Rappel de cours

-

Exo 1

Preuve par récurrence.
Proposition est vraie pour $u_0 = 0 = 2^0 - 1$.
Supposons que $u_n = 2^n - 1$ pour $n > 0$, vérifions si $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

$$u_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1$$

$$u_{n+1} = 2 * 2^n - 1$$

$$u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

La proposition est Vraie.

Exo 2

Preuve par récurrence.
Proposition est vraie pour $u_0 = 3 = 3^{2*0}$.
Supposons que $u_n = 3^{2n}$ pour $n > 0$, vérifions si $u_{n+1} = 3^{2(n+1)}$.

$$u_{n+1} = u_n^2$$

$$u_{n+1} = (3^{2n})^2$$

$$u_{n+1} = 3^{4n}$$

La proposition est Fausse.

Exo 3

Prenons $f(x) = x^2 + 1$, et déterminons le signe de $f(x) - x$ selon x.

$$f(x) - x = x^2 + 1 - x = x(x-1) + 1$$

$$f(x) - x, \begin{cases} > 0 & x \in]-\infty, 0[\\ > 0 & x = 0 \\ > 0 & x \in]0, 1[\\ > 0 & x = 1 \\ > 0 & x \in]1, +\infty \end{cases}$$

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un assemblage de fonctions continues sur $\mathbb{R}$,
- La fonction f est stable sur $\mathbb{R}$ car $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$.
- La fonction f est strictement croissante
- La fonction f admet un point fixe , donc la suite $u_n = u_n^2 + 1$ est strictement croissante donc tend vers $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

En passant à la limite dans l'inégalité $u_n > u_0$, on obtient $l > u_0$, et la suite u_n n'est pas constante, on en déduit que $l = +\infty$ donc, la suite $\lim_{n \to +\infty} u_n = \{+\infty\}$.

La proposition est Fausse.

Exo 4

Prenons $f(x) = 1 + arctan(\frac{x}{2})$, et déterminon le signe de $f(x) - x$ selon x.

$$g(x) = f(x) - x = 1 + arctan(\frac{x}{2}) - x$$

La fonction $g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante, positive $\forall x \in] - \infty, x_{pf}[$, négative $\forall]x_{pf}, +\infty[$, donc elle s'annule pour un point $x_{pf} in]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{cases} f(x) > x & x \in] - \infty, x_{pf}[\\ = 0 & x_{pf} in]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}[\\ f(x) < x & x \in]x_{pf}, +\infty[\end{cases}$$

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un assemblage de fonctions continues sur $\mathbb{R}$,
- La fonction f est stable sur $\mathbb{R}$ car $f(\mathbb{R}) \subset]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}[\subset \mathbb{R}$.
- La fonction f est strictement croissante
- La fonction f admet un point fixe x_{pf}
- Cas $u_0 = x_{pf}$, la suite est constante.

- Cas $u_0 \neq x_{pf}$. Il faut calculer la dériv'ee de le fonction f pour savoir si le point fixe est répulsif ou attractif

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}}$$

On a:

$$\frac{x^2}{4} \geq 0$$

$$1 + \frac{x^2}{4} \geq 1$$

$$0 < \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} \leq 1$$

$$0 < \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} \leq \frac{1}{2}$$

Donc $f'(x) \leq \frac{1}{2}$, par le théorème de xx, le point fixe est attractif et la suite u_n est convergente.

La proposition est Vraie.

Exo 5

On a $\lim_{x \to 0^+} x^{\sqrt{3}} = 0$ et $\lim_{x \to 0^-} -(-x)^{\sqrt{3}} = 0$, donc la fonction $\phi(x)$ se prolonge en:

$$\tilde{\phi}(x), \begin{cases} x^{\sqrt{3}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -(-x)^{\sqrt{3}} & x < 0 \end{cases}$$

La fonction $\tilde{\phi}(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Montrons que la fonction $\tilde{\phi}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\tilde{\phi}'(x), \begin{cases} \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\sqrt{3}(-x)^{\sqrt{3}-1} & x < 0 \end{cases}$$

On a $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1} = 0$ et $\lim_{x\to 0^-} -\sqrt{3}(-x)^{\sqrt{3}-1} = 0$, donc la fonction $\tilde{\phi}'(x)$ est continue. La fonction $\tilde{\phi}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrons que la fonction $\tilde{\phi}(x)$ est bijective. Les fonctions $x^{\sqrt{3}}$, 0, $-(-x)^{\sqrt{3}}$ sont bijectives sur les domaines respectifs $x > 0$, $x = 0$ et $x < 0$. Il faut maintenant montrer que les images des trois fonctions sont exclusives pour que la fonction $\tilde{\phi}(x)$ soit bijective. $x > 0, Im(\tilde{\phi}(x)) > 0$, $x = 0, Im(\tilde{\phi}(x)) = 0$ et $x < 0, Im(\tilde{\phi}(x)) < 0$, donc la fonction $\tilde{\phi}(x))$ est bijective.

