Exercice 1

Exercice 2

Exercice 2.1

$$\langle u_1|u_1\rangle = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} + \frac{2}{3} * \frac{2}{3} + \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1$$

$$\langle u_1|u_2\rangle = \frac{1}{3} * \frac{2}{3} + \frac{2}{3} * \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{-4}{9} + \frac{2}{9} = 0$$

$$\langle u_1|u_3\rangle = \frac{1}{3} * \frac{2}{3} + \frac{2}{3} * \frac{1}{3} + \frac{2}{3} * \frac{-2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{-4}{9} = 0$$

$$\langle u_2|u_2\rangle = \frac{2}{3} * \frac{2}{3} + \frac{-2}{3} * \frac{-2}{3} + \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

$$\langle u_2|u_3\rangle = \frac{2}{3} * \frac{2}{3} + \frac{-2}{3} * \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \frac{-2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{-2}{9} + \frac{-2}{9} = 0$$

$$\langle u_3|u_3\rangle = \frac{2}{3} * \frac{2}{3} + \frac{1}{3} * \frac{1}{3} + \frac{-2}{3} * \frac{-2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 1$$

Exercice 2.2

$C = (u_1, u_2, u_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, si:

- tous les u_i sont unitaires. Un vecteur u est unitaire si $||u|| = \sqrt{\langle u|u\rangle} = 1$. À la question 1, nous avons montré que $\langle u_1|u_1\rangle = \langle u_2|u_2\rangle = \langle u_3|u_3\rangle = 1$. Donc tous les u_i de C sont unitaires.

- C est orthogonale dans $\mathbb{R}^3$, si $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i < j \implies \langle u_i|u_j\rangle = 0$. À la question 1, nous avons montré que $\langle u_1|u_2\rangle = \langle u_1|u_3\rangle = \langle u_2|u_3\rangle = 0$. Donc C est orhtogonal.

Par conséquent, C est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.3

On exprime le vecteur x dans la base $\mathcal{C}$ comme

$$x = \begin{pmatrix} \langle x|u_1\rangle \\ \langle x|u_2\rangle \\ \langle x|u_3\rangle \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.\frac{1}{3} + 1.\frac{2}{3} + 0.\frac{2}{3} \\ 1.\frac{2}{3} + 1.\frac{-2}{3} + 0.\frac{1}{3} \\ 1.\frac{2}{3} + 1.\frac{1}{3} + 0.\frac{-2}{3} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Exercice 3

La famille (y_1, y_2) orthogonale associée aux vecteurs x_1 et x_2 de $\mathbb{R}^2$ est contruite pa récurrence

$$y_1 = \frac{x_1}{||x_1||}$$

Supposons que la famille $(y_1, ...y_{n-1})$ soit construite.

$$y_n = \frac{x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n | y_k \rangle y_k}{||x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n | y_k \rangle y_k||}$$

Donc

$$y_1 = \frac{x_1}{||x_1||} = \frac{x_1}{\sqrt{\langle x_1 | x_1 \rangle}} = \frac{x_1}{\sqrt{1.1 + (-1).(-1)}} = \frac{x_1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Et

$$y_2 = \frac{x_2 - \langle x_2 | y_1 \rangle y_1}{||x_2 - \langle x_2 | y_1 \rangle y_1||}$$

$$x_2 - \langle x_2 | y_1 \rangle y_1 = x_2 - (1.\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.\frac{-1}{\sqrt{2}}) y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$||x_2 - \langle x_2 | y_1 \rangle y_1|| = || \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} || = \sqrt{\frac{1}{2} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$y_2 = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

QED