Exercice 17

Une suite rélle u_n converge vers le réel l si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon \implies |u_n - l| < \epsilon \text{ [P1]}$$

Une suite rélle u_n diverge vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_A \implies U_A \geq A \text{ [P2]}$$

Une suite rélle u_n diverge vers $-\infty$ si

$$\forall B \in \mathbb{R} \exists N_B \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_B \implies U_B \leq B \text{ [P3]}$$

Exercice 17.1

Supposons que $l = 2$.
Prenons un $\epsilon > 0$, trouvons un N_ϵ tel que $|u_{N_\epsilon} - 2| < \epsilon$. Par exemple, $N_\epsilon = 4$, car $|u_4 - 2| = |2 - 2| = 0 < \epsilon$.
Maintenant, vérifions [P1] pour $l = 2$. $\forall \epsilon > 0, \forall n > 4, |u_n - 2| < \epsilon$, calculons $u_{n>4} = 2 = u_4$, la propriété [P1] est vérifée pour tous les $n > N_\epsilon$.

Exercice 17.2

- $a = 1$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$
- $|a| < 1$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
- $a \leq -1$, pas de limite
- $a \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

Pour le second cas, posons $l = 0$, trouvons un N_ϵ tel que $|u_{N_\epsilon} - 0| < \epsilon$. Par exemple, $N_\epsilon, |a^{N_\epsilon}| < \epsilon$. N_ϵ existe car $|a| < 1$. On a bien $|u_{N_\epsilon} - 0| = |a^{N_\epsilon}| < \epsilon$.
Maintenant, vérifions [P1] pour $l = 0$. $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, |u_{N_\epsilon} - 0| < \epsilon$. Calculons $u_{N_\epsilon+1} = a^{N_\epsilon+1} < a^{N_\epsilon}$, la propriété [P1] est vérifée pour tous les $n > N_\epsilon$.
Même raisonnement pour les autres cas.

Exercice 17.3

La suite diverge. Prenons un A, et calculons N_A tel que $u_{N_A} > A$. Calculons u_{N_A+1}.
$u_{N_A+1} = \frac{(N_A+1)^{N_A+1}}{(N_A+1)!} = \frac{(N_A+1).....(N_A+1).(N_A+1)}{N_A!(N_A+1)} = \frac{(N_A+1).....(N_A+1)}{N_A!}$, Les nombres au numérateur sont toujours plus grand que ceux du numérateur pour u_{N_A}, donc la suite $u_{N_A+1} > u_{N_A} > A$.
La propriété $[P2]$ est vérifiée.

La suite diverge. Prenons un A, et calculons N_A tel que $u_{N_A} > A$. Calculons u_{N_A+1}.
$u_{N_A+1} = \frac{(N_A+1)!}{2^{N_A+1}} = \frac{N_A!(N_A+1)}{2.2.2.....2} = U_{N_A}.\frac{(N_A+1)}{2}$. Donc la suite $u_{N_A+1} > u_{N_A} > A$.
La propriété $[P2]$ est vérifiée.

Exercice 18

On a $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon \implies |u_n - l| < \epsilon$

Exercice 39

Exercice 39.1

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$$

Exercice 39.2

$$\lim_{n\to+\infty} v_{4n} = \sin(4n\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{4n+1} = \sin((4n+1)\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_{4n+2} = \sin((4n+2)\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{4n+3} = \sin((4n+3)\frac{\pi}{2}) = -1$$

Exercice 39.3

$$\lim_{n\to+\infty} w_{6n} = \sin(6n\frac{\pi}{3}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} w_{6n+1} = \sin((6n+1)\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} w_{6n+2} = \sin((6n+2)\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} w_{6n+3} = \sin((6n+3)\frac{\pi}{3}) = -1$$

$$\lim_{n\to+\infty} w_{6n+4} = \sin((6n+4)\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} w_{6n+5} = \sin((6n+5)\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 39.4

$$\lim_{n\to+\infty} x_{4n} = \sin^{4n}(4n\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_{4n+1} = \sin^{4n+1}((4n+1)\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_{4n+2} = \sin^{4n+2}((4n+2)\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_{4n+3} = \sin^{4n+3}((4n+3)\frac{\pi}{2}) = -1$$

