Rappel de cours

Exercice 2.1

Exercice 2.1.1

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)dx$$

Prenons $f = x$ et $g' = \sin(x)$ donc $f' = 1$ et $g = -\cos(x)$

$$\int fg' = fg - \int f'g = -x\cos(x) - \int -\cos(x) = \sin(x) - x\cos(x)$$

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)dx = [\sin(x) - x\cos(x)]_0^{\pi} = \pi$$

Exercice 2.1.2

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$$

Prenons $u = e^x + 1$, on a $\frac{du}{dx} = e^x$ donc $dx = e^{-x}du$.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{u}}e^{-x}du = \int \frac{1}{\sqrt{u}}du = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{e^x+1}$$

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx = \left[2\sqrt{e^x+1}\right]_0^{\ln(2)} = 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

Exercice 2.1.3

$$\int_0^1 \frac{4}{x^4-4}dx$$

Substitution $u = x^4 - 4$ -¿ Dead end.
On a $x^4 - 4 = x^{2^2} - 2^2 = (x^2-2)(x^2+2)$

$$\frac{1}{(x^2-2)(x^2+2)} = \frac{1}{4}(\frac{1}{x^2-2} - \frac{1}{x^2+2})$$

$$\int_0^1 \frac{4}{x^4-4}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2-2} - \frac{1}{x^2+2}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2-2}dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+2}dx$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-2}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2-\sqrt{2}^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x+\sqrt{2}} - \frac{1}{x-\sqrt{2}}\right)dx$$

Maintenant, prenons $u = x + \sqrt{2}$, $\frac{du}{dx} = 1$ donc $du = dx$ et

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{2}}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln(u) = \ln(x+\sqrt{2})$$

de même avec $u = x - \sqrt{2}$

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{2}}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln(u) = \ln(x-\sqrt{2})$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-2}dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left[\ln(x+\sqrt{2})\right]_0^1 - \left[\ln(x-\sqrt{2})\right]_0^1\right)$$

et pour la seconde partie

$$\int \frac{1}{x^2+2}dx$$

On connait l'intégrale de $\frac{1}{x^2+1}$, c'est presque pareil. Il faut juste éliminer le 2 avec un changement de variable judicieux (ou astucieux). Prenons $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$, on a $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $dx = \sqrt{2}du$. Ce qui fait:

$$\int \frac{1}{x^2+2}dx = \int \frac{1}{(\sqrt{2}u)^2+2}\sqrt{2}du = \int \frac{\sqrt{2}}{2u^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{u^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(u) = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-2}dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Pour finir

$$\int_0^1 \frac{4}{x^4-4}dx = blabla - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Exercice 2.1.4

$$\int_{-1}^1 \ln(1+x^2)dx$$

Prenons $f = \ln(1+x^2)$ et $g' = 1$ donc $f' = \frac{2x}{x^2+1}$ et $g = x$

$$\int fg' = fg - \int f'g = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}dx$$

Prenons $u = x^2+1$, on a $\frac{du}{dx} = 2x$ donc $dx = \frac{1}{2x}du$

$$\int \frac{2x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{2x^2}{u}\frac{1}{2x}du = \int \frac{x}{u}du$$

Dead end.

On connait l'intégrale de $\frac{1}{x^2+1}$

$$\int \frac{2x^2}{x^2+1}dx = 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = 2\int \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}dx = 2\int 1 - \frac{1}{x^2+1}dx = 2\int 1dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}dx = 2(x - \arctan(x))$$

donc

$$\int_{-1}^1 \ln(1+x^2)dx = \left[x\ln(x^2+1) + 2(\arctan(x) - x)\right]_{-1}^1 = \ln(2) + 2\pi/4 - 2 - (-ln(2) + 2 - 2\pi/4) = 2\ln(2) + \pi - 4$$

Exercice 2.1.5

$$\int_0^1 x^2e^x dx$$

Prenons $f = x^2$ et $g' = e^x$ donc $f' = 2x$ et $g = e^x$

$$\int fg' = fg - \int f'g = x^2e^x - \int 2xe^x dx$$

Prenons $f = 2x$ et $g' = e^x$ donc $f' = 2$ et $g = e^x$

$$\int fg' = fg - \int f'g = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2e^x$$

Donc

$$\int_{-1}^1 \ln(1+x^2)dx = \left[x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right] = e - 5e^{-1}$$

Exercice 2.2

Exercice 2.2.1

$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{dt}{1+t+t^2}$, on a donc $f(x) = F(x^2) - F(0)$ avec $F(x)$ la fonction intégrale de $f(x)$. donc

$$f'(x) = (F(x^2) - F(0))' = (F(x^2))' - (F(0))' = (x^2)' f(x^2) - 0 f(0) = \frac{2x}{1+x^2+x^4}$$

Exercice 2.2.2

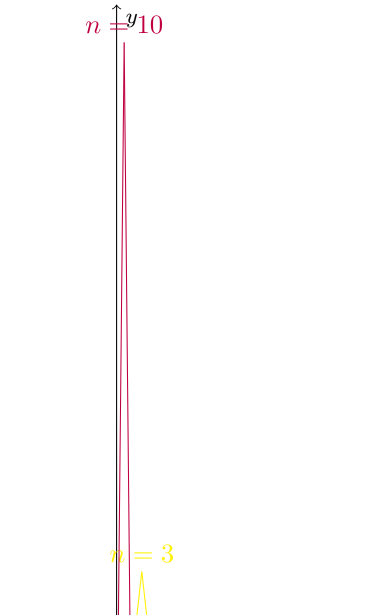
$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{1+t+t^2}$, on a donc $f(x) = F(x^2) - F(0)$ avec $F(x)$ la fonction intégrale de $f(x)$. donc

$$f'(x) = (F(x^2) - F(x))' = (F(x^2))' - (F(x))' = (x^2)' f(x^2) - f(0) = \frac{2x}{1+x^2+x^4} - 1$$

