: 0.003. 平均距离误差比含有 20 个面片的圆锥样条曲面更小, 理论上这个距离误差是圆锥样条曲面逼近误差的极限值.

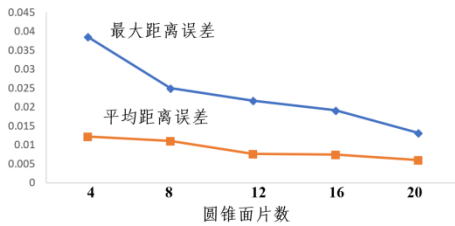


图 11 距离误差与圆锥面片数关系

(4) 噪声模型实验. 本文方法距离误差函数的定义是目标模型的数据点到拟合曲面的距离, 本文圆锥样条曲面逼近算法也适用于带有噪声的目标模型. 图 12 给出了一个噪声模型的圆锥样条曲面逼近结果, 其中的圆锥样条曲面含有 11 个曲面片.

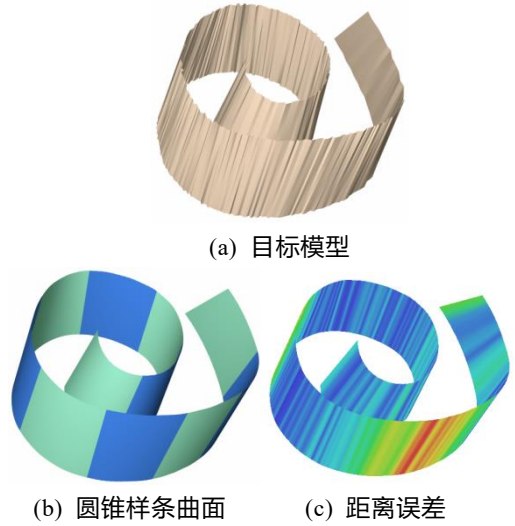


图 12 噪声模型结果. (a)目标模型; (b)逼近的圆锥样条曲面, 含 11 片圆锥面; (c)逼近误差颜色编码

3.2 讨论

几个实验展示了提出的圆锥样条曲面建模方法的能力, 实例的实验结果被整理在表2中. 该方法是第一个逼近误差驱动的圆锥样条曲面逼近算法, 对弯曲的目标曲面和曲面边界曲线没有特殊的要求, 但是本文方法无法重建精确的平面.

优化目标函数中的几个函数项的系数需要设定. 自动地设定这些系数的值比较困难, 我们采用经验值. 对本文中的几个模型, 目标函数中的几个系数的具体取值如为: $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 0.00001$, λ_3, λ_4 的初始值取100, 当两次优化迭代的圆锥约束项的改变值小于0.0001时增加 λ_3, λ_4 的值为 $10\lambda_3$ 和 $10\lambda_4$ 然后继续优化, 直到圆锥约束项的值小于 $1 \cdot 10^{-5}$ 时停止优化, 基于优化结果生成精确圆锥样条曲面.

本文算法需要首先计算目标模型的圆锥区域分割, 这利用了曲面的局部逼近圆锥的几何信息, 因此要求目标曲面的形状近似带状. 如果目标曲面是任意的自由曲面, 局部逼近圆锥一般难以组织成带状区域, 因此我们的方法对于一般的自由曲面不能保证得到满意的效果. 不过在很多圆锥样条曲面建模的相关应用中, 目标模型一般是长条状.

本文实验的测试平台为Intel Core i5 2.5G CPU,

4G内存, 1T 硬盘的笔记本电脑. 本文方法先通过局部逼近圆锥轴线的聚类得到较好的初始圆锥分布和参数, 这利于后续的优化. 但是由于目标函数的复杂程度较高, 算法的时间效率还不令人满意. 本文中模型的具体优化时间见表2. 如何简化约束, 提高优化效率是我们接下来的研究方向.

