Exercice 7

(a) on a $tan\, x = \frac{sin\, x}{cos\, x}$, donc $tan\, x$ est définie lorsque $cos\, x \neq 0$, ou $x \neq \pi/2 + n\,\pi$.

$$tan^2 x \leq 3$$

$$\sqrt{tan^2 x} \leq \sqrt{3}$$

$$|tan\, x| \leq \sqrt{3}$$

$$tan\, x \leq \sqrt{3}\ and\ -tan\, x \leq \sqrt{3}$$

$$x \leq \arctan\sqrt{3}\ and\ x \geq -\arctan\sqrt{3}$$

$$x \leq 1.249\ and\ x \geq -1.249$$

Comme $\pi/2 > 1.249$ alors $x \in [-1.249, 1.249]$ et la fonction tan est de période π, l'inéquation est vraie pour $x \in [-1.249 + n.\pi, 1.249 + n.\pi]$.

(b) La function $tan\, x$ est d'efini pour $x \neq \pi/2 + n\,\pi$. Faisons le changement de variable $y = tan\, x$. L'inéquation devient $\frac{y^2-2}{y^2-1}$ avec $y \neq |1|$.

$$\frac{y^2-2}{y^2-1} \leq \frac{1}{2}$$

$$2(y^2-2) \leq y^2 - 1$$

$$y^2 \leq 3$$

$$|y| \leq \sqrt{(}3)$$

$$y \leq \sqrt{(}3)\ and\ y \geq -3$$

$$tan\, x \leq \sqrt{(}3)\ and\ tan\, x \geq -3$$

$x \leq 1.249$ and $x \geq -1.249$ par (a) et $tan\, x \neq |1|$ (car $y \neq |1|$), donc $x \neq |0.7854|$. Par conséquent l'inéquation est vérifiée lorsque $x \in [-1.249, -0.7854[\cup]-0.7854, 0.7854[\cup]0.7854, 1.249]$ à la période de π.

Exercice 8

$$P(t) = (\lambda+1)t^2 + 2at + \lambda - 1$$

$$\Delta = (2a)^2 - 4.(\lambda+1)(\lambda-1)$$

$$\Delta = (2a)^2 - 4.(\lambda^2 - 1)$$

$$\Delta = 4(a^2 - \lambda^2 + 1)$$

$$t = \frac{-2a \pm \sqrt{4(a^2-\lambda^2+1)}}{2.(\lambda+1)}$$

$$t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-\lambda^2+1}}{(\lambda+1)}$$

(a) $a^2 - \lambda^2 + 1 = 0$, 1 seule racine $t = \frac{-a}{\lambda+1}$ avec $\lambda + 1 \neq 0$. On a $P(t)$ positif entre $]-\infty, \frac{-a}{\lambda+1}[$ et négatif entre $]\frac{-a}{\lambda+1}, +\infty]$ si $\frac{-a}{\lambda+1} > 0$ et l'inverse sinon.

(b) $a^2 - \lambda^2 + 1 > 0$, 2 seule racine $t = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-\lambda^2+1}}{(\lambda+1)}$, avec $\lambda + 1 \neq 0$. On a $P(t)$ positif entre $]-\infty, \frac{-a-\sqrt{a^2-\lambda^2+1}}{(\lambda+1)}[\cup]\frac{-a+\sqrt{a^2-\lambda^2+1}}{(\lambda+1)}, +\infty[$ et négatif entre $]\frac{-a-\sqrt{a^2-\lambda^2+1}}{(\lambda+1)}, \frac{-a+\sqrt{a^2-\lambda^2+1}}{(\lambda+1)}[$ si $\frac{-a}{\lambda+1} > 0$ et l'inverse sinon.

Exercice 9

P1

$$acos(t+b) = a(cos(t)cos(b) - sin(t)sin(b))$$

$$a(cos(t)cos(b) - sin(t)sin(b)) = a.cos(b).cos(t) - a.sin(b).sin(t)$$

$$a.cos(b).cos(t) - a.sin(b).sin(t) = \alpha cos(t) + \beta sin(t)$$

donc $\alpha = a.cos(b)$ et $\beta = -a.sin(b)$.

