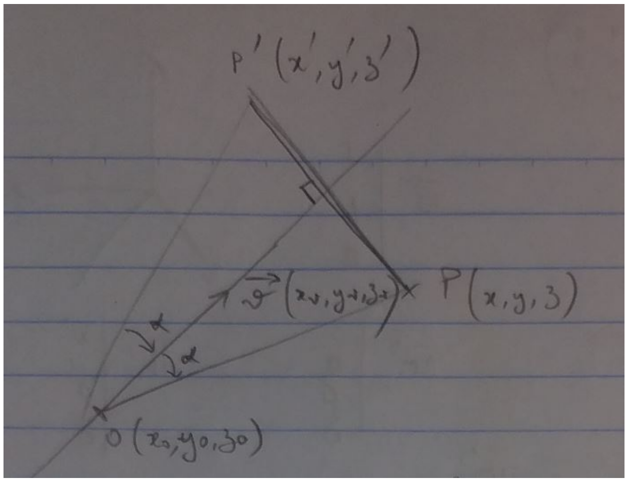
Exercice 1

1.1



Donc

$$\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{OP}) = \cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{OP'})$$
$$\sin(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{OP}) = -\sin(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{OP'})$$

Ou

$$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP'}.\overrightarrow{v}$$
$$\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{OP'} \wedge \overrightarrow{v}$$

En equation:

$$\begin{cases} x_v.(x-x_0) + y_v.(y-y_0) + z_v.(z-z_0) & = x_v.(x'-x_0) + y_v.(y'-y_0) + z_v.(z'-z_0) \\ y_v.(z-z_0) - z_v.(y-y_0) & = -(y_v.(z'-z_0) - z_v.(y'-y_0)) \\ z_v.(x-x_0) - x_v.(z-z_0) & = -(z_v.(x'-x_0) - x_v.(z'-z_0)) \\ x_v.(y-y_0) - y_v.(x-x_0) & = -(y_v.(y'-y_0) - y_v.(x'-x_0)) \end{cases}$$

La droite passe par le point $O = (0,0,0)$ et de vecteur directeur $D = Vect(1,1,0)^T$.

$$\begin{cases} x+y & = x'+y' \\ z & = -z' \\ -z & = z' \\ y-x & = x'-y' \end{cases}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

1.2

Matrice Q orthogonale au plan P d'équation $x - y + z = 0$. Soit $n = i - j + k$ un vecteur normal à P. La symétrie orthogonale par rapport a P est

$$s(x) = x - 2\frac{(x|n)}{||n||^2}n$$

On prends $x = (x_1, x_2, x_3)$, $||n||^2 = 3$, $n = (1, -1, 1)$ et $(x|n) = x_1 - x_2 + x_3$. Donc

$$s(x) = (x_1, x_2, x_3) - \frac{2}{3}(x_1 - x_2 + x_3)(1, -1, 1)$$

$$= \frac{1}{3}(3x_1, 3x_2, 3x_3) - \frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + 2x_3, -2x_1 + 2x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$
$$= \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 - 2x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, -2x_1 + 2x_2 + x_3)$$

Donc

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3

P est une synmétrie orthogonale ssi $P^2 = Id$ et $P = P^T$.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P$$

donc P et une symétrie orthogonale.

Q est une synmétrie orthogonale ssi $Q^2 = Id$ et $Q = Q^T$.

$$Q^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1+4+4 & 2+2-4 & -2+4-2 \\ 2+2-4 & 4+1+4 & -4+2+2 \\ -2+4-2 & -4+2+2 & 4+4+1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = Id$$

et

$$Q^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = Q$$

donc Q et une symétrie orthogonale.

QED