Rappel de cours

Definition 1. Soit $\mathscr{E}$ un K-espace vectoriel. Une partie F de $\mathscr{E}$ est appele un sous-espace vectoriel si :

- $0_E \in F$,
- $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$,
- $\lambda.u \in F$ pour tout $\lambda \in K$ et tout $u \in F$.

Definition 2. Une famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de E est une famille libre ou linéairement indépendante si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, cest-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_p = 0$$

Definition 3. Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E. La famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$. Ce qui peut s'écrire aussi :

$$\forall v \in E, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p, v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p$$

Definition 4. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, on définit le noyau de f comme étant le sous-espace vectoriel (sev) de E défini par

$$ker(f) := \{x \in E | f(x) = 0\}$$

On définit l'image de f comme étant le sev de F défini par

$$Im(f) = \{y \in F | \exists x \in E, f(x) = y\}$$

La dimension de $Im(f)$ s'appelle aussi le rang de f et se note $rg(f)$.

Definition 5. Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel de dimension n, et B, B' deux bases de $\mathscr{E}$. On appelle la *matrice de passage* de la base B vers la base B', notée $P_{b,B'}$, la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées du j-ième vecteur de la base B' par rapport la base B.
Dans le cas particulier où B est la base canonique de $\mathscr{E}$, alors la matrice de passe est formée des vecteurs de B'.

Definition 6. Soit

- $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, ume application linéaire
- B, B' deux bases de $\mathscr{E}$
- $P_{B,B'}$, la matrice de passage de B vers B'
- $A = Mat_B(f)$, la matrice de l'application f dans la base B
- $B = Mat_{B'}(f)$, la matrice de l'application f dans la base B'

Alors

$$B = P^{-1} A P$$

Exercice 1

Exercice 1.1

Il faut montrer que $\forall A, B \in S_n, A+B \in S_n$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in S_n, \lambda A \in S_n$. On a $A =^t A$ et $B =^t B$, donc

$$A+B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix} =^t (A+B)$$

et

$$\lambda A = \lambda^t A = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{1n} & \lambda a_{2n} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} =^t (\lambda A)$$

S_n est bien un sev de $M_n(\mathbb{R})$.

Il faut montrer que $\forall A, B \in A_n, A+B \in A_n$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in A_n, \lambda A \in A_n$. On a $-A =^t A$ et $-B =^t B$, donc

$$A+B = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ -b_{12} & 0 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ -b_{1n} & -b_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0+0 & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ -(a_{12}+b_{12}) & 0+0 & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ -(a_{1n}+b_{1n}) & -(a_{2n}+b_{2n}) & \dots & 0+0 \end{vmatrix} = -^t(A+B)$$

et

$$\lambda A = \lambda^t A = \begin{vmatrix} 0 & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{12} & 0 & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -\lambda a_{1n} & -\lambda a_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix} = -^t(\lambda A)$$

A_n est bien un sev de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.2

La famille $F = Vect(E_{11}, E_{22}, E_{12+21})$ est libre ?

$$\lambda_1 E_{11} + \lambda_2 E_{22} + \lambda_3 E_{12+21} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$$

Vrai uniquement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc la famille est libre.

La famille $F = Vect(E_{11}, E_{22}, E_{12+21})$ est génératrice ?

$$\forall a \in S_n, \lambda_1 E_{11} + \lambda_2 E_{22} + \lambda_3 E_{12+21} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Vrai pour $\lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \lambda_3 = a_{12}$. Donc la famille est génératrice.

La famille $G = Vect(E_{12-21}))$ est libre ?

$$\lambda_1 E_{12-21} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Vrai uniquement si $\lambda_1 = 0$. Donc la famille est libre.

La famille $G = Vect(E_{12-21})$ est génératrice ?

$$\forall a \in A_n, \lambda_1 E_{12-21} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{vmatrix}$$

Vrai pour $\lambda_1 = a12$. Donc la famille est génératrice.

Exercice 1.3

Trouver une famille génératrice de S_n.

$$\forall a \in A_n, \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \lambda_i E_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Si on prends toutes les matrices avec que des 0 excepté $\forall i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j, a_{ij} = a_{ji}$. Il y a $k1 = \frac{(n-1)n}{2}$ matrices différentes (sommes des éléments au dessus de la diagonale) et les matrices avec que des 0 excepté $\forall i, 1 \leq i \leq n, a_{ii} = c$. Il y a $k_2 = n$ matrices différentes (nombre d'élémets de la diagonale). Cela est une famille géneratrice. Cette famille est génératrice, elle est également libre car car coefficient n'apparait que sur une cellule, donc il faut qu'il soit tous nul pour avoir $\sum_{i=1}^{k_1+k_2} \lambda_i E_i = 0$.

