Rappel de cours

Definition 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (U_n) une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I. On dit que (u_n) converge **simplement** vers f sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(U_n(x))$ converge vers $f(x)$.

Definition 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (U_n) une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I. On dit que (u_n) converge **uniformément** vers f sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n > n_0, |(U_n(x)) - f(x)| < \epsilon$$

Definition 3. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ converge **normalement** sur I si la série $\sum_{n\geq 0} ||U_n(x)||_\infty$ est convergente.

Exercice 2

Exercice 2.1

Il faut trouver une fonction $f(x)$ tel que $\forall x \in I$, la suite $(U_n(x))$ converge vers $f(x)$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, (U_n(0)) = 0$, il faut vérifier si la suite de (U_n) converge et trouver la fonction de convergence. Comme d'habitude, trouver une borne supérieure qui converge.

1. Trouver une suite de fonction (V_n) et exprimer (V_n) en fonction de (U_n). Prendre la fonction (V_n) tel que $V_n = g(x,n)U_n$ et $\frac{1}{g(x,n)}$ converge.
2. Vérifier que $\lim_{n\to+\infty} V_n(x) = 0$ et que $V_n(x)$ est positive donc il existe un $c > 0$, tel que $\forall n > n_0, 0 \leq (V_n) \leq c$.
3. Remplacer (V_n) dans l'expression, simplifier et regarder si la borne supérieure converge.

Prenons $V_n = U_n.\frac{n^2}{x^2}$, donc $V_n = \frac{n^3}{e^{x\sqrt{n}}}$
On a $\lim_{n\to+\infty} V_n(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[, V_n(x) \geq 0$ et prenons $c = 1$. Donc

$$0 \leq V_n(x) \leq 1$$

$$0 < U_n(x)\frac{n^2}{x^2} < 1$$

$$0 < U_n(x) < \frac{x^2}{n^2}$$

Comme la borne supérieure converge alors (U_n) converge aussi.

Exercice 2.2

La dérivée de $\left(nx^2.e^{-x\sqrt{n}}\right)' = -x(n^{3/2}x - 2n)e^{-x\sqrt{n}}$. La dérivée s'annule en 2 points $x = 0$ et $x = \frac{2}{\sqrt{n}}$. on a $f(0) = 0$ et

$$f(\frac{2}{\sqrt{n}}) = n.\frac{4}{n}.e^{-\frac{2}{\sqrt{n}}.\sqrt{n}} = 4.e^{-2} = 0.5413$$

.

Donc $sup_{x\in[0,+\infty[} u_n(x) = 4.e^{-2}$, comme le sup est constant, la série de fonction u_n ne converge pas.

Exercice 2.3

Exercice 3

Exercice 3.1

On a $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+x^2} = 0$ donc en prenant $f(x) = 0$ on a u_n qui converge vers $f(x)$.

Exercice 3.1

$\forall x_1, x_2, x_1 < x_2$ calculons $S(x_1) > S(x_2)$ (ou $S(x_1) - S(x_2) > 0$.

$$S(x_1) - S(x_2) = \sum_{N\geq1} u_n(x_1) - \sum_{N\geq1} u_n(x_2) = \sum_{N\geq1} \frac{1}{n^2 + x_1^2} - \sum_{N\geq1} \frac{1}{n^2 + x_2^2}$$

$$= \sum_{N\geq1} \left(\frac{1}{n^2 + x_1^2} - \frac{1}{n^2 + x_2^2}\right) = \sum_{N\geq1} \frac{n^2 + x_2^2 - n^2 - x_1^2}{(n^2 + x_1^2)(n^2 + x_2^2)}$$

$$= \sum_{N\geq1} \frac{x_2^2 - x_1^2}{(n^2 + x_1^2)(n^2 + x_2^2)} > 0$$

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a $0 < \frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ et la fonction $\frac{1}{n^2}$ converge.
QED