Exercice 5

Question 1

On a

$$E(X_1) = \int_a^1 tf(t)\,dt = \int_a^1 t\frac{1}{1-a}\,dt = \frac{1}{1-a}\frac{1-a^2}{2} = \frac{1+a}{2}$$

On a

$$E[X_1^2] = \int_a^1 t^2 f(t)\,dt = \int_a^1 t^2\frac{1}{1-a}\,dt = \frac{1}{1-a}\frac{1-a^3}{3} = \frac{1+a+a^2}{3}$$

Donc

$$V(X_1) = E[X_1^2](E[X_1])^2 = \frac{1+a+a^2}{3} - \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$$

Question 2

On a

$$E[X_1] = \frac{1+a}{2} \implies a = 2E[X_1] - 1$$

Donc on prend comme EMM de a

$$\tilde{a}_n = 2\bar{a}_n - 1$$

Mais $0 < a < 1$, il faut donc que son estimateur soit aussi $0 < \tilde{a}_n < 1$ Donc

$$0 < 2\bar{a}_n - 1 < 1 \implies 1 < 2\bar{a}_n < 2 \implies 1/2 < \bar{a}_n < 1$$

Donc l'EMM est défini uniquement si la moyenne de l'échantillon $\bar{a}_n$ est comprise entre 0.5 et 1.

Consistance. En appliquant le Lemme de l'application Continue (LAC). En prenant $h(x) = 2x-1$, pour $1/2 < x < 1$. La fonction est continue. On a également, $\bar{a}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} E[X_1]$ selon la loi des grands nombres. Donc $\tilde{a}_n = h(\bar{a}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} h(E[X_1]) = a$. Donc consistance.

En appliquant le Théoème Central Limite (TCL) avec $\mu = a$ et $\sigma^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$ on a

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{a}_n - a)}{\sqrt{\sigma^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Question 3

On calcule

$$\mathcal{L}_a(x_i,\dots,x_n) = \prod_1^n \frac{1}{1-a}1_{x_i\in[a,1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n}\prod_1^n 1_{x_i\in[a,1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n}1_{min(x_i)\le x_i\le 1}(x_i)$$

Ce qui donne la fonction suivante:

$$\mathcal{L}_a(x_i,\dots,x_n) = \begin{cases} 1 & a = 0 \\ \frac{1}{(1-a)^n} & 0 < a \le min(x_i) \\ 0 & min(x_i) < a < 1 \end{cases}$$

$\mathcal{L}_a(x_i,\dots,x_n)$ est croissante sur $0 \le a \le min(x_i)$ et nulle quand $min(x_i) < a$ donc EMV est maximale lorsque $a = min(x_i)$. On a $\hat{a}_n = \frac{1}{(1-min(x_i))^n}$.

Je ne comprends pas ce que represente Z_n.

Question 4

Vitesse de convergence de $\tilde{a}_n$. Il faut trouver le plus grand d qui verifie:

$$n^d(\tilde{a}_n - a) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0$$

$$\forall\epsilon, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n^d(\tilde{a}_n - a) \geq \epsilon) = 0$$

$$\forall\epsilon, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((2\bar{a}_n) \geq \frac{\epsilon}{n^d} + a + 1) = 0$$

Je ne comprends rien.

Exercice 6

Question 1

Question 1-a

en prenant $k = 1$ on a

$$\mathbb{E}(U^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{2!}{2.1!} = \frac{1}{2}$$

en prenant $k = 2$ on a

$$\mathbb{E}(U^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{4!}{4.2!} = \frac{3}{2}$$

Question 1-b

Soit une variable aléatoire $Y = X_i^2$, l'événement $A = (Y \leq y)$ est équivalent à l'événement $B = (-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$. lorsque $y < 0$, on a $P(Y \leq y) = 0$. Lorsque $y \geq 0$,

$$F_Y(y) = P((Y \leq y)) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_x(\sqrt{y}) - F_x(-\sqrt{y})$$

et

$$f_y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_X(\sqrt{y}) - \frac{\partial}{\partial y} F_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_x(\sqrt{y}) + f_x(-\sqrt{y})]$$

Dans notre cas, $f_X(x)$ est défini pour $x \geq 0$, donc $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_x(\sqrt{y})$. Ce qui fait :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[\frac{\sqrt{y}}{\theta} exp\left(-\frac{\sqrt{y}^2}{2\theta} \right) \right] = \frac{1}{2\theta} exp\left(-\frac{y}{2\theta} \right)$$

qui est une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\theta}$.

Question 1-c

Calcul de $E(X_1)$

$$E(X_1) = \int_0^{+\infty} x f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

car $f_X(x) = 0$ lorsque $x < 0$.