Exercice 39.5

$$\lim_{n\to+\infty} x_{4n} = |\sin(4n\frac{\pi}{2})|^{\frac{4n}{2}} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_{4n+1} = |\sin((4n+1)\frac{\pi}{2})|^{\frac{4n+1}{2}} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_{4n+2} = |\sin((4n+2)\frac{\pi}{2})|^{\frac{4n+2}{2}} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_{4n+3} = |\sin((4n+3)\frac{\pi}{2})|^{\frac{4n+3}{2}} = 1$$

Exercice 39.6

$$\lim_{n\to+\infty} v_{4n} = 4n\sin(4n\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{4n+1} = (4n+1)\sin((4n+1)\frac{\pi}{2}) = 4n+1$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_{4n+2} = \sin((4n+2)\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{4n+3} = (4n+3)\sin((4n+3)\frac{\pi}{2}) = -4n-3$$

Exercice 40

Exercice 40.1

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 2n+1 = +\infty$$

Exercice 40.2

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \frac{2n+4}{2^{2n}} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \frac{2n+7}{e^{2n+1}} = 0$$

Exercice 40.3

Valeur $a = 0$, u_{2n} n'est pas définie.

Valeur $|a| < 1$, u_{2n}

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \frac{2n+4}{a^{2n}} = +\infty$$

Valeur $|a| = 1$, u_{2n}

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \frac{2n+4}{1^{2n}} = 2n+4$$

Valeur $|a| > 1$, u_{2n}

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \frac{2n+4}{a^{2n}} = 0$$

Et

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = 2n+1 = +\infty$$

Exercice 40.4

$$\lim_{n \to +\infty} u_{3n} = \frac{3n+4}{3n} = 1 + \frac{4}{3n} = 1$$

Et

$$\lim_{n \to +\infty} u_{3n+1} = 3$$

Et

$$\lim_{n \to +\infty} u_{3n+2} = \frac{(3n+2)^2+1}{3n^2} = \frac{9n^2+12n+5}{3n^2} = 3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{3n^2} = 3$$

Exercice 51

Exercice 51.1

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 1 = \lim_{x \to 0} (x+1)^2 + 1 = \lim_{x \to 0} x^2 + \lim_{x \to 0} 2x + \lim_{x \to 0} 1 + \lim_{x \to 0} 1 = 0 + 0 + 1 + 1 = 2$$

Exercice 51.2

$$\lim_{x \to +\infty} -x - \ln(x) = -\lim_{x \to +\infty} x - \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = -\infty - \infty = -\infty$$

Exercice 51.3

$$\lim_{x \to +\infty} x - \ln(x) = x.(1 - \frac{\ln(x)}{x}) = \lim_{x \to +\infty} x. \lim_{x \to +\infty} (1 - \frac{\ln(x)}{x}) = +\infty.(1-0) = +\infty$$

Car $\ln(x) << x$.

Exercice 51.4

Changement de variable $y = x - 1$.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} + \ln(x-1) = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y+1-1} + \ln(y+1-1) = \lim_{y \to 0^+} \frac{1 + y\ln(y)}{y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y}. \lim_{y \to 0^+} (1 + y\ln(y))$$

$$= \frac{1}{0^+}.(1+0) = +\infty$$

Voir exercice 17.

Exercice 51.5

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 - x = \lim_{x\to-\infty} x(x-1) = \lim_{x\to-\infty} x. \lim_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty. -\infty = +\infty$$

Exercice 52

On a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, calculons $\lim_{x\to 0} \cos(x)$.
En utilisant la règle de l'Hospital, on a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin'(x)}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$.

Exercice 52.1

Changement de variable $y = x - \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos(y+\frac{\pi}{2})}{y} = \lim_{y\to 0} -\frac{\sin(y)}{y} = -1$$

Exercice 52.2

On a $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x}. \lim_{x\to 0} \frac{1}{cos(x)} = 1. \frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0} cosx} = 1.1 = 1$$

Exercice 52.3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (\cos^2(x) + \sin^2(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\cos^2(x)}{x^2} - \frac{\sin^2(x))}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\cos^2(x)}{x^2}\right) - \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\cos^2(x)}{x^2}\right) - \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}. \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)}{x^2}(1-\cos(x)\right) - 1$$

