Rappel de cours

Une matrice $n \times n$ A est diagonalisable ($A = PDP^{-1}0$ si:

- Elle a n vecteurs propres linéairement indépendants, condition pour avoir une matrice P formée des vecteurs propores en colonne qui est inversible.
- Elle a n valeurs propres distinctes, car n valeurs propres génèrent n vecteurs propres linéairement indépendants
- $\sum dim\ E_{sp_n}(A) = n$
- pour chaque valeur propre sp, on a $dim\ E_{sp}(A) = multiplicite\ sp$. La multiplicité de sp le nombre de racine de sp.
- si $\chi_A(X) = P(X)$ et $P(X)$ est un polynome scindé (ie $P(X) = C(X - A_1)(X - A_2) \ldots (X - A_{m-1})(X - A_m)$).
- si $\chi_A(X) = P(X)$ et $P(A) = 0$.

Exercice 4

On cherche les λ tel que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n & = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n & = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n & = \lambda x_3 \\ \dots & = \lambda x_i \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n & = \lambda x_n \end{cases}$$

Tous les x_i ne sont pas égale à 0. Donc une première solution est $\lambda = 0$ avec une multiplicité de $n-1$, car cela correspond à un système de n équations et n inconnues.
La seconde solution est lorsque tous les x_i sont égaux alors on a n équations $nx_i = \lambda x_i$, d'où $\lambda = n$.

Par conséquent, $E_0(A) = \{(-1,1,0,0,\dots,0),(-1,0,1,0,\dots,0),(-1,0,0,1,\dots,0),\dots(-1,0,0,0,\dots,1)\}$ et $E_1(A) = \{(1,1,1,1,\dots,1)\}$.
Donc $dim\ E_0(A) = n-1$ et $dim\ E_1(A) = 1$. La matrice est diagonalisable. La matrice D la matrice diagonale composé des valeurs propres de A.

$$D = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On a $D = B$ et $A = PDP^{-1}$ donc les matrcies A et B sont semblables (ie. $A = PBP^{-1}$).

Exercice 7

Exercice 7.1

On cherche les λ tel que

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & t & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & t & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & t \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} tx_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n & = \lambda x_1 \\ x_1 + tx_2 + x_3 + \dots + x_n & = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 + tx_3 + \dots + x_n & = \lambda x_3 \\ \dots & = \lambda x_i \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + tx_n & = \lambda x_n \end{cases}$$

En prenant $\lambda = t-1$ on a

$$\begin{cases} tx_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n & = (t-1)x_1 \\ x_1 + tx_2 + x_3 + \dots + x_n & = (t-1)x_2 \\ x_1 + x_2 + tx_3 + \dots + x_n & = (t-1)x_3 \\ \dots & = \lambda(t-1)x_i \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + tx_n & = (t-1)x_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n & = 0 \\ \ldots & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n & = 0 \end{cases}$$

Système de n équations à n inconnues qui a donc n solutions. La multiplicité de λ est $n-1$. On a $E_{t-1}(A) = \{(-1,1,0,0,\ldots,0),(-1,0,1,0,\ldots,0),(-1,0,0,1,\ldots,0),\ldots(-1,0,0,0,\ldots,1)\}$ et $dim\ E_{t-1}(A) = n-1$.

Exercice 7.2

$$Tr(a) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = n.t$$

Relation avec ls spectre ???

Exercice 7.3

Oui car $dim\ E_{t-1}(A) = n$.

Exercice 7.4

On a $A.A^(-1) = I_n$ et A diagonalisable. Ceci fait $PDP^{-1}A^{-1} = I_n$ donc $A^{-1} = P^{-1}DP$. Donc A inversible si D est inversible.

La matrice D est la matrice diagonale composé des valeurs propres de A.

$$D = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t-1 \end{vmatrix}$$

Matrice D est inversible si a_{ii} sont tous différents de 0. Donc il faut que $t \neq 1$.

Exercice 8

Exercice 8.a

On a 2 endomorphismes u et v qui commutent (ie. $u \circ v = c \circ u$). λ une valeur propre de v et $E_\lambda(v) = \{p \in E, v(p) = \lambda p\}$. Donc calculons $\lambda u(p)$. $\lambda u(p) = u(\lambda p)$ car u est un endomorphime. $\lambda u(p) = u(v(p))$ car p est un vecteur propre de v de valeur propre λ. $\lambda u(p) = v(u(p))$. On en déduit que $u(p) \in E_\lambda(v)$. Ce qui montre que $E_\lambda(v)$ est stable par u (ie. $\forall p \in E_\lambda(v), u(p) \in E_\lambda(v)$).

Exercice 8.b

Pas compris la question

Exercice 8.c

Si u et v sont diagonalisables donc ilv existe $E_{\lambda_u}(u) = \{p_u, u(p_u) = \lambda_u p_u\}$ et $E_{\lambda_v}(v) = \{p_v, v(p_v) = \lambda_v p_v\}$. Donc

$$E_{\lambda u}(u) = \{p_u, u(p_u) = \lambda p_u\}$$

$$E_{\lambda u}(u) = \{p_u, \lambda_v u(p_u) = \lambda_v \lambda_u p_u\}$$

$$E_{\lambda u}(u) = \{p_u, u(\lambda_v p_u) = \lambda_v \lambda_u p_u\}$$

???

QED