Exo 2

La fonction $f(x) = \sqrt{(x^3-1)(x-1)}$ est définie si $(x^3-1)(x-1)$ est positif ou nul . Il y a 4 cas possibles:

	$(x-1) \geq 0$	$(x-1) \leq 0$
$(x^3-1) \geq 0$	$x \geq 1$	$x = 1$
$(x^3-1) \leq 0$	$x = 1$	$x \leq 1$

La fonction f est définie pour toute les valeurs $x \in \mathbb{R}$.
Donc la proposition est vraie.

Exo 3

La fonction f est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.
Vérifions la proposition f est surjective. f est surjective si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{N}, f(x) = y$
Prenons la valeur $y = 0.3$. Existe-t-il un x tel que $f(x) = y$. 2 cas possibles.
Cas 1, x est pair. Donc $f(x) = \frac{x}{2}$.

$$\frac{x}{2} = 0.3$$

$$x = 0.6$$

$$x \notin \mathbb{N}$$

Cas 2, x est impair. Donc $f(x) = -\frac{x+1}{2}$.

$$-\frac{x+1}{2} = 0.3$$

$$x = -1.6$$

$$x \notin \mathbb{N}$$

Il n'existe pas de $x \in \mathbb{N}$ pour $y = 0.3$.
Donc la proposition est fausse.

Exo 4

La fonction f est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

f Injective ?

Vérifions la proposition f est injective. f est injective si $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$. Il y a 4 cas possibles.

	x_1 pair	x_1 impair
x_2 pair	$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2}$ donc $x_1 = x_2$	$\frac{x_2}{2} = -\frac{x_1+1}{2}$
x_2 impair	$\frac{x_1}{2} = -\frac{x_2+1}{2}$	$-\frac{x_1+1}{2} = -\frac{x_2+1}{2}$ donc $x_1 = x_2$

$\frac{x_2}{2} = -\frac{x_1+1}{2}$, $x_2 = -(x_1+1)$, $f(x_1) = f(x_2)$ impossible car $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$
$\frac{x_1}{2} = -\frac{x_1+1}{2}$, $x_1 = -(x_2+1)$, $f(x_1) = f(x_2)$ impossible car $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$
Donc f est injective

f **Surjective ?**

Vérifions la proposition f est surjective. f est surjective f est surjective si $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{N}, f(x) = y$
Existe-t-il un x tel que $f(x) = y$. 2 cas possibles.
Cas 1, x est pair. Donc $f(x) = \frac{x}{2}$.

$$\frac{x}{2} = y$$

$$x = 2 * y$$

$$x \in \mathbb{N} \; si \; y \geq 0$$

Cas 2, x est impair. Donc $f(x) = -\frac{x+1}{2}$.

$$-\frac{x+1}{2} = y$$

$$x = -2 * y - 1$$

$$x \in \mathbb{N} \; si \; -2 * y - 1 \geq 0 \; ou \; y \leq -1$$

Donc, $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{N}, f(x) = y$, donc f est surjective.

f est injective et surjective, donc f est bijective.
Donc la proposition est vraie.

Exo 5

$$(e^{n^3} - e^n) = (e^{3n} - e^n)$$

$$= e^{3n}(1 - \frac{1}{e^{2n}})$$

On a

$$\lim_{n \to +\infty} e^{3n} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^{2n}} = 0$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} (e^{n^3} - e^n) = +\infty$$

Donc la proposition est fausse.

Exo 6

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3 * ln^2 n}{e^{\frac{1}{n}} + (1 + ln\, n)^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3 * ln^2 n}{(1 + ln\, n)^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{3 * ln^2 n}{1 + 2ln\, n + ln^2 n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{3 * ln^2 n}{ln^2 n * (\frac{1}{ln^2 n} + \frac{2}{ln\, n} + 1)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{\frac{1}{ln^2 n} + \frac{2}{ln\, n} + 1}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{ln^2\, n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{ln\, n} = 0$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\frac{1}{ln^2\, n} + \frac{2}{ln\, n} + 1} = 3$$

Donc la proposition est vraie.

