Maths 101 : Préparation du test 3

pour les DLMP et +

Novembre 2019

1 Vrai

On a:

$$f(x) = \mid x - \pi \mid \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Alors :

$$f(x) = \begin{cases} (x-\pi)\sin(x) & \text{si } x \geq \pi \\ (\pi - x)\sin(x) & \text{si } x < \pi \end{cases} \tag{2}$$

On montre avec le (2) que vu que les fonctions en facteurs dans chacunes des expressions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors f(x) est dérivable sur $]-\infty;\pi[$ ainsi que sur $]\pi;\infty[$

Etudions maintenant la dérivabilité de f(x) en π:

On a $f(\pi) = \mid \pi - \pi \mid \sin(\pi) = 0$

Donc

$$\lim_{x\to\pi} \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\mid x-\pi \mid \sin(x)}{x-\pi} = \begin{cases} \sin(\pi) = 0 & \text{si } x > \pi \\ -\sin(\pi) = 0 & \text{si } x < \pi \end{cases}$$

L'expression de la dérivée admet une limite finie en π, donc f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

2 Vrai

On sait que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = f'(x_o) \tag{3}$$

On cherche à déterminer la valeur de:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+3h)-f(x_o+h)}{h}$$

On pose alors les changements de variables suivants en notant les limites lorsque h tend vers 0 des nouvelles expressions:

$$X = x_o + h \quad \lim_{h\to 0} X = x_o$$

$$H = 2h \quad \lim_{H\to 0} H = 0 = \lim_{h\to 0} h$$

On a donc:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+3h) - f(x_o+h)}{h} = 2\lim_{h\to 0} \frac{f(X+H) - f(X)}{H} = 2\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h} = 2f'(x_o)$$

On a donc bien:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+3h) - f(x_o+h)}{h} = 2f'(x_o)$$

3 Faux

La fonction $\exp(\sin(2x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par compositions de fonctions dérivables, donc elle admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$, en particulier au point 0.

Cette expression est de formule générale, au voisinage d'un point x_o :

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \epsilon(x - x_o)(x - x_o)$$

$$\lim_{x\to x_o} \epsilon(x - x_o) = 0$$

La dérivée de $\exp(\sin(2x))$ est $2\cos(2x)\exp(\sin(2x))$.

Au voisinage de 0, l'expression du développement limité à l'ordre 1 est donc de la forme:

$$\exp(\sin(2x)) = \exp(\sin(2*0)) + 2\cos(2*0)\exp(\sin(2*0))(x-0) + (x-0)\epsilon(x-0)$$
$$\exp(\sin(2x)) = 1 + 2x + x\epsilon(x)$$

Ce qui est contraire à l'expression de l'énoncé qui indique un coefficient de "3" pour le premier x au lieu de "2".

4 Faux

Soit la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (x-1)^3$$

Cette fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[-2;3]$), et par dérivation (je vous laisse la faire, tableau de variations blablabla), on trouve:

- $f'(1) = 0$
- f est strictement croissante sur R

On rappelle que, par définition, tout voisinage de x_o possède un intervalle de la forme $[x_o - h; x_o + h]$ avec $h > 0$. On rappelle aussi que x_o est un extremum local dans $\mathbb{R}$ s'il existe un voisinage de x_o où soit $f(x_o) \geq f(x)$, soit $f(x_o) \leq f(x)$ pour tout x de ce voisinage.

Or, vu que f est strictement croissante, alors pour tout voisinage de 1, on aura un intervalle de la forme $]x_o - h; x_o + h[$ contenant les éléments $\frac{1-h}{2} < 1 < \frac{1+h}{2}$

Par stricte croissance de f, on aura donc $f(\frac{1-h}{2}) < f(1) < f(\frac{1+h}{2})$ pour tout voisinage de 1.

Dans ce cas là précis, on aura donc jamais 1 comme extremum local.

5 Faux

Le comportement de la fonction $\mid x \mid$ au point 0 est un contre-exemple suffisant:

- Elle est définit sur R qui est un voisinage de 0.
- Elle est continue en 0.
- Elle n'est pas dérivable en 0.

La preuve de la continuité et non-dérivabilité de $\mid x \mid$ en 0 est soigneusement laissée comme exercice au lecteur.