Exercice 53

Exercice 53.1

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 53.2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 53.3

Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$. 2 cas $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Exercice 53.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{\tan(5x)}$$

Utilisation des développements limités de $sin(x)$ et $\tan(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-\frac{(4x)^3}{3!}+\frac{(4x)^5}{5!}+\epsilon(x)}{5x+\frac{(5x)^3}{3}+\frac{2(5x)^5}{15}+\epsilon(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4-\frac{(4x)^2}{3!}+\frac{(4x)^4}{5!}+\epsilon(x)}{5+\frac{(5x)^2}{3}+\frac{(25x)^4}{15}+\epsilon(x)}=\frac{\lim_{x\to 0}4-\frac{(4x)^2}{3!}+\frac{(4x)^4}{5!}+\epsilon(x)}{\lim_{x\to 0}5-\frac{(5x)^2}{3}+\frac{(25x)^4}{15}+\epsilon(x)}=\frac{4}{5}$$

Exercice 53.5

Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{|\sin(4x)|}{\tan(5x)}$. 2 cas $\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin(4x)|}{\tan(5x)}$ et $\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin(4x)|}{\tan(5x)}$ Utilisation des développements limités de $sin(x)$ et $\tan(x)$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|4x-\frac{(4x)^3}{3!}+\frac{(4x)^5}{5!}+\epsilon(x)|}{5x+\frac{(5x)^3}{3}+\frac{2(5x)^5}{15}+\epsilon(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4-\frac{(4x)^2}{3!}+\frac{(4x)^4}{5!}+\epsilon(x)}{5+\frac{(5x)^2}{3}+\frac{(25x)^4}{15}+\epsilon(x)}=\frac{\lim_{x\to 0}4-\frac{(4x)^2}{3!}+\frac{(4x)^4}{5!}+\epsilon(x)}{\lim_{x\to 0}5-\frac{(5x)^2}{3}+\frac{(25x)^4}{15}+\epsilon(x)}=\frac{4}{5}$$

On sait que la fonction sin est impaire donc $\sin(-x)=-\sin(x)$.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|4x-\frac{(4x)^3}{3!}+\frac{(4x)^5}{5!}+\epsilon(x)|}{5x+\frac{(5x)^3}{3}+\frac{2(5x)^5}{15}+\epsilon(x)}=\frac{-4x+\frac{(4x)^3}{3!}-\frac{(4x)^5}{5!}+\epsilon(x)}{5x+\frac{(5x)^3}{3}+\frac{2(5x)^5}{15}+\epsilon(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-4+\frac{(4x)^2}{3!}-\frac{(4x)^4}{5!}+\epsilon(x)}{5+\frac{(5x)^2}{3}+\frac{(25x)^4}{15}+\epsilon(x)}=-\frac{4}{5}$$

Exercice 53.6

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{2})}{x}=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin(x)}{x}=-1$$

Exercice 54

Exercice 54.1.1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{-4x^3+3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-3x^{-1}+x^{-3}}{-4+3x^{-2}+x^{-3}}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

Exercice 54.1.2

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-3x^2+1}{-4x^3+3x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{2(x+1)^3-3(x+1)^2+1}{-4(x+1)^3+3(x+1)+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+3x^2}{-4x^3-12x^2-9x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{-4x^2-12x-9}=\frac{\lim_{x\to 0}2x^2+3x}{\lim_{x\to 0}-4x^2-12x-9}=\frac{0}{9}=0$$

Exercice 54.2

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{3x^4+2}e^x=$$

Calculons

$$\lim_{x\to+\infty}ln\left(\frac{2x+3}{3x^4+2}e^x\right)=\lim_{x\to+\infty}ln\left(\frac{2x+3}{3x^4+2}\right)+ln(e^x)=\lim_{x\to+\infty}ln\left(\frac{2x^{-3}+3x^{-4}}{3+2x{-4}}\right)+x$$

$$=\ln(\lim_{x\to+\infty}2x^{-3}+3x^{-4})-\ln(\lim_{x\to+\infty}3+2x^{-4})+\lim_{x\to+\infty}x=$$

$$=\ln(\lim_{x\to+\infty}2x+3)-\ln(\lim_{x\to+\infty}x^4)-\ln(3)+\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