Exo 7

Si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $\frac{n^2+n*ln(n)}{n^3} > \frac{1}{2}$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + n * ln(n)}{n^3} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{n^2 + n * ln(n)}{n^3} = \frac{n^3(\frac{1}{n} + \frac{ln(n)}{n^2})}{n^3}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{ln(n)}{n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{ln(n)}{n^2} = 0$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + n * ln(n)}{n^3} = 0$$

Ce qui contredit l'hypothese
Donc la proposition est fausse.

Exo 8

On a $a = e^{ln\, a}$ pour tout a positif. Calculons la limite:

$$\lim_{n\to\infty} ln((1 + 1/n)^n)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\, ln((1 + 1/n))$$

On a $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ et $\lim_{n\to\infty} ln((1+1/n) = 0$. Donc la limite ne peut pas être calculée. Utilisons la règle de L'Hospital.

$$\lim_{n\to\infty} n\, ln((1 + 1/n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{ln((1 + 1/n))}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(ln((1 + 1/n)))'}{(\frac{1}{n})'}$$

On a:
$(\frac{1}{n})' = \frac{-1}{n^2}$
$(ln((1 + 1/n)))' = \frac{\frac{-1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{-1}{n^2}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{-1*n}{n^2*(n+1)} = \frac{-1}{n*(n+1)}$.

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(ln((1+1/n)))'}{(\frac{1}{n})'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-1}{n*(n+1)}}{\frac{-1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n*(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{ln((1+1/n)^n)} = e$$

Donc la proposition est fausse.

Exo 9

La suite u_n est croissante si $u_{n+1} - u_n > 0$.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

$\frac{1}{n+1}$ est un nombre positif, par conséquent la suite u_n est croissante.
Donc la proposition est vraie.

Exo 10

La suite v_n est croissante si $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_1 + \ldots + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$$

$$= \frac{n*(u_1 + \ldots + u_{n+1}) - (n+1)*(u_1 + \ldots + u_n)}{n*(n+1)}$$

$$= \frac{n*(u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1}) - (n+1)*(u_1 + \ldots + u_n)}{n*(n+1)}$$

$$= \frac{n*(u_1 + \ldots + u_n) + n*u_{n+1} - n*(u_1 + \ldots + u_n) - (u_1 + \ldots + u_n)}{n*(n+1)}$$

$$= \frac{n*u_{n+1} - (u_1 + \ldots + u_n)}{n*(n+1)}$$

Comme la suite u_n est croissante, u_{n+1} est plus grand que $u_1, u_2 \ldots n_n$. Donc $n*u_{n+1} > u_1 + u_2 \ldots + n_n$. Par consequent,

$$\frac{n*u_{n+1} - (u_1 + \ldots + u_n)}{n*(n+1)} > 0$$

$$v_{n+1} - v_n > 0$$

Donc la proposition est vraie.

Exo 11

La fonction e^{-n} pour $n \in \mathbb{N}^*$ est décroissante et tend vers 0 quand $n = +\infty$. Donc la fonction $2 - e^{-n}$ est croissante, toujours strictement inferieure á 2 et tend vers 2 quand $n = +\infty$. Donc, 2 est une borne supérieure de $2 - e^{-n}$.
Donc la proposition est vraie.

Exo 12

Soit la suite $u_n = (-1)^n$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} = -1$$

La suite u_n n'est pas convergente.
Il existe une suite u_n qui n'est pas convergente et qui vérifie l'hypothese.
Donc la proposition est fausse.

Exo 13

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$$

alors $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \frac{1}{2}$.
Soit $a = u_{N_0}$ alors $u_{N_0+1} \approx \frac{a}{2}, u_{N_0+2} \approx \frac{a}{4}, \ldots, u_{N_0+m} \approx \frac{a}{2^m}$.
Par consequent, la suite u_n converge vers 0.
Donc la proposition est vraie.

Exo 14

La suite $u_n = sin(n)$ est une suite périodique de période p=360. Soit la fonction $f(n) = n * 360$.
La fonction f est strictement croissante et la suite extraite $v_n = (u_n)_f$ est une suite constante $(= 0)$.
La suite $(sin(n))_n$ admet une suite extraite qui est convergente: (v_n) .

Donc la proposition est fausse.