

A. KELLER

ET

C. FALVO – R. PARENTANI – C. TEXIER

MÉCANIQUE I
NOTES DE COURS

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Table des matières

<i>1</i>	<i>Introduction</i>	5
<i>2</i>	<i>Cinématique</i>	15
<i>3</i>	<i>Dynamique</i>	29
<i>4</i>	<i>Energie</i>	53
<i>5</i>	<i>Systèmes à deux corps</i>	77
<i>A</i>	<i>Trigonometrie</i>	111
<i>B</i>	<i>Vecteurs</i>	117
<i>C</i>	<i>Dérivée d'une fonction</i>	121
<i>D</i>	<i>Intégration des fonctions</i>	127

1

Introduction

LA MÉCANIQUE dite *classique* est la théorie physique qui traite du mouvement des objets qui sont macroscopiques et qui se déplace à des vitesses faible par rapport à la vitesse de la lumière. Comme toute théorie physique, elle repose sur un formalisme mathématique qui lui permet d'analyser les causes du mouvement des corps et de prédire leur évolution future.

1.1 La place de la mécanique newtonienne parmi les théories physiques fondamentales

La mécanique est la première théorie du mouvement, et même la première théorie de physique fondamentale. C'est à la fin du XVIIème siècle qu'est née la *mécanique newtonienne*, ou *mécanique classique* à l'issue des travaux d'Isaac Newton publiés en 1687 dans son ouvrage *Philosophiæ naturalis principia mathematica* : Principes mathématiques de la philosophie naturelle. La mécanique classique a pu être formulée grâce au développement en Mathématiques du calcul différentiel par notamment Leibniz et Newton.¹ La mécanique classique a été construite à partir de l'analyse d'expériences ou d'observations sur le mouvement des corps matériels à échelle humaine et le mouvement des planètes. Elle résulte de nombreux travaux de philosophes et mathématiciens qui ont précédé Newton depuis l'antiquité, notamment Aristote et Archimède, à la renaissance, notamment Galilée et Kepler. Grâce à l'introduction de la loi de la gravitation universelle, la théorie de Newton a permis d'unifier deux branches jusque-là séparée de la physique : celle dédiée à l'étude de la chute des corps (étudiée notamment par Galilée) et celle dédiée à l'étude du mouvement des corps célestes (étudiée notamment par Kepler).

La mécanique classique se base sur un petit nombre de postulats (« axiomes ») à partir de concepts cinématiques (position, vitesse, accélération,...) et dynamique (forces, énergie,...). Bien qu'elle ait eu des

1. La plupart des théories physiques ont pu être formulées grâce au développement d'un nouveau formalisme mathématique. C'est le cas notamment de la Relativité Générale d'Einstein qui repose sur la géométrie différentielle.

succès remarquables, qui ont probablement culminé avec la description extrêmement précise du mouvement des planètes du système solaire au XIX^{ème} siècle, les progrès techniques, qui ont permis d'améliorer la précision des mesures et d'explorer les lois physiques à de nouvelles échelles, ont mis à jour des désaccords profonds avec certaines prédictions de la mécanique classique. On sait aujourd'hui que la mécanique newtonienne possède des limitations et qu'elle n'est qu'une forme approchée d'autres théories plus fondamentales.²

- *Aller vers les hautes énergies – la théorie de la relativité* : lorsque la vitesse d'un objet atteint une vitesse comparable à la vitesse de la lumière $c \simeq 300\,000\text{ km/s}$, sa dynamique n'est plus prédite par les lois de la mécanique classique. De nos jours, ces conditions sont réalisées couramment dans les accélérateurs de particules élémentaires. En cherchant à résoudre le problème d'incompatibilité entre mécanique newtonienne et électromagnétisme, Einstein a proposé au début du XX^{ème} siècle d'autres lois pour décrire la dynamique des particules matérielles, la *mécanique einsteinienne* (« relativité restreinte »), remettant en particulier en cause la conception de l'espace-temps galiléo-newtonien. Cette nouvelle conception de la structure de l'espace-temps apporte un nouveau regard sur la nature de la l'interaction gravitationnelle. C'est la théorie de la *relativité générale*. Les corrections apportées par la relativité générale sont aujourd'hui prises en compte dans le système de localisation GPS.

- *Tendre à l'élémentarité (réduire la taille) – la mécanique quantique* : l'étude de la structure de la matière a conduit les physiciens à développer des outils permettant d'analyser des échelles de plus en plus petites. L'existence d'une échelle élémentaire (atomique) a suscité de vifs débats pendant plusieurs décennies au XIX^{ème} siècle, entre une approche « énergétiste » promouvant une description continue des milieux matériels et s'inscrivant dans un courant de pensée holiste, et une approche « atomiste » suivant une logique réductionniste. La preuve indiscutable de l'existence des atomes fût fournie par les expériences de Jean Perrin au début du XX^{ème} siècle. Depuis, divers types d'appareils devenus d'usage courant en laboratoire permettent de « voir » assez directement les atomes : les microscopes à effet tunnel, microscopes à force atomique, etc. L'étude des phénomènes aux échelles atomiques (10^{-10} m) ou sub-atomiques a rapidement mis à jour l'incompatibilité entre théorie du rayonnement (électromagnétisme) et description newtonienne des corps matériels. Précisément, la difficulté porte sur la compréhension des processus d'interaction entre matière et rayonnement (absorption et émission de l'énergie du rayonnement par la matière). Le dépassement de ces difficultés a donné naissance, à la fin des années 1920, à une autre théorie permettant de décrire la dynamique des objets aux échelles les plus élé-

2. « fondamentale » au sens de « fondements ».

mentaires : la *mécanique quantique*. Le bouleversement fût d'autant plus grand que, contrairement au passage de la mécanique newtonienne à la mécanique einsteinienne, qui conserve en gros les outils cinématiques, la mécanique quantique est basée sur un langage radicalement différent de celui de la mécanique newtonienne. Avec du recul, il n'est pas surprenant que cette dernière, dont les axiomes ont été inspirés de l'analyse de phénomènes à l'échelle macroscopique (disons $\ell \gtrsim 10^{-3} \text{ m}$), soit incapable de décrire les phénomènes à $\ell \lesssim 10^{-10} \text{ m}$.

Depuis les premiers temps de la mécanique quantique, les progrès technologiques ont permis de déplacer sensiblement les frontières entre classique et quantique : les phénomènes quantiques ne sont plus seulement limités aux échelles extrêmement petites et de nombreuses manifestations de la mécanique quantique existent aussi aux échelles macroscopiques, telles les phénomènes spectaculaires de superfluidité, supraconductivité, etc. De nombreuses applications courantes aujourd'hui sont basées sur des phénomènes quantiques comme par exemple : le laser, la conduction électrique, les semi-conducteurs, le magnétisme des surfaces (disques durs), etc.

- *Augmenter la complexité – la thermodynamique et la physique statistique* : la seconde moitié du XIX^{ème} siècle a vu l'émergence d'une autre théorie fondamentale : la *thermodynamique*. Même si elle met en jeu des concepts communs avec la mécanique newtonienne, comme l'énergie. L'approche extrêmement fructueuse de la thermodynamique s'inscrit dans le cadre d'une description continue de la matière (par opposition à « atomiste »). C'est Boltzmann, suivant les travaux précurseurs de Clausius et Maxwell, qui introduisit les concepts permettant de faire le lien entre une description mécanique à l'échelle élémentaire (atomiste) et la description continue à l'échelle « macroscopique », ce qui a donné naissance à une autre théorie fondamentale : la *physique statistique*. En bénéficiant de la complexité de la dynamique des systèmes à très grand nombre de degrés de liberté (les gaz d'atomes par exemple), la description déterministe de la dynamique des particules à l'échelle atomique est remplacée par une description probabiliste des processus élémentaires.

Ce qui sera discuté dans le cours (et ce que nous n'aborderons pas)

Cette vue d'ensemble des grandes « théories cadres » de la physique nous permet de situer le matériel présenté dans ces notes qui proposent une **introduction** à la *mécanique classique*, dans laquelle nous ne traiterons que le problème des points matériels. Ce sont des systèmes idéalisés où on considère que les masses sont concentrées dans des volumes infiniment petits. Cette première approche bien que très idéalisée, permet en fait de décrire, dans de nombreuses situations, le mouvement du centre de masse d'un solide étendu. L'étude des mouvements de rotation dans

l'espace (moment cinétique) sera abordées dans le cours « Mécanique II » du second semestre. Les outils permettant d'analyser la dynamique des corps matériels étendus, la « mécanique du solide », sera abordée plus tard dans un autre cours.

Malgré ces restrictions, on pourra déjà entrevoir la structure de *la première théorie physique fondamentale* de l'histoire de l'humanité, qui reste encore aujourd'hui, malgré ses limitations, d'une formidable efficacité.

1.2 Les constantes fondamentales en physique

La mécanique newtonienne est une forme approchée, ou simplifiée, de la mécanique einsteinienne et de la mécanique quantique (il existe également une version relativiste de la mécanique quantique : la théorie quantique des champs qui est donc le cadre le plus général). Les constantes fondamentales de la physique jouent un rôle important pour définir le domaine de validité de la mécanique newtonienne :

- La théorie de la relativité restreinte (« mécanique einsteinienne ») fait intervenir la célérité de la lumière c . Si la vitesse du corps matériel considéré est $v \ll c$, alors les prédictions de la mécanique newtonienne sont valables.
- La constante fondamentale de la mécanique quantique est la constante de Planck \hbar . Elle représente une grandeur physique appelée « action », ayant la dimension [position] \times [impulsion]. Si l'action caractéristique du problème est $\gg \hbar$, alors il sera légitime de se placer dans le cadre classique.
- Enfin, la physique statistique fait intervenir la constante de Boltzmann k_B reliée au nombre d'Avogadro N_A ³ et à la constante des gaz parfaits par $R = \mathcal{N}_A k_B$. k_B a la dimension d'une entropie et fournit une unité de mesure du manque d'information. Si l'entropie (le manque d'information) est petite devant k_B , alors l'état du système est défini avec une probabilité voisine de l'unité et l'on peut considérer l'évolution du système comme déterministe.
- Il existe d'autres constantes fondamentales qui elles permettent de définir l'intensité des différentes forces ou interactions fondamentales. Par exemple la constante de gravitation universelle $G = 6.67384(80) \times 10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$ permet de définir l'intensité de la force gravitationnelle.

L'association de différentes constantes fondamentales permet de définir une théorie physique. Quelques exemples sont donnés dans le tableau suivant :

3. Le nombre d'Avogadro N_A est le nombre d'éléments constituant une mole. $N_A = 6.02 \times 10^{23}$. Une mole d'atome de carbone représente 6.02×10^{23} atomes de carbone.

c	Relativité restreinte d'Einstein
\hbar	Mécanique quantique
G	Théorie de la gravitation universelle de Newton
c, \hbar	Théorie quantique des champs
c, G	Théorie de la relativité générale d'Einstein
c, \hbar, G	Théorie de la gravitation quantique, en construction...

TABLE 1.1: Quelques exemples de théories physiques et les constantes fondamentales sur lesquelles elles reposent.

1.3 Les interactions fondamentales

Un concept essentiel en mécanique est celui de « force » (ou « interaction »). Les problèmes que nous considérerons feront intervenir différents types de forces, de nature fondamentale (comme l'interaction coulombienne) ou phénoménologique (comme la force de rappel d'un ressort). Il existe quatre interactions fondamentales que l'on peut distinguer par leur intensité et par leur portée, voir figure 1.1. Les plus connues sont la

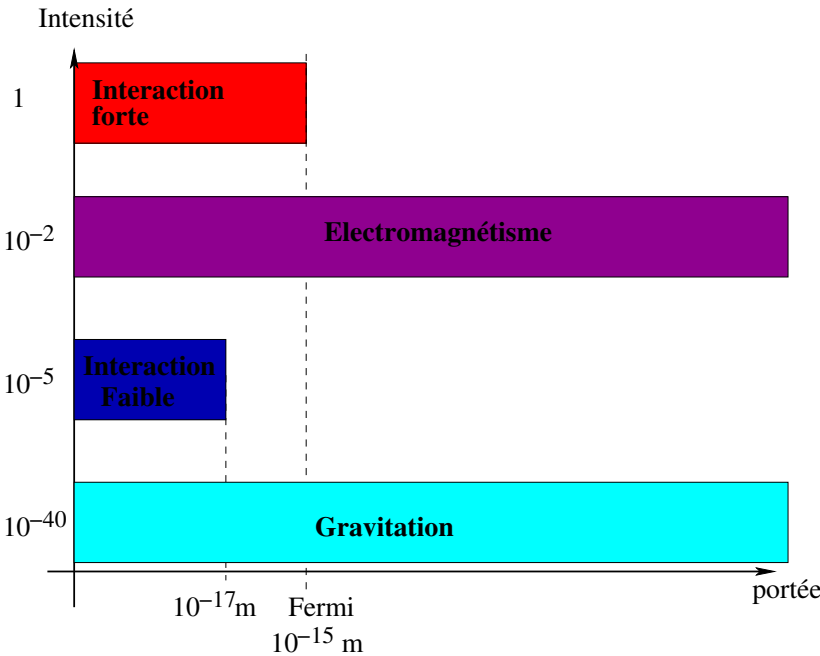


FIGURE 1.1: Les quatre interactions fondamentales.

gravitation et l'électromagnétisme. Elles ont toutes les deux une portée infinie. Deux masses interagissent par la gravitation avec une force qui dépend de l'inverse du carré de leur distance respective, de même que deux charges interagissent par la force de Coulomb. La force de gravitation est beaucoup plus faible que l'interaction électromagnétisme. La gravitation est donc souvent négligée lorsqu'on s'intéresse à l'interaction entre particules chargées. Néanmoins, il existe des charges positives et négatives, alors qu'il n'existe pas de masse négative. La force de gravitation est donc toujours attractive alors que la force électromagnétique

peut être répulsive (lorsque les charges ont même signes) ou attractive (lorsque les charges possèdent des signes opposés). C'est pour cette raison qu'en générale la force électromagnétique n'a pas d'influence sur de grandes distances. En effet, si on met une charge positive en un point de l'espace, elle va attirer des charges négatives et former un système neutre (comme un atome ou une molécule par exemple).

La plus intense des 4 interactions est *l'interaction forte*, qui est responsable de la cohésion des noyaux des atomes. En effet, les noyaux des atomes sont constitués de charges positives, les protons, qui sont très proches les uns des autres ($\simeq 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). L'intensité de la force électromagnétique entre les deux charges des protons est donnée par :

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2},$$

où d est la distance séparant les deux protons dans le noyau et $e = 1.6e^{-19} \text{ C}$ est la charge du proton. $\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$ est une constante fondamentale appelée la permittivité du vide. En prenant $d = 1 \times 10^{-15} \text{ m}$, on trouve $F \simeq 200 \text{ N}$. Il faut donc une force qui compense cette force électrostatique ; c'est l'interaction forte. Cette interaction est de courte portée et n'agit que sur des distances de l'ordre de la taille des noyaux.

La dernière des quatre interactions est *l'interaction faible*. Cette interaction est responsable de certaines réactions nucléaires en particulier la désintégration radioactive beta, qui permet par exemple la désintégration d'un noyau de carbone 14 en azote 14 où un neutron est devenu un proton et est accompagné de l'émission d'un antineutrino et d'un électron. Cette interaction est de très courte portée. Sa portée est encore plus faible que celle de l'interaction forte.

1.4 Les grandeurs physiques – Dimensions et unités

La notion de grandeur ou quantité physique est basée sur l'expérience et sur les résultats de mesures. Parmi les grandeurs physiques mesurées certaines peuvent être comparées entre elles et d'autres ne le peuvent pas. Par exemple on pourra écrire que $Q_1 = Q_2$, ou $Q_1 \neq Q_2$ si les quantités Q_1 et Q_2 qui caractérisent des grandeurs physiques sont du même type. On peut comparer des masses entre elles mais comparer une masse avec une longueur n'a pas de sens. Le type d'une grandeur physique est ce qu'on appelle une dimension.

1.4.1 Les grandeurs physiques et dimensions de base

On définit cinq dimensions de base correspondant à 5 grandeurs physiques de base à partir desquelles toutes les dimensions des grandeurs physiques pourront être obtenues. Le tableau 1.2 résume les grandeurs

de base, avec leur unités dans le système d'unité international. En plus des quatre premières (longueur, temps, masse et températures) qui sont les plus courantes, on doit introduire le courant électrique I , dont l'unité internationale est l'ampère. 1 ampère correspond à 1 charge de 1 coulomb par seconde. A chacune des grandeurs de base correspond une

Grandeurs	Notations	unités (S.I.)	symboles
Longueur	L	mètre	m
Temps	T	seconde	s
Masse	M	kilogramme	kg
Température	θ	kelvin	K
Courant	I	ampère	A

unité dans le système international (S.I.). Il ne faut pas confondre la notion d'unité, et la notion de dimension. L'unité donne un sens à la valeur numérique que l'on obtient lors d'une mesure d'une grandeur physique. La dimension donne un sens à la grandeur physique elle-même indépendamment de la valeur mesurée.

Il existe des quantités sans dimensions qui possèdent une unité dans le système internationale. En voici deux exemples :

- L'unité S.I. de mesure d'un angle est le radian (rad). Un angle n'a pas de dimension. En effet, un angle est le rapport entre la circonférence et le rayon de l'arc de cercle correspondant.
- La mole, représente un ensemble de 6.02×10^{23} objets (une mole d'atomes ou de molécules).

1.4.2 Des grandeurs dérivées

Dans le tableau 1.3, on donne des exemples de quantités physiques que nous utiliserons, accompagnées de leurs dimensions et unités.

Grandeurs	Equations/lois	Dimensions	unités (S.I.)	symboles
Aire, surface	$S = x^2$	L^2		m^2
Volume	$V = x^3$	L^3		m^3
fréquence	$\nu = \frac{1}{T}$	T^{-1}	hertz	Hz
vitesse	$v = \frac{dx}{dt}$	LT^{-1}		$m.s^{-1}$
accélération	$a = \frac{dv}{dt}$	LT^{-2}		$m.s^{-2}$
Force	$\vec{F} = m\vec{a}$	MLT^{-2}	newton	N
Energie	$E_c = \frac{1}{2}m\ \vec{v}\ ^2$	ML^2T^{-2}	joule	J
Puissance	$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	ML^2T^{-3}	watt	W
Pression	$P = \frac{\ \vec{F}\ }{S}$	$ML^{-1}T^{-2}$	pascal	Pa

TABLE 1.2: Grandeurs et dimensions de base.

Il ne faut pas confondre la notion d'unité, et la notion de dimension. L'unité donne un sens à la valeur numérique que l'on obtient lors d'une mesure d'une grandeur physique. La dimension donne un sens à la grandeur physique elle-même indépendamment de la valeur mesurée.

Angle : Un angle n'a pas de dimension.
 $\alpha = \frac{\ell}{R}$.

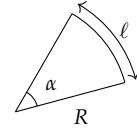


TABLE 1.3: Grandeurs dérivées.

1.4.3 Analyse dimensionnelle

Les dimensions de base sont notées comme suit : L pour la longueur, T pour le temps, M pour la masse. Ces trois dimensions de bases seront celles que nous utiliserons le plus dans ce cours de mécanique. Les deux autres : Température θ et courant I seront moins fréquemment utilisées. La première relevant plus de la thermodynamique ou de la physique statistique et la seconde de l'électromagnétisme. Une quantité physique Q quelconque, possèdera une dimension qui s'exprimera comme un produit des puissances des dimensions de base. On notera :

$$[Q] = L^\alpha T^\beta M^\gamma \theta^\delta I^\epsilon,$$

et on dira dimension de Q égale à $L^\alpha T^\beta M^\gamma \theta^\delta I^\epsilon$. Dans le cas où Q est une quantité sans dimension, on écrira formellement $[Q] = 1$.

Homogénéité des équations Les grandeurs physiques comparables doivent avoir la même dimension. Cela implique que les équations reliant des quantités physiques doivent être homogènes. Les règles suivantes doivent être satisfaites :

1. Dans une équation, les quantités physiques des deux cotés de l'égalité doivent avoir les mêmes dimensions. C'est à dire que :

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow [Q_1] = [Q_2].$$

2. Si une quantité physique Q est exprimée comme une somme de plusieurs autres quantités physiques Q_1, Q_2, \dots, Q_n , alors chacun des termes de la somme doit avoir la même dimension que Q . C'est à dire que :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \Rightarrow [Q_1] = [Q_2] = \dots = [Q_n] = [Q].$$

3. Dans une équation reliant des quantités physiques, l'argument d'une fonction transcendante (\sin , \cos , $\exp \dots$) ne peut avoir de dimension.

$$Q = Q_1 f(Q_2) \Rightarrow \begin{cases} [Q_2] = 1 \\ [Q] = [Q_1] \end{cases}$$

4. Une quantité vectorielle possède la dimension de ses composantes et de sa norme. C'est à dire que si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée :

$$\vec{Q} = Q_1 \vec{i} + Q_2 \vec{j} + Q_3 \vec{k} \Rightarrow [\vec{Q}] = [Q_1] = [Q_2] = [Q_3] = [||\vec{Q}||].$$

5. Si une quantité physique $Q(x)$ dépend d'une autre quantité physique x . Alors la dimension de la dérivée de $Q(x)$ par rapport à x est la dimension de Q divisée par celle de x :

$$\left[\frac{dQ(x)}{dx} \right] = [Q][x]^{-1}.$$

Homogénéité des équations physiques : Une équations reliant des quantités physiques doit respecter les règles suivantes :

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow [Q_1] = [Q_2]$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow [Q_1] = [Q_2] = [Q].$$

$$Q = Q_1 f(Q_2) \Rightarrow \begin{cases} [Q_2] = 1 \\ [Q] = [Q_1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{Q} = Q_1 \vec{i} + Q_2 \vec{j} + Q_3 \vec{k} \\ \Rightarrow [\vec{Q}] = [Q_1] = [Q_2] = [Q_3] = [||\vec{Q}||] \end{aligned}$$

$$\left[\frac{dQ(x)}{dx} \right] = [Q][x]^{-1}.$$

Lorsqu'on écrira des équations reliant des quantités physiques, on vérifiera que ces règles sont bien respectées. En outre, cette vérification est souvent un moyen de détecter des erreurs de calcul.

2

Cinématique

LA CINÉMATIQUE constitue le champ d'étude du mouvement des corps indépendamment des causes qui le produit. On ne s'intéresse pas à la cause du mouvement, mais uniquement à sa description. Nous allons considérer la cinématique de points dont la taille est infiniment petite. C'est-à-dire que nous allons considérer uniquement les positions de ces points et la notion d'orientation de chacun de ces points n'a pas de sens physique. Cette approche qui au premier abord semble restrictive contient l'ensemble des outils nécessaires à la description de systèmes plus complexe. En effet il est possible de décrire un système étendu, comme un solide ou un fluide par exemple en décrivant un ensemble infini de points. Nous allons également nous restreindre à la cinématique *Galiléenne* permettant de décrire le mouvement non-relativiste des points.

Au cours de ce chapitre nous allons introduire divers concepts pour décrire le mouvement d'un point : trajectoire, équation horaire du mouvement, vitesse et accélération. Tout ces concepts vont reposer sur deux outils mathématiques essentiels : les *vecteurs* et le *calcul différentiel*. La lecture de ce chapitre suppose la maîtrise de ces outils introduits au lycée. Le lecteur pourra trouver dans l'annexe B, page 117 et dans l'annexe C, page 121 les rappels essentiels sur les *vecteurs* et le *calcul différentiel*.

2.1 Notion d'espace et de temps

Pour décrire le monde physique, le physicien introduit la notion d'événements. Un *événement* est constitué d'un point P et d'un temps t . Le point P décrit la position où l'événement a eu lieu et le temps t est l'instant auquel il s'est produit. Le physicien doit donc introduire deux espaces métriques (en mathématique, un espace métrique est un espace au sein duquel il est possible de définir une distance entre deux points). Un espace de dimension 3 qui permet de décrire les positions des *événements* et un espace de dimension 1 qui permet de décrire les instants où

Événement : Un événement (P, t) est constitué d'un point P et d'un temps t . Le point P décrit la position où l'événement a eu lieu et le temps t est l'instant auquel il s'est produit.

les événements se produisent.

2.1.1 L'espace

La cinématique *Galiléenne* décrit l'espace ambiant par les outils de la géométrie *Euclidienne*, c'est à dire la géométrie élémentaire telle qu'introduite au collège et lycée et reposant sur les concepts de droite, plan, longueur et aire. Dans cette représentation la position d'un point de l'espace est repérée par trois coordonnées dans un repère d'espace (une origine ainsi que trois axes de références). Dans le cadre de ce cours on n'étudiera que le cas d'un repère orthonormé, c'est-à-dire où les axes de référence sont perpendiculaires entre eux. Par convention l'origine du repère est noté O et on note les trois axes de référence Ox , Oy et Oz . Le repère est alors noté $Oxyz$. Aux trois axes de référence, on associe trois vecteurs unitaires (de norme égale à 1) \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} , on parle de base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La position d'un point M de l'espace est alors donné par le vecteur

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (2.1)$$

où x , y , et z sont les composantes du vecteur position \vec{r} (les coordonnées).

On rappelle que dans le cas d'un repère orthonormé la distance entre le point M et l'origine du repère est donnée par

$$\|\vec{r}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.2)$$

On peut parfois trouver dans la littérature d'autres notations. Par exemple il est courant d'utiliser les vecteurs unitaires \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z ou \vec{u}_x , \vec{u}_y , \vec{u}_z les lettres e et u faisant référence à l'allemand *ein*z et au français *un*. Les trois coordonnées sont parfois également notées x_1 , x_2 et x_3 et les vecteurs de bases associés \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 .

Remarque : La géométrie Euclidienne, n'est pas la seule représentation du monde physique. Einstein a utilisé la géométrie différentielle dans sa théorie de la relativité générale. Dans cette théorie, le monde est décrit par un espace courbe de dimension 4 (espace+temps) et la courbure de l'espace-temps est induite par la répartition de la matière (étoiles, galaxies, matière sombre, ...) et de l'énergie telle que l'énergie sombre.

2.1.2 Le temps

La mesure du temps doit être comprise au sens de la mesure du temps écoulé. Cette idée repose sur le concept d'orientation du temps du passé vers le futur et sur le concept de l'irréversibilité de l'évolution des phénomènes physiques. L'origine de cette irréversibilité peut-être comprise dans le cadre de la physique statistique et de la thermodynamique et sera admise dans ce cours. La mesure du temps suppose le choix d'une origine, par exemple l'instant initial dans la description d'un phénomène physique et repose sur l'utilisation d'une horloge, c'est-à-dire un

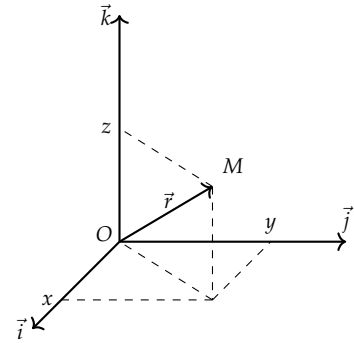


FIGURE 2.1: Vecteur position.

système physique périodique et stable dont on connaît la loi d'évolution (par exemple un pendule, un oscillateur mécanique ou électrique, une horloge atomique . . . , suivant la précision requise).

La cinématique Galiléenne décrit le temps t comme un paramètre universel et unique pour tous les observateurs. Si bien que tous les observateurs, munis d'horloges synchronisées, à un instant donné, mesureront tous le même temps d'occurrence des événements physiques qu'ils observent.

Il convient de remarquer que l'on néglige ici le temps de propagation pris par la lumière pour voyager des événements physiques à l'observateur. La prise en compte de ces délais, en particulier pour synchroniser les horloges des observateurs, est l'un des éléments clés de la théorie de la Relativité Restreinte. voir ci-dessous la première équation du système (2.30) pour l'expression mathématique de cet effet qui est négligé dans la transformation de Galilée donnée par l'Eq. (2.29).

Cinématique Galiléenne : le temps t est pris comme un paramètre universel et unique pour tous les observateurs.

2.1.3 Référentiel

L'ensemble d'un repère d'espace et d'un repère de temps constitue un *référentiel*. Cette notion est essentielle en physique car le mouvement d'un point (position, vitesse et accélération) est défini par rapport à un référentiel donné. En pratique un référentiel est souvent défini par un solide indéformable pour lequel il est possible de définir une orientation. L'observateur qui décrit le mouvement est alors attaché à ce solide. Ainsi lors de la description du mouvement d'un point par rapport à un référentiel \mathcal{R} muni du repère $Oxyz$, on supposera que l'origine O et les axes Ox , Oy et Oz sont fixes. Ainsi la position au cours du temps du point M par rapport au référentiel \mathcal{R} est donné par le vecteur position

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

où $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les coordonnées du point qui sont donc des fonctions dépendantes du temps. La variation temporelle du vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ permet donc de suivre la position du point M au cours du temps.

Voici quelques exemples de référentiels courants :

- *Référentiel terrestre* : Ce référentiel est fixe par rapport à la Terre. On peut choisir les axes $Oxyz$ de telle sorte que l'axe Oz passe par le centre de la Terre et par le pôle nord. Les axes Ox et Oy sont alors situés dans le plan de l'équateur et on peut choisir l'axe Ox comme l'axe passant par le centre de la Terre et par le méridien de Greenwich (méridien choisi pour définir la longitude 0°).
- *Référentiel géocentrique* : L'origine O est prise au centre de la Terre, mais les axes Ox , Oy et Oz ne sont pas fixés sur la Terre. Les directions de ses axes sont définies par trois étoiles éloignées.

Référentiel : association d'un repère d'espace et d'un repère de temps

- *Référentiel héliocentrique* : L'origine est prise au centre du soleil et les directions de ses axes sont définies par trois étoiles éloignées.
- *Référentiel de Copernic* : Ce référentiel est centré sur le centre de masse du système solaire et ses axes sont définis par trois étoiles éloignées. Cette définition supposerait que ces étoiles sont fixes, ce qui n'est pas exactement le cas car notre Galaxie tourne (lentement) sur elle-même (en 240 millions d'années).

2.1.4 Trajectoire et lois horaires

On appellera *trajectoire*, l'ensemble des positions occupées par le point au cours de son mouvement et mesurées dans un référentiel donné. Il s'agit d'une notion purement géométrique. La donnée de la trajectoire ne donne aucune information sur la position du point à un instant donné.

On appellera *équation horaire* la donnée de la position du point, à chaque instant t , mesurés dans un référentiel donné. C'est à dire la donnée de la fonction $\vec{r}(t)$ ou encore la donnée des trois fonctions du temps $t : x(t), y(t)$ et $z(t)$, qui constituent les trois composantes du vecteur $\vec{r}(t)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'équation horaire est en fait l'équation paramétrique de la trajectoire (voir cours de mathématique) où le paramètre utilisé est le temps t . Plusieurs équations horaires différentes peuvent correspondre à la même trajectoire. Par exemple, un point peut parcourir un même segment de droite à vitesse constante (accélération nulle) ou avec une accélération non nulle.

Remarque : La trajectoire d'un mobile dépend du référentiel dans lequel elle est mesurée. Il en est de même de l'équation horaire. Par exemple, la trajectoire de la lune est différente suivant qu'elle est observée depuis le référentiel terrestre (c'est celle que nous observons habituellement), ou depuis le référentiel héliocentrique.

Trajectoire : Lieu géométrique des points atteints par le mobile au cours de son mouvement. C'est une courbe dans l'espace.

Equation horaire : équation paramétrique de la trajectoire où le paramètre utilisé est le temps t . C'est à dire l'expression des composantes $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ du vecteur position $\vec{r}(t)$ en fonction du temps t .

2.2 Trajectoire rectiligne

On considère ici le mouvement d'un point M le long d'une droite (rectiligne) mesuré dans un référentiel \mathcal{R} . Pour repérer le point sur cette droite, on choisit une origine O et un sens positif, qui sera indiqué par le vecteur unitaire \vec{i} . On a donc une droite orientée, ou encore un axe, que l'on notera Ox . Puisque le point ne peut se déplacer que sur l'axe Ox le vecteur position s'écrit

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i}. \quad (2.3)$$

où $x(t)$ est la composante de \overrightarrow{OM} sur l'axe Ox . $x(t)$ sera donc positif si le sens de \overrightarrow{OM} est le sens positif, c'est à dire, le même que \vec{i} . Dans le cas contraire $x(t) < 0$. On remarque que la distance du point M à l'origine

est donné par

$$\|\vec{x}\|(t) = \sqrt{[x(t)]^2} = |x(t)| \quad (2.4)$$

2.2.1 Vitesse

Vitesse moyenne A l'instant t_1 , le mobile est en $M(t_1)$ repéré par son abscisse $x(t_1)$. A l'instant $t_2 > t_1$, il est en $M(t_2)$ d'abscisse $x(t_2)$. On définit la *vitesse moyenne*, $\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_2]}$, dans l'intervalle $[t_1, t_2]$ par :

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_2]} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \vec{i}. \quad (2.5)$$

C'est un vecteur, dont la composante sur \vec{i} est le taux d'accroissement de la fonction $f(t) = x(t)$, entre t_1 et t_2 . La norme de $\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_2]}$ correspond bien à l'idée habituelle de vitesse moyenne. En effet,

$$\|\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_2]}\| = \frac{|x(t_2) - x(t_1)|}{|t_2 - t_1|}, \quad (2.6)$$

ce qui correspond bien au rapport de la distance parcourue par le temps écoulé. La dimension de la vitesse moyenne est LT^{-1} . En notant Δt le temps écoulé entre t_1 et t_2 , c'est à dire que $t_2 - t_1 = \Delta t$, on peut aussi écrire la vitesse moyenne de la façon suivante :

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_1 + \Delta t]} = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} \vec{i}. \quad (2.7)$$

Vitesse instantanée La vitesse instantanée $\vec{v}(t)$, à un instant t , (sur une trajectoire rectiligne) s'obtient comme la limite quand Δt tend vers zéro, de la vitesse moyenne :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \vec{i}. \quad (2.8)$$

C'est un vecteur dont l'unique composante $v_x(t)$ sur l'axe Ox est donnée par :

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}.$$

En effet, la limite du taux d'accroissement de la fonction $x(t)$ est la dérivée $x'(t)$ de la fonction $x(t)$ par rapport à t . En cinématique et en mécanique en général, on utilisera souvent la notation \dot{f} pour noter la dérivée d'une fonction $f(t)$ par rapport au temps t . La notation f' sera utilisée pour une dérivée par rapport à une variable qui n'est pas le temps (par exemple par rapport à x). On utilisera aussi la notation $\frac{df}{dt}$, qui rappelle la limite du taux d'accroissement. On remarque que la norme de la vitesse instantanée est alors donné

$$\|\vec{v}\|(t) = |\dot{x}(t)| \quad (2.9)$$

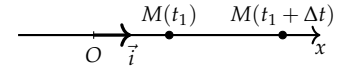


FIGURE 2.2: Repérage d'un point sur sa trajectoire rectiligne.