(a) $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-a.sin(b)}{a.cos(b)} = -tan(b)$ donc $b = tan^{-1}(\frac{-\beta}{\alpha})$

(b) $\alpha^2 + \beta^2 = a^2.cos^2(b) + a^2.sin^2(b) = a^2.(cos^2(b) + sin^2(b)) = a^2$ donc $a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

P2

(a) $cos(t) + sin(t) = \lambda$. Donc, $\alpha = \beta = 1$, ce qui fait $a = \sqrt{2}$ et $b = tan^{-1}(-1) = -\pi/4$. On a $cos(t - \pi/4) = cos(t) + sin(t) = \lambda$, donc $t = cos^{-1}(\lambda) + \pi/4$.

(b) idem avec $\alpha = 1$ et $\beta = \sqrt{3}$. Donc $a = 2$ et $b = tan^{-1}(-\sqrt{3})$.

(c) idem avec $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. $a = \sqrt{2}$ et $b = tan^{-1}(-1) = \pi/4$. On a $cos(t+\pi/4) = cos(t)+sin(t) = \lambda$, donc $t = cos^{-1}(\lambda) - \pi/4$.

Exercice 14

Fonction f_1

(a) f_1 Bien définie?
Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que $f(x) \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, on a:
$$f_1(x) = x^2 \in \mathbb{R}_+ \in \mathbb{R}$$
- Si $x \geq 0$, on a:
$$f_1(x) = -\frac{x}{2} \in \mathbb{R}_- \in \mathbb{R}$$

f_1 est bien définie sur $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

(b) Injective?
f est injective si $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$. Il y a 4 cas possibles.

	$x_1 < 0$	$x_1 \geq 0$
$x_2 < 0$	$x_1^2 = x_2^2$ donc $x_1 = x_2$ quand $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$	$x_2^2 = -\frac{x_1}{2}$ on a $x_1 = -2x_2^2$ impossible car $x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$	$x_1^2 = -\frac{x_2}{2}$ on a $x_1 = -2x_1^2$ impossible car $x_2 \geq 0$	$-\frac{x_1}{2} = -\frac{x_2}{2}$ donc $x_1 = x_2$

$f_1(x)$ est injective.

(c) Surjective?
f est surjective si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{N}, f(x) = y$.

- Si $x < 0$, on a: $f_1(x) = x^2 = y$, soit $x = |\sqrt{y}|$ donc $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x = -\sqrt{y} < 0$
- Si $x \geq 0$, on a: $f_1(x) = -\frac{x}{2} = y$, soit $x = -2y$ donc $\forall y \in \mathbb{R}_-^*, \exists x = -2y \geq 0$

La fonction f_1 est surjective.

(d) Bijective?
La fonction $f_1(n)$ est bijective car elle est injective et surjective.

(e) Fonction inverse?

$$f_1^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x > 0 \\ -2x & x \leq 0 \end{cases}$$

Preuve:

$$(f_1 \circ f_1^{-1})(x) = \begin{cases} (-\sqrt{x})^2 & x > 0 \\ -\frac{-2x}{2} & x \leq 0 \end{cases}$$

$$(f_1 \circ f_1^{-1})(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$

Fonction f_2

(a) f_2 Bien définie?
Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que $f(x) \in \mathbb{R}$.

- Si $x \leq 1$, on a:

$$f_2(x) = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} \in \mathbb{R}$$

- Si $x > 1$, on a:

$$f_2(x) = (x-1) + 1 = x \in \mathbb{R}$$

f_2 est bien définie sur $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.
(b) Injective?
f est injective si $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$. Il y a 4 cas possibles.

	$x_1 \leq 1$	$x_1 > 1$
$x_2 \leq 1$	$\frac{3}{2} - \frac{x_1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{x_2}{2}$, donc $x_1 = x_2$	$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{x_2}{2}$ faux car $f_2(\frac{3}{2}) = f_2(0)$
$x_2 > 1$		

$f(x)$ n'est pas injective.

