

Rappel de cours

Definition 1. Deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes ssi:

- $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et $(v_n)_{n \geq 0}$ est décroissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n)_{n \geq 0} = 0$

Exercice 1

Montrons que $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(n+1)^3} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} = \frac{1}{(n+1)^3}$$

$\forall n, u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Montrons que $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - (u_n + \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^2} = \frac{n+2}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^2}$$
$$\frac{-3n^2 - n - 1}{n^2(n+1)^3}$$

$\forall n, v_{n+1} - v_n < 0$ donc la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_n \leq v_n$

$$u_n \leq v_n, u_n \leq u_n + \frac{1}{n^2}$$

Vrai car $\frac{1}{n^2}$ est positif pour $n \geq 1$.

Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n)_{n \geq 0} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n)_{n \geq 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + \frac{1}{n^2} - u_n)_{n \geq 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Vrai

Donc les deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 2

Montrons que $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$\forall n, u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Montrons que $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - (u_n + \frac{1}{n!}) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$
$$\frac{1-n}{(n+1)!}$$

$\forall n, v_{n+1} - v_n \leq 0$ donc la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_n \leq v_n$

$$u_n \leq v_n, u_n \leq u_n + \frac{1}{n!}$$

Vrai car $\frac{1}{n!}$ est positif pour $n \geq 1$.

Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n)_{n \geq 0} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n)_{n \geq 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + \frac{1}{n!} - u_n)_{n \geq 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$$

Vrai

Donc les deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 3

a_n

QED