Vitesse moyenne : La vitesse moyenne $\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_1 + \Delta t]}$, dans l'intervalle $[t_1, t_1 + \Delta t]$ est définie par :

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_1 + \Delta t]} = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} \vec{i}.$$

Vitesse instantanée : La vitesse instantanée est définie par

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \vec{i} = \frac{dx}{dt} \vec{i} \equiv \dot{x} \vec{i}.$$

2.2.2 Accélération

L'accélération indique la variation de la vitesse en fonction du temps, de la même façon que la vitesse indique la variation de la position en fonction du temps. On définit donc l'accélération $\vec{a}(t)$ comme la dérivée de la vitesse $\vec{v}(t) = v(t) \vec{i}$:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i}. \quad (2.10)$$

On pourra aussi voir l'accélération comme la dérivée seconde de la position :

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i}.$$

En cinématique, on réservera la notation $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ pour la dérivée seconde de x par rapport au temps.

2.3 Trajectoire non-rectiligne

De façon générale, la trajectoire d'un point est une courbe dans l'espace. La position d'un point M sera repérée par le *vecteur position* $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, où O est un point fixe, que l'on prend comme l'origine d'un repère cartésien $Oxyz$, muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A chaque instant t , le vecteur position \vec{r} est alors déterminé par ses composantes $(x(t), y(t), z(t))$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

2.3.1 Vecteur vitesse

La vitesse du point $M(t)$ caractérise la variation du vecteur position à chaque instant t . Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur vitesse \vec{v} est défini par :

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}. \quad (2.12)$$

C'est à dire que le vecteur vitesse est le vecteur dont les composantes (v_x, v_y, v_z) dans un repère cartésien sont les dérivées, par rapport au temps, des composantes du vecteur position $v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}$.

On notera :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

et on dira que le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position. Cette notation a un sens mathématique plus profond car elle est indépendante du repère choisi. On peut montrer que :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (2.13)$$

C'est à dire que le vecteur vitesse est bien la limite d'un taux d'accroissement vectoriel. Regardons en détail la signification géométrique du

Accélération : l'accélération est la dérivée de la vitesse :

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \vec{i} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} \equiv \ddot{x}(t) \vec{i}. \quad (2.11)$$

Vecteur position :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}.$$

\vec{v} est un vecteur tangent à la trajectoire au point $M(t)$.

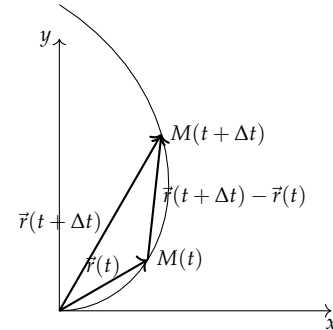


FIGURE 2.3: A l'instant t le mobile est au point $M(t)$ repéré par le vecteur position $\vec{r}(t)$. Δt plus tard, il se trouve au point $M(t + \Delta t)$ repéré par le vecteur position $\vec{r}(t + \Delta t)$. Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire du mobile, au point $M(t)$.

vecteur $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$. pour cela notons $M(t)$ la position du mobile à l'instant t et par $M(t + \Delta t)$ la position du mobile Δt plus tard. Avec ces notations, on peut écrire $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(t)$ et $\vec{r}(t + \Delta t) = \overrightarrow{OM}(t + \Delta t)$. On aura donc :

$$\begin{aligned}\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) &= \overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t) \\ &= \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}.\end{aligned}$$

C'est à dire que le vecteur $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ est en fait le vecteur qui joint la position du mobile à l'instant t à la position du mobile Δt plus tard (voir Figure 2.3). Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ le point $M(t + \Delta t)$ se rapproche du point $M(t)$ et donc le vecteur $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ tend vers le vecteur nul. Le numérateur et le dénominateur de l'équation (2.13) tendent donc vers zéro. On montre que le rapport $\frac{\overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}}{\Delta t}$ tend vers un vecteur fini quand Δt tend vers zéro, qui définit le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ à l'instant t et qui est tangent à la trajectoire, au point $M(t)$. On remarquera que dans le cas d'une trajectoire non rectiligne la norme du vecteur vitesse est donné par

$$\|\vec{v}\|(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \quad (2.14)$$

2.3.2 Vecteur accélération

Le vecteur accélération du point $M(t)$ caractérise la variation de la vitesse du point $M(t)$ à chaque instant t . Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ est défini par :

$$\vec{a}(t) = \dot{v}_x(t)\vec{i} + \dot{v}_y(t)\vec{j} + \dot{v}_z(t)\vec{k}. \quad (2.15)$$

C'est à dire que le vecteur accélération est le vecteur dont les composantes (a_x, a_y, a_z) dans un repère cartésien sont les dérivées, par rapport au temps, des composantes du vecteur vitesse $a_x = \dot{v}_x, a_y = \dot{v}_y, a_z = \dot{v}_z$.

2.4 Cas particuliers

2.4.1 Mouvement uniforme

Le mouvement est dit *uniforme* si la norme du vecteur vitesse est constante $\|\vec{v}\| = \text{cte}$. Autrement dit :

$$\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0.$$

Par contre, le vecteur vitesse \vec{v} n'est pas forcément constant. Sa direction peut varier, donc l'accélération n'est pas forcément nulle : $\vec{a} \neq \vec{0}$. Par exemple une voiture dont le compteur de vitesse indique 30km/h et qui roule dans un virage, a un mouvement uniforme mais la direction de son vecteur vitesse varie.

Vecteur accélération :

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \dot{v}_x(t)\vec{i} + \dot{v}_y(t)\vec{j} + \dot{v}_z(t)\vec{k} \\ &= \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}.\end{aligned}$$

Mouvement uniforme : $\|\vec{v}\| = \text{cte}$

$$\Leftrightarrow \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} = 0$$

Le vecteur vitesse est à chaque instant orthogonal au vecteur accélération.

Montrons que dans un mouvement uniforme, le vecteur vitesse \vec{v} est à tout instant orthogonal au vecteur accélération \vec{a} du mobile. Pour cela rappelons que :

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (2.16)$$

Comme $\|\vec{v}\|$ est constante, $\|\vec{v}\|^2$ est aussi constante et donc

$$\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = 0. \quad (2.17)$$

En utilisant l'expression Eq. (2.16), on peut exprimer cette dérivée de la façon suivante :

$$\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

En reconnaissant l'accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, on obtient

$$\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = 2\vec{v} \cdot \vec{a}.$$

Finalement :

$$\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = 0 \Leftrightarrow 2\vec{v} \cdot \vec{a} = 0.$$

Ce qui est bien équivalent à l'orthogonalité entre les vecteurs \vec{v} et \vec{a} .

Le mouvement circulaire et *uniforme* est un exemple de mouvement uniforme. Le mobile décrit un cercle, la norme de sa vitesse est constante. Le vecteur vitesse est tangent au cercle, et la direction du vecteur accélération est suivant le rayon du cercle ; l'accélération est centripète, c'est à dire que \vec{a} est orientée vers le centre du cercle (voir figure 2.4).

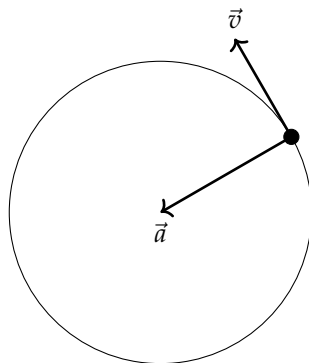


FIGURE 2.4: Mouvement circulaire et uniforme. Le vecteur vitesse \vec{v} est orthogonal au vecteur accélération \vec{a} .

2.4.2 Mouvement rectiligne et uniforme

Lorsque en plus d'être uniforme, le mouvement du mobile est rectiligne, alors le vecteur vitesse \vec{v} est constant. Sa norme est constante puisque le mouvement est uniforme mais sa direction et son sens sont

aussi constant, car la trajectoire est rectiligne. Dans ce cas $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$, et donc

$$\vec{a} = \vec{0}.$$

Le vecteur accélération est donc nul.

Mouvement rectiligne et uniforme : Le vecteur vitesse \vec{v} est constant :

$$\vec{a} = \vec{0}.$$

2.5 Changement de référentiel

Pour décrire le mouvement dans un référentiel donné, il est parfois plus simple de le décrire tout d'abord dans un autre référentiel. Par exemple pour décrire le mouvement d'un enfant sur un manège, on peut tout d'abord décrire son mouvement (vertical) dans un référentiel fixé sur le manège et donc en rotation par rapport au sol, avant de décrire le mouvement de l'enfant dans le référentiel terrestre. Sachant exprimer les caractéristiques cinématiques (vitesse et accélération) d'un point par rapport à un référentiel \mathcal{R}' , il peut-être utile de pouvoir exprimer ces caractéristiques par rapport à un référentiel \mathcal{R} . On parle de composition des mouvements.

Pour passer de la description du mouvement d'un mobile dans un référentiel \mathcal{R}' à la description du mouvement du même mobile mais dans un autre référentiel \mathcal{R} , il faut connaître le mouvement de \mathcal{R}' tel qu'il serait mesuré par un observateur fixe dans \mathcal{R} .

D'une manière générale, le mouvement d'un référentiel par rapport à un autre référentiel peut-être décomposé en une *translation* et une *rotation*. La translation décrit le déplacement de l'origine O' de \mathcal{R}' par rapport à l'origine O de \mathcal{R} . La rotation décrit l'orientation des axes x', y', z' de \mathcal{R}' par rapport aux axes x, y, z de \mathcal{R} .

Nous n'allons considérer ici que le cas où les deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont en *translation* l'un par rapport à l'autre. Le cas de la *rotation* sera abordé dans le cadre du cours du second semestre.

Remarque : Lorsque \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} , le mouvement de O' , mesuré dans \mathcal{R} , peut décrire une trajectoire quelconque. Ce qui est important est que l'orientation des axes $O'x'y'z'$ par rapport aux axes $Oxyz$ ne varie pas au cours du temps. Considérons, par exemple, une nacelle dans une grande roue. Si on attache à la nacelle un référentiel \mathcal{R}' muni du repère $O'x'y'z'$, où les axes Ox' , $O'y$ et $O'z$ sont à tout instant parallèle aux axes Ox , Oy et Oz , respectivement, le mouvement de la nacelle sera un mouvement de translation par rapport au référentiel \mathcal{R} , fixé sur la Terre ; même si le mouvement de O' mesuré dans \mathcal{R} est une rotation.

2.5.1 Composition du mouvement

Soit \mathcal{R}' un référentiel muni du repère $O'x'y'z'$ en translation par rapport un référentiel \mathcal{R} muni du repère $Oxyz$. Comme \mathcal{R}' est en translation

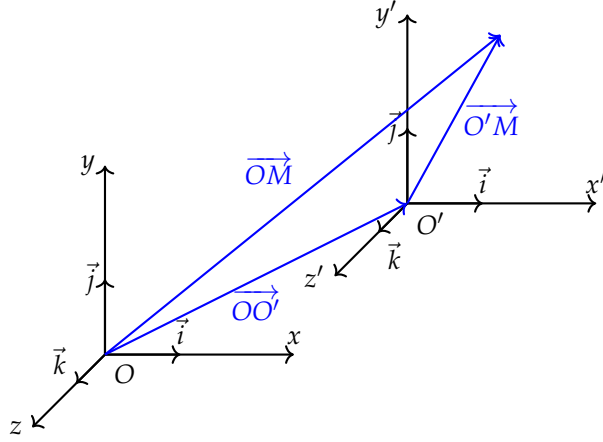


FIGURE 2.5: Composition du mouvement

par rapport à \mathcal{R} , à tout instant, on peut choisir les axes $O'x'$, $O'y'$ et $O'z'$ parallèles respectivement aux axes Ox , Oy et Oz . On pourra donc utiliser la même base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pour les deux référentiels. On note \vec{r} le vecteur position du point M dans le référentiel \mathcal{R}

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad (2.18)$$

où x , y et z sont les coordonnées de M dans le référentiel \mathcal{R} , c'est à dire la position du point mesurée par l'observateur fixé au référentiel \mathcal{R} . On note \vec{r}' le vecteur position du point M dans le référentiel \mathcal{R}' ,

$$\vec{r}'(t) = \overrightarrow{O'M}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}, \quad (2.19)$$

où x' , y' et z' sont les coordonnées de M dans le référentiel \mathcal{R}' , c'est à dire la position du point mesurée par l'observateur fixé au référentiel \mathcal{R}' . Finalement on note également $\vec{R}(t)$ la position du référentiel \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R}

$$\vec{R} = \overrightarrow{OO'}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}, \quad (2.20)$$

où $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$ sont les coordonnées de O' dans le référentiel \mathcal{R} et sont pour l'instant des fonctions générales du temps t . En utilisant la relation de Chasles on obtient la relation

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t), \quad (2.21)$$

c'est à dire puisque les deux repères sont parallèles entre eux

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t) + x'(t), \\ y(t) &= Y(t) + y'(t), \\ z(t) &= Z(t) + z'(t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.3, la vitesse et l'accélération du point M mesurées par un observateur dans \mathcal{R} sont données par

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} \\ \vec{a}(t) &= \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}\end{aligned}$$

De même la vitesse et l'accélération du point M mesurées par l'observateur fixe dans \mathcal{R}' s'écrivent

$$\begin{aligned}\vec{v}'(t) &= \dot{x}'(t)\vec{i} + \dot{y}'(t)\vec{j} + \dot{z}'(t)\vec{k} \\ \vec{a}'(t) &= \ddot{x}'(t)\vec{i} + \ddot{y}'(t)\vec{j} + \ddot{z}'(t)\vec{k}\end{aligned}$$

Puisque l'orientation du référentiel \mathcal{R}' est fixe par rapport à \mathcal{R} alors les résultats précédents donnent les lois simples de composition des mouvements pour des référentiel en translation

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{v}'(t) \quad (2.23)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{A}(t) + \vec{a}'(t) \quad (2.24)$$

où $\vec{V}(t)$ et $\vec{A}(t)$ sont respectivement la vitesse et l'accélération de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} ; soient :

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \dot{X}(t)\vec{i} + \dot{Y}(t)\vec{j} + \dot{Z}(t)\vec{k} \\ \vec{A} &= \ddot{X}(t)\vec{i} + \ddot{Y}(t)\vec{j} + \ddot{Z}(t)\vec{k}\end{aligned}$$

Remarque : On retiendra que ces équations ne sont valides que pour des référentiels en translation l'un par rapport à l'autre. Dans le cas de la rotation des axes, il faut utiliser une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ liée au référentiel \mathcal{R}' dont l'orientation par rapport à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du référentiel \mathcal{R} dépend du temps t . Du point de vue de l'observateur attaché au référentiel \mathcal{R} , les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont donc des fonctions du temps et dans le calcul de la vitesse et de l'accélération, il faut tenir compte de cette dépendance.

2.5.2 Cas de la translation rectiligne uniforme et transformation de Galilée

Dans le cas où \mathcal{R}' est en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} alors

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \overrightarrow{cste}.$$

Ainsi l'accélération de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} s'écrit

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}.$$

Les lois de composition de la vitesse et de l'accélération deviennent donc (voir Eqs. (2.24)) :

$$\vec{v}(t) = \vec{V} + \vec{v}'(t), \quad (2.25)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t). \quad (2.26)$$

Ainsi lorsque deux référentiels sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, les accélérations, d'un point, mesurées dans les deux référentiels, sont égales.

Puisque \vec{V} est une constante la position du référentiel \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} est une fonction linéaire du temps

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}t \quad (2.27)$$

En effet si la composante selon x de la vitesse \vec{V} est constante $\frac{dX}{dt} = V_x = \text{cte}$ alors on a $X(t) = V_x t + X_0$. On obtient la même chose pour $Y(t)$ et $Z(t)$ pour finalement obtenir l'équation précédente. D'autre part nous pourrions supposer que le temps mesuré dans les deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' peut être différent. Mais la cinématique Galiléenne nous impose que l'écoulement du temps doit être identique dans les deux référentiels. Néanmoins, les horloges utilisées par les deux observateurs peuvent ne pas coïncider à l'instant initial. Nous allons donc supposer que l'origine du temps utilisé dans les deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' peut être différente. Ainsi, on introduit le temps t' associé au référentiel \mathcal{R}' et on réserve la notation du temps t pour le temps associé au référentiel \mathcal{R} . En cinématique Galiléenne on a nécessairement la relation $t = t' + t_0$. On en déduit que dans le cas où \mathcal{R}' a un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} , les relations entre les coordonnées (\vec{r}', t') d'un événement mesurées dans \mathcal{R}' et celles (\vec{r}, t) mesurées dans \mathcal{R} sont :

$$\begin{aligned} t' &= t - t_0, \\ \vec{r}'(t') &= \vec{r}(t) - \vec{V}t - \vec{R}_0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Cette transformation s'appelle la transformation de *Galilée*, dans le cas simple d'une translation rectiligne et uniforme le long de l'axe Ox , et pour le cas où la position des deux référentiels coïncide à $t = t' = 0$ alors la transformation peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (2.29)$$

Remarque : La transformation de Galilée (Eq. (2.28)) est en fait un cas limite de la transformation de *Lorentz* qui prévaut en mécanique

relativiste. On peut montrer que cette transformation s'écrit

$$\begin{aligned}t' &= \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \\x' &= \gamma (x - Vt) \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\tag{2.30}$$

où $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ et où c est la vitesse de la lumière. A partir de la transformation de Lorentz on peut retrouver la transformation de Galilée dans le cas des faibles vitesses par rapport à la vitesse de la lumière $V \ll c$.

Dynamique

On s'intéresse ici à déterminer les changements qui s'opèrent dans le mouvement d'un corps lorsqu'une ou plusieurs forces s'appliquent sur ce dernier.

Nous n'aborderons pas ici le problème de la dynamique dans toute sa généralité. Nous nous intéresserons à la dynamique d'un système très idéalisé appelé le point matériel. Le point matériel est un corps dont la masse est concentrée dans un volume infiniment petit. Cette première approche bien que très idéalisée, permet en fait de décrire, dans de nombreuses situations, le mouvement du centre de masse d'un solide étendu. La dynamique générale d'un solide étendu soumis à des forces ou en interaction avec d'autres corps sort du cadre de ce cours.

3.1 Première loi de Newton

C'est dans son célèbre ouvrage "Principes mathématiques de la philosophie naturelle (1686)" (<http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&0=NUMM-29038>) que Newton formalise clairement la notion de force, dans l'énoncé de sa première loi :

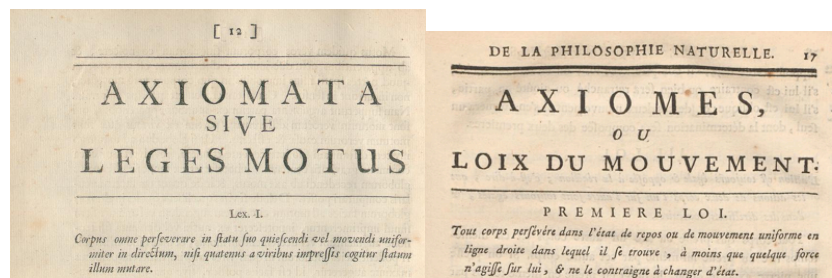


FIGURE 3.1: *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, texte original (1686) et traduction par Mme La Marquise du Chastellet (1759)

“Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.”

Notion dynamique de la force : Il peut y avoir mouvement sans force. La force change le mouvement.

Pour Newton, l'état de base du mouvement est le repos ou le mouvement rectiligne uniforme. De plus, la notion de force qui est introduite, est une notion dynamique. C'est à dire que la force est celle qui est responsable du changement du mouvement. La force fait sortir le système de son état de base. On se rappellera qu'il peut y avoir un mouvement sans force, la force change le mouvement.

Le principe d'inertie tel qu'exprimé par Newton suppose l'existence d'un référentiel absolu et supposé immobile. Une formulation moderne du principe d'inertie permet de définir le concept de référentiel *Galiléen* (également appelée *inertiel*) :

“Dans un référentiel Galiléen, tout point matériel isolé (c'est-à-dire soumis à aucune force extérieure) est soit immobile, soit en mouvement rectiligne uniforme”.”

S'il existe un référentiel \mathcal{R} qui est Galiléen, alors il en existe une infinité. En effet, si le mouvement d'un point mesuré dans \mathcal{R} est rectiligne et uniforme alors son vecteur accélération est nulle. Or d'après l'équation (2.26), le vecteur accélération sera aussi mesuré comme nul dans tout autre référentiels en translation rectiligne et uniforme par rapport à \mathcal{R} . Donc tous les référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiels galiléen \mathcal{R} sont aussi des référentiels galiléen.

Newton postule l'existence d'un référentiel Galiléen absolu qui structure la notion de l'espace et du temps de l'univers. A partir de ce référentiel absolu, on peut, en principe, obtenir tous les référentiels galiléens qui sont en translation rectiligne et uniforme par rapport à ce référentiel Galiléen absolu. Le mouvement mesuré dans un référentiel galiléen quelconque peut en principe se déduire du mouvement mesuré dans le référentiel galiléen absolu, par la transformation de Galilée (voir Eqs. (2.28)). La notion de référentiel est aujourd'hui abandonnée.

Dans la pratique, lors d'une expérience de physique, où on utilise un solide indéformable réel comme référentiel, ce dernier ne pourra constituer un référentiel Galiléen que de manière approximative. Le degré d'approximation va dépendre du processus physique étudié. Par exemple le référentiel terrestre constitue un bon référentiel Galiléen, si l'on ne s'intéresse qu'à des mouvements sur des temps courts par rapport à la période de rotation de la Terre sur elle même, autrement dit la durée du jour (pendule, chute libre sur quelques mètres). En effet, dès que la durée des expériences deviendra comparable à la durée du jour, il faudra tenir compte du fait que vu depuis un référentiel géocentrique la Terre tourne sur elle même et qu'elle n'est donc pas un référentiel galiléen. Ensuite, mesurée dans un référentiel héliocentrique, la Terre tourne autour du soleil. On peut continuer en remarquant que mesuré dans le référentiel de Copernic, le soleil lui même possède un mouvement accéléré . . .

3.2 Les forces

3.2.1 Définition

Dans un référentiel Galiléen, une force exercée sur un point matériel, modifie la vitesse de celui-ci. Par exemple, si l'on souhaite faire bouger un meuble qui est immobile, il faudra exercer une force sur ce meuble. Sa vitesse qui était nulle au départ deviendra non nulle. La vitesse étant une quantité vectorielle, la force doit aussi être un vecteur. La direction et le sens du vecteur force indiquera dans quelle direction et dans quel sens la vitesse du corps sera modifiée. Une force est une quantité physique qui sera donc caractérisée par la donnée de trois quantités, *l'intensité de la force*, *la direction* dans laquelle elle est appliquée et son *sens* ou son orientation. C'est à dire qu'une fois donnée sa direction, il faut aussi préciser si on tire ou on pousse dans cette direction. La direction et le sens de la force seront donnés par la direction et le sens du vecteur force. L'intensité de la force sera donnée par la norme du vecteur force. Pour un rappel sur les vecteurs on pourra se référer à l'annexe B, page 117.

On prendra soin de distinguer les quantités vectorielles des quantités réelles en mettant une flèche au dessus comme \vec{F} . Par exemple, dans l'équation $F = \|\vec{F}\|$, le terme \vec{F} désigne un vecteur, dont la norme est notée F , sans la flèche puisque la norme d'un vecteur est un nombre réel (positif).

La dimension associée à la force est MLT^{-2} et l'unité internationale associée est le Newton qui correspond à 1 kg.m.s^{-2} .

Force : Intensité, direction et sens \vec{F} .
Dimension $[\vec{F}] = MLT^{-2}$. Unité : Newton (N).

3.2.2 Exemples de Forces

La force de gravitation La force de gravitation est une force d'interaction entre les masses. Une masse m_1 exerce une force de gravitation \vec{F}_{12} sur une masse m_2 , qui est proportionnelle au produit des masses et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les masses. En notant M_1 et M_2 les positions respectives des deux masses m_1 et m_2 , le vecteur force de gravitation peut s'écrire :

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{\|\vec{M_1M_2}\|^3}\vec{M_1M_2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}_r \quad (3.1)$$

où \vec{u}_r est le vecteur unitaire (de norme égale à 1) dans la direction et le sens de $\vec{M_1M_2}$, et r est la distance entre M_1 et M_2 . Ce qu'on peut écrire :

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{M_1M_2}}{\|\vec{M_1M_2}\|}$$

La constante de proportionnalité G est appelée la constante universelle de gravitation sa valeur est : $G = 6.67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$.

Force de gravitation s'appliquant sur la masse m_2 située à une distance r de la masse m_1 :

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

Question : quand les masses sont concentrées en des points M_1 et M_2 , l'expression précédente est claire, mais pour deux objets étendus, comme la Terre et un satellite, où faut-il prendre les points M_1 et M_2 ?

Remarques : la masse m_2 subit aussi une force de gravitation due à la présence de la masse m_1 . Cette force, \vec{F}_{21} est opposée à \vec{F}_{12} :

$$F_{12} = -F_{21}. \quad (3.2)$$

Il s'agit d'un cas particulier de la troisième loi de Newton, appelée la loi des actions réciproques, ou loi de l'action et de la réaction qui sera étudié au chapitre 5.

Calculons la force de gravitation \vec{F} qui s'exerce sur un humain de masse m , provoquée par la masse $M = 5.97 \times 10^{24}$ kg de la Terre. Pour faire ce calcul, nous pouvons considérer que toute la masse M de la Terre est concentrée en son centre. Cette propriété de la force de gravitation est une conséquence du théorème de Gauss dont l'étude sort du cadre de ce cours.

Le rayon de la Terre étant $R = 6.37 \times 10^3$ km, on obtient :

$$\vec{F} = -m \frac{GM}{R^2} \vec{u}_r = m \vec{g}$$

où on a défini le vecteur \vec{g} :

$$\vec{g} = -\frac{GM}{R^2} \vec{u}_r \simeq -9.81 \vec{u}_r \text{ ms}^{-2}$$

\vec{g} est un vecteur dirigé vers le centre de la Terre, c'est à dire vertical vers le bas, et qui a la dimension d'une accélération. \vec{g} est appelé *accélération de la pesanteur*.

La force de gravitation (3.1) est actuellement considérée comme une approximation (non-relativiste) de la théorie de la Relativité Générale, tout comme on l'a vu pour la transformation de Galilée à la fin du chapitre de Cinématique. Les interactions gravitationnelles ont une portée infinie et jouent un rôle clé en cosmologie. Ce sont elles qui gouvernent l'évolution de l'Univers. En Relativité Générale, les phénomènes gravitationnels sont encodés dans la courbure de l'espace-temps quadri-dimensionnel, et cette courbure est elle-même induite par la répartition des diverses formes de matières dans notre Univers. Les observations astrophysiques récentes (telles celles liées à l'observation d'ondes gravitationnelles émises lors de la coalescence de deux trous noirs en septembre 2015) sont toutes en accord avec les prédictions de la Relativité Générale. Par contre le comportement de la gravitation aux échelles subatomiques n'a pas encore été testé en laboratoire et reste donc inconnu. »

La force électrostatique La Force électrostatique est la force fondamentale qui existe entre les charges qui se déplacent lentement par rapport à

Le poids d'une masse m est la force de gravitation qu'exerce la Terre (de masse M) sur la masse m situé à la surface de la Terre :

$$\vec{F} = -m \frac{GM}{R^2} \vec{u}_r = m \vec{g};$$

$$\text{où } \vec{g} = -\frac{GM}{R^2} \vec{u}_r \simeq -9.81 \vec{u}_r \text{ ms}^{-2},$$

où R désigne le rayon de la Terre. \vec{g} est appelée *accélération de la pesanteur*

la vitesse de la lumière. C'est une force très importante, elle est en partie responsable de la structure de la matière. En effet elle est responsable de l'interaction entre les électrons de charge négative et les noyaux des atomes qui sont chargés positivement. Le courant dans un fil métallique est le résultat du déplacement des charges portées par les électrons du métal. La charge se mesure en Coulomb (C) et le courant représente la charge qui passe par seconde par la section du fil. Le courant se mesure en ampère (A), qui représente 1 Coulomb par seconde. L'expression de la force qu'exerce la charge Q_1 sur la charge Q_2 située à une distance r est :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (3.3)$$

où \vec{u}_r est le vecteur unitaire dans la direction et le sens de $\overrightarrow{M_1 M_2}$ et ϵ_0 est une constante fondamentale, appelée la permittivité diélectrique du vide et dont la valeur est : $\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}$ Farad.m⁻¹. L'expression de la force est très similaire à celle de la force de gravitation. La grande différence est que contrairement à la force de gravitation, la force électrostatique peut aussi être répulsive. En effet, si les charges Q_1 et Q_2 sont de même signes alors la force électrostatique est répulsive et si les charges sont de signes opposés la force est attractive.

La force électrostatique qui s'exerce sur une charge Q_2 en M_2 située à la distance r d'une charge Q_1 en M_1 :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u}_r,$$

où $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r}$ et $r = \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$.

Force de rappel élastique La force de rappel élastique est la force qu'oppose certains matériaux quand on tente de les déformer. Elle est présente dans les ressorts, les amortisseurs à lames, les trampolines etc ...

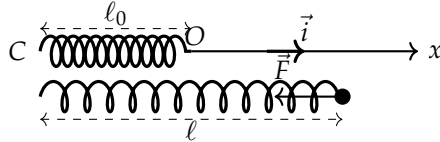


FIGURE 3.2: Modélisation du ressort.

Prenons un ressort que l'on pose sur une table horizontale. On fixe une des extrémité du ressort à la table en un point que l'on note C, et on note ℓ_0 la longueur du ressort. On étire le ressort d'une certaine quantité x , de telle sorte que la nouvelle longueur du ressort soit $\ell = \ell_0 + x$. On constate que le ressort exerce une certaine résistance à cet allongement. Il oppose une force dont le sens est opposé à la force de l'opérateur qui allonge le ressort, et dont la norme est proportionnelle à l'allongement x . C'est la loi de Hooke (scientifique britannique 1635–1703).

Si on note Ox l'axe dont la direction est le ressort et dont le sens est celui de l'allongement du ressort, alors on pourra écrire le vecteur force de rappel élastique de la façon suivante :

$$\vec{F} = -kx\vec{i} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i}, \quad (3.4)$$

Force de rappel d'un ressort :

$$\vec{F} = -kx\vec{i} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i},$$

où ℓ_0 est la longueur à vide et ℓ la longueur actuelle du ressort. k est la raideur du ressort. Cette expression est valable quel que soit le signe de x . C'est à dire que l'expression est la même que le ressort soit étiré ou comprimé. On dira que l'expression est *algébrique*.

où \vec{i} est un vecteur unitaire dans la direction et le sens de Ox . La constante $k > 0$ est appelée raideur du ressort.

On remarque que cette équation est aussi valable dans le cas où le ressort est comprimé au lieu d'être étiré. En effet si on compresse le ressort, alors $\ell < \ell_0$ donc $x < 0$ et dans ce cas \vec{F} est orienté dans le sens positif de l'axe Ox . Ce qui est bien le sens opposé à la force exercée par l'opérateur qui compresse le ressort dans le sens négatif de l'axe Ox . On essaiera toujours d'écrire des expressions valables quel que soit le signe des variables composant l'expression. On dira alors que l'expression est *algébrique*.

La force qu'exerce un matériau qui résiste à la déformation ne reste proportionnelle à la déformation que si la déformation reste faible. En effet, si on le déforme trop fortement, le matériau ne reviendra plus à sa forme initiale. On entre dans le domaine de la déformation dite "*plastique*".

Frottement visqueux – Modèle de Stokes Un solide qui se déplace dans un fluide (un liquide ou un gaz) subit une force de frottement, qui dépend de la vitesse relative entre le mobile et le fluide. La norme de cette force augmente avec la norme de la vitesse. Cette force résulte de l'interaction entre les atomes ou molécules du solide avec les atomes ou molécules constituant le fluide. Si la vitesse relative entre le mobile et le fluide n'est pas trop élevée, on pourra considérer que la norme de la force est proportionnelle à la norme de la vitesse. On écrira :

$$\vec{F} = -\lambda \vec{v} \quad (3.5)$$

où λ est une constante positive qui dépend de la nature du fluide et de la nature et de la forme du solide. Il ne s'agit pas d'une force fondamentale. Il s'agit d'une expression phénoménologique qui résulte de constatations expérimentales. Cette force est la résultante de multiples interactions fondamentales entre les molécules constituant le solide et le fluide. Ce modèle de force de frottement appelée force de Stokes (du nom du physicien et mathématicien irlandais (1819–1903)), n'est valable que pour des vitesses faibles, ou pour un fluide très visqueux. Pour des vitesses élevées, la force de frottement dépend du carré de la vitesse.

Frottement visqueux

$$\vec{F} = -\lambda \vec{v}$$

où \vec{v} est le vecteur vitesse du mobile par rapport au fluide. On rappellera plus précisément la définition précise du vecteur vitesse, dans le chapitre 2 dédié à la cinématique.

Frottement solide A la suite de Guillaume Amontons (1699), c'est Charles Coulomb (1736-1806) qui a étudié expérimentalement de façon systématique le frottement entre deux solides dans son mémoire intitulé "*Théorie des machines simples*" (<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1095299>). Supposons un solide, immobile, posé sur une table horizontale. Essayons de faire bouger le solide en exerçant une force horizontale \vec{F} . C. Coulomb constate qu'il faut exercer une force dont la norme est supérieure à une valeur critique qui est proportionnelle au poids du solide. C'est à

dire que pour déplacer le solide il faut que : $\|\vec{F}\| > k_s \|\vec{p}\| = k_s mg$, où le coefficient de proportionnalité k_s est appelé coefficient de frottement statique.

On en déduit, qu'en plus de la force \vec{R}_n qui est orthogonale au support et qui s'oppose au poids du solide, le support exerce donc une force de frottement \vec{f}_s qui s'oppose à la force appliquée \vec{F} et qui est parallèle au support. La force \vec{f}_s est appelée force de *frottement solide statique*, c'est la force qui s'exerce tant que le solide est immobile par rapport au support. Sa norme est toujours plus faible que $k_s mg$: $\|\vec{f}_s\| < k_s mg$.

Cette loi du frottement solide peut être généralisée en remarquant que la norme de la réaction orthogonale au support \vec{R}_n , est égale à la norme du poids, $\|\vec{R}_n\| = mg$. On aura donc :

$$\|\vec{f}_s\| < k_s \|\vec{R}_n\|; \vec{R}_n \perp \text{support.} \quad (3.6)$$

C'est cette dernière expression plus générale qui est considérée comme la loi du frottement solide. La norme de la force de frottement exercée par le support (et parallèle à ce dernier) ne peut pas être supérieure à $k_s \|\vec{R}_n\|$ où \vec{R}_n est la force exercée par le support et qui est orthogonale à ce dernier.

