Exercice 1

La fonction $f(x)$ est paire ssi $\forall x, f(x) = f(-x)$, La fonction $f(x)$ est impaire ssi $\forall x, f(x) = -f(-x)$.

Soit une fonction $f(x)$,

$$f(x) = \frac{2f(x)}{2} = \frac{2f(x) + f(-x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Soit la fonction $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, la fonction $f_1(x)$ est paire car $f_1(-x) = \frac{f(-x)+f(--x)}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_1(x)$.
Soit la fonction $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, la fonction $f_2(x)$ est impaire car $f_2(-x) = \frac{f(-x)-f(--x)}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -f_2(x)$.

Pour toute fonction $f(x)$, on a trouvé une fonction $f_1(x)$ paire et une fonction $f_2(x)$ impaire tel que $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Buffon TD1 - Exercice 5

Vrai pour u_0? $u_0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$, oui.
Admettons que $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$, calculons u_{n+1}.

$$u_{n+1} = u_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Vrai pour v_0? $v_0 = \frac{0(0+1)(2.0+1)}{6} = 0$, oui.
Admettons que $v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, calculons v_{n+1}.

$$v_{n+1} = v_n + n + 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Vrai pour w_0? $w_0 = \left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2 = 0$, oui.
Admettons que $w_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, calculons w_{n+1}.

$$w_{n+1} = w_n + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$w_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2$$

Buffon TD1 - Exercice 6

Preuve par récurrence, suppposons $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies n! \geq 2^n$, trouvons un entier n pour lequel $n! \geq 2^n$ et vérifions la propriét'e pour $n+1$ avec l'hypothèse de récurence $n! \geq 2^n$. Prenons $n = 4$, on a $4! = 24 \geq 16 = 2^4$.

$$\begin{aligned} (n+1)! = n!(n+1) &\geq 2^n(n+1) \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= n2^n + 2^n > 2^{n+1}, \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

Pour $n_0 \geq 2$ la proposition est vraie. Donc il existe un n_0 (par exemple $n_0 = 2$) pour lequel la proposition est vraie.

Buffon TD1 - Exercice 7

$u_0 = 1, u_1 = u_0 = 1, u_2 = u_0 + u_1 = 2, u_3 = u_0 + u_1 + u_2 = 4, u_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 8.$

Vrai pour u_0?, $u_0 = 1 \leq 2^0 = 1$, Vrai.
Hypothèse de récurrence: $u_n \leq 2^n$, calculons u_{n+1}.

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = u_n + u_n = 2u_n \leq 2.2^n = 2^{n+1}$$

La proposition est vraie.

Buffon TD1 - Exercice 8

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \implies \left(\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}\right)\right)$$

Pour $n = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \implies \left(x^0 + \frac{1}{x^0} \in \mathbb{Z}\right)\right)$ qui est vrai.
Supposons la propriété vraie au rang $k < n$, calculons le rang n.

$$\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + x^{n-2} + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n - 2} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$$

Donc

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$$

Par hypothèse de récurence, on a $\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) \in \mathbb{Z}$ et $\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) \in \mathbb{Z}$. Donc $\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \in \mathbb{Z}$ car la soustraction de deux nombres dans $\mathbb{Z}$.

Exercice Cauchy

Solution de l'équation différentielle de la forme $(y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ est $y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_1(t)$ avec $A(t)$ une primitive de la fonction $a(t)$ et $y_1(t)$ est une solution particulière de l'équation.

Pour $y'(t) - \frac{y(t)}{t^2} = e^{\frac{1}{t}} \sin(t)$, donc $a(t) = \frac{1}{t^2}$ et $b(t) = e^{\frac{1}{t}} \sin(t)$. On a $A(t) = -\frac{1}{t}$. Recherchons une solution particulière de la forme $y_1(t) = \lambda(t)a^{A(t)}$ avec $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$.

$$\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)} = e^{\frac{1}{t}} \sin(t)e^{-\frac{1}{t}} = sin(t)$$

donc $\lambda(t) = -\cos(t)$ et $y_1(t) = -\cos(t)e^{-\frac{1}{t}}$
Par conséquent

$$y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_1(t) = \lambda e^{-\frac{1}{n}} - \cos(t)e^{-\frac{1}{t}} = e^{-\frac{1}{n}}(\lambda - cos(t))$$

Calculons l'unique solution $y(2\pi) = e^{-\frac{1}{2\pi}}(\lambda - \cos(2\pi)) = \lambda e^{-\frac{1}{2\pi}} = 0$.
Donc $\lambda = 0$ et l'unique solution est

$$y(t) = -\cos(t)e^{-\frac{1}{t}}$$

QED