Rappel de cours

Travail

- "pour tout", $\forall$
- "il existe", $\exists$
- "non", $\neg$
- "ou", $\vee$
- "et", $\wedge$

TD1

Exo 1

$x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$ car $x = 2$	$x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \Leftarrow x = 2$
$z \in \mathbb{Z}, z = \bar{z}$ donc $z \in \mathbb{R}$	$z \in \mathbb{Z}, z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
$x \in \mathbb{R}, x = \pi$ donc $e^{2ix} = 1$	$x \in \mathbb{R}, x = \pi \Rightarrow e^{2ix} = 1$

Exo 2

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$
3. $\neg \exists x \in \mathbb{R}, \forall y in \mathbb{R}, x > y$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y in \mathbb{R}, x > y$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}^* x, \neq \frac{n}{m}$
5. $\exists x \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n = x.m$
6. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2, \exists x, x_1 < x < x_2$
7. $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, x_1.x_2 \geq 0 \vee x_2.x_3 \geq 0 \vee x_1.x_3 \geq 0$

Exo 4

1. non(P et Q) = (non P) ou (non Q) $\neq$ (non P) et (non Q). Non elles ne sont pas la négation l'une de l'autre.
2. non(P ou Q) = (non P) et (non Q). Oui elles sont la négation l'une de l'autre.
3. non(P $\Rightarrow$ Q) = non Q $\Rightarrow$ non P (contraposé) $\neq$ non P $\Rightarrow$ non Q. Non elles ne sont pas la négation l'une de l'autre.

Exo 6

1. La contraposée de $A \Rightarrow B$ est $nonB \Rightarrow nonA$
2. P:"L'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8" donc "l'entier n est pair" ou $\forall m \in \mathbb{N}, (n^2 - 1) \neq 8m \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}, n = 2x$. La contraposée de P est "l'entier n n'est pas pair (n est impair)" donc "l'entier (n^2-1) est divisible par 8" ou $\forall x \in N, n \neq 2x \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, (n^2 - 1) = 8m$.
3. un entier n impair est de la forme $n = 2x + 1$. Deux cas possibles, soit x est pair, soit x est impair. Donc $n = 2(2k) + 1 = 4k + 1$ ou $n = 2(2k + 1) + 1 = 4k + 3$. Par conséquent $n = 4k + \{1, 3\}$
4. $\forall x \in N, n \neq 2x \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, (n^2 - 1) = 8m$. Donc $\exists k \in \mathbb{N}, n = 4k + \{1, 3\} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, (n^2 - 1) = 8m$. Deux cas: $(4k + 1)^2 - 1 = 16k^2 + 8k = 8(2k^2 + k)$ ou $(4k + 3)^2 - 1 = 16k^2 + 24k + 8 = 8(2k^2 + 3k + 1)$. Dans les 2 cas, n est divisible par 8.
5. Oui, car la démonstration de P est faite car nous avons montré la contraposée de P.

Exo 7

1. P:$\exists i \in \{1..n\}, x_i - x_{i-1} < \frac{1}{n}$
2. $\neg P = \neg(\exists i \in \{1..n\}, x_i - x_{i-1} < \frac{1}{n}) = \forall i \in \{1..n\}, x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n} = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) ... (x_n - x_{n-1}) > \frac{1}{n} + \frac{1}{n} ... + \frac{1}{n} = x_n - x_0 > 1 \Rightarrow faux$
3. $(\neg P \Rightarrow faux) \Leftrightarrow P$. Donc la propriété P est vérifiée.