Rappel de cours

Definition 1. La relation xRy est une relation d'équivalence sur l'ensemble E ssi:

- $\forall x \in E, xRx$
- $\forall x, y \in E, xRy \Leftrightarrow yRx$
- $\forall x, y, z \in E, xRy \wedge yRz \Leftrightarrow xRz$

Exercice 1

Exercice 1.1

- $\forall x \in \mathbb{N}, x \sim x \Leftrightarrow x = 2^k x$ est vrai pour $k = 0$
- $\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \sim y \Rightarrow y \sim x) \Leftrightarrow (y = 2^{k_1} x \Rightarrow x = 2^{k_2} y)$ est vrai pour $k_2 = -k_1$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, (x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z) \Leftrightarrow (y = 2^{k_1} x \wedge z = 2^{k_2} y \Rightarrow z = 2^{k'} x)$ est vrai pour $k' = k_1 + k_2$

Exercice 1.2

Admettons qu'une classe d'équivalence a au moins 2 nombres impairs, donc $\exists k \in \mathbb{N}, (2n+1) = 2^k(2m+1)$. La seule valeur de k possible est $k = 0$ car pour $k > 0$ un coté est impair et l'autre est pair et pour $k < 0$, un coté n'est pas un entier. Pour $k = 0$ on a $(2n+1) = 2^0(2m+1)$, donc $n = m$. Si il y a un nombre impair, il est unique.

Chaque nombre impair est dans une classe d'équivalence car pour tout $a = 2n+1 \in E$, soit $2a \in E$, donc $a \sim 2a$, soit $2a \notin E$ alors $a \sim a$.

L'ensemble E contient n nombres impairs, donc il y a n classes d'équivalence.

Exercice 1.3

Comme $|A| = n + 1$ alors il y a au moins deux éléments de A qui sont dans la même classe d'équivalence (car E contient n classes d'équivalence). Si ils sont dans la même classe alors $a \sim b$ existe.

Si on a $a \sim b$, alors $a = 2^k b$. Lorsque $k \geq 0$, a est un multiple de b, lorsque $k < 0$, b est un multiple de a.

Exercice 2

Exercice 3

Équations diophantiennes du premier degré. 1. Trouver une solution particulière de $15x - 22y = 1$; $x = 3, y = 2$. Donc $15 * 3 - 22 * 2 = 1$. En soustraiant les 2 ́quations on a

$$15x - 22y - (15 * 3 - 22 * 2) = 0, 15(x-3) - 22(y-2) = 0, 15(x-3) = 22(y-2)$$

2. Les entiers 15 et 22 sont premiers entre eux donc $22|(x-3)$, donc $x = 22k + 3$.

$$15(x-3) = 22(y+2), 15(22k+3-3) = 22(y+2), y = 15k+2$$

La solution est $x = 22k + 3$ et $y = 15k + 2$.

Exercice 4

$$15x + 24y = 5, 3(5x + 8y) = 5$$

. Pas de solution car 5 n'est pas un multiple de 3.

Exercice 7

Exercice 7.1

$1995 = 5 * 7 * 57$ et $2975 = 5^2 * 7 * 17$, donc $pgcd(1995, 2975) = 5 * 7 = 35$

Exercice 7.2

$n.k + 8 = 2003$ et $n * k' + 27 = 3002$. donc $nk = 1995$ et $nk' = 2975$ et $pgcd(1975, 2975) = 35$.
Ceci fait $n.k = 35 * 57$ et $n.k' = 35 * 85$. Donc, la solution est $n = 35$.

Exercice 8

On cherche c tel que $11c + 1 = x^2$. Ceci donne l'équation déophantienne de degré 2: $x^2 - 11c - 1 = 0$. La solution est $x = 22k + 21$ et $c = 44k^2 + 84k + 40 = 2(22k^2 + 42k + 20)$. Il n'existe pas de nombre premier c.

QED