Rappel de cours

Travail

- La composante de la force d'un point M, $\vec{F}(M)$ sur l'axe $\mathcal{O}_x$ est donnée par le produit scalaire $f(x) = \vec{F}(M).\vec{i}$.
- Le travail d'une force $\vec{F}$ sur un segment $\vec{AB}$ est donné par :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{AB} = \int_{A\to B} \vec{F}.\vec{i}dx = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx$$

- On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point A et B.

$$\forall A, B, C,\ W_{A\to B}\vec{F} = W_{A\to C}\vec{F} + W_{C\to B}\vec{F}$$

- Dans le cas où le chemin est rectiligne, si une force est conservatrice alors l'*énergie potentielle* associée à la force $\vec{F}$ est notée $E_p(x)$ est définie par :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{A\to B} \vec{F}.\vec{i}dx = E_p(x_b) - E_p(x_a)$$

.

- Le travail du poids $\vec{P} = m\vec{g}$ sur le segment $\vec{AB}$ est $W_{A\to B}(\vec{P}) = -mg(z_b - z_a) = -mgh$.
- Le travail de la force de rappel élastique d'un ressort de raideur k, $\vec{F} = -k.x\vec{i}$ est $W_{A\to B}(\vec{F}) = -\frac{1}{2}k(x_a^2 - x_b^2)$.

Énergie

- L'énergie mécanique d'un système $E_m = E_c + E_p$ avec E_c l'énergie cinétique qui dépend de la masse et de la norme de la vitesse du système physique étudié et de l'énergie potentielle E_p qui correspond aux forces exercées sur le système.
- L'énergie cinétique du système $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
- L'énergie potentielle qui correspond à l'ensemble des forces conservatives qui s'exercent sur le systéme, $E_p(B) - E_p(A) = W_{A\to B}(\vec{F}_{conservatives})$
- $E_m(B) - E_m(A) = W_{A\to B}(\vec{F}_{non\,conservatives})$

Puissance

- La puissance P représente l'énergie transférée uniformement (ie. le travail) pendant une unité de temps, $P = \frac{W}{\Delta t}$.
- $1\,W = 1\,J.s^{-1} = 1\,N.m.s^{-1} = 1\,kg.m^2.s^{-3}$

Coordonnées polaires

Polaire vers cartésienne	Cartésienne vers polaire
$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$

- le vecteur dans le repère $(\vec{i}, \vec{j})$ est $\vec{u}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ et $\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$
- Le vecteur position d'un point est $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{u}_\rho(t)$

- Le vecteur vitesse est $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

- Le vecteur accélération est $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho}(t) - \rho\dot{\theta}^2(t))\vec{u}_\rho + (\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t))\vec{u}_\theta = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$

Posons $\vec{u}_T = \vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_N = \vec{u}_\rho$. Donc $\vec{u}_T$ est un vecteur tangent à la trajectoire du point et $\vec{u}_N$ est un vecteur normal à la trajectoire du point dirigé vers le centre du rayon de courbure.

Pour une trajectoire sur un cercle de rayon R. on a:

- $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_T = v\vec{u}_T$

- $\vec{a} = R\dot{\theta}^2\vec{u}_N + R\ddot{\theta}\vec{u}_T = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}\vec{u}_T$

Pour une trajectoire sur un cercle, on définit l'abcisse curviligne $s(t) = R\theta(t)$. On a

- $\vec{v} = \frac{ds}{dt}$

- $\vec{a} = \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{u}_N + \ddot{s}\vec{u}_T$

Exo I

I.1.a

$$\begin{cases} x = 1\cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,cm \\ y = 1\sin(30) = \frac{1}{2}\,cm \end{cases}$$

I.1.b

$$\begin{cases} x = 20\cos(-30) = 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,mm \\ y = 20\sin(-30) = -20\frac{1}{2} = -10\,mm \end{cases}$$

I.1.c

$$\begin{cases} x = 8\cos(120) = -8\frac{1}{2} = 4\,mm \\ y = 8\sin(120) = 8\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,mm \end{cases}$$

