Exercice 17

Une suite rélle u_n converge vers le réel l si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon \implies |u_n - l| < \epsilon \text{ [P1]}$$

Une suite rélle u_n diverge vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_A \implies U_A \geq A \text{ [P2]}$$

Une suite rélle u_n diverge vers $-\infty$ si

$$\forall B \in \mathbb{R} \exists N_B \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_B \implies U_B \leq B \text{ [P3]}$$

Exercice 17.1

Supposons que $l = 2$.
Prenons un $\epsilon > 0$, trouvons un N_ϵ tel que $|u_{N_\epsilon} - 2| < \epsilon$. Par exemple, $N_\epsilon = 4$, car $|u_4 - 2| = |2 - 2| = 0 < \epsilon$.
Maintenant, vérifions [P1] pour $l = 2$. $\forall \epsilon > 0, \forall n > 4, |u_n - 2| < \epsilon$, calculons $u_{n>4} = 2 = u_4$, la propriété [P1] est vérifée pour tous les $n > N_\epsilon$.

Exercice 17.2

- $a = 1$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$
- $|a| < 1$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
- $a \leq -1$, pas de limite
- $a \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

Pour le second cas, posons $l = 0$, trouvons un N_ϵ tel que $|u_{N_\epsilon} - 0| < \epsilon$. Par exemple, $N_\epsilon, |a^{N_\epsilon}| < \epsilon$. N_ϵ existe car $|a| < 1$. On a bien $|u_{N_\epsilon} - 0| = |a^{N_\epsilon}| < \epsilon$.
Maintenant, vérifions [P1] pour $l = 0$. $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, |u_{N_\epsilon} - 0| < \epsilon$. Calculons $u_{N_\epsilon+1} = a^{N_\epsilon+1} < a^{N_\epsilon}$, la propriété [P1] est vérifée pour tous les $n > N_\epsilon$.
Même raisonnement pour les autres cas.

Exercice 17.3

La suite diverge. Prenons un A, et calculons N_A tel que $u_{N_A} > A$. Calculons u_{N_A+1}.
$u_{N_A+1} = \frac{(N_A+1)^{N_A+1}}{(N_A+1)!} = \frac{(N_A+1).....(N_A+1).(N_A+1)}{N_A!(N_A+1)} = \frac{(N_A+1).....(N_A+1)}{N_A!}$, Les nombres au numérateur sont toujours plus grand que ceux du numérateur pour u_{N_A}, donc la suite $u_{N_A+1} > u_{N_A} > A$.
La propriété $[P2]$ est vérifiée.

La suite diverge. Prenons un A, et calculons N_A tel que $u_{N_A} > A$. Calculons u_{N_A+1}.
$u_{N_A+1} = \frac{(N_A+1)!}{2^{N_A+1}} = \frac{N_A!(N_A+1)}{2.2.2.....2} = U_{N_A}.\frac{(N_A+1)}{2}$. Donc la suite $u_{N_A+1} > u_{N_A} > A$.
La propriété $[P2]$ est vérifiée.

Exercice 18

On a $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon \implies |u_n - l| < \epsilon$

Exercice 39

Exercice 39.1

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$$

Exercice 39.2

$$\lim_{n\to+\infty} v_{4n} = \sin(4n\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{4n+1} = \sin((4n+1)\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_{4n+2} = \sin((4n+2)\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{4n+3} = \sin((4n+3)\frac{\pi}{2}) = -1$$

Exercice 39.3

$$\lim_{n\to+\infty} w_{6n} = \sin(6n\frac{\pi}{3}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} w_{6n+1} = \sin((6n+1)\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} w_{6n+2} = \sin((6n+2)\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} w_{6n+3} = \sin((6n+3)\frac{\pi}{3}) = -1$$

$$\lim_{n\to+\infty} w_{6n+4} = \sin((6n+4)\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} w_{6n+5} = \sin((6n+5)\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 39.4

$$\lim_{n\to+\infty} x_{4n} = \sin^{4n}(4n\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_{4n+1} = \sin^{4n+1}((4n+1)\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_{4n+2} = \sin^{4n+2}((4n+2)\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_{4n+3} = \sin^{4n+3}((4n+3)\frac{\pi}{2}) = -1$$

