

## Exercice 1

Rappel de cours:

- On appelle extraction toute application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante.
- On appelle suite extraite (ou sous-suite) d'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  toute suite de la forme  $(x_n)_{\varphi(n) \in \mathbb{N}}$  où  $\varphi$  est une extraction. Une suite extraite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite obtenue à partir de celle-ci en ne gardant que les éléments  $\varphi(n)$ , mais en nombre infini.
- On appelle valeur d'adhérence d'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  toute limite finie d'une suite extraite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Soit la fonction  $f(n) = n * 360$ , la suite extraite  $(\cos_{f(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite constante qui admet une valeur d'adhérence 1.

Donc la proposition est fausse.

## Exercice 2

Soit les fonctions  $f_1(n) = n * 360$  et  $f_2(n) = 90 + n * 360$ , les suites  $(\cos_{f_1(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\cos_{f_2(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent respectivement vers les valeurs 1 et 0. La suite  $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas convergente car elle admet 2 valeurs d'adhérence distinctes.

Donc la proposition est fausse.

## Exercice 3

Rappel de cours:

Deux suites réelles  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont dites adjacentes si

1. l'une est croissante et l'autre décroissante,
  2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$
- (a)  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante ?

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

La suite  $S_n$  est croissante.

- (b)  $(S_n + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante ?

$$\begin{aligned} (S_{n+1} + \frac{1}{n+1}) - (S_n + \frac{1}{n}) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

La suite  $(S_n + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.

- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((S_n + \frac{1}{n}) - S_n) = 0$ ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((S_n + \frac{1}{n}) - S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Les suites  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(S_n + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes.

Donc la proposition est vraie.

### Exercice 4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in ]-1, 1[$$

alors  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n > N_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx l$ .

Soit  $a = u_{N_0}$  alors  $u_{N_0+1} \approx l.a, u_{N_0+2} \approx l^2.a, \dots, u_{N_0+m} \approx l^m.a$ .

Par conséquent, la suite  $u_n$  converge vers 0 car  $|l| < 1$ .

Donc la proposition est vraie.

### Exercice 5

la proposition est vraie. Voir définition du cours.

### Exercice 6

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x + 1 - \sin x & x > 0 \end{cases}$$

La fonction  $f$  n'est pas continue en 0 ( $f(0^-) = 0$  et  $f(0^+) = 1$ ) donc elle n'admet pas de limite en 0.

Donc la proposition est fausse.

### Exercice 7

Rappel de cours:

$$\lim_{x \neq x_0, x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \neq x_0, x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0) \text{ si } \lim_{x \neq x_0, x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$$

Prenons  $g(x) = \sin x$  et  $f(x) = \frac{\pi.x}{|2x|}$ .

$$\lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0} \frac{\pi.x}{|2x|}$$

- Lorsque  $x > 0$ ,  $\frac{\pi.x}{|2x|} = \frac{\pi}{2}$ , donc  $\lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0} g(f(x)) = g(\frac{\pi}{2}) = 1$
- lorsque  $x < 0$ ,  $\frac{\pi.x}{|2x|} = -\frac{\pi}{2}$ , donc  $\lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0} g(f(x)) = g(-\frac{\pi}{2}) = 1$ .

Donc la proposition est vraie.

### Exercice 8

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln x} = 2 \text{ ?}$$

Application de la règle de l'Hospital car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .

On calcule les deux dérivés:  $(\ln(1+x^2))' = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}$  et  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{1}{x^2} + 1} = 2$$

Donc la proposition est vraie.

## Exercice 9

$$\lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} = 1 \text{ ?}$$

$$\lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

et

$$\lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} = 0$$

Limite indéterminée.

[1]  $x > 0$  alors  $x = \sqrt{x^2}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} &= \lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2} \sqrt{1+x^{-2}}} \\ &= \lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \end{aligned}$$

[12]  $x < 0$  alors  $x = -\sqrt{x^2}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} &= \lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0^-} \frac{1}{-\sqrt{x^2} \sqrt{1+x^{-2}}} \\ &= \lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} = -1 \end{aligned}$$

Donc la proposition est fausse.