Exercice 54.3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{3x^4+2}e^{\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{3x^4+2}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x}{3x^4+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{-2}+3x^{-3}}{3+2x^{-4}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}2x^{-2}+3x^{-3}}{\lim_{x\to+\infty}3+2x^{-4}}=\frac{0}{3}=0$$

Exercice 54.4

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^4-2x^2)e^x$$

Calculons

$$\lim_{x\to+\infty}ln((3x^4-2x^2)e^x)=\lim_{x\to+\infty}ln(3x^4-2x^2)+\ln(e^x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2(3x^2-2))+x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2)+\ln(3x^2-2)+x=\infty+\infty+\infty=\infty$$

Exercice 55

Exercice 55.1

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos(x))}{\sin^2(x)}=\frac{\lim_{x\to0}\ln(\cos(x))}{\lim_{x\to0}sin^2(x)}=\frac{\ln(1)}{0+}=+\infty$$

Exercice 55.2

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln((x^{-1}+2)x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln((x^{-1}+2)+\ln(x)}{\ln(1+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln((x^{-1}+2)}{\ln(1+x)}+\frac{\ln(x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2)}{\ln(1+x)}+\frac{\ln(x)}{\ln(1+x)}=1$$

car a l'infini $x\approx1+x$.

Exercice 55.3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(}\ln(1+e^x))}{x^2}$$

On a l'infini $1+e^x\approx e^x$, donc $ln(1+e^x)\approx ln(e^x)=x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\ln(1+e^x)}}{x^2}\approx\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2}=0$$

Exercice 55.4

$$\lim_{x\to-\infty}\sin(x)\sin(\frac{1}{x^2})=\lim_{x\to-\infty}\sin(x).\lim_{x\to-\infty}\sin(\frac{1}{x^2})=[-1;1].0=0$$

Exercice 57

Exercice 57.1

$D_a=\mathbb{R}\setminus\{x^2+x-2=0\}$, $x^2+x-2=0$, donne $x_1=1$ et $x_2=-2$. Donc $a(x)=\frac{2(x+2)}{(x+2)(x-1}=\frac{2}{x-1}$. On a $D_a=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
$D_b=\mathbb{R}\setminus\{x^4+2x^2+1=0\}$, $x^4+2x^2+1=0$, n'a pas de racine car tout les membres sont positifs. Donc $D_b=\mathbb{R}$.

Exercice 57.2

$$a(x) = \frac{2}{3} + \epsilon_1(x-4)$$

$$\epsilon_1(x-4) = a(x) - \frac{2}{3} = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{3} = \frac{6-2x+2}{3(x-1)} = \frac{-2(x-4)}{3(x-1)}$$

$$\epsilon_1(X) = \frac{-2X}{3(X+3)}$$

$$a(x) = -\frac{2}{5} + \epsilon_2(x-4)$$

$$\epsilon_2(x+4) = a(x) + \frac{2}{5} = \frac{2}{x-1} + \frac{2}{5} = \frac{10+2x-2}{5(x-1)} = \frac{2(x+4)}{5(x-1)}$$

$$\epsilon_2(X) = \frac{2X}{5(X-5)}$$

On a $\epsilon_1(X) \neq \epsilon_2(X)$.

Exercice 57.3

La fonction $b(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée et un point x_0 est

$$b'(x_0) = \frac{b(x_0+h) - b(x_0)}{h}$$

$$b(x_0+h) = f(x_0) + hb'(x_o) = \frac{x_0 - 1}{x_0^4 + 2x_0^2 + 1} + hb'(x_0) = \frac{x_0 - 1}{x_0^4 + 2x_0^2 + 1} + \epsilon_0(h))$$

Donc $\epsilon_0(h) = hb'(x_0)$.

