

## Exo 1

Rappel de cours:

- Une fonction dérivable est continue, par contre le réciproque n'est pas vraie
- Une fonction est dérivable sur un intervalle si elle est dérivable en tout point de cet intervalle
- Une fonction est dérivable en un point  $a$  si  $\exists l, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$  ou  $\exists l, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$
- une fonction est dérivable sur un intervalle donné si elle est un assemblage de fonctions connues et dérivables sur cet intervalle.

La fonction  $f(x) = |x - \pi| \sin(x)$  est égale à

$$f(x) = \begin{cases} (x - \pi) \sin(x) & x \geq \pi \\ (\pi - x) \sin(x) & x < \pi \end{cases}$$

Les deux parties sont un assemblage de fonctions dérivables sur leur intervalle. Il reste à démontrer si la fonction est dérivable en  $\pi$ .

$$\begin{aligned} & \exists l, \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = l \\ & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{(x - \pi) \sin(x) - (\pi - \pi) \sin(\pi)}{x - \pi} \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(\pi - x) \sin(x) - (\pi - \pi) \sin(\pi)}{x - \pi} \end{cases} \\ & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{(x - \pi) \sin(x)}{x - \pi} \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-(x - \pi) \sin(x)}{x - \pi} \end{cases} \\ & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} -\sin(x) \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction sinus est impaire,  $\sin(-x) = -\sin(x)$ . Donc

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin(-x) \end{cases}$$

on a  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin(-x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin(x)$ . La valeur  $l$  existe donc la fonction  $f$  est dérivable.

La proposition est Vraie.

## Exo 2

Comme  $f$  est dérivable, on peut écrire son développement limité d'ordre 1 en 0;  $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\epsilon(h)$ .

En remplaçant  $h$  par  $3h$  on a  $f(x + 3h) = f(x) + 3hf'(x) + 3h\epsilon(3h)$ .

En soustrayant les 2 formules on a  $f(x + 3h) - f(x + h) = 2hf'(x) + 3h\epsilon(3h) - h\epsilon(h)$ , soit  $\frac{f(x+3h) - f(x+h)}{h} = 2f'(x) + 3h\epsilon(3h) - h\epsilon(h)$ .

On a  $\epsilon(3h) = \epsilon(h)$  par définition.

$$\frac{f(x + 3h) - f(x + h)}{h} = 2f'(x) + 2\epsilon(h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + 3h) - f(x + h)}{h} = 2f'(x)$$

La proposition est Vraie.

### Exo 3

Comme  $f$  est dérivable, on peut écrire son développement limité d'ordre 1 en  $x_0$  est  $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0)$ .

Donc lorsque  $x_0 = 0$ ;  $f(x) - f(0) = f'(0)(x - 0) + (x - 0)\epsilon(x - 0)$

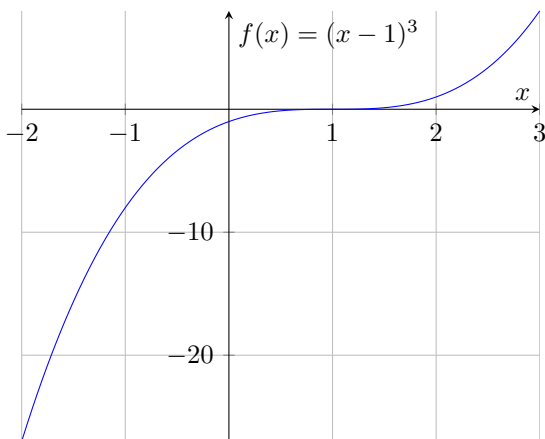
On prend  $f(x) = e^{\sin(2x)}$ . On a  $f(0) = e^{\sin(2 \cdot 0)} = 1$ ,  $f'(x) = 2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$ , donc  $f'(0) = 2$ . Donc  $f(x) = 1 + 2x + x\epsilon(x) \neq 1 + 3x + x\epsilon(x)$ .

La proposition est Fausse.

### Exo 4

Soit  $f(x) = (x - 1)^3$ , la fonction est dérivable  $f'(x) = 3(x - 1)^2$  et  $f'(1) = 0$ . Le point 1 n'est pas un extremum de la fonction sur l'intervalle  $[-2, 3]$ . En effet,  $f(-2) = -27 < f(1) = 0$  donc 1 n'est pas un minimum local et  $f(3) = 8 > f(1) = 0$  donc 1 n'est pas un maximum local.

