Rappel de cours

Exercice 1

Exercice 1.1

On a

$$e^A = \sum_{n=0\to\infty} \frac{1}{k!}A^k = A^0 + A^1 + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n + \ldots$$

On a aussi

$$A^p = \begin{bmatrix} \lambda_1^p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^p \end{bmatrix}$$

Donc

$$e^A = A^0 + A^1 + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n + \ldots$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^2 \end{bmatrix} + \ldots + \frac{1}{p!}\begin{bmatrix} \lambda_1^p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^p \end{bmatrix} + \ldots$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_1^2+\ldots+\frac{1}{p!}\lambda_1^p+\ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_2^2+\ldots+\frac{1}{p!}\lambda_2^p+\ldots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n+\frac{1}{2}\lambda_n^2+\ldots+\frac{1}{p!}\lambda_n^p+\ldots \end{bmatrix}$$

Le développement limité de $e^x = x^0 + x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{p!}x^p + \ldots$
Donc

$$e^A = \begin{bmatrix} e_1^\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e_2^\lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & e_n^\lambda \end{bmatrix}$$

Si la matrice A est diagonalisable alors $\exists PetD, A = PDP^{-1}$. Donc on a $A^n = A.A.\ldots.A = PDP^{-1}.PDP^{-1}.\ldots.PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$. Donc

$$e^A = \sum_{k=0\to\infty} \frac{1}{k!}A^k = \sum_{k=0\to\infty} \frac{1}{k!}PD^kP^{-1} = P.\sum_{k=0\to\infty} \frac{1}{k!}D^k.P^{-1} = P.e^D.P^{-1}$$

On peut sortir les 2 matrices P et P^{-1} de la somme car elles peuvent être vues comme des constantes dans la somme (indépendence par rapport a n).

Exercice 1.2

Si la matrice A est nilpotente alors $\exists n, A^n = 0$ Donc

$$e^A = \sum_{k=0\to\infty} \frac{1}{k!}A^k = \sum_{k=0\to n-1} \frac{1}{k!}A^k + \sum_{k=n\to\infty} \frac{1}{k!}A^k = \sum_{k=0\to n-1} \frac{1}{k!}A^k + \frac{1}{n!}.0 + \frac{1}{n+1!}.0 + \ldots = \sum_{k=0\to n-1} \frac{1}{k!}A^k$$

Soit un polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ de degrés n alors

$$P(A) = a_0A^0 + a_1A^1 + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n = \sum_{k=0\to n} a_kA^k$$

Définissons le polynome P tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = \frac{1}{k!}$ et $a_0 = 1$ donc

$$P(A) = \sum_{k=0\to n} a_k A^k = a_0 A^0 + \sum_{k=1\to n} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0\to n} \frac{1}{k!} A^k = e^A$$

si la matrice A est nilpotente de rang $n+1$.

Exercice 1.3

On a $A = D + N$ avec D une matrice diagonale, N une matrice nilpotente et $DN = ND$. Donc

$$e^A = \sum_{k=0\to\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0\to\infty} \frac{1}{k!} (D+N)^k$$

$$e^D e^N = \sum_{k=0\to\infty} \frac{1}{k!} D^k . \sum_{l=0\to n-1} \frac{1}{l!} N^l$$

Comme N est nilpotente de rang n on a

$$\sum_{k=0\to\infty} \frac{1}{k!} D^k . \sum_{l=0\to\infty} \frac{1}{l!} N^l$$

Donc

$$= D^0 \sum_{l=0\to\infty} \frac{N^l}{l!} + D^1 \sum_{l=0\to\infty} \frac{N^l}{l!} + \frac{1}{2} D^2 \sum_{l=0\to\infty} \frac{N^l}{l!} \dots + \frac{1}{n!} D^n \sum_{l=0\to\infty} \frac{N^l}{l!} + \dots$$

$$= \sum_{l=0\to\infty} D^0 \frac{N^l}{l!} + \sum_{l=0\to\infty} D^1 \frac{N^l}{l!} + \sum_{l=0\to\infty} \frac{1}{2} D^2 \frac{N^l}{l!} \dots + \sum_{l=0\to\infty} \frac{1}{n!} D^n \frac{N^l}{l!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0\to\infty} \sum_{l=0\to\infty} \frac{D^k}{k!} \frac{N^l}{l!}$$

$$= \sum_{m=0\to\infty} \sum_{k=0\to m} \frac{D^k}{k!} \frac{N^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$= \sum_{m=0\to\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0\to m} \frac{m!}{k!(m-k)!} D^k N^{m-k}$$

Comme les matrices N et D commuttent,

$$= \sum_{m=0\to\infty} \frac{1}{m!} (D+N)^m = e^{D+N}$$

On peux faire le même raisonnement en partant de $e^N e^D$
Pas besoin de D diagonale??