6 Faux

Déterminons la dérivée de tan(x) sur $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{tan(x+h)-tan(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{tan(x)+tan(h)}{1-tan(x)tan(h)}-tan(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{tan(x)+tan(h)-tan(x)(1-tan(x)tan(h)}{h-htan(x)tan(h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{tan(h)+tan^2(x)tan(h)}{h-htan(x)tan(h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{tan(h)}{h}*\lim_{h\to 0}\frac{1+tan^2(x)}{1-tan(x)tan(h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{sin(h)}{h}*\lim_{h\to 0}\frac{1}{cos(h)}*(1+tan^2(x))\\
&= 1+tan^2(x)
\end{aligned}$$

Comme $tan(x)$ est dérivable sur $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $tan^3(x)$ l'est aussi par puissance d'une fonction dérivable, d'ailleurs on a, pour tout $n\geq 2$:

$$(f(x)^n)' = nf'(x)f(x)^{n-1}$$

Donc:

$$(tan^3(x))' = 3(1+tan^2(x))tan^2(x) = 3(tan^2(x)+tan^4(x))$$

Ce qui n'est pas conforme à l'expression de l'énoncé.

7 Vrai

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Le lecteur pourra aisément démontrer que cette fonction est dérivable et que sa dérivée est:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

Essayons de résoudre $f'(x)=0$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} &= 0 \\ \sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\ 1+x^2+x^2 &= 0 \\ 2x^2 &= -1 \end{aligned}$$

Cette équation ne possède aucune solution dans R , donc $f'(x) \neq 0$.
Or, on connaît les deux propriétés suivantes:

- Si f admet un extremum global sur son intervalle de définition, alors il est aussi un extremum local
- Si f est dérivable sur un intervalle $]a;b[$ et que f admet un extremum local en $c \in]a;b[$, alors $f'(a) = 0$.

On en déduit les contraposées suivantes:

- Si f est dérivable sur un intervalle $]a;b[$ et que $\forall c \in]a;b[, f'(c) \neq 0$, alors f n'admet pas d'extremum local sur $]a;b[$
- Si f n'admet pas d'extremum local sur son intervalle de définition, alors il n'admet pas d'extremum global

Le fait que f soit définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée ne prenne pas de valeur en 0 nous prouve donc que f n'admet pas d'extremum.

8 Vrai

Soit $f(x) = x + 2\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur R, donc $f'(x) = 2\cos(x) + 1$. On remarque aisément que $f'(x)$ est 2π-périodique, on se restreint donc d'abord à l'intervalle $[0; 2\pi]$:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$	$\nearrow$	2π

Ce tableau peut se généraliser sur $\mathbb{R}$ en considérant l'ensemble des intervalles de la forme $[k2\pi; (k+1)2\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a donc, pour chaque entier relatif k donné:

x	$k2\pi$		$k2\pi + \frac{2\pi}{3}$		$k2\pi + \frac{4\pi}{3}$		$(k+1)2\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k2\pi$	$\nearrow$	$k2\pi + \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$	$\searrow$	$k2\pi + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$	$\nearrow$	$(k+1)2\pi$

On a donc une infinité de x_M de la forme $k2\pi + \frac{2\pi}{3}$ qui sont maxima locaux car $f(x_M)$ sera un maxima sur les intervalles de la forme $]x_M - \frac{\pi}{3}; x_M + \frac{\pi}{3}[$.

De même, on a une infinité de x_m de la forme $k2\pi + \frac{4\pi}{3}$ qui sont minima locaux car $f(x_m)$ sera un minima sur les intervalles de la forme $]x_m - \frac{\pi}{3}; x_m + \frac{\pi}{3}[$

9 Faux

On pose:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{4}$$

On a $Df = [0;1]$ et $\forall x \in [0;1], 0 \leq f(x) < 1$, donc f est bien bornée avec 1 comme borne supérieure. Or, $f(x)$ n'atteint pas sa borne supérieure, la recherche d'un majorant se révélera infructueuse car tout x_1 de $[1/2;1]$ sera majoré par tout x_2 de $[0;1/2[$, qui sera lui même majoré par tout x_3 de la forme $\frac{x_2+1/2}{2} \in [0;1/2[$, et ainsi de suite...

10 Vrai

Toute fonction continue en un intervalle fermé (comme $[0;1]$) a pour image un intervalle fermé, la fonction atteindra donc sa borne supérieure.
La démonstration utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass à deux reprises, je vous invite à la consulter p.52-53 du poly (4.2.6)

11 Vrai

f est continue et périodique sur $\mathbb{R}$, on peut donc poser $T > 0$ sa période telle que $\forall x, f(x + kT) = f(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
La fonction peut dans un premier temps être restreinte sur l'intervalle fermé $[0;T] \subset \mathbb{R}$.
L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé, donc sur $[0;T]$, f atteint un maximum local qu'on note x_M, qui est tel que $f(x_M) \geq f(x) \quad \forall x \in [0;T]$.
(Note: je ne sais pas si on doit reprouver ce théorème là qui est l'objet de la question 10, dans le pire des cas il faudra encore une fois copier la justification

dans le poly, mais j'en doutes.)
Or, vu que $\forall k \in \mathbb{Z}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(x+kT) = f(x)$, cela veut dire que $\forall k \in \mathbb{Z}$ et $\forall x \in [0;T]$, $f(x_M) \geq f(x+kT)$, ce qui revient à dire $f(x_M) \geq f(x) \forall \quad x \in \mathbb{R}$.
Donc x_M est un maximum de f.

