Exercice 1

Exercice 1.1

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \frac{2r\cos(\theta)}{\partial r} = 2\cos(\theta)$$
$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = \frac{2r\cos(\theta)}{\partial \theta} = -2r\sin(\theta)$$
$$\frac{\partial Y}{\partial r} = \frac{3r\sin(\theta)}{\partial r} = 3\sin(\theta)$$
$$\frac{\partial Y}{\partial \theta} = \frac{3r\sin(\theta)}{\partial \theta} = 3r\cos(\theta)$$

Exercice 1.2

Dérivable ??

La matrice Jacobienne de $F(r,\theta)$ est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & -2r\sin(\theta) \\ 3\sin(\theta) & 3r\cos(theta) \end{vmatrix}$$

Le déterminant Jacobien est $(2\cos(\theta))(3r\cos(\theta)) - (-2r\sin(\theta))(3\sin(\theta)) = 6r\cos^2(\theta) + 6r\sin^2(\theta) = 6r$

Exercice 1.3

D'après le théorème d'inversion locale, notons $x_0 = (1,0)$ si $DF(1,0)$ est inversible et F est de classe C^1 alors $\exists r > 0,$ tel que $B = B(x_0, r)$ et la restriction de F à B est un difféomorphisme sur $B \to F(B)$. On sait que F est de classe C^1, que $DF(1,0)$ est inversible car son déterminant Jacobien est $6 * 1 = 6$ (différent de 0). $F(1,0) = (2*1*\cos(0), 3*1*\sin(0)) = (2,0)$. Donc F est un difféomorhisme sur $(1,0) \to (2,0)$.

Exercice 1.4

Montrons que l'application $F(r,\theta)$ est bijective. SOit (x, Y) tel que $F(r,\theta) = (x,y)$ on a alors

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = (r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)) = r^2$$

donc on peut définir r uniquement á partir de (x,y).

$$\frac{2y}{3x} = \frac{6r\sin(\theta)}{6r\cos(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

donc on peut définir θ uniquement à partir de (x,y).

L'application réciproque est

$$F^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2}, \arctan\left(\frac{2y}{3x}\right)\right)$$
$$DF^{-1}(2,0) = \left(\frac{\partial F^{-1}}{\partial x}(2,0), \frac{\partial F^{-1}}{\partial y}(2,0)\right) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial F^{-1}}{\partial x}(2,0) = \frac{x}{4\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}}(2,0) =$$
$$\frac{\partial F^{-1}}{\partial y}(2,0) = \frac{6x}{4y^2 + 9x^2}(2,0) = \frac{1}{3}$$

donc

$$DF^{-1}(2,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

Exercice 1.5

On a $X(1,0)+Y(1,0)=2.1.\cos(0)+3.1.\sin(0)=2$. Donc l'équation $X(r,\theta)+Y(r,\theta)=2$ admet au moins la solution $(1,0)$.

la suite???

Exercice 2

Exercice 2.1

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=1$

Rien compris.

Exercice 3

Exercice 3.1

Aucune idée

Exercice 3.2

$$\nabla f_1(x,y,z)=\left(\frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial e^{x+y+z}}{\partial x},\frac{\partial e^{x+y+z}}{\partial y},\frac{\partial e^{x+y+z}}{\partial z}\right)=(e^{x+y+z},e^{x+y+z},e^{x+y+z})$$

$$\nabla f_2(x,y,z)=\left(\frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial z}\right)=(3x^2,-3y^2,1+3z^2)$$

Exercice 3.3

$$\det\begin{vmatrix} e^{x+y+z} & e^{x+y+z} \\ -3y^2 & 1+3z^2 \end{vmatrix}=e^{x+y+z}(1+3z^2+3y^2)$$

C'est nul si $e^{x+y+z}=0$ pas possible, ou $1+3z^2+3y^2=0$ impossible aussi. Donc le déterminant est non toujours nul.

Exercice 3.4

On peut prendre $F(x,y,z)=(f_1(x,y,z)-a_0)+(f_2(x,y,z)-b_0)$. car, $(x,y,z)\in\Gamma \implies f_1(x,y,z)-a_0=0\wedge f_2(x,y,z)-b_0=0$.