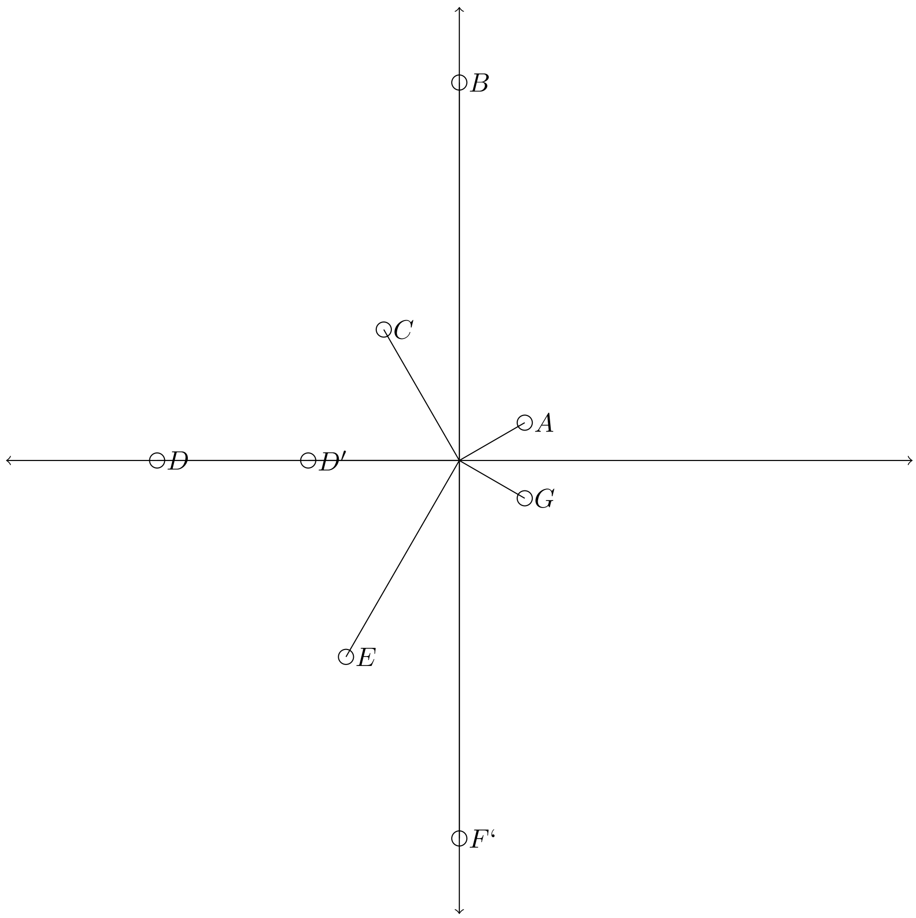
I.1.d

$$\begin{cases} x = 3\cos(120) = -3\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}\,cm \\ y = 3\sin(120) = -3\frac{\sqrt{3}}{2}\,cm \end{cases}$$

I.2.a

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}\,cm \\ \theta = \arctan(\frac{5}{3}) = 90 - \arctan(\frac{3}{5}) = 90 - 31 = 59° \end{cases}$$

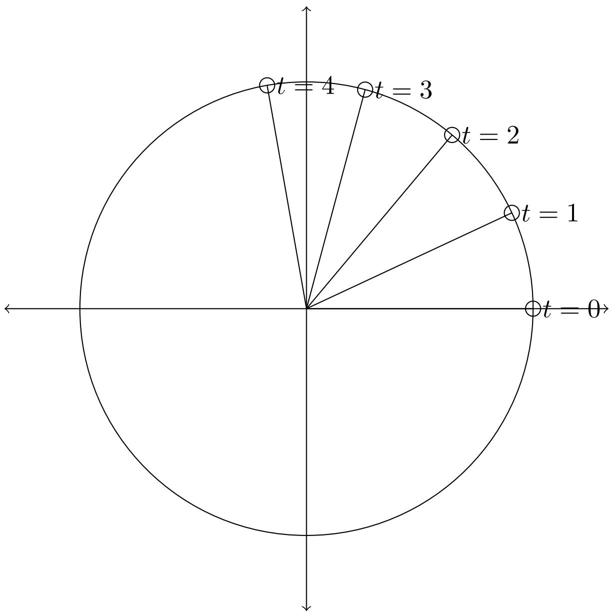
Exo II



Exo III

III.1

$$\rho(t) = \rho_0,\ \theta = \omega t$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = 0, \dot{\theta}(t) = \omega$$

