Université Paris-Sud
Faculté des Sciences d'Orsay

Le TP 10 consiste en la deuxième interrogation WIMS et le début de la préparation de la figure Geogebra pour le deuxième devoir.

La première partie *Constructions et observations* est commencée lors du TP du 26/27 novembre. Votre copie incluant vos observations lors de la première partie et des réponses rigoureuses à la seconde partie *Démonstrations* et à la troisième partie *Frise* devra être rendue en TD le **10/11 décembre 2019.** Votre figure Geogebra (fichier `.ggb`) devra être déposée avant cette date sur *ecampus* (Cours Math102, rubrique Devoirs, *Devoir 2* ; en cas de problème, envoyer un mail `joel.riou@math.u-psud.fr`). Attendez de préférence d'avoir bien compris l'ensemble du devoir avant de soumettre votre figure Geogebra.

Devoir 2

Le devoir est constitué de *trois* parties. Les deux premières concernent l'étude de polygones et la troisième consiste en l'étude d'une frise.

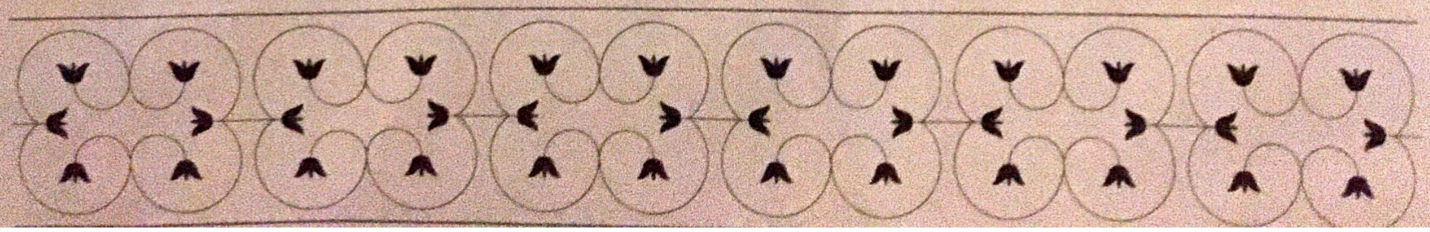
1. **Constructions et observations.** Au cours du TP 10 vous devez commencer à travailler sur cette partie qui consiste principalement à faire des constructions et *à faire des observations qui devront être décrites précisément sur votre copie.*

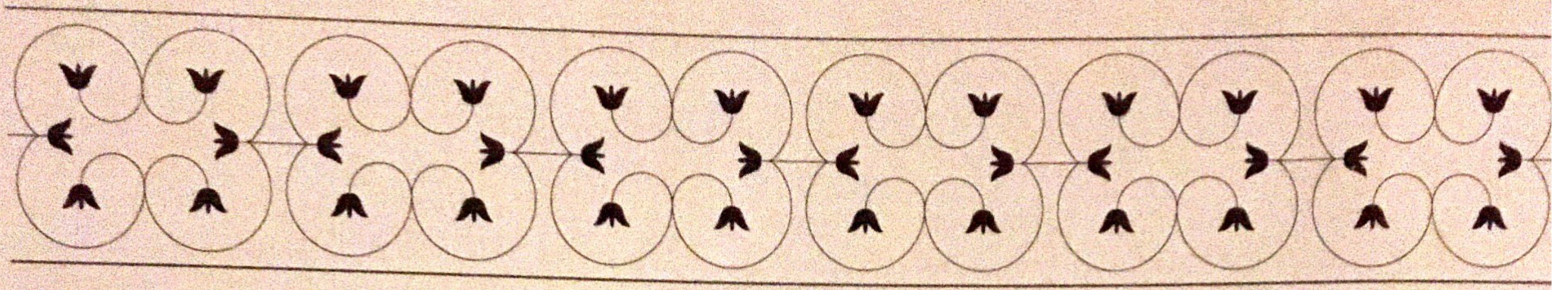
- Construire un triangle équilatéral direct ABC.
- On note O l'isobarycentre des points A, B et C.
- Construire les droites (OA), (OB) et (OC). On notera σ_1 la réflexion d'axe (OA), σ_2 celle d'axe (OB) et σ_3 la réflexion d'axe (OC).
- Placer un point arbitraire D. Construire $D' := \sigma_1(D)$, $E := \sigma_3(D')$, $E' := \sigma_2(E)$, $F := \sigma_1(E')$ et $F' := \sigma_3(F)$.

(1) Construire les triangles DEF et $D'E'F'$. Quelles propriétés semblent avoir ces deux triangles (indépendamment de la position du point D) ?
(2) Construire l'hexagone $\mathcal{H} := DD'EE'FF'$. Afficher les angles de l'hexagone $\mathcal{H}$. L'hexagone $\mathcal{H}$ est-il régulier en général ? Si ce n'est pas le cas, où semble-t-il que D doive se trouver pour que $\mathcal{H}$ soit un hexagone régulier direct ?

2. **Démonstrations.** On note $s := \sigma_1$ et r la ~~réflexion~~ rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
(3) Exprimer $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_1 \circ \sigma_3$ en fonction de r.
(4) En déduire une égalité $\sigma_2 = s \circ r^i$ pour un entier $i \in \{0, 1, 2\}$ bien choisi. Faire de même pour σ_3.
(5) Déterminer $(s \circ r) \circ (s \circ r)$. En déduire $r \circ s = s \circ r^{-1}$.
(6) Montrer les identités $r(D) = E$, $r(D') = E'$, $r(E) = F$ et $r(E') = F'$.
(7) En déduire que les triangles DEF et $D'E'F'$ sont équilatéraux (directs).
(8) Déterminer l'angle orienté $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD})$. En déduire que l'on a $(\overrightarrow{D'E}, \overrightarrow{D'D}) = \frac{2\pi}{3}$ ou $(\overrightarrow{D'E}, \overrightarrow{D'D}) = -\frac{\pi}{3}$.
(9) Dans cette question, on suppose que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{6}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est un hexagone régulier direct.

3. **Frise.** La frise $\mathscr{F}$ ci-dessous est inspirée des motifs ornant le Taj Mahal (تاج محل) à Agra en Inde. Après avoir fait les constructions suggérées dans les questions suivantes, découpez-la et collez-la dans votre devoir.





(10) Représenter un vecteur minimal $\vec{u}$ de cette frise.
(11) La médiane $\mathscr{D}$ de la bande est-elle un axe de symétrie de $\mathscr{F}$?
(12) Tracer les axes de symétries de $\mathscr{F}$ qui sont perpendiculaires à $\mathscr{D}$. Si Δ est un tel axe de symétrie, quel est le plus petit réel $\lambda > 0$ tel que $t_{\lambda\vec{u}}(\Delta)$ soit aussi un axe de symétrie de $\mathscr{F}$?
(13) Soit Δ un axe de symétrie perpendiculaire à $\mathscr{D}$. Le point d'intersection O de $\mathscr{D}$ et Δ est-il un centre de symétrie de $\mathscr{F}$? Placer tous les centres de symétrie de $\mathscr{F}$.
(14) On note comme ci-dessus Δ un axe de symétrie perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et O le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$. Énumérer tous les isométries du plan conservant la frise $\mathscr{F}$.