Exercice 1.4

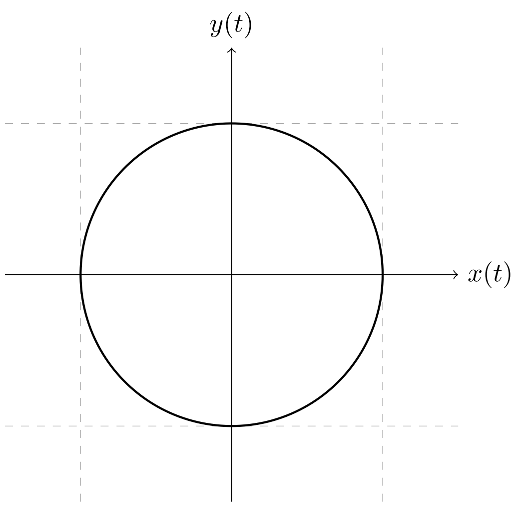
D'après le Théorème de la décomposition de Dunford, toute matrice M peut de décomposer en une somme de deux matrices D et N tel que D soit diagonalisable, N soit nilpotente et les 2 matrices commuttent ($ND = ND$). Donc pour calculer, on trouver les matrices A et B et $e^M = e^{A+B} = e^A e^B$. Comme A est diagonalisable on a $A = PDP^{-1}$. Donc $e^A = Pe^D P^{-1}$. La matrice D est diagonale donc le calcul de e^D est trivial (question 1). COmme B est nilpotente de rang n, on peut faire le calcul de e^B car on a une borne n.

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 3.1

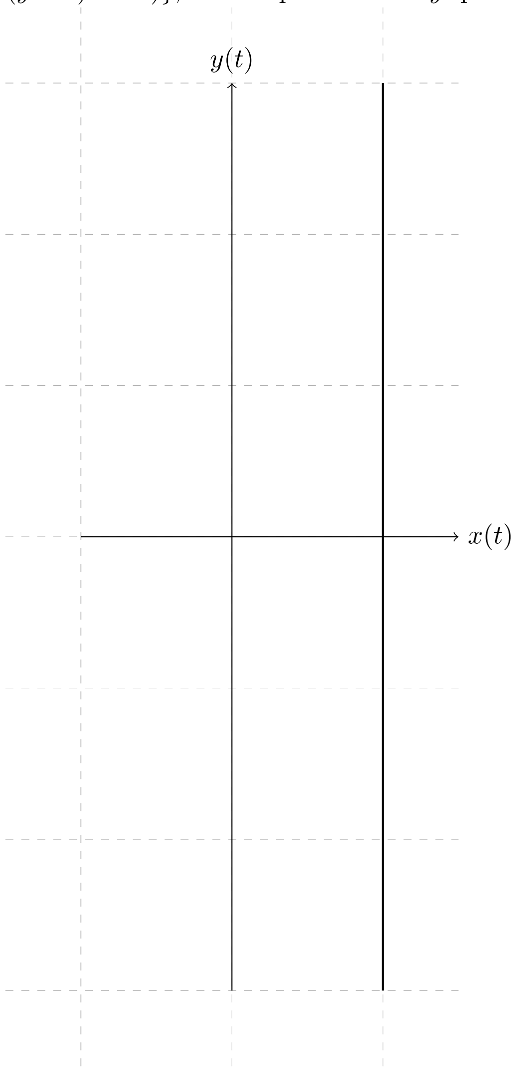
$E = \{(x^2 + y^2 = 1)\}$. C'est l'équation paramétrique du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.



Pas un espace affine (ni une droite, ni un point ni un plan)

Exercice 3.2

$E = \{((x-1)^2 + 0(y-1)^2 = 0)\}$, il faut que $x = 1$ et y quelconque donc E est la droite verticale passant

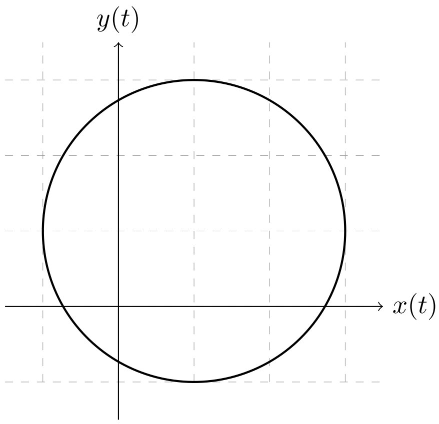


par le point $(1, 0)$.

