Rappel de cours

Definition 1. Soit F un sous-espace vectoriel de E, l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à F est appelé le complément orthogonal de F (ou orthogonal de F) et est noté $F^{\perp}$:

$$F^{\perp} = \{u \in E, u \perp w \forall w \in F\}$$

Exercice 3

Exercice 3.1

$$P_u(v) = < u, v > \frac{u}{\|u\|^2}$$

Exercice 3.2

Construction d'une base $Vect(u, v')$ orthogonale d'une base $Vect(u, v)$. On construit le vecteur $\overrightarrow{v'}$ dans $Vect(u, v)$ sous la forme $v + \lambda u$ de facon à avoir $< u, v' >= 0$ (procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt).

$$< u, v + \lambda u >=< u, v > + < u, \lambda u >=< u, v > +\lambda < u, u >=< u, v > +\lambda \|u\|^2$$

Donc $\lambda = -\frac{<u,v>}{\|u\|^2}$ et $v' = v - \frac{<u,v>}{\|u\|^2} u = v - P_u(v)$.

Exercice 3.2

Exercice 4

Exercice 4.1

On utilise le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, en construisant par récurence la base orthogonale de F. On note $F' = Vect(u'_1, u'_2, u'_3)$ la base orthogonale à F. On commence par prendre $u'_1 = u_1$. Donc $u'_1 = (-1, 2, 0, 2)$.

On a ensuite $u'_2 = u_2 - \frac{<u_2, u'_1>}{\|u'_1\|^2} u'_1$ avec $< u_2, u'_1 >= 0$ et $\|u'_1\|^2 = 9$ donc $u'_2 = (0, 2, 1, -2) - \frac{0}{9}(-1, 2, 0, 2) = (0, 2, 1, -2)$.

On a ensuite $u'_3 = u_3 - \frac{<e_3, u'_1>}{\|u'_1\|^2} u'_1 - \frac{<e_3, u'_2>}{\|u'_2\|^2} u'_2$ Avec $< e_3, u'_1 >= 1$, $\|u'_1\|^2 = 9$, $< e_3, u'_2 >= 3$ et $\|u'_2\|^2 = 9$ donc $u'_3 = (1, 1, 1, 0) - \frac{1}{9}(-1, 2, 0, 2) - \frac{3}{9}(0, 2, 1, -2) = (\frac{10}{9}, \frac{1}{9}, \frac{6}{9}, \frac{4}{9})$.

Exercice 4.2

On a $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ et $\dim(F) = 3$ donc $\dim(F^\perp) = 4 - 3 = 1$. On cherche donc un vecteur $w = (x, y, z, t)$ tel que $w \perp u'1$, $w \perp u'2$,$w \perp u'3$.

$$\begin{cases} < w, u'_1 >= 0 \\ < w, u'_2 >= 0 \\ < w, u'_3 >= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2y + 2t = 0 \\ 2y - 1z - 2t = 0 \\ 10x + 1y + 6z + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2y + 2t = 0 \\ 2y - 1z - 2t = 0 \\ 21y + 6z + 24t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2y + 2t = 0 \\ 2y - 1z - 2t = 0 \\ 33z + 90t = 0 \end{cases}$$

Donc $F^\perp = \{(30, 8, -30, 11)\}$.

Exercice 4.3

On cherche une application linéaire $\varphi(x)$ tel que $F = Ker(\varphi(x))$. On sait que $Ker(f) = \{u \in E, f(u) = 0\}$. On sait aussi que lorsque 2 vecteurs u et v sont orthogonaux alors $< u, v >= 0$. Si on choisit $\varphi(x)$ l'application qui calcule le produit vectoriel par rapport à w, alors on a $Ker(\varphi(x))$ qui est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à w. Mais cet ensemble est F car $w = F^\perp$. Donc $\varphi(x) =< x, w >$.