Rappel de cours

k

Exercice 1

Exercice 1.1 pour A

On a

$$\det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & i-\lambda & 2i \\ -1 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix}\right) = (i-\lambda)(\lambda^2+1)$$

Calculons $\det(A-\lambda I)=0$, $(i-\lambda)(\lambda^2+1)=0$, donc $sp(A)=\{i,-i\}$.

Exercice 1.2 pour A

Calculons

$$E_i(A) = ker(A-iI) = ker\left(\begin{vmatrix} 0-i & 0 & 1 \\ 2 & i-i & 2i \\ -1 & 0 & 0-i \end{vmatrix}\right)$$

Cherchons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que

$$\begin{vmatrix} -i & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2i \\ -1 & 0 & -i \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -i\lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 + 2i\lambda_3 & = 0 \\ -\lambda_1 + 0\lambda_2 - i\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Echelonnage

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0\lambda_2 + i\lambda_3 & = 0 (L_1 = L_1 * -i) \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 (L_2 = L_2 + 2iL_2) \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 (L_3 = L_3 + iL_1) \end{cases}$$

Donc, en fixant $\lambda_3 = c_3$ et $\lambda_2 = c_2$ on a $\lambda_1 = -ic_3$

$$ker(A-iI) = \{(-i,0,1),(0,1,0)\}$$

et $\dim(E_i(A) = \dim(ker(A-iI)) = 2$.

Calculons

$$E_{-i}(A) = ker(A+iI) = ker\left(\begin{vmatrix} 0+i & 0 & 1 \\ 2 & i+i & 2i \\ -1 & 0 & 0+i \end{vmatrix}\right)$$

Cherchons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que

$$\begin{vmatrix} i & 0 & 1 \\ 2 & 2i & 2i \\ -1 & 0 & i \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} i\lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 + 2i\lambda_2 + 2i\lambda_3 & = 0 \\ -\lambda_1 + 0\lambda_2 + i\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Echelonnage

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 0\lambda_2 + i\lambda_3 & = 0 (L_1 = L_1 . i) \\ 0\lambda_1 + 2i\lambda_2 + 4i\lambda_3 & = 0 (L_2 = L_2 + 2iL_1) \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 (L_3 = L_1 + iL_3) \end{cases}$$

Donc, en fixant $\lambda_3 = c_3$ on a $\lambda_1 = ic_3$ et $\lambda_2 = -2c_3$

$$ker(A+iI) = \{(i,-2,1)\}$$

et $\dim(E_{-i}(A)) = \dim(ker(A+iI)) = 1$.

Exercice 1.3 pour A

Calculons $dim(A)$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & i & 2i \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Echelonnage

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 2i \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Donc $dim(A) = 3$ et $dim(E_i(A)) + dim(E_{-i}(A)) = 3$ donc diagonisable.

On a

$$P = \begin{vmatrix} i & -i & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -i & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{vmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix}$$

Exercice 1.1 pour B

On a

$$\det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{vmatrix} i-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} \right) = (i-\lambda)(\lambda^2+1)$$

Calculons $\det(A - \lambda I) = 0$, $(i-\lambda)(\lambda^2+1) = 0$, donc $sp(A) = \{i, -i\}$.

Exercice 1.2 pour B

Calculons

$$E_i(B) = ker(B - iI) = ker \left(\begin{vmatrix} i-i & 0 & 2 \\ 0 & 0-i & 1 \\ 0 & -1 & 0-i \end{vmatrix} \right)$$

Cherchons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 \\ 0\lambda_1 - i\lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Echelonnage

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3 & = 0 (L_1 = L_3) \\ 0\lambda_1 - i\lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 (L_3 = L_1) \end{cases}, \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_3 & = -i\lambda_2 \end{cases}, \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - i(-i\lambda_2) & = 0 \\ \lambda_3 & = -i\lambda_2 \end{cases}$$

Donc, en fixant $\lambda_2 = c_2$ on a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = ic_2$

$$ker(B - iI) = \{(0, 1, i)\}$$

et $\dim(E_i(B)) = \dim(ker(B - iI)) = 1$.

Calculons

$$E_{-i}(B) = ker(B + iI) = ker\left(\begin{vmatrix} i+i & 0 & 2 \\ 0 & 0+i & 1 \\ 0 & -1 & 0+i \end{vmatrix}\right)$$

Cherchons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que

$$\begin{vmatrix} 2i & 0 & 2 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2i\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 \\ 0\lambda_1 + i\lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + i\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ i\lambda_2 & = \lambda_3 \\ \lambda_2 & = -i\lambda_3 \end{cases}$$

Donc, en fixant $\lambda_2 = c_2$ on a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = ic_2$

$$ker(B - iI) = \{(0, 1, i)\}$$

et $\dim(E_{-i}(B)) = \dim(ker(B + iI)) = 1$.