## Exercice 10

Rappel de cours:

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage d'un point  $x_0 \in \mathbb{R}$  (donc y compris en  $x_0$ ). On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si  $x \neq x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

$$(H \circ f)(x) = \begin{cases} 1 + 1 - \frac{1}{2} \cos^2 x & 1 - \frac{1}{2} \cos^2 x \geq 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2} \cos^2 x < 0 \end{cases}$$

Les fonctions 0 et  $2 - \frac{1}{2} \cos^2 x$  sont continues car elles sont une combinaison de fonctions continues. Il faut vérifier la continuité de la fonction  $(H \circ f)(x)$  en  $1 - \frac{1}{2} \cos^2 x = 0$ .

$$1 - \frac{1}{2} \cos^2 x < 0$$

$$\frac{1}{2} \cos^2 x > 1$$

$$\cos^2 x > 2$$

$$|\cos x| > \sqrt{2}$$

Il n'existe pas de  $x$  tel que  $|\cos x| > \sqrt{2}$ . Donc  $(H \circ f)(x) = 2 - \frac{1}{2} \cos^2 x$ .

Donc la proposition est vraie.

## Exercice 11

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$$

La fonction  $f(x)$  est croissante et n'est pas continue en 0.

Donc la proposition est fausse.

## Exercice 12

La fonction se prolonge par continuité si  $\exists l \in \mathbb{R}, \lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0} g(x) = l$ .

$$\lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0} (e^{\sin x} - 1) = 0$$

$$\lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \in [-1; 1]$$

$$\lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0} \ln(3 + \cos \frac{1}{x}) \in [\ln 2; \ln 4]$$

Donc

$$\lim_{x \neq 0, x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

Le prolongement par continuité de la fonction  $g(x)$  est:

$$p(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Donc la proposition est vraie.

## Exercice 13

$f$  est une fonction  $f$  continue alors

$$\forall x_0 \in [2, 3], \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } (\forall x \in [2, 3] \cap ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon) \quad [1]$$

$f$  a pour limite  $\infty$  en  $x_0 = \frac{5}{2}$  alors

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \text{ tel que } (]x_0 - \eta, x_0 + \eta[ \setminus \{x_0\} \subset [2, 3] \text{ et } \forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[ \setminus \{x_0\}, f(x) > A)$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \text{ tel que } (\forall x \in [2, 3] \cap ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[ \setminus \{x_0\}, f(x) > A) \quad [2]$$

Deux cas possibles,

- la fonction  $f$  est définie en  $x_0$ , alors  $f(x_0) = \infty$  et la proposition [1] est fausse.
- la fonction  $f$  n'est pas définie en  $x_0$ , alors il faut trouver un prolongement par continuité de la fonction  $f$  en  $x_0$ . Il n'existe pas de valeur  $l \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{x \neq x_0, x \rightarrow x_0} f(x) = l$  car  $\lim_{x \neq x_0, x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .  
Donc, la fonction  $f$  n'est pas prolongeable en  $x_0$ .

Donc la proposition est fausse.

## Exercice 14

A faire Preuve par l'absurde. Il faut admettre qu'une telle fonction existe pour montrer une contradiction. Donc elle n'existe pas.

Donc la proposition est fausse.

## Exercice 15

Admettons que la fonction n'est pas constante alors  $\exists x_0, \exists \eta > 0$  t.q.  $f(x_0 - \eta) = Z_1$  et  $f(x_0 + \eta) = Z_2$  et  $Z_1 \neq Z_2$ .

$$\forall x \in ]x_0 - \eta; x_0 + \eta[, \epsilon = 0.1, |f(x) - f(x_0)| \not< \epsilon \text{ ce qui contredit l'hypothèse de la fonction continue.}$$

Donc la proposition est vraie.

## Exercice 16

On construit les trois suites  $a_n$  et  $b_n$  de la manière suivante:

- $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$
- Si  $f(c_n) \geq 0$ ,  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = c_n$
- Si  $f(c_n) < 0$ ,  $a_{n+1} = c_n$  et  $b_{n+1} = b_n$

Avec  $a_0 = 1$  et  $b_0 = 2$ .

Comme  $a_n$  et  $b_n$  sont positif et  $a_0 < b_0$ , on a toujours la relation  $a_n < \frac{a_n}{b_n} < b_n$ , Donc,  $a_n < c_n < b_n$ .  
La suite  $a_n$  croît car

- lorsque  $c_n \geq \sqrt{2}$ , on a  $a_{n+1} = a_n$ . Donc  $a_{n+1} \geq a_n$
- lorsque  $x < \sqrt{2}$ , on a  $a_{n+1} = c_n$  et  $a_n < c_n$  par définition. Donc  $a_{n+1} \geq a_n$

La suite  $b_n$  décroît car

- lorsque  $c_n \geq \sqrt{2}$ , on a  $b_{n+1} = c_n$  et  $c_n < b_n$  par définition. Donc  $b_{n+1} \leq b_n$
- lorsque  $x < \sqrt{2}$ , on a  $b_{n+1} = b_n$ . Donc  $a_{n+1} \leq a_n$

Donc la proposition est vraie.

QED