

Exo 1

Rappel de cours:

- Une fonction dérivable est continue, par contre le réciproque n'est pas vraie
- Une fonction est dérivable sur un intervalle si elle est dérivable en tout point de cet intervalle
- Une fonction est dérivable en un point a si $\exists l, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$ ou $\exists l, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$
- une fonction est dérivable sur un intervalle donné si elle est un assemblage de fonctions connues et dérivables sur cet intervalle.

La fonction $f(x) = |x - \pi| \sin(x)$ est égale à

$$f(x) = \begin{cases} (x - \pi) \sin(x) & x \geq \pi \\ (\pi - x) \sin(x); x & x < \pi \end{cases}$$

Les deux parties sont un assemblage de fonctions dérivables sur leur intervalle. Il reste à démontrer si la fonction est dérivable en π .

$$\begin{aligned} & \exists l, \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = l \\ & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{(x - \pi) \sin(x) - (\pi - \pi) \sin(\pi)}{x - \pi} \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(\pi - x) \sin(x) - (\pi - \pi) \sin(\pi)}{x - \pi} \end{cases} \\ & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{(x - \pi) \sin(x)}{x - \pi} \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(\pi - x) \sin(x)}{x - \pi} \end{cases} \\ & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} -\sin(x) \end{cases} \end{aligned}$$

On a $\sin(-x) = -\sin(x)$. Donc

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin(-x) \end{cases}$$

on a $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin(-x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin(x)$. La valeur l existe donc la fonction f est dérivable.

La proposition est Vraie.