La vitesse en coordonnnées polaires

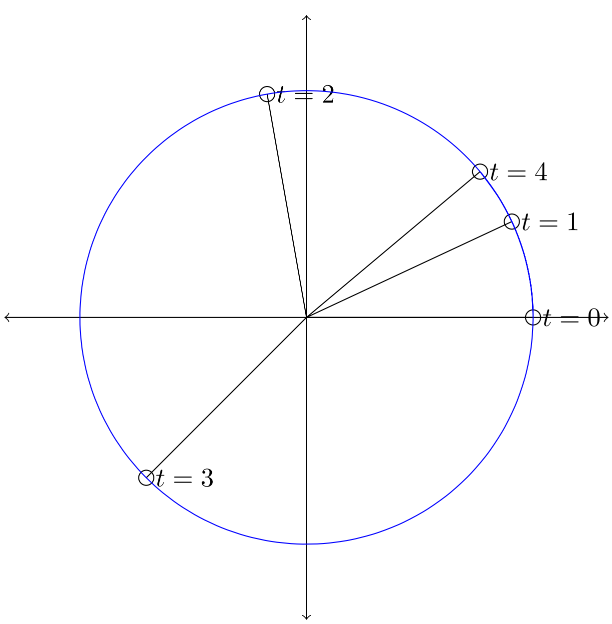
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = 0\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnnées cartésiennes

$$\vec{v} = 0\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta = 0(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \rho_0\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \rho_0\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

III.2

$$\rho(t) = \rho_0,\ \theta = \alpha t^2$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = 0,\ \dot{\theta}(t) = 2\alpha t$$

La vitesse en coordonnnées polaires

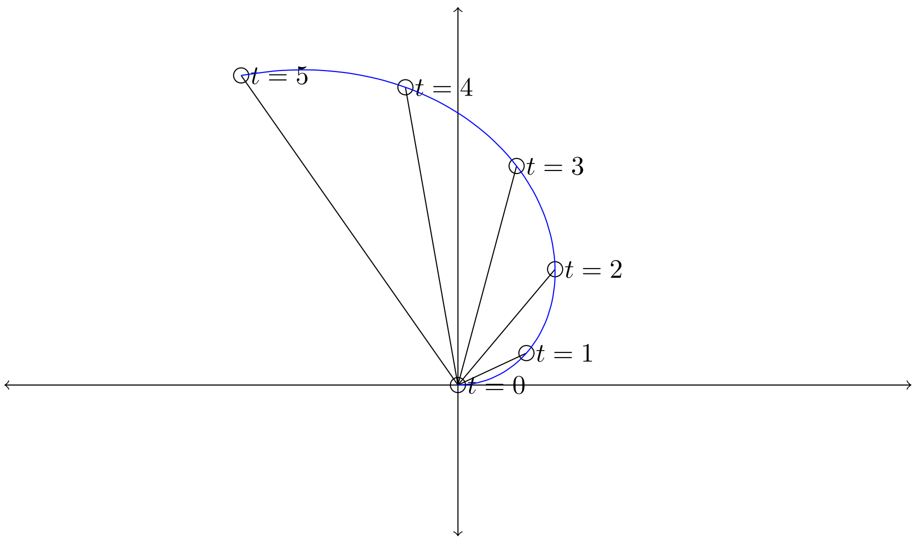
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = 0\vec{u}_\rho + \rho_0 2\alpha t\vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnnées cartésiennes

$$\vec{v} = 0\vec{u}_\rho + \rho_0 2\alpha t\vec{u}_\theta = 0(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \rho_0 2\alpha t(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \rho_0 2\alpha t(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

III.3

$\rho(t) = \alpha t$, $\theta = \omega t$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = \alpha, \dot{\theta}(t) = \omega$$

