Exercice 5

Question 5.A.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx = \int_{-\infty}^{\theta} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx + \int_{\theta}^{+\infty} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx$$

$$0 + \int_{\theta}^{+\infty} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} dx = \left[\frac{\theta^m}{x^m}\right]_{\theta}^{+\infty} = \frac{\theta^m}{\theta^m} - \frac{\theta^m}{\infty^m} = 1 - 0 = 1$$

Question 5.A.2

$$\forall t \geq \theta, P(X \geq t) = \forall t \geq \theta, 1 - P(X < t) = 1 - \int_{\theta}^{t} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} dx = 1 - \left[\frac{\theta^m}{x^m}\right]_{\theta}^{t} = \left(\frac{\theta}{t}\right)^m$$

Question 5.A.3

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx = 0 + \int_{\theta}^{+\infty} x \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} dx = m\theta^m \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{x^m} dx =$$

$$m\theta^m \left[-\frac{1}{(m-1)x^{m-1}}\right]_{\theta}^{+\infty} = -\frac{m\theta^m}{m-1}\left(0 - \frac{1}{\theta^{m-1}}\right) = \frac{m\theta}{m-1}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx = 0 + \int_{\theta}^{+\infty} x^2 \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} dx = m\theta^m \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{x^{m-1}} dx =$$

$$m\theta^m \left[-\frac{1}{(m-2)x^{m-2}}\right]_{\theta}^{+\infty} = -\frac{m\theta^m}{m-2}\left(0 - \frac{1}{\theta^{m-2}}\right) = \frac{m\theta^2}{m-2}$$

Question 5.A.3

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{m\theta^2}{m-2} - \left(\frac{m\theta}{m-1}\right)^2 =$$

$$\frac{m(m-1)^2 - m^2(m-2)}{(m-2)(m-1)^2}\theta^2 = \frac{m}{(m-2)(m-1)^2}\theta^2$$

Question 5.B.1

Méthode des moments de niveau 1, $M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, et $E(X) = M_1$ donc

$$M_1 = \frac{m\theta}{m-1}$$

Donc l'estimateur est

$$\hat{\theta_1} = \frac{m-1}{m} M_1 = \frac{m-1}{m}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Comme $m = 3$, on a

$$\hat{\theta_1} = \frac{2}{3}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

TBC

Question 5.B.2.a

Méthode du maximum de vraissemblance, on a

$$L_\theta(X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{3\theta^3}{x_i^4} 1_{[\theta,\infty[}(x_i) = 3^n\theta^{3n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^4} 1_{[\theta,\infty[}(x_i)$$

On traite 2 cas :

- Lorsque $\theta > \min\{x_i\}$, la fonction $1_{[\theta,\infty[}(x) = 0$ pour $x = \min\{x_i\}$. Donc, on a $L_\theta(X) = 0$.
- Lorsque $\theta \leq \min\{x_i\}$, la fonction $1_{[\theta,\infty[}(x) = 1, \forall x \in \{x_i\}$. Donc, on a $L_\theta(X) > 0$.

La fonction de vraissemblance de $L_\theta(X) = C\theta^3 n$ où C est un terme constant dependant de X. Par conséquent, Le maximum de vraissemblance correspond à la plus grande valeur possible de θ. Donc $\hat{\theta_2} = \min\{x_i\}$.

Question 5.B.2.b

La fonction de répartition de $\hat{\theta_2}$ est $F(t) = P(\min_{1\leq i\leq n} X_i < t)$. Donc

$$P(\min_{1\leq i\leq n} X_i < t) = 1-P(\min_{1\leq i\leq n} X_i \geq t) = 1-P(x_1 \geq t, \ldots, x_n \geq t) = 1-\prod_{i=1}^{n} P(x_i \geq t) = 1-\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\theta}{t}\right)^3 1_{[\theta,\infty[}(t)$$

$$= 1 - \left(\frac{\theta}{t}\right)^{3n} 1_{[\theta,\infty[}(t) = P(3n, \theta)$$

Question 5.B.2.c

La fonction de répartition de $\hat{\theta_2}$ suit une loit de Pareto $P(3n, \theta)$, l'espérance et la variance de la loi de Pareto $P(m, \theta)$ sont resp. $\frac{m\theta}{m-1}$ et $\frac{m}{(m-2)(m-1)^2}\theta^2$ (voir questions préliminaires), donc

$$E[\hat{\theta_2}] = \frac{3n}{3n-1}\theta$$

et

$$V[\hat{\theta_2}] = \frac{3n}{(3n-2)(3n-1)^2}\theta^2$$

Question 5.B.3

Prenons $\hat{\theta_3} = \frac{\hat{\theta_2}+\hat{\theta_1}}{2}$ on a

$$E(\hat{\theta_3}) = E\left(\frac{\hat{\theta_2}+\hat{\theta_1}}{2}\right) = \frac{E(\hat{\theta_2})+E(\hat{\theta_1})}{2} = \frac{\theta+\theta}{2} = \theta$$

Donc l'estimateur $\hat{\theta_3}$ est sans biais.
et

$$R(\hat{\theta_3}, \theta) = V(\hat{\theta_3}) + B(\hat{\theta_3}, \theta)^2 = V(\hat{\theta_3}) = E(\hat{\theta_3}^2) - E(\hat{\theta_3})^2 =$$

$$E\left(\left(\frac{\hat{\theta_1}+\hat{\theta_2}}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{E(\hat{\theta_1})+E(\hat{\theta_2})}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(E(\hat{\theta_1}^2) + 2E(\hat{\theta_1}\hat{\theta_2}) + E(\hat{\theta_2}^2) - E(\hat{\theta_1})^2 - 2E(\hat{\theta_1})E(\hat{\theta_2}) - E(\hat{\theta_2})^2)$$

$$= \frac{1}{4}(V(\hat{\theta_1}) + V(\hat{\theta_2}) + 2E(\hat{\theta_1}\hat{\theta_2}) - 2E(\hat{\theta_1})E(\hat{\theta_2}))$$