Exercice 1.3 pour B

Calculons $dim(B)$.

$$\begin{vmatrix} -i & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Echelonnage

$$\begin{vmatrix} -i & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Donc $dim(B) = 3$ et $dim(E_i(B)) + dim(E_{-i}(B)) = 2$ donc pas diagonisable.

Exercice 2

Si k est une valeur propre d'un endomorphisme $f : E \to E$ alors $\exists v \in E, v \neq 0_E, f(v) = k.v$. L'endomorphisme f est surjective donc $im(f) = E$, et $dim(im\ f) = dim(E)$ [1]. Preuve par l'absurde. Supposons que 0 soit une valeur propre de f, $\exists v \in E, v \neq 0_E, f(v) = 0.v = 0_E$. Donc $v \in ker(f)$. On a $dim(ker\ f) + dim(im\ f) = dim(E)$, donc par [1], on a $dim(ker\ f) = 0$ ce qui contredit l'existence de v.

Exercice 3

Exercice 3.1

Non, la matrice nulle est diagonale mais n'est pas inversible car son déterminant est nul.

Exercice 3.2

On a $Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \det(A - \lambda.Id_n) = 0\}$ et la matrice A est inversible si son déterminant est non nul. Le déterminant d'une matrice diagonale est égal à $\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$. La matrice $A - \lambda.Id_n$ est diagonale donc pour avoir son déterminant égale à nul il faut que $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} - \lambda$, donc $Sp(A) = \{a_{ii}\}$. D'un autre coté, pour que A soit inversible on a $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$ (ie. $\forall i, a_{ii} \neq 0$). Donc, il faut que $0 \notin Sp(A)$.

Exercice 3.3

Si la matrice A est diagonalisable alors il existe une matrice P tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Donc d'après l'exercice preécédent, il faut que

Exercice 4

Exercice 4.1

La base $\mathscr{B}$ a $n+1$ vecteurs indépendents, dont sa dimension est $n+1$.

Exercice 4.2

Soit 2 polynomes $P_a = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $P_b = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$, on a $P_a + P_b = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i + \sum_{i=0}^{n} b_i X^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i$. On a $c.P_a = c.\sum_{i=0}^{n} a_i X^i = \sum_{i=0}^{n} c.a_i X^i$. On a $f(P) = X.\frac{d}{dX}P = X.\sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$

On doit montrer que

- $f(P_a+P_b) = f(P_a)+f(P_b)$?, $f(P_a+P_b) = X.\sum_{i=1}^{n} i(a_i+b_i)X^{i-1} = X.(\sum_{i=1}^{n} i.a_i X^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} i.b_i X^{i-1}) = X.(\sum_{i=1}^{n} i.a_i X^{i-1}) + X.(\sum_{i=1}^{n} i.b_i X^{i-1}) = f(P_a) + f(P_b)$
- $f(c.P_a) = c.f(P_a)$?, $f(c.P_a) = X.\sum_{i=1}^{n} i(c.a_i)X^{i-1} = c.X.\sum_{i=1}^{n} i(a_i)X^{i-1} = c.f(P_a)$

Donc, f est une application linéaire.

Exercice 4.3

On a $f(P) = X.\sum_{i=1}^{n} i.a_i.X^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} i.a_i.X^i$, donc

$$f(P) = [f]_{\mathscr{B}}.\begin{vmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1).a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n.a_n \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{vmatrix}$$

La matrice $[f]_{\mathscr{B}}$ est une matrice diagonale dont f est diagonalisable.

Exercice 4.4

On a $Sp(f) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \} \det([f]_{\mathscr{B}} - \lambda Id_n) = 0$. Donc

$$[f]_{\mathscr{B}} - \lambda Id_n = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_2-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1).a_{n-1}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n.a_n-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det([f]_{\mathscr{B}} - \lambda Id_n) = \prod_{i=0}^{n} i.a_i.X^i - \lambda = \prod_{i=0}^{n} (i.a_i.X^i) - (n+1)\lambda$$

Mais $\prod_{i=0}^{n}(i.a_i.X^i) = 0$, donc $Sp(f) = \emptyset$.
QED