Rappel de cours

propriété 4.1

Soit $b(x,y)$ une forme bilinéaire. Définissons $f(x,y) = \frac{b(x,y)+b(y,x)}{2}$ on a

$$\forall (x,y), f(x,y) = \frac{b(x,y)+b(y,x)}{2} = \frac{b(y,x)+b(x,y)}{2} = f(y,x)$$

donc $f(x,y)$ est symétrique. Définissons $g(x,y) = \frac{b(x,y)-b(y,x)}{2}$, on a

$$g(x,y) = \frac{b(x,y)-b(y,x)}{2} = -\frac{b(y,x)-b(x,y)}{2} = -g(x,y)$$

donc $g(x,y)$ est anti-symétrique. On peut décomposer $b(x,y)$ en

$$\frac{b(x,y)+b(y,x)}{2} + \frac{b(x,y)-b(y,x)}{2} = f(x,y) + g(x,y)$$

Question 1

Une forme quadratique q $\mathbb{R}^n$ est dite *définie négative* si $\forall x \in E, q(x) \leq 0$.

Exercice 1

Exercice 1.1

Le vecteur $\overrightarrow{ab} = (-2, 2, 1)$, le vecteur $\overrightarrow{ac} = (-10, 4, -1)$. Les 2 vecteurs ne sont pas colinéaire donc l'espace affine est définie par $F = a + \mathbb{R}\overrightarrow{ab} + \mathbb{R}\overrightarrow{ac}$. Sa représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 5 - 2\lambda_1 - 10\lambda_2 \\ y = -1 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ z = 1 + \lambda_1 - 1\lambda_2 \end{cases}$$

Exercice 1.2

L'espace affine de G est définie par une droite $G = d + \lambda\overrightarrow{u}$. La dimension de lespace affine F est 2, celle de G est 1. L'intersection des espaces affines F et G est soit l'ensemble vide (dim = 0), soit un point (dim = 1). soit une droite (dim =2).

Exercice 1.3

L'équation paramétrique de G est

$$\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 1 \\ z = t + 3\lambda \end{cases}$$

L'intersection de F et G est

$$\begin{cases} 5 - 2\lambda_1 - 10\lambda_2 = 6\lambda \\ -1 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 1 \\ 1 + \lambda_1 - 1\lambda_2 = t + 3\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\lambda + 2\lambda_1 + 10\lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ 3\lambda - \lambda_1 + \lambda_2 = 1 - t \end{cases}$$

Avec $(1) - 2(3)$ on a

$$\begin{cases} 6\lambda + 2\lambda_1 + 10\lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ 4\lambda_1 + 8\lambda_2 = 3 + 2t \end{cases}$$

Avec $4(2) - (3)$ on a

$$\begin{cases} 6\lambda + 2\lambda_1 + 10\lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ 0 = 1 - 2t \end{cases}$$

Si $t \neq 1/2$, alors l'intersection est vide, sinon

$$\begin{cases} 6\lambda = 7 - 6\lambda_2 \\ \lambda_1 = 1 - 2\lambda_2 \end{cases}$$

Donc, l'intersection est la droite passant par d et de vecteur u.