

## Rappel de cours

**Definition 1.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(U_n)$  une suite de fonctions définies sur  $I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ . On dit que  $(u_n)$  converge **simplemment** vers  $f$  sur  $I$  si pour tout  $x \in I$ , la suite  $(U_n(x))$  converge vers  $f(x)$ .

**Definition 2.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(U_n)$  une suite de fonctions définies sur  $I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ . On dit que  $(u_n)$  converge **uniformément** vers  $f$  sur  $I$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n > n_0, |(U_n(x)) - f(x)| < \epsilon$$

**Definition 3.** On dit que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$  converge **normalement** sur  $I$  si la série  $\sum_{n \geq 0} \|U_n(x)\|_{\infty}$  est convergente.

**Definition 4.** On dit que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$  converge **normalement** sur  $I$  si la série  $\sum_{n \geq 0} \|U_n(x)\|_{\infty}$  est convergente.

## Exercice 2

### Exercice 2.1.a

Calculons  $\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right|$ .

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} \frac{x^{n+2}}{n+2}}{(-1)^n 2^n \frac{x^{n+1}}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -2x \frac{n+1}{n+2} \right| = |-2x|$$

### Exercice 2.1.b

Calculons  $\left| \frac{f'_{n+1}(x)}{f'_n(x)} \right|$ . avec  $f'_n(x) = (-1)^n 2^n x^n$ .

$$L' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} x^{n+1}}{(-1)^n 2^n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |-2x| = |-2x|$$

### Exercice 2.1.c

D'après le critère d'Alembert, la série de terme générale  $|f_n|$  converge normalement si  $\left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| < 1$ . Donc, il faut trouver  $x$  tel que  $|-2x| < 1$ , cela fait  $x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  donc pour tous  $[-a, a]$  avec  $a \in [0, \frac{1}{2}[$

## Exercice 2.2

Les 2 séries ne convergent pas car  $x = \pm \frac{1}{2}$  car ces valeurs ne vérifient pas le critère d'Alembert. ???

## Exercice 2.3

Sur  $x \in [0, \frac{1}{2}[$ , la fonction  $f_n(x) = 2^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  est décroissante et tend vers 0. La série numérique  $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$  est une série alternée. En utilisant, le théorème du reste on a:

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k \geq n+1} f_k(x) \right| \leq f_{n+1}(x)$$

Donc

$$f_{n+1}(x) = 2^{n+1} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{(2x)^{n+2}}{2(n+2)}$$

Pour  $x \in [0, \frac{1}{2}[$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2x)^{n+2}}{2(n+2)} = 0$$

Donc la série converge uniformément.

## Exercice 2.4

Pour  $a \in ]0, \frac{1}{2}[$ , Sur le domaine  $[-a, 0[$ , on a

$$\left| (-1)^n 2^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| = \left| (-1)^n \frac{(2x)^{n+1}}{2(n+1)} \right| < \left| (-1)^n \frac{(2a)^{n+1}}{2(n+1)} \right| = \frac{(2a)^{n+1}}{2(n+1)}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2a)^{n+1}}{2(n+1)} = 0$$

Donc, la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[-a, 0[$ , pour  $a \in [0, \frac{1}{2}]$ , comme elle convergence également sur le domaine  $[0, \frac{1}{2}]$ , elle converge sur  $[-a, \frac{1}{2}]$ .

## Exercice 2.5

QED