Rappel de cours

-

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'(t) - \frac{t}{t^2+1} y(t) = t$$

1.1

Si l'équation homogène est de la forme:

$$y'(t) = a(t)y(t)$$

Alors la solution est

$$y_0(t) = \lambda e^{A(t)} \; avec \; A'(t) = a(t)$$

Dans notre cas on a $a(t) = \frac{t}{t^2+1}$, on cherche $A(t) = \int \frac{t}{t^2+1} dt$. Par substitution $u = t^2 + 1$, ce qui fait $\frac{du}{dt} = 2t$, donc $dt = \frac{1}{2t} du$.

$$\int \frac{t}{t^2+1} dt = \int \frac{t}{t^2+1} \frac{1}{2t} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln(u) = \frac{1}{2} \ln(t^2+1)$$

Donc

$$y_0(t) = \lambda e^{\frac{1}{2}\ln(t^2+1)} = \lambda \sqrt{e^{\ln(t^2+1)}} = \lambda \sqrt{t^2+1)}$$

1.2

Calculer une solution particulière par la methode de la variation de la constante. Si l'équation homogène est de la forme:

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

Alors la solution est

$$y_1(t) = \lambda(t) e^{A(t)} \; avec \; A'(t) = a(t) \; et \; \lambda'(t) = b(t) e^{-A(t)}$$

Dans notre cas $a(t) = \frac{t}{t^2+1}$, $A(t) = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$, $\lambda(t) = \int t.e^{-A(t)} dt = \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt$. Par substitution $u = t^2+1$, $\frac{du}{dt} = 2t$ donc $dt = \frac{1}{2t} du$

$$\int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt = \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \frac{1}{2t} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2}.2\sqrt{u} = \sqrt{u} = \sqrt{t^2+1}$$

Donc

$$y_1(t) = \lambda(t) e^{A(t)} = \sqrt{t^2+1}.\sqrt{t^2+1} = t^2+1$$

1.3

L'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ est

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) = \lambda \sqrt{t^2+1} + t^2 + 1$$

$$y(0) = \lambda \sqrt{0^2+1} + 0^2 + 1 = 0, \; donc \; \lambda = -1$$

Donc

$$y(t) = -\sqrt{t^2+1} + t^2 + 1$$