

Exercice 1

La fonction $f(x)$ est paire ssi $\forall x, f(x) = f(-x)$, La fonction $f(x)$ est impaire ssi $\forall x, f(x) = -f(-x)$.

Soit une fonction $f(x)$,

$$f(x) = \frac{2f(x)}{2} = \frac{2f(x) + f(-x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Soit la fonction $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, la fonction $f_1(x)$ est paire car $f_1(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_1(x)$.

Soit la fonction $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, la fonction $f_2(x)$ est impaire car $f_2(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -f_2(x)$.

Pour toute fonction $f(x)$, on a trouvé une fonction $f_1(x)$ paire et une fonction $f_2(x)$ impaire tel que $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Buffon TD1 - Exercice 5

Vrai pour u_0 ? $u_0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$, oui.

Admettons que $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$, calculons u_{n+1} .

$$u_{n+1} = u_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Vrai pour v_0 ? $v_0 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0+1)}{6} = 0$, oui.

Admettons que $v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, calculons v_{n+1} .

$$v_{n+1} = v_n + n + 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Vrai pour w_0 ? $w_0 = \left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2 = 0$, oui.

Admettons que $w_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, calculons w_{n+1} .

$$w_{n+1} = w_n + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$w_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2$$

Buffon TD1 - Exercice 6

Preuve par récurrence, supposons $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies n! \geq 2^n$, trouvons un entier n pour lequel $n! \geq 2^n$ et vérifions la propriété pour $n+1$ avec l'hypothèse de récurrence $n! \geq 2^n$. Prenons $n=4$, on a $4! = 24 \geq 16 = 2^4$.

$$\begin{aligned}(n+1)! &= n!(n+1) \geq 2^n(n+1) \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= n2^n + 2^n > 2^{n+1}, \text{ pour } n \geq 2\end{aligned}$$

Pour $n_0 \geq 2$ la proposition est vraie. Donc il existe un n_0 (par exemple $n_0 = 2$) pour lequel la proposition est vraie.

Buffon TD1 - Exercice 7

$$u_0 = 1, u_1 = u_0 = 1, u_2 = u_0 + u_1 = 2, u_3 = u_0 + u_1 + u_2 = 4, u_4 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 8.$$

Vrai pour u_0 ?, $u_0 = 1 \leq 2^0 = 1$, Vrai.

Hypothèse de récurrence: $u_n \leq 2^n$, calculons u_{n+1} .

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_n + u_n = 2u_n \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

La proposition est vraie.

Buffon TD1 - Exercice 8

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \implies \left(\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z} \right) \right)$$

Pour $n = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \implies \left(x^0 + \frac{1}{x^0} \in \mathbb{Z} \right) \right)$ qui est vrai.

Pour $n = 1$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \implies \left(x^1 + \frac{1}{x^1} \in \mathbb{Z} \right) \right)$ qui est vrai.

Supposons la propriété vraie au rang $k < n$, calculons le rang n .

$$\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right) = x^n + x^{n-2} + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-2}} = \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right) + \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \right)$$

Donc

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n} \right) = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \right)$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) \in \mathbb{Z}$ et $\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \right) \in \mathbb{Z}$. Donc $\left(x^n + \frac{1}{x^n} \right) \in \mathbb{Z}$ car la soustraction de deux nombres dans \mathbb{Z} .

Buffon TD2 - Exercice 1.a

$$(1-a) \sum_{k=1}^n ka^{k-1} = \sum_{k=1}^n ka^{k-1} - \sum_{k=1}^n aka^{k-1} = \sum_{k=1}^n ka^{k-1} - \sum_{k=1}^n ka^k$$

$$\sum_{k=1}^n ka^{k-1} - ka^n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k - na^n = \sum_{k=0}^n a^k - (n+1)a^n$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n ka^k = \sum_{k=1}^n ka^{k-1} - \sum_{k=0}^n a^k + (n+1)a^n$$

On a $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ et $\sum_{k=1}^n ka^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^n a^k\right)' = \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)'$ Donc

$$\sum_{k=1}^n ka^k = \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)' - \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + (n+1)a^n$$

Buffon TD2 - Exercice 1.b

Trouver a, b, c , tel que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$.

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a(x^2 + 3x + 2) + b(x^2 + 2x) + c(x^2 + x)}{x(x+1)(x+2)}$$

Donc

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases}$$

Et $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{1}{2}$. Donc $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} \right) - \left(\sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \end{aligned}$$

Buffon TD2 - Exercice 3.1

$$\sum_{k \in [1, 2n], \text{impair}} 3^k = 3^1 + 3^3 + 3^5 + \dots + 3^{2n-1} = 3 + 3.9 + (3.9).9 + \dots (((\dots))).9$$

Soit la suite géométrique définie par $u_0 = 3$ et de raison $q = 9$. La somme $\sum_{k \in [0, n]} u_k = u_0 \cdot \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$. Donc

$$\sum_{k \in [1, 2n], \text{impair}} 3^k = 3 \cdot \left(\frac{1-9^{n+1}}{1-9}\right)$$

Buffon TD2 - Exercice 3.2

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln(k-1) + \ln(k+1) - \ln(k^2) \\
&= \sum_{k=2}^n \ln(k-1) + \sum_{k=2}^n \ln(k+1) - 2 \sum_{k=2}^n \ln(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) - 2 \sum_{k=2}^n \ln(k) \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) + \ln(1) + \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) - \ln(2) + \ln(n) + \ln(n+1) - 2 \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) - 2 \ln(n) = -\ln(2) + \ln(n) + \ln(n+1) - 2 \ln(n) \\
&= -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Buffon TD2 - Exercice 3.3

$$\prod k = 1n \left(1 - \frac{1}{2k}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} = \frac{\prod_{k=1}^n 2n-1}{\prod_{k=1}^n 2n} = \frac{\prod_{k=[1,2n], \text{impair}} n}{\prod_{k=[1,2n], \text{pair}} n}$$