Lorsque la force appliquée \vec{F} est suffisamment grande pour que le solide se mette en mouvement, c'est à dire que $\|\vec{F}\| > k_s \|\vec{R}_n\|$, alors la force de frottement \vec{f}_c que le support exerce sur le solide a une norme plus faible que lorsque le solide était au repos. C'est à dire que $\|\vec{f}_c\| < \|\vec{f}_s\|$. La force \vec{f}_c est appelée *force de frottement solide cinétique*. C'est la force de frottement exercée par le support lorsque le solide est en mouvement par rapport au support. L'expérience montre que :

$$\|\vec{f}_c\| = k_c \|\vec{R}_n\|, \quad (3.7)$$

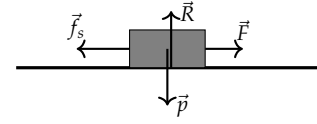
où k_c est le coefficient de frottement cinétique. Comme $\|\vec{f}_c\| < \|\vec{f}_s\|$ et $\|\vec{f}_s\| < k_s \|\vec{R}_n\|$, on a aussi :

$$k_c < k_s.$$

Un des résultats marquant des expériences de Amontons et Coulomb est que les coefficients de frottement k_s et k_c ne dépendent que de la nature des matériaux en contact, et ne dépendent pas de la géométrie des surfaces en contact. Le frottement solide ne constitue pas une interaction fondamentale. Cette force résulte de l'interaction entre les atomes et/ou molécules des surfaces qui sont en contact. L'étude de l'origine microscopique du frottement, et en particulier des lois de Coulomb est aujourd'hui un sujet de recherche actif qui est appelé la *tribologie*.

Frottement solide :

Pour déplacer le solide il faut que, $\|\vec{F}\| > k_s \|\vec{R}_n\|; \vec{R}_n \perp \text{support.}$



La norme de la force de frottement solide qui s'applique sur un solide immobile \vec{f}_s vérifie :

$$\|\vec{f}_s\| < k_s \|\vec{R}_n\|; \vec{R}_n \perp \text{support.}$$

k_s est le coefficient de frottement statique.

La norme de la force de frottement solide qui s'applique sur un solide en mouvement \vec{f}_c vérifie :

$$\|\vec{f}_c\| = k_c \|\vec{R}_n\|; \vec{R}_n \perp \text{support.}$$

k_c est le coefficient de frottement cinétique (ou dynamique).

$$\|\vec{f}_c\| < \|\vec{f}_s\| \Rightarrow k_c < k_s.$$

3.3 Seconde loi de Newton

3.3.1 Principe fondamental de la dynamique

C'est dans sa seconde loi que Newton précise la façon dont la force affecte le mouvement. La force fait changer la quantité de mouvement. La quantité de mouvement est en générale notée \vec{p} (ne pas confondre avec le poids). La quantité de mouvement d'un point matériel de masse m et possédant une vitesse \vec{v} est une quantité vectorielle :

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

La seconde loi de Newton, aussi appelée Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) peut s'énoncer comme suit : Dans un référentiel Galiléen, la somme \vec{F} des forces appliquées sur le point matériel, induit une variation de sa quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (3.8)$$

Si la masse m reste constante au cours du temps alors

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Le PFD Eq. (3.8) devient donc :

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (3.9)$$

On remarquera que cette équation est invariante quelque soit le choix du référentiel Galiléen. En effet nous avons vu que dans le cas d'une transformation de Galilée (translation rectiligne uniforme), alors l'accélération était un invariant. Inversement, il est important de se rappeler que cette équation n'est valide que dans un référentiel Galiléen.

Comme \vec{a} est la dérivée seconde de la position $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ et qu'en général les forces dépendent de la position (ou même de la vitesse), $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$, le PFD est une relation entre la position, la dérivée première et la dérivée seconde de la position. C'est ce qu'on appelle une *équation différentielle*. Dans le cas particulier de la dynamique, on l'appelle l'équation différentielle du mouvement.

Cette équation permet en principe d'obtenir le vecteur position à chaque instant t connaissant la position et la vitesse à un instant initial. En effet, supposons connus le vecteur position $\vec{r}(t)$ et le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$, à l'instant t . On connaît donc la résultante des forces $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t))$. A l'aide du PDF, nous obtenons le vecteur accélération $\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}}{m}$, toujours à l'instant t . Or dans la limite où Δt est très petit, on peut écrire :

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \Leftrightarrow \vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \frac{\Delta t}{m} \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t)).$$

Principe fondamental de la dynamique (PFD) : Soit \vec{F} la somme des forces appliquées sur un point matériel de masse m , dans un référentiel galiléen :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

où, $\vec{p} = m\vec{v}$ est la quantité de mouvement du point matériel de vitesse \vec{v} . Si la masse m ne varie pas alors le PFD devient :

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

On obtient ainsi la vitesse à l'instant $t + \Delta t$. De la même façon on peut écrire pour le vecteur position \vec{r} :

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \vec{v}(t).$$

On a donc obtenu la vitesse et la position à l'instant $t + \Delta t$, ce qui permet d'en déduire la résultante des forces à l'instant $t + \Delta t$ et donc l'accélération à l'instant $t + \Delta t$. On peut donc, en principe, itérer et obtenir ainsi l'équation horaire $\vec{r}(t)$ pour tout instant t .

3.3.2 Cas particulier où la somme des forces est nulle

Lorsque la somme vectorielle des forces appliquées $\sum_{\vec{F} \text{ appliquées}} \vec{F}$ est nulle :

$$\sum_{\vec{F} \text{ appliquées}} \vec{F} = \vec{0}, \quad (3.10)$$

alors en vertu du PFD, l'accélération du mobile est nulle $\vec{a} = \vec{0}$. On a vu dans le chapitre précédent (voir section 2.4.2, 22) que dans ce cas le mouvement est *rectiligne et uniforme*.

Un mobile isolé possède donc un mouvement rectiligne et uniforme. On retrouve ainsi la première loi de Newton.

3.3.3 Cas particulier de l'équilibre

Lorsque le corps est immobile, sa vitesse est nulle à tout instant et donc son accélération est nulle aussi. Dans ce cas particulier, la seconde loi de Newton implique que la somme vectorielle des forces appliquées $\sum_{\vec{F} \text{ appliquées}} \vec{F}$ est nulle :

$$\sum_{\vec{F} \text{ appliquées}} \vec{F} = \vec{0}. \quad (3.11)$$

3.4 Résoudre un problème de dynamique

Nous résumons dans cette section les différentes étapes à franchir pour résoudre un problème de dynamique du point matériel.

1. **Identification du système** : il faut dans un premier temps bien identifier le système qui nous intéresse. En général, il s'agira d'un point matériel qu'il faudra identifier.
2. **Bilan des forces** : on établit le bilan des forces qui s'appliquent sur le point matériel de masse m dont on cherche à prédire le mouvement.
3. **Identification du référentiel** : On choisit un référentiel galiléen muni de son système d'axe cartésien $Oxyz$. Le plus souvent, il s'agira du référentiel terrestre qui sera considéré galiléen dans une bonne approximation.

4. **Composantes dans un repère cartésien** : on détermine les composantes de chacune des forces, ou si c'est possible directement, de la somme \vec{F} vectorielle des forces, sur une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ bien adaptée au problème. Ces composantes sont en général des fonctions de la position et de la vitesse du point matériel considéré. On obtiendra donc une relation du type :

$$\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}$$

où les trois composantes F_i ($i = 1, 2, 3$) sont en fait des fonctions des trois composantes du vecteur vitesse $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et des trois composantes du vecteur position (x, y, z) , dans la même base.

5. **PFD** : On pose alors le PFD, qui est une relation vectorielle, mais qui peut aussi s'écrire composante par composante dans la base orthonormée. En effet :

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = F_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \\ m\ddot{y} = F_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \\ m\ddot{z} = F_3(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \end{cases} \quad (3.12)$$

On obtient donc en général trois équations différentielles du second ordre, c'est à dire trois équations reliant les composantes de la position, de ses dérivées et de ses dérivées secondes. C'est ce qu'on appelle les *équations différentielles du mouvement*.

6. **Solution des équations différentielles du mouvement** : le mouvement du point matériel est décrit par les trois composantes $(x(t), y(t), z(t))$ du vecteur position $\vec{OM}(t)$ à chaque instant t . Ce sont les *équations horaires* (ou équations paramétriques) du mouvement. Les trois fonctions du temps $(x(t), y(t), z(t))$ sont une solution des équations différentielles Eq. 3.12, qui satisfait aux conditions initiales. En effet, comme en général les équations différentielles du mouvement sont du second ordre, pour obtenir une solution unique, il faut connaître la position et la vitesse du point matériel à un instant donné, pris souvent comme l'origine des temps, d'où l'appellation *conditions initiales*. Il faut donc savoir résoudre les équations différentielles du mouvement, obtenir les solutions possibles de ces équations. Puis choisir parmi ces solutions celle qui correspond aux conditions initiales de notre problème.

Tel est le programme que nous allons appliquer dans la suite de ce chapitre sur plusieurs exemples simples.

3.5 Exemples d'application

Dans cette section, la dynamique est décrite dans le référentiel terrestre que l'on considère galiléen.

Equations différentielles du mouvement : le PFD consiste en trois équations différentielles, appelées les équations différentielles du mouvement :

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = F_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \\ m\ddot{y} = F_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \\ m\ddot{z} = F_3(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \end{cases}$$

où F_1 , F_2 et F_3 sont les trois composantes de la résultante des forces et x, y, z les composantes du vecteur position \vec{OM} du point matériel, dans une base orthonormée.

3.5.1 Chute d'un corps proche de la surface de la Terre

1. Rectiligne sans frottement :

On lâche d'une hauteur h sans vitesse initiale une bille, de masse m , que l'on considère comme ponctuelle. On néglige les frottements de la bille sur l'air. On veut connaître sa hauteur à chaque instant t . On applique le programme de la section précédente :

- (a) **Identification du système :** Le système est la bille de masse m . Les conditions initiales sont bien spécifiées : la position est donnée par la hauteur h de la bille et la vitesse initiale est nulle.
- (b) **Bilan des forces :** au cours de sa chute, la bille n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.
- (c) **Composantes dans un repère cartésien :** on choisit un repère cartésien, où l'axe Oz est vertical orienté vers le haut et porté par un vecteur unitaire \vec{k} . On aura donc $\vec{P} = -mg\vec{k}$, où $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$.
- (d) **PFD :** on applique le PFD : $m\vec{a} = -mg\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = -g\vec{k}$. Or $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$, donc :

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = 0$$

$$\ddot{z} = -g$$

Ce sont les trois équations différentielles du mouvement.

- (e) **Solution des équations différentielles du mouvement :** la solution des équations différentielles du mouvement est ici très simple, en effet il suffit d'intégrer (de prendre la primitive) ces équations pour obtenir les composantes du vecteur vitesse :

$$\dot{x} = \text{Cte}$$

$$\dot{y} = \text{Cte}'$$

$$\dot{z} = -gt + \text{Cte}''$$

où Cte , Cte' et Cte'' sont des constantes. Comme à l'instant initial ($t = 0$), la vitesse est nulle, on doit choisir ces 3 constantes égales à zéro. On obtient donc :

$$\dot{x} = 0$$

$$\dot{y} = 0$$

$$\dot{z} = -gt$$

Pour obtenir les équations paramétriques du mouvement, il suffit d'intégrer les composantes du vecteur vitesse pour obtenir les

composantes (x, y, z) :

$$\begin{aligned}x &= \text{Cte} \\y &= \text{Cte}' \\z &= -\frac{1}{2}gt^2 + \text{Cte}''\end{aligned}$$

où Cte, Cte' et Cte'' sont de nouvelles constantes. Or à l'instant $t = 0$, on sait que $z = h$ et on peut choisir $x(t = 0) = y(t = 0) = 0$, donc $\text{Cte} = 0$, $\text{Cte}' = 0$ et $\text{Cte}'' = h$. Donc, les équations horaires du mouvement sont :

$$\begin{aligned}x &= 0 \\y &= 0 \\z &= h - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

2. **Lancé d'un projectile :** On lance un ballon de masse m , avec une vitesse initiale qui fait un angle α avec l'horizontale. On note $v_0 \equiv \|\vec{v}_0\|$ la norme de \vec{v}_0 . On néglige les frottements ainsi que la poussée d'archimède que l'air exerce sur le ballon. On considère le ballon comme une masse ponctuelle.

- (a) **Identification du système :** Le système est le ballon de masse m .
- (b) **Bilan des forces :** Au cours de sa trajectoire, le ballon n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.
- (c) **Composantes dans un repère cartésien :** Le repère cartésien $Oxyz$ est choisi de telle sorte que le plan Oxz soit vertical et contienne le vecteur vitesse initial \vec{v}_0 ; l'axe Oz étant vertical, orienté vers le haut et l'axe Ox horizontal. On choisit la position initiale du ballon pour origine O . Dans ce repère le poids du ballon s'écrit simplement : $\vec{P} = -mg\vec{k}$, où \vec{k} est le vecteur unitaire porté par l'axe Oz .
- (d) **PFD :** Le PFD s'écrit simplement $m\vec{a} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$. Comme $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$, le PFD est équivalent à :

$$m\vec{a} = \vec{P} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

- (e) **Solution des équations différentielles du mouvement :** Les trois équations différentielles du mouvement sont simples et indépendantes les unes des autres. On obtient les composantes de la

vitesse $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ en intégrant par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= C_1 \\ \dot{y}(t) &= C_2 \\ \dot{z}(t) &= -gt + C_3,\end{aligned}$$

où C_1 , C_2 et C_3 sont des constantes qu'il faut choisir pour que les composantes de la vitesse soient conformes aux conditions initiales. Or à l'instant $t = 0$,

$$\vec{v}(t = 0) = v_0 \cos \alpha \vec{i} + v_0 \sin \alpha \vec{k}$$

donc $C_1 = v_0 \cos \alpha$, $C_2 = 0$ et $C_3 = v_0 \sin \alpha$. Les composantes de la vitesse sont donc :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}(t) &= 0 \\ \dot{z}(t) &= -gt + v_0 \sin \alpha\end{aligned}$$

Pour obtenir les composantes $(x(t), y(t), z(t))$ du vecteur position $\vec{OM}(t)$, il suffit d'intégrer par rapport au temps les composantes de la vitesse. On obtient :

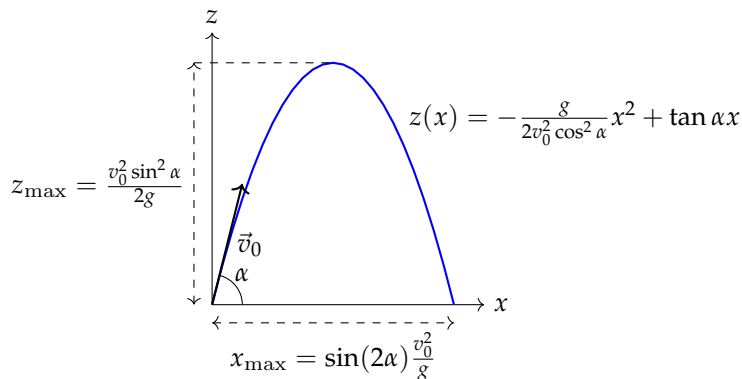
$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \cos \alpha t + D_1 \\ y(t) &= D_2 \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + D_3,\end{aligned}$$

où les constantes D_1 , D_2 et D_3 sont des constantes qu'il faut déterminer pour que $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ soient conformes aux conditions initiales. Comme, on a choisi l'origine O de notre repère comme la position initiale du ballon, $x(t = 0) = y(t = 0) = z(t = 0) = 0$. On en déduit que $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ et $D_3 = 0$. Les équations paramétriques de la trajectoire sont donc :

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \cos \alpha t \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t\end{aligned}$$

Remarques

- La composante horizontale du mouvement (sur l'axe Ox) est uniforme. En effet, \dot{x} est constant (ne dépend pas du temps). La composante verticale est uniformément variée.

FIGURE 3.3: *Lancé d'un projectile. La portée notée x_{\max} , et le sommet de la trajectoire noté z_{\max} .*

- On peut obtenir l'équation de la trajectoire sous la forme $z = f(x)$. En effet, à l'aide de la première équation, on obtient $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$. En utilisant cette expression dans la troisième équation, on obtient :

$$\begin{aligned} z(x) &= -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right) \\ &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x \\ &= x \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right). \end{aligned}$$

C'est une parabole dans le plan Oxz qui passe par le point $(x = 0, z = 0)$ et par le point $(x = 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{v_0^2}{g}, z = 0)$. On en déduit que la portée x_{\max} du projectile, c'est à dire la distance horizontale, maximale atteinte par le projectile est :

$$x_{\max} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{v_0^2}{g} = \sin(2\alpha) \frac{v_0^2}{g},$$

où on a utilisé la relation trigonométrique : $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$. On en déduit que pour une norme v_0 donnée, la portée maximale est atteinte quand $\sin(2\alpha)$ est maximum, c'est à dire quand $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, soit $\alpha = \frac{\pi}{4}$, c'est à dire $\alpha = 45^\circ$.

La parabole étant une courbe symétrique par rapport à son maximum, la hauteur maximale atteinte par le ballon, se produit lorsque $x = \frac{x_{\max}}{2}$. En remplaçant $x = \frac{x_{\max}}{2} = \sin(2\alpha) \frac{v_0^2}{2g}$ dans l'expression de $z(x)$, on obtient la hauteur maximale z_{\max} atteinte par le ballon :

$$z_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

3. **Rectiligne avec frottement solide :** On considère un mobile de masse m qui glisse sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.

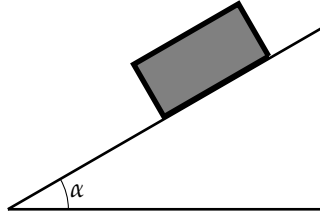


FIGURE 3.4: Corps de masse m sur un plan incliné.

Dans un premier temps nous allons nous intéresser aux conditions pour que le corps de masse m soit à l'équilibre. Il est clair que si l'angle d'inclinaison α n'est pas trop grand, le corps restera immobile. Si on augmente progressivement l'angle α , il existera une valeur de $\alpha = \alpha_s$ à partir de laquelle le mobile commencera à glisser sur le plan incliné. C'est à dire que pour $\alpha < \alpha_s$ le corps restera immobile. La question que nous nous posons est quelle est la valeur de cet angle α_s ou plus précisément comment dépend-il du coefficient de frottement k_s et de la masse m du mobile.

Supposons donc que le corps de masse m est à l'équilibre sur le plan incliné. Sa vitesse est nulle à tout instant et donc son accélération est aussi nulle à tout instant. La seconde loi de Newton permet donc d'écrire que

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0},$$

où $\vec{P} = m\vec{g}$ est le poids de A et \vec{R} est la force exercée par le plan incliné (c'est à dire le support), sur le mobile. On peut décomposer \vec{R} comme la somme de deux vecteurs orthogonaux : \vec{R}_n et \vec{f}_s . \vec{R}_n est orthogonale au support et \vec{f}_s est parallèle au support. Cette dernière correspond à la force de frottement solide statique (voir section 3.2.2, page 34).

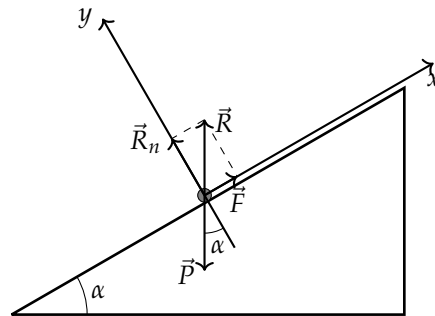


FIGURE 3.5: Contact avec frottement sur un plan incliné.

Il est avantageux de choisir un système d'axe Oxy , avec Ox parallèle et Oy perpendiculaire au support. On note (\vec{i}, \vec{j}) la base orthonormée associée. En décomposant les vecteurs forces dans cette base, on

obtient :

$$\begin{aligned}\vec{R} &= f_s \vec{i} + R_n \vec{j} \\ \vec{P} &= -mg \left(\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j} \right).\end{aligned}$$

Ce qu'on peut aussi écrire :

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} f_s \\ R_n \end{pmatrix}; \quad \vec{P} = -mg \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

La relation vectorielle $\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$ donne donc deux équations :

$$\begin{aligned}f_s - mg \sin \alpha &= 0 \\ R_n - mg \cos \alpha &= 0\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}f_s &= mg \sin \alpha \\ R_n &= mg \cos \alpha\end{aligned}$$

En effectuant le rapport entre les deux équations, on obtient :

$$\tan \alpha = \frac{f_s}{R_n}. \quad (3.13)$$

L'expérience montre que la norme de la force de frottement exercée par le support sur A vérifie l'inégalité (voir Eq. 3.6, page 35) :

$$\|\vec{f}_s\| < k_s \|\vec{R}_n\|, \quad (3.14)$$

où k_s est le coefficient de frottement solide statique que nous avons défini précédemment (voir Eq. (3.6), page 35). En utilisant l'Eq. (3.13), on en déduit que pour que A reste à l'équilibre, il faut que l'angle d'inclinaison vérifie :

$$\tan \alpha < k_s.$$

Si on définit l'angle critique α_s tel que $\tan \alpha_s = k_s$, alors A sera en équilibre tant que $\alpha < \alpha_s$. Lorsque $\alpha \geq \alpha_s$, le support ne peut plus fournir une force de frottement suffisante pour s'opposer à la composante du poids le long de la pente.

On peut maintenant s'intéresser au cas où il y a mouvement. Dans ce cas la force de frottement que nous noterons \vec{f}_s n'est plus exactement la même. On a vu que lorsqu'il y a un mouvement relatif entre le solide et son support, l'intensité de force de frottement parallèle au support $\|\vec{f}_c\|$ est proportionnelle à la composante orthogonale de la réaction du support $\|\vec{R}_n\|$ (voir équation 3.7, page 35) :

$$\|\vec{F}\| = k_c \|\vec{R}_n\|$$

et k_c est le coefficient de frottement cinétique qui vérifie $k_c < k_s$. La résolution complète de cet exemple sera traitée en TD. Il suffit de décomposer le principe fondamental de la dynamique sur les axes Ox et Oy que nous avons défini plus haut.

4. **Rectiligne avec frottement visqueux** : On reprend le problème de la chute rectiligne de la bille de la section 1, mais on considère que la bille est dans un fluide visqueux. On lâche donc une bille de masse m d'une hauteur h sans vitesse initiale.
- (a) **Bilan des forces** : en plus du poids $\vec{P} = m\vec{g}$ on ajoute dans notre modélisation la force de frottement visqueux (voir Eq. (3.5), page 34) $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse de la bille à chaque instant.
- (b) **Composantes dans un repère cartésien** : dans le même repère, en plus de $\vec{P} = -mg\vec{k}$, on aura $\vec{F} = -\lambda(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})$, où (v_x, v_y, v_z) sont les composantes du vecteur vitesse \vec{v} et λ est une constante.
- (c) **PFD** : Comme $\vec{a} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k}$ le PFD est équivalent aux trois équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v}_x &= -\lambda v_x \\ m\dot{v}_y &= -\lambda v_y \\ m\dot{v}_z &= -\lambda v_z - mg \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{v}_x + \frac{\lambda}{m}v_x &= 0 \\ \dot{v}_y + \frac{\lambda}{m}v_y &= 0 \\ \dot{v}_z + \frac{\lambda}{m}v_z &= -g \end{aligned}$$

Les composantes de la vitesse vérifient donc trois équations différentielles indépendantes.

Attention : Il faut bien comprendre que lorsqu'on écrit $\dot{v}_x + \frac{\lambda}{m}v_x = 0$, il s'agit d'une relation entre la fonction $v_x(t)$ et sa dérivée par rapport au temps $\dot{v}_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$ qui doit être vérifiée à chaque instant t . C'est ce qu'on appelle une équation différentielle. Elle est du premier ordre les dérivées d'ordre plus élevé n'interviennent pas.

- (d) **Solution des équations différentielles du mouvement** :

- i. **Solution pour la composantes x et y** : Les équations différentielles satisfaites par $v_x(t)$ et par $v_y(t)$ sont identiques. Il s'agit de trouver l'ensemble des fonctions $f(t)$ qui vérifie la relation

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = 0, \quad (3.15)$$

où $f(t)$ représente $v_x(t)$ ou $v_y(t)$ et on a défini τ de telle sorte que la constante $\frac{\lambda}{m}$ soit égale à $\frac{1}{\tau}$ soit

$$\tau = \frac{m}{\lambda}.$$

On remarque que τ à la dimension d'un temps. Montrer le. On peut aussi mettre l'équation (3.15) sous la forme :

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1}{\tau}f(t).$$

On cherche donc l'ensemble des fonction $f(t)$ qui est proportionnelle à sa dérivée et dont le facteur de proportionnalité est $-\frac{1}{\tau}$. La fonction qui est proportionnelle à sa dérivée est la fonction exponentielle (c'est une des définition de la fonction exponentielle). En effet, soit

$$f(t) = Ce^{Kt},$$

où C et K sont des constantes réelles. La dérivée de $f(t)$ est :

$$\frac{df}{dt} = KCe^{Kt} = Kf(t).$$

La dérivée de $f(t)$ est bien proportionnelle à $f(t)$ et la constante de proportionnalité est K . En prenant $K = -\frac{1}{\tau}$, on obtient l'ensemble des fonctions $f(t)$ qui vérifie l'équation différentielle Eq. (3.15).

On en conclut que :

L'ensemble des fonctions $f(t)$ solution de l'équation différentielle

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = 0,$$

est

$$f(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}}$$

où C est une constante réelle quelconque.

Remarque : l'équation différentielle, Eq. (3.15) possède une infinité de solutions. En effet, il y a une solution pour chaque valeur de la constante C . Déterminer la valeur de la constante C , c'est déterminer une des solutions de l'équation différentielle. C'est parce que l'équation différentielle est du premier ordre que chaque solution n'est déterminée que par une seule constante C . On en déduit que les composantes x et y de la vitesse sont de la forme $v_x(t) = C_x e^{-\frac{t}{\tau}}$ et $v_y(t) = C_y e^{-\frac{t}{\tau}}$, où C_x et C_y sont des constantes, que l'on choisi pour que $v_x(t)$ et $v_y(t)$ se conforment aux conditions initiales.

Comme ici, $v_x(t=0) = v_y(t=0) = 0$, on en déduit que $C_x = C_y = 0$. Bien sûr, ce résultat était prévisible, le mouvement de la bille reste le long de la verticale. Le frottement visqueux ne va pas dévier la trajectoire de la bille, il va juste la freiner. Mais en passant, nous avons appris à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Solution de l'équation différentielle homogène du premier ordre : L'ensemble des fonctions $f(t)$ solution de l'équation différentielle

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = 0,$$

est

$$f(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}}$$

où C est une constante réelle quelconque.

- ii. **Solution pour la composantes y :** L'équation différentielle vérifiée par $v_z(t)$ est un peu différente

$$\dot{v}_z(t) + \frac{\lambda}{m} v_z(t) = -g.$$

En effet le membre de gauche est identique au cas précédent, mais le membre de droite n'est pas nul, mais égale à une constante, $-g$. On dit que l'équation n'est pas *homogène*, ou qu'elle a un *second membre*.

On cherche donc l'ensemble des fonctions $f(t)$ qui vérifie :

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau} f(t) = a_0 \quad (3.16)$$

où a_0 est une constante connue (ici $a_0 = -g$) et $\tau = \frac{m}{\lambda}$ comme précédemment. Montrons que cette équation différentielle, Eq.(3.16), peut se ramener à l'équation différentielle précédente, Eq. (3.15).

En effet, on peut écrire l'Eq. (3.16) de la façon suivante :

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau} f(t) - a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau} (f(t) - \tau a_0) = 0.$$

On définit une nouvelle fonction $g(t)$ telle que :

$$g(t) = f(t) - \tau a_0. \quad (3.17)$$

Or, on remarque que

$$\frac{dg}{dt} = \frac{df}{dt},$$

puisque τa_0 est une constante et que donc sa dérivée est nulle.

On en déduit que l'équation différentielle Eq. (3.16) peut s'écrire en fonction de $g(t)$ de la façon suivante :

$$\frac{dg}{dt} + \frac{1}{\tau} g(t) = 0,$$

ce qui est bien identique à l'équation différentielle précédente, Eq. (3.15). L'ensemble des solution est donc :

$$g(t) = C e^{-\frac{t}{\tau}},$$

où C est une constante réelle quelconque. En se rappelant la définition de $g(t)$ donné par l'Eq. (3.17), on obtient l'ensemble des solutions de l'équation différentielle Eq. (3.16) :

$$f(t) = g(t) + \tau a_0 = C e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau a_0.$$

On en déduit que la composante z de la vitesse est donnée par la relation suivante :

$$v_z(t) = C e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau g,$$

Equation différentielle du premier ordre avec second membre : L'ensemble des solutions $f(t)$ de l'équation différentielle du premier ordre, avec second membre :

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau} f(t) = a_0$$

est :

$$f(t) = C e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau a_0$$

où C est une constante réelle quelconque.

où on a simplement remplacé a_0 par $-g$ et C est une constante réelle quelconque que nous allons déterminer pour que $v_z(t)$ soit bien conforme aux conditions initiale.

La bille étant lâchée sans vitesse initiale, on en déduit que $v_z(t=0) = 0$, et comme $e^0 = 1$, on obtient :

$$v_z(t=0) = 0 = C - \tau g$$

et donc,

$$C = \tau g.$$

On en déduit la vitesse de la bille à chaque instant t

$$v_z(t) = \tau g e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau g,$$

ou encore :

$$v_z(t) = -g\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right); \quad \text{avec } \tau \equiv \frac{m}{\lambda}.$$

Comme le terme $\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ est toujours positif $v_z(t)$ est négatif. Ce qui était attendu, puisque le mouvement de la bille est vertical vers le bas, et que nous avons choisi l'orientation de l'axe Oz vers le haut. Le vecteur vitesse est donc orienté vers le bas et est opposé au vecteur unitaire \vec{k} . Autrement dit, $\vec{v}(t) = v_z(t)\vec{k}$, avec $v_z < 0$.

Le graphe de la fonction $v_z(t)$ en fonction du temps t est présenté sur la figure 3.6.

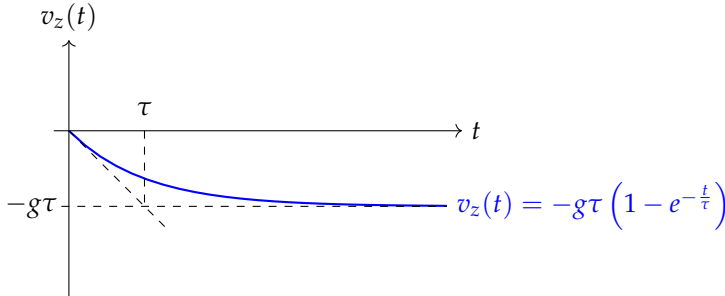


FIGURE 3.6: Composante verticale de la vitesse en fonction du temps. Quand $t \gg \tau$, $v_z(t) \simeq -g\tau$. La droite tangente au graphe de la fonction $v_z(t)$, au point $t = 0$, intersecte l'asymptote $v_z = -g\tau$, au point de coordonnées $(\tau, -g\tau)$

On en déduit la position de la bille en prenant une primitive de $v_z(t)$ pour obtenir $z(t)$. On obtient :

$$z(t) = -g\tau \left(t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + C \Rightarrow z(t) = -g\tau^2 \left(\frac{t}{\tau} + e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + C.$$

où C est une constante qu'il faut choisir pour que $z(t)$ vérifie bien la condition initiale $z(t=0) = h$ ce qui donne :

$$h = -g\tau^2 + C \Rightarrow C = h + g\tau^2.$$

On obtient donc la côte $z(t)$ de la bille en fonction du temps t :

$$z(t) = h - g\tau^2 \left(\frac{t}{\tau} + e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right).$$

Remarques

- On vérifie simplement que τ possède bien la dimension d'un temps $[\tau] = T$ et que donc les expressions donnant $v_z(t)$ et $z(t)$ sont correctement dimensionnées.
- Lorsque $t \gg \tau$ alors $e^{-\frac{t}{\tau}} \ll 1$. On peut donc négliger le terme exponentiel dans l'expression qui donne $v_z(t)$ ainsi que dans celle donnant $z(t)$. On a donc :

$$t \gg \tau \Rightarrow \begin{cases} v_z \simeq -g\tau = -\frac{mg}{\lambda} \\ z(t) \simeq h - g\tau t = h - \frac{mg}{\lambda}t \end{cases}$$

C'est à dire que la vitesse est constante et le mouvement devient uniforme (voir figure 3.6). On dit que la bille possède une *vitesse limite* dont la norme v_{lim} est donnée par

$$v_{\text{lim}} = g\tau = \frac{mg}{\lambda}.$$

Vitesse limite :

$$v_{\text{lim}} = g\tau = \frac{mg}{\lambda}.$$

3.5.2 Oscillateur harmonique

On considère une bille de masse m , considérée comme ponctuelle qui est accrochée à l'extrémité d'un ressort horizontal, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . L'autre extrémité du ressort est fixée en un point C. A l'instant initial que l'on prendra $t = 0$, on étire le ressort d'une quantité x_0 , par rapport à sa position au repos, et on lance la bille avec une vitesse initiale \vec{v}_0 . Le mouvement de la bille et du ressort est horizontal et reste le long d'un axe Ox , porté par le vecteur unitaire \vec{i} , et dont l'origine O correspond à la position au repos. On néglige la masse du ressort ainsi que tous les frottements possibles. Le mouvement de la masse est un mouvement périodique d'oscillations, qui se répètera infiniment puisqu'on a négligé les forces de frottement.

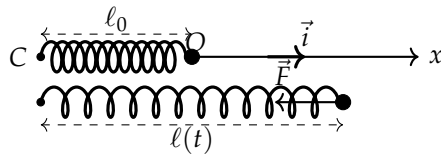


FIGURE 3.7: Bille de masse m accrochée à un ressort.

1. **Identification du système :** Le système étudié est la bille de masse m qui est accrochée au ressort. Le ressort ne fait pas partie du système étudié, il est extérieur au système et exerce une force sur la bille.
2. **Bilan des forces :** Les forces qui s'appliquent sur la bille sont : le poids de la bille \vec{P} qui est complètement compensé par la réaction \vec{R} du support horizontal sur lequel la bille est posée. Le ressort exerce une

force de rappel \vec{F} sur la bille qui est proportionnelle à l'allongement du ressort $\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{i}$ (voir section 3.2.2, Eq. 3.4, page 33), où $\ell(t)$ est la longueur du ressort à un instant t quelconque, au cours du mouvement de la bille.

3. **Composantes dans un repère cartésien :** Le mouvement est rectiligne. Il a lieu le long de l'axe Ox . Il est avantageux de prendre la position de la bille à l'équilibre pour l'origine O des coordonnées sur l'axe Ox . En effet dans ce cas la force de rappel du ressort s'écrit : $\vec{F} = -kx(t)\vec{i}$, où $x(t) = \ell(t) - \ell_0$. Comme le mouvement reste rectiligne sur l'axe Ox , la somme des composantes des forces orthogonales à Ox doit être nulle. On a donc $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$.
4. **PFD :** La résultante des forces est donc la force de rappel du ressort $\vec{F} = -kx(t)\vec{i}$, on a donc :

$$m\vec{a} = \vec{F} = -kx(t)\vec{i}$$

Comme $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{i}$, le PFD devient :

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$

On obtient une équation différentielle du second ordre, homogène (le second membre est nul), linéaire et à coefficients constants.

5. **Solution des équations différentielles du mouvement :** L'équation différentielle du mouvement peut s'écrire :

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.18)$$

où ω à la dimension de l'inverse d'un temps $[\omega] = T^{-1}$. En effet, on montre facilement que $[\frac{k}{m}] = T^{-2}$, pour que l'équation différentielle soit homogène.

On montrer que l'ensemble des solutions de cette équation différentielle peut s'écrire de la façon suivante :

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (3.19)$$

où A et B sont deux constantes réelles quelconques.

