Exercice 1

Exercice 1.1

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 8x - 4y - 4$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 20y - 4x - 16$$

Exercice 1.2

Point critique est le point où les 2 dérivées s'annulent.

$$\begin{cases} 8x - 4y - 4 = 0 \\ 20y - 4x - 16 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 10y - 2x - 8 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 9y - 9 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 1 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

Le point critique est $A = (1,1)$.

Exercice 1.3.a

$f(x,0) = 4x^2 - 4x + 11$ on a $f(x,0) < 4x^2 + 11$ donc $f(x,0) > C$ pour tout $x > M$ avec $M = \sqrt{|C - 11|/4}$

Exercice 1.3.b

Le point A est un maximum global si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) < f(A) = f(1,1)$. Il suffit de trouver un contre exemple, ie un point (x,y) tel que $f(x,y) > f(1,1)$. On a $f(1,1) = 1$, il suffit de prendre le point $(0,0)$ car $f(0,0) = 11$.

Exercice 1.4.a

$$g(x,y) = f(x,y) - 4x^2 + 4xy + 4x - y^2 - 2y - 1 = 9y^2 - 18y + 10$$

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(9y^2 - 18y + 10) = 0$$

Exercice 1.4.b

$$g(x,y) = (ay + b)^2 + 1 = a^2y^2 + 2aby + b^2 + 1 = 9y^2 - 18y + 10$$

Donc $a^2 = 9$, $2ab = -18$ et $b^2 = 9$. Ce qui fait $a = 3, b = -3$ ou $a = -3, b = 3$.

Exercice 1.4.b

Le point A est un minimum global si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \geq f(A) = f(1,1)$. On a $g(x,y) = f(x,y) - (2x - y - 1)^2 = (ay + b)^2 + 1$. Donc $f(x,y) = (ay + b)^2 + 1 + (2x - y - 1)^2$ et $f(x,y) = 1$. On a $(ay + b)^2 \geq 0$ et $(2x - y - 1)^2 \geq 0$ donc $(ay + b)^2 + (2x - y - 1)^2 + 1 \geq 1$. Donc le point A est un minimum global.

QED