

Rappel de cours

Travail

- La composante de la force d'un point M , $\vec{F}(M)$ sur l'axe O_x est donnée par le produit scalaire $f(x) = \vec{F}(M) \cdot \vec{i}$.
- Le travail d'une force \vec{F} sur un segment \overrightarrow{AB} est donné par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot \vec{i} dx = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx$$

- On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point A et B .

$$\forall A, B, C, W_{A \rightarrow B} \vec{F} = W_{A \rightarrow C} \vec{F} + W_{C \rightarrow B} \vec{F}$$

- Dans le cas où le chemin est rectiligne, si une force est conservatrice alors l'énergie potentielle associée à la force \vec{F} est notée $E_p(x)$ est définie par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot \vec{i} dx = E_p(x_b) - E_p(x_a)$$

- Le travail du poids $\vec{P} = m\vec{g}$ sur le segment \overrightarrow{AB} est $W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mg(z_b - z_a) = -mgh$.
- Le travail de la force de rappel élastique d'un ressort de raideur k , $\vec{F} = -k.x\vec{i}$ est $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -\frac{1}{2}k(x_a^2 - x_b^2)$.

Énergie

- L'énergie mécanique d'un système $E_m = E_c + E_p$ avec E_c l'énergie cinétique qui dépend de la masse et de la norme de la vitesse du système physique étudié et de l'énergie potentielle E_p qui correspond aux forces exercées sur le système.
- L'énergie cinétique du système $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
- L'énergie potentielle qui correspond à l'ensemble des forces conservatives qui s'exercent sur le système, $E_p(B) - E_p(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{conservatives})$
- $E_m(B) - E_m(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{non conservatives})$

Puissance

- La puissance P représente l'énergie transférée uniformément (ie. le travail) pendant une unité de temps, $P = \frac{W}{\Delta t}$.
- $1 W = 1 J.s^{-1} = 1 N.m.s^{-1} = 1 kg.m^2.s^{-3}$

Exo 4.1.1

L'électron est soumis à la force gravitationnelle. Donc $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. On néglige l'énergie de la force gravitationnelle devant celle de l'énergie cinétique. On a $E_m = \frac{1}{2}mv^2 = 18 keV$, donc $v = \sqrt{\frac{2 \cdot 18 keV}{m}}$ et $m = 9.10 \cdot 10^{-31} kg$, $18 keV = 2.88 \cdot 10^{-12}$.

Exo 4.1.2

Il faut monter une masse de $m = 500 + 5 * 70 = 850 \text{ kg}$ à une vitesse de $v = 25/60 = 0.41 \text{ m/s}$. La puissance nécessaire est $P = m.g.v = 850 * 9.81 * 0.41 = 3418 \text{ Watt}$.

En l'absence de frottements la puissance nécessaire pour lever la cabine d'ascenseur est égale à la puissance fournie par le moteur. Le poids est résistante, celle du moteur est motrice.

v On a $P = \frac{W}{\Delta_t}$, donc $W = P * \Delta_t = 3418 * 60 = 205 \text{ kJ}$.

Exo 4.1.3

Q1

TWh représente des $10^{12}Wh$.

Q2

On a $1W = 1J/s$. On produit $429.10^{12}Wh$ pour une année, donc on a produit $\frac{429.10^{12}}{24*365.25} = 48.10^9 W$. Ce qui fait $48.10^9 * (24 * 365.25 * 3600) = 1.510^{18} J$.

Q3

La puissance électrique moyenne d'un réacteur est de $\frac{48.10^9}{58} = 0.82 MW$.

Exo 4.2

Q1

Le travail accompli par la force est $\vec{F} \cdot \vec{AB}$

Q2

On a $E_m = E_c + E_p$. L'énergie du système E_m est conservée. Donc $E_{c0} + E_p = E_{cf} + E_{pf}$ avec $E_{pf} = 0$ car aucune force ne s'exerce sur la masse. Donc l'accroissement de l'énergie cinétique est $E_{cf} - E_{c0} = E_p$.

Q3

La puissance moyenne développé est $P = \frac{\Delta W}{\Delta_t} = \frac{E_p}{T} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{AB}}{T}$.

