## Exercice 5

## Question 5.A.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx = \int_{-\infty}^{\theta} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx + \int_{\theta}^{+\infty} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx$$

$$0 + \int_{\theta}^{+\infty} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} dx = \left[\frac{\theta^m}{x^m}\right]_{\theta}^{+\infty} = \frac{\theta^m}{\theta^m} - \frac{\theta^m}{\infty^m} = 1 - 0 = 1$$

## Question 5.A.2

$$\forall t \geq \theta, P(X \geq t) = \int_{\theta}^{t} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} dx = \left[\frac{\theta^m}{x^m}\right]_{\theta}^{t} = 1 - \left(\frac{\theta}{t}\right)^m$$

## Question 5.A.2

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx = 0 + \int_{\theta}^{+\infty} x\frac{m\theta^m}{x^{m+1}} dx = m\theta^m \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{x^m} dx =$$

$$m\theta^m \left[-\frac{1}{(m-1)x^{m-1}}\right]_{\theta}^{+\infty} = -\frac{m\theta^m}{m-1}\left(0 - \frac{1}{\theta^{m-1}}\right) = \frac{m\theta}{m-1}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx = 0 + \int_{\theta}^{+\infty} x^2\frac{m\theta^m}{x^{m+1}} dx = m\theta^m \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{x^{m-1}} dx =$$

$$m\theta^m \left[-\frac{1}{(m-2)x^{m-2}}\right]_{\theta}^{+\infty} = -\frac{m\theta^m}{m-2}\left(0 - \frac{1}{\theta^{m-2}}\right) = \frac{m\theta^2}{m-2}$$

## Question 5.A.3

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{m\theta^2}{m-2} - \left(\frac{m\theta}{m-1}\right)^2 =$$

$$\frac{m(m-1)^2 - m^2(m-2)}{(m-2)(m-1)^2}\theta^2 = \frac{m}{(m-2)(m-1)^2}\theta^2$$

## Question 5.B.1

Méthode des moments de niveau 1, $M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, et $E(X) = M_1$ donc

$$M_1 = \frac{m\theta}{m-1}$$

Donc l'estimateur est

$$\hat{\theta_1} = \frac{m-1}{m} M_1 = \frac{m-1}{m}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

Comme $m = 3$, on a

$$\hat{\theta_1} = \frac{2}{3}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

TBC

## Question 5.B.2

Méthode du maximum de vraissemblance, on a

$$L_\theta(X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{3\theta^3}{x_i^4} 1_{[\theta,\infty[}(x_i) = 3^n\theta^{3n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^4} 1_{[\theta,\infty[}(x_i)$$

On cherche le maximum de vraissemblance, il est plus facile de trouver le maximum du logarithme de $L(\theta)$. Passage au logarithme

$$\ln(L_\theta(X)) = n\ln(3) + 3n\ln(\theta) - 4\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i 1_{[\theta,\infty[}(x_i)\right) = n\ln(3) + 3n\ln(\theta) - 4\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i 1_{[\theta,\infty[}(x_i))$$

Comme le support ne dépend pas de $\theta$, on a

$$\ln(L_\theta(X)) = n\ln(3) + 3n\ln(\theta) - 4\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

Comme on cherche le maximum de vraissemblance, on calcule la dérivée $\frac{\partial \ln(L_\theta(X))}{\partial\theta}$ et on cherche le point ou elle s'annule.

$$\frac{\partial \ln(L_\theta(X))}{\partial\theta} = 0 + \frac{3n}{\theta} - 0 = 0$$

Donc $\hat{\theta_2} = \pm\infty$ comme point remarquable ???
On calcule $\frac{\partial \ln(L_\theta(X))}{\partial^2\theta}$ pour identifier le point maximum.

$$\frac{\partial \ln(L_\theta(X))}{\partial^2\theta} = -\frac{3n}{\theta^2}$$

Le point maximum est $-\frac{3n}{\theta^2} < 0$ qui est vrai pour toutes valeurs de $\theta$. Comme $\theta > 0$, on a l'estimateur $\hat{\theta_2} = +\infty$.