12 Vrai

Soit $f(t) = t^{2013}$ $\forall t \in [-1;1]$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale donc f est dérivable sur $[-1;1] \subset \mathbb{R}$ avec $f'(t) = 2013t^{2012}$.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, y compris pour $n = 2012$, $\mid t^n \mid \leq 1$ pour $t \in [-1;1]$, donc $\mid f'(t) \mid \leq 2013$. On a donc, selon le théorème de l'inégalité des acroissements finis:

$$\forall x, y \in [-1;1],$$
$$\mid f(x) - f(y) \mid \leq 2013 \mid x - y \mid$$

Ce qui revient à l'expression de l'énoncé:

$$\mid x^{2013} - y^{2013} \mid \leq 2013 \mid x - y \mid$$

13 Vrai

Soit $f(t) = \sqrt{t}$, $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$
La fonction racine carré est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et admet comme dérivée $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\forall t \in]n; n+1[$:

$$\begin{aligned} n+1 > t > n &=> \sqrt{n+1} > \sqrt{t} > \sqrt{n} \quad (1) \\ &=> 2\sqrt{n+1} > 2\sqrt{t} > 2\sqrt{n} \\ &=> \tfrac{1}{2\sqrt{n+1}} < \tfrac{1}{2\sqrt{t}} < \tfrac{1}{2\sqrt{n}} \quad (2) \end{aligned}$$

Par stricte croissance de la fonction racine carré (1) et stricte décroissance de la fonction inverse (2) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On a donc $0 < f'(n+1) < f'(t) < f'(n)$
On applique alors le théorème de l'inégalité des accroissements finis qui stipule dans ce cas-ci que $\forall x, y \in [n; n+1]$:

$$f'(n+1) \mid (x-y) \mid < \mid f(x) - f(y) \mid < \; f'(n) \mid (x-y) \mid$$

Dans le cas particulier où $x = n+1$ et $y = n$, on a:

$$f'(n+1) \mid (n+1-n) \mid \quad < \mid f(n+1) - f(n) \mid < f'(n) \mid (n+1-n) \mid$$
$$\tfrac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Ce qui correspond à l'expression de l'énoncé.

14 Faux

L'inégalité $\cos(x) - 1 \leq x$ est fausse $\forall x \in]-\infty; 0[$. Choisissez le contre-exemple qui vous inspire le plus.

15 Vrai

Soit deux réels a et b tels que $1 < a < b$ Alors $0 < \ln(a) < \ln(b)$, donc $\ln(\ln(a)) < \ln(\ln(b))$ seront définis. On pose alors $f(x) = \ln(\ln(x))$, $\forall x \in [a; b] \subset]1; +\infty[$.

f est continue sur $[a; b]$ par compositions de fonctions continues sur $[a; b]$ et sera dérivable sur $]a; b[$ par compositions de fonctions dérivables sur $]a; b[$, donc selon le théorème de Rolles, il existe au moins un réel $a < c < b$ tel que:

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$$

avec $f(x) = \ln(\ln(x))$ et $f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$

On écrit donc (par manipulation de l'équation):

$$\frac{\ln(\ln(a)) - \ln(\ln(b))}{a - b} = \frac{1}{c \ln(c)}$$

$$\ln(\frac{\ln(a)}{\ln(b)}) = \frac{a - b}{c \ln(c)}$$

$$\frac{\ln(a)}{\ln(b)} = \exp(\frac{a - b}{c \ln(c)})$$

Ce qui est conforme à l'expression de l'énoncé.

16 Faux

Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; \infty[$ par composition et produit de fonctions dérivables sur ces intervalles. On a donc $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$

Or, on a:
$\forall x$ de la forme $x = \frac{1}{2k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{2k\pi} = \lim\limits_{x \to 0} x$ et

$$\lim_{k \to +\infty} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k\pi}\sin(2k\pi) - \cos(2k\pi) = -1$$

car $\sin(2k\pi) = 0$ et $\cos(2k\pi) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

De même,
$\forall x$ de la forme $x = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x \to 0} x$ et

$$\lim_{k \to +\infty} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) = \lim_{k \to +\infty} \frac{2}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}\sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) - \cos(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$$

car $\sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$ et $\cos(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

La dérivée de f n'admet pas de limite finie en 0, elle ne pourra pas être continue en 0 et la fonction ne pourra donc pas être de classe C^1.