Trouver une famille génératrice de A_n.

$$\forall a \in A_n, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Si on prends les matrices avec que des 0 et $a_{ij} = -a_{ji}$. Il y a $k = \frac{(n-1)n}{2}$ matrices différentes (sommes des éléments au dessus de la diagonale). En prenant, $\forall i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j, a_{ij} = -aji$. Cette famille est génératrice, elle est également libre car car coefficient n'apparait que sur une cellule, donc il faut qu'il soit tous nul pour avoir $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i = 0$.

Exercice 1.4

On a $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), A +^t A \in S_n$. En effet,

$$A +^t A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+a_{11} & a_{12}+a_{21} & \dots & a_{1n}+a_{n1} \\ a_{12}+a_{21} & a_{22}+a_{22} & \dots & a_{2n}+a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}+a_{n1} & a_{2n}+a_{n2} & \dots & a_{nn}+a_{nn} \end{vmatrix}$$

On a $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), A -^t A \in A_n$. En effet,

$$A -^t A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12}-a_{21} & \dots & a_{1n}-a_{n1} \\ -(a_{12}-a_{21}) & 0 & \dots & a_{2n}-a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -(a_{1n}-a_{n1}) & -(a_{2n}-a_{n2}) & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

et $S_n \cap A_n = \{0\}$. En effet, $A \in S_n \Leftrightarrow A =^t A$ et $A \in A_n \Leftrightarrow -A =^t A$. Donc $S_n \cap A_n = \{A \in M_n(|R), A = -A\}$. La seule matrice qui vérifie est 0.

On a

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), A = \frac{A +^t A}{2} + \frac{A -^t A}{2}$$

Pour résumer, $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), A = B + C$ avec $B = \frac{A+^t A}{2} \in S_n$ et $C = \frac{A-^t A}{2} \in A_n$ et $S_n \cap A_n = \{0\}$ donc $S_n \oplus A_n = M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2

On a $dim(ker)f = 1$ et $rgf = dim(Imf) = 2$ (l'image de f est un plan). D'après le théorème du rang, on a $dim(kerf) + rgf = dim(\mathbb{R}^4) = 4$ ce qui est faux car $1 + 3 \neq 4$.

Exercice 3

Une application linéaire $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est injective ssi son noyau est réduit à $\{0\}$. D'après le théorème du rang, on a $dim(kerv) + rgv = dim(\mathbb{R}^2) = 2$, mais $rgv \leq dim(\mathbb{R}) = 1$ donc $dim(kerv) = dim(\mathbb{R}^2) - rgv \geq 2 - 1 = 1$ Donc $kerv \neq \{0\}$.

Exercice 4

Simple

Exercice 5

Si le dt́erminant de la matrice est égal à 0, alors une seule solution 0_4, sinon il y a une infinité de solutions. Calculons le déterminant de la matrice.

$$Det = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = -1. \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix} + a. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & b & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$= -1.c \begin{vmatrix} x & 0 \\ x & b \end{vmatrix} + a. \left(-1. \begin{vmatrix} x & 0 \\ x & c \end{vmatrix} + b. \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & c \end{vmatrix} \right) = -cbx - axc + abc - abx$$

On a $Det = 0$ lorsque

$$x = \frac{abc}{ab + ac + bc} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Exercice 6

Les vecteurs ne forment pas une famille si ils ne sont pas libre.

$$a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0 \vee a_3 \neq 0$$

$$\begin{cases} 2a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3 & = 0 \\ \mu a_1 + \lambda a_3 & = 0 \\ a_1 + a_2 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 & = -a_2 \\ -\frac{\mu}{\lambda} a_1 & = a_3 \\ 2a_1 - \lambda a_1 & = -\mu a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 & = -a_2 \\ -\frac{\mu}{\lambda} a_1 & = a_3 \\ 2a_1 - \lambda a_1 & = \frac{\mu^2}{\lambda} a_1 \end{cases}$$

$$a_1(2\lambda - \lambda^2 - \mu^2) = 0$$

On cherche $a_1 \neq 0$, donc il faut $2\lambda = \lambda^2 + \mu^2$. C'est le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1. En effet, en faisant un changement de variable $\lambda' = \lambda - 1$ on a

$$2(\lambda' + 1) = (\lambda' + 1)^2 + \mu^2 = \lambda'^2 + 2\lambda' + 1 + \mu^2$$

$$1 = \lambda'^2 + \mu^2$$

qui est le cercle de rayon 1 de centre $(1, 0)$.

QED