(c) Surjective?
f est surjective si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{N}, f(x) = y$.

- Si $x \leq 1$, on a: $f_2(x) = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} = y$, soit $x = 3 - 2y$ donc $\forall y \geq 1, \exists x = 3 - 2y$
- Si $x > 1$, on a: $f_2(x) = y$, soit $x = y$ donc $\forall y > 1, \exists x$

La fonction f_2 est surjective.
(d) Bijective?
La fonction $f_2(n)$ n'est pas bijective car elle n'est pas injective.

Fonction f_3

(a) f_3 Bien définie?
Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que $f(x) \in \mathbb{R}$.

- Si $x \leq 1$, on a:

$$f_3(x) = x^2 \in \mathbb{R}^+ \in \mathbb{R}$$

- Si $x > 1$, on a:

$$f_3(x) = x^3 \in \mathbb{R}^+ \in \mathbb{R}$$

f_3 est bien définie sur $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.
(b) Injective?
f est injective si $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$. Il y a 4 cas possibles.

	$x_1 \leq 1$	$x_1 > 1$
$x_2 \leq 1$	$x_1^2 = x_2^2$, faux $(0.5)^2 = (-0.5)^2$	
$x_2 > 1$		

$f(x)$ n'est pas injective.

(c) Surjective?
f est surjective si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{N}, f(x) = y$.

- Si $x \leq 1$, on a: $f_2(x) = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} = y$, soit $x = 3 - 2y$ donc $\forall y \geq 1, \exists x = 3 - 2y$
- Si $x > 1$, on a: $f_2(x) = y$, soit $x = y$ donc $\forall y > 1, \exists x$

La fonction f_3 est surjective.
(d) Bijective?
La fonction$f_2(n)$ n'est pas bijective car elle n'est pas injective.

Fonctionf_4

(a)f_4 Bien définie?
Soit $x \in \mathbb{R}^+$, montrons que $f(x) \in \mathbb{R}^+$.

- Si $x \in [0, 1]$, on a:
$$f_4(x) = x^2 \in [0, 1] \in \mathbb{R}^+$$
- Si $x > 1$, on a:
$$f_4(x) = x^3 \in \mathbb{R}^+$$

f_4 est bien définie sur $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$.
(b) Injective?
f est injective si $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$. Il y a 4 cas possibles.

	$x_1 \in [0, 1]$	$x_1 > 1$
$x_2 \in [0, 1]$	$x_1^2 = x_2^2$, $x_1 = x_2$ quand $x_1 \in [0, 1]$ et $x_2 \in [0, 1]$	$x_2^2 = x_1^3$ impossible quand $x_2 \in [0, 1]$ et $x_1 > 1$
$x_2 > 1$	$x_1^2 = x_2^3$ impossible quand $x_1 \in [0, 1]$ et $x_2 > 1$	$x_1^3 = x_2^3$ $x_1 = x_2$ quand $x_1 > 1$ et $x_2 > 1$

$f_4(x)$ est injective.

(c) Surjective?
f est surjective si $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}_+, f(x) = y$.

- Si $x \in [0, 1]$, on a: $f_4(x) = x^2 = y$, soit $x = \sqrt(y)$ donc $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x = \sqrt(y)$
- Si $x > 1$, on a: $f_4(x) = y^3$, soit $x = y^{\frac{1}{3}}$ donc $\forall y > 1, \exists x = y^{\frac{1}{3}}$

La fonction f_3 est surjective.
(d) Bijective?
La fonction$f_4(n)$ est bijective car elle est injective et surjective.
(e) Fonction inverse?

$$f_4^{-1}(x) = \begin{cases} L \; \sqrt{x} & x \in [0, 1] \\ x^{\frac{1}{3}} & x > 1 \end{cases}$$

Exercice 17

P1

La suite u_n est stationnaire. En effet, $\forall n > 1, U_n = U_1$. Donc, la suite U_n admet une limite: 2.

