Exo 3.2.1

Q1

Identification du système : Le système étudié est un projectile ponctuel M de masse m lancé avec une vitesse initiale v_0 avec un angle de α_0, sans frottement.

Bilan des forces : Comme il n'y a pas de frottement, le projectile est uniquement soumis à la pesanteur. Donc $m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g}$.

Composantes dans un repère cartésien : La force de la pesanteur est verticale :

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases}$$

À $t = 0$, la vitesse est v_0 dans le repère $(v_0 * cos\,\alpha_0, 0, v_0 * sin\,\alpha_0)$:

$$\begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = C_2 \\ v_z(t) = C_3 - g * t \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 * cos\,\alpha_0 \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = v_0 * sin\,\alpha_0 - g * t \end{cases}$$

À $t = 0$, le projectile se trouve à l'origine du repère $(0, 0, 0)$. L'équation horaire est

$$\begin{cases} x(t) = v_0 * cos\,\alpha_0 \; * t + C_z \\ y(t) = 0 * t + C_y \\ z(t) = v_0 * sin\,\alpha_0 \; * t - \frac{1}{2} g * t^2 + C_x \end{cases}$$

À $t = 0$, le projectile se trouve aux coordonnées $(0, 0, 0)$. Donc, $C_x = C_y = C_z = 0$.

$$\begin{cases} x(t) = v_0 * cos\,\alpha_0 \; * t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = v_0 * sin\,\alpha_0 \; * t - \frac{g*t^2}{2} \end{cases}$$

Équation de la trajectoire: $z = \frac{(v_0 * sin\,\alpha_0)}{(v_0 * cos\,\alpha_0)} * x - \frac{g*x^2}{2v_0^2 cos^2\alpha_0} = tan\,\alpha_0 * x - \frac{g*x^2}{2v_0^2 cos^2\alpha_0}$.

Fin de la trajectoire quand $z = 0$.

$$tan\,\alpha_0 * x - \frac{g * x^2}{2v_0^2 cos^2\alpha_0} = 0$$

$$\frac{sin\,\alpha_0}{cos\,\alpha_0} - \frac{g * x}{2v_0^2 cos^2\alpha_0} = 0$$

$$sin\,\alpha_0 = \frac{g * x}{2 * v_0^2 * cos\,\alpha_0}$$

$$g * x = 2 * sin\,\alpha_0 * v_0^2 * cos\,\alpha_0$$

$$x = \frac{2 * sin\,\alpha_0 * v_0^2 * cos\,\alpha_0}{g}$$

$$x = \frac{sin\,2\alpha_0 * v_0^2}{g}$$

La distance maximale est lorsque $sin\,2\alpha_0 = 1$ soit $\alpha_0 = 45^o$.

Q2

(a.i) $f'(u) = e^u$ et $g'(u) = -a * e^{-a*u}$.
(a.ii) L'expression générale de l'équation différentielle est $f(x) = C * e^{-a*x}$. En effet, $(C * e^{-a*x})' + a * C * e^{-a*x} = 0$, $-a * C * e^{-a*x} + a * C * e^{-a*x} = 0$.
(a.iii) L'expression générale de l'équation différentielle est $f(x) = C * e^{-a*x} + \frac{b}{a}$. En effet, $(C * e^{-a*x} + \frac{b}{a})' + a * (C * e^{-a*x} + \frac{b}{a}) = b$, $-a * C * e^{-a*x} + a * (C * e^{-a*x} + \frac{b}{a}) = b$.

Identification du système : Le système étudié est un projectile ponctuel M de masse m lancé avec une vitesse initiale v_0 avec un angle de α_0, avec frottement de l'air.

Bilan des forces : Comme il n'y a pas de frottement, le projectile est soumis à la pesanteur et au frottement . Donc $m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} - k\overrightarrow{v}$.

Composantes dans un repère cartésien : La force de la pesanteur est verticale $(0, 0, -g)$ et le frottement est proportionnelle á la vitesse $(v_x, 0, v_z)$:

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{-k}{m} * v_x \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = 0 \\ a_z(t) = \frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{k}{m} * v_z \end{cases}$$

L'expression générale de l'équation différentielle $\frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m} * v_x = 0$ est $v_x(t) = C_1 * e^{-\frac{k}{m}*t}$.

L'expression générale de l'équation différentielle $\frac{dv_z}{dt} + \frac{k}{m} * v_z = -g$ est $v_x(t) = C_3 * e^{-\frac{k}{m}*t} - \frac{g*m}{k}$.

À $t = 0$, la vitesse est v_0 dans le repère $(v_0 * cos\,\alpha_0, 0, v_0 * sin\,\alpha_0)$:

$$\begin{cases} v_x(0) = C_1 * e^{-\frac{k}{m}*0} = v_0 * cos\,\alpha_0 \\ v_y(0) = 0 * t + C_2 = 0 \\ v_z(0) = C_3 * e^{-\frac{k}{m}*0} - \frac{g*m}{k} = v_0 * sin\,\alpha_0 \end{cases}$$

Donc, $C_1 = v_0 * cos\,\alpha_0$, $C_2 = 0$ et $C_3 = v_0 * sin\,\alpha_0 + \frac{g*m}{k}$

$$\begin{cases} v_x(t) = (v_0 * cos\,\alpha_0) * e^{-\frac{k}{m}*t} \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = (v_0 * sin\,\alpha_0 + \frac{g*m}{k}) * e^{-\frac{k}{m}*t} - \frac{g*m}{k} \end{cases}$$

Lorsque $t \to \infty$, la vitesse devient constante sur l'axe z: $(0, 0, -\frac{g*m}{k})$.
Les 'equations horaire de $x(t), y(t)$ et $z(t)$ sont:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{-m}{k}(v_0 * cos\,\alpha_0) * e^{-\frac{k}{m}*t} + C_x \\ y(t) = 0 * t + C_y \\ z(t) = -\frac{m}{k}(v_0 * sin\,\alpha_0 + g) * e^{-\frac{k}{m}*t} - \frac{g*m}{k} * t + C_z \end{cases}$$

À l'instant $t = 0$, le projectile se trouve à l'origine du repère: $(0, 0, 0)$.
Donc, $C_x = \frac{m}{k}(v_0 * cos\,\alpha_0)$, $C_y = 0$, $C_z = \frac{m}{k}(v_0 * sin\,\alpha_0 + g)$.