Rappel de cours

Definition 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (U_n) une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I. On dit que (u_n) converge **simplement** vers f sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(U_n(x))$ converge vers $f(x)$.

Definition 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (U_n) une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I. On dit que (u_n) converge **uniformément** vers f sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n > n_0, |(U_n(x)) - f(x)| < \epsilon$$

Definition 3. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ converge **normalement** sur I si la série $\sum_{n\geq 0} ||U_n(x)||_\infty$ est convergente.

Definition 4. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ converge **normalement** sur I si la série $\sum_{n\geq 0} ||U_n(x)||_\infty$ est convergente.

Exercice 2

Exercice 2.1.a

Calculons $\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|$.

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}\frac{x^{n+2}}{n+2}}{(-1)^n 2^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-2x\frac{n+1}{n+2}\right| = |-2x|$$

Exercice 2.1.b

Calculons $\left|\frac{f'_{n+1}(x)}{f'_n(x)}\right|$. avec $f'_n(x) = (-1)^n 2^n x^n$.

$$L' = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}x^{n+1}}{(-1)^n 2^n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|-2x| = |-2x|$$

Exercice 2.1.c

D'après le critère d'Alembert, la série de terme générale $|f_n|$ converge normalement si $\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| < 1$. Donc, il faut trouver x tel que $|-2x| < 1$, cela fait $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ donc pour tous $[-a, a]$ avec $a \in [0, \frac{1}{2}[$

Exercice 2.2

Les 2 séries ne convergent pas car $x = \pm\frac{1}{2}$ car ces valeurs ne vérifient pas le critère d'Alembert. ???

Exercice 2.3

Sur $x \in [0, \frac{1}{2}[$, la fonction $f_n(x) = 2^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est décroissante et tend vers 0. La série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est une série alternée. En utilisant, le théorème du reste on a:

$$|R_n(x)| = |\sum_{k\geq n+1} f_k(x)| \leq f_{n+1}(x)$$

Donc

$$f_{n+1}(x) = 2^{n+1}\frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{(2x)^{n+2}}{2(n+2)}$$

Pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2x)^{n+2}}{2(n+2)} = 0$$

Donc la série converge uniformément.

Exercice 2.4

Pour $a \in]0, \frac{1}{2}[$, Sur le domaine $[-a, 0[$, on a

$$|(-1)^n 2^n\frac{x^{n+1}}{n+1}| = |(-1)^n\frac{(2x)^{n+1}}{2(n+1)}| < |(-1)^n\frac{(2a)^{n+1}}{2(n+1)}| = \frac{(2a)^{n+1}}{2(n+1)}$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2a)^{n+1}}{2(n+1)} = 0$$

Donc, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-a, 0[$, pour $a \in [0, \frac{1}{2}]$, comme elle convergence également sur le domaine $[0, \frac{1}{2}[$, elle converge sur $[-a, \frac{1}{2}[$.

Exercice 2.5

On a

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} f_n'(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n 2^n x^n = \sum_{n\geq 0}(-2x)^n$$

Série géométrique de raison $-2x$. Donc

$$g(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1-(2x)^N}{1-(-2x)} = \frac{1}{1+2x}$$

On a

$$\int g(x) = \int \frac{1}{1+2x} = \frac{1}{2}\ln(1+2x)$$

et

$$\int g(x) = \int \sum_{n\geq 0} f_n'(x) = \sum_{n\geq 0}\int f_n'(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x) = f(x)$$

Exercice 1

Exercice 1.1

La $f_x(t) : [0,\infty] \to \mathbb{R}, f(x,t)$ est continue pour tous $x \in [-\infty,+\infty]$ car assemblage de fonctions continues donc la fonction $F(x)$ est bien définie. La fonction à deux variables $f(x,t)$ est continue donc la fonction $F(x)$ est continue sur un segment fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.2

Décroissante, calculons $F(x_1) - F(x_2)$ pour $x_1 > x_2$ avec $x_1, x_2 \in [0,\infty]$.

$$F(x_1) - F(x_2) = \int_0^\infty \frac{e^{-x_1t^2}}{1+t^2}dt - \int_0^\infty \frac{e^{-x_2t^2}}{1+t^2}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-x_1t^2}}{1+t^2} - \frac{e^{-x_2t^2}}{1+t^2}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-x_1t^2} - e^{-x_2t^2}}{1+t^2}dt$$

et

$$x_1 > x_2,\quad e^{x_1t^2} > e^{x_2t^2},\quad \frac{1}{e^{x_1t^2}} < \frac{1}{e^{x_2t^2}},\quad e^{-x_1t^2} < e^{-x_2t^2},\quad e^{-x_1t^2} - e^{-x_2t^2} < 0$$

Donc $F(x_1) - F(x_2) < 0$ pour $x_1 > x_2$, donc F est décroissante sur $[0,\infty]$.

Exercice 1.3

La fonction $F(x)$ est continue et sa dérivée partielle $\partial x f(x,t) = \partial x \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} = \frac{-t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[-\infty,+\infty]$, donc $F(x)$ est de classe C^1 sur $[-\infty,+\infty]$. et

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{-t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$$

Exercice 1.4.a

$$F(x) - F'(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt - \int_0^\infty \frac{-t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2} + t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}dt = \int_0^\infty \frac{(1+t^2)e^{-xt^2}}{1+t^2}dt = \int_0^\infty e^{-xt^2}dt$$

substitution $u = \sqrt{x}t$, $\frac{du}{dt} = \sqrt{x}$ et $dt = \frac{1}{\sqrt{x}}du$

$$F(x) - F'(x) = \int_0^\infty e^{-xt^2}dt = \int_0^\infty e^{-u^2}\frac{1}{\sqrt{x}}du = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

Exercice 1.4.b

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^\infty = \lim_{t\to\infty} \arctan(x) - \arctan(0) = \lim_{t\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Donc, comme $F(x)$ est continue on a

$$\lim_{x\to 0^+} F'(x) = \lim_{x\to 0^+} (F(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}) = F(0) - \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2} - \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} = -\infty$$

QED

Exercice 1.5

substitution $u = \sqrt{x}t$, $\frac{du}{dt} = \sqrt{x}$ et $dt = \frac{1}{\sqrt{x}} du$

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt = \int_0^\infty -\frac{\frac{u^2}{x}}{1+\frac{u^2}{x}} e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{x}} du = -\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{u^2}{x+u^2} e^{-u^2} du$$

?????

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} (\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + F'(x) < \lim_{x\to\infty} (\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + \frac{A}{x\sqrt{x}}) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

car quand $x \to \infty$ on a $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} >> \frac{A}{x\sqrt{x}}$