Rappel de cours

Definition 1. Soit F un sous-espace vectoriel de E, l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à F est appelé le complément orthogonal de F (ou orthogonal de F) et est noté $F^\perp$:

$$F^\perp = \{u \in E, u \perp w \forall w \in F\}$$

Exercice 3

Exercice 3.1

$$P_u(v) =< u, v > \frac{u}{\|u\|^2}$$

Exercice 3.2

Construction d'une base $Vect(u, v')$ orthogonale d'une base $Vect(u, v)$. On construit le vecteur $\overrightarrow{v'}$ dans $Vect(u, v)$ sous la forme $v+\lambda u$ de facon à avoir $< u, v' >= 0$ (procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt).

$$< u, v + \lambda u >=< u, v > + < u, \lambda u >=< u, v > +\lambda < u, u >=< u, v > +\lambda\|u\|^2$$

Donc $\lambda = -\frac{<u,v>}{\|u\|^2}$ et $v' = v - \frac{<u,v>}{\|u\|^2} u = v - P_u(v)$.

Exercice 3.2

Exercice 4

Exercice 4.1

On utilise le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, en construisant par récurence la base orthogonale de F. On note $F' = Vect(u'_1, u'_2, u'_3)$ la base orthogonale à F. On commence par prendre $u'_1 = u_1$. Donc $u'_1 = (-1, 2, 0, 2)$.

On a ensuite $u'_2 = u_2 - \frac{<u_2,u'_1>}{\|u'_1\|^2} u'_1$ avec $< u_2, u'_1 >= 0$ et $\|u'_1\|^2 = 9$ donc $u'_2 = (0, 2, 1, -2) - \frac{0}{9}(-1, 2, 0, 2) = (0, 2, 1, -2)$.

On a ensuite $u'_3 = u_3 - \frac{<e_3,u'_1>}{\|u'_1\|^2} u'_1 - \frac{<e_3,u'_2>}{\|u'_2\|^2} u'_2$ Avec $< e_3, u'_1 >= 1$, $\|u'_1\|^2 = 9$, $< e_3, u'_2 >= 3$ et $\|u'_2\|^2 = 9$ donc $u'_3 = (1, 1, 1, 0) - \frac{1}{9}(-1, 2, 0, 2) - \frac{3}{9}(0, 2, 1, -2) = (\frac{10}{9}, \frac{1}{9}, \frac{6}{9}, \frac{4}{9})$.

Exercice 4.2

On a $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ et $\dim(F) = 3$ donc $\dim(F^\perp) = 4 - 3 = 1$. On cherche donc un vecteur $w = (x, y, z, t)$ tel que $w \perp u'1$, $w \perp u'2$,$w \perp u'3$.

$$\begin{cases} < w, u'_1 >= 0 \\ < w, u'_2 >= 0 \\ < w, u'_3 >= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2y + 2t = 0 \\ 2y - 1z - 2t = 0 \\ 10x + 1y + 6z + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2y + 2t = 0 \\ 2y - 1z - 2t = 0 \\ 21y + 6z + 24t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2y + 2t = 0 \\ 2y - 1z - 2t = 0 \\ 33z + 90t = 0 \end{cases}$$

Donc $F^\perp = \{(30, 8, -30, 11)\}$.

Exercice 4.3

On cherche une application linéaire $\varphi(x)$ tel que $F = Ker(\varphi(x))$. On sait que $Ker(f) = \{u \in E, f(u) = 0\}$. On sait aussi que lorsque 2 vecteurs u et v sont orthogonaux alors $< u, v >= 0$. Si on choisit $\varphi(x)$ l'application qui calcule le produit vectoriel par rapport à w, alors on a $Ker(\varphi(x))$ qui est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à w. Mais cet ensemble est F car $w = F^\perp$. Donc $\varphi(x) =< x, w >$.