Soit les séries arithmétique $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ et $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n + 2$.

$$\frac{\prod_{k=0}^n u_n}{\prod_{k=0}^n v_n}$$

Buffon TD2 - Exercice 3.4

$$\prod_{k=1}^n 3^k = 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \dots 3^n = 3^{1+2+3+\dots+n} = 3^{\sum_{k=1}^n k} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Buffon TD2 - Exercice 3.6

$$\sum_{k=1}^n k k! = \sum_{k=1}^n ((k+1) - 1) k! = \sum_{k=1}^n (k+1) k! - k! = \sum_{k=1}^n (k+1)! - \sum_{k=1}^n k! = (n+1)! - 1$$

Buffon TD3 - Exercice 1.1

Soit $z = a + bi$,

$$z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$$

$$(a + bi)(a - bi) + 3((a + bi) - (a - bi)) = 4 - 3i$$

$$a^2 + b^2 + 3(2bi) = 4 - 3i$$

Donc, on a $a^2 + b^2 = 4$ et $6b = -3$, ce qui fait $b = -\frac{1}{2}$ et $a = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Buffon TD3 - Exercice 1.3

Soit $z = a + bi$,

$$|z| = z + \bar{z}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$$b^2 = 3a^2$$

Buffon TD3 - Exercice 1.5

Soit $z = a + bi$,

$$|(1 + i)z - 2i| = 2$$

$$|(1 + i)(a + bi) - 2i| = 2$$

$$|a + bi + ai - b - 2i| = 2$$

$$\sqrt{(a - b)^2 + (a + b - 2)^2} = 2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + (a + b - 2)^2 = 4$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + b^2 + 2ab - 4a - 4b + 4 = 4$$

$$2a^2 + 2b^2 - 4a - 4b = 0$$

$$a^2 + b^2 - 2a - 2b = 0$$

Rappel de cours

- la fonction $f \in F^E$ est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent, $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ ou $\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.
- la fonction $f \in F^E$ est surjective si tout élément de F admet exactement un antécédent, $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.
- la fonction $f \in F^E$ est bijective si elle est injective et surjective.
- soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$, la composée des fonctions f et g notée $g \circ f$ définie par $g \circ f : E \rightarrow G, x \mapsto g(f(x))$.

Buffon TD5 - Exercice 4.1

P : Si $g \circ f$ est injective alors f aussi.

Comme $g \circ f$ est injective, on a $(\forall (x_1, x_2) \in E^2, g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \implies x_1 = x_2) : [1]$.

Preuve par l'absurde.

Supposons que la fonction f n'est pas injective. Donc $\exists (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 \neq x_2 : [2]$.

En partant de $f(x_1) = f(x_2)$, on a $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ car g est une fonction. Donc de [1], on a $x_1 = x_2$.

En partant de $f(x_1) = f(x_2)$ et de [2], on a $x_1 \neq x_2$ ce qui contredit précédemment.

Donc la proposition P est vraie.

Buffon TD5 - Exercice 4.2

P : Si $g \circ f$ est surjective alors g aussi.

Partons de $g \circ f$ est surjective, on a $\forall y \in G, \exists! x \in E, y = g \circ f(x) = g(f(x)) : [1]$.

et f est une fonction donc $\forall x_e \in E, \exists! y_f \in F, y_f = f(x_e)$. Donc, $\forall y \in G, y = g(f(x))$ de [1], soit $b \in F, b = f(x)$, b existe et est unique par [2].

Donc $\forall y \in G, y = g(f(x)) = g(b)$ ce qui est la définition de g est une fonction surjective.

Buffon TD5 - Exercice 4.3

Comme $g \circ f$ est injective, on a $(\forall (x_1, x_2) \in E^2, g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \implies x_1 = x_2) : [1]$.

Comme f est surjective, on a $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x) : [2]$.

Preuve par l'absurde.

Supposons que la fonction g n'est pas injective. Donc $\exists (x_1, x_2) \in F^2, g(x_1) = g(x_2) \implies x_1 \neq x_2 : [3]$.

Exercice Cauchy

Solution de l'équation différentielle de la forme $(y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ est $y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_1(t)$ avec $A(t)$ une primitive de la fonction $a(t)$ et $y_1(t)$ est une solution particulière de l'équation.

Pour $y'(t) - \frac{y(t)}{t^2} = e^{\frac{1}{i}} \sin(t)$, donc $a(t) = \frac{1}{t^2}$ et $b(t) = e^{\frac{1}{i}} \sin(t)$. On a $A(t) = -\frac{1}{t}$. Recherchons une solution particulière de la forme $y_1(t) = \lambda(t)a^{A(t)}$ avec $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$.

$$\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)} = e^{\frac{1}{i}} \sin(t)e^{-\frac{1}{t}} = \sin(t)$$

donc $\lambda(t) = -\cos(t)$ et $y_1(t) = -\cos(t)e^{-\frac{1}{t}}$

Par conséquent

$$y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_1(t) = \lambda e^{-\frac{1}{t}} - \cos(t)e^{-\frac{1}{t}} = e^{-\frac{1}{t}}(\lambda - \cos(t))$$

Calculons l'unique solution $y(2\pi) = e^{-\frac{1}{2\pi}}(\lambda - \cos(2\pi)) = \lambda e^{-\frac{1}{2\pi}} = 0$.

Donc $\lambda = 0$ et l'unique solution est

$$y(t) = -\cos(t)e^{-\frac{1}{t}}$$

QED