P2

- $|a| < 1$ $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$, *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\epsilon \implies |U_n - l| \leq \epsilon$. Soit N_ϵ tel que $U_{N_\epsilon} = \epsilon$ et $l = 0$, alors pour $n > N_\epsilon$ on a $|U_n - 0| \leq \epsilon$. Vrai car $|a| < 1 \implies |a^n| < |a^{n+1}$

- $a = 1$, la suite est stationnaire, et elle converge vers 1.

- $a > 1$, $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \mathbb{N}_A \in \mathbb{N}$, *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_A \implies u_n \geq A$. Soit N_A *tel que* $U_{N_A} = A$ alors $\forall n > 1, U_{N_{A+n}} = a^n.U_{N_A} > A$.

- $a \leq -1$, la suite diverge. En effet $U_{2n-1} < U_{2n} > U_{2n+1}$.

P3

La suite $U_n = \frac{n^n}{n!}$ tend vers $+\infty$. Soit N_A *tel que* $U_{N_A} = \frac{N_A^{N_A}}{N_A!} = A$ alors $U_{N_{A+1}} = \frac{(N_A+1)^{(N_A+1)}}{(N_A+1)!} = \frac{(N_A+1)^{N_A}.(N_A+1)}{N_A!.(N_A+1)} = \frac{(N_A+1)^{N_A}}{N_A!} > A$ car $(N_A+1)^{N_A} > N_A^{N_A}$

La suite $V_n = \frac{n!}{2^n}$ tend vers $+\infty$. Soit N_A *tel que* $U_{N_A} = \frac{N_A!}{2^{N_A}} = A$ alors $U_{N_{A+1}} = \frac{(N_A+1)!}{2^{(N_A+1)}} = \frac{N_A!.(N_A+1)}{2^{N_A}.2} = A.\frac{(N_A+1)}{2} > A$ car $\frac{(N_A+1)}{2} > 1$.

La suite $W_n = \frac{a^n}{n!}$ tend vers 0. A finir.

Exercice 20

Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 - \frac{1}{2n} \leq \sqrt{4 + \frac{(-1)^n}{n}} \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (2 - \frac{1}{2n})^2 \leq 4 + \frac{(-1)^n}{n} \leq (2 + \frac{1}{\sqrt{n}})^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 4 - \frac{4}{2n} + \frac{1}{4n^2} \leq 4 + \frac{(-1)^n}{n} \leq 4 + \frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{2}{n} + \frac{1}{4n^2} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

- n est pair

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{2}{n} + \frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{2}{n} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{n} \leq 0 \leq \frac{4}{\sqrt{n}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{3}{n} + \frac{1}{4n^2} \leq 0 \leq \frac{4}{\sqrt{n}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{12n}{4n^2} + \frac{1}{4n^2} \leq 0 \leq \frac{4}{\sqrt{n}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1 - 12n}{4n^2} \leq 0 \leq \frac{4}{\sqrt{n}}$$

vraie

- n est impair

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{2}{n} + \frac{1}{4n^2} \leq \frac{-1}{n} \leq \frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{2}{n} + \frac{1}{4n^2} \leq \frac{-1}{n} \leq \frac{1+4\sqrt{n}}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{2}{n} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{n} \leq 0 \leq \frac{1+4\sqrt{n}}{n} + \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2} \leq 0 \leq \frac{2+4\sqrt{n}}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{4n}{4n^2} + \frac{1}{4n^2} \leq 0 \leq \frac{2+4\sqrt{n}}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1-4n}{4n^2} \leq 0 \leq \frac{2+4\sqrt{n}}{n}$$

  Vraie

La suite converge vers 2.

$$\lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{2n} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{\sqrt{n}} = 2$$

Exercice 21

A faire

Exercice 23

A faire

Exercice 25

P1

$$\sum_{m=0}^{n}(n-m) = n + (n-1) + n - 2 + \ldots + 1 + 0 = 0 + 1 + \ldots + (n-1) + n = \sum_{m=0}^{n} m = S_{1,n}$$