Exercice 60

Exercice 60.1

La fonction $f : x \to x^2$ est continue est en $x_0 = 1$ si $\lim_{x\to 1, x\neq 1} x^2 = f(1) = 1$. Calculons la limite $\lim_{x\to 1, x\neq 1} x^2$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1-\eta, 1+\eta[\setminus\{1\}, |f(x) - l| < \epsilon)$$

Prenons $l = 1$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1-\eta, 1+\eta[\setminus\{1\}, |f(x) - l| < \epsilon)$$

Cas $x\ ]1, 1+\epsilon[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1+\eta[\setminus\{1\}, |(1+\eta)^2 - l| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1+\eta[\setminus\{1\}, |2\eta + \eta^2| < \epsilon)$$

Cas $x\ ]1-\epsilon, 1[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1+\eta[\setminus\{1\}, |(1-\eta)^2 - l| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1+\eta[\setminus\{1\}, |-2\eta + \eta^2| < \epsilon)$$

Dans les 2 cas, η existe (par exemple $\eta = \frac{\epsilon}{10}$). Donc la fonction $f(x) = x^2$ est continue en $x_0 = 1$.

Prenons $x_0 \in \mathbb{R}$, on fait la même démonstration mais avec une limite $l = x_0^2$.
Cas $x\ ]x_0, x_0+\epsilon[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0+\eta[\setminus\{1\}, |(x_0+\eta)^2 - x_0^2| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0+\eta[\setminus\{1\}, |2x_0\eta + \eta^2| < \epsilon)$$

Cas x $]x_0-\epsilon, x_0[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0+\eta[\setminus\{1\}, |(x_0-\eta)^2 - x_0^2| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0+\eta[\setminus\{1\}, |-2x_0\eta + \eta^2| < \epsilon)$$

Dans les 2 cas, η existe (par exemple $\eta = \frac{\epsilon}{x_0^2}$). Donc la fonction $f(x) = x^2$ est continue en x_0 donc en tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 60.2

La fonction $f : x \to x^3$ est continue est en $x_0 = 1$ si $\lim\limits_{x\to 1, x\neq 1} x^3 = f(1) = 1$. Calculons la limite $\lim\limits_{x\to 1, x\neq 1} x^3$.
Cas x $]1, 1+\epsilon[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1+\eta[\setminus\{1\}, |(1+\eta)^3 - l| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1+\eta[\setminus\{1\}, |3\eta + 3\eta^2 + \eta^3| < \epsilon)$$

Cas x $]1-\epsilon, 1[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1+\eta[\setminus\{1\}, |(1-\eta)^3 - l| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1+\eta[\setminus\{1\}, |-3\eta + 3\eta^2 - \eta^3| < \epsilon)$$

Dans les 2 cas, η existe (par exemple $\eta = \frac{\epsilon}{10}$). Donc la fonction $f(x) = x^3$ est continue en $x_0 = 1$.

Prenons $x_0 \in \mathbb{R}$, on fait la même démonstration mais avec une limite $l = x_0^3$.
Cas x $]x_0, x_0+\epsilon[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0+\eta[\setminus\{1\}, |(x_0+\eta)^3 - x_0^3| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0+\eta[\setminus\{1\}, |2x_0\eta + \eta^2| < \epsilon)$$

Cas x $]x_0-\epsilon, x_0[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0+\eta[\setminus\{1\}, |(x_0-\eta)^3 - x_0^3| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0+\eta[\setminus\{1\}, |-2x_0\eta + \eta^2| < \epsilon)$$

Dans les 2 cas, η existe (par exemple $\eta = \frac{\epsilon}{x_0^3}$). Donc la fonction $f(x) = x^3$ est continue en x_0 donc en tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour $f(x) = x^n$, il faut généraliser avec $(x_0-\eta)^n$ et prendre $\eta = \frac{\epsilon}{x_0^n}$.

Exercice 62

Exercice 62.1

Continuité de $\sqrt{x^3-3}$. La fonction est définie lorsque $x^3 - 3 \geq 0$, donc $x \geq \sqrt[3]{3}$. La fonction est une combinaison de fonctions continues sur leur domaines de définition, donc la fonction est continue sur $]\sqrt[3]{3}, +\infty[$.

Exercice 62.2

Continuité de $\ln((x-1)^2(x+2)^4)$. La fonction est définie lorsque $(x-1)^2(x+2)^4 > 0$. On a $(x-1)^2 \geq 0$ et $(x+2)^4 \geq 0$. On a $(x-1)^2 > 0$ lorsque $x \neq 1$ et $(x+2)^4 > 0$ lorsque $x \neq -2$. Donc le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Calculons la continuité en $x_0 = 1$.

$$lim_{x\to 1, x\neq 1}(x-1)^2(x+2)^4 = 0.3^4 = 0$$

$$lim_{x\to 1, x\neq 1} ln((x-1)^2(x+2)^4) = -\infty$$

Donc la fonction n'est pas continue.

