Rappel de cours

Une matrice $n \times n$ A est diagonalisable ($A = PDP^{-1}0$ si:

- Elle a n vecteurs propres linéairement indépendants, condition pour avoir une matrice P formée des vecteurs propores en colonne qui est inversible.
- Elle a n valeurs propres distinctes, car n valeurs propres génèrent n vecteurs propres linéairement indépendants
- $\sum dim\ E_{sp_n}(A) = n$
- pour chaque valeur propre sp, on a $dim\ E_{sp}(A) = multiplicite\ sp$. La multiplicité de sp le nombre de racine de sp.
- si $\chi_A(X) = P(X)$ et $P(X)$ est un polynome scindé (ie $P(X) = C(X-A_1)(X-A_2)\ldots(X-A_{m-1})(X-A_m)$).
- si $\chi_A(X) = P(X)$ et $P(A) = 0$.

Exercice 3

Exercice 3-e

On a

$$e_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1.2.3\dots(n-1).n}{1.2.3\dots(n-1).n} < \frac{1}{n}.\frac{2}{n}.1.1\dots1 = \frac{2}{n^2}$$

On sait que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge ($\sum_0 \infty \frac{1}{n^2}$ converge). En appliquant le Théorème de Riemann, on déduit que la suite de terme général e_n converge.

Exercice 3-f

On a

$$f_n = \frac{1}{n^2 \ln n} < \frac{1}{n^3}$$

On sait que la série de terme général $\frac{1}{n^3}$ converge ($\sum_0 \infty \frac{1}{n^3}$ converge). En appliquant le Théorème de Riemann, on déduit que la suite de terme général f_n converge.

Exercice 3-g

On a

$$f_n = \frac{2^n + 3^n + n^4}{n5^n + 7n^7 + 2}$$

Exercice 3-h

On a

$$f_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n = \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

C'est une série géomeétrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1. Donc $\sum_0 \infty = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-\frac{1}{2^n})$. Donc la suite de terme général h_n converge.

QED