Exo 4.2.3

Q1.a

3 forces s'exercent sur la masse m ; la force de la pesanteur (verticale) \vec{P} , la force de réaction \vec{R} (perpendiculaire au plan incliné) et la force de frottement statique \vec{f} (parallèle au plan incliné). Comme la masse ne bouge pas, la somme des 3 forces est nulle.

On définit un repère orthonormé centré sur la masse m et parallèle au plan incliné. Dans ce repère, les 3 forces ont les coordonnées:

$$\begin{cases} P_x = -m.g.\sin(\beta) & R_x = 0 & f_x = \|\vec{f}\| \\ P_y = -m.g.\cos(\beta) & R_y = \|\vec{R}\| & f_y = 0 \end{cases}$$

Donc, on a $\|\vec{R}\| = m.g.\cos(\beta)$ et $\|\vec{f}\| = m.g.\sin(\beta)$.

Q1.b

Le coefficient de frottement statique k_s peut être déterminé pour l'angle minimum du plan incliné β_{min} faisant bouger la masse m .

$$k_s = \frac{\overrightarrow{f_{max}}}{\overrightarrow{R}}$$

$$k_s = \frac{-m.g.\sin(\beta_{min})}{-m.g.\cos(\beta_{min})}$$

$$k_s = \tan(\beta_{min})$$

Q1.c

Ne marche pas pour $\beta = 60^\circ$. Mais $\tan(6^\circ) = 0.1$.

Q2.a

Le travail $W_{C \rightarrow D} = W_{C \rightarrow D}(\overrightarrow{f'}) + W_{C \rightarrow D}(\overrightarrow{R}) + W_{C \rightarrow D}(\overrightarrow{P})$. On a

$$\begin{cases} W_{C \rightarrow D}(\overrightarrow{R}) = 0 \\ W_{C \rightarrow D}(\overrightarrow{f'}) = \overrightarrow{f'} \cdot l = -k_d \cdot m \cdot g \cdot \cos(\beta) \cdot l \\ W_{C \rightarrow D}(\overrightarrow{P}) = -m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\beta) \end{cases} \quad \text{La force } \overrightarrow{R} \text{ est toujours perpendiculaire au déplacement.}$$

$$\text{Donc, } W_{C \rightarrow D} = m \cdot g \cdot l \cdot (\sin(\beta) - k_d \cdot \cos(\beta)).$$

Q2.b

Le travail $W_{D \rightarrow E} = W_{D \rightarrow E}(\overrightarrow{f'}) + W_{D \rightarrow E}(\overrightarrow{R}) + W_{D \rightarrow E}(\overrightarrow{P})$. On a

$$\begin{cases} W_{D \rightarrow E}(\overrightarrow{R}) = 0 \\ W_{D \rightarrow E}(\overrightarrow{f'}) = \overrightarrow{f'} \cdot l' = -k_d \cdot m \cdot g \cdot l' \\ W_{D \rightarrow E}(\overrightarrow{P}) = -m \cdot g \cdot h = 0 \end{cases} \quad \text{La force } \overrightarrow{R} \text{ est toujours perpendiculaire au déplacement.}$$

$$\text{Donc, } W_{C \rightarrow D} = -k_d \cdot m \cdot g \cdot l'.$$

Q2.c

Les forces étant toutes conservatives on a $E_m = W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow E} = 0$

$$m \cdot g \cdot l \cdot (\sin(\beta) - k_d \cdot \cos(\beta)) - k_d \cdot m \cdot g \cdot l' = 0$$

$$l \cdot (\sin(\beta) - k_d \cdot \cos(\beta)) - k_d \cdot l' = 0$$

$$(\sin(\beta) - k_d \cdot \cos(\beta)) - k_d \frac{l'}{l} = 0$$

$$\sin(\beta) - k_d \cdot \cos(\beta) - k_d \cdot r = 0$$

$$\sin(\beta) - k_d(r + \cos(\beta)) = 0$$

$$k_d = \frac{\sin(\beta)}{r + \cos(\beta)}$$

Q2.d

On a

$$l' = \frac{l \cdot (\sin(\beta) - k_d \cdot \cos(\beta))}{k_d}$$

$$\text{Donc } l' = 5 \frac{\sin(6^\circ) - 0.05 \cos(6^\circ)}{0.05} = 5.48m.$$