Exercice 2.7

Exercice 2.7.1

Exercice 1.4.1.1



Convergence simple. Pour un x donne, prenons ϵ >0 et $n_0 > 2/x$. Dans ce cas, $\forall n \geq n_0, f_n(x) = 0$ donc la serie de fonction converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$.

pour $n = 1$,

$$\int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

pour $n = 2$,

$$\int_0^1 f_n(x) = \int_0^{1/2} 4x + \int_{1/2}^1 4 - 4x = \left[2x^2\right]_0^{1/2} + \left[4x - 2x^2\right]_{1/2}^1 = \frac{2}{4} + 4 - 2 - 2 + \frac{2}{4} = 1$$

pour $n > 3$,

$$\int_0^1 f_n(x) = \int_0^{1/n} n^2x + \int_{1/n}^{2/n} 2n - n^2x + \int_{2/n}^1 0 = \left[\frac{n^2x^2}{2}\right]_0^{1/n} + \left[2nx - \frac{n^2x^2}{2}\right]_{1/n}^{2/n} + 0 = \frac{1}{2} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = 1$$

On a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.

Autres exercices 1

$$x \to e^{-nx^2}$$

Convergence simple. Pour un x donne différent de 0, prenons ϵ >0 et un n_0 tel que $\epsilon = e^{-n_0x}$ donc $n_0 = -\frac{\ln(\epsilon)}{x^2}$. Dans ce cas, $\forall n \geq n_0, |f_n(x)| < \epsilon$ donc la serie de fonction converge simplement. Lorsque $n \to \infty$ on a la fonction $f(x)$ qui tend vers 0. Pour $x = 0$, la série de fonction converge vers 1.

Convergence uniforme. Pour un n donné et un $x \neq 0$, calculons $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. Pour un n donné on pourra toujours trouvé un x tel que $e^{-nx^2} > \epsilon$. donc la série ne converge par uniformément pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$ calculons $|f_n(x) - f(x)| = e^{-n0} - 1 = 0$ donc la fonction converge uniformément pour $x = 0$.

Autres exercices 2

$$x \to \frac{1}{1 + nx^2}$$

Convergence simple. Pour un x donne différent de 0, prenons ϵ >0 et et un n_0 tel que $\epsilon = \frac{1}{1+n_0x^2}$ donc $n_0 = \frac{1-\epsilon}{\epsilon x^2}$. Dans ce cas, $\forall n \geq n_0, |f_n(x)| < \epsilon$ donc la serie de fonction converge simplement. Lorsque $n \to \infty$ on a la fonction $f(x)$ qui tend vers 0. Pour $x = 0$, la série de fonction converge vers 1.

Convergence uniforme. Pour un n donné et un $x \neq 0$, calculons $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. Pour un n donné on pourra toujours trouvé un x tel que $\frac{1}{1+nx^2} > \epsilon$. donc la série ne converge par uniformément pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$ calculons $|f_n(x) - f(x)| = e^{-n0} - 1 = 0$ donc la fonction converge uniformément pour $x = 0$.

Autres exercices 3

$$x \to \sin(x)^n \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}]$$

Convergence simple. Pour un x donne différent de $\frac{\pi}{2}$, prenons $\epsilon > 0$ et et un n_0 tel que $\epsilon = \sin(x)_0^n$ donc $n_0 = \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(\sin(x))}$. Dans ce cas, $\forall n \geq n_0, |f_n(x)| < \epsilon$ donc la serie de fonction converge simplement. Lorsque $n \to \infty$ on a la fonction $f(x)$ qui tend vers 0. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, la série de fonction converge vers 1.

Convergence uniforme. Pour un n donné et un $x \neq \frac{\pi}{2}$, calculons $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. Pour un n donné on pourra toujours trouvé un x tel que $\frac{1}{1+nx^2} > \epsilon$. donc la série ne converge par uniformément pour $x \neq \frac{\pi}{2}$. Pour $x = \frac{\pi}{2}$ calculons $|f_n(x) - f(x)| = sin(\frac{\pi}{2})^n - 1 = 0$ donc la fonction converge uniformément pour $x = \frac{\pi}{2}$.

Autres exercices 4

$$x \to \frac{1}{n}\sin(nx) \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}]$$

Convergence simple. Pour un x donne, prenons ϵ >0 et et un n_0 tel que $\epsilon > \frac{1}{n_0}\sin(n_0x)$ donc $n_0 = \frac{1}{\epsilon}$ car $0 \leq \sin(x) \leq 1$. Dans ce cas, $\forall n \geq n_0, |f_n(x)| < \epsilon$ donc la serie de fonction converge simplement. Lorsque $n \to \infty$ on a la fonction $f(x)$ qui tend vers 0.

Convergence uniforme. Pour un n donné, calculons $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. La borne supérieure de f_n, $\sup(f_n(x)) = \frac{1}{n}$. En prenant n_0 tel que $\epsilon > \frac{1}{n_0}$, donc $n_0 = \frac{1}{\epsilon}$ alors $\forall n > n_0, f_n(x) < \epsilon$. La série de fonction converge uniformement vers 0.