Exercice 62.3

Continuité de $\ln(\sqrt{x^2+1}-2)$. La fonction est définie lorsque $\sqrt{x^2+1}-2>0$ donc $\sqrt{x^2+1}>2$, $|x^2+1|>4$, $x^2>3$ et $x>\sqrt{3}$. La fonction est définie sur $]\sqrt{3},+\infty[$. La fonction est une combinaison de fonctions continues sur leurs domaines de définition, donc la fonction est continue sur $]\sqrt{3},+\infty[$.

Exercice 62.4

Continuité de $\ln||x-1|+1|$. La fonction est définie lorsque $||x-1|+1|>0$. On a $|x-1|\geq 0$, donc $||x-1|+1|=|x-1|+1$. 2 cas:

- $x<1$, $\lim_{x\to 1^-}\ln(|x-1|+1)=\lim_{x\to 1^-}\ln(2-x)=\ln(1)=0$
- $x>1$, $\lim_{x\to 1^+}\ln(|x-1|+1)=\lim_{x\to 1^+}\ln(x)=\ln(1)=0$

On a $\lim_{x\to 1, x\neq 1}\ln||x-1|+1|=0=\ln||x-1|+1|=\ln(1)$.

La fonction est une combinaison de fonctions continues sur les domaines $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$ et continue par prolongement en 1. Donc la fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 62.5

Continuité de $\ln||x+1|-1|$. La fonction est définie lorsque $||x+1|-1|>0$.
$||x+1|-1|=|x+1|-1$ lorsque $|x+1|>1$ et $||x+1|-1|=1-|x+1|$ lorsque $|x+1|<1$.

- $|x+1|>1$, lorsque $x>0$ et $x<-2$
- $|x+1|<1$, lorsque $-2<x<0$.

Le domaine de définition est $\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$.
Il faut vérifier la continuité aux points -2 et 0.

On a $\lim_{x\to 0}\ln||x+1|-1|=\lim_{x\to 0}\ln 0=-\infty$, donc la fonction n'est pas continue.

Exercice 62.6

Continuité de $\ln||x-1|-1|$. La fonction est définie lorsque $||x-1|-1|>0$.
$||x-1|-1|=|x-1|-1$ lorsque $|x-1|>1$ et $||x-1|-1|=1-|x-1|$ lorsque $|x-1|<1$.

- $|x-1|>1$, lorsque $x<0$ et $x>2$
- $|x-1|<1$, lorsque $0<x<2$.

Le domaine de définition est $\mathbb{R}\setminus\{2,0\}$.
Il faut vérifier la continuité aux points 2 et 0.

On a $\lim_{x\to 0}\ln||x-1|-1|=\lim_{x\to 0}\ln 0=-\infty$, donc la fonction n'est pas continue.

Exercice 62.7

Continuité de $\ln|\sqrt{x-1}+1|$. La fonction est définie lorsque $|\sqrt{x-1}+1|>0$ pour le ln ceci est vrai car $\sqrt{x-1}>0$ et lorsque $x-1>0$ pour la racine carré. Donc la fonction est définie sur $]1,+\infty[$.
La fonction est une combinaison de fonctions continues sur le domaine $]1,+\infty[$, donc la fonction est continue sur $]1,+\infty[$.

Exercice 62.8

Continuité de $\ln|\sqrt{x-1}-1|$. La fonction est définie lorsque $|\sqrt{x-1}-1|>0$ pour le ln et lorsque $x-1>0$ pour la racine carré.
Donc $x>1$.
$|\sqrt{x-1}-1| = \sqrt{x-1}-1$ lorsque $\sqrt{x-1}-1>0$ et $|\sqrt{x-1}-1| = 1-\sqrt{x-1}$ lorsque $\sqrt{x-1}-1<0$

- $\sqrt{x-1}-1>0$, $\sqrt{x-1}>1$, $|x-1|>1$ toujours vrai pour $x>2$,
- $1-\sqrt{x-1}>0$, $1>\sqrt{x-1}$, $1>|x-1|$ impossible lorsque $x<2$.

