Rappel de cours:

-

Exercice 5.1

5.1.1.a

La relation ϕ est linéaire de E si

- $\forall A, B \in E, \phi(A+B) = \phi(A) + \phi(B)$
- $\forall A \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \phi(\lambda A) = \lambda\phi(A)$

Posons $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ et $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

En utilisant deux fois la distibitibité par rapport à l'addition, on a:

$$\phi(A+B) = M_1.(A+B).M_2 = M_1.(A.M_2 + B.M_2) = M_1.A.M_2 + M_1.B.M_2 = \phi(A) + \phi(B)$$

On a $(\lambda A).B = \lambda(A.B) = A.(\lambda B)$ (voir cours).

$$\phi(\lambda A) = M_1.(\lambda A).M_2 = M_1.(\lambda(A.M_2)) = \lambda(M_1.A.M_2) = \lambda\phi(A)$$

Donc la relation $\phi(M)$ est linéaire.

5.1.1.b

La matrice A est un point fixe de la relation ϕ si $\phi(A) = A$, soit

$$\phi(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} .A. \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = A$$

$$\phi(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = A$$

5.1.2.a

$$\phi(P_1+P_2) = ((P_1+P_2)(1), (P_1+P_2)'(2)) = ((P_1(1)+P_2(1)), (P_1'+P_2')(2)) = (P_1(1)+P_2(1), P_1'(2)+P_2'(2))$$
$$= (P_1(1), P_1'(2)) + (P_2(1), P_2'(2)) = \phi(P_1) + \phi(P_2)$$

Et

$$\phi(\lambda P) = (\lambda P(1), (\lambda P(2))') = (\lambda P(1), \lambda P'(2)) = \lambda(P(1), P'(2)) = \lambda\phi(P)$$

La relation ϕ est linéaire.

5.1.2.b

$$\phi(t-1) = ((t-1)(1), (t-1)'(2)) = ((t-1)(1), (1)(2)) = (0, 1)$$

$$\phi((t-2)^2) = ((t-2)^2(1), ((t-2)^2)'(2)) = ((t-2)^2(1), (t^2-4t+4)'(2)) = ((t-2)^2(1), (2t-4)(2)) = (1, 0)$$

On cherche P, tel que $\phi(P) = (1, -1)$. Comme la relation ϕ est linéaire on a

$$(1,-1) = 1.(1,0) - 1.(0,1) = 1.\phi((t-2)^2) - 1.\phi(t-1) = \phi(1.(t-2)^2) + \phi(-(t-1)) = \phi((t-2)^2 - (t-1)) = \phi(t^2-5t+5)$$

Donc $P = t^2 - 5t + 5$.

5.1.3.a

$$\phi(f_1+f_2) = \int_0^1 (f_1+f_2)e^t dt = \int_0^1 f_1 e^t + f_2 e^t dt = \int_0^1 f_1 e^t + \int_0^1 f_2 e^t dt = \phi(f_1)+\phi(f_2)$$

$$\phi(\lambda f) = \int_0^1 (\lambda f)e^t dt = \int_0^1 \lambda f e^t dt = \lambda \int_0^1 f e^t dt = \lambda\phi(f)$$

5.1.3.b

Une fonction f de $E \to F$ appartient au noyau de ϕ si $\phi(f) = 0_F$. Une fonction est dite affine si elle est de la forme $f(t) = at+b$. Donc on cherche une fonction $f = at+b$ tel que $\phi(f) = 0$.

$$\phi(at+b) = \int_0^1 (at+b)e^t dt = \int_0^1 ate^t + be^t dt = a\int_0^1 te^t dt + b\int_0^1 e^t dt = a + b(e-1) = 0$$

car $\int e^t dt = e^t$ et $\int te^t dt = (t-1)e^t$.

