Rappel de cours

Definition 1. La relation xRy est une relation d'équivalence sur l'ensemble E ssi:

- $\forall x \in E, xRx$
- $\forall x, y \in E, xRy \Leftrightarrow yRx$
- $\forall x, y, z \in E, xRy \wedge yRz \Leftrightarrow xRz$

Exercice 1

Exercice 1.1

- $\forall x \in \mathbb{N}, x \sim x \Leftrightarrow x = 2^k x$ est vrai pour $k = 0$
- $\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \sim y \Rightarrow y \sim x) \Leftrightarrow (y = 2^{k_1} x \Rightarrow x = 2^{k_2} y)$ est vrai pour $k_2 = -k_1$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, (x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z) \Leftrightarrow (y = 2^{k_1} x \wedge z = 2^{k_2} y \Rightarrow z = 2^{k'} x)$ est vrai pour $k' = k_1 + k_2$

Exercice 1.2

Admettons qu'une classe d'équivalence a au moins 2 nombres impairs, donc $\exists k \in \mathbb{N}, (2n+1) = 2^k(2m+1)$. La seule valeur de k possible est $k = 0$ car pour $k > 0$ un coté est impair et l'autre est pair et pour $k < 0$, un coté n'est pas un entier. Pour $k = 0$ on a $(2n+1) = 2^0(2m+1)$, donc $n = m$. Si il y a un nombre impair, il est unique.

Chaque nombre impair est dans une classe d'équivalence car pour tout $a = 2n+1 \in E$, soit $2a \in E$, donc $a \sim 2a$, soit $2a \notin E$ alors $a \sim a$.

L'ensemble E contient n nombres impairs, donc il y a n classes d'équivalence.

Exercice 1.3

Comme $|A| = n + 1$ alors il y a au moins deux éléments de A qui sont dans la même classe d'équivalence (car E contient n classes d'équivalence). Si ils sont dans la même classe alors $a \sim b$ existe.

Si on a $a \sim b$, alors $a = 2^k b$. Lorsque $k \geq 0$, a est un multiple de b, lorsque $k < 0$, b est un multiple de a.

Exercice 2

On a $pgcd(a, b) = 1$, Soit $d = pgcd(a+b, a-b)$, donc $a + b = n.d$ et $a - b = n' * d$.

$$2a = (a+b) + (a-b) = n.d + n'.d = d(n+n')$$

$$2b = (a+b) - (a-b) = n.d - n'.d = d(n-n')$$

Donc d divise le $pgcd(2a, 2b)$ et $pgcd(2a, 2b) = 2$ car a et b sont premiers entre eux. Il existe que 2 nombres qui divisent 2: 1 ou 2.

$$pgcd(a+b, a-b) = 1 \text{ ou } 2$$

Exercice 3

Équations diophantiennes du premier degré. 1. Trouver une solution particulière de $15x - 22y = 1$; $x = 3, y = 2$. Donc $15 * 3 - 22 * 2 = 1$. En soustraiant les 2 ́quations on a

$$15x - 22y - (15 * 3 - 22 * 2) = 0, 15(x-3) - 22(y-2) = 0, 15(x-3) = 22(y-2)$$

2. Les entiers 15 et 22 sont premiers entre eux donc $22|(x-3)$, donc $x = 22k + 3$.

$$15(x-3) = 22(y+2), 15(22k+3-3) = 22(y+2), y = 15k + 2$$

La solution est $x = 22k + 3$ et $y = 15k + 2$.

Exercice 4

$$15x + 24y = 5, 3(5x + 8y) = 5$$

. Pas de solution car 5 n'est pas un multiple de 3.

Exercice 5

Preuve par récurrence. Soit la suite $a_{n+1} = 10a_n + 1$ et $a_0 = 1$. La suite a_n représente les nombres $1, 11, 111, 111111 \dots 1$. Vrai pour a_0 avec $n = 1, m = 1$. Supposons que $a_n \mod n.m = 0$, quelles sont les conditions pour que $a_{n+1} \mod n.m' = 0?$. On a $a_n \mod nm = 0$ donc $\exists k, a_n = k.n.m$.

$$a_{n+1} \mod n.m' = (10a_n + 1) \mod n.m' = (10k.n.m + 1) \mod n.m'$$

Pour que $a_{n+1} \mod n.m' = 0?$ il faut $\exists k', a_{n+1} = k'.n.m'$ donc $k'.n.m' = 10k.n.m + 1$.