La fonction est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
Calculons la continuité en $x_0=2$, $\lim_{x\to 2, x\neq 2}\ln|\sqrt{x-1}-1|$
$\lim_{x\to 2, x\neq 2}|\sqrt{x-1}-1| = |\sqrt{\lim_{x\to 2, x\neq 2} x-1}-1| = |0| = 0$
Donc $\lim_{x\to 2, x\neq 2}\ln|\sqrt{x-1}-1| = -\infty$. La fonction n'est pas continue en 2.

Exercice 62.9

Continuité de $\sqrt{\ln(x+1)-1}$. La fonction est définie lorsque $\ln(x+1)-1>0$ pour la racine carré et $x+1>0$ pour le ln.
Donc $x>-1$ et $\ln(x+1)>1$, donc $e^{\ln(x+1)}>e^1$, donc $x>e-1$.

Le domaine de définition de la fonction est $]e-1,+\infty[$. La fonction est un assemblage de fonction continue sur leurs domaines de définition. Donc la fonction est continue sur $]e-1,+\infty[$.

Exercice 76

Prenons un $x_0\in\mathbb{R}$, la fonction $f(x)$ est dérivable en x_0 si $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite lorsque $h\to 0, h\neq 0$.

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0, h\neq 0}\frac{C-C}{h} = \lim_{h\to 0, h\neq 0}\frac{0}{h} = 0$$

Exercice 77

Prenons un $x_0\in\mathbb{R}^+$, la fonction $f(x)$ est dérivable en x_0 si $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite lorsque $h\to 0, h\neq 0$.

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0, h\neq 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0, h\neq 0}\frac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}$$

$$= \lim_{h\to 0, h\neq 0}\frac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \lim_{h\to 0, h\neq 0}\frac{h}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \lim_{h\to 0, h\neq 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

La fonction n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{h\to 0^-, h\neq 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$ n'existe pas.

Exercice 79

Exercice 79.1

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{x est rationnel} \\ 0 & \text{x est irrationnel} \end{cases}$$

La fonction n'est pas dérivable et est continue en 0.

Exercice 79.2

$$f'(x) = \begin{cases} \lim_{h\to 0, h\neq 0} 2x+h & \text{x est rationnel} \\ 0 & \text{x est irrationnel} \end{cases}$$

Pour $x = 0$, on a

$$f'(0) = \begin{cases} \lim_{h\to 0, h\neq 0} 2.0+h = 0 & \text{x est rationnel} \\ 0 & \text{x est irrationnel} \end{cases}$$

La fonction est dérivable en $x = 0$.

Exercice 80

La fonction est continue en $x = 0$, si $\lim_{x\to 0^-} a + bx - x^2 = \lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{1}{1+x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{1}{1+x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} a + bx - x^2 = a + \lim_{x\to 0^-} x(b-x) = 0$$

Il faut $a = 0$ et b quelconque.

La fonction est dérivable en $x = 0$, si $(a + bx - x^2)' = \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)'$.

$$(a + bx - x^2)' = b - 2x$$

$$\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$$

En $x = 0$, $b = 1$ et a quelconque.

Exercice 83

Exercice 83.1

$$DL_1(0)\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x^2}{2} \text{ et } DL_1(0)\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha\sqrt{1+x} + \beta\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha(1+\frac{x^2}{2}) + \beta(1-\frac{x^2}{2})}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha+\beta)}{x} + \frac{x(\alpha-\beta)}{2}$$

- $\alpha = -\beta$, la limite est égale à 0
- $\alpha + \beta > 0$, la limite est égale à $+\infty$
- $\alpha + \beta < 0$, la limite est égale à $-\infty$

Exercice 83.2

$$DL_1(1)\ln^2 x = DL_1(0)\ln^2(x+1) = (x+1)^2 \text{ et } DL_1(1)\cos(x^2) = DL_1(0)\cos((x+1)^2) = 1 - \frac{(x+1)^4}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln^2(x) + \alpha\cos(x^2)}{x-1} = \lim_{X\to 0} \frac{\ln^2(X+1) + \alpha\cos((X+1)^2)}{X} = \lim_{X\to 0} \frac{(X+1)^2 + \alpha(1 - \frac{(X+1)^4}{2})}{X}$$
$$=$$

QED