Vérifions que $x(t)$ donnée par l'Eq. (3.19) est bien solution de l'équation différentielle (3.18) et ceci quelques soient les valeurs prises par les constantes A et B . Pour cela dérivons deux fois $x(t)$ par rapport au temps.

La dérivée première $\dot{x}(t)$ qui est aussi la vitesse $v(t)$ de la bille :

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \quad (3.20)$$

et donc la dérivée seconde $\ddot{x}(t)$ qui est aussi l'accélération $a(t)$ de la bille est :

$$\begin{aligned} a(t) = \ddot{x}(t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) \\ &= -\omega^2 [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]. \end{aligned}$$

Oscillateur harmonique : masse m accrochée à un ressort horizontal de raideur k . Equation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Solution correspondant aux conditions initiales :

$$x_0 = x(t=0), \quad v_0 = \dot{x}(t=0)$$

est

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Le mouvement est périodique de période T , avec :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

On obtient donc bien :

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t).$$

Les constantes A et B doivent être choisies de telle sorte que le mouvement soit conforme aux conditions initiales. Notons x_0 et v_0 , la position et la vitesse de la bille à l'instant $t = 0$, c'est à dire que :

$$x_0 \equiv x(t = 0); \quad v_0 \equiv \dot{x}(t = 0). \quad (3.21)$$

En évaluant l'équation (3.19) en $t = 0$, on obtient $x(t = 0) = A$. De la même façon, l'équation (3.20) nous donne $\dot{x}(t = 0) = \omega B$. Donc :

$$A = x_0 \text{ et } B = \frac{v_0}{\omega}.$$

L'équation horaire de l'oscillateur harmonique, avec les conditions initiales données par l'Eq. (3.21) est donc :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t); \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.22)$$

Remarques On trouve bien un mouvement périodique. Par définition, la période est donnée par la plus petite valeur de T telle que $x(t + T) = x(t)$. C'est à dire que T est telle que $x_0 \cos(\omega t + \omega T) = x_0 \cos(\omega t)$. Comme la période de la fonction \cos est égale à 2π , on a $\omega T = 2\pi$ et donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

On remarque que la période du mouvement ne dépend pas des conditions initiales x_0 et v_0 . C'est ce qu'on appelle l'isochronie des oscillations. Cette propriété n'est pas très intuitive et elle est liée au fait que la force de rappel \vec{F} est proportionnelle à l'allongement du ressort. Dans la réalité, cette isochronie n'est vraie que pour une faible amplitude d'oscillation. Si on étire trop le ressort, la période deviendra une fonction de l'amplitude. Elle augmentera quand l'amplitude augmentera.

3.6 Dynamique dans un référentiel non-galiléen

On considère un référentiel non-galiléen \mathcal{R}' en translation par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R} . On note \vec{V} et \vec{A} la vitesse et l'accélération du référentiel \mathcal{R}' mesurées dans le référentiel \mathcal{R} .

On s'intéresse à la dynamique d'un point matériel P de masse m et soumis à une résultante des forces \vec{F} . La question que nous nous posons est quelle est l'équation différentielle du mouvement du point P observé dans le référentiel non-galiléen \mathcal{R}' ? On ne peut pas écrire le PFD dans le référentiel \mathcal{R}' car le PFD n'est vrai que dans un référentiel galiléen.

Pour obtenir l'équation différentielle du mouvement du point P observé dans le référentiel non-galiléen \mathcal{R}' , on pose le PFD dans le référentiel galiléen \mathcal{R} puis on utilise la composition des accélérations donnée par l'Eq. (2.24) (page 25, du chapitre 2). Voyons ce que cela nous donne.

Le PFD s'écrit comme suit :

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

où \vec{a} est l'accélération du point matériel mesurée par un observateur fixe dans le référentiel \mathcal{R} . La composition des accélérations (voir (2.24)) nous donne :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A},$$

où \vec{a}' est l'accélération du point matériel mesurée par un observateur fixe dans le référentiel non-galiléen \mathcal{R}' . En introduisant cette dernière relation dans le PFD, on obtient :

$$\vec{F} = m(\vec{a}' + \vec{A}),$$

ce qui peut encore s'écrire comme suit :

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{f}_e, \text{ avec } \vec{f}_e = -m\vec{A}. \quad (3.23)$$

Cette relation ressemble au PFD, la seule différence est qu'à la résultante des forces \vec{F} , il faut ajouter le terme $\vec{f}_e = -m\vec{A}$. Ce terme a la dimension d'une force, puisqu'il est le produit d'une masse par une accélération. \vec{f}_e est une force d'inertie, appelée la force d'entraînement.

En conclusion, dans un référentiel non-galiléen, l'équation différentielle du mouvement s'obtient en écrivant une sorte de PFD mais où il faut ajouter la force d'entraînement $\vec{f}_e = -m\vec{A}$ à la résultante des forces \vec{F} .

Remarques :

- La force d'inertie $\vec{f}_e = -m\vec{A}$ n'est présente que parce que le référentiel \mathcal{R}' dans lequel on étudie la dynamique est non-galiléen. En effet, elle est proportionnelle à l'accélération \vec{A} du référentiel \mathcal{R}' mesurée dans le référentiel galiléen \mathcal{R} . Si $\vec{A} = \vec{0}$, on retrouve le PFD habituel et dans ce cas \mathcal{R}' est bien galiléen puisqu'il est en translation rectiligne et uniforme par rapport à \mathcal{R} .
- Nous avons considéré que \mathcal{R}' était en translation par rapport à \mathcal{R} et n'avons pas étudié les cas où \mathcal{R}' pouvait avoir un mouvement de rotation. Dans ce dernier cas, en plus de la force d'entraînement il faut tenir compte d'une autre force d'inertie : la force de Coriolis. Les effets d'inertie dans les référentiels en rotation par rapport à un référentiel galiléen seront étudiés au semestre prochain.

Équation de mouvement dans un référentiel non-galiléen : l'équation du mouvement d'un point matériel de masse m soumis à une résultante des forces \vec{F} , dans un référentiel \mathcal{R}' non-galiléen, en translation par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R} , peut s'obtenir de la façon suivante :

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{f}_e; \text{ avec } \vec{f}_e = -m\vec{A},$$

où \vec{A} est l'accélération du référentiel \mathcal{R}' mesurée dans \mathcal{R} .

$\vec{f}_e = -m\vec{A}$ est une force d'inertie, appelée force d'entraînement.

4

Energie

4.1 *Introduction*

4.1.1 *Énergie et lois de conservation*

La notion « d'énergie » est rentrée dans l'usage courant depuis bien longtemps, mais de quoi parle-t-on précisément ? Considérons quelques petits exemples pour en cerner les contours.

Exemple 1 : moteur de voiture.— Afin de faire avancer une voiture, on brûle de l'essence dans un moteur. Le phénomène de combustion des hydrocarbure libère de l'*énergie chimique* qui est convertie en *énergie mécanique* (mouvement des pistons et rotation des roues) :

énergie chimique \longrightarrow énergie mécanique

Exemple 2 : freinage de la voiture.— La voiture est lancée avec une certaine vitesse, on peut l'arrêter en appuyant sur la pédale de frein. On induit ainsi une force de frottement. L'énergie mécanique est convertie en énergie thermique (les plaques de frein chauffent) :

mécanique \longrightarrow thermique

Exemple 3 : barrage hydro-électrique.— Le principe de la production d'électricité à l'aide d'un barrage consiste à accumuler un stock d'eau dans un réservoir puis à canaliser l'écoulement de manière à faire tourner une turbine. Un alternateur génère un courant électrique à partir du mouvement de la turbine. La chaîne de conversion de l'énergie est donc

gravitationnelle \longrightarrow mécanique \longrightarrow électrique

Exemple 4 : centrale nucléaire.— En France, l'électricité est majoritairement produite par les centrales nucléaires. On dispose d'un combustible fissile (Uranium,...) : on casse le noyau atomique afin de récupérer une partie de l'énergie de liaison entre nucléons (c'est l'analogue d'une

combustion qui casse une liaison chimique entre atomes). Cette énergie chauffe un fluide dont le mouvement fait tourner une turbine :

nucléaire \longrightarrow thermique \longrightarrow mécanique \longrightarrow électrique

Lois de conservation : Ces quelques exemples illustrent l'un des aspects les plus importants lié à l'énergie, à savoir sa **conservation**, et éventuellement sa conversion d'une forme en une autre forme. L'idée de dégager des lois de conservation est une idée extrêmement féconde en physique, qui en traverse tous les domaines. Cette idée fondamentale fournit également des moyens pratiques pour aider à la résolution de certains problèmes. Quelques remarques :

- La notion d'énergie permet de *penser globalement* plutôt que localement. C'est à dire qu'on ne s'intéresse pas forcément à ce qui se passe à chaque instant, mais on fait un bilan global de ce qu'on a gagné ou perdu entre deux instants. La notion d'énergie fournit ainsi des outils pour raisonner en termes de **gains et pertes** (ou de définir un « coût »).
- Finalement notons que les lois de conservation permettent de faire des découvertes.

Par exemple, c'est l'analyse énergétique de la désintégration β des noyaux de Bismuth en Polonium qui a conduit à postuler l'existence d'une nouvelle particule, appelée neutrino (Pauli, 1931), de telle sorte que la conservation de l'énergie soit satisfaite.

Remarque : Au niveau *élémentaire*, n'existent que deux formes d'énergie : l'énergie *cinétique* et l'énergie *potentielle*. L'énergie chimique (énergie de liaison des atomes pour former des molécules) combine énergie cinétique des électrons et énergie potentielle électrostatique à l'échelle atomique. L'énergie nucléaire est essentiellement l'énergie potentielle associée à l'interaction forte assurant la liaison des nucléons pour former des noyaux. L'énergie électrique est soit de l'énergie cinétique (mouvement des électrons), soit de l'énergie potentielle électrique. L'énergie thermique traduit l'agitation thermique au niveau microscopique (énergie cinétique des atomes), etc.

4.1.2 L'énergie en mécanique du point

Dans un système mécanique l'énergie peut se présenter sous deux formes différentes : l'énergie cinétique E_c et le travail des forces qui s'appliquent au système. L'énergie cinétique représente l'état du système. Elle dépend de la masse et de la norme de la vitesse du système physique étudié. Le travail des forces est l'énergie apportée ou retirée au système, par les forces qui s'appliquent au système. Ce travail des forces, lorsqu'il

existe, fait varier l'énergie cinétique du système et change donc l'état du système. La relation entre la variation de l'énergie cinétique et le travail des forces appliquées est appelé le *théorème de l'énergie cinétique*.

Les forces qui s'appliquent peuvent être conservatives ou non conservatives. Aux forces conservatives, on peut associer une énergie potentielle E_p . On introduit alors l'énergie mécanique E_m du système :

$$E_m = E_c + E_p.$$

Si l'ensemble des forces qui travaillent sont conservatives, alors l'énergie mécanique E_m est une quantité conservée. C'est à dire que E_m ne dépend pas du temps. On dit que le *système est conservatif*. Si des forces non conservatives (et dont le travail est non nul) s'appliquent, alors E_m ne sera pas constant. La relation entre le travail des forces non conservatives et la variation de E_m est appelé le *théorème de l'énergie mécanique*. Souvent, les forces non conservatives sont des forces de frottements qui transforment l'énergie cinétique du système en chaleur. Autrement dit, l'énergie est transformée en énergie cinétique des atomes ou molécules du support ou de l'environnement (solide, liquide ou gaz) responsable du frottement. En effet, la chaleur est l'énergie cinétique d'agitation désordonnée des atomes ou molécules.

Les théorèmes sur l'énergie sont très puissants. Ils permettent de répondre à des questions globales, sans avoir à calculer les positions et vitesses du système à chaque instant. Comme cela serait le cas si on utilisait le PFD.

Dans le cas où le système est conservatif, la donnée de l'énergie mécanique pour toutes les positions du système est suffisant pour obtenir la dynamique complète du système. Dans ce cas le concept de force n'est plus nécessaire. C'est cette façon de faire qui a prévalu et qui a permis de formuler des théories plus générales comme la mécanique quantique par exemple.

Pour donner un sens précis à toutes ces affirmations, nous devons dans un premier temps définir ce qu'est le *travail d'une force*. Nous démontrerons ensuite le *théorème de l'énergie cinétique*. Puis, nous définirons *l'énergie potentielle* et démontrerons le *théorème de l'énergie mécanique*. Dans ce cours, nous ne traiterons pas de ces questions dans toute leur généralité. Nous nous restreindrons au cas où la trajectoire du point matériel est rectiligne. Le cas d'une trajectoire quelconque, demande l'introduction de techniques mathématiques un peu plus complexes (intégrale de circulation d'un champs de vecteur) et sera traité dans le cours de 'Mécanique II' au second semestre.

Avant de commencer, traitons un exemple simple, que nous connaissons bien : l'oscillateur harmonique.

4.1.3 Exemple : l'oscillateur harmonique

On considère le système de la section 3.5.2 (voir page 49) et représenté sur la figure 4.1. Il s'agit d'une bille de masse m accrochée à un ressort horizontal, de raideur k . On repère la position de la masse m par son abscisse x ; l'origine $x = 0$ étant choisie comme la position d'équilibre.

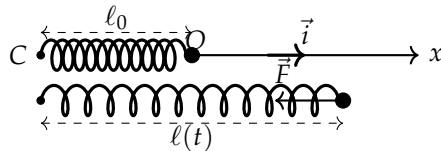


FIGURE 4.1: Bille de masse m accrochée à un ressort.

L'équation différentielle du mouvement que nous avons obtenu à l'aide du PFD est :

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Multiplions cette équation par \dot{x} , pour obtenir :

$$m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = 0. \quad (4.1)$$

Or $\dot{x}\ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{x}]^2$ et $\dot{x}x = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2$. L'Eq. (4.1) peut donc être écrite de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right\} = 0.$$

On en déduit que la quantité entre accolade est une *constante indépendante du temps*. Cette constante est l'énergie mécanique E_m de la bille :

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2.$$

On reconnaît l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2.$$

Le deuxième terme est l'énergie potentielle E_p associée à la force de rappel $\vec{F} = -kx\vec{i}$ du ressort, qui s'applique sur la bille :

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2.$$

Au cours de son mouvement d'oscillation, chacun des deux termes varient au cours du temps mais leur somme est une constante. Lorsque x est à son maximum E_p sera maximum, et E_c sera nulle (vitesse nulle). Au point où la norme de la vitesse $|\dot{x}|$ est maximum, E_c sera aussi maximum mais E_p sera minimum.

La force de rappel du ressort (qui est la résultante des forces appliquées) est une force conservative. L'énergie mécanique E_m de la bille est donc conservée.

Energie mécanique d'un l'oscillateur harmonique

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right\} = 0.$$

L'énergie mécanique E_m :

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

est une constante indépendante du temps. On dit que c'est une constante du mouvement.

Prenons maintenant en compte la force de frottement fluide qui s'applique sur la bille (frottement sur l'air par exemple) :

$$\vec{f} = -\lambda \vec{v},$$

où λ est une constante positive. A l'aide du PFD, on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0.$$

En effectuant le même “truc” que précédemment, on multiplie par \dot{x} cette équation et on obtient :

$$m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = -\lambda\dot{x}^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right\} = -\lambda\dot{x}^2,$$

Ce que l'on peut encore écrire :

$$\frac{dE_m}{dt} = -\lambda\dot{x}^2 < 0. \quad (4.2)$$

On voit donc que l'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ de la bille n'est plus conservée. E_m diminue (sa dérivée étant négative) au cours du temps. La force de frottement n'est pas conservative. On dit que la force est dissipative. Elle dissipe l'énergie de la bille. Le mouvement de la bille sera amorti. L'Eq.(4.2) constitue le théorème de l'énergie mécanique pour notre système amorti.

En fait, l'énergie de la bille est transférée à l'énergie cinétique des molécules constituant l'air qui frotte sur la bille. L'air s'échauffe donc. L'énergie totale de la bille et de l'air se conserve.

Nous avons obtenu l'énergie mécanique de la bille à partir de son équation différentielle du mouvement elle même déduite du PFD. Le but de ce chapitre est de définir l'énergie mécanique et de prévoir si elle se conserve ou non, sans avoir recours au PFD. Nous obtiendrons l'équation différentielle du mouvement à partir du théorème de l'énergie mécanique.

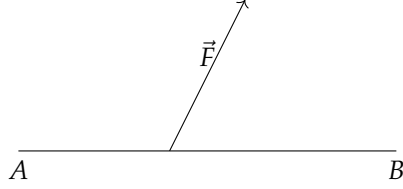
4.2 Travail d'une force

Dans cette section on définit le travail d'une force le long d'un chemin rectiligne. Dans ce cours, on se restreint au cas du chemin rectiligne, le cas d'un chemin de forme quelconque sera traité au second semestre.

4.2.1 Définitions

Cas d'une force constante : Le travail $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ d'une force constante \vec{F} sur un segment rectiligne du point A au point B est défini par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}. \quad (4.3)$$



Il s'agit du produit scalaire du vecteur force avec le vecteur déplacement. Cette expression n'est valable que si la force est constante, c'est à dire qu'elle ne varie pas lorsque le système emprunte le chemin AB .

On remarque que si le chemin AB est emprunté dans l'autre sens (de B vers A), alors le travail de la force change de signe :

$$W_{B \rightarrow A}(\vec{F}) = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F}). \quad (4.4)$$

Il est donc important de bien préciser l'orientation du chemin.

Cas d'une force quelconque : On considère que la force est quelconque. Elle peut varier en direction, sens ou norme au cours de déplacement sur le chemin AB , qui lui reste rectiligne.

Pour définir le travail dans ce cas plus général, on divise le chemin AB en N segments plus petits, de même longueur égale à $\Delta x = \frac{AB}{N}$. On peut choisir N aussi grand que l'on veut. On le choisit assez grand pour que sur chacun des N segments on puisse considérer que la force ne varie pas. On pourra alors se ramener à la définition précédente sur chacun des N petits segments. Le travail de la force sur le chemin AB sera égal à la somme des N travaux sur chacun des N segments. En fait, mathématiquement, on prendra la limite quand $N \rightarrow \infty$ et la longueur de chacun des N segments tendra vers zéro, $\Delta x = \frac{AB}{N} \rightarrow 0$.

Construisons formellement ce que nous venons d'énoncer. Sur le segment AB , on introduit donc $N + 1$ points équidistants, $M_k (k = 0, 1, \dots, N)$, de telle sorte que $M_0 = A$, $M_N = B$ et tel que

$$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \Delta x \vec{i}; \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

où \vec{i} est un vecteur unitaire (de norme égale à 1) dans la direction et le sens de \overrightarrow{AB} . ($\vec{i} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|AB\|}$).

On définit le travail élémentaire $\delta W_{M_{k-1}M_k}(\vec{F}(M_k))$ sur le $k^{\text{ème}}$ segment, en considérant que la force est constante sur ce segment :

$$\delta W_{M_{k-1}M_k}(\vec{F}(M_k)) = \vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \vec{F}(M_k) \cdot \vec{i} \Delta x$$

On définit le travail de la force \vec{F} sur le segment AB comme la somme des travaux élémentaires, dans la limite où le nombre N de segments tend vers l'infini :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \delta W_{M_{k-1}M_k}(\vec{F}(M_k)),$$

Travail d'une force constante sur un chemin rectiligne : Le travail $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ de la force \vec{F} constante, sur le segment AB est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

ce qu'on peut encore écrire :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^N \vec{F}(M_k) \cdot \vec{i} \Delta x.$$

La limite de cette somme peut être interprétée comme la définition de l'intégrale de Riemann (voir annexe D, page 127), sur l'intervalle $[x_A, x_B]$ de la fonction $f(x) \equiv \vec{F}(x) \cdot \vec{i}$, qui représente la composante de la force (calculée au point M d'abscisse x) sur l'axe AB . On notera :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx.$$

Travail d'une force quelconque sur un chemin rectiligne : Le travail de la force \vec{F} sur le segment AB est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx$$

où $\vec{AM} = x\vec{i}$.

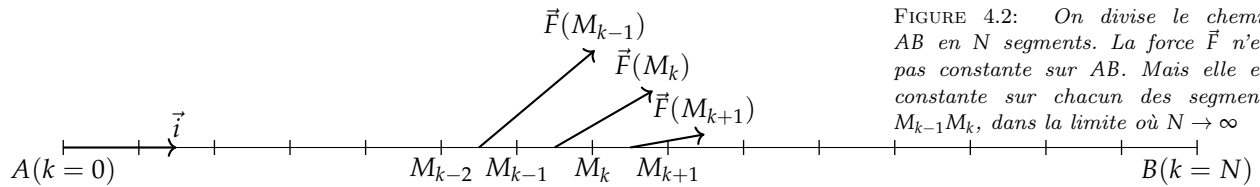


FIGURE 4.2: On divise le chemin AB en N segments. La force \vec{F} n'est pas constante sur AB . Mais elle est constante sur chacun des segments $M_{k-1}M_k$, dans la limite où $N \rightarrow \infty$

4.2.2 Propriétés

Dimension et unité La dimension d'un travail est la dimension d'une longueur multipliée par celle d'une force, soit :

$$[W_{A \rightarrow B}(\vec{F})] = [\vec{F}] L = ML^2T^{-2}.$$

Le travail a donc la même dimension que celle d'une énergie. Le travail d'une force qui s'applique sur un système est l'énergie apportée (si le travail est positif) ou retirée (s'il est négatif) au système, par la force. Lorsqu'il est positif, on dira que le travail est *moteur* et lorsqu'il est négatif on dira que le travail est *résistant*.

Le travail d'une force étant une énergie, son unité dans le système international est donc le joule.

Orthogonalité : Lorsque en tout point du chemin, la direction de la force est orthogonale au chemin, le travail de la force sur le chemin est nul. En effet, le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.

Relation de Chasle : Soit C un point du segment AB . En partant de la définition du travail, il n'est pas difficile de montrer la relation suivante :

$$W_{A \rightarrow C}(\vec{F}) + W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}). \quad (4.5)$$

Linéarité : Soit \vec{F}_1 et \vec{F}_2 , deux forces qui s'appliquent au même point du système lorsqu'il parcourt le segment AB . A partir de la définition du travail, on montre simplement que :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_1) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_2)$$

4.2.3 Calculs de travaux

Recette : Pour calculer le travail d'une force \vec{F} sur un segment AB , il faudra réaliser les étapes suivantes :

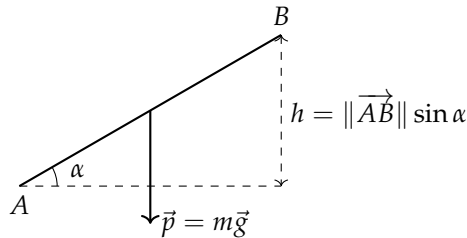
1. **Paramétrisation du chemin AB :** On choisit un axe Ox contenant le segment AB . La position d'un point M quelconque sur le segment AB est repérée par son abscisse x . On note x_A l'abscisse du point A et x_B l'abscisse sur point B .
2. En un point M quelconque du chemin, d'abscisse x , on calcule le produit scalaire $f(x) \equiv \vec{F}(M) \cdot \vec{i}$, qui est la composante de la force $\vec{F}(M)$ sur l'axe Ox . C'est une fonction de l'abscisse x du point M sur l'axe Ox .
3. Le travail est donné par l'intégrale :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx = \int_{x_A}^{x_B} f(x) dx.$$

Finalement, le calcul du travail d'une force revient à calculer une intégrale ordinaire.

Exemples :

1. **Travail du poids à la surface de la Terre :** On considère le travail du poids $\vec{P} = m\vec{g}$ qui s'applique sur un corps de masse m à la surface de la Terre, sur le segment AB . L'accélération de la pesanteur \vec{g} est verticale et orientée vers le bas. AB fait un angle α avec l'horizontale (voir figure 4.3).



Comme le poids est une force constante, le travail du poids sur le segment AB est simplement :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB} = mg \|\vec{AB}\| \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{AB}}) = -mg \|\vec{AB}\| \sin \alpha.$$

Propriétés :

— **Dimension :**

$$[W_{A \rightarrow B}(\vec{F})] = ML^2T^{-2}.$$

Le travail est une énergie.

— **Unité :** unité internationale d'énergie : le joule.

— **Orthogonalité :** Si $\forall M \in AB$, $\vec{F}(M) \perp \vec{AB}$ alors $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = 0$.

— **Chasle :**

$$W_{A \rightarrow C}(\vec{F}) + W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$$

.

— **Linéarité :**

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_1) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_2),$$

si \vec{F}_1 et \vec{F}_2 s'appliquent au même point du système.

FIGURE 4.3: Travail du poids sur le segment AB .

On remarque que $\|\vec{AB}\| \sin \alpha$ est la hauteur h du point B par rapport à celle de A . On en déduit que :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$$

où z_A et z_B sont les hauteurs respectives des points A et B . On aurait pu trouver ce résultat d'une autre façon. On écrit les composantes des vecteurs \vec{P} et \vec{AB} sur la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où \vec{k} est vertical orienté vers le haut. On obtient :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= -mg\vec{k} \\ \vec{AB} &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}.\end{aligned}$$

On en déduit donc le travail en calculant produit scalaire :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB} = -mg(z_B - z_A).$$

On remarque que le travail du poids ne dépend que de la position du point initial A et final B . Plus précisément, il ne dépend que de la hauteur de A et B . Il ne dépend pas de la trajectoire empruntée pour aller de A à B .

2. **Travail de la force de rappel d'un ressort :** Revenons à l'exemple que nous avons traité au début de ce chapitre (voir section 4.1.3, 56). Considérons le travail de la force de rappel $\vec{F} = -kx\vec{i}$, qui s'applique sur la bille attachée au ressort horizontal, quand elle se déplace sur l'axe Ox d'un point A d'abscisse x_A à un point B d'abscisse x_B . La paramétrisation du chemin est ici évidente et $f(x) = \vec{F} \cdot \vec{i} = -kx$, donc

$$\begin{aligned}W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) &= \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx = \int_{x_A}^{x_B} -kx dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2 \right]_{x_A}^{x_B} \\ &= \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2).\end{aligned}$$

On remarque que le travail de la force de rappel du ressort d'un point A à un point B , ne dépend que de la position du point de départ A et du point d'arrivée B . Il ne dépend pas de la trajectoire parcourue pour aller de A à B .

4.3 Théorème de l'énergie cinétique

4.3.1 Enoncé du théorème

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique entre deux points de la trajectoire d'un mobile est égale à la somme des travaux des forces qui s'appliquent sur le mobile, calculés sur la trajectoire du mobile entre ses deux mêmes points.

Travail du poids : Le travail du poids $\vec{P} = m\vec{g}$, sur le segment AB est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A).$$

où $z_{A(B)}$ est la hauteur du point $A(B)$.

Travail de la force de rappel élastique : Le travail de la force de rappel élastique $\vec{F} = -kx\vec{i}$ le segment AB est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2).$$

Formalisons cet énoncé. Pour cela, considérons un point matériel de masse m , passant par le point A au temps t_A et par le point B au temps t_B ($t_B > t_A$). Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit de la façon suivante :

$$E_c(t_B) - E_c(t_A) = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}),$$

où $E_c(t) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}(t)\|^2$ est l'énergie cinétique du mobile au temps t et $\sum_{\vec{F}}$ désigne la somme sur toutes les forces qui s'appliquent au mobile. Le travail $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ est calculé sur la trajectoire effectivement empruntée par le mobile.

4.3.2 Démonstration du théorème

Nous allons démontrer le théorème de l'énergie cinétique dans le cas particulier où la trajectoire est rectiligne, puisque nous avons défini le travail d'une force uniquement sur un chemin rectiligne. Mais, le théorème est général et est vrai quelque soit la forme de la trajectoire.

Puisque nous sommes dans un référentiel galiléen, le long de sa trajectoire, l'accélération du mobile satisfait le principe fondamental de la dynamique (PFD) :

$$m\vec{a} = \sum_{\vec{F}} \vec{F}.$$

On considère que la trajectoire est rectiligne. On repère la position du mobile par son abscisse $x(t)$ à chaque instant t sur l'axe Ox support de sa trajectoire. On pourra donc écrire le PFD de la façon suivante :

$$m\ddot{x} = \sum_{\vec{F}} \vec{F}.$$

Effectuons le produit scalaire de cette équation avec le vecteur vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{i}$ du mobile, on obtient :

$$m\ddot{x}\dot{x} = \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \dot{x}\vec{i}. \quad (4.6)$$

Or $\ddot{x}\dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2)$, donc en intégrant par rapport au temps le membre de gauche de l'égalité Eq. (4.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} m\ddot{x}\dot{x} dt &= \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\dot{x}^2) dt = \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right]_{t_A}^{t_B} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t_B) - \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t_A) \\ &= \frac{1}{2} m \|\vec{v}_B\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}_A\|^2 \\ &= E_c(t_B) - E_c(t_A). \end{aligned}$$

maintenant, intégrons, par rapport au temps t , le membre de droite de l'Eq. (4.6), on obtient :

$$\int_{t_A}^{t_B} \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \dot{x}\vec{i} dt = \sum_{\vec{F}} \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{i} \frac{dx}{dt} dt = \sum_{\vec{F}} \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot \vec{i} dx = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

Théorème de l'énergie cinétique :

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un mobile entre deux points A et B de sa trajectoire est égale à la somme des travaux des forces qui s'appliquent sur le mobile, calculés sur la trajectoire empruntée par le mobile.

$$E_c(t_B) - E_c(t_A) = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

Dans la seconde égalité nous avons effectué le changement de variable $t \rightarrow x$ (donné par l'équation horaire $x = x(t)$) dans l'intégrale (voir annexe D, Eq. D.14, page 131). Finalement, nous avons bien démontré, qu'en intégrant l'équation Eq. (4.6) par rapport au temps, on obtient ;

$$\int_{t_A}^{t_B} m \ddot{x} dx = \int_{t_A}^{t_B} \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \Leftrightarrow E_c(t_B) - E_c(t_A) = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}),$$

qui est bien le théorème de l'énergie cinétique.

4.3.3 Exemple

Un mobile de masse m est posé sur une table en un point O . Il est lancé avec une vitesse initial \vec{v}_0 horizontale. Il glisse sur la table horizontale et subit une force de frottement solide que l'on notera \vec{f} . On notera k_c le coefficient de frottement cinétique. Quelle est la distance ℓ parcourue par le mobile jusqu'à son immobilisation complète ?

Le mobile est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, vertical et orienté vers le bas, qui est complètement compensé par la force de réaction \vec{R} de la table, verticale et orientée vers le haut : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$, puisqu'il n'y a pas d'accélération dans la direction verticale.

Le mobile est aussi soumis à la force de frottement solide \vec{f} dont la norme est donnée par :

$$\|\vec{f}\| = k_c \|\vec{R}\| = k_c mg,$$

et qui est opposée à la vitesse du mobile.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique, entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant final t_f auquel le mobile s'arrête.

$$E_c(t_f) - E_c(t = 0) = W_{O \rightarrow A}(\vec{P}) + W_{O \rightarrow A}(\vec{R}) + W_{O \rightarrow A}(\vec{f}).$$

où on a noté A le point atteint par le mobile à la fin de sa trajectoire. Comme \vec{P} et \vec{R} sont en tout point de la trajectoire orthogonale au déplacement, leur travail respectif est nul. Il reste donc :

$$E_c(t_f) - E_c(t = 0) = W_{O \rightarrow A}(\vec{f}).$$

Or, $E_c(t_f) = 0$ puisque le mobile est à l'arrêt à l'instant t_f , et $E_c(t = 0) = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_0\|^2$, donc :

$$\frac{1}{2} m \|\vec{v}_0\|^2 = -W_{O \rightarrow A}(\vec{f}).$$

Calculons le travail de la force de frottement. Comme la force est constante, on a simplement :

$$W_{O \rightarrow A}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{OA} = -k_c mg \|\overrightarrow{OA}\|.$$

On a donc obtenu :

$$\frac{1}{2}m\|\vec{v}_0\|^2 = k_c mg \|\vec{OA}\|.$$

La distance $\ell = \|\vec{OA}\|$ cherchée est donc :

$$\ell = \frac{\|\vec{v}_0\|^2}{2k_c g}$$

Remarque : Nous avons obtenu la distance parcourue directement, sans avoir utilisé le PFD. Nous n'avons pas eu besoin de résoudre une équation différentielle. En contrepartie, nous n'avons pas d'information sur le temps mis par le mobile pour parcourir la distance ℓ . Nous avons une réponse à une question globale temporellement, mais nous n'avons pas d'information locale en temps sur la cinématique du mobile tout au long de sa trajectoire du point O au point A .

4.3.4 Version locale du théorème de l'énergie cinétique

Enoncé du théorème : La dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps est égale à la somme des puissances développées par les forces qui s'appliquent au système.

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

où la somme $\sum_{\vec{F}}$ est effectuée sur les forces \vec{F} qui s'appliquent sur le système et \vec{v} est la vitesse du point d'application de la force.

Puissance développée par une force : Le produit scalaire $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ est appelée puissance développée par la force sur le système. \mathcal{P} représente le travail exercé par la force par unité de temps. La dimension d'une puissance est donc celle d'une énergie divisé par un temps :

$$[\mathcal{P}] = [E]T^{-1} = ML^2T^{-3}.$$

Son unité dans le système international est le watt, noté W.

Démonstration du théorème : Considérons deux instants très proches l'un de l'autre, t_A et $t_B = t_A + \Delta t$. Les deux points correspondant A et B de la trajectoire du mobile, sont alors très proches l'un de l'autre, x_A et $x_B = x_A + \Delta x$. On choisit Δt assez petit pour que les deux points A et B soient assez proches l'un de l'autre de telle sorte qu'on puisse approcher le travail par $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})(x_A) \simeq \vec{F} \cdot \vec{i} \Delta x$. C'est à dire que la force ne varie pratiquement pas pendant le temps Δt où le mobile se déplace de Δx . Mathématiquement, on prendra la limite $\Delta t \rightarrow 0$ et donc aussi $\Delta x \rightarrow 0$.

Théorème de l'énergie cinétique local :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

où la somme $\sum_{\vec{F}}$ est effectuée sur les forces \vec{F} qui s'appliquent sur le système et \vec{v} est la vitesse du point d'application de la force.

Puissance développée par une force : la puissance \mathcal{P} développée par une force \vec{F} est :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

\mathcal{P} représente le travail exercé par la force par unité de temps.

$$[\mathcal{P}] = ML^2T^{-3}.$$

Son unité dans le S.I. est le watt, symbolisé par W.

Le théorème de l'énergie cinétique entre ces deux instants infiniment proches prend la forme suivante :

$$E_c(t_A + \Delta t) - E_c(t_A) = \sum_{\vec{F}} \vec{F}(x_A) \cdot \vec{i} \Delta x.$$

En divisant cette équation par Δt et en prenant la limite $\Delta t \rightarrow 0$, on obtient l'expression :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_c(t_A + \Delta t) - E_c(t_A)}{\Delta t} = \sum_{\vec{F}} \vec{F}(x_A) \cdot \vec{i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

On reconnaît dans le membre de gauche de cette égalité la limite du taux d'accroissement de la fonction $E_c(t)$, c'est à dire la dérivée $\frac{dE_c}{dt}$ et dans le membre de droite $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$. Or, comme on a considéré que la trajectoire était rectiligne (dans le sens du vecteur unitaire \vec{i}), la vitesse du mobile est $\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i}$. On obtient donc :

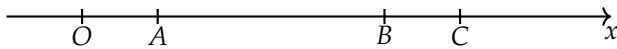
$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

où la somme est effectuée sur l'ensemble des forces qui s'appliquent sur le système.