表 2 所有实例模型的距离误差及运行时间

模型	类别数	距离误差		运行时间
		最大	平均	
图 6 模型	4	0.003	0.001	32s
图 7 模型	8	0.007	0.002	51s
图 9 模型	6	0.050	0.020	62s
图 8 模型	8	0.010	0.006	40s
	13	0.008	0.005	67s
图 10 模型	4	0.038	0.012	33s
	8	0.025	0.011	50s
	16	0.019	0.0007	70s
	20	0.013	0.006	110s
图 12 模型	11	0.020	0.006	72s

4 结 语

本文提出一种圆锥样条曲面拟合方法, 通过对局部逼近圆锥进行分类得到曲面的初始圆锥区域分割, 借助 B 样条直纹面的形式, 计算逼近给定模型的近似圆锥曲面, 最后将结果映射到圆锥样条曲面空间得到精确的圆锥样条曲面.

本文方法的优点是能够自适应的得到圆锥面的分布, 在逼近误差的驱动下得到圆锥面的形状参数. 未来我们将结合局部圆锥面细分等想法进一步发掘该方法的潜力, 并改进算法的效率. 另外我们也将研究更加一般的曲面模型的圆锥面逼近问题.

参考文献(References):

- [1] Gabor Lukács, Ralph Martin, Dave Marshall. Faithful Least-Squares Fitting of Spheres, Cylinders, Cones and Tori for Reliable Segmentation[C]. Proceedings of the 5th European Conference on Computer Vision, 1998, Volume I: 671-686
- [2] James Andrews, Carlo H. Séquin. Type-Constrained Direct Fitting of Quadric Surfaces[J]. Computer Aided Design and Applications, 2013, 11 (1): 107-119
- [3] James Andrews, Carlo H. Séquin. Generalized, Basis-Independent Kinematic Surface Fitting[J]. Computer-Aided Design, 2013, 45(3): 615-620
- [4] Stefan Leopoldseder and Helmut Pottmann. Approximation of developable surfaces with cone spline surfaces[J]. Computer-Aided Design, 1998, 30(7): 571-582
- [5] Yang Xunnian and Yang Weiping. Cone Spline Approximation via Fat Conic Spline Fitting[J]. Computer-Aided Design, 2006, 38(6): 703-712
- [6] Aumann G. Interpolation with developable Bézier patches[J]. Computer Aided Geometric Design, 1991, 8(5): 409-420
- [7] Aumann G. A simple algorithm for designing developable Bezier surface[J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(8/9): 601-619
- [8] Aumann G. Degree elevation and developable Bezier surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(7): 661-670
- [9] Maekawa T, Chalfant J S. Design and tessellation of B-spline developable surfaces[J]. Journal of Mechanical Design, 1998, 120(3): 453-461
- [10] Bodduluri R M C, Ravani B. Design of developable surfaces using duality between plane and point geometries[J]. Computer-Aided Design, 1993, 25(10): 621-632
- [11] Pottmann H, Wallner J. Approximation algorithms for developable surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 1999, 16(6): 539-556
- [12] Tang C C, Bo P B, Wallner J, et al. Interactive design of developable surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics, 2016, 35(2): #12
- [13] Zheng Y J, Bo P B. Quasi-developable surface reconstruction from boundary curves and its application in ship hull design [J]. Chinese Journal of Computer Aided Design and Computer Graphics, 2018, 30(7): 1243-1250
(郑玉健, 伯彭波. 基于边界曲线的拟可展曲面构造及在船体造型中的应用. 计算机辅助设计与图形学学报, 2018, 30(7): 1243-1250)
- [14] L Fernández-Jambrina. Bézier developable surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 2017, 25: 15-28
- [15] Goldapp M. Approximation of circular arcs by cubic polynomials[J]. Computer Aided Geometric Design, 1991, 8(3): 227-238
- [16] Pottmann H, Schifner A, Bo P B, et al. Freeform surfaces from single curved panels[J]. ACM Transactions on Graphics, 2008, 27(3): #76