Il faut trouver a et b tel que $a + b(e-1) = 0$. Prenons par exemple, $b = 0$ donc $a = 0$, et $b = 1$ donc $a = 1-e$.
Les 2 fonctions affines sont $f_0(t) = 0t + 0 = 0$ et $f_1(t) = (1-e)t + 1$.

Exercice 5.2

5.2.1

$$f(x,y,z,t) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-y+3z-t \\ 2x+y+3z+4t \\ -x+2y-4z+3t \end{vmatrix}$$

5.2.2.a

$Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^4, f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$\begin{cases} x-y+3z-t & =0 \quad l_1 \\ 2x+y+3z+4t & =0 \quad l_2 \\ -x+2y-4z+3t & =0 \quad l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+3z-t & =0 \quad l_1 \\ -3y+3z-6t & =0 \quad 2l_1-l_2 \\ y-z+2t & =0 \quad l_1+l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+3z-t & =0 \quad l_1 \\ y-z+2t & =0 \quad l_1+l_3 \\ 0 & =0 \quad (2l_1-l_2)+3(l_1+l_3) \end{cases}$$

On a 2 variables primaires (x,y) et deux variables secondaires (z,t). Donc $Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, X = (2z-t, z-2t, z, t)\}$.

5.2.2.b

$$\left\{\begin{array}{lll} x-y+3z-t & =x_b & l_1 \\ 2x+y+3z+4t & =y_b & l_2 \\ -x+2y-4z+3t & =z_b & l_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x-y+3z-t & =x_b \\ y-z+2t & =x_b+z_b \\ -3y+3z-6t & =2x_b-y_b \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x-y+3z-t & =x_b \\ y-z+2t & =x_b+z_b \\ -3(x_b+z_b) & =2x_b-y_b \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x-y+3z-t & =x_b \\ y-z+2t & =x_b+z_b \\ -5x_b+y_b-3z_b & =0 \end{array}\right.$$

La fonction f est injective ssi $Ker(f)=0_{\mathbb{R}^3}\}$. On a $Ker(f)=\{X\in\mathbb{R}^3, X=(4z-t,z-2t,z,t)\}\neq 0_{\mathbb{R}^3}$. La fonction n'est pas injective.

La fonction est surjective ssi $Im(f)=\mathbb{R}^3$. On a $Im(f)=B=(x_b,y_b,z_b)\neq\mathbb{R}^3$ car il y a une relation entre $x_b, y_b et z_b$. Donc la fonction f n'est pas surjective.

5.2.3.a

$$\begin{array}{l} u_1=3e_1-e_3=3(1,0,0,0)-(0,0,1,0)=(3,0,-1,0) \\ u_2=e_2-e_4=(0,1,0,0)-(0,0,0,1)=(0,1,0,-1) \\ f(u_1)=(3-0-3-0,6-0-3-0,-3+0+4+0)=(0,3,1) \\ f(u_2)=(0-1+0--1,0+1+0-4,-0+2-0-3)=(0,-3,-1) \end{array}$$

On a $Vect(f(u_1),f(u_2))=\{(0,3,1),(0,-3,-1)\}$. On remarque que $f(u_1)=-f(u_2)$, donc les 2 vecteurs sont colinéaires. Par conséquent $Vect(f(u_1),f(u_2))$ ne représente que les points de la droite de du plan (y,z) et de vecteur directeur $(0,3,1)$.

5.2.3.b

On a $Ker(f)=\{X\in\mathbb{R}^3, X=(-2z-t,z-2t,z,t)\}$, les points de l'espace vectorielle sont $(x_f,y_f,z_f,t_f)=(-2z-t,z-2t,z,t)$.
$E=Vect((3,0,-1,0),(0,1,0,-1))$, les points de l'espace vectorielle D sont $(x_e,y_e,z_e,t_e)=a.(3,0,-1,0)+b.(0,1,0,-1)=(3a,b,-a,-b)$.