Exercice 39.5

$$\lim_{n\to+\infty} x_{4n} = |\sin(4n\frac{\pi}{2})|^{\frac{4n}{2}} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_{4n+1} = |\sin((4n+1)\frac{\pi}{2})|^{\frac{4n+1}{2}} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_{4n+2} = |\sin((4n+2)\frac{\pi}{2})|^{\frac{4n+2}{2}} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_{4n+3} = |\sin((4n+3)\frac{\pi}{2})|^{\frac{4n+3}{2}} = 1$$

Exercice 39.6

$$\lim_{n\to+\infty} v_{4n} = 4n\sin(4n\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{4n+1} = (4n+1)\sin((4n+1)\frac{\pi}{2}) = 4n+1$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_{4n+2} = \sin((4n+2)\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{4n+3} = (4n+3)\sin((4n+3)\frac{\pi}{2}) = -4n-3$$

Exercice 40

Exercice 40.1

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 2n+1 = +\infty$$

Exercice 40.2

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \frac{2n+4}{2^{2n}} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \frac{2n+7}{e^{2n+1}} = 0$$

Exercice 40.3

Valeur $a = 0$, u_{2n} n'est pas définie.

Valeur $|a| < 1$, u_{2n}

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \frac{2n+4}{a^{2n}} = +\infty$$

Valeur $|a| = 1$, u_{2n}

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \frac{2n+4}{1^{2n}} = 2n+4$$

Valeur $|a| > 1$, u_{2n}

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \frac{2n+4}{a^{2n}} = 0$$

Et

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = 2n+1 = +\infty$$

Exercice 40.4

$$\lim_{n \to +\infty} u_{3n} = \frac{3n+4}{3n} = 1 + \frac{4}{3n} = 1$$

Et

$$\lim_{n \to +\infty} u_{3n+1} = 3$$

Et

$$\lim_{n \to +\infty} u_{3n+2} = \frac{(3n+2)^2+1}{3n^2} = \frac{9n^2+12n+5}{3n^2} = 3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{3n^2} = 3$$

Exercice 51

Exercice 51.1

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 1 = \lim_{x \to 0} (x+1)^2 + 1 = \lim_{x \to 0} x^2 + \lim_{x \to 0} 2x + \lim_{x \to 0} 1 + \lim_{x \to 0} 1 = 0 + 0 + 1 + 1 = 2$$

Exercice 51.2

$$\lim_{x \to +\infty} -x - \ln(x) = -\lim_{x \to +\infty} x - \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = -\infty - \infty = -\infty$$

Exercice 51.3

$$\lim_{x \to +\infty} x - \ln(x) = x.(1 - \frac{\ln(x)}{x}) = \lim_{x \to +\infty} x. \lim_{x \to +\infty} (1 - \frac{\ln(x)}{x}) = +\infty.(1-0) = +\infty$$

Car $\ln(x) << x$.

Exercice 51.4

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} + \ln(x-1) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} + \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + x\ln(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}. \lim_{x \to 0^+} (1 + x\ln(x))$$

$$= \frac{1}{0^+}.(1+0) = +\infty$$

Voir exercice 17.

Exercice 51.5

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 - x = \lim_{x\to-\infty} x(x-1) = \lim_{x\to-\infty} x. \lim_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty. -\infty = +\infty$$

Exercice 52

On a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, calculons $\lim_{x\to 0}\cos(x)$.
En utilisant la règle de l'Hospital, on a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin'(x)}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$.

