Rappel de cours

Definition 1. Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes ssi:

- $(u_n)_{n\geq 0}$ est croisssante et $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
- $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n)_{n\geq 0} = 0$

Exercice 1

Montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

$$u_{n+1} - un = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(n+1)^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{(n+1)^3}$$

$\forall n, u_{n+1} - un > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croisssante.

Montrons que $(v_n)_{n\geq 1}$ est dćroissante.

$$v_{n+1} - vn = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - (u_n + \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^2} = \frac{n+2}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{-3n^2 - n - 1}{n^2(n+1)^3}$$

$\forall n, v_{n+1} - vn < 0$ donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroisssante.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_n \leq v_n$

$$u_n \leq v_n, u_n \leq u_n + \frac{1}{n^2}$$

Vrai car $\frac{1}{n^2}$ est positif pour $n \geq 1$.

Montrons que $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n)_{n\geq 0} = 0$

$$\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n)_{n\geq 0} = \lim_{n\to\infty}(u_n + \frac{1}{n^2} - u_n)_{n\geq 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Vrai

Donc les deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

Exercice 2

a_n

QED