$E\cap Ker(f)$ sont les points communs entre E et $Ker(f)$. Donc

$$\left\{\begin{array}{ll} 3a & =-2z-t \\ b & =z-2t \\ -a & =z \\ -b & =t \end{array}\right.$$

La solution de ce système est $b=a$. Donc $D=(3a,a,-a,-a)$ ou $D=(3,1,-1,-1)$.

$D'=(3,0,-1,0)$ et $D=(3,1,-1,-1)$ sont supplémentaires dans E si $((3,0,-1,0),(3,1,-1,-1))$ est une base de E.

Famille libre?

$$\left\{\begin{array}{ll} 3\lambda_1+3\lambda_2 & =0 \\ \lambda_2 & =0 \\ -\lambda_1-\lambda_2 & =0 \\ -\lambda_2 & =0 \end{array}\right.$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, la famille est libre.
Et génératrice?

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 & = x \\ \lambda_2 & = y \\ -\lambda_1 - \lambda_2 & = z \\ -\lambda_2 & = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & = t + y \\ 0 & = x + 3z \\ \lambda_2 & = y \\ -\lambda_1 & = z + y \end{cases}$$

Oups la famille n'est pas génératrice. Problème.

5.4

5.4.1

En utilisant la distributivité par rapport à l'addition.

$$g(A+B) = (A+B)M - M(A+B) = AM + BM - MA - MB = AM - MA + BM - MB = g(A) + g(B)$$

$$g(\lambda A) = (\lambda A)M - M(\lambda A) = \lambda(AM) - \lambda(MA) = \lambda(AM - MA) = \lambda g(A)$$

Donc g est linéaire.

5.4.2

Par définition, $Ker(g) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g(M) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$.
On a $g(M) = AM - MA = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = MA$ qui est la définition de E.

Donc $Ker(g) = E$.

5.4.3

On a $M \in E, AM = MA$.
La matrice $A \in E$ car $AA = AA$.
La matrice $I_2 \in E$ car $I_2 A = A = AI_2$.

On a trouvé 2 matrices qui appartiennent à E. Comme $Ker(g) = E$, on a $g(A) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et $g(I_2) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. De plus, la relation g est linéaire donc $g(\lambda_1 A + \lambda_2 I_2) = \lambda_1 g(A) + \lambda_2 g(I_2) = \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Donc $\lambda_1 A + \lambda_2 I_2$ est dans $Ker(g)$. Par conséquent $Ker(g) = \{A, I_2, \lambda_1 A + \lambda_2 I_2\}$, et $dim\ Ker(g) \geq 2$.

5.4.4

A et I_2 forment une base de $Ker(g)$ car la famille (A, I_2) est libre et génératrice. $dim\, Ker(g)$ et $rang(g)$ voir cours.

5.4.5

On a $g(A^2) = A^2 A - AA^2 = A^3 - A^3 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Donc la matrice $A^2 \in Ker(g)$.

Comme les matrices A et I_2 sont une base de $Ker(g)$ alors tous les élément de l'ensemble $Ker(g)$ peuvent s'exprimer comme une combinaison linéaire des matrices A et I_2. Ou plus bestialement,

$$A^2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4A - I_2$$

Une matrice M_g est dans l'image de la relation g ssi il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $g(M) = AM - MA = M_g$. Soit $M = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$

$$AM = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2m_{11} + 3m_{21} & 2m_{12} + 3m_{22} \\ m_{11} + 2m_{21} & m_{12} + 2m_{22} \end{vmatrix}$$

$$MA = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2m_{11} + m_{12} & 3m_{11} + 2m_{12} \\ 2m_{21} + m_{22} & 3m_{21} + 2m_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_g = AM - MA = \begin{vmatrix} 3m_{21} - m_{12} & 3m_{22} - 3m_{11} \\ m_{11} - m_{22} & m_{12} - 3m_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -3b \\ b & -a \end{vmatrix}$$

avec $a = 3m_{21} - m_{12}$ et $b = m_{11} - m_{22}$.

QED