Exercice 51.1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{\lim_{x\to 0}\cos(x)}{\lim_{x\to 0} x - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

Exercice 52.2

On a $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Calculons $\lim_{x\to 0}\tan(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{x\cos(x)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{x}{cos(x)} = 1.\frac{\lim_{x\to 0} x}{\lim_{x\to 0} cosx} = 1.0 = 0$$

Exercice 52.3

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-(\cos^2(x)+\sin^2(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\cos^2(x)}{x^2} - \frac{\sin^2(x))}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\cos^2(x)}{x^2}\right) - \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\cos^2(x)}{x^2}\right) - \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{x^2}(1-\cos(x)\right) - 1$$

Exercice 53

Exercice 53.1

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 53.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 53.3

Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$. 2 cas $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$ et $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$$

Exercice 53.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{\tan(5x)}$$

Utilisation des développements limités de $sin(x)$ et $\tan(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-\frac{(4x)^3}{3!}+\frac{(4x)^5}{5!}+\epsilon(x)}{5x+\frac{(5x)^3}{3}+\frac{2(5x)^5}{15}+\epsilon(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4-\frac{(4x)^2}{3!}+\frac{(4x)^4}{5!}+\epsilon(x)}{5+\frac{(5x)^2}{3}+\frac{(25x)^4}{15}+\epsilon(x)}=\frac{\lim_{x\to 0}4-\frac{(4x)^2}{3!}+\frac{(4x)^4}{5!}+\epsilon(x)}{\lim_{x\to 0}5-\frac{(5x)^2}{3}+\frac{(25x)^4}{15}+\epsilon(x)}=\frac{4}{5}$$

Exercice 53.5

Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{|\sin(4x)|}{\tan(5x)}$. 2 cas $\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin(4x)|}{\tan(5x)}$ et $\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin(4x)|}{\tan(5x)}$ Utilisation des développements limités de $sin(x)$ et $\tan(x)$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|4x-\frac{(4x)^3}{3!}+\frac{(4x)^5}{5!}+\epsilon(x)|}{5x+\frac{(5x)^3}{3}+\frac{2(5x)^5}{15}+\epsilon(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4-\frac{(4x)^2}{3!}+\frac{(4x)^4}{5!}+\epsilon(x)}{5+\frac{(5x)^2}{3}+\frac{(25x)^4}{15}+\epsilon(x)}=\frac{\lim_{x\to 0}4-\frac{(4x)^2}{3!}+\frac{(4x)^4}{5!}+\epsilon(x)}{\lim_{x\to 0}5-\frac{(5x)^2}{3}+\frac{(25x)^4}{15}+\epsilon(x)}=\frac{4}{5}$$

On sait que la fonction sin est impaire donc $\sin(-x)=-\sin(x)$.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|4x-\frac{(4x)^3}{3!}+\frac{(4x)^5}{5!}+\epsilon(x)|}{5x+\frac{(5x)^3}{3}+\frac{2(5x)^5}{15}+\epsilon(x)}=\frac{-4x+\frac{(4x)^3}{3!}-\frac{(4x)^5}{5!}+\epsilon(x)}{5x+\frac{(5x)^3}{3}+\frac{2(5x)^5}{15}+\epsilon(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-4+\frac{(4x)^2}{3!}-\frac{(4x)^4}{5!}+\epsilon(x)}{5+\frac{(5x)^2}{3}+\frac{(25x)^4}{15}+\epsilon(x)}=-\frac{4}{5}$$

Exercice 53.6

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{2})}{x}=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin(x)}{x}=-1$$

Exercice 54

Exercice 54.1.1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{-4x^3+3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-3x^{-1}+x^{-3}}{-4+3x^{-2}+x^{-3}}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

Exercice 54.1.2

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-3x^2+1}{-4x^3+3x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{2(x+1)^3-3(x+1)^2+1}{-4(x+1)^3+3(x+1)+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+3x^2}{-4x^3-12x^2-9x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{-4x^2-12x-9}=\frac{\lim_{x\to 0}2x^2+3x}{\lim_{x\to 0}-4x^2-12x-9}=\frac{0}{9}=0$$

Exercice 54.2

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{3x^4+2}e^x=$$

Calculons

$$\lim_{x\to+\infty}ln\left(\frac{2x+3}{3x^4+2}e^x\right)=\lim_{x\to+\infty}ln\left(\frac{2x+3}{3x^4+2}\right)+ln(e^x)=\lim_{x\to+\infty}ln\left(\frac{2x^{-3}+3x^{-4}}{3+2x{-4}}\right)+x$$

$$=\ln(\lim_{x\to+\infty}2x^{-3}+3x^{-4})-\ln(\lim_{x\to+\infty}3+2x^{-4})+\lim_{x\to+\infty}x=$$

$$=\ln(\lim_{x\to+\infty}2x+3)-\ln(\lim_{x\to+\infty}x^4)-\ln(3)+\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