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} exp\left(-\frac{x^2}{2\theta} \right) dx$$

Par substitution prenant $u = \frac{x}{\sqrt{\theta}}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ et $\partial x = \sqrt{\theta}\partial u$, on obtient :

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 exp\left(-\frac{u^2}{2} \right) \sqrt{\theta} du = \sqrt{\theta} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 exp\left(-\frac{u^2}{2} \right) du$$

D'après la question 1-a, pour $k = 1$, on a :

$$E(X_1) = \sqrt{2\pi\theta}\frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{\sqrt{2\pi\theta}}{2} = \sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}$$

Calcul de $E(X_1^2)$

$$E(X_1^2) = \frac{1}{\frac{1}{2\theta}} = 2\theta$$

car $E(X_1^2)$ est une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\theta}$.

Calcul de $E(X_1^3)$

$$E(X_1^3) = \int_0^{+\infty} x^3 f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)dx$$

car $f_X(x) = 0$ lorsque $x < 0$.

$$E(X_1^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{\theta} exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx$$

Par substitution prenant $u = \frac{x}{\sqrt{\theta}}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ et $\partial x = \sqrt{\theta}\partial u$, on obtient :

$$E(X_1^3) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 u^4 exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\sqrt{\theta}du = \sqrt{\theta}\theta^2\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u^4 exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

D'après la question 1-a, pour $k = 2$, on a :

$$E(X_1^3) = \sqrt{2\pi\theta}\theta^2\frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{3\sqrt{2\pi\theta}\theta^2}{2}$$

Calcul de $E(X_1^4)$.

$$E(X_1^4) = \int_0^{+\infty} x^4 f_x(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^5}{\theta} exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx = 8\theta^2$$

Par utilisation d'un solveur internet, mais faisable à la main.

Question 2

Question 2-a

On calcule

$$\mathcal{L}_\theta(x_i,\ldots,x_n) = \prod_1^n \frac{x^2}{\theta} exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) 1_{x_i\in[0,+\infty]}(x_i) = \frac{x_1 x_2\ldots x_n}{\theta^n} exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2\theta}\right)\prod_1^n 1_{x_i\in[0,+\infty]}(x_i)$$

On calcule $\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L}_\theta(x_i,\ldots,x_n)$ et on cherche les points oú la dérivée s'annule.

En utilisant un solveur internet on a

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L}_\theta(x_i,\ldots,x_n) = \frac{x_1 x_2\ldots x_n\theta^{-n-2}.(2n\theta-(x_1+x_2+\ldots+x_n))e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2\theta}}}{2}$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L}_\theta(x_i,\ldots,x_n) = 0$$

quand $\hat{\theta_n} = \frac{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}{2n}$.

Ou plus simple (en passant par le log car $\mathcal{L}_\theta(x_i,\ldots,x_n) \neq 0$)

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(\mathcal{L}_\theta(x_i,\ldots,x_n)) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(ln(x_1x_2\ldots x_n) - ln(\theta^n) - \frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2\theta}\right) = -\frac{n}{\theta} + \frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2\theta^2}$$

Et

$$-\frac{n}{\theta} + \frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2\theta^2} = \frac{-2n\theta+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2\theta^2} = 0$$

quand $\hat{\theta_n} = \frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2n}$.

Question 2-b

Le biais de $\hat{\theta}$ est :

$$b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta = E\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{2n}\right) - \theta = \frac{1}{2n}(E(x_1^2) + E(x_2^2) + \ldots + E(x_n^2)) - \theta$$

Même loi, donc tous les $E(x_i^2)$ sont identiques.

$$= \frac{1}{2n}(2\theta + 2\theta + \ldots + 2\theta) - \theta = \frac{2n\theta}{2n} - \theta = 0$$

Le risque quadratique de $\hat{\theta}$ est :

$$r(\hat{\theta}) = E((\hat{\theta} - \theta)^2) = b(\hat{\theta}) + V(\hat{\theta}) = 0 + V(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - (E(\hat{\theta}))^2$$

Question 2-c

Question 2-d

Question 3

Question 3-a

Question 3-b

Question 4

Question 4-a

$$E(\bar{U}^2) = E\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i\right)^2\right) = \frac{1}{n^2}E\left(\left(\sum_{i=1}^n U_i\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^n U_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} U_iU_j\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n E(U_i^2) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(U_iU_j)\right)$$

Comme les U_i suivent la même loi, elles ont la même esperance, de plus elles sont independantes donc $E(U_iU_j) = E(U_i)E(U_j)$. Donc

$$E(\bar{U}^2) = \frac{1}{n^2}\left(nE(U_1^2) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(E(U_1))^2\right)$$

On a aussi $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$. Donc

$$E(\bar{U}^2) = \frac{1}{n^2}\left(n(V(U_1) + (E(U_1))^2) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(E(U_1))^2\right) = \frac{1}{n^2}\left(n\left(V(U_1) + (E(U_1))^2\right) + 2\frac{n(n-1)}{2}(E(U_1))^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(nV(U_1) + n(E(U_1))^2 + n(n-1)(E(U_1))^2\right) = \frac{1}{n^2}\left(nV(U_1) + n^2(E(U_1))^2\right) = (E(U_1))^2 + \frac{V(U_1)}{n}$$

La seconde partie, on admet.

Question 4-b