La vitesse en coordonnnées polaires

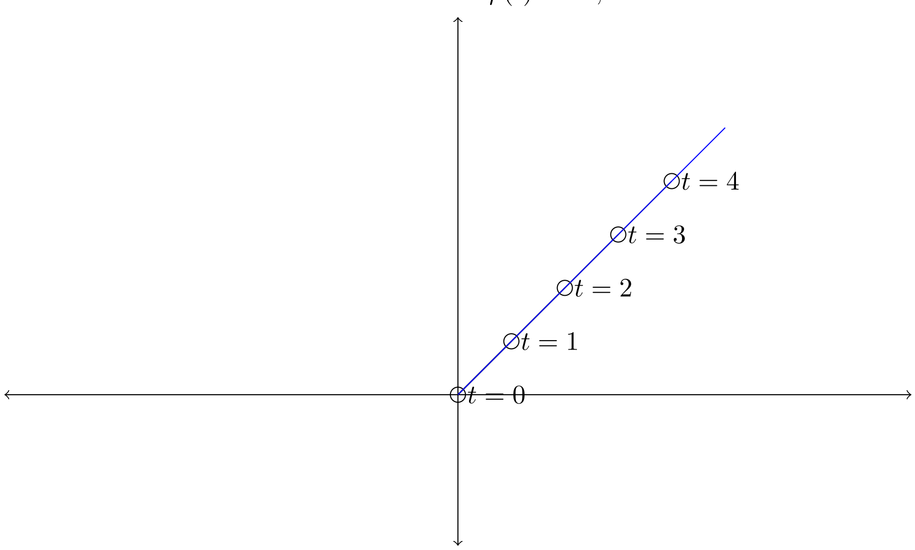
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho + \alpha t\omega\vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnnées cartésiennes

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta = \alpha(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \alpha t\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = (\alpha\cos\theta - \alpha t\omega\sin\theta)\vec{i} + ((\alpha\sin\theta + \alpha t\omega\cos\theta))\vec{j}$$

III.4

$\rho(t) = \alpha t$, $\theta = 45$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = \alpha, \dot{\theta}(t) = 0$$

La vitesse en coordonnnées polaires

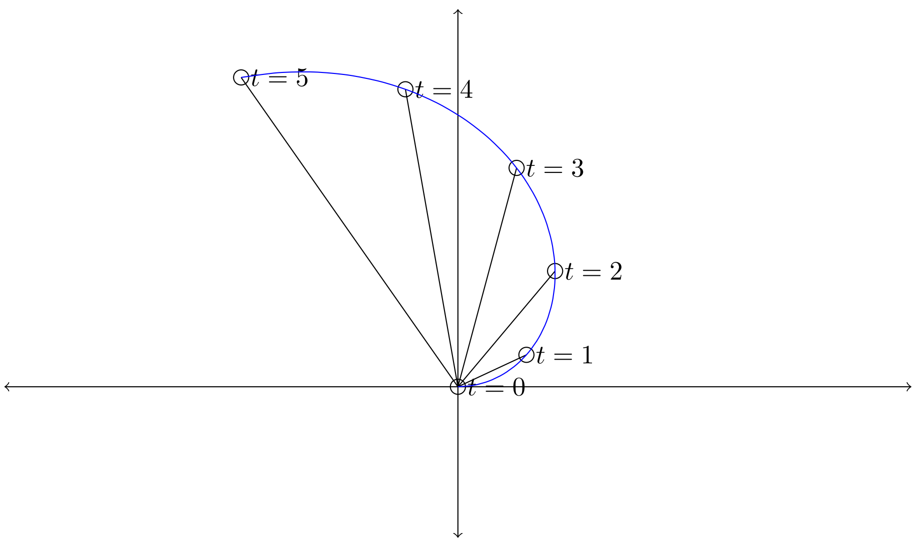
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho + \alpha.0.\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho$$

La vitesse en coordonnnées cartésiennes

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}_\rho = \alpha(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = \alpha\cos\theta\vec{i} + \alpha\sin\theta\vec{j}$$

III.5

$$\rho(t) = v_0 t,\ \theta = \omega t$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = v_0, \dot{\theta}(t) = \omega$$

La vitesse en coordonnnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = v_0\vec{u}_\rho + \omega v_0 t\vec{u}_\theta$$

Avec $v_0 = 1$ et $\omega = 25$, on a $\theta(t) = \omega t$ donc $t = \theta(t)/\omega$. Donc

