

## Exercice 1

### Question 1.1(a)

La fonction de répartition  $F(x)$  est croissante, continue à droite, limite à gauche et bornée par 0 quand  $x \rightarrow -\infty$  et par 1 quand  $x \rightarrow +\infty$ .

Prenons  $y$  tel que  $0 < y < 1$ , il existe un  $x$  tel que  $F(x) \geq y$ . car  $F(+\infty) = 1$  et  $y < 1$ . La fonction  $F(x)$  est croissante donc  $\inf\{F(x) \geq y\}$  est unique. Supposons  $x_1$  le plus petit  $x$  telle que  $F(x_1) \geq y$ . Montrons que  $x_2$  ne peut pas être inférieure à  $x_1$ .  $x_2$  est inférieure à  $x_1$  alors  $F(x_2) \leq F(x_1)$  car la fonction de répartition  $F(x)$  est croissante. Soit  $F(x_2) = F(x_1)$ , mais par hypothèse  $x_1$  est la plus petite valeur de  $x$  tel que  $F(x_1) \geq y$ , Soit  $F(x_2) < F(x_1)$  ce qui contredit également l'hypothèse. Donc  $x_2$  n'existe pas.

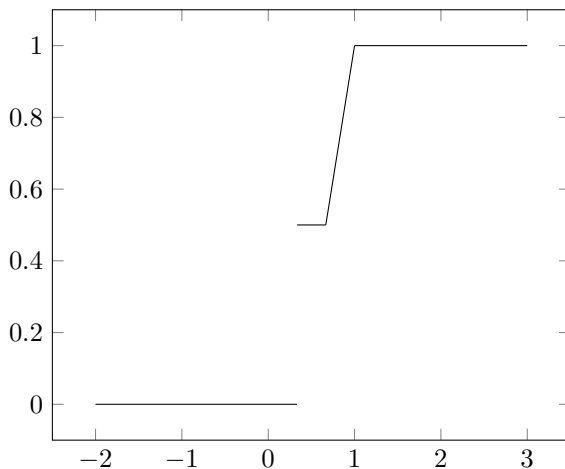
### Question 1.1(b)

La fonction de répartition  $F(x)$  est croissante. Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, F(x + \epsilon) \geq F(x)$ . Comme la fonction  $Q_F(y)$  est bien définie on a  $\forall y \in ]0, 1[, \forall \epsilon > 0, F(Q_F(y) + \epsilon) \geq F(Q_F(y))$ . On a  $Q_F(y)$  est le plus petit  $x$  tel que  $F(x) \geq y$  et la fonction  $F(x)$  est croissante, donc  $F(Q_F(y)) \geq y$ . Par conséquent  $F(Q_F(y) + \epsilon) \geq F(Q_F(y)) \geq y$ ,

## Question 2

Si la fonction  $F$  est continue et strictement croissante, alors il existe exactement un seul  $x$  tel que  $F(x) = y$  et la fonction  $F(x)$  est inversible. Donc on a  $Q_F(y) = F^{-1}(y)$  car  $\inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq y\}$  est le  $x$  tel que  $F(x) = y$ . ???

### Question 3(a)



### Question 3(b)

$$Q_F(1/4) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq 1/4\} = \inf\{x \in [1/3, \infty[ \} = 1/3$$

et

$$Q_F(3/4) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq 3/4\} = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) = 3/4\} = (3/4 + 1/2) * 2/3 = 5/6$$

et

$$Q_F(F(1/2)) = Q_F(1/2) = 1/3$$

et Pour  $x \in ]2/3, 1[$ , on a  $F(x) \in ]1/2, 1[$  donc  $Q_F(F(x)) \in ]2/3, 1[$ .

**Question 4**

Non. On a sur l'exemple précédent  $F(2/3) = 1/2$  et  $Q_F(1/2) = 1/3 \neq 2/3$  et de même  $Q_F(1/4) = 1/3$  et  $F(1/3) = 1/2 \neq 1/4$ .

**Question 5**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $\forall x \in \mathbb{R}, Q_F(F(x)) \leq x$  par définition de la borne inférieure de  $Q_F$  et de la non décroissance de  $F$ . De même, on a  $\forall y \in ]0, 1[, F(Q_F(y)) \geq y$ .

- $Q(y) \leq x \implies y \leq F(x)$ . On suppose  $Q(y) \leq x$ , comme  $F$  est non décroissante on a  $F(Q_F(y)) \leq F(x)$ . Mais  $y \leq F(Q_F(y))$ , donc  $y \leq F(x)$
- $y \leq F(x) \implies Q(y) \leq x$ . pour  $y_1, y_2 \in ]0, 1[$ , avec  $y_1 \leq y_2$  on a  $\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq y_2\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq y_1\}$ . Donc  $\inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq y_1\} \leq \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq y_2\}$  donc  $Q_F(y_1) \leq Q_F(y_2)$ . Donc la fonction  $Q_F$  est croissante. On suppose  $y \leq F(x)$ , on a  $Q_F(y) \leq Q_F(F(x))$ , mais  $Q_F(F(x)) \leq x$  donc  $Q_F(y) \leq x$ .

Donc  $Q(y) \leq x$  ssi  $y \leq F(x)$

**Question 6**

???

**Question 7(a)**

Supposons  $x_1 \leq x_2$ , on a  $\{x_i \leq x_1\} \subseteq \{x_i \leq x_2\}$ , donc  $\sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \leq x_1\}} \leq \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \leq x_2\}}$  donc  $F_n(x_1) \leq F_n(x_2)$ . Par conséquent,  $F_n$  est croissante.

Soit  $x$  une série numérique de  $\mathbb{R}^n$ , classons ces éléments en une séquence décroissante  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ . Prenons  $y < x_n$ , on a  $F_n(y) = 0$  car  $\{x_i < y\} = \emptyset$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x) = 0$ .