La proposition est Vraie.

Exo 6

Prenons la valeur $x = \frac{3\pi}{4}$. On a :

$$sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$$

Donc $arcsin(sin(x)) \neq x$.

La proposition est Fausse.

Exo 7

Rappel de cours:

- une fonction f est bijective, si elle est injective et surjective
- une fonction f est injective, si $\forall(x_1, x_2) \in DxD, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ ou $\forall(x_1, x_2) \in DxD, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
- une fonction f est surjective, si $\forall y \in A, \exists x \in D, f(x) = y$
- une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D, si la fonction f est dérivable sur D et sa dérivée $f'(x)$ est continue sur D.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$, donc $\forall x_0 \in]-1;1[, f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. On a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}$$

Comme f est injective $x \neq x_0 \implies f(x) \neq f(x_0)$, donc $f(x) - f(x_0) \neq 0$.

$$\frac{1}{f'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}$$

En prenant $f(x_0) = y_0$ et $f(x) = y$, on a

$$\frac{1}{f'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}$$

Comme la fonction f est continue, lorsque $x \to x_0$, on a $f(x) \to f(x_0)$, donc $y \to y_0$.

$$\frac{1}{f'(x_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))}{y - y_0} = (f^{-1})'(y_0)$$

La dérivé de la function f^{-1} existe mais elle est continue que lorsque $f'(x_0) \neq 0$. Donc $f^{i1}(x)$ n'est pas forçément de classe $\mathcal{C}^1$.

Ou alors
Soit la fonction $f(x) = x$. La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$ et est bijective. On a $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. En effet, sa dérivée existe $f^{-1}(x) = -\frac{1}{x^2}$, mais sa dérivée n'est pas continue sur sur $]-1;1[$ (non définie en $x = 0$).

La proposition est Fausse.

Exo 8

Pour montrer la proposition, on va montrer que la fonction $f(x) = 2arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + arctan(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ (i.e. sa dérivée est égale à zéro sur $\mathbb{R}$) et que $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$f'(x) = 2.\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1}{(\sqrt{1+x^2} - x)^2 + 1} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = 2.\frac{\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + x^2 - 2x\sqrt{1+x^2} + x^2 + 1} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + x^2 - x\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(1 + x^2 - x\sqrt{1+x^2})} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(1 + x(x - \sqrt{1+x^2}))} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x - \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}(1 + x(x - \sqrt{1+x^2}))(x + \sqrt{1+x^2})} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}((x + \sqrt{1+x^2}) - x)} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = 0$$

Donc $f(x)$ est une fonction constante. Calculons un point au hasard $f(0) = 2arctan(\sqrt{1+0^2} - 0) + arctan(0) = 2arctan(1) + 0 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

La proposition est Vraie.

Exo 9

Rappel de cours:

- une fonction f est impaire si $\forall x, f(-x) = -f(x)$
- une fonction f est bijective, si elle est injective et surjective
- une fonction f est injective, si $\forall(x_1, x_2) \in DxD, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ ou $\forall(x_1, x_2) \in DxD, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
- une fonction f est surjective, si $\forall y \in A, \exists x \in D, f(x) = y$

La fonction $f(x)$ est impaire donc $f(-x) = -f(x)$. La fonction $f(x)$ est bijective donc la fonction $f^{-1}(x)$ existe. on a $f(f^{-1}(x)) = x$ donc $-f(f^{-1}(x)) = -x$, comme f est impaire $f(-f^{-1}(x)) = -x$.

Admettons que la fonction f^{-1} ne soit pas impaire donc $f^{-1}(-x) \neq -f^{-1}(x)$. Comme la fonction f est injective on a $-x = f(-f^{-1}(x)) \neq f(f^{-1}(-x)) = -x$. Contradiction, donc la fonction f^{-1} est impaire.

La proposition est Vraie.

Exo 10

Rappel de cours:

- Intégrale de Riemann. $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) \rightarrow_{n\rightarrow\infty} \int_a^b f(x)dx$

On a $\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} sin(\frac{\pi k}{2n})$.