Exercice 54.3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{3x^4+2}e^{\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{3x^4+2}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x}{3x^4+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{-2}+3x^{-3}}{3+2x^{-4}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}2x^{-2}+3x^{-3}}{\lim_{x\to+\infty}3+2x^{-4}}=\frac{0}{3}=0$$

Exercice 54.4

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^4-2x^2)e^x$$

Calculons

$$\lim_{x\to+\infty}ln((3x^4-2x^2)e^x)=\lim_{x\to+\infty}ln(3x^4-2x^2)+\ln(e^x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2(3x^2-2))+x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2)+\ln(3x^2-2)+x=\infty+\infty+\infty=\infty$$

Exercice 55

Exercice 55.1

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos(x))}{\sin^2(x)}=\frac{\lim_{x\to0}\ln(\cos(x))}{\lim_{x\to0}sin^2(x)}=\frac{\ln(1)}{0+}=+\infty$$

Exercice 55.2

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln((x^{-1}+2)x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln((x^{-1}+2)+\ln(x)}{\ln(1+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln((x^{-1}+2)}{\ln(1+x)}+\frac{\ln(x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2)}{\ln(1+x)}+\frac{\ln(x)}{\ln(1+x)}=1$$

car a l'infini $x\approx1+x$.

Exercice 55.3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(}\ln(1+e^x))}{x^2}$$

On a l'infini $1+e^x\approx e^x$, donc $ln(1+e^x)\approx ln(e^x)=x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\ln(1+e^x)}}{x^2}\approx\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2}=0$$

Exercice 55.4

$$\lim_{x\to-\infty}\sin(x)\sin(\frac{1}{x^2})=\lim_{x\to-\infty}\sin(x).\lim_{x\to-\infty}\sin(\frac{1}{x^2})=[-1;1].0=0$$

Exercice 57

Exercice 57.1

$D_a=\mathbb{R}\setminus\{x^2+x-2=0\}$, $x^2+x-2=0$, donne $x_1=1$ et $x_2=-2$. Donc $a(x)=\frac{2(x+2)}{(x+2)(x-1}=\frac{2}{x-1}$. On a $D_a=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
$D_b=\mathbb{R}\setminus\{x^4+2x^2+1=0\}$, $x^4+2x^2+1=0$, n'a pas de racine car tout les membres sont positifs. Donc $D_b=\mathbb{R}$.

Exercice 57.2

$$a(x) = \frac{2}{3} + \epsilon_1(x-4)$$

$$\epsilon_1(x-4) = a(x) - \frac{2}{3} = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{3} = \frac{6-2x+2}{3(x-1)} = \frac{-2(x-4)}{3(x-1)}$$

$$\epsilon_1(X) = \frac{-2X}{3(X+3)}$$

$$a(x) = -\frac{2}{5} + \epsilon_2(x-4)$$

$$\epsilon_2(x+4) = a(x) + \frac{2}{5} = \frac{2}{x-1} + \frac{2}{5} = \frac{10+2x-2}{5(x-1)} = \frac{2(x+4)}{5(x-1)}$$

$$\epsilon_2(X) = \frac{2X}{5(X-5)}$$

On a $\epsilon_1(X) \neq \epsilon_2(X)$.

Exercice 57.3

La fonction $b(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée et un point x_0 est

$$b'(x_0) = \frac{b(x_0+h) - b(x_0)}{h}$$

$$b(x_0+h) = f(x_0) + hb'(x_o) = \frac{x_0 - 1}{x_0^4 + 2x_0^2 + 1} + hb'(x_0) = \frac{x_0 - 1}{x_0^4 + 2x_0^2 + 1} + \epsilon_0(h))$$

Donc $\epsilon_0(h) = hb'(x_0)$.

QED