La proposition est Fausse.



### Exo 5

Soit  $f(x) = |x|$ , la fonction est définie et continue en 0 mais pas dérivable en 0. En effet, si  $f(x)$  est dérivable en  $a$  alors,  $\exists l, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1 \end{cases}$$

La proposition est Fausse.

### Exo 6

La fonction  $\tan^3(x)$  est dérivable sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  car c'est un assemblage de fonctions dérivable sur cette intervalle.

$$(\tan^3(x))' = 3(\tan(x))'\tan^2(x) = 3(1 + \tan^2(x))\tan^2(x) = 3(\tan^2(x) + \tan^4(x))$$

La proposition est Fausse.

## Exo 7

Calculons la dérivée de  $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= x & f'(x) &= 1 \\ g(x) &= \sqrt{1+x^2} & g'(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$h'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

La fonction  $h$  n'a pas de maximum ou minimum si sa dérivée ne peut pas être nulle;  $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \neq 0$ .

$$\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$1 = 0$$

OU La fonction  $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  est strictement croissante. Donc le maximum de  $h(x)$ , si il existe, est la limite quand  $X \rightarrow +\infty$  et le minimum de  $h(x)$ , si il existe, est la limite quand  $X \rightarrow -\infty$ . Remarquons que,  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 1 + x^2$  donc  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < \sqrt{1+x^2}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1$ .

Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $h(x)$  s'approche arbitrairement près de la valeur 1 mais sans jamais atteindre cette valeur. Donc,  $f(x)$  n'admet pas de maximum.

Lorsque  $x \rightarrow -\infty$ ,  $h(x)$  s'approche arbitrairement près de la valeur  $-1$  mais sans jamais atteindre cette valeur. Donc,  $f(x)$  n'admet pas de minimum.

La proposition est Vraie.

## Exo 8

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2\sin(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2\sin(x) = -\infty$ . Donc la fonction n'a pas de minima ou de maxima sur  $\mathbb{R}$ .

La proposition est Fausse.

Note: la dérivée de  $f$  s'annule une infinité de fois. Donc,  $f'(x) = 0$  n'implique pas qu'il existe un maximum ou un minimum.

## Exo 9

Preuve par l'absurde.

Admettons que la fonction  $f$  ne soit pas bornée sur l'intervalle  $[0, 1]$ , donc elle n'admet pas de valeur maximale (resp. minimale) sur l'intervalle  $[0, 1]$ ;  $\exists c \in [0, 1], f(c) = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ) [1].

La fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $[0, 1]$ , donc  $\forall x_0 \in [0, 1], \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$  tel que  $(\forall x \in [0, 1] \cap ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$  [2].

Au point  $c$ , la proposition [2] est fausse, la fonction  $f$  admet une valeur maximale  $M$  (resp. minimale  $m$ ) sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Donc la fonction  $f$  est bornée.

On peut également utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.

La proposition est Vraie.

## Exo 10

Preuve par l'absurde.

Admettons que la fonction  $f$  n'a pas de valeur maximale sur l'intervalle  $[0, 1]$ , donc  $\exists c \in [0, 1], f(c) = +\infty$  [1].

La fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $[0, 1]$ , donc  $\forall x_0 \in [0, 1], \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$  tel que  $(\forall x \in [0, 1] \cap ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$  [2].

Au point  $c$ , la proposition [2] est fausse, la fonction  $f$  admet une valeur maximale sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

On peut également utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.

La proposition est Vraie.

## Exo 11

Preuve par l'absurde.

Soit une fonction  $f$  périodique de période  $p$  et continue.

Admettons que la fonction  $f$  n'a pas de valeur maximale sur l'intervalle  $[0, p]$ , donc  $\exists c \in [0, p], f(c) = +\infty$  [1].

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc également sur l'intervalle  $[0, p]$ , donc  $\forall x_0 \in [0, p], \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$  tel que  $(\forall x \in [0, p] \cap ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$  [2].