Sous quelles conditions est-ce vrai?
Si $n = 2l$ (ie $2|n$), alors $2k'.l.m' = 20k.l.m + 1$, il n'existe aucune valeur de k, m, k', m' car un coté est pair et l'autre impair.
Si $n = 5l$ (ie $5|n$), alors $5k'.l.m' = 50k.l.m + 1$, il n'existe aucune valeur de k, m, k', m' car un coté se termine par 5 ou 0 et l'autre par 1.

Exercice 6

Il suffit de trouver tous les entiers j, m qui vérifient $31j + 12m = 208$.
Trouver une solution particuliére à l'équation $31j + 12m = 1$, mais 31 et 12 sont premiers entre eux donc $pgcd(12, 31) = 1$. Cela revient donc à trouver l'identité de Bezout $pgcd(12, 31) = 1 = 31j + 12m$. Appliquons l'algorithme pour trouver j et m. Dans un premier temps calcul du $pgcd(31, 12)$

$$31/12 = 2 \text{ R } 7, 12/7 = 1 \text{ R } 5, 7/5 = 1 \text{ R } 2, 5/2 = 2 \text{ R } 1$$

En remontant en arrière on a

$$1 = 5 - 2 * 2$$

$$2 = 7 - 5 * 1$$

$$5 = 12 - 7 * 1$$

$$7 = 31 - 12 * 2$$

En substituant on a

$$1 = 5 - 2(7 - 5 * 1) = 5 - 2 * 7 + 5 * 2$$

$$1 = 5 * 3 - 2 * 7 = 3(12 - 7 * 1) - 2 * 7$$

$$1 = 3 * 12 - 7 * 3 - 2 * 7 = 3 * 12 - 5 * 7$$

$$1 = 3 * 12 - 5(31 - 12 * 2) = 3 * 12 - 5 * 31 + 12 * 10$$

$$1 = 13 * 12 - 5 * 31$$

On a $j = -5$ et $m = 13$. Donc

$$308 = 308(31.(-5) + 12.13) = 31j + 12m$$

$$31(j + 308.5) = 12(13.308 - m)$$

Les entiers 12 et 31 sont premiers entre eux donc $12|j + 308.5$ et $12k = j + 308.5$

$$31(12k - 308.5 + 308.5) = 12(13.308 - m), 31.12k = 12(13.308 - m), 31k = 13.308 - m, m = 13.308 - 31k$$

Il faut trouver le k tel que $1 \leq m \leq 12$. $k = 129$, et $j = 8$, $m = 5$. Donc il est né le 8 mai.

Exercice 7

Exercice 7.1

$1995 = 3 * 5 * 7 * 19$ et $2975 = 5^2 * 7 * 17$, donc $pgcd(1995, 2975) = 5 * 7 = 35$

$2975 = 1.1995 + 980,\ 1995 = 2.980 + 35,\ 980 = 40.35 + 0$ donc $pgcd(2975, 1995) = pgcd(1995, 980) = pgcd(980, 35) = 35$

Exercice 7.2

$n.k + 8 = 2003$ et $n * k' + 27 = 3002$. donc $nk = 1995$ et $nk' = 2975$ et $pgcd(1975, 2975) = 35$.
Ceci fait $n.k = 35 * 57$ et $n.k' = 35 * 85$. Donc, la solution est $n = 35$.

Exercice 8

On cherche c tel que $11c + 1 = x^2$. Ceci donne l'équation déophantienne de degré 2: $x^2 - 11c - 1 = 0$. La solution est $x = 22k + 21$ et $c = 44k^2 + 84k + 40 = 2(22k^2 + 42k + 20)$. Il n'existe pas de nombre premier c.

QED