θ	t	$\vec{v}(t)$
$90°$	$90/25$	$\vec{v}(90/25) = \vec{u}_\rho + 25.1.\frac{90}{25}\vec{u}_\theta = \vec{u}_\rho + 90\vec{u}_\theta$
$180°$	$180/25$	$\vec{v}(180/25) = \vec{u}_\rho + 180\vec{u}_\theta$
$-90°$	0	$\vec{v}(-90/25) = \vec{u}_\rho - 90\vec{u}_\theta$

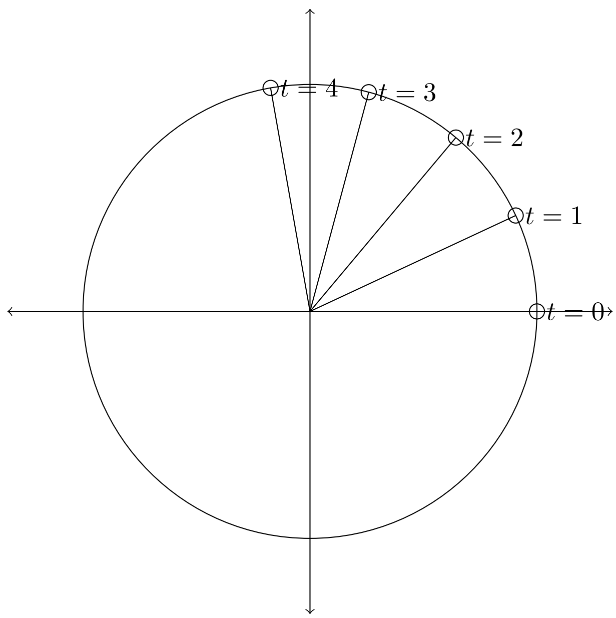
La vitesse en coordonnnées cartésiennes

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta = \alpha(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \alpha t\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = (\alpha\cos\theta - \alpha t\omega\sin\theta)\vec{i} + ((\alpha\sin\theta + \alpha t\omega\cos\theta))\vec{j}$$

Exo IV

IV.1

$$\rho(t) = \rho_0,\ \theta(t) = \omega t$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = 0, \dot{\theta}(t) = \omega$$

Dérivées de $\dot{\rho}$ et $\dot{\theta}$

$$\ddot{\rho}(t) = 0, \ddot{\theta}(t) = 0$$

La vitesse en coordonnnées polaires

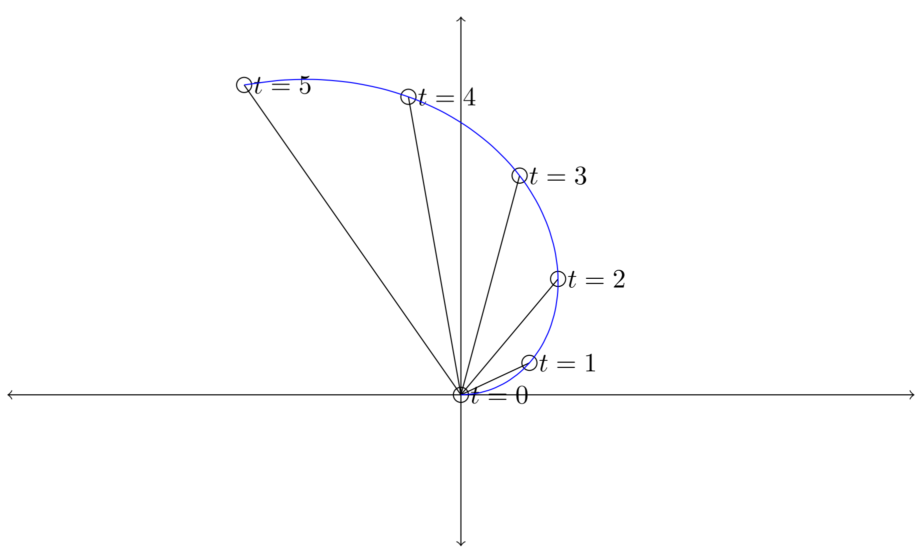
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = 0\vec{u}_\rho + \omega\vec{u}_\theta$$

