Université Paris Saclay **Math 103**
L1 – 2ème semestre 2019-20 **Algèbre linéaire**

Contrôle des connaissances 1

Systèmes linéaires, familles génératrices, familles libres, bases

---

A partir du 24 février 2020, au début d'un TD, votre enseignant vous soumettra quatre exercices, choisis dans la liste ci-dessous. Vous aurez une heure pour y répondre. Le barème est de cinq points par exercice.

Exercice 1.1.— Mettre le système suivant sous la forme échelonnée réduite. Dire quel est son rang, quelles sont les inconnues principales et les paramètres.

$$\begin{cases} x+y-z-t &= 0 \\ x-y+z-t &= 0 \\ \quad y-z &= 0 \\ x-t &= 0 \end{cases}.$$

Exercice 1.2.— A quelle condition sur (a_1, a_2, a_3) le système linéaire suivant

$$(S_0) \quad \begin{cases} x-3y &= a_1 \\ \quad 3y-6z &= a_2 \\ x \quad -6z &= a_3 \end{cases}$$

est-il compatible ?
Donner une représentation paramétrique des solutions du système (S_0) lorsque $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 2)$ puis lorsque $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$.

Exercice 1.3.— La famille $\big((1, 2, 3, 0), (3, 1, 2, 0), (2, 3, 1, 0), (3, 2, 1, 0)\big)$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^4$?
La famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $\big((1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1)\big)$ est-elle libre ?

Exercice 1.4.— Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2, on considère $P(x) = x^2 + x$, $Q(x) = x + 1$ et $R(x) = x - 1$. La famille (P, Q, R) engendre-t-elle $\mathcal{P}_2$? Est-elle libre ?

Exercice 1.5.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. La famille $(x \mapsto \sin(x), x \mapsto f(x))$ est-elle libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 1.6.— Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs suivants : $u_1 = (1,0,0,0), u_2 = (1,2,0,0)$, $u_3 = (1,2,3,0)$, $u_4 = (1,2,3,4)$ et on pose $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2), F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ? Démontrer que $E \subset F \subset \mathbb{R}^4$ et que les inclusions sont strictes.

Exercice 1.7.— Soit $u_1 = (1,0,2,0), u_2 = (2,0,3,0)$. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. La famille (u_1, u_2, e_2, e_4) est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 1.8.— On considère le système linéaire homogène

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & 2z & - & t & = & 0, \\ 3x & + & 4y & + & 5z & + & t & = & 0. \end{array} \right.$$

Donner une base B de l'espace des solutions de (S). Démontrer que le vecteur $u_3 = (2,-3,1,-1)$ n'est pas solution de (S). La famille constituée des vecteurs de B et de u_3 peut-elle être liée ? Pourquoi ?

Exercice 1.9.— Soit (v_1, v_2, v_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et posons $u_1 = v_1, u_2 = v_1 + v_2, u_3 = v_1 + v_2 + v_3$. Démontrer que (u_1, u_2, u_3) est aussi une base de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $v = 2v_1 - v_2 + 3v_3$ dans la base (u_1, u_2, u_3) ?

Exercice 1.10.— Soit $u_1 = (1,-1,1,-1)$ et $u_2 = (0,1,-1,1)$. Les deux vecteurs sont-ils colinéaires ? Compléter la famille (u_1, u_2) en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 1.11.— Prouver que la famille $\big(P_1(x) = (x-2)(x-3), P_2(x) = (x-1)(x-3)$, $P_3(x) = (x-1)(x-2)\big)$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2. Donner les coordonnées de $Q(x) \in \mathcal{P}_2$ dans cette base en fonction de $Q(1), Q(2), Q(3)$.