

Feuille 1 : espaces vectoriels, applications linéaires, matrices

1 Le programme

Pour la semaine 37, préparer les exercices 1, 2, 3 et 4 (au moins).
Pour la semaine 38, préparer les exercices 5, 9, 12 et 13.
Pour la semaine 39, préparer l'exercice 15 et on passera à la feuille 2 à venir.

2 Les exercices

Exercice 1. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui sont dérivables et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + xf(x) = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

c) Est-ce que l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq f(x) \leq 1$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Exercice 2. Déterminer si la famille $\mathcal{B}$ est libre ou génératrice pour chacun des K-espaces vectoriels suivants.

a) $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (3, 5)$ et $v_2 = (7, -3)$.

b) $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (4, 5, 6)$, $v_3 = (2, 1, 7)$.

c) $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ avec

$$v_1 = (1, 2, 3, 4),\ v_2 = (2, 3, 4, 5),\ v_3 = (3, 4, 5, 6),\ v_4 = (4, 5, 6, 7).$$

d) $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ avec

$$v_1 = (1, 2, 3, 4),\ v_2 = (2, 3, 4, 5),\ v_4 = (4, 5, 6, 7).$$

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E (on ne demande pas de vérifier que $\mathcal{B}$ est une base).

a) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = ((1,2),(5,3))$, $v = (1,-1)$.

b) $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$, $v = (1+X)^3$.

c) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X+1, (X+1)^2)$, $v = X^2$.

d) $E = \mathrm{Vect}(1, \cos, \sin, \cos_2, \sin_2) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ où $\cos_2$ et $\sin_2$ désignent les fonctions $x \mapsto \cos(2x)$ et $x \mapsto \sin(2x)$, $\mathcal{B} = (1, \cos, \sin, \cos_2, \sin_2)$, $v = \cos^2$.

Exercice 4. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0\}.$$

Déterminer une base de F ainsi que sa dimension.

Exercice 5. Soit $r \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de r les vecteurs $(r,1,1)$, $(1,r,1)$ et $(1,1,r)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6. Soit $n \geq 0$ un entier. Montrer que $(X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $K[X]$.

Exercice 7. Soit E un K-espace vectoriel. Soient E_1, E_2 et E_3 trois sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que
$$E_1 \cap (E_2 + (E_1 \cap E_3)) = (E_1 \cap E_2) + (E_1 \cap E_3).$$

b) On suppose que $E_2 \subset E_3$ et que $E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3$ et $E_1 + E_2 = E_1 + E_3$. Montrer alors que $E_2 = E_3$.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces suivants

$$E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3), \;\; F = \mathrm{Vect}(u_4, u_5)$$
$$\text{où } u_1 = (1,2,3),\ u_2 = (1,0,-1),\ u_3 = (3,2,1),\ u_4 = (1,1,1),\ u_5 = (1,2,2).$$

a) Déterminer les dimensions de E et de F. En donner des bases.

b) Déterminer les sous-espaces vectoriels $E + F$ et $E \cap F$, en donner des bases.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3).$$

a) Montrer que f est une application linéaire.

b) Déterminer une base du noyau de f ainsi qu'une base de l'image de f.

Exercice 10.

a) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, de même dimension d. Soit $f : E \to F$ une application linéaire telle que $\dim f(E) < d$. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ? Que dire si $\dim f(E) = d$?

b) Soit E un K-espace vectoriel et soit f une application linéaire non nulle de E dans K. Calculer le rang de f ainsi que la dimension de son noyau.

Exercice 11. Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie et soit $f : E \to F$ une application linéaire bijective. Montrer que la réciproque $f^{-1} : F \to E$ est une application linéaire.

Exercice 12.

a) Déterminer, avec le moins de calculs possible, le rang de la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer une base du noyau de A.

Exercice 13. Dans chacun des cas suivants, montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E, écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et donner les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

a) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$, $u_1 = (4, 1)$, $u_2 = (3, 1)$, $u = (1, 1)$.

b) $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$, $u_1 = (5, 2, 1)$, $u_2 = (4, 2, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$, $u = (1, -1, 1)$.

Exercice 14. Dans chacun des cas suivants, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\ker A$ et, si $\ker A = \{0\}$, déterminer A^{-1}.

a) $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, puis $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} [r]1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, puis $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Exercice 15.

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_2, 3x_1 - 2x_2).$$

Décrire le noyau et l'image de f. Quelles sont leurs dimensions ?

b) Même exercice pour $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2, 2x_2 + x_3).$$

c) Donner les matrices de f, g, $g \circ f$ et $f \circ g$ relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

d) On considère les bases $\mathcal{B}_2' = ((1,2),(1,-1))$ et $\mathcal{B}_3' = ((1,1,0),(-1,0,1),(1,1,2))$.

e) Écrire les matrices de passages de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_2'$ puis de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{B}_3'$.

f) Donner les matrices des applications linéaire f, g, $g \circ f$, $f \circ g$ relativement aux bases $\mathcal{B}_2'$ et $\mathcal{B}_3'$.

Exercice 16.

a) Déterminer le rang de la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 9 & 0 & -6 & 3 \\ 18 & 9 & -17 & 7 \end{pmatrix}$ ainsi qu'une base de son noyau.

b) Donner une base de l'image de A.

c) Montrer que $\operatorname{Im} A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ stable par u_A. Déterminer la restriction de u_A à $\operatorname{Im} A$ et en déduire que $\ker A \cap \operatorname{Im} A = 0$.

d) Donner une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On note u l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par $u(P(X)) = P(X+1)$.

a) Montrer que u est une application linéaire et déterminer sa matrice dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.

b) En déduire que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et déterminer son inverse.