Soit  $x$  une série numérique de  $\mathbb{R}^n$ , classons ces éléments en une séquence croissante  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Prenons  $y > x_n$ , on a  $F_n(y) = 1$  car  $\text{card}\{x_i < y\} = n$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_n(x) = 1$ .

**Question 7(b)**

Soit une série numérique sur  $\mathbb{R}^n$ , prenons la sous-série  $x_m$  qui tend à droite vers un point  $x$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . On a  $\{x_i < x\} \subseteq \{x_i < x_m\}$  car  $\forall m, x \leq x_m$  et les ensembles  $\{x_i < x_m\}$  sont de plus en plus petits lorsque  $n$  croît. On a donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_i < x_n\} = \{x_i < x\}$ . Par conséquent  $\lim_{m \rightarrow \infty, x_m > x} F_n(x_m) = F_n(x)$  qui est la définition de la continuité à droite.

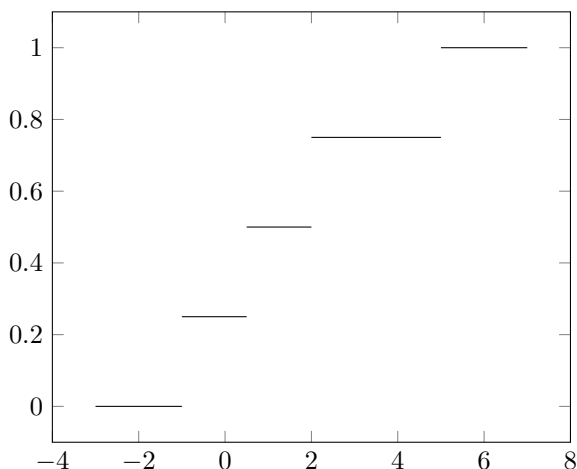
La fonction  $F_n$  est croissante et est continue à droite en tous points  $x$ , donc elle a  $F(x)$  comme limite à droite. La fonction  $F_n$  est comprise entre 0 et 1. Donc pour tous points  $x$  on a  $0 \leq \lim_{m \rightarrow \infty, x_m < x} F_n(x_m) \leq F(x)$ . Donc il existe une limite à gauche en tous points  $x$ .

**Question 8(a)**

La fonction de répartition de  $X_n$  est  $F(x) = \sum_{i=1}^n p_i 1_{x_i < x}$ . Comme la variable aléatoire  $X_n$  est uniforme, on a tous les  $p_i = 1/n$ . Donc  $F(x) = \sum_{i=1}^n 1/n 1_{x_i < x} = F(x) = 1/n \sum_{i=1}^n 1_{x_i < x} = F_n(x)$ .

**Question 8(b)**

L'espérance d'une variable aléatoire discrète  $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  est  $E(X_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$  et la variance  $V(x_n) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - E^2(X_n)$ .

**Question 9(a)****Question 9(b)**

On a  $Q_F(1/4) = -1$ ,  $Q_F(2/4) = 1/2$ ,  $Q_F(3/4) = 2$ ,  $Q_F(0.05) = -1$ ,  $Q_F(0.95) = 5$

**Question 10**

On a  $x_{(1)} = -1$ ,  $x_{(2)} = 1/2$ ,  $x_{(3)} = 2$ ,  $x_{(4)} = 5$  et  $F_n(x) = 1/n \sum_{i=1}^n 1_{x_i \leq x}$

$$F_n(x_{(1)}) = F_n(-1) = 1/4 \sum_{i=1}^n 1_{x_i \leq -1} = 1/4$$

$$F_n(x_{(2)}) = F_n(1/2) = 1/4 \sum_{i=1}^n 1_{x_i \leq 1/2} = 2/4 = 1/2$$

$$F_n(x_{(3)}) = F_n(2) = 1/4 \sum_{i=1}^n 1_{x_i \leq 2} = 3/4$$

$$F_n(x_{(4)}) = F_n(5) = 1/4 \sum_{i=1}^n 1_{x_i \leq 5} = 4/4 = 1$$

$$Q_{F_n}\left(\frac{i}{n}\right) = \inf\left\{x \in \mathbb{R}, F_n(x) \geq \frac{i}{n}\right\} = x_{(i)}$$

En effet, on a  $F_n(x_{(i)}) = \frac{i}{n}$  donc la plus petite valeur est  $\frac{i}{n}$ .

**Question 11**

On a  $q_\alpha^x = Q_{F_n}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F_n(x) \geq \alpha\} = \inf\{x \in \mathbb{R}, F_n(x) \geq \frac{\lceil \alpha n \rceil}{n}\} = x_{(\lceil \alpha n \rceil)}$ . En effet, on a  $F_n(x_{(i)}) = \frac{i}{n}$  (question 10), et  $\alpha \leq \frac{\lceil \alpha n \rceil}{n}$  et il n'existe pas de  $x_{(i)} \in x$  tel que  $F_n(x_{(i)}) > \alpha$  et  $F_n(x_{(i)}) < \frac{\lceil \alpha n \rceil}{n}$ .

**Question 12**

Pour  $\alpha \in ]0, 1[$  il existe un unique  $i \in [1, 2, \dots, n]$  tel que  $\lceil \alpha n \rceil = i$ . De la question 11, on a  $Q_{F_n}(\alpha) = Q_{F_n}\left(\frac{i}{n}\right)$ . De la question 10 on a  $Q_{F_n}\left(\frac{i}{n}\right) = x_{(i)}$ , donc  $Q_{F_n}(\alpha) = x_{(i)}$ . Ce qui signifie que les valeurs possibles de  $Q_{F_n}$  sont les valeurs de  $x$ .