4.4 Forces conservatives – Energie potentielle

4.4.1 Forces conservatives

Définition : On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point A et B . Dans ce cas le travail $W(\vec{F})_{A \rightarrow B}$ de la force \vec{F} du point A au point B ne dépend que des positions des points A et B . Cette définition est totalement générale, mais nous n'avons pas défini le travail sur des chemins quelconques. Dans le cas où l'on ne s'autorise que des chemins rectilignes pour le calcul des travaux des forces, quelle est le sens de cette définition ? Quel est le sens de "ne dépend pas du chemin suivi" lorsque le travail est défini sur un segment rectiligne AB ? En fait, il est possible de définir une infinité de trajectoires rectilignes qui vont du point A au point B tout en restant sur la droite Ox qui passe par A et B . En effet, soit un point C situé sur la droite Ox mais en dehors du segment AB . Le chemin $AC \cup CB$ est rectiligne, il part de A et arrive en B .



Si la force est conservative alors son travail de A à B en passant par un point C quelconque de la droite Ox ne dépend pas du point C , mais uniquement des abscisses x_A et x_B des points A et B .

Force conservative : On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point A et B . Dans ce cas le travail $W(\vec{F})_{A \rightarrow B}$ de la force \vec{F} du point A au point B ne dépend que des positions des points A et B .

Exemples :

1. **Force de rappel élastique :** Considérons l'oscillateur harmonique. Nous avons vu que le travail de la force de rappel élastique $\vec{F} = -kx\vec{i}$ d'un point A à un point B était donné par l'expression suivante :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2).$$

Nous avons fait ce calcul en supposant que le chemin allait du point A au point B directement. On peut faire le même calcul en supposant que le chemin de A à B passe par un point C de l'axe Ox et qui n'appartient pas forcément au segment AB . En effet, le travail de A à B en passant par le point C peut s'écrire comme la somme :

$$W_{A \rightarrow C}(\vec{F}) + W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_C^2) + \frac{1}{2}k(x_C^2 - x_B^2) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2).$$

On en déduit donc la force de rappel élastique est une force conservative.

2. **Force de frottement visqueux :** toujours dans le cas de l'oscillateur harmonique considérons la force de frottement visqueux, opposée à la vitesse $\vec{f} = -\lambda\dot{x}\vec{i}$. Le travail de cette force de A à B est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_{x_A}^{x_B} \vec{f} \cdot \vec{i} dx = -\lambda \int_{x_A}^{x_B} \dot{x} dx.$$

En effectuant le changement de variable $x \rightarrow t$ (donné par la loi horaire $x = x(t)$), on obtient :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = -\lambda \int_{t_A}^{t_B} \dot{x}^2 dt$$

Il est clair que le travail de cette force dépend du chemin suivi. Il ne dépend pas uniquement de la position de A et de B mais des instants t_A et t_B auxquels le mobile est en ces points et du carré de la vitesse tout le long de la trajectoire.

3. **Le poids à la surface de la Terre :** On montre simplement que le poids à la surface de Terre est une force conservative. Cela est vrai pour toute force constante.

4.4.2 *Energie potentielle associée à une force*

Définition : Lorsqu'une force \vec{F} est conservative, on peut lui associer une énergie potentielle $E_p(M)$ qui est une fonction de la position M . L'énergie potentielle est une fonction telle que :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B), \quad (4.7)$$

pour tout couple de points A et B de l'espace. En fait, on montre que si pour tous les points A et B de l'espace, il existe une fonction $E_p(M)$, qui

permet d'écrire le travail de \vec{F} de cette façon, alors la force est conservative.

Dans le cas particulier, considérer ici, où le chemin est rectiligne sur la droite Ox , $E_p(x)$ sera une fonction de l'abscisse x du mobile sur l'axe Ox et on pourra écrire :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(x_A) - E_p(x_B).$$

En effet, dans le cas d'une force conservative, le travail ne peut dépendre des positions que par la différence $E_p(x_A) - E_p(x_B)$. C'est une conséquence de la relation de Chasles (Eq. (4.5)). En effet, si on note $f_{x_C}(x_A) \equiv W_{C \rightarrow A}(\vec{F})$ alors on aura :

$$\begin{aligned} W_{C \rightarrow A}(\vec{F}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) &= W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) \Leftrightarrow W_{C \rightarrow A}(\vec{F}) - W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) \\ &\Leftrightarrow f_{x_C}(x_A) - f_{x_C}(x_B) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}). \end{aligned}$$

On peut donc choisir l'énergie potentielle $E_p(x) = f_{x_C}(x)$. C'est l'énergie potentielle associée à \vec{F} qui s'annule pour $x = x_C$. En effet, $E_p(x_C) = f_{x_C}(x_C) = W_{C \rightarrow C}(\vec{F}) = 0$.

Force et énergie potentielle : On cherche une relation plus directe entre le vecteur force et la fonction énergie potentielle associée. Pour cela, partons de la définition et explicitons le travail de la force dans le cas où le chemin est rectiligne :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx = E_p(x_A) - E_p(x_B).$$

Si on note $f(x)$ la composante de la force en chaque point d'abscisse x du chemin rectiligne :

$$f(x) = \vec{F}(x) \cdot \vec{i},$$

alors :

$$\int_{x_A}^{x_B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx = \int_{x_A}^{x_B} f(x) dx = E_p(x_A) - E_p(x_B).$$

Cette dernière égalité étant vraie pour tout couple de point A et B , on en déduit que $E_p(x)$ est une primitive de $-f(x)$. Ce qui peut s'écrire :

$$\frac{dE_p}{dx} = -f(x) = -\vec{F}(x) \cdot \vec{i}.$$

On dit que *la force dérive de l'énergie potentielle*. En fait ici, il ne s'agit que de la composante de la force sur l'axe Ox . On peut aussi écrire :

$$E_p(x) = - \int_0^x \vec{F}(s) \cdot \vec{i} ds + C$$

Energie potentielle associée à \vec{F} : L'énergie potentielle associée à une force \vec{F} conservative, est une fonction $E_p(M)$ de la position M , telle que :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B); \forall A, B \in \mathbb{R}^3.$$

Si le chemin est rectiligne, alors :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(x_A) - E_p(x_B),$$

où x_A et x_B sont les abscisses respectives de A et B .

La force dérive de l'énergie potentielle : L'énergie potentielle est une primitive de la composante de la force sur le chemin rectiligne :

$$\frac{dE_p}{dx} = -\vec{F}(x) \cdot \vec{i}. \quad (4.8)$$

ou encore :

$$E_p(x) = - \int_0^x \vec{F}(s) \cdot \vec{i} ds + C$$

Origine de l'énergie potentielle L'énergie potentielle n'est pas unique, elle est définie à une constante près. En effet, Si $E_p(x)$ est l'énergie potentielle associée à la force \vec{F} alors $U_p(x) = E_p(x) + C$, où C est une constante, est aussi une énergie potentielle associée à \vec{F} , puisque $\frac{dE_p}{dx} = \frac{dU_p}{dx} = -\vec{F}(x) \cdot \vec{i}$. Choisir une énergie potentielle (choisir C) c'est choisir *l'origine de l'énergie potentielle*, c'est à dire le point x pour lequel $E_p(x) = 0$. Le choix de l'origine de l'énergie potentielle est arbitraire et n'a aucune incidence sur la physique du système, puisque la force (sa composante en fait) s'obtient en dérivant l'énergie potentielle.

4.5 Énergie potentielle et énergie mécanique d'un système

4.5.1 Définitions

Énergie potentielle d'un système : L'énergie potentielle E_p d'un système est la somme des énergies potentielles, associées aux forces conservatives qui s'exercent sur le système.

On aura donc :

$$E_p(A) - E_p(B) = \sum_{\vec{F} \text{ conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}),$$

et aussi :

$$-\frac{dE_p}{dx} = \sum_{\vec{F} \text{ conservatives}} \vec{F}(x) \cdot \vec{i}.$$

Énergie mécanique d'un système : L'énergie mécanique E_m du système est la somme de son énergie cinétique E_c et de son l'énergie potentielle E_p . Pour un point matériel de masse m et de vitesse \vec{v} , on aura donc :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + E_p.$$

4.5.2 Théorème de l'énergie mécanique

Le théorème de l'énergie mécanique est une conséquence directe du théorème de l'énergie cinétique.

Enoncé du théorème : La variation de l'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des travaux des forces *non conservatives* qui s'appliquent sur le système, le long de sa trajectoire.

Comme pour le théorème de l'énergie cinétique on considère un point matériel de masse m , passant par le point A au temps t_A et par le point B au temps t_B ($t_B > t_A$) :

$$E_m(B) - E_m(A) = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

Origine de l'énergie potentielle :

L'énergie potentielle n'est pas unique, elle est définie à une constante près. Si $E_p(x)$ est une énergie potentielle, alors $E_p(x) + C$, où C est une constante est aussi une énergie potentielle. Choisir une énergie potentielle c'est aussi choisir l'origine de l'énergie potentielle.

Énergie potentielle d'un système :

L'énergie potentielle E_p d'un système est la somme des énergies potentielles, associées aux forces conservatives qui s'exercent sur le système.

Énergie mécanique : l'énergie mécanique E_m d'un système est la somme de son énergie cinétique E_c et de son l'énergie potentielle E_p .

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + E_p.$$

où le travail est calculé le long de la trajectoire empruntée par le mobile et où on a bien spécifié que la somme ne concernait que les forces non-conservatives.

Démonstration : On exprime le théorème de l'énergie cinétique, en séparant les forces conservatives des forces non conservatives :

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum_{\vec{F} \text{ conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) + \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

Or, par définition de l'énergie potentielle E_p du système,

$$E_p(A) - E_p(B) = \sum_{\vec{F} \text{ conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}),$$

Donc :

$$E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B) + \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

Ce qui peut s'écrire :

$$[E_c(B) + E_p(B)] - [E_c(A) + E_p(A)] = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

4.5.3 Version locale du théorème de l'énergie mécanique

Comme pour le théorème de l'énergie cinétique, on a une version locale du théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

La dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est égale à la somme des puissances des forces non-conservatives qui s'appliquent au système.

4.5.4 Conservation de l'énergie mécanique

Dans le cas particulier d'un système qui n'est soumis qu'à des forces conservatives, l'énergie mécanique du système est une constante, elle ne dépend pas du temps. On dit dans ce cas que *l'énergie mécanique est conservée* où que l'énergie mécanique est une constante du mouvement.

En effet, si le système n'est pas soumis à des forces non conservatives, alors le théorème de l'énergie mécanique devient :

$$E_m(B) - E_m(A) = 0 \Leftrightarrow E_m(A) = E_m(B).$$

Cette égalité étant vraie pour tout couple de points A et B de la trajectoire du mobile, l'énergie mécanique est une constante.

Théorème de l'énergie mécanique : La variation de l'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des travaux des forces non conservatives qui s'appliquent sur le système, le long de sa trajectoire.

$$E_m(B) - E_m(A) = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

où le travail est calculé le long de la trajectoire empruntée par le mobile et A et B sont deux points de cette trajectoire.

Théorème de l'énergie mécanique local :

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Conservation de l'énergie mécanique : Dans le cas particulier d'un système qui n'est soumis qu'à des forces conservatives, l'énergie mécanique du système est une constante, elle ne dépend pas du temps.

4.5.5 Exemple

Oscillateur harmonique amorti : Déterminons l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique amorti que nous avons considéré tout au début de ce chapitre. La bille de masse m accrochée au ressort est soumise à son poids \vec{P} et à la réaction du support \vec{R} qui compense complètement le poids : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$, puisque le mouvement est horizontal. Il reste donc la force de rappel du ressort $\vec{F} = -kx\vec{i}$ qui est conservative et la force de frottement $\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\lambda\dot{x}\vec{i}$ qui elle n'est pas conservative.

L'énergie potentielle de la bille est donc l'énergie potentielle associée à \vec{F} puisque c'est la seule force conservative (qui travaille) qui s'applique au système. Comme $\vec{F} \cdot \vec{i} = -kx$, l'énergie potentielle est déterminée par :

$$\frac{dE_p}{dx} = -\vec{F} \cdot \vec{i} = kx.$$

Donc,

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C,$$

où C est une constante arbitraire.

Si on choisit l'origine de l'énergie mécanique à la position d'équilibre de la bille qui correspond à $x = 0$, il faudra prendre $C = 0$. Avec ce choix de l'origine, l'énergie mécanique de la bille est donc :

$$E_m = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Si on néglige les frottements, E_m est une constante, l'énergie mécanique se conserve. Si on considère la force de frottement visqueux, alors le théorème de l'énergie mécanique, dans sa version locale, donne :

$$\frac{dE_m}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\lambda\vec{v} \cdot \vec{v} = -\lambda\|\vec{v}\|^2 = -\lambda\dot{x}^2.$$

Comme on l'avait déjà fait remarquer, l'énergie mécanique de la bille n'est pas une constante, elle diminue. Le travail de la force de frottement retire de l'énergie à la bille. La variation par unité de temps de l'énergie mécanique est donnée par la puissance $\mathcal{P} = -\lambda\|\vec{v}\|^2$ de la force de frottement. Comme cette dernière est négative, il s'agit bien d'une diminution.

En dérivant par rapport au temps l'expression de E_m :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right] = -\lambda\dot{x}^2,$$

on obtient :

$$m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x = -\lambda\dot{x}^2 \Leftrightarrow m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0.$$

La version locale du théorème de l'énergie mécanique est équivalente à l'équation différentielle du mouvement que l'on aurait obtenue en appliquant le PFD.

Energie potentielle élastique :
l'énergie potentielle $E_p(\ell)$ associée à la force de rappel élastique

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i}$$

d'un ressort de longueur ℓ , de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 est donnée par :

$$E_p(\ell) = -\frac{1}{2}(\ell - \ell_0)^2 + C,$$

où C est une constante arbitraire.

Satellite autour de la Terre : Déterminons l'énergie mécanique d'un satellite en orbite autour de la Terre. Le satellite de masse m en un point S de sa trajectoire n'est soumis qu'à la force de gravitation :

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{\|\vec{OS}\|^3}\vec{OS} = -\frac{GmM}{x^2}\vec{i},$$

où G est la constante universelle de la gravitation, M est la masse de la Terre et x est la distance entre le centre de la Terre O et le satellite S . $\vec{i} = \frac{\vec{OS}}{\|\vec{OS}\|}$ est un vecteur unitaire dans la direction et le sens de \vec{OS} .

L'énergie potentielle E_p du satellite est l'énergie potentielle associée à la force \vec{F} , elle est déterminée par :

$$\frac{dE_p}{dx} = -\vec{F} \cdot \vec{i} = \frac{GmM}{x^2}.$$

Donc :

$$E_p(x) = -\frac{GmM}{x} + C,$$

où C est une constante. Par convention, on prend l'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle quand $x \rightarrow \infty$. C'est à dire que $\lim_{x \rightarrow \infty} E_p(x) = 0$. Pour cela on choisit $C = 0$.

Avec ce choix pour l'origine de l'énergie potentielle, l'énergie mécanique du satellite est :

$$E_m = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 - \frac{GmM}{\|\vec{OS}\|}.$$

Si on néglige les frottements du satellite sur l'atmosphère résiduelle, la force de gravitation est la seule force qui s'applique sur le satellite. Cette force étant conservative, E_m est conservée au cours du mouvement du satellite.

Vitesse de libération : La vitesse de libération est la vitesse minimale que doit avoir un projectile à la surface d'une planète pour qu'il ne retombe jamais sur la planète. On dit que le projectile est libéré de l'attraction gravitationnelle de la planète. On ne tient pas compte du frottement sur l'atmosphère, si atmosphère il y a.

Supposons donc que je suis sur la Terre et que je lance un projectile avec une vitesse initiale verticale vers le haut $\vec{v}_0 = v_0\vec{k}$ (\vec{k} étant un vecteur unitaire vertical et orienté vers le haut). A cause de l'attraction gravitationnelle de la Terre la vitesse du projectile va diminuer. Si la norme de la vitesse initiale v_0 n'est pas assez grande, au bout d'un certain temps la vitesse du projectile va s'annuler et il va retomber sur la Terre. Si la norme de la vitesse initiale est suffisamment grande, la vitesse du projectile diminuera mais ne s'annulera jamais. Le projectile s'éloignera infiniment de la Terre.

Energie potentielle de gravitation : L'énergie potentielle associée à la force de gravitation

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{i},$$

qui s'applique sur une masse m située en S à une distance r d'une masse M située en O , $\vec{OS} = r\vec{i}$ est donnée par :

$$E_p = -\frac{GmM}{r}.$$

L'origine de l'énergie potentielle à été prise en l'infini ($r \rightarrow \infty$).

Nous allons donc déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v} = v\vec{k}$ du projectile en un point quelconque de sa trajectoire et examiner quelle est la condition sur la vitesse initiale v_0 pour que la vitesse v ne s'annule jamais. Pour cela nous allons utiliser la conservation de l'énergie mécanique. En effet, le projectile n'est soumis qu'à la force de gravitation qui est une force conservative et dont l'énergie potentielle associée est

$$E_P = -\frac{mMG}{r},$$

où m est la masse du projectile, M la masse de la planète, r la distance du projectile au centre de la planète et G est la constante universelle de la gravitation. On a choisi l'origine de l'énergie potentielle à l'infini (c'est à dire $E_P(r \rightarrow \infty) = 0$).

A l'instant initial, la norme de la vitesse du projectile est v_0 , donc son énergie cinétique est $\frac{1}{2}mv_0^2$. Le projectile est lancé de la surface de la planète dont on notera R le rayon. L'énergie potentielle du projectile est donc $-\frac{mMG}{R}$. L'énergie mécanique initiale E_i du projectile est donc :

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mMG}{R}.$$

A un instant quelconque après son lancement, on notera v la norme de la vitesse du projectile et $r \geq R$ sa distance au centre de la planète. Son énergie mécanique pourra donc s'écrire :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r}.$$

La conservation de l'énergie mécanique du projectile :

$$E_i = E_m \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mMG}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r},$$

permet d'obtenir l'expression de la norme de la vitesse v en chaque point de la trajectoire :

$$v^2 = v_0^2 - 2MG \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right). \quad (4.9)$$

On souhaite que le projectile ne retombe jamais et s'éloigne infiniment de la planète, c'est à dire que lorsque $r \rightarrow \infty$ alors $v > 0$. Or en utilisant l'Eq. (4.9), on obtient :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v^2 = v_0^2 - \frac{2MG}{R},$$

puisque $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} = 0$. Pour que v^2 reste positif, il faut donc que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v^2 > 0 \Leftrightarrow v_0^2 - \frac{2MG}{R} > 0 \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{\frac{2MG}{R}} \equiv v_\ell.$$

vitesse de libération : La vitesse de libération v_ℓ est la vitesse minimale que doit avoir un projectile à la surface d'une planète pour qu'il ne retombe jamais sur la planète. On dit que le projectile est libéré de l'attraction gravitationnelle de la planète. On montre que :

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2MG}{R}} = \sqrt{2gR},$$

où M est la masse et R le rayon de la planète et G est la constante universelle de la gravitation. g est l'accélération de la pesanteur à la surface de la planète $g = \frac{GM}{R^2}$.

En conclusion, pour que le projectile ne retombe jamais sur la planète de masse M et de rayon R , il faut que la norme de sa vitesse initiale v_0 soit supérieure à la vitesse de libération v_ℓ dont l'expression est :

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2MG}{R}} = \sqrt{2gR},$$

où g est l'accélération de la pesanteur à la surface de la planète $g = \frac{GM}{R^2}$.

4.6 Energie, équilibre et stabilité

Dans cette section on ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs, c'est à dire aux systèmes qui ne sont soumis qu'à des forces conservatives. Dans ce cas, la donnée de l'énergie potentielle $E_p(M)$ en fonction de la position M du système permet de déterminer les positions où le système est à l'équilibre et d'étudier la stabilité des positions d'équilibre.

4.6.1 Définitions

Position d'équilibre On dira qu'un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces appliquées est nulle. La position M_e du point correspondante est appelée position d'équilibre.

Equilibre stable On dira que la position d'équilibre M_e est une position d'équilibre stable, si lorsqu'on écarte le système de M_e , les forces tendent à le rapprocher de M_e .

Equilibre instable On dira que la position d'équilibre M_e est instable, si lorsqu'on écarte le système de sa position d'équilibre, les forces tendent à l'éloigner de M_e .

4.6.2 Extrema de l'énergie potentielle

Nous allons montrer qu'une position d'équilibre M_e est un extremum de l'énergie potentielle. La position d'équilibre est stable si M_e est un minimum local et l'équilibre est instable si M_e est un maximum local de l'énergie potentielle.

Cette propriété de l'énergie potentielle est générale, nous la démontrons ici uniquement dans le cas où $E_p(x)$ est une fonction d'une variable x , représentant l'abscisse de M sur un axe.

Démonstration La résultante \vec{F} des forces qui s'appliquent sur le système dérive d'une énergie potentielle, puisqu'elle est conservative. On a donc :

$$\frac{dE_p}{dx} = -f(x) = -\vec{F}(x) \cdot \vec{i}.$$

Une position d'équilibre d'un point matériel est un point M_e tel que

$$\sum_{\vec{F}} \vec{F}(M_e) = \vec{0}.$$

Equilibre stable : M_e est une position d'équilibre stable si dans un voisinage de M_e la résultante des forces tend à rapprocher le système de M_e . Une position d'équilibre M_e est stable si et seulement si M_e est un minimum de l'énergie potentielle.

Considérons une position d'équilibre $x = x_e$. Par définition $\vec{F}(x_e) = \vec{0}$ et donc

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_e} = 0; \quad x_e \text{ une position d'équilibre.}$$

C'est la définition d'un extremum. La tangente à la courbe d'équation $y = E_p(x)$ au point x_e est horizontale. En x_e , la fonction $E_p(x)$ possède soit un minimum, soit un maximum soit un point d'inflexion.

Supposons que le système est à l'équilibre, en x_e . Ecartons le d'une petite quantité Δx de sa position d'équilibre. Si l'équilibre est stable, la résultante des forces au point $x_e + \Delta x$ tend à rapprocher le système de $x = x_e$, c'est à dire que la composante de la force sur le déplacement $\Delta x \vec{i}$ est opposée au déplacement.

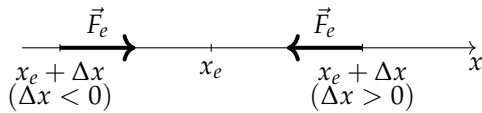


FIGURE 4.4: x_e est un équilibre stable si lorsqu'on éloigne le système de x_e la résultante des forces \vec{F}_e tend à le rapprocher à nouveau vers x_e . Ceux qui peut se résumer par $\vec{F}_e \cdot \vec{i} \Delta x < 0$.

Cela peut s'écrire de la façon suivante (voir Fig. 4.4) :

$$\vec{F}(x_e + \Delta x) \cdot \vec{i} \Delta x < 0; \quad x_e \text{ équilibre stable.}$$

Soit :

$$-\Delta x \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x} < 0 \Leftrightarrow \Delta x \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x} > 0,$$

où on a précisé le point $x_e + \Delta x$ ou la dérivée de E_p devait être calculée. On en déduit que si Δx est positif la dérivée $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x}$ est positive, donc la fonction $E_p(x)$ augmente, alors que si Δx est négatif, la dérivée $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x}$ est négative et donc la fonction $E_p(x)$ diminue. x_e est donc bien un minimum.

Une autre façon de le montrer est d'écrire que :

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x} \simeq \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e} + \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_e} \Delta x = \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_e} \Delta x,$$

où on a utilisé le fait qu'en $x = x_e$, $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e} = 0$. On obtient donc :

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x} \Delta x > 0 \Leftrightarrow \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_e} (\Delta x)^2 > 0 \Leftrightarrow \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_e} > 0$$

Ce qui est la définition d'un minimum.

Exemple Considérons l'oscillateur harmonique :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 + C$$

Le minimum de l'énergie potentielle est $x = x_e$, il correspond bien à la position d'équilibre stable du l'oscillateur.

4.6.3 Dynamique dans le voisinage d'une position d'équilibre stable

On considère toujours que le système est conservatif, c'est à dire que les forces appliquées (qui travaillent) sont conservatives. En vertu du théorème de l'énergie mécanique, cette dernière est conservée, c'est à dire qu'elle est constante au cours du temps. Supposons de plus que la dynamique du système a lieu proche d'un point d'équilibre stable x_e . C'est à dire que l'on suppose que $x(t)$ reste assez proche de x_e de telle sorte qu'on puisse approcher l'énergie potentielle $E_p(x)$ par son développement limité au voisinage de x_e . On pourra écrire donc :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_e) + \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_e} (x - x_e) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e} (x - x_e)^2.$$

Le deuxième terme $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_e}$ est nul puisque x_e est une position d'équilibre. Donc :

$$E_p(x) \simeq \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 + E_p(x_e)$$

où on a défini

$$k = \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e}.$$

On reconnait que l'énergie potentielle $E_p(x)$ a exactement la même forme que celle de l'oscillateur harmonique. Le paramètre k ne représente plus la raideur du ressort mais est la dérivée seconde de l'énergie potentielle calculée au point x_e . On en déduit que la dynamique dans le voisinage d'une position d'équilibre stable est approximativement la même que celle d'un oscillateur harmonique. C'est à dire que la loi horaire est sinusoïdale :

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

où la pulsation ω est :

$$\omega = \left[\frac{1}{m} \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e} \right]^{1/2}.$$

Dans le voisinage d'une position d'équilibre la dynamique d'un système conservatif est approximativement la même que celle d'un oscillateur harmonique. C'est à dire que la loi horaire est sinusoïdale :

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

où la pulsation est $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, soit

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e}}$$

et E_p est l'énergie potentielle du système.

5

Systèmes à deux corps

Jusqu'à maintenant nous avons étudié la dynamique d'un seul point matériel soumis à des forces *extérieures*. C'est à dire des forces générées par des systèmes physiques qui ne font pas partie du système étudié. Dans ce chapitre nous allons aborder l'interaction entre deux points matériels. En plus de l'effet de possible forces extérieures, chacun des points matériels est soumis à la force exercée par l'autre point matériel. Nous verrons que le mouvement des deux points matériels peut se décomposer en deux mouvements indépendants : le mouvement du centre de masse des deux points, qui caractérise la translation globale du système ; et le mouvement relatif d'un point par rapport à l'autre.

Dans ce contexte on définira le référentiel du centre de masse qui permet souvent une description plus simple de la dynamique du système.

On appliquera sur ce système les théorèmes énergétiques que nous avons obtenus au chapitre précédent.

Pour terminer, on appliquera plus particulièrement ces notions dans le cas de collisions entre particules.

5.1 Position du problème

On considère deux points matériels S_1 et S_2 de masse m_1 et m_2 , repérés par leur vecteurs positions $\vec{r}_1 = \vec{OS}_1$ et $\vec{r}_2 = \vec{OS}_2$, par rapport à une origine O fixe, dans un référentiel galiléen. Les deux points matériels interagissent par l'intermédiaire de forces. On note $\vec{F}_{1/2}$ la résultante des forces exercées par S_1 et qui s'applique sur le point S_2 ; et $\vec{F}_{2/1}$ la résultante des forces exercées par S_2 sur le point S_1 . De plus chacun des points peut être soumis à des forces extérieures. C'est à dire des forces qui sont générées par d'autres systèmes physiques que les deux points matériels S_1 et S_2 considérés. On note \vec{F}_1^{ext} la résultante des forces extérieures qui s'applique sur S_1 et \vec{F}_2^{ext} la résultante des forces extérieures qui s'applique sur S_2 .

Comme exemple, on pourra considérer deux billes reliées par un ressort. On peut considérer que les poids des deux billes sont les forces ex-

Forces intérieures : On note $\vec{F}_{2/1}$ la force que le point S_2 exerce sur S_1 et $\vec{F}_{1/2}$ la force que le point S_1 exerce sur S_2 .

Forces extérieures : les forces extérieures sont des forces qui sont générées par des systèmes physiques qui ne font pas partie du système étudié. On note \vec{F}_i^{ext} la résultante des forces extérieures qui s'applique sur le point P_i ($i = 1, 2$).

térieures (c'est à dire l'interaction gravitationnelle de chacune des billes avec la Terre, qui est extérieure au système des deux billes) et les forces intérieures ($\vec{F}_{1/2}$ et $\vec{F}_{2/1}$) sont les forces exercées par le ressort qui relie les deux billes.

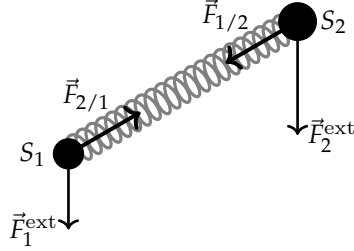


FIGURE 5.1: Deux billes interagissent par l'intermédiaire d'un ressort. Les forces extérieures sont les poids des billes, les forces intérieures les forces de rappel du ressort.

Connaissant les positions et vitesses initiales (à $t = 0$), notre but est d'obtenir les accélérations $\vec{a}_1(t)$ et $\vec{a}_2(t)$ respectives des deux points matériels à tout instant $t > 0$, de sorte à pouvoir en déduire les vitesses $\vec{v}_1(t)$, $\vec{v}_2(t)$ et les positions $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ et ainsi prédire le mouvement de chacun des points matériels.

On suppose que le référentiel dans lequel on étudie le mouvement du système est un référentiel galiléen. On peut donc écrire le PFD pour chacun des points :

- **point S_1** : Le point S_1 de masse m_1 est soumis à la force $\vec{F}_{2/1}$ et à la force \vec{F}_1^{ext} , on a donc :

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{2/1} + \vec{F}_1^{\text{ext}} \quad (5.1)$$

- **point S_2** : Le point S_2 de masse m_2 est soumis à la force $\vec{F}_{1/2}$ et à la force \vec{F}_2^{ext} , on a donc :

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_2^{\text{ext}} \quad (5.2)$$

La troisième loi de Newton (loi des actions réciproques) impose que $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$; notons $\vec{f} = \vec{F}_{1/2}$, on a donc

$$\vec{f} \equiv \vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}. \quad (5.3)$$

Le vecteur accélération étant la dérivée du vecteur position, les deux équations (5.1) et (5.2) peuvent donc s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\vec{f} + \vec{F}_1^{\text{ext}} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{f} + \vec{F}_2^{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

En général la force d'interaction \vec{f} dépend à la fois de la position de \vec{r}_1 du point S_1 et de celle \vec{r}_2 du point S_2 . Les deux équations précédentes sont donc couplées.

En effet, prenons l'exemple des deux billes reliées par un ressort, de la figure 5.1. Si la bille S_1 se déplace, elle va changer la longueur du ressort, ce qui va changer la force de rappel qui s'applique sur S_1 mais aussi celle qui s'applique sur S_2 , donc changer l'accélération de la bille S_2 et donc le mouvement de S_2 . Les mouvements des deux points S_1 et S_2 ne sont donc pas indépendants.

Dans la suite nous allons montrer que ces deux équations couplées peuvent être transformées en deux nouvelles équations qui sont découplées.

5.2 Centre de masse et mouvement relatif

5.2.1 Définition du centre de masse

Rappelons la définition du centre de masse G de deux points matériels de masse m_1 et m_2 situés aux points S_1 et S_2 . G est le point qui vérifie la relation :

$$m_1 \vec{GS}_1 + m_2 \vec{GS}_2 = \vec{0}. \quad (5.5)$$

Il est situé sur le segment S_1S_2 et est plus proche de la plus grande des deux masses.

Cette relation qui définit G n'est pas toujours très pratique pour obtenir la position du centre de masse G . Introduisons une origine O et cherchons l'expression de \vec{OG} en fonction de $\vec{r}_1 = \vec{OS}_1$ et $\vec{r}_2 = \vec{OS}_2$. Pour cela, on écrit $\vec{GS}_1 = \vec{GO} + \vec{OS}_1$ et $\vec{GS}_2 = \vec{GO} + \vec{OS}_2$ dans l'Eq.(5.5). On obtient

$$m_1(\vec{GO} + \vec{OS}_1) + m_2(\vec{GO} + \vec{OS}_2) = \vec{0},$$

soit

$$(m_1 + m_2)\vec{GO} + m_1\vec{OS}_1 + m_2\vec{OS}_2 = \vec{0}.$$

On en déduit donc que :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1\vec{OS}_1 + m_2\vec{OS}_2).$$

Le vecteur \vec{OG} qui repère la position du centre de masse G est la moyenne, pondérée par les masses m_1 et m_2 , des vecteurs positions des points matériels S_1 et S_2 .

Dans la suite, on notera $\vec{R}_G = \vec{OG}$ le vecteur repérant la position du centre de masse par rapport à l'origine O . On écrira donc :

$$(m_1 + m_2)\vec{R}_G = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \quad (5.6)$$

Remarques :

— Si les deux masses sont égales, $m_1 = m_2$, alors le centre de masse est le milieu du segment S_1S_2 .

Centre de masse : Le centre de masse de deux points matériels S_1 et S_2 , de masse respectives m_1 et m_2 est le point G qui vérifie la relation vectorielle :

$$m_1 \vec{GS}_1 + m_2 \vec{GS}_2 = \vec{0}.$$

On en déduit que :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1\vec{OS}_1 + m_2\vec{OS}_2)$$

- Comme $m_1 \|\overrightarrow{GS_1}\| = m_2 \|\overrightarrow{GS_2}\|$, G est plus proche de la masse la plus grande.
- Si $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow \infty$ alors $G \rightarrow S_1$.

5.2.2 Mouvement du centre de masse

Comme les points S_1 et S_2 sont en mouvement, les vecteurs $\vec{r}_1(t)$ et $\vec{r}_2(t)$ sont des fonctions du temps. Donc en général la position du centre de masse $\vec{R}_G(t)$ est aussi une fonction du temps t . Quelle est l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $\vec{R}_G(t)$?

Pour répondre à cette question, dérivons par rapport au temps l'Eq. (5.6) :

$$(m_1 + m_2)\ddot{\vec{R}}_G(t) = m_1\vec{v}_1(t) + m_2\vec{v}_2(t), \quad (5.7)$$

où $\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1$ et $\vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2$ sont les vitesses de chacun des points.

$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ est la quantité de mouvement du point S_1 et $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$ est la quantité de mouvement du point S_2 . L'Eq. (5.7) indique que la quantité de mouvement totale $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ du système des deux particules est égale à $M\vec{v}_G$ où $\vec{v}_G = \dot{\vec{R}}_G$ est la vitesse du centre de masse G et $M = m_1 + m_2$ est la masse totale du système. Si on considère que le centre de masse G est un point matériel fictif auquel on attribue la masse totale $M = m_1 + m_2$ alors, la quantité de mouvement \vec{p}_G du centre de masse est justement $\vec{p}_G = M\vec{v}_G$. L'équation (5.7) nous indique donc que la somme des quantités de mouvement du système formé par les deux points matériels est égale à la quantité de mouvement du centre de masse :

$$\vec{p}_G = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (5.8)$$

Cette propriété pourrait être prise comme une définition du centre de masse G du système. C'est pour cela qu'on appelle aussi le centre de masse, centre d'inertie.

Pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par \vec{p}_G , on dérive à nouveau par rapport au temps t , on obtient :

$$\frac{d\vec{p}_G}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2,$$

Or, en additionnant les deux équations (5.4), on obtient

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}}.$$

On en déduit que le mouvement du centre de masse est donné par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\vec{p}_G}{dt} = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}}. \quad (5.9)$$

où encore :

$$M\vec{a}_G = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}}, \quad (5.10)$$

Quantité de mouvement : La quantité de mouvement totale du système formé de deux points matériels $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ est égale à la quantité de mouvement du centre de masse $\vec{p}_G = (m_1 + m_2)\vec{v}_G$:

$$\vec{p}_G = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

où $\vec{a}_G = \ddot{\vec{R}}_G$ est l'accélération du centre de masse. Ces deux dernières équations ont exactement la forme que le PFD.

On en déduit que tout se passe comme s'il existait un point matériel dont la masse est M , la masse totale du système ($M = m_1 + m_2$), situé au point G repéré par le vecteur position \vec{R}_G et soumis à la somme des forces extérieures. Cette propriété du centre de masse est une conséquence de la troisième loi de Newton, nous l'avons démontré ici pour deux points matériels mais elle se démontre de la même façon pour un nombre quelconque de points matériels.

La position $\vec{R}_G(t)$ de G à chaque instant t s'obtient en résolvant l'équation différentielle (5.10).

Si la somme des forces extérieures appliquées au système est nulle, $\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}} = \vec{0}$ alors $\vec{a}_G = \vec{0}$ et le mouvement du centre de masse est rectiligne et uniforme et la quantité de mouvement totale du système $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ est constante.

5.2.3 Mouvement relatif

La position du centre de masse G , n'est pas suffisante pour déterminer les positions de chacun des points matériels S_1 et S_2 . Néanmoins, une fois que l'on connaît la position de G , il suffit de déterminer la position relative de S_2 par rapport à S_1 pour obtenir les positions respectives de S_1 et de S_2 . Montrons cela.

La position relative de S_2 par rapport à S_1 est le vecteur $\overrightarrow{S_1 S_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (voir figure 5.2). On notera \vec{r} ce vecteur :

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Supposons que l'on connaisse \vec{r} et la position du centre de masse \vec{R}_G , qui en vertu de l'Eq. 5.6 est donnée par

$$(m_1 + m_2)\vec{R}_G = m_2\vec{r}_2 + m_1\vec{r}_1,$$

alors, on peut en déduire \vec{r}_1 et \vec{r}_2 . En effet, on peut considérer que ces deux dernières équations forment un système de deux équations à deux inconnues, où \vec{r}_1 et \vec{r}_2 sont les deux inconnues. En résolvant le système on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}.\end{aligned}\tag{5.11}$$

On en déduit que si on connaît la position du centre de masse G et la position relative \vec{r} à chaque instant t , on peut obtenir simplement les positions \vec{r}_1 et \vec{r}_2 de chacun des points matériels. Ceci est illustré sur la figure 5.2.

PFD pour le système :

$$\frac{d\vec{p}_G}{dt} = M\vec{a}_G = M\dot{\vec{R}}_G = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}},$$

Le centre de masse G affecté de la masse totale $M = m_1 + m_2$ est une particule fictive, dont le mouvement est complètement déterminé par le PFD, où seules les forces extérieures, $(\vec{F}_1^{\text{ext}}, \vec{F}_2^{\text{ext}})$ interviennent.

Résultante des forces extérieures

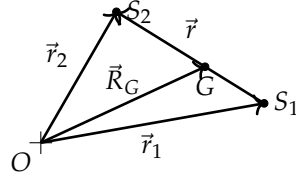
nulle : Si la somme des forces extérieures est nulle alors $\vec{a}_G = \vec{0}$ et le mouvement du centre de masse est rectiligne et uniforme.

Position relative :

$$\vec{r} = \overrightarrow{S_1 S_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}.$$

FIGURE 5.2: Les vecteurs \vec{r} et \vec{R}_G permettent de repérer les positions des points S_1 et S_2 .

En dérivant les équations (5.11) par rapport au temps, on en déduit les expressions des vitesses.

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{v}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v},\end{aligned}\quad (5.12)$$

où on a défini \vec{v}

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1,$$

la vitesse relative de S_2 par rapport à la masse S_1 . En multipliant par les masses respectives, on obtient les expressions des quantités de mouvement :

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= m_1 \vec{v}_G - \mu \vec{v} \\ \vec{p}_2 &= m_2 \vec{v}_G + \mu \vec{v}\end{aligned}\quad (5.14)$$

où on a introduit une nouvelle grandeur μ , homogène à une masse, qui est appelée la masse réduite μ du système des deux particule :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Il nous reste donc à déterminer l'équation différentielle satisfaite par $\vec{r}(t)$. Pour cela on reprend les équations différentielles du mouvement, Eqs. (5.4) que l'on écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{1}{m_1} \vec{f} + \frac{1}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}} \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= \frac{1}{m_2} \vec{f} + \frac{1}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}}\end{aligned}\quad (5.15)$$

où on a simplement divisé chaque équation par la masse respective du point matériel. En effectuant la différence des deux équations, on obtient l'équation satisfaite par $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1$:

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \vec{f} + \frac{1}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}} - \frac{1}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}}.$$

Il est pratique d'introduire à nouveau la masse réduite μ telle que

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \text{ soit } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{v}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}\end{aligned}\quad (5.13)$$

où $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ est la vitesse relative de la masse m_2 par rapport à m_1

L'équation différentielle vérifiée par $\ddot{\vec{r}}$ devient :

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{f} + \frac{\mu}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}} - \frac{\mu}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}}, \quad (5.18)$$

où on rappelle que \vec{f} est la force que le point S_1 exerce sur S_2 , $\vec{f} \equiv \vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$.

L'équation (5.18) est du type PFD. En effet, on peut considérer une particule fictive que l'on pourra appeler "*particule relative*", possédant une masse μ dont la position est repérée par le vecteur \vec{r} et qui est soumise à la force \vec{f} (définie à l'Eq. (5.3)) et à la force \vec{f}^{ext} , définie par l'expression suivante :

$$\vec{f}^{\text{ext}} = \frac{\mu}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}} - \frac{\mu}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}}. \quad (5.19)$$

L'accélération $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ de cette particule vérifiera $\mu \vec{a} = \vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}}$, qui a la forme du PFD.

Remarque : On remarque que si $\frac{1}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}} = \frac{1}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}}$, alors $\vec{f}^{\text{ext}} = \vec{0}$ et l'équation (5.18) devient particulièrement simple :

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{f}. \quad (5.20)$$

C'est le cas si \vec{F}_1^{ext} et \vec{F}_2^{ext} sont les poids respectifs de S_1 et S_2 . En effet, dans ce cas : $\frac{1}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}} = \frac{1}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}} = \vec{g}$, où \vec{g} est l'accélération de la pesanteur.

C'est aussi trivialement le cas si le système est isolé, c'est à dire si $\vec{F}_1^{\text{ext}} = \vec{F}_2^{\text{ext}} = \vec{0}$.

5.2.4 Conclusion

En conclusion, le problème de deux corps en interaction peut se résoudre en considérant dans un premier temps le mouvement du centre de masse G , repéré par \vec{R}_G , puis dans un deuxième temps le mouvement relatif repéré par \vec{r} .

Le mouvement du centre de masse ($\vec{R}_G(t)$) obéit à un PFD, comme s'il s'agissait d'un point matériel de masse $M = m_1 + m_2$ qui serait soumis à la somme des forces extérieures $\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}}$ uniquement.

Le mouvement relatif ($\vec{r}(t)$) obéit à un PFD comme s'il s'agissait de la position d'une particule de masse μ qui était soumise la force intérieure \vec{f} et à la force $\vec{f}^{\text{ext}} = \frac{\mu}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}} - \frac{\mu}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}}$.

Nous avons au départ deux équations différentielles couplées Eqs. (5.4). En effectuant le changement de variables $(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)) \rightarrow (\vec{R}_G(t), \vec{r}(t))$, nous avons obtenu deux équations différentielles que l'on peut considérer séparément.

$$\begin{aligned} M \vec{a}_G &= \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}} \\ \mu \vec{a} &= \vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}}, \end{aligned}$$

Masse réduite : La masse réduite μ du système est définie par :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \text{ soit } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.17)$$

Si $m = m_1 = m_2$ alors $\mu = m/2$.

Si $m_1 \gg m_2$ alors $\mu \simeq m_2$.

Equation différentielle du mouvement relatif : L'équation différentielle du mouvement relatif \vec{r} est :

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}}$$

avec :

$$\vec{f}^{\text{ext}} = \frac{\mu}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}} - \frac{\mu}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}},$$

où μ est la masse réduite et \vec{f} est la force que le point S_1 exerce sur S_2 , $\vec{f} \equiv \vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$.

Masse totale et masse réduite La masse totale $M = m_1 + m_2$ est responsable de l'inertie du centre de masse G repéré par \vec{R}_G .

La masse réduite μ est responsable de l'inertie du mouvement relatif repéré par $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

où $\vec{a}_G = \vec{\ddot{R}}_G$, $\vec{a} = \vec{\ddot{r}}$, $M = m_1 + m_2$ et $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

La solution de ces deux équations découplées permet d'obtenir $\vec{R}_G(t)$ et $\vec{r}(t)$ à chaque instant t . On obtient ensuite les positions $\vec{r}_1(t)$ et $\vec{r}_2(t)$ de chacun des points, à chaque instant t , à l'aide des équations (5.11).

Remarques :

- La masse totale M est responsable de l'inertie du mouvement du centre de masse.
- La masse réduite μ est responsable de l'inertie du mouvement relatif.
- Si les deux masses sont égales $m = m_1 = m_2$ alors $\mu = m/2$.
- Si l'une des masses est beaucoup plus grande que l'autre, alors la masse réduite est approximativement égale à la plus légère des deux masses :

$$m_1 \ll m_2 \Rightarrow \mu \simeq m_1.$$

5.2.5 Exemple : Deux masses reliées par un ressort

On considère deux masses ponctuelles, m_1 et m_2 , reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . On suppose que les deux masses sont astreintes à se déplacer sur une droite Ox horizontale, où O est un point fixe que l'on prendra comme origine. On négligera les frottements. On note \vec{i} un vecteur unitaire orienté suivant Ox (voir figure 5.3). A chaque instant t , on repère les masses par leur vecteur position :

$$\vec{r}_1 = \vec{OS}_1 = x_1 \vec{i}; \quad \vec{r}_2 = \vec{OS}_2 = x_2 \vec{i};$$

x_1 et x_2 sont donc les abscisses respectives des points matériels S_1 et S_2 .

Connaissant les abscisses initiales $x_1(t=0)$, $x_2(t=0)$ et les vitesses initiales $\dot{x}_1(t=0)$, $\dot{x}_2(t=0)$ de chaque masse, nous souhaitons déterminer les abscisses $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de chaque masse à tout instant $t > 0$.

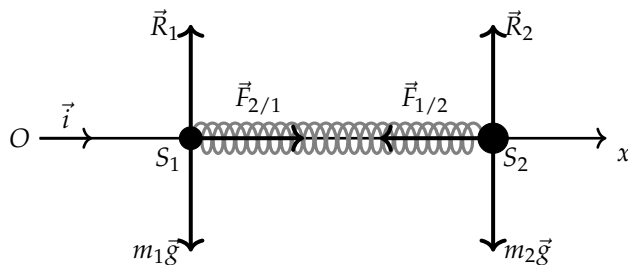


FIGURE 5.3: Deux points matériels reliés par un ressort, sur un axe Ox horizontal. Sur la figure le ressort est étiré ($\ell > \ell_0$), les forces de rappel élastiques $\vec{F}_{2/1}$ et $\vec{F}_{1/2}$ tendent à rapprocher les deux billes.

1. **Bilan des forces :** Chacune des masses est soumise à son poids $m_i \vec{g}$ qui est complètement compensé par la réaction du support \vec{R}_i ($i = 1, 2$). C'est à dire que $m_i \vec{g} + \vec{R}_i = \vec{0}$ ($i = 1, 2$). De plus chaque point matériel est soumis à la force de rappel du ressort. Le point S_2

est soumis à la force $\vec{F}_{1/2}$ qui est :

$$\vec{F}_{1/2} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i},$$

où ℓ est la longueur du ressort. On vérifie que le signe est correct. En effet, si le ressort est étiré $\ell > \ell_0$, alors la force $\vec{F}_{1/2}$ qui s'applique sur le point S_2 le tire vers S_1 , or on a choisi l'orientation de \vec{i} de S_1 vers S_2 (voir figure 5.3).

De la même façon le point S_2 est soumis à la force de rappel du ressort $\vec{F}_{2/1}$ qui est :

$$\vec{F}_{2/1} = k(\ell - \ell_0)\vec{i},$$

où le signe est opposé, puisque lorsque le ressort est étiré la force $\vec{F}_{2/1}$ attire le point S_1 vers le point S_2 .

La longueur du ressort ℓ est égale à la distance entre les deux points. Soit

$$\ell = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = \|\vec{r}\| = |x_2 - x_1| = x_2 - x_1$$

où on a défini $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ comme dans la section précédente (voir 5.2.3, page 81). La dernière égalité provient du fait que $x_2 > x_1$, c'est à dire que S_1 ne peut jamais passer à droite de S_2 (les masses ne se peuvent pas se traverser).

Toujours, en utilisant les notation de la section précédente (voir Eq. (5.3), page 78), on définit $\vec{f} = \vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$ et donc :

$$\vec{f} = -k(x_2 - x_1 - \ell_0)\vec{i} = -k(r - \ell_0)\vec{i}.$$

où $r = \|\vec{r}\|$.

2. PFD : En appliquant le PFD sur chacun des points matériel, on obtient :

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_{2/1} = -\vec{f} \\ m_2 \vec{a}_2 &= \vec{F}_{1/2} = \vec{f}. \end{aligned}$$

Comme $\vec{a}_j = \ddot{x}_j \vec{i}$ ($j = 1, 2$), on peut écrire

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 \vec{i} &= k(x_2 - x_1 - \ell_0)\vec{i} \\ m_2 \ddot{x}_2 \vec{i} &= -k(x_2 - x_1 - \ell_0)\vec{i} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ces deux équations sont les équations différentielles couplées analogues à celles de l'Eq. (5.4), page 78.

On remarque qu'il n'y a pas de force extérieure et que la force intérieure \vec{f} est bien dans la direction de la droite passant par les deux points et elle dépend des positions x_1 et x_2 des points S_1 et S_2 uniquement par l'intermédiaire de $r = x_2 - x_1$. On dit que la force \vec{f} est centrale.

3. **Mouvement du centre de masse :** En additionnant les deux équations (5.21), on obtient

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0. \quad (5.22)$$

Or, la position du centre de masse est définie par :

$$(m_1 + m_2)\vec{OG} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = (m_1x_1 + m_2x_2)\vec{i}.$$

L'accélération \vec{a}_G du point G est donc

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2)\vec{i}.$$

Donc, en vertu de l'Eq. (5.22),

$$\vec{a}_G = \vec{0}.$$

Le mouvement du centre de masse G est donc rectiligne et uniforme.

On retrouve le résultat général qui est que lorsque la somme des forces extérieures est nulle alors le mouvement du centre de masse est rectiligne et uniforme.

Connaissant la position $\vec{OG}(t=0) = x_G(t=0)\vec{i}$ et la vitesse initiale $\vec{v}_G = v_G\vec{i}$ du centre de masse, on en déduit aisément la position de G à tout instant ultérieur.

$$x_G(t) = x_G(t=0) + v_G t,$$

puisque le mouvement est rectiligne et uniforme. Or $x_G(t=0)$ et v_G s'obtiennent facilement à partir des positions initiales et des vitesses initiales des points S_1 et S_2 :

$$x_G(t=0) = \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1x_1(t=0) + m_2x_2(t=0)]$$

et

$$v_G = \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1\dot{x}_1(t=0) + m_2\dot{x}_2(t=0)].$$

4. **Mouvement relatif :** Pour obtenir le mouvement du point S_2 par rapport au point S_1 , c'est à dire l'évolution de $r(t) = x_2(t) - x_1(t)$ en fonction du temps t , on divise chacune des équations différentielles couplées (Eqs. (5.21)) par la masse respective du point, puis on effectue la différence entre les deux équations. On obtient :

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(x_2 - x_1).$$

En introduisant, comme à la section précédente, la masse réduite μ (voir Eq. (5.17)), on peut écrire :

$$\mu\ddot{r} = -k(r - \ell_0). \quad (5.23)$$

Tout se passe comme si il y avait une particule de masse μ , repérée par $\vec{r} = r\vec{i}$, et soumise à une force de rappel d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 .

On sait résoudre l'équation différentielle Eq. (5.23). En effet, notons $x = r - \ell_0$, alors $\ddot{x} = \ddot{r}$ et donc

$$\mu\ddot{x} + kx = 0.$$

C'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique. La solution correspondant à la condition initiale $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

où

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

On en déduit que $r(t)$ est donnée par :

$$r(t) = x(t) + \ell_0 = \ell_0 + x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

On en conclut que les deux points matériels ont un mouvement d'oscillation l'un par rapport à l'autre de période $T = 2\pi/\omega$, soit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}.$$

5. **Mouvement des points S_1 et S_2 :** Nous avons obtenu l'abscisse du centre de masse $x_G(t)$ et le mouvement relatif $r(t)$ pour tout temps t . À l'aide des Eqs. (5.11), nous pouvons obtenir l'expression des abscisses $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de chacune des masses :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_G(t) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} r(t) \\ x_2(t) &= x_G(t) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} r(t) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Le mouvement de chacune des masses est la composition d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme (mouvement de G , $x_G(t)$) et d'un mouvement d'oscillation (mouvement relatif, $r(t)$).

Remarque :

- Si les deux masses sont égales, $m = m_1 = m_2$, alors $\mu = m/2$ et la période est $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$.
- Si la masse m_1 est très grande par rapport à la masse m_2 , $m_1 \gg m_2$, alors $\mu \simeq m_2$ et donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$. La masse m_1 est pratiquement immobile, et c'est la masse m_2 qui oscille. On retrouve le mouvement d'une masse accrochée à l'extrémité d'un ressort dont l'autre extrémité est fixée.

5.3 Référentiel du centre de masse

On va voir qu'il est souvent plus simple d'étudier la dynamique des deux points matériels du point de vue d'un observateur fixe dans le référentiel du centre de masse. C'est à dire le référentiel dans lequel, le centre de masse des deux points est immobile. On s'abstrait ainsi de la translation globale du système et on peut se focaliser sur l'étude de la dynamique du mouvement relatif \vec{r} de S_2 par rapport à S_1 .

5.3.1 Définition du référentiel de centre de masse \mathcal{R}^*

On définit le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* comme le référentiel qui est en translation, par rapport au référentiel du laboratoire \mathcal{R} , et dans lequel le centre de masse G est immobile. En général, on choisira G comme l'origine d'un système d'axe cartésien $Gxyz$ du référentiel \mathcal{R}^* . Dire que \mathcal{R}^* est en translation par rapport à \mathcal{R} , c'est affirmer que la direction et l'orientation des axe xyz de \mathcal{R}^* , mesurées dans \mathcal{R} , est constante. On pourra donc prendre dans \mathcal{R} un système d'axe $OXYZ$, où chacun des axes X , Y et Z est à chaque instant parallèle à x , y et z respectivement. En conséquence, on pourra choisir la même base de vecteurs orthonormés (et indépendant du temps) $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pour décomposer les vecteurs positions, vitesses ou accélérations des points matériels.

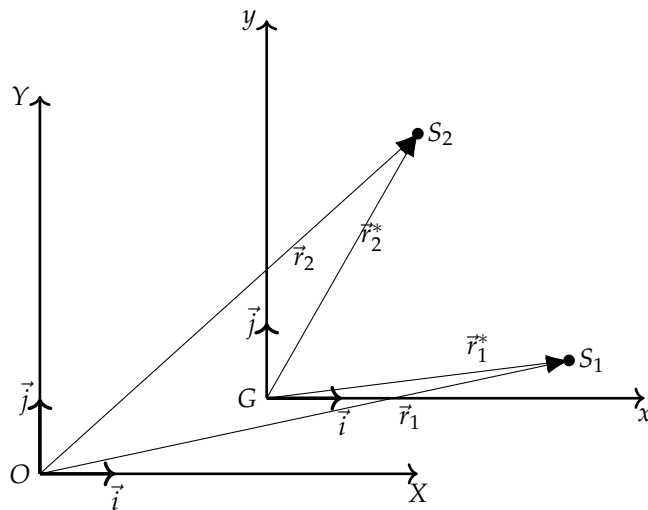


FIGURE 5.4: Référentiel du laboratoire $OXYZ$ et référentiel du centre de masse $Gxyz$. Les axes OZ et Oz sont perpendiculaires au plan de la figure et ne sont pas représentés.

Les grandeurs mesurées dans le référentiel du centre de masse seront notées avec un astérisque. Par exemple, les vecteurs positions des deux points matériels seront notés \vec{r}_1^* et \vec{r}_2^* . De même on notera \vec{v}_1^* et \vec{v}_2^* les vitesses des deux points matériels mesurées dans \mathcal{R}^* . On note \vec{v}_G la vitesse du centre de masse mesurée dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} .

5.3.2 Changement de référentiel

Vecteurs position : Soit un point M de l'espace, dans le référentiel \mathcal{R}^* , il sera repéré par son vecteur position

$$\vec{r}^* = \overrightarrow{GM} = x^*\vec{i} + y^*\vec{j} + z^*\vec{k}.$$

Dans le référentiel \mathcal{R} , il sera repéré par :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Or en vertu de la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}$$

où \overrightarrow{OG} est le vecteur position du centre de masse, mesuré dans \mathcal{R} , que l'on peut aussi décomposer sur la même base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{r}_G = \overrightarrow{OG} = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k}.$$

La relation entre les vecteurs positions mesurés dans \mathcal{R} et \mathcal{R}^* est donc :

$$\vec{r} = \vec{r}^* + \vec{r}_G.$$

Cette relation est valable pour tout point matériel et en particulier pour les deux points matériels considérés :

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_1^* + \vec{r}_G \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_2^* + \vec{r}_G.\end{aligned}\tag{5.25}$$

Remarque : Le mouvement relatif est le même, qu'il soit mesuré dans le référentiel \mathcal{R} ou \mathcal{R}^* . En effet, en effectuant la différence entre les deux équations (5.25), on obtient :

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2^* - \vec{r}_1^*\tag{5.26}$$

Compositions des vecteurs vitesses : Les vecteurs vitesses de S_1 et S_2 mesurés par un observateur fixe dans le référentiel \mathcal{R} s'obtiennent en dérivant les composantes des vecteurs positions \vec{r}_1 et \vec{r}_2 respectivement :

$$\vec{v}_l = \dot{x}_l\vec{i} + \dot{y}_l\vec{j} + \dot{z}_l\vec{k} \quad (l = 1, 2).\tag{5.27}$$

Alors que les vitesses des même points matériels mais mesurées dans le référentiel \mathcal{R}^* s'obtiennent en dérivant les composantes de \vec{r}_1^* et \vec{r}_2^* :

$$\vec{v}_l^* = \dot{x}_l^*\vec{i} + \dot{y}_l^*\vec{j} + \dot{z}_l^*\vec{k} \quad (l = 1, 2).\tag{5.28}$$

La relation entre les vitesses mesurées dans deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre a été étudié au chapitre 2 (voir section 2.5, Eq. (2.24), page 25), on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{v}_1^* + \vec{v}_G \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_2^* + \vec{v}_G,\end{aligned}\tag{5.29}$$

vecteurs positions dans le référentiel \mathcal{R}^* :

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1^* + \vec{r}_G$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2^* + \vec{r}_G$$

Remarque :

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2^* - \vec{r}_1^*$$

où \vec{v}_G est la vitesse du centre de masse mesurée dans \mathcal{R} :

$$\vec{v}_G = \dot{x}_G \vec{i} + \dot{y}_G \vec{j} + \dot{z}_G \vec{k}. \quad (5.30)$$

Remarque :

La vitesse relative est la même dans les deux référentiels :

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^* = \vec{v}^* \quad (5.31)$$

Composition des vecteurs accélérations : De façon analogue aux vitesses, on définit les accélérations \vec{a}_1, \vec{a}_2 et \vec{a}_1^*, \vec{a}_2^* des points matériels S_1 et S_2 , mesurées dans chacun des référentiels, en dérivant les composantes des vecteurs vitesse respectifs, soit :

$$\begin{aligned} \vec{a}_l &= \ddot{x}_l \vec{i} + \ddot{y}_l \vec{j} + \ddot{z}_l \vec{k} \quad (l = 1, 2) \\ \vec{a}_l^* &= \ddot{x}_l^* \vec{i} + \ddot{y}_l^* \vec{j} + \ddot{z}_l^* \vec{k} \quad (l = 1, 2) \end{aligned} \quad (5.32)$$

La relation entre les accélérations mesurées dans \mathcal{R} et \mathcal{R}^* a déjà été étudiée dans le chapitre 2 (voir section 2.5, Eq. (2.24), page 25) :

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{a}_1^* + \vec{a}_G \\ \vec{a}_2 &= \vec{a}_2^* + \vec{a}_G, \end{aligned} \quad (5.33)$$

où $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt}$ est le vecteur accélération du centre de masse mesuré dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\vec{a}_G = \ddot{x}_G \vec{i} + \ddot{y}_G \vec{j} + \ddot{z}_G \vec{k} \quad (5.34)$$

Composition des vecteurs vitesses :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_1^* + \vec{v}_G \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_2^* + \vec{v}_G. \end{aligned}$$

Remarque : $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^*$.

Composition des vecteurs accélérations :

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{a}_1^* + \vec{a}_G \\ \vec{a}_2 &= \vec{a}_2^* + \vec{a}_G \end{aligned}$$

5.3.3 Quantité de mouvement

On avait montré que la quantité de mouvement totale du système $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ était égale à la quantité de mouvement du centre de masse $M\vec{v}_G$ (voir Eq. (5.8), page 80). Cette relation est toujours vraie, et peut s'écrire dans le référentiel du centre de masse :

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = M\vec{v}_G^*$$

Or dans le référentiel du centre de masse, $\vec{v}_G^* = \vec{0}$, par définition, puisque le centre de masse est immobile dans \mathcal{R}^* , donc :

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{0}. \quad (5.35)$$

Cette relation pourrait être une définition du référentiel \mathcal{R}^* . Le référentiel \mathcal{R}^* est celui où la mesure de la quantité de mouvement totale donne $\vec{0}$.

On en déduit que les quantités de mouvement \vec{p}_1^* et \vec{p}_2^* mesurées dans le référentiel \mathcal{R}^* sont opposées :

$$\vec{p}_2^* = -\vec{p}_1^*. \quad (5.36)$$

Il est intéressant de relier ces quantités à la quantité de mouvement de la particule fictive que nous avons appelée "particule relative". C'est à dire une particule de masse μ , la masse réduite, et qui aurait une vitesse $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, où $\vec{r} = \overrightarrow{S_1 S_2}$ décrit le mouvement relatif. Ainsi, on peut définir $\vec{p} = \mu \vec{v}$.

Nous allons montrer que :

$$\vec{p} = \vec{p}_2^* = -\vec{p}_1^*; \text{ avec } \vec{p} = \mu \vec{v} \quad (5.37)$$

C'est à dire que la quantité de mouvement de chacune des particules est égale (ou opposée, suivant la particule considérée) à la quantité de mouvement de la "particule relative".

Démonstration : Pour cela on utilise les équations (5.29). On multiplie la seconde équation par m_2 et on obtient :

$$m_2 \vec{v}_2 = m_2 \vec{v}_2^* + m_2 \vec{v}_G$$

en se rappelant de l'expression de \vec{v}_G donnée par l'Eq. (5.7)

$$\vec{v}_G = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)$$

et la définition de \vec{p}_2^* , $m_2 \vec{v}_2^* = \vec{p}_2^*$, on obtient :

$$\vec{p}_2^* = m_2 \vec{v}_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 + \left(m_2 - \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} \right) \vec{v}_2$$

Or, en mettant au même dénominateur le facteur devant \vec{v}_2 , on obtient

$$\left(m_2 - \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} \right) = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) = \mu.$$

On a donc bien démontré que

$$\vec{p}_2^* = \mu (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

et on sait par ailleurs que $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^* = \dot{\vec{r}}$.

De façon plus astucieuse, on aurait pu aussi partir des équations (5.14), qui sont valables dans tout référentiel en translation par rapport au référentiel du laboratoire, et donc en particulier dans le référentiel du centre de masse. Or, dans le référentiel du centre de masse, $\vec{v}_G = \vec{0}$, donc les Eqs. (5.14) deviennent :

$$\begin{aligned} \vec{p}_1^* &= -\mu \vec{v} \\ \vec{p}_2^* &= \mu \vec{v}. \end{aligned}$$

Quantités de mouvement dans \mathcal{R}^* :

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{0}.$$

Et

$$\vec{p} = \vec{p}_2^* = -\vec{p}_1^*$$

où $\vec{p} = \mu \vec{v}$, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ et $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2^* - \vec{r}_1^*$
on en déduit les **vitesse**s dans \mathcal{R}^* :

$$\vec{v}_1^* = -\frac{\mu}{m_1} \vec{v}; \quad \vec{v}_2^* = \frac{\mu}{m_2} \vec{v}$$

Remarque : ces relations permettent d'obtenir très simplement les vitesses \vec{v}_i^* ($i = 1, 2$) de chacun des points matériels dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* :

$$\begin{aligned}\vec{v}_1^* &= -\frac{\mu}{m_1}\vec{v} \\ \vec{v}_2^* &= \frac{\mu}{m_2}\vec{v}\end{aligned}\quad (5.38)$$

5.3.4 Le PFD dans le référentiel du centre de masse

Lorsque la résultante des forces extérieures est non nulle, $\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}} \neq \vec{0}$, l'accélération du centre de masse, mesurée dans le référentiel \mathcal{R} n'est pas nulle. En conséquence, le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* n'est pas Galiléen. Dans le référentiel \mathcal{R}^* , on ne peut donc pas appliquer le PFD (voir section 3.6, page 51) sur chacun des points matériel comme nous l'avons fait dans \mathcal{R} (voir Eqs. (5.4), page 78).

Néanmoins, comme le vecteur repérant le mouvement relatif est le même dans les deux référentiels, $\vec{r}^* = \vec{r}$ (voir Eq. (5.26), page 83), on aura aussi $\mu\ddot{\vec{r}}^* = \mu\ddot{\vec{r}}$. Et à l'aide de l'équation (5.18), on obtient :

$$\begin{aligned}\mu\ddot{\vec{r}}^* &= \vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}} \\ \text{avec } \vec{f}^{\text{ext}} &= \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{\text{ext}} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{\text{ext}}\end{aligned}\quad (5.39)$$

Cette équation s'apparente à un PFD pour le mouvement relatif dans le référentiel du centre de masse. Cette équation différentielle permet d'obtenir $\vec{v} = \dot{\vec{r}}^*(t) = \dot{\vec{r}}(t)$, à chaque instant t , et donc d'obtenir les vitesses de chacune des particules \vec{v}_1^* et \vec{v}_2^* à l'aide des Eqs. (5.38). Puis la composition des vitesses (voir Eqs. (5.29), page 89) permet d'obtenir les vecteurs vitesse \vec{v}_1 et \vec{v}_2 dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} .

Remarques :

- Si les forces extérieures sont les poids respectifs des points matériels, $\vec{F}_i = m_i\vec{g}$ ($i = 1, 2$), alors $\frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{\text{ext}} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{\text{ext}} = \vec{0}$. l'Eq. (5.39) devient :

$$\mu\ddot{\vec{r}}^* = \vec{f} \quad (5.40)$$

De même si il n'y a pas de force extérieure, bien sûr.

- Si la résultante des forces extérieures est nulle, $\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}} = \vec{0}$, en remplaçant \vec{F}_1^{ext} par $-\vec{F}_2^{\text{ext}}$ dans l'Eq. (5.39), on obtient :

$$\mu\ddot{\vec{r}}^* = \vec{f} + \vec{F}_2^{\text{ext}}. \quad (5.41)$$

Dans ce cas, l'accélération du centre de masse, mesurée dans \mathcal{R} , est nulle, $\vec{a}_G = \vec{0}$. En conséquence, les accélérations \vec{a}_1^*, \vec{a}_2^* mesurées dans \mathcal{R} sont égales à celles mesurées dans \mathcal{R} (voir Eqs (5.33), page 90).

PFD dans le référentiel \mathcal{R}^* : Malgré le fait que le référentiel du centre de masse n'est pas en général un référentiel galiléen, on peut toujours écrire :

$$\begin{aligned}\mu\ddot{\vec{r}}^* &= \vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}} \\ \text{avec } \vec{f}^{\text{ext}} &= \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{\text{ext}} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{\text{ext}}\end{aligned}$$

5.3.5 Conclusion

- Dans le référentiel du centre de masse, la quantité de mouvement totale est nulle : $\vec{p}_2^* = -\vec{p}_1^*$. Il suffit donc d'étudier la dynamique d'une des deux particules.
- Or, $\vec{p}_2^* = \mu \vec{v} = \vec{p}$, où μ est la masse réduite définie à l'Eq. (5.16) et \vec{v} est la vitesse relative de la particule (2) par rapport à la particule (1). Donc la dynamique de la particule (2) dans le référentiel du centre de masse est en fait la dynamique de ce qu'on avait appelé "la particule relative".
- Dans le référentiel du centre de masse, on peut écrire comme dans le référentiel du laboratoire :

$$\mu \ddot{\vec{r}}^* = \vec{f} + \frac{\mu}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}} - \frac{\mu}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}}$$

où \vec{f} est la force que la particule (1) exerce sur la particule (2). Les solutions de cette équation différentielle, permettent d'obtenir à tout instant t , $\vec{p}(t)$ et donc $\vec{p}_2^*(t) = -\vec{p}_1^*(t)$, et donc (en divisant par les masses respectives) aussi les vitesses $\vec{v}_1^*(t)$ et $\vec{v}_2^*(t)$. En intégrant ces dernières par rapport au temps, on peut obtenir les positions $\vec{r}_1^*(t)$ et $\vec{r}_2^*(t)$.

- Les équations (5.25) et (5.29), permettent ensuite d'obtenir les positions et les vitesses dans le référentiel du laboratoire à chaque instant t .

5.4 Énergie

Comme dans le cas d'un seul point matériel, l'énergie cinétique totale du système formé par les deux points matériels est une grandeur intéressante pour caractériser l'état du système.

Le théorème de König montre que l'énergie cinétique totale du système se présente sous deux formes, l'énergie cinétique associée au mouvement du centre de masse et l'énergie cinétique interne qui correspond à l'énergie cinétique du mouvement relatif et est celle qui serait mesurée par un observateur fixe dans le référentiel du centre de masse.

La façon dont le travail des forces extérieures et intérieures font varier ces deux formes d'énergie cinétique est l'objet du théorème de l'énergie cinétique que l'on abordera sous sa forme locale et globale dans les deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}^* .