Au point  $c$ , la proposition [2] est fausse, la fonction  $f$  admet une valeur maximale sur l'intervalle  $[0, p]$ . Comme la fonction est périodique, on a  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x \% p)$ , et  $x \% p \in [0, p]$ , donc la valeur maximale sur l'intervalle  $[0, p]$  est également la valeur maximale de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

On peut également utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.

La proposition est Vraie.

## Exo 12

Montrons:

$$\forall x, y \in [-1, 1], |x^{2013} - y^{2013}| \leq 2013|x - y|$$

$|x - y| \geq 0$ , donc

$$\forall x, y \in [-1, 1], \frac{|x^{2013} - y^{2013}|}{|x - y|} \leq 2013$$

$$\forall x, y \in [-1, 1], \left| \frac{x^{2013} - y^{2013}}{x - y} \right| \leq 2013$$

$$\forall x, y \in [-1, 1], \left| \sum_{k=0}^{2012} x^k \cdot y^{2012-k} \right| \leq 2013$$

On a  $x, y \in [-1, 1]$ , donc  $x^m, y^m \in [-1, 1]$  et  $x^m \cdot y^m \in [-1, 1]$ . Donc  $\sum_{k=0}^{2012} x^k \cdot y^{2012-k} \in [-2013, 2013]$  et  $|\sum_{k=0}^{2012} x^k \cdot y^{2012-k}| \leq 2013$ .

La proposition est Vraie.

### Exo 13

Partie 1:  $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ?

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\frac{1}{2} < (n+1) - \sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

$$-\frac{1}{2} < n - \sqrt{n(n+1)}$$

$$-\frac{1}{2} < n - \sqrt{n(n+1)} \cdot \frac{n + \sqrt{n(n+1)}}{n + \sqrt{n(n+1)}}$$

$$-\frac{1}{2} < \frac{-n}{n + \sqrt{n(n+1)}}$$

On a  $n > 0$  et  $n(n+1) > n^2$ , donc  $\sqrt{n(n+1)} > n$ ,  $n + \sqrt{n(n+1)} > 2n$  et  $\frac{1}{n + \sqrt{n(n+1)}} < \frac{1}{2n}$ . Donc,  $\frac{-n}{n + \sqrt{n(n+1)}} > \frac{-n}{2n} = \frac{-1}{2}$ .

Partie 2:  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ?

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n+1}\sqrt{n} - n < \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{(n+1)n} - n < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < n - \sqrt{n(n+1)}$$

Vrai car partie 1 est vraie.

La proposition est Vraie.

### Exo 14

Prenons la valeur  $x = -\frac{\pi}{2}$ , on a  $\cos(-\frac{\pi}{2}) - 1 = -1 \not< -\frac{\pi}{2}$ .

La proposition est Fausse.

### Exo 15

La fonction  $\ln$  est strictement croissante, donc  $\frac{\ln a}{\ln b} < 1$  car  $a < b$ . Pour que l'égalité soit vraie, il faut que

$$\frac{a-b}{c \cdot \ln(c)} < 0 \text{ car } e^{\frac{a-b}{c \cdot \ln(c)}} < 1.$$

On a  $a - b < 0$  car  $a < b$ , donc il faut que  $c \cdot \ln(c)$  soit positif. Ceci est vrai lorsque  $c > 1$ .

La proposition est Vraie.

## Exo 16

Rappel de cours:

La fonction  $f$  est de classe  $\mathbb{C}^1$  sur l'intervalle  $I$  si la fonction est dérivable sur  $I$  et que sa dérivée est continue sur  $I$ .

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car c'est un assemblage de fonctions dérivables. Calculons la dérivée de  $f$ .

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 & h'(x) &= 2x \\ g(x) &= \sin(\frac{1}{x}) & g'(x) &= -\frac{1}{x^2} \cos(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

Donc,

$$f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{cases} (x^2)(-\frac{1}{x^2} \cos(\frac{1}{x})) + 2x \sin(\frac{1}{x}) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Il faut maintenant vérifier que la dérivée  $f'(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $x \neq 0$ , la fonction est continue car c'est un assemblage de fonctions continues, pour  $x = 0$ , la fonction est également continue. Il reste à vérifier que la fonction est continue en 0;  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) = 0$ ?

La fonction  $\cos(\frac{1}{x})$  n'a pas de limite en 0.

La proposition est Fausse.