Exercice 3.5

???

Exercice 4

Exercice 4.1

On a $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\geq 1$, donc $\frac{\partial f(x)}{\partial x}\geq x+c_1$ et $f(x)\geq\frac{x^2}{2}+c_1x+c_0$. Ce qui fait

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{(x+y)^2}{8}+\frac{c_1(x+y)}{2}+c_0$$

et

$$\frac{1}{2}(f(x)+f(y))-\eta\|x-y\|^2=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+c_1x+c_0+\frac{y^2}{2}+c_1y+c_0\right)-\eta(x-y)^2$$

Vérifions USC

$$\frac{(x+y)^2}{8}+\frac{c_1(x+y)}{2}+c_0 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+c_1x+c_0+\frac{y^2}{2}+c_1y+c_0\right)-\eta(x-y)^2$$

$$\frac{(x+y)^2}{8} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)-\eta(x-y)^2$$

$$x^2+2xy+y^2 \leq 2x^2+2y^2-8\eta(x^2-2xy+y^2)$$

$$0 \leq x^2(1-8\eta)+y^2(1-8\eta)-2xy(1-8\eta)$$

$$0 \leq (1-8\eta)(x-y)^2$$

Pour être positif il faut que $0 \leq \eta \leq 1/8$.

Exercice 4.2

On a $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$ donc

$1/2(f(x)+f(y))-f((x+y)/2) = 1/2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+1/2(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)-(\frac{x_1+y_1)^2}{4}+\frac{x_2+y_2)^2}{4}+\ldots+\frac{x_n+y_n)^2}{4})$

$= 1/2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+1/2(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)-(x_1^2/4+2x_1y_1/4+y_1^2/4+x_2^2/4+2x_2y_2/4+y_2^2/4+\ldots+x_n^2/4+2x_1y_n/4+y_n^2/4)$

$$= 1/4(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)-x_1y_1/2-x_2y_2/2-\ldots-x_ny_n/2$$

$$= 1/4(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2-2x_1y_1-2x_2y_2-\ldots-2x_ny_n) = 1/4\|x-y\|^2$$

On a $f((x+y)/2) = 1/2(f(x)+f(y)) - 1/4\|x-y\|^2$, donc $f(x) = \|x\|^2$ est USC avec $\eta = 1/4$.

Exercice 4.3

Rappel de cours: une fonction f est convexe lorsque $f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y), \forall x,y \in E, 0 < t < 1$. ou f est convexe si tous arcs de son graphe est en dessous de sa corde.

Comme on a la fonction F qui est USC, alors $f((x+y)/2) \leq 1/2(f(x)+f(y))$, sur la figure cela donne que la corde $f(x), f(y)$ est toujours au dessus de $f((x+y)/2)$. Donc f est convexe.

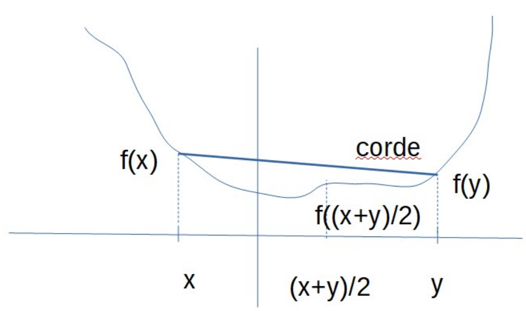

Figure 1: l'arc est toujours en dessous de la corde

Recopie internet. On a f qui est convexe, donc

$$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)$$

$$f(x-tx+ty) \leq f(x)-tf(x)+tf(y)$$

comme $t \neq 0$

$$\frac{f(x-tx-ty)-f(x)}{t} \leq f(y)-f(x)$$

Quand $t \to 0$, on a

$$\langle \nabla f(x), y-x \rangle \leq f(y)-f(x)$$

En prenant $x = 0$ on a $\langle \nabla f(0), y \rangle \leq f(y) - f(0)$ ou $f(y) \geq f(0) - \langle \nabla f(0), y \rangle$.

Exercice 4.4

Rien compris.

QED