On introduira ensuite la notion d'énergie potentielle d'interaction qui est utile pour évaluer le travail des forces intérieures qui sont conservatives. Cela nous permettra d'énoncer un théorème de l'énergie mécanique.

5.4.1 Énergie cinétique totale

L'énergie cinétique totale E_c du système est la somme des énergies cinétiques de chacune des particules :

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} = \frac{1}{2}m_1\|\vec{v}_1\|^2 + \frac{1}{2}m_2\|\vec{v}_2\|^2 = \frac{\|\vec{p}_1\|^2}{2m_1} + \frac{\|\vec{p}_2\|^2}{2m_2}$$

Il est intéressant d'écrire l'énergie cinétique en fonction de la vitesse \vec{v}_G du centre de masse, et de la quantité de mouvement $\vec{p} = \mu\vec{v}$ associée au mouvement relatif. Pour cela, on utilise les Eqs. (5.14) qui donnent les expressions de \vec{p}_1 et de \vec{p}_2 en fonction de \vec{v}_G et \vec{p} . On obtient :

$$E_c = \frac{1}{2m_1} (m_1\vec{v}_G - \vec{p})^2 + \frac{1}{2m_2} (m_2\vec{v}_G + \vec{p})^2.$$

En développant les carrés, on obtient :

$$\begin{aligned} E_{c1} &= \frac{1}{2m_1} (m_1\vec{v}_G - \vec{p})^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_G^2 + \frac{1}{2m_1}\vec{p}^2 - \vec{v}_G \cdot \vec{p} \\ E_{c2} &= \frac{1}{2m_2} (m_2\vec{v}_G + \vec{p})^2 = \frac{1}{2}m_2\vec{v}_G^2 + \frac{1}{2m_2}\vec{p}^2 + \vec{v}_G \cdot \vec{p} \end{aligned}$$

En effectuant la somme de ces deux équations, on voit que les derniers termes se compensent, et on obtient :

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}_G^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{p}^2$$

En se rappelant que $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$, on obtient :

$$E_c = \frac{1}{2}M\vec{v}_G^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{p}^2.$$

Finalement, l'énergie cinétique du système constitué des deux particules peut s'écrire de la façon suivante

$$E_c = \frac{1}{2M}\|\vec{p}_G\|^2 + \frac{1}{2\mu}\|\vec{p}\|^2 = \frac{1}{2}M\|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2}\mu\|\vec{v}\|^2 \quad (5.42)$$

Nous avons ainsi décomposé l'énergie cinétique totale du système, en la somme de l'énergie cinétique du centre de masse et de l'énergie cinétique du mouvement relatif. Encore une fois, tout se passe, comme si nous avions deux particules, une particule de masse $M = m_1 + m_2$ de vitesse \vec{v}_G et une particule de masse μ et de vitesse \vec{v} .

5.4.2 Énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse

L'expression de l'énergie cinétique que nous avons obtenue à l'Eq. (5.42), peut être écrite dans tout référentiel et en particulier dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* . Or, dans le référentiel \mathcal{R}^* , la vitesse du centre de masse est nulle, $\vec{v}_G^* = 0$, on pourra donc écrire :

$$E_c^* = \frac{1}{2\mu}\|\vec{p}\|^2 = \frac{1}{2}\mu\|\vec{v}\|^2 \quad (5.43)$$

Énergie cinétique totale :

$$\begin{aligned} E_c &= E_{c1} + E_{c2} = \frac{1}{2M}\|\vec{p}_G\|^2 + \frac{1}{2\mu}\|\vec{p}\|^2 \\ &= \frac{1}{2}M\|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2}\mu\|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

Énergie cinétique dans \mathcal{R}^* :

$$E_c^* = \frac{1}{2\mu}\|\vec{p}\|^2 = \frac{1}{2}\mu\|\vec{v}\|^2$$

L'énergie cinétique totale du système des deux particules, mesurée dans le référentiel du centre de masse est la même que celle d'un seul point matériel de masse μ , la masse réduite du système, et de vitesse \vec{v} , la vitesse relative des deux particules.

où on n'a pas mis d'astérisque (*) sur les grandeurs \vec{v} et \vec{p} puisque ces quantités liées au mouvement relatif sont les mêmes dans les deux référentiels (voir Eq. (5.31), page 90) : $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^*$ et $\vec{p} = \vec{p}^* = \mu\vec{v}$.

L'énergie cinétique totale du système des deux particules, mesurée dans le référentiel du centre de masse est la même que celle d'un seul point matériel de masse μ , la masse réduite du système, et de vitesse \vec{v} , la vitesse relative des deux particules.

On appelle aussi cette énergie cinétique, l'énergie cinétique interne du système. C'est l'énergie cinétique qui est stockée dans le mouvement relatif.

5.4.3 Théorème de König

Le théorème de König est la relation entre l'énergie cinétique totale mesurée dans le référentiel du centre de masse E_c^* et celle mesurée dans le référentiel du laboratoire, E_c :

$$E_c = E_c^* + K_G \quad (5.44)$$

où K_G est l'énergie cinétique du centre de masse mesurée dans le référentiel \mathcal{R} :

$$K_G = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\|\vec{v}_G\|^2 \quad (5.45)$$

L'équation (5.44) s'obtient simplement en comparant l'Eq. (5.42) à l'Eq. (5.43).

Théorème de König :

$$E_c = E_c^* + K_G$$

où

$$K_G = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\|\vec{v}_G\|^2$$

est l'énergie cinétique du centre de masse.

5.4.4 Variation de l'énergie cinétique du centre de masse

Notons K_G l'énergie cinétique du centre de masse mesurée dans le référentiel \mathcal{R} , soit :

$$K_G = \frac{1}{2}M\|\vec{v}_G\|^2.$$

Supposons qu'à l'instant initial t_{init} , les deux points matériels sont situés en A_1 et A_2 respectivement et qu'à l'instant final t_{fin} , ils sont situés aux points B_1 et B_2 . On se pose la question de savoir si l'énergie du centre de masse K_G a varié entre ces deux instants et si c'est le cas de combien a-t-elle varié.

Pour répondre à cette question, on peut partir du PFD appliqué au système (voir Eq. (5.10), page 80) :

$$(m_1 + m_2) \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}}.$$

On procède comme dans le cas d'un point matériel de masse $M = m_1 + m_2$ soumis à la résultante $\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}}$ et situé en G (voir la démonstration page 62).

Il suffit de multiplier (au sens du produit scalaire entre vecteurs) le PFD par \vec{v}_G :

$$(m_1 + m_2) \frac{d\vec{v}_G}{dt} \cdot \vec{v}_G = (\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}}) \cdot \vec{v}_G.$$

et de remarquer que :

$$(m_1 + m_2) \frac{d\vec{v}_G}{dt} \cdot \vec{v}_G = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \|\vec{v}_G\|^2 \right] = \frac{d}{dt} K_G$$

On obtient ainsi la dérivée de l'énergie cinétique du centre de masse par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} K_G = (\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}}) \cdot \vec{v}_G, \quad (5.46)$$

c'est à dire la variation de K_G par unité de temps.

De la même façon que pour le théorème de l'énergie cinétique pour un seul point matériel soumis à la résultante des forces $\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}}$, on en déduit que la variation ΔK_G de l'énergie cinétique du centre de masse est :

$$\Delta K_G = K_G(t_{\text{fin}}) - K_G(t_{\text{init}}) = W(\vec{F}^{\text{ext}})_{G(t_{\text{init}}) \rightarrow G(t_{\text{fin}})} \quad (5.47)$$

où \vec{F}^{ext} représente la résultante des forces extérieures et $W(\vec{F}^{\text{ext}})_{G(t_{\text{init}}) \rightarrow G(t_{\text{fin}})}$ représente son travail, qui est calculé, comme si \vec{F}^{ext} s'appliquait au centre de masse G , le long de la trajectoire empruntée par ce dernier.

Tout se passe donc bien comme si le centre de masse était un point matériel de masse $M = m_1 + m_2$ et soumis à la résultante des forces extérieures.

5.4.5 Théorème de l'énergie cinétique

Forme locale : Appliquons le théorème de l'énergie cinétique, dans sa forme locale (voir section 4.3.4, page 64) sur chacun des points matériels :

$$\begin{aligned} \frac{dE_{c1}}{dt} &= \vec{F}_{2/1} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_1^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_1 \\ \frac{dE_{c2}}{dt} &= \vec{F}_{1/2} \cdot \vec{v}_2 + \vec{F}_2^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_2 \end{aligned}$$

où nous avons tenu compte des puissances des forces extérieures (\vec{F}_1^{ext} , \vec{F}_2^{ext}) en plus de celles des forces intérieures ($\vec{F}_{2/1}$, $\vec{F}_{1/2}$). En effectuant la somme de ces deux équations, et en tenant compte du fait que $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = \vec{f}$, on obtient :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{dE_{c1}}{dt} + \frac{dE_{c2}}{dt} = \vec{f} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \vec{F}_1^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_2^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_2.$$

On obtient donc :

Variation de l'énergie cinétique du CM : Si l'instant initial t_{init} les deux points matériels sont situés en A_1 et A_2 respectivement et qu'à l'instant final t_{fin} il sont situés aux point B_1 et B_2 , alors la variation de l'énergie cinétique $K_G = \frac{1}{2} M \|\vec{v}_G\|^2$ du centre de masse est donnée par

$$K_G(t_{\text{fin}}) - K_G(t_{\text{init}}) = W(\vec{F})_{G(t_{\text{init}}) \rightarrow G(t_{\text{fin}})}$$

où \vec{F}^{ext} représente la résultante des forces extérieures et $W(\vec{F})_{G(t_{\text{init}}) \rightarrow G(t_{\text{fin}})}$ représente son travail, qui est calculé, comme si \vec{F}^{ext} s'appliquait au centre de masse G , le long de la trajectoire empruntée par ce dernier.

Théorème de l'énergie cinétique (forme locale) :

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} + \mathcal{P}^{\text{ext}} \text{ avec } \mathcal{P}^{\text{ext}} = \vec{F}_1^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_2^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_2. \quad (5.48)$$

où \vec{v} est toujours la vitesse relative $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ et \mathcal{P}^{ext} représente la puissance développée par les forces extérieures. L'équation (5.48) est la forme locale du théorème de l'énergie cinétique pour le système des deux particules.

En fonction de \vec{v}_G et \vec{v} : Il est instructif d'écrire le théorème de l'énergie cinétique en fonction des nouvelles variables, vitesse relative \vec{v} et vitesse du centre de masse \vec{v}_G . Pour cela, on remplace \vec{v}_1 et \vec{v}_2 par leurs expressions en fonction de \vec{v}_G et \vec{v} (voir Eqs. (5.13), page 82) dans l'équation (5.48). On obtient :

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} + \vec{F}_1^{\text{ext}} \cdot \left(\vec{v}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \right) + \vec{F}_2^{\text{ext}} \cdot \left(\vec{v}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} \right).$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\frac{dE_c}{dt} = \left(\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}} \right) \cdot \vec{v}_G + \vec{f} \cdot \vec{v} + \left(\frac{\mu}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}} - \frac{\mu}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}} \right) \cdot \vec{v}$$

Le premier terme est la dérivée de l'énergie cinétique du centre de masse $\frac{dK_G}{dt}$ (voir Eq. (5.46), page 96). On obtient ainsi la version locale du théorème de l'énergie cinétique en fonction des variables \vec{v}_G et \vec{v} :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{dK_G}{dt} + \left(\vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}} \right) \cdot \vec{v} \quad (5.49)$$

où \vec{f}^{ext} est la force que nous avons déjà rencontrée lorsque nous avons étudié le PFD dans le référentiel du centre de masse (voir Eq. (5.39), page 92) :

$$\vec{f}^{\text{ext}} = \frac{\mu}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}} - \frac{\mu}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}}.$$

Forme globale A partir de la forme locale (Eq. (5.48)), on peut en déduire la forme globale du théorème de l'énergie cinétique. Considérons que pendant le temps infinitésimal dt la particule (i) est passée de la position \vec{r}_i à la position $\vec{r}_i + d\vec{r}_i$ ($i = 1, 2$). Pendant dt , l'énergie cinétique aura varié de dE_c :

$$dE_c = \vec{f} \cdot \vec{v} dt + \mathcal{P}^{\text{ext}} dt,$$

Or, $\vec{v}_i dt = d\vec{r}_i$ ($i = 1, 2$) et $\vec{v} dt = d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1 = d\vec{r}$. On obtient donc :

$$dE_c = \delta W(\vec{f}) + \delta W^{\text{ext}},$$

où on a défini $\delta W(\vec{f})$ le travail (infinitésimal) de la force intérieure \vec{f} , lors du déplacement relatif $d\vec{r}$: $\delta W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot d\vec{r}$. Et δW^{ext} le travail des forces extérieures : $W^{\text{ext}} = \vec{F}_1^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_2$

Théorème de l'énergie cinétique (forme locale) : La forme locale du théorème de l'énergie cinétique pour le système des deux points matériel est :

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} + \mathcal{P}^{\text{ext}}$$

avec

$$\mathcal{P}^{\text{ext}} = \vec{F}_1^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_2^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_2.$$

que l'on peut aussi écrire

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{dK_G}{dt} + \left(\vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}} \right) \cdot \vec{v}$$

où $\vec{f}^{\text{ext}} = \frac{\mu}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}} - \frac{\mu}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}}$ et $\frac{dK_G}{dt}$ est la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du centre de masse :

$$\frac{dK_G}{dt} = \left(\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}} \right) \cdot \vec{v}_G.$$

En effectuant la somme sur une infinité (continue) de déplacement infinitésimaux, de façon similaire à la définition de l'intégrale de Riemann, on obtient le théorème de l'énergie cinétique dans sa version globale.

Théorème de l'énergie cinétique (forme globale) : Lorsque les points matériels sont situés aux positions A_i ($i = 1, 2$) au temps t_{init} et qu'on les retrouve aux positions B_i ($i = 1, 2$) au temps t_{fin} , alors l'énergie cinétique totale du système aura varié de la quantité suivante :

$$\Delta E_c = E_c(t_{\text{fin}}) - E_c(t_{\text{init}}) = W(\vec{f}) + \sum_{i=1,2} W(F_i^{\text{ext}})_{A_i \rightarrow B_i} \quad (5.50)$$

Le dernier terme correspond à la somme des travaux des forces extérieures qui s'appliquent sur chacun des points. Le premier termes est le travail de la force intérieure $\vec{f} = \vec{F}_{1/2}$ lorsque la position relative \vec{r} passe de la valeur $\vec{r}(t_{\text{init}}) = \vec{r}_i = \overrightarrow{A_1 A_2}$ à la valeur $\vec{r}(t_{\text{fin}}) = \vec{r}_f = \overrightarrow{B_1 B_2}$.

En fonction des déplacements du centre de masse et de la position relative : On peut aussi obtenir la forme globale du théorème de l'énergie cinétique en partant de la forme locale donnée par l'Eq. (5.49). On peut ainsi écrire la variation de l'énergie cinétique :

$$E_c(t_f) - E_c(t_i) = \Delta K_G + W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}}) \quad (5.51)$$

où ΔK_G est la variation de l'énergie cinétique du centre de masse (voir Eq. (5.47), page 96), qui est égale au travail de la somme des forces extérieures lors du déplacement du centre de masse G , comme si ces forces s'appliquaient au point G . Et $W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}})$ représente le travail de la force $(\vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}})$, lors de la variation de la position relative, comme si cette force s'appliquait sur une particule située au point repéré par \vec{r} .

5.4.6 Théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse

Pour obtenir la variation de l'énergie cinétique mesurée dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* , on peut partir du théorème de König (voir Eq. (5.44), page 95). En dérivant l'Eq. (5.44) par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{dK_G}{dt} + \frac{dE_c^*}{dt}.$$

En comparant cette dernière équation à la forme locale du théorème de l'énergie cinétique donné par l'Eq. (5.49), on en déduit que :

$$\frac{dE_c^*}{dt} = (\vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}}) \cdot \vec{v}, \quad (5.52)$$

où on rappelle que $E_c^* = \frac{1}{2}\mu\|\vec{v}\|^2$.

Théorème de l'énergie cinétique (forme globale) : La forme globale du théorème de l'énergie s'énonce comme suit : Lorsque les points matériels sont aux positions A_i ($i = 1, 2$) au temps t_{init} et qu'on les retrouve aux positions B_i ($i = 1, 2$) au temps t_{fin} , alors l'énergie cinétique totale du système aura varié de la quantité suivante :

$$E_c(t_{\text{fin}}) - E_c(t_{\text{init}}) = W(\vec{f}) + \sum_{i=1,2} W(F_i^{\text{ext}})_{A_i \rightarrow B_i}$$

On peut aussi l'écrire comme suit :

$$E_c(t_f) - E_c(t_i) = \Delta K_G + W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}})$$

Théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel \mathcal{R}^* :

Forme locale :

$$\frac{dE_c^*}{dt} = (\vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}}) \cdot \vec{v}.$$

Forme globale :

$$E_c^*(t_f) - E_c^*(t_i) = W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}}).$$

A partir de ce résultat, on en déduit la forme globale du théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse :

$$E_c^*(t_f) - E_c^*(t_i) = W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f} + \vec{f}^{\text{ext}}). \quad (5.53)$$

On aurait pu aussi obtenir ce résultat, à partir de l'Eq. (5.51) et du théorème de König.

Remarques :

- Le théorème de König permet de décomposer la variation de l'énergie cinétique en deux contributions. Une variation de l'énergie cinétique du centre de masse $K_G = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\|\vec{v}_G\|^2$ et une variation de l'énergie cinétique du mouvement relatif, qui est aussi l'énergie cinétique mesurée dans le référentiel du centre de masse $E_c^* = \frac{1}{2}\mu\|\vec{v}\|^2$.
- Le travail de la somme des forces extérieures $\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}}$ ne peut que donner ou retirer de l'énergie cinétique au centre de masse.
- Le travail de la force intérieure \vec{f} ne peut que faire varier l'énergie cinétique du mouvement relatif, mais elle n'est pas la seule. Les forces extérieures aussi peuvent faire varier l'énergie interne E_c^* . En effet le travail de $\vec{f}^{\text{ext}} = \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{\text{ext}} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{\text{ext}}$ est aussi responsable de la variation de l'énergie interne E_c^* .
- Lorsque la somme des forces extérieures est non nulle, le mouvement du centre de masse, mesuré dans le référentiel \mathcal{R} n'est pas rectiligne et uniforme et donc le référentiel \mathcal{R}^* n'est pas galiléen (\mathcal{R} étant considéré comme galiléen). De façon générale, on ne peut pas appliquer le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non-galiléen. C'est uniquement parce qu'il s'agit du référentiel du centre de masse que cela est possible.

5.4.7 Énergie potentielle d'interaction

Supposons que la force intérieure \vec{f} ne dépend que des positions des particules \vec{r}_1, \vec{r}_2 , et que de plus elle ne dépend de ces dernières que par la position relative $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Supposons aussi que \vec{f} est conservative, alors on pourra lui associer une énergie potentielle $E_p(\vec{r})$, qui permettra de calculer le travail W de la force \vec{f} lorsque la position relative change, et passe d'une position \vec{r}_i à une position \vec{r}_f :

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}) = E_p(\vec{r}_i) - E_p(\vec{r}_f),$$

exactement de la même façon dont nous avons défini l'énergie potentielle dans le cas d'une seule particule (voir Eq. (4.7) du chapitre 4, page 66).

Dans le cas où le mouvement des deux particules a lieu sur une même droite Ox , on pourra repérer les positions des particules par leurs abscisses x_1 et x_2 , telles que $\vec{r}_1 = x_1\vec{i}$ et $\vec{r}_2 = x_2\vec{i}$, où \vec{i} est un vecteur unitaire de même direction et de même sens que Ox . On aura donc

Énergie potentielle d'interaction : $E_p(\vec{r})$ ne dépend que de la position relative \vec{r} des deux particules. Elle permet de calculer le travail de la résultante des forces intérieures conservatives \vec{f} :

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}) = E_p(\vec{r}_i) - E_p(\vec{r}_f)$$

et d'obtenir les forces intérieures :

$$\vec{F}_{1/2} = -\frac{d}{dx_2} E_p(x_2 - x_1)\vec{i}$$

$$\vec{F}_{2/1} = -\frac{d}{dx_1} E_p(x_2 - x_1)\vec{i}.$$

$\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} = x\vec{i}$, où $x = x_2 - x_1$. Comme \vec{f} est conservative, on aura aussi (voir Eq. (4.8) du chapitre 4, page 67) :

$$\vec{f} = -\frac{d}{dx}E_p(x)\vec{i}.$$

Ce qu'on pourra encore écrire :

$$\vec{F}_{1/2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}E_p(x_2 - x_1)\vec{i}.$$

En effet, les propriétés de la dérivée des fonctions permettent d'écrire que $\frac{d}{dx}E_p(x)|_{x=x_2-x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}E_p(x_2 - x_1)$. Où $\frac{\partial}{\partial x_2}$ est une dérivée partielle, c'est à dire que l'on dérive par rapport à x_2 en maintenant x_1 constant. De plus, la dérivation des fonctions composées permet d'obtenir la relation :

$$\frac{\partial}{\partial x_2}E_p(x_2 - x_1) = -\frac{\partial}{\partial x_1}E_p(x_2 - x_1)$$

On en déduit donc que l'on peut aussi obtenir la force qui s'exerce sur S_1 de la façon suivante :

$$\vec{F}_{2/1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}E_p(x_2 - x_1)\vec{i}$$

ce qui donnera bien $\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$, comme il se doit.

$E_p(x)$ est appelée l'énergie potentielle d'interaction associée à la force \vec{f} . Elle permet d'obtenir la force intérieure \vec{f} (conservative), en dérivant par rapport à la coordonnée du point considéré.

De façon analogue à ce que nous avons fait dans le chapitre 4, on définit l'énergie potentielle d'interaction $E_p(\vec{r})$ du système des deux points matériels comme la somme des énergies potentielles d'interaction associées à toutes les forces intérieures conservatives.

5.4.8 Théorème de l'énergie mécanique

La notion d'énergie potentielle d'interaction est particulièrement intéressante quand le système est isolé, ou du moins lorsque $\vec{f}^{\text{ext}} = \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{\text{ext}} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{\text{ext}}$ est nulle, ce qu'on suppose dans la suite. Dans ce cas le théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse prend une forme plus simple :

$$E_c^*(t_f) - E_c^*(t_i) = W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}). \quad (5.54)$$

où seul le travail des forces intérieures \vec{f} peut faire varier l'énergie cinétique du mouvement relatif.

Il est alors avantageux, de considérer séparément les forces intérieures conservatives de celles qui ne le sont pas. On écrira $\vec{f} = \vec{f}_c + \vec{f}_{nc}$, où \vec{f}_c représente la résultante des forces conservatives et \vec{f}_{nc} la résultantes des

forces non conservatives. On calculera le travail des forces conservatives en utilisant l'énergie potentielle $E_p(\vec{r})$, on aura donc

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}) = E_p(\vec{r}_i) - E_p(\vec{r}_f) + W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}_{nc}).$$

En remplaçant cette dernière expression du travail des forces intérieures dans l'Eq. (5.54), on obtient :

$$E_c^*(t_f) - E_c^*(t_i) = E_p(\vec{r}_i) - E_p(\vec{r}_f) + W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}_{nc}),$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$[E_c^*(t_f) + E_p(\vec{r}_f)] - [E_c^*(t_i) + E_p(\vec{r}_i)] = W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}_{nc}).$$

Il est alors pratique de définir l'énergie mécanique du mouvement relatif E_m comme suit :

$$E_m^* = E_c^* + E_p.$$

Ceci permet d'énoncer le théorème de l'énergie cinétique sous la forme du théorème de l'énergie mécanique pour le mouvement relatif :

$$E_m^*(t_f) - E_m^*(t_i) = W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}_{nc}). \quad (5.55)$$

Remarque :

Lorsque toutes les forces intérieures sont conservatives, ou du moins lorsque les forces non conservatives ne travaillent pas (et toujours dans le cas où $\vec{f}^{\text{ext}} = \vec{0}$), l'énergie mécanique du mouvement relatif, qui est aussi l'énergie mécanique mesurée dans le référentiel du centre de masse est conservée. C'est à dire que E_m^* est une constante, elle ne dépend pas du temps.

5.5 Collisions

Nous allons appliquer ce que nous avons appris sur la dynamique d'un système de deux points matériels au cas particulier d'une collision de deux particules.

Dans cette section on supposera que le système est isolé c'est à dire qu'il n'y a pas de forces extérieures, soit $\vec{F}_1^{\text{ext}} = \vec{F}_2^{\text{ext}} = \vec{0}$.

5.5.1 Définitions

L'interaction entre deux particules sera appelée collision si les conditions suivantes sont satisfaites :

- Les forces intérieures sont de portée finie. C'est à dire que les deux particules n'interagissent de façon significative que si les deux particules sont suffisamment proches l'une de l'autre.

Energie mécanique : à chaque instant t on définit l'énergie mécanique $E(t)$ du mouvement relatif de la façon suivante :

$$E_m^*(t) = E_c^*(t) + E_p(\vec{r}(t)),$$

où E_c^* est l'énergie cinétique du mouvement relatif, qui est aussi celle mesurée dans le référentiel du centre de masse, et E_p est l'énergie potentielle d'interaction.

Théorème de l'énergie mécanique : Lorsque le système est isolé ou du moins lorsque $\vec{f}^{\text{ext}} = \vec{0}$, alors

$$E_m^*(t_f) - E_m^*(t_i) = W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}_{nc}),$$

où $W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}_{nc})$ est le travail des forces intérieures non conservatives.

- Aux instants initial et final les particules sont suffisamment éloignées l'une de l'autre pour qu'elles n'interagissent pas entre elles.

Ces conditions correspondent bien à l'idée que l'on se fait de la collision entre deux boules de billards ou entre deux voitures. On peut aussi imaginer des collisions un peu plus "exotiques". Par exemple, une collision entre deux planètes ou la collision entre deux aimants. Dans ce cas les forces d'interactions ne sont pas de très courte portée. Mais si les positions initiales des deux planètes ou des deux aimants sont assez éloignées, alors on pourra quand même négliger leurs interactions aux instant initial et final ; et considérer qu'il s'agit bien d'une collision.

Dans un processus de collision, il y a donc un avant et un après l'interaction entre les deux particules. Avant et après l'interaction, chacune des particules est isolée, puisque les particules sont assez éloignées pour que les forces intérieures soient nulles, et que de plus on a supposé qu'il n'y avait pas de forces extérieures.

Avant et après l'interaction, le mouvement de chacune des particules est donc rectiligne et uniforme.

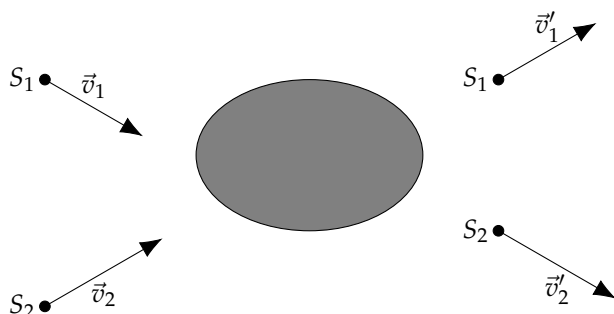


FIGURE 5.5: Collision entre deux particules S_1 et S_2 . L'interaction a lieu dans une région finie de l'espace, la zone d'interaction (zone grise). Avant et après cette interaction, le mouvement des particules est rectiligne et uniforme. Les grandeurs mesurées après la collisions sont notées avec des primes.

On peut aussi découper l'espace en deux régions :

- La *zone d'interaction*, ou la collision a véritablement lieu. C'est le plus souvent une région finie de l'espace, dans laquelle les particules sont suffisamment proches l'une de l'autre pour que les forces d'interaction agissent. On pourra caractériser cette zone d'interaction, par la portée de l'interaction r_p , qui est la distance minimale entre les deux particules pour qu'elles interagissent.

$$\text{zone d'interaction} = \{\forall r \in \mathbb{R}; 0 \leq r < r_p\}.$$

- Une *zone "libre"*, dans laquelle les particules n'interagissent pas. Cette zone est en principe illimitée, puisque les particules peuvent être infiniment éloignées l'une de l'autre. C'est dans cette zone que l'on prépare les particules avant leur collision. On définit le plus précisément leur vecteur vitesse. C'est aussi dans cette zone que l'on dispose des

détecteurs pour mesurer le plus précisément possible les vecteurs vitesses des particules après la collision. On pourra définir la zone libre comme la région complémentaire de la zone d'interaction, soit :

$$\text{zone libre} = \{\forall r \in \mathbb{R}; r > r_p\}.$$

On notera \vec{v}_1 et \vec{v}_2 , les vecteurs vitesses des particules avant l'interaction, et \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 après l'interaction. On fera de même pour toutes les autres grandeurs physiques, les quantités primées seront celles mesurées après l'interaction et celle non primées avant. Par exemple, on notera \vec{p}_1 et \vec{p}_2 les quantités de mouvement avant l'interaction et \vec{p}'_1 et \vec{p}'_2 après l'interaction.

5.5.2 Conservation de la quantité de mouvement

Comme le système des deux particules est isolé (il n'y a pas de force extérieure), la quantité de mouvement du système, $\vec{p}_G = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ (qui est aussi la quantité de mouvement du centre de masse $\vec{p}_G = (m_1 + m_2)\vec{v}_G$), est conservée tout au long de la trajectoire des deux particules (voir Eq. (5.9), page 80). C'est à dire que la valeur à chaque instant t de $\vec{p}_G(t)$ est égale à la valeur initiale $\vec{p}_G(t_i)$ à l'instant t_i .

$$\vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) = \overrightarrow{\text{Cte}} = \vec{p}_G(t_i). \quad (5.56)$$

Donc en particulier, la quantité de mouvement initiale du système est égale à la quantité de mouvement finale, soit :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad (5.57)$$

Remarque :

Dans le référentiel du centre de masse, cette conservation devient triviale, puisque l'on a vu que la quantité de mouvement totale mesurée dans le référentiel du centre de masse est toujours nulle, $\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{0}$, que le système soit isolé ou non (voir Eq. (5.35), page 90).

5.5.3 Conservation de l'énergie

Pour obtenir la relation entre l'énergie du système après la collision et l'énergie cinétique avant la collision, on utilise le théorème de l'énergie cinétique (voir Eq. (5.51), page 98). Comme nous avons considéré que le système était isolé, le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial t_i et l'instant final t_f devient :

$$E_c(t_f) - E_c(t_i) = E_c^*(t_f) - E_c^*(t_i) = W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f})$$

où seul le travail des forces intérieures intervient. En conséquence, la variation de l'énergie cinétique est en fait uniquement due à la variation de l'énergie mesurée dans le centre de masse.

Conservation de la quantité de mouvement :

Au cours de la collision, la quantité de mouvement totale est conservée. Elle est égale à la quantité de mouvement du centre de masse \vec{p}_G :

$$\vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) = \overrightarrow{\text{Cte}} = \vec{p}_G.$$

C'est une conséquence du fait que le système est isolé.

Décomposons les forces intérieures en force conservatives \vec{f}_{nc} et non conservatives \vec{f}_c . On pourra alors utiliser l'énergie potentielle d'interaction $E_p(\vec{r})$ pour calculer le travail des forces intérieures conservatives :

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}) = W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}_c) + W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}_{nc}) = E_p(\vec{r}_i) - E_p(\vec{r}_f) + W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}_{nc})$$

Comme dans la zone libre les deux particules n'interagissent pas, $\vec{f} = \vec{0}$, alors dans cette zone l'énergie potentielle est constante, comme \vec{r}_i et \vec{r}_f sont tous les deux dans la zone libre, on aura donc $E_p(\vec{r}_i) = E_p(\vec{r}_f)$. On en déduit que seul le travail des force intérieures non- conservatives interviendra :

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}) = W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}_{nc}).$$

Ceci n'est vrai que parce que l'on considère que les deux particules sont dans la zone libre avant et après la collision.

Le théorème de l'énergie cinétique, dans le cas d'une collision pourra donc s'écrire de la façon suivante :

$$E_c(t_f) - E_c(t_i) = E_c^*(t_f) - E_c^*(t_i) = W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}_{nc}) \quad (5.58)$$

donc de façon générale les énergie cinétiques du système avant et après la collision ne sont pas égales.

Remarques :

- **Energie disponible.** La variation de l'énergie cinétique totale du système $\Delta E_c = E'_c - E_c$ est la variation de l'énergie cinétique mesurée dans le centre de masse :

$$\Delta E_c = \Delta E_c^* = E_c'^* - E_c^*$$

En effet, l'énergie cinétique du centre de masse, elle ne varie pas tout au long de la trajectoire des deux particules. Donc en vertu du théorème de König (voir Eq. (5.44), page 95) seule l'énergie cinétique E_c^* du mouvement relatif qui est celle est mesurée dans le référentiel du centre de masse peut varier.

En conséquence l'énergie cinétique finale E'_c peut s'écrire $E'_c = E_c'^* + K_G$. Or comme $E_c'^* \geq 0$, l'énergie cinétique finale du système des deux particules est toujours au moins égale à l'énergie cinétique du centre de masse, soit : $E'_c \geq K_G$.

Lorsqu'on réalise un choc entre deux particules, l'énergie cinétique disponible E_{disp} qui peut être consommée pour réaliser une tâche coûteuse en énergie, est l'énergie cinétique initiale mesurée dans le centre de masse. L'énergie du centre de masse K_G est inutile. Celle que l'on avait au début se retrouve à la fin. Mathématiquement, cela se traduit de la façon suivante :

$$E_{disp} = E_c^* = \frac{1}{2}\mu v^2 = E_c - K_G$$

Variation de l'énergie cinétique :

Lors d'une collision la variation de l'énergie cinétique $\Delta E_c = E'_c - E_c$ est égale à la variation mesurée dans le référentiel du centre de masse $E_c'^* - E_c^*$:

$$\Delta E_c = E'_c - E_c = E_c'^* - E_c^* = W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f}(\vec{f}_{nc}).$$

Energie disponible :

Lors d'une collision, l'énergie cinétique disponible E_{disp} qui peut être consommée pour réaliser une tâche coûteuse en énergie, est l'énergie cinétique initiale mesurée dans le centre de masse :

$$E_{disp} = E_c^* = \frac{1}{2}\mu v^2 = E_c - K_G$$

Par exemple, une réaction chimique endoénergétique qui nécessite un minimum d'énergie E_{\min} pour avoir lieu, ne pourra se produire que si l'énergie disponible dans la collision excède E_{\min} . Soit, $E_{\text{disp}} = E_c - K_G > E_{\min}$, c'est à dire si $E_c > E_{\min} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2$. On voit qu'il ne suffit pas que E_c soit supérieure à E_{\min} , puisque l'énergie cinétique du centre de masse K_G ne peut pas être utilisée pour la réaction chimique.

- **Choc complètement mou.** Lorsque toute l'énergie disponible E_{disp} est consommée dans la collision, l'énergie cinétique finale mesurée dans le centre de masse est nulle $E'_c = 0$. Dans ce cas, après la collision, les particules sont immobile dans le référentiel du centre de masse. Dans le référentiel original \mathcal{R} , les deux particules possèdent la même vitesse, c'est la vitesse initiale du centre masse $\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2 = \vec{v}_G$. Le montrer.