Exercice 2

Exercice 2.1

Une isométrie est une application lineáire qui conserve le produit scalaire. On a $(u+v)^2 =< u,u > +2 < u,v > + < v,v >$. donc $2 < u,v >= \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$ Donc $2 < f(u), f(v) >= \|f(u+v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2 = \|f(u)+f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2$. Comme l'application est une isométrie on a $\|u\| = \|f(u)\|$. Donc

$$< f(u), f(v) >= \|f(u)+f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2 = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 = 2 < u,v >$$

Maintenant la preuve. Une application linéaire converve le produit scalaire ssi $< f(u), f(v) >=< u,v >$. Une application est non inversible ssi $\forall u, f(f(u)) \neq u$ (ou $\forall x, f(f(x) \neq Id(x)))$. Calculons $< f(f(u)), f(f(v)) >$ si l'application linéaire n'est pas inversible on a $< u', v' >=< u,v >$ avec $u' \neq u$ et $v' \neq v$. Donc $\|u'\|.\|v'\|.\cos(u',v') = \|u\|.\|v\|.\cos(u,v)$. Vrai rien n'empèche d'avoir une application qui vérifie cette equation.

Exercice 2.2

Une isométrie conserve les distances. La rotation autour d'un point concerve également mais n'est pas une réflexion. Donc toutes les isométrie ne sont pas des réflexions.

Exercice 3

Exercice 3.1

Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Une réflexion est une isométrie donc elle conserve les distances. Une réflexion vectorielle par rapport á une droite orthogonale au vecteur k s'exprime comme

$$s(x) = x - 2\frac{< x|k >}{\|k\|^2}k$$

$$s(u) = u - 2\frac{< u|k >}{\|k\|^2}k = v$$

donc

$$u - v = 2\frac{< u|k >}{\|k\|^2}k$$

Ceci donne la direction de k. L'axe de réflexion est orthogonale à k.

Exercice 4

Exercice 4.1

$$u'_1 = u_1 = (1,1,-1,-1)$$

$$u'_2 = u_2 - \frac{< u_2, u'_1 >}{< u'_1, u'_1 >}u'_1$$

Avec $u_2 = (1,-1,0,0)$, $< u_2, u_1 >= 0$ donc $u'_2 = u_2 = (1,-1,0,0)$

$$u'_3 = u_3 - \frac{< u_3, u'_1 >}{< u'_1, u'_1 >}u'_1 - \frac{< u_3, u'_2 >}{< u'_2, u'_2 >}u'_2$$

Avec $u_3 = (4,0,-1,-3)$, $< u_3, u'_1 >= 8$, $< u'_1, u'_1 >= 4$, $< u_3, u'_2 >= 4$, $< u'_2, u'_2 >= 2$ donc

$$u'3 = (4,0,-1,-3) - \frac{8}{4}(1,1,-1,-1) - \frac{4}{2}(1,-1,0,0) = (0,0,1,-1)$$

Une base orthogonale de $F = \{(1,1,-1,-1),(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$

Exercice 4.2

Projection orthogonale sur orthogonal de F est définie par:

$$e_4' =< e_4, u_1' > u_1' + < e_4, u_2' > u_2' + < e_4, u_3' > u_3'$$

Avec $< e_4, u_1' >= -1$, $< e_4, u_2' >= 0$, $< e_4, u_3' >= -1$, donc

$$e_4' = -1(1, 1, -1, -1) + 0(1, -1, 0, 0) - 1(0, 0, 1, -1) = (-1, -1, 0, 2)$$

$$\begin{cases} < w, u_1' >= 0 \\ < w, u_2' >= 0 \\ < w, u_3' >= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x - y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x = y \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ x = y \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z \\ x = y \\ z = t \end{cases}$$

La vecteur $w = (1, 1, 1, 1)$ est dans $F^\perp$ comme $\dim(F^\perp) = \dim(\mathbb{R}^4) - dim(F) = 4 - 3$ on a $F^\perp = Vect(w)$.

Exercice 4.3

Voir exercice 4.3 ci-dessus.