Exercice 1

1.1

1.2

Matrice Q orthogonale au plan P d'équation $x - y + z = 0$. Soit $n = i - j + k$ un vecteur normal à P. La symétrie orthogonale par rapport a P est

$$s(x) = x - 2\frac{(x|n)}{||n||^2}n$$

On prends $x = (x_1, x_2, x_3)$, $||n||^2 = 3$, $n = (1, -1, 1)$ et $(x|n) = x_1 - x_2 + x_3$. Donc

$$s(x) = (x_1, x_2, x_3) - \frac{2}{3}(x_1 - x_2 + x_3)(1, -1, 1)$$

$$= \frac{1}{3}(3x_1, 3x_2, 3x_3) - \frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + 2x_3, -2x_1 + 2x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

$$= \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 - 2x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, -2x_1 + 2x_2 + x_3)$$

Donc

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3

P est une synmétrie orthogonale ssi $P^2 = Id$ et $P = P^T$.

Q est une synmétrie orthogonale ssi $Q^2 = Id$ et $Q = Q^T$.

$$Q^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1+4+4 & 2+2-4 & -2+4-2 \\ 2+2-4 & 4+1+4 & -4+2+2 \\ -2+4-2 & -4+2+2 & 4+4+1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = Id$$

et

$$Q^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = Q$$

donc Q et une symétrie orthogonale.

QED