Exo 3.1.3

Q1

cours: La position d'équilibre de la masse est lorsque la force de rappel élastique $F_r = -k(l_e - l_0)$ est égale à la force gravitationnelle $F_g = m.g$. Donc,

$$F_e = F_g$$
$$m.g = -k(l_e - l_0)$$
$$l_e = \frac{k.l_o - m.g}{k}$$
$$l_e = l_o - \frac{m.g}{k}$$

Q2

(a) La dérivée première de $f(x) = sin(ax)$ est $f'(x) = a.cos(ax)$. La dérivée seconde de $f(x)$ est $f''(x) = -a^2.sin(ax)$.

(b) Une solution de l'équation $f''(x) = -a^2 f(x)$ est $f(x) = C.sin(ax)$. En effet, $f''(x) = -C.a^2.sin(ax) = -a^2.C.sin(ax) = -a^2 f(x)$.

Une autre solution de l'équation $f''(x) = -a^2 f(x)$ est $f(x) = C.cos(ax)$. En effet, $f''(x) = -C.a^2.cos(ax) = -a^2.C.cos(ax) = -a^2 f(x)$.

La solution générale de de l'équation $f''(x) = -a^2 f(x)$ est $f(x) = C_1.cos(ax) + C_2.sin(ax)$ En effet, $f''(x) = -C_1.a^2.cos(ax) - C_2.a^2.sin(ax) = -a^2(C_1.cos(ax) + C_2.sin(ax)) = -a^2 f(x)$.

Q3

Identification du système : Le système étudié est la masse m qui est accrochée au ressort.

Bilan des forces : La masse est soumise à une seule force:

- la force de rappel du ressort qui est proportionnelle à l'allongement du ressort $F_r = -k.(y(t) + y_0)\overrightarrow{i}$.

Composantes dans un repère cartésien : Le mouvement est rectiligne. Il a lieu le long de l'axe O_y. Il est avantageux de prendre la position de la bille à l'équilibre pour lé'origine O des coordonnées sur l'axe O_y. Donc, nous avons $y(t) = l(t) - (l_e)$.

PFD : La résulante des forces est égale à $m.\overrightarrow{a} = m.\frac{d^2y(t)}{dt}\overrightarrow{i}$ La seule force appliquée est la force de rappel du ressort à partir de la position d'équilibre. En effet, quand le mobile est à l'équilibre la force de la pésanteur est équivalente à la force de rappel du ressort.

$$-k.y(t).\overrightarrow{i}$$

Solution (a)

$$m.\frac{d^2y(t)}{dt} = -k.y(t)$$
$$\frac{d^2y(t)}{dt} = \frac{-k}{m}.y(t)$$

(b)La solution de cette équation différentielle est $y(t) = C_1.cos(at) + C_2.sin(at)$ avec $a = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La période des fonctions $sin(t)$ et $cos(t)$ est 2π. Donc, la période de $sin(at)$ et $cos(at)$ est $T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$.

(c) Les conditions initiales sont à $t = 0, y(0) = y_0, v(0) = 0$. Donc,

$$y(0) = C_1.cos(a.0) + C_2.sin(a.0) = y_0$$
$$y(0) = C_1 = y_0$$

et

$$v(0) = y'(0) = -C_1.sin(a.0) + C_2.cos(a.0) = 0$$

$$v(0) = C_2 = 0$$

Donc la solution de l'équation est :

$$y(t) = y_0.sin(\sqrt{\frac{k}{m}}.t)$$