L'accélération en coordonnnées polaires

$$\vec{a} = (\ddot{\rho}(t) - \rho\dot{\theta}^2(t))\vec{u}_\rho + (\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t))\vec{u}_\theta = (0 - \rho_0\omega^2)\vec{u}_\rho + (\rho_0.0 + 2.0.\omega)\vec{u}_\theta = -\rho_0\omega^2\vec{u}_\rho$$

IV.2

$$\rho(t) = \alpha t,\ \theta = \omega t$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = \alpha, \dot{\theta}(t) = \omega$$

Dérivées de $\dot{\rho}$ et $\dot{\theta}$

$$\ddot{\rho}(t) = 0, \ddot{\theta}(t) = 0$$

La vitesse en coordonnnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho + \alpha t\omega\vec{u}_\theta$$

L'accélération en coordonnnées polaires

$$\vec{a} = (\ddot{\rho}(t) - \rho\dot{\theta}^2(t))\vec{u}_\rho + (\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t))\vec{u}_\theta = (0 - \rho_0\omega^2)\vec{u}_\rho + (\rho_0.0 + 2.\alpha.\omega)\vec{u}_\theta = -\rho_0\omega^2\vec{u}_\rho + 22.\alpha.\omega\vec{u}_\theta$$

Exo V

V.1

$$\rho(t) = \rho_0,\ \theta(t) = \omega t$$

Exo VI

VI.1

On a

$$W_{A\to B}(\vec{F}_x) = \int_{A\to B} \vec{F}_x.\vec{i}dx = \int_{x_A}^{x_B} f(x)dx$$
$$W_{A\to B}(\vec{F}_y) = \int_{A\to B} \vec{F}_y.\vec{j}dx = \int_{x_A}^{x_B} f(y)dy$$

La force $\vec{F}$ représente une énergie potentielle si la force est conservative. Donc $W_{A\to B}(\vec{F}) + W_{B\to C}(\vec{F}) = W_{A\to C}(\vec{F})$.

Donc

$$W_{A\to B}(\vec{F}_x) = \int_{A\to B} \vec{F}_x.\vec{i}dx = \int_{x_A}^{x_B} -2x\,dx = [-x^2]_{x_A}^{x_B} = -x_B^2 + x_A^2$$
$$W_{A\to B}(\vec{F}_y) = \int_{A\to B} \vec{F}_y.\vec{i}dy = \int_{y_A}^{y_B} 2y\,dy = [y^2]_{y_A}^{y_B} = y_B^2 - y_A^2$$

On a

$$W_{A\to B}(\vec{F}_x) + W_{B\to C}(\vec{F}_x) = -x_B^2 + x_A^2 + -x_C^2 + x_B^2 = x_A^2 + -x_C^2 = W_{A\to C}(\vec{F}_x)$$
$$W_{A\to B}(\vec{F}_y) + W_{B\to C}(\vec{F}_y) = -y_B^2 + y_A^2 + -y_C^2 + y_B^2 = y_A^2 + -y_C^2 = W_{A\to C}(\vec{F}_y)$$

La force représente un énergie potentielle.x

VI.2

On a

$$W_{A\to B}(\vec{F}_x) = \int_{A\to B} \vec{F}_x.\vec{i}dx = \int_{x_A}^{x_B} -2y\,dx = [-2xy]_{x_A}^{x_B} = -2y(x_B - x_A)$$
$$W_{A\to B}(\vec{F}_y) = \int_{A\to B} \vec{F}_y.\vec{i}dy = \int_{y_A}^{y_B} 2x\,dy = [2xy]_{y_A}^{y_B} = 2x(y_B - y_A)$$

On a

$$W_{A\to B}(\vec{F}_x) + W_{B\to C}(\vec{F}_x) = -x_B^2 + x_A^2 + -x_C^2 + x_B^2 = x_A^2 + -x_C^2 = W_{A\to C}(\vec{F}_x)$$
$$W_{A\to B}(\vec{F}_y) + W_{B\to C}(\vec{F}_y) = -y_B^2 + y_A^2 + -y_C^2 + y_B^2 = y_A^2 + -y_C^2 = W_{A\to C}(\vec{F}_y)$$

La force représente un énergie potentielle.