Espace affine $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + (\mathbb{R}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})$.

Exercice 3.3

$E = \{((x-1)^2 + (y-1)^2 = 4)\}$, C'est l'équation paramétrique du cercle de centre $(1, 1)$ et de rayon 2.



Pas un espace affine (ni une droite, ni un point ni un plan)

Exercice 3.4

$E = \{((x-2)^2 + (y-2)^2 = -1)\}$, pas de solution $E = \emptyset$.

Pas un espace affine (ni une droite, ni un point ni un plan)

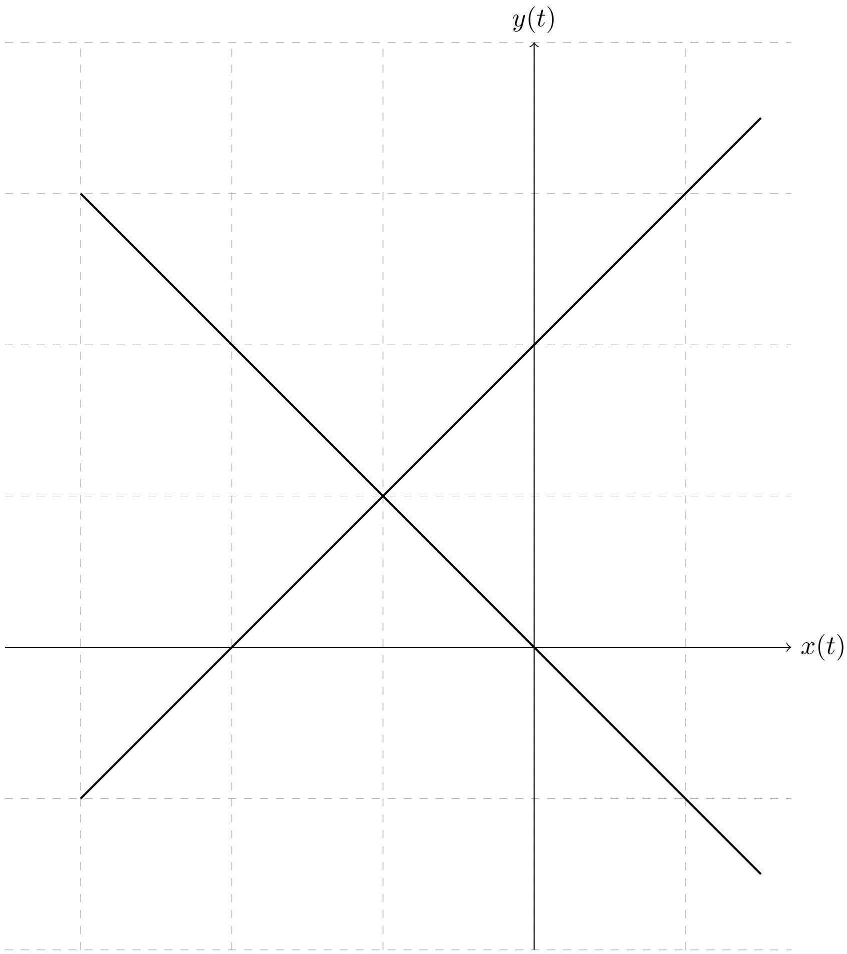
Exercice 3.5

$E = \{((x+1)^2 + (y-1)^2 = 0)\}$, solution est un seul point $(-1, 1)$.

Espace affine $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (\mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$.

Exercice 3.6

$E = \{(x+1)^2 - (y-1)^2 = 0)\} = \{(x+1)^2 = (y-1)^2\} = \{|x+1| = |y-1| = |1-y|\}$. Première solution $x = -y$, seconde solution $y = x + 2$. Donc 2 droites.



Union de 2 sous-espaces affines:

- $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (\mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$.
- $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (\mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix})$

Ce n'est pas un sous espace affine. Car la relation de Chasles n'est pas respect'e si on prend le premier vecteur sur la première droite et le second sur la seconde.