En prenant $b = \pi$, $a = 0$, $x = k/n$, on a $f(x) = sin(\frac{\pi}{2}x)$

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} sin(\frac{\pi k}{2n}) = \int_0^{\pi} sin(\frac{\pi}{2}x)dx$$

Intégrale par substitution: $u = \frac{\pi}{2}x$, donc $\frac{du}{dx} = \frac{\pi}{2}$ et $dx = \frac{2}{\pi}du$

$$\int sin(\frac{\pi}{2}x)dx = \frac{2}{\pi}\int sin(u)du = -\frac{2}{\pi}cos(u) = -\frac{2}{\pi}cos(\frac{\pi}{2}x)$$

$$\int_0^{\pi} sin(\frac{\pi}{2}x) = [-\frac{2}{\pi}cos(\frac{\pi}{2}x)]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi} + \frac{cos(\frac{\pi^2}{2})}{n} \neq 1$$

La proposition est Fausse.

Exo 11

On a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2(1+k^2/n^2)} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1+(k/n)^2} = \frac{1}{n}.\frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1+(k/n)^2}$$

En prenant: $a = 0$, $b = 1$ et $x = k/n$ on a $f(x) = \frac{nx}{1+x^2}$ donc

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} = lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}.\int_0^1 \frac{nx}{1+x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} = [\frac{ln(x^2+1)}{2}]_0^1 = \frac{ln(2)}{2} - \frac{ln(1)}{2}$$

Donc

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} \neq \frac{\pi}{4}$$

La proposition est Fausse.

Exo 12

On a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2(1+k^2/n^2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2} = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}$$

En prenant: $a = 0$, $b = 1$ et $x = k/n$ on a $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ donc

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = [arctan(x)]_0^1 = arctan(1) - arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

La proposition est Vraie.

Exo 13

Rappel de cours:

- Intégrale par partie. $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)$

  On prend

$$\begin{array}{ll} f(x) = (x-1)^2 & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 2x-2 & g(x) = e^x \end{array}$$

  Donc $\int_0^1 (x-1)^2 e^x = [(x-1)^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 (2x-2)e^x = -1 - \int_0^1 (2x-2)e^x$
  On prend

$$\begin{array}{ll} f(x) = 2x-2 & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 2 & g(x) = e^x \end{array}$$

  Donc $\int_0^1 (2x-2)e^x = [(2x-2)e(x)]_0^1 - \int_0^1 2e^x = [(2x-2)e(x)]_0^1 - 2[e^x]_0^1 = 2 - 2e + 2 = 4 - 2e.$

  Enfin $\int_0^1 (x-1)^2 e^x = -1 - (4-2e) = 2e - 5$
  La proposition est Vraie.

Exo 14

Soit $f(x)$ une fonction croissante et $F(x)$ une fonction tel que $F'(x) = f(x)$. On a

$$g(x) = \int_{x^3}^{x^3+1} f(t)dt = F(x^3+1) - F(x^3)$$

La valeur de la dérivée de la fonction $g(x)$ donne le sens de la fonction $g(x)$.

$$g'(x) = (F(x^3+1) - F(x^3))' = F'(x^3+1) - F'(x^3) = f(x^3+1) - f(x^3)$$

La fonction $f(x)$ est croissante donc $\forall x_1, x_2, x_1 \geq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$ et $x^3+1 > x^3$. Donc $g'(x)$ est toujours positive ou nulle. Par conséquent la fonction $g(x)$ est croissante.

La proposition est Vraie.

Exo 15

On a $arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} arcsin'(t)dt$$

$$I = [arcsin(t) + C]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$I = arcsin(\frac{1}{2}) - arcsin(0)$$
$$I = \frac{\pi}{6} - 0$$
$$I = \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{3}$$

La proposition est Fausse.

Exo 16

$$\int_{exp(exp(2))}^{exp(exp(1))} \frac{dx}{x(ln\,x)(ln(ln\,x))}$$

On substitue $u = ln(ln\,x)$, donc $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x(ln\,x)}$, et $dx = x(ln\,x)du$

$$\int_{exp(exp(2))}^{exp(exp(1))} \frac{1}{x(ln\,x)(ln(ln\,x))}dx$$
$$\int_{exp(exp(2))}^{exp(exp(1))} \frac{x(ln\,x)}{x(ln\,x)(ln(ln\,x))}du$$
$$\int_{exp(exp(2))}^{exp(exp(1))} \frac{1}{ln(ln\,x)}du$$
$$= \int_{exp(exp(2))}^{exp(exp(1))} \frac{1}{u}du$$
$$= [ln(u)]_{exp(exp(2))}^{exp(exp(1))}$$
$$= [ln(ln(ln\,x))]_{exp(exp(2))}^{exp(exp(1))}$$
$$= ln(ln(ln\,exp(exp(1)))) - ln(ln(ln\,exp(exp(2))))$$
$$= (ln\,1) - (ln\,2)$$
$$= -(ln\,2)$$

La proposition est Vraie.