Rappel de cours

Definition 1. Bla bla

Exercice 1

Exercice 1.1

Les 2 premières colonnes de la matrice $M = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ sont linéairement indépendantes. Il s'en suit que l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ associée est surjective. C'est donc un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.

Calcul de $Ker(M)$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -9\lambda_2 + 15\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{2}{5}\lambda_2 \\ \lambda_3 = \frac{3}{5}\lambda_2 \end{cases}$$

Donc $Ker(M) = \{(-2, 5, 3)\}$ donc $\dim Ker(M) = 1$

Il faut trouver une solution particulière

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 6\lambda_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lambda_3 = 1 + \frac{9}{5}\lambda_2 \\ \lambda_1 = -\frac{2}{5}\lambda_2 \end{cases}$$

Une solution particulière est $\{0, 0, \frac{1}{3}\}$.

La nature est une droite affine.

L'équation paramátrique est donc

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{vmatrix} + (\mathbb{R} \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix})$$

Exercice 1.2

Exercice 2

Exercice 2.1

Soit $M_1 = \begin{vmatrix} -1 & \lambda & -3 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix}$. Calculons $Ker(M_1)$.

$$\begin{cases} -x + \lambda y - 3z = 0 \\ x - 3y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + \lambda y - 3z = 0 \\ (\lambda - 3)y + (-3 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3z + 3y \\ 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda = 3$, on a $Ker(M_1) = \{(-3, 0, 1), (3, 1, 0)\}$, ce 'est pas une droite affine mais un plan affine car $\dim Ker(M_1) = 2$. Si $\lambda \neq 3$, on a $Ker(M_1) = \{(-\lambda - 3, -1, 1)\}$.

Soit $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & -2 \end{vmatrix}$. Calculons $Ker(M_2)$.

$$\begin{cases} y+z=0 \\ \lambda x-2z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-z \\ \lambda x=2z \end{cases}$$

Si $\lambda=0$, $Ker(M_2)=\{(1,0,0)\}$. Si $\lambda\neq 0$, $Ker(M_2)=\{(\frac{2}{\lambda},-1,1)\}$

Exercice 2.2

Solution particulère de M_1 quand $\lambda \neq 3$

$$\begin{cases} -x+\lambda y-3z=\lambda-1 \\ x-3y+\lambda z=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+\lambda y-3z=\lambda-1 \\ (\lambda-3)y+(\lambda-3)z=(\lambda-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1-(\lambda+3)z \\ y=1-z \end{cases}$$

Les points $A_1=(1-(\lambda+3)z,1-z,z)$. Donc, on a la droite affine $(1-(\lambda+3)z,1-z,z)+\mathbb{R}(-\lambda-3,-1,1)$
Solution particulère de M_2 quand $\lambda=0$

$$\begin{cases} y+z=2 \\ -2z=0 \end{cases}$$

Les points $A_2=(x,2,0)$. Donc, on a la droite affine $(x,2,0)+\mathbb{R}(1,0,0)$
Solution particulère de M_2 quand $\lambda\neq 0$

$$\begin{cases} y+z=-\lambda+2 \\ \lambda x-2z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-\lambda+2-z \\ x=\frac{2}{\lambda}z \end{cases}$$

Les points $A_2=(\frac{2}{\lambda}z,-\lambda+2-z,z)$. Donc, on a la droite affine $(\frac{2}{\lambda}z,-\lambda+2-z,z)+\mathbb{R}(\frac{2}{\lambda},-1,1)$

Exercice 2.3

Pour M_1 on a $\lambda\neq 3$. Premier cas $\lambda=0$, on a donc 2 coefficients directeur de droites affines $(-3,-1,1)$ pour M_1 et $(-1,0,0)$ pour M_2. Les 2 droites ne sont pas parallèles (car leurs coefficients directeurs ne peuvent pas être égaux), donc non confondues aussi. Elles sont donc sécantes.

Second cas $\lambda\neq 0$, on a donc 2 coefficients directeur de droites affines $(-\lambda-3,-1,1)$ pour M_1 et $(\frac{2}{\lambda},-1,1)$ pour M_2. Pour que les droites soient parallèles il faut que $-\lambda-3=\frac{2}{\lambda}$. Donc trouver les solutions de l'équation $|lambda^2+3\lambda+2=0$, soit $\lambda=-2$ ou $\lambda=-1$. Pour que les droites soient confondues, il faut également que leurs points soient identiques, pour les valeurs de $lambda$. Quand $\lambda=1$, on a $A_1=(-3z,1-z,z)$ et $A_2=(2z,1,z)$, il existe un point commun quand $z=0$. C'est le point $A=(0,1,0)$. Quand Quand $\lambda=2$, on a $A_1=(1-5z,-1,z)$ et $A_2=(z,0,z)$. Il n'existe pas de point commun (à cause de y).

Pour résumer:

- $\lambda=0$, droites sécantes
- $\lambda=1$, et point $(0,1,0)$, droites confondues
- $\lambda=1$, et point non $(0,1,0)$, droites parallèles
- $\lambda=2$, droites parallèles
- $\lambda\neq 3$, droites sécantes

Exercice 5

Exercice 5.1

Le plan passe par l'origine donc Quand $x = y = z = 0$, il faut que l'équation soit vraie. Donc le terme de gauche doit être 0. Il faut donc

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b = -c \end{cases}$$

Donc $x - y + z = 0$ est une équation du plan passant par l'origine et de vecteurs $(1, 2, 1)$ et $(0, 1, 1)$.

Exercice 5.2

Plan parallèlle donc il doit vérifier l'équation $kx - ky + kz = b$. Il passe par le point $(0, 0, 1)$ donc $k = b$. Ce qui fait que un plan déquation $kx - ky + kz = k$

Son équation paramétrique

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + (\mathbb{R} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} + \mathbb{R} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix})$$

Exercice 5.3

Droite passant par le point $(1, 0, 0)$ et dirigée par le vecteur $(1, 0, 1)$. Équation paramétrique

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + (\mathbb{R} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix})$$

Donc son équation est

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 + 0t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Intersection est donc

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \\ kx - ky + kz = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Le point d'intersection est $(1, 0, 0)$.