Rappel de cours

Une matrice $n \times n$ A est diagonalisable $(A = PDP^{-1}0$ si:

- ullet Elle a n vecteurs propres linéairement indépendants, condition pour avoir une matrice P formée des vecteurs propores en colonne qui est inversible.
- Elle a n valeurs propres distinctes, car n valeurs propres génèrent n vecteurs propres linéairement indépendants
- $\sum dim \ E_{sp_n}(A) = n$
- pour chaque valeur propre sp, on a $dim\ E_{sp}(A)=multiplicite\ sp$. La multiplicité de sp le nombre de racine de sp.
- si $\chi_A(X) = P(X)$ et P(X) est un polynome scindé (ie $P(X) = C(X A_1)(X A_2) \dots (X A_{m-1})(X A_m)$).
- si $\chi_A(X) = P(X)$ et P(A) = 0.

Exercice 3

Exercice 3-e

On a

$$e_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (n-1) \cdot n} < \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots 1 = \frac{2}{n^2}$$

On sait que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge $(\sum_0 \infty \frac{1}{n^2}$ converge). En apppliquant le Théorème de Riemann, on déduit que la suite de terme général e_n converge.

Exercice 3-f

On a

$$f_n = \frac{1}{n^2 \ln n} < \frac{1}{n^3}$$

On sait que la série de terme général $\frac{1}{n^3}$ converge $(\sum_0 \infty \frac{1}{n^3}$ converge). En apppliquant le Théorème de Riemann, on déduit que la suite de terme général f_n converge.

Exercice 3-g

On a

$$f_n = \frac{2^n + 3^n + n^4}{n5^n + 7n^7 + 2}$$

Exercice 3-h

On a

$$f_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n = \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

QED