Et

$$2S_{1,n} = \sum_{m=0}^{n}(m) + \sum_{m=0}^{n}(n-m) = \sum_{m=0}^{n} m + (n-m) = \sum_{m=0}^{n} n = n + n + n \ldots + n = n(n+1)$$

$$S_{1,n} = \frac{n(n+1)}{2}$$

P2

(a)

$$(x+1)^3 = (x+1)(x+1)^2 = (x+1)(x^2+2x+1) = x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

(b) trivial
(c) On a

$$\sum_{m=0}^{n}(m+1)^3 = \sum_{m=0}^{n}(m^3 + 3m^2 + 3m + 1)$$

$$\sum_{m=0}^{n}(m+1)^3 - \sum_{m=0}^{n} m^3 = \sum_{m=0}^{n}(m^3+3m^2+3m+1) - \sum_{m=0}^{n} m^3$$

$$(1^3+2^3+3^3+\ldots+(n+1)^3) - (0^3+1^3+2^3+\ldots+n^3) = \sum_{m=0}^{n}(3m^2+3m+1)$$

$$(1^3+2^3+3^3+\ldots+(n+1)^3) - (0^3+1^3+2^3+\ldots+n^3) = \sum_{m=0}^{n}(3m^2+3m+1)$$

$$(n+1)^3 = \sum_{m=0}^{n}(3m^2+3m+1)$$

$$(n+1)^3 = \sum_{m=0}^{n} 3m^2 + \sum_{m=0}^{n} 3m + \sum_{m=0}^{n} 1)$$

$$(n+1)^3 = 3\sum_{m=0}^{n} m^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$3\sum_{m=0}^{n} m^2 = (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3}$$

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 = \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2n}{6}$$

Exercice 26

P1

$$(a-b)(\sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j}b^j)$$

$$= (a-b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^0b^{n-1})$$

$$= a(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^0b^{n-1}) - b(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^0b^{n-1})$$

$$= (a^nb^0 + a^{n-1}b^1 + a^{n-2}b^2 + \ldots + a^1b^{n-1}) - (a^{n-1}b^1 + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \ldots + a^0b^n)$$

$$= a^n - b^n$$

P2

Exercice 29

M est un majorant de l'ensemble A, si $M \in \mathbb{R}, x \in A, x \leq M$.
M est un minorant de l'ensemble A, si $M \in \mathbb{R}, x \in A, x \geq M$.
M est la borne supérieure de l'ensemble A (noté $M = sup\, A$) si M_1 est un majorant de A alors $M \leq M_1$.
M est la borne inférieure de l'ensemble (noté $M = inf\, A$) A si M_1 est un minorant de A alors $M \leq M_1$.

P1

(a) $sup[1,2] = 2$ et $inf[1,2] = 1$. En effet, admettons qu'il existe un majorant M_1 de l'ensemble A inférieur à 2. $M_1 < 2$. Mais M_1 n'est pas un majorant car $2 \in [1,2]$. Contradiction, donc M_1 n'existe pas et 2 est la borne supérieure. Même raisonnement pour la borne inférieure.

(b) $sup]1,2[= 2$ et $inf]1,2[= 1$. En effet, admettons qu'il existe un majorant M_1 de l'ensemble A inférieur à 2, $M_1 < 2$. Mais M_1 n'est pas un majorant car il existe toujours un réel entre M_1 et 2. Contradiction, donc M_1 n'existe pas et 2 est la borne supérieure. Même raisonnement pour la borne inférieure.

(c) $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$. $sup\, A = 1$ et $inf\, A = 0$. En effet $A =]0,1]$ car la limite de $\frac{1}{n}$ pour $n \to \infty$ est 0, $\frac{1}{1} = 1$ et la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante.

(d) $A = \{\frac{(-1)^n}{n} | n \in \mathbb{N}\}$. $sup\, A = \frac{1}{2}$ et $inf\, A = -1$. Il faut montrer que $A = [-1, \frac{1}{2}[$. n est impair, $A_1 = [-1, 0[$, n est pair, $A_p =]0, \frac{1}{2}]$.

P2

P3

Exercice 32

A faire

Exercice 33

A faire

Exercice 37

A faire

Exercice 38

A faire

QED