Choc complètement mou : Lorsque au cours de la collision toute l'énergie cinétique disponible est dépensée, on dit que le choc est complètement mou. Dans ce cas $E'_c = 0$ donc dans le référentiel du centre de masse, les particules sont immobiles après le choc. Les vitesses après le choc, mesurées dans le référentiel \mathcal{R} , sont égales à la vitesse du centre de masse.

5.5.4 Collision élastique

On dira que la collision est élastique si l'énergie cinétique du système E_c avant la collision est égale à l'énergie cinétique après la collision E'_c . D'après le théorème de l'énergie cinétique que nous avons vu précédemment (voir Eq. (5.58)), cela n'est possible que si les forces intérieures sont toutes conservatives, autrement dit, il n'y a pas de force intérieure non conservative (on suppose toujours que le système est isolé).

Dans ce cas, on aura deux "lois de conservation" :

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

- Conservation de l'énergie cinétique :

$$E_{c1} + E_{c2} = E'_{c1} + E'_{c2}$$

où les quantités primées sont celles mesurées après la collisions et celles non primées sont mesurées avant la collisions.

La première égalité est une loi de conservation très générale. Elle résulte du fait que la quantité de mouvement totale est constante au cours du mouvement, que les particules interagissent ou pas et quelques soit la nature des forces intérieures. La seconde égalité n'est vraie que lorsque les forces intérieures sont conservatives, d'une part, et d'autres part lorsque les vitesses initiales et finales des deux particules sont définies quand les particules sont situées dans la zone libre.

Remarque :

Dans le cas général ces deux relations ne permettent pas d'obtenir complètement les vecteurs vitesses des particules après la collisions,

\vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 en fonction des vitesses avant la collision \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . En effet, les deux vecteurs \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 constituent 6 inconnues (3 composantes pour chacun des vecteurs). Alors que les deux relations de conservation forment 4 équations (la conservation de la quantité de mouvement est une relation entre des vecteurs, elle est donc équivalente à 3 équations, une pour chaque composante des vecteurs). Il n'y a donc pas assez d'équations pour complètement déterminer la solution.

Ce constat est en fait assez naturel. Il faut bien que les forces d'interaction jouent un rôle. L'objectif des expériences de collision entre particules est justement de déterminer la forme de l'énergie potentielle d'interaction en mesurant les vecteurs vitesses des particules après la collision en fonction des vitesses des particules avant la collision.

Dans le cas d'une collision à une dimension, au cours de laquelle les particules sont astreintes à se déplacer sur un axe, alors ces deux lois de conservation sont suffisantes pour obtenir la relation entre les vitesses des particules après la collision en fonction des vitesses avant la collision. En effet dans ce cas il n'y a que deux inconnues et il y a deux équations. C'est ce que nous allons voir dans la prochaine section.

5.5.5 Exemples de collisions en 1D

Dans cette section, on considère que les particules sont contraintes à se déplacer sur une axe Ox , muni d'un vecteur unitaire \vec{i} . Les vitesses et les quantités de mouvement ont donc toujours la même direction que l'axe Ox , mais pas obligatoirement le même sens. On notera par exemple $\vec{v}_1 = v_1\vec{i}$ et $\vec{v}_2 = v_2\vec{i}$, pour les vitesses des particules avant la collision et $\vec{v}'_1 = v'_1\vec{i}$ et $\vec{v}'_2 = v'_2\vec{i}$, pour les vitesses des particules après la collision. Les grandeurs v_1 , v_2 , v'_1 et v'_2 (sans flèche) peuvent être positives ou négatives suivant que les vecteurs vitesse sont dans le même sens ou dans le sens opposé au vecteur \vec{i} , qui oriente l'axe Ox .

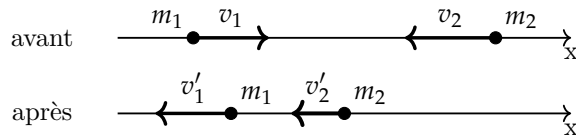


FIGURE 5.6: Collision à une dimension.

Collision élastique Pour obtenir v'_1 et v'_2 en fonction de v_1 et v_2 , on pourrait partir des deux équations de conservation. La conservation de la quantité de mouvement totale, que l'on projette sur l'axe Ox ;

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

et la conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2.$$

Mais il est beaucoup plus simple, de résoudre le problème dans le référentiel \mathcal{R}^* du centre de masse puis d'utiliser les relations de passage du référentiel \mathcal{R}^* au référentiel de départ \mathcal{R} (voir Eqs. (5.29), page 89) :

$$v_i' = v_i'^* + v_G \quad (i = 1, 2). \quad (5.59)$$

De plus, dans le référentiel du centre de masse, les vitesses des particules v_i^* s'expriment en fonction de la vitesse relative $v = v_2 - v_1$:

$$v_1^* = -\frac{\mu}{m_1}v, \quad v_2^* = \frac{\mu}{m_2}v, \quad (5.60)$$

où μ est la masse réduite $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ (voir Eq.(5.38), page 92). Les mêmes relations s'appliquent aussi après la collision.

$$v_1'^* = -\frac{\mu}{m_1}v', \quad v_2'^* = \frac{\mu}{m_2}v', \quad (5.61)$$

et on a pas mis d'étoile sur la vitesse relative car elle est la même dans les deux référentiels $v = v^*$, c'est à dire que $v_2 - v_1 = v_2^* - v_1^*$.

Dans le référentiel du centre de masse, la conservation de l'énergie cinétique est très simple, car l'expression de l'énergie cinétique dans \mathcal{R}^* est $E_c^* = \frac{1}{2}\mu v^2$. Donc la conservation de l'énergie cinétique $E_c^* = E_c'^*$ donne simplement

$$v^2 = v'^2 \Leftrightarrow (v_2 - v_1)^2 = (v_2' - v_1')^2$$

Il y a donc deux possibilités $v = v'$ ou $v = -v'$. Or si $v = v'$, il ne se passe rien, en effet dans ce cas en vertu des équations (5.60), (5.61), dans ce cas on a $v_1'^* = v_1^*$ et $v_2'^* = v_2^*$. C'est à dire que les deux particules ne se voient pas et passent l'une à travers l'autre sans aucune interaction. Seule la seconde possibilité correspond à une interaction et dans ce cas on a simplement :

$$v_1'^* = -v_1^*; \quad v_2'^* = -v_2^*.$$

Dans le référentiel du centre de masse une collision élastique (1D) est très simple, la collision retourne les vitesses sans changer leur norme.

En utilisant les relation (5.61), on obtient donc simplement :

$$\begin{aligned} v_1'^* &= -\frac{\mu}{m_1}v' = \frac{\mu}{m_1}(-v) = \frac{m_2}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) \\ v_2'^* &= \frac{\mu}{m_2}v' = \frac{\mu}{m_2}(-v) = -\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_2 - v_1). \end{aligned}$$

Puis à l'aide de la composition des vitesses (Eq.(5.59)), on obtient :

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{m_2}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) + v_G \\ v_2' &= -\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) + v_G \end{aligned}$$

En se rappelant que $v_G = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}v_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 \\ v'_2 &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \end{aligned}$$

Remarque :

- la seconde équation s'obtient à partir de la première en échangeant le rôle des deux particules, et donc en permutant les indices 1 et 2.
- Supposons qu'initialement S_2 soit immobile, soit $v_2 = 0$. Dans ce cas, les vitesses après la collision s'expriment en fonction de v_1 uniquement, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \\ v'_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1. \end{aligned}$$

- On voit que si $m_1 > m_2$ alors v'_1 est de même signe que v_1 , alors que si $m_1 < m_2$, le sens de la vitesse finale de S_1 est l'opposé de la vitesse initiale. S_1 rebondit sur S_2 quand elle est plus légère que S_2 . la vitesse de S_2 après la collision, v'_2 , est toujours du même signe que la vitesse initiale de S_1 . S_2 qui est initialement immobile est toujours poussé par S_1 . S_2 ne peut pas être immobile après le choc, ceci est une conséquence du mouvement rectiligne et uniforme du centre de masse.

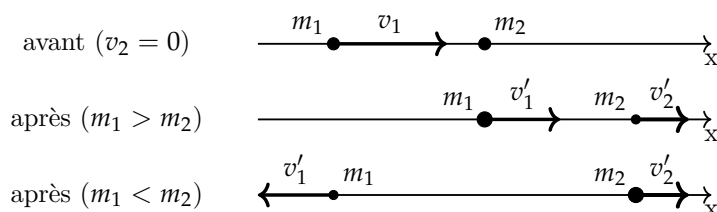


FIGURE 5.7: Collision élastique à une dimension dans le cas où $v_2 = 0$ suivant que $m_1 > m_2$ ou que $m_1 < m_2$.

- Le cas où $m_1 = m_2$ est remarquable. En effet dans ce cas, $v'_1 = 0$ et $v'_2 = v_1$. Les particules échangent leur vitesses. C'est ce qu'on appelle le carreau au jeu de la pétanque.

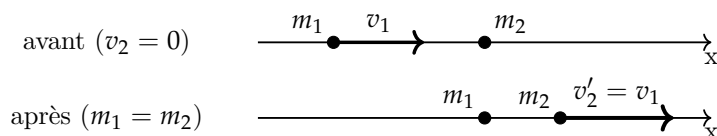


FIGURE 5.8: Collision à une dimension dans le cas où $v_2 = 0$ et $m_1 = m_2$. Les particules échangent leur vitesse. Le carreau à la pétanque.

- Un autre cas assez courant est le cas où $m_2 \gg m_1$. En négligeant m_1 devant m_2 , la relation entre les vitesses finale et initiales devient :

$$\begin{aligned} v'_1 &\simeq -v_1 \\ v'_2 &\simeq 0. \end{aligned}$$

S_2 reste approximativement immobile et S_1 rebondit sur S_2 mais la norme de sa vitesse reste la même : $\|\vec{v}'_1\| = |v'_1| = |v_1| = \|\vec{v}_1\|$. C'est par exemple le cas d'une balle qui rebondit sur un mur.

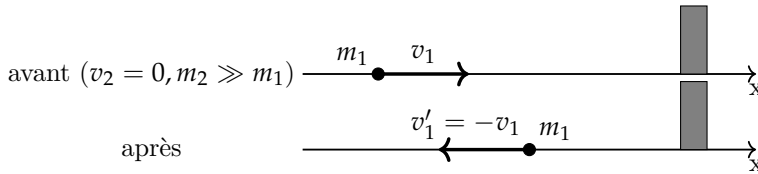


FIGURE 5.9: Collision à une dimension dans le cas où $m_2 \gg m_1$ et $v_2 = 0$. Une balle qui rebondit sur un mur.

Choc mou On considère le cas opposé de la collision élastique. C'est le cas où les deux particules après le choc restent collées l'une à l'autre, et possèdent donc la même vitesse $v'_1 = v'_2$, on notera cette vitesse v'_{12} . On avait déjà traité ce type de collision dans le cas général (voir les remarques à la section 5.5.3, page 105). On va retrouver les mêmes résultats, d'une autre façon, dans le cas particulier d'une collision à une dimension. On a toujours la loi de conservation de la quantité de

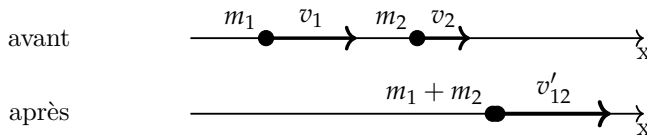


FIGURE 5.10: Choc mou. Après le choc, les particules sont collées l'une à l'autre.

mouvement, puisque cette loi de conservation est la conséquence du fait que le système est isolé, ce qui est le cas ici. Par contre, on va voir que l'énergie cinétique n'est pas conservée, elle a diminué. En effet, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'_{12}$$

et donc

$$v'_{12} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 = v_G$$

On trouve que la vitesse finale des deux particules est la vitesse du centre de masse. On aurait pu le deviner sans faire de calcul, puisque les deux particules sont collées l'une à l'autre leur position est confondue avec celle du centre de masse. Et comme la vitesse du centre de

masse est conservée (car le est système isolé), la vitesse finale du centre de masse est égale à la vitesse qu'il avait initialement.

Calculons la variation de l'énergie cinétique et vérifions qu'elle n'est pas nulle. On peut la calculer directement $\Delta E_c = E'_c - E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{12}'^2 - (\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2)$, en remplaçant $v_{12}' = v_G = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}v_2$.

Mais il est plus instructif et simple d'utiliser le théorème de König qui permet d'écrire l'énergie cinétique initiale de la façon suivante :

$$E_c = E_c^* + K_G$$

où E_c^* est l'énergie cinétique mesurée dans le référentiel du centre de masse, or cette dernière est simplement l'énergie cinétique du mouvement relatif :

$$E_c^* = \frac{1}{2}\mu v^2$$

où $v = v_2 - v_1$ est la vitesse relative des deux particules et μ la masse réduite.

K_G est l'énergie cinétique du centre de masse :

$$K_G = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2,$$

mais cette dernière est exactement l'énergie cinétique finale E'_c . On en déduit ΔE_c :

$$\Delta E_c = E'_c - E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{12}'^2 - E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G'^2 - (E_c^* + K_G) = -E_c^*$$

La variation de l'énergie cinétique est négative, donc l'énergie cinétique a diminué. Cette variation est égale à l'énergie cinétique initiale des particules mesurée dans le référentiel du centre de masse. Comme on l'avait déjà discuté précédemment (voir les remarques à la section 5.5.3, page 105), l'énergie initiale disponible et qui peut être consommée est justement l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse ; puisque l'énergie de centre de masse, elle, est conservée. Dans le choc mou, toute l'énergie disponible E_c^* a été consommée.

$$\Delta E_c = -E_c^* = -\frac{1}{2}\mu v^2 = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)^2$$

A

Trigonometrie

Nous résumons brièvement les définitions et quelques propriétés relatives aux fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente. Ces notions seront considérées comme acquises.

A.1 Le triangle rectangle

Dans le triangle ABC rectangle en B , on note R l'hypothénuse AC et θ l'angle en A et α l'angle en C . Le cosinus et le sinus de l'angle θ sont définis par les rapports suivants :

$$\cos \theta = \frac{AB}{R}; \quad \sin \theta = \frac{BC}{R}.$$

On se rappellera que pour obtenir le cosinus il faut considérer le coté

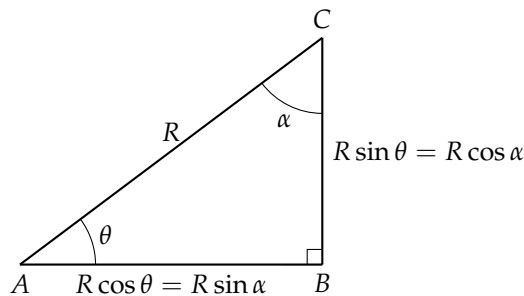


FIGURE A.1: *Le triangle rectangle.*

adjacent (du même coté) à l'angle, alors que pour le sinus il faut considérer le coté opposé à l'angle. On aura donc pour l'angle α les relations suivantes :

$$\sin \alpha = \frac{AB}{R}; \quad \cos \alpha = \frac{BC}{R}.$$

Comme la somme des angles d'un triangle est égale à π (180°), les angles θ et α sont complémentaires, c'est à dire que :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

On a donc la propriété :

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta; \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta.$$

Le théorème de Pythagore : $R^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ implique que :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

On introduit aussi la fonction tangente de l'angle θ notée $\tan \theta$. Elle est définie comme le rapport du sinus sur le cosinus de l'angle θ :

$$\tan \theta \equiv \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Définition de cosinus et sinus

$$\cos = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypothénuse}}; \quad \sin = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypothénuse}};$$

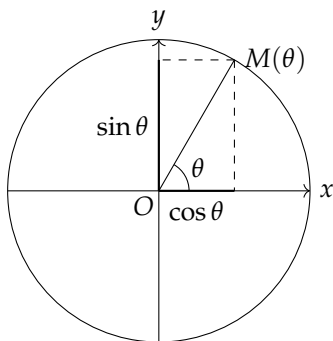


FIGURE A.2: Le cercle trigonométrique.

A.2 Cercle trigonométrique

Il est commode de visualiser les cosinus et sinus en utilisant le cercle trigonométrique. Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1. Les coordonnées x et y d'un point M situé sur le cercle sont les cosinus et le sinus de l'angle θ que fait le rayon vecteur \overrightarrow{OM} avec l'axe Ox (voir figure A.2).

A.3 Propriétés des sinus et cosinus et tangente

A.3.1 Valeurs remarquables

Dans le tableau ci-dessous nous résumons les valeurs remarquables des sinus et cosinus pour des angles dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Les valeurs des sinus et cosinus dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ s'obtiennent en utilisant les propriétés de périodicité et de symétrie données dans la section suivante.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

TABLE A.1: Valeurs particulières des fonctions cosinus et sinus.

A.3.2 Périodicité et symétries

En utilisant le cercle trigonométrique, il n'est pas très difficile de vérifier les propriétés suivantes :

— Périodicité :

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$$

— Parité ou symétrie par rapport à Ox :

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

— Symétrie par rapport à Oy :

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

— Inversion par rapport à O :

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

— Complémentarité

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$

A.3.3 *Pythagore*

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

A.3.4 *Somme des angles*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

A.3.5 *Angle double*

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2 \theta - 1$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin \theta \cos \theta$$

qui est un cas particulier des équation précédentes.

A.3.6 dérivée

$$\frac{d \cos \theta}{d\theta} = -\sin \theta$$

$$\frac{d \sin \theta}{d\theta} = \cos \theta$$

donc les fonctions sinus et cosinus vérifient :

$$\frac{d^2 \cos \theta}{d\theta^2} = -\cos \theta \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d^2 \sin \theta}{d\theta^2} = -\sin \theta. \quad (\text{A.2})$$

Elles sont donc toutes les deux solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2}{d\theta^2} f(\theta) + f(\theta) = 0.$$

La dérivée de la fonction tangente peut s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{d \tan \theta}{d\theta} = \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (\text{A.3})$$

B

Vecteurs

B.1 Définition

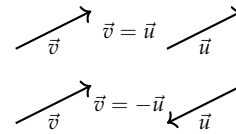
Un vecteur \vec{v} est déterminé par 3 quantités, sa direction, son sens et sa norme qui est un nombre réel positif et sera notée $\|\vec{v}\|$. On représente un vecteur par une flèche dont la longueur représente sa norme et la direction et sens de la flèche représentent le direction et le sens du vecteur. On pourra aussi représenter un vecteur par un couple de points A et B , c'est à dire la flèche qui va de A vers B que l'on notera \overrightarrow{AB} . On dit alors que le vecteur est représenté par le bipoint AB .

Vecteur \vec{v} : direction, sens et norme
 $\|\vec{v}\| \geq 0$.



B.2 Egalité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux, si les flèches qui les représentent sont parallèles, de même sens et de même longueur. Deux vecteurs \vec{v} et \vec{u} sont opposés : $\vec{v} = -\vec{u}$, s'ils ont même norme, même direction mais sont de sens opposés.

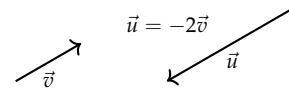


B.3 Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont colinéaires s'il ont même direction. Ils peuvent avoir des normes ou des sens différents.

B.4 Multiplication par un nombre réel :

Soit a un nombre réel alors $\vec{u} = a\vec{v}$ est colinéaire à \vec{v} et $\|\vec{u}\| = |a|\|\vec{v}\|$. Multiplier un vecteur par un nombre réel positif revient simplement à multiplier la longueur de la flèche par ce nombre sans rien changer d'autre. Si de plus le nombre est négatif, le sens est inversé.

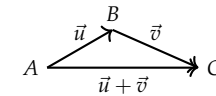


B.5 Addition de deux vecteurs

Soient deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} représentés par leur bipoints respectifs : \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BC} alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

c'est la relation de Chasles.

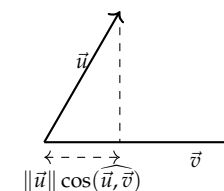


B.6 Produit scalaire

Le résultat du produit scalaire entre deux vecteurs est un nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}).$$

On remarque que $\|\vec{u}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est la projection de \vec{u} sur la direction de \vec{v} . Donc si la norme de \vec{v} est égale à 1 alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égale à la projection de \vec{u} sur la direction de \vec{v} .



B.7 Norme

La norme d'un vecteur \vec{v} est donnée par son carré scalaire :

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^2.$$

B.8 Orthogonalité :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs orthogonaux, leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

B.9 Base du plan :

L'ensemble de tous les vecteurs du plan peuvent être obtenus en faisant des combinaisons linéaires de deux vecteurs non colinéaires. Choisissons deux vecteurs du plan (\vec{e}_1, \vec{e}_2) et soit \vec{v} un vecteur quelconque du plan, alors, il existe deux nombres réels v_1 et v_2 tels que :

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$$

(\vec{e}_1, \vec{e}_2) est appelée, *base du plan*. Les nombres réels v_1 et v_2 sont appelés *composantes* du vecteur \vec{v} dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

B.10 Base orthonormée du plan :

Si on choisit deux vecteurs \vec{i} et \vec{j} de norme égale à 1 et orthogonaux. C'est à dire que \vec{i} et \vec{j} vérifient les relations suivantes :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad (\text{B.1})$$

alors la base est dite *orthonormée*. Dans ce cas, il est très simple de déterminer les composantes v_x et v_y d'un vecteur quelconque du plan \vec{v} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) :

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}.$$

En effet, pour obtenir v_x , il suffit de prendre le produit scalaire de cette équation avec le vecteur \vec{i} , et on obtient :

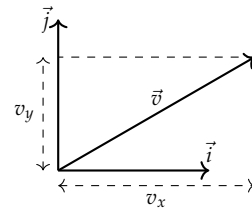
$$\vec{v} \cdot \vec{i} = v_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + v_y (\vec{j} \cdot \vec{i}) \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{i} = v_x \quad (\text{B.2})$$

où on a utilisé les relations d'orthonormalisation données par l'Eq. B.1. De même pour obtenir v_y , on effectue le produit scalaire du vecteur \vec{v} avec le vecteur \vec{j} , et on obtient :

$$v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}.$$

Dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \\ v_x &= \vec{v} \cdot \vec{i}; \quad v_y = \vec{v} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$



B.11 Base orthonormée de l'espace

tous les vecteurs de l'espace peuvent être obtenus en faisant des combinaisons linéaires de trois vecteurs de base, à condition que ces trois vecteurs ne soient pas dans le même plan. Si les trois vecteurs de base sont de norme 1 et sont orthogonaux entre eux alors la base est dite orthonormée. Par convention, on notera $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base orthonormée de l'espace, où \vec{i}, \vec{j} engendrent le plan horizontal et \vec{k} est vertical vers le haut.

B.12 Produit scalaire dans une base orthonormée :

Soient deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , dont on connaît les composantes dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \\ \vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},\end{aligned}$$

alors le produit scalaire entre \vec{u} et \vec{v} s'exprime en fonction des composantes de la façon suivante :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Dans le cas particulier où $\vec{u} = \vec{v}$, on obtient l'expression de la norme du vecteur :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}.$$

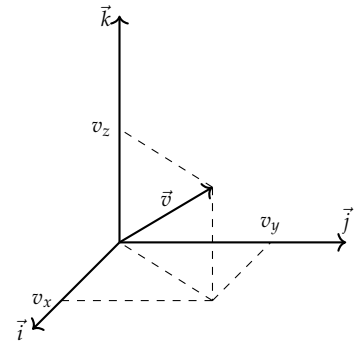
B.13 Dimension d'un vecteur :

Lorsqu'un vecteur est utilisé pour représenter une quantité physique, le vecteur possédera une dimension. La dimension du vecteur sera la même que celle de ses composantes. Cela implique d'une part que les trois composantes du vecteur doivent avoir la même dimension, et d'autre part que les vecteurs de la base orthonormée sont sans dimension. Par exemple :

- Si un point M de l'espace est repéré par le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, alors la dimension du vecteur \overrightarrow{OM} est la dimension de x , y et z ; c'est à dire une longueur L .
- Si une force $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$, alors la dimension du vecteur \vec{F} et des composantes F_x, F_y, F_z est MLT^{-2} .

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de l'espace :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \\ v_x &= \vec{v} \cdot \vec{i}; \quad v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}; \quad v_z = \vec{v} \cdot \vec{k}\end{aligned}$$



C

Dérivée d'une fonction

C.1 Définitions

Une fonction f est dite dérivable en un point x_0 si la limite suivante existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Cette limite est appelée la dérivée de la fonction f au point x_0 et est notée $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$.

La fonction f est dite dérivable sur un intervalle (ouvert) I de \mathbb{R} si elle est dérivable en chaque point de l'intervalle. On peut alors définir la fonction $f'(x)$, dont la valeur en chaque point $x \in I$ est égale à la dérivée de f . $f'(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_x$; $\forall x \in I$.

C.2 Signification géométrique de la dérivée

La dérivée de f au point x_0 est la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$, au point $(x_0, f(x_0))$.

L'équation de la droite D tangente à la courbe $y = f(x)$, au point $(x_0, f(x_0))$ est donc :

$$y = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + f(x_0).$$

C'est à dire que les points de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation précédente appartiennent à la droite D .

On en déduit donc que si $f'(x)$ est positive sur un intervalle, alors la fonction $f(x)$ est croissante sur cet intervalle. Si la $f'(x)$ est négative sur un intervalle alors la fonction $f(x)$ est décroissante sur le même intervalle.

Si au point x_0 , $f'(x_0) = 0$ alors la tangente à la courbe $y = f(x)$ est horizontale. Dans ce cas la fonction peut

C.3 Propriétés

C.3.1 Linéarité

L'opération de dérivation est une opération linéaire :

$$\frac{d}{dx} (af(x) + bg(x)) = a \frac{df}{dx} + b \frac{dg}{dx}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions dérivable au point x .

C.3.2 Dérivée d'un produit – Formule de Leibniz

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = \frac{df}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg}{dx}.$$

C.3.3 Dérivée d'une fonction composée

On considère une fonction g qui dépend de x par l'intermédiaire d'une autre fonction $u(x)$, c'est à dire que $g(x) = f(u(x))$. Alors :

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_x = \left. \frac{d}{dx} f(u(x)) \right|_x = \left. \frac{du}{dx} \right|_x \left. \frac{df}{du} \right|_{u=u(x)}.$$

Exemple : Considérons la fonction $g(x) = \sin(x^2)$. On peut considérer que cette fonction est la composée de la fonction $u(x) = x^2$ par la fonction $f(u) = \sin(u)$. On aura bien : $g(x) = f(u(x)) = \sin(u(x)) = \sin(x^2)$. La dérivée de $\sin(x^2)$ en chaque point x se calculera de la façon suivante :

— On calcule $\left. \frac{du}{dx} \right|_x$:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \left. \frac{dx^2}{dx} \right|_x = 2x.$$

— On calcule $\left. \frac{df}{du} \right|_{u=u(x)}$:

$$\frac{df}{du} = \cos(u) \Rightarrow \left. \frac{df}{du} \right|_{u=u(x)} = \cos(x^2).$$

— On en déduit la dérivée de $\sin(x^2)$, en effectuant le produit de $\left. \frac{du}{dx} \right|_x$ par $\left. \frac{df}{du} \right|_{u=u(x)}$:

$$\left. \frac{d}{dx} \sin(x^2) \right|_x = 2x \cos(x^2).$$

C.3.4 Dérivée de la fonction réciproque

La fonction réciproque de $f(x)$ est la fonction $f^{(-1)}(x)$ telle que

$$f^{(-1)}(f(x)) = x \quad (\text{C.1})$$

Elle est définie sur l'image de $f(x)$, et donne l'antécédant x de lorsqu'elle est appliquée à $f(x)$. C'est à dire que si $y = f(x)$ alors $f^{(-1)}(y) = x$. En utilisant la dérivée des fonctions composées, on obtient la dérivée de la fonction réciproque en dérivant l'Eq. (C.1). En dérivant le membre de gauche de l'Eq. (C.1), on obtient :

$$\left. \frac{d}{dx} [f^{(-1)}(f(x))] \right|_x = \left. \frac{df}{dx} \right|_x \left. \frac{df^{(-1)}}{dy} \right|_{y=f(x)}.$$

Par ailleurs, en dérivant le membre de droite de l'Eq. (C.1), on obtient $\left. \frac{d}{dx} [f^{(-1)}(f(x))] \right|_x = \left. \frac{dx}{dx} \right|_x = 1$, donc :

$$\left. \frac{d}{dx} [f^{(-1)}(f(x))] \right|_x = \left. \frac{df}{dx} \right|_x \left. \frac{df^{(-1)}}{dy} \right|_{y=f(x)} = 1 \Rightarrow \left. \frac{df^{(-1)}}{dy} \right|_{y=f(x)} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_x},$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\left. \frac{df^{(-1)}}{dy} \right|_y = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=f^{(-1)}(y)}}.$$

Exemple : Calculons la dérivée de la fonction logarithme népérien $f(x) = \ln(x)$, sachant que $\ln(x)$ est la fonction réciproque de la fonction exponentielle $\exp(x)$. La dérivée de la fonction exponentielle étant la fonction exponentielle elle-même.

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{\left. \frac{d \exp(u)}{du} \right|_{u=\ln(x)}} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

C.3.5 Dérivées de fonctions usuelles

Functions	Dérivées
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Remarques : Les deux premières lignes de ce tableau sont en fait des cas particuliers de la troisième ligne avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -1$, respectivement.

La dérivée des fonctions trigonométriques, $\sin(x)$, $\cos(x)$ peuvent s'obtenir à partir de la dérivée de la fonction $\exp(x)$ en utilisant les nombres complexes. En effet :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \operatorname{Re} \left[e^{ix} \right] = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin(x) &= \operatorname{Im} \left[e^{ix} \right] = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \end{aligned}$$

En appliquant la dérivée des fonctions composées à la fonction $\exp(ix) = e^{ix}$, on obtient :

$$\frac{d}{dx} e^{ix} = ie^{ix} \text{ et } \frac{d}{dx} e^{-ix} = -ie^{ix}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos(x) &= \frac{d}{dx} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{ie^{ix} - ie^{-ix}}{2} = -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\sin(x) \\ \frac{d}{dx} \sin(x) &= \frac{d}{dx} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{ie^{ix} + ie^{-ix}}{2} = \cos(x). \end{aligned}$$

En utilisant la dérivée des fonctions composées, on obtient les règles utiles suivantes :

$$\frac{d}{dx}f(ax) = a \left. \frac{df}{du} \right|_{u=ax}; \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-2} \frac{df}{dx}; \quad \frac{d}{dx} [f(x)]^\alpha = \alpha [f(x)]^{\alpha-1} \frac{df}{dx}.$$

D

Intégration des fonctions

D.1 Intégrale de Riemann – Définitions et propriétés

D.1.1 Définition de l'intégrale de Riemann

Soit f une fonction bornée définie sur l'intervalle $[a, b]$. Riemann a proposé la définition suivante de « l'intégrale de la fonction f sur $[a, b]$ » :

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon f(a + k\varepsilon) \quad \text{où } \varepsilon = \frac{b-a}{N}. \quad (\text{D.1})$$

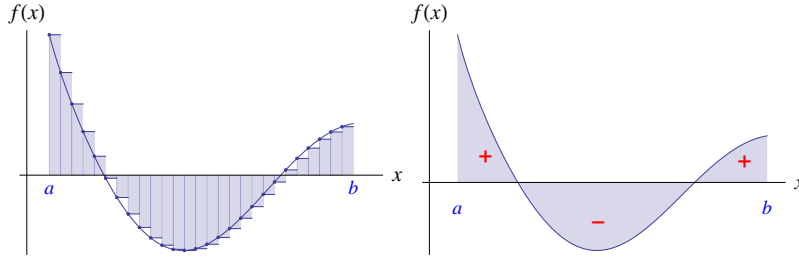


FIGURE D.1: À gauche : représentation graphique de la somme $\varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} f(a + k\varepsilon)$. À droite : à la limite $N \rightarrow \infty$, la somme devient l'intégrale qui représente donc l'aire algébrique entre la courbe et l'axe.

Interprétation géométrique : Le membre de droite de l'équation (D.1) (avant limite) représente l'aire algébrique des rectangles (Fig. D.1.g). En considérant la limite $N \rightarrow \infty$, on obtient donc l'aire algébrique entre la courbe et l'axe (Fig. D.1.d).

Vocabulaire : Le symbole \int rappelle celui de la somme \sum , cependant, au lieu d'effectuer la somme d'un nombre fini de termes indicés par l'indice discret $k \in \{0, \dots, N-1\}$, la somme est effectuée à l'aide de l'indice variant continûment $x \in [a, b]$.

- La fonction sous l'intégrale, ici $f(x)$, est appelée « l'intégrande ».
- a et b sont les « bornes d'intégration ».
- x est la *variable d'intégration*. C'est une « variable muette » (tout comme l'indice k de la somme), par opposition aux paramètres dont dépend la somme (comme a et b). Son nom n'a pas d'importance : $\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dt f(t)$.
- Le symbole dx est un *accroissement infinitésimal*. Il joue le rôle analogue au ε (placé dans la somme pour souligner l'analogie) : $dx f(x)$ représente l'aire d'un « rectangle » de largeur infinitésimale dx et de hauteur $f(x)$.

Généralisation de la définition : La définition (D.1) peut être étendue au cas où les intervalles n'ont pas la même largeur. Considérons une partition de l'intervalle $[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{N-1}, x_N]$, où $x_0 = a$ et $x_N = b$, telle que $\delta x_n \stackrel{\text{def}}{=} x_{n+1} - x_n \rightarrow 0 \forall n$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

On peut définir l'intégrale de Riemann comme

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k f(x_k), \quad (\text{D.2})$$

écriture qui souligne davantage l'analogie entre somme et intégrale.

Extensions de la définition : On peut étendre la définition de l'intégrale de Riemann au cas où :

- La fonction n'est pas bornée sur $[a, b]$. Par exemple elle diverge sur le bord $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$. Si la divergence n'est pas trop forte, l'intégrale est finie. Pour établir le lien avec la définition (D.1) on écrit

$$\text{si } f(b) = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b dx f(x) = \lim_{x_0 \rightarrow b^-} \underbrace{\int_a^{x_0} dx f(x)}_{\text{déf. (D.1)}} \quad (\text{D.3})$$

- De même on peut considérer un intervalle dont une borne est envoyée à l'infini :

$$\int_a^\infty dx f(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b dx f(x) \quad (\text{D.4})$$

- Lorsque le résultat d'une telle limite est fini, Éq. (D.3) ou Éq. (D.4), on dira que « l'intégrale est convergente », on écrira par exemple $\int_a^\infty dx f(x) < \infty$. À l'inverse, si la limite est infinie on dira que « l'intégrale est divergente » et on écrira $\int_a^\infty dx f(x) = \infty$.

D.1.2 Propriétés :

Énonçons quelques propriétés élémentaires qui découlent de la définition (D.1).

- Inversion des bornes :

$$\int_a^b dx f(x) = - \int_b^a dx f(x) \quad (\text{D.5})$$

- Relation de Chasles

$$\int_a^c dx f(x) = \int_a^b dx f(x) + \int_b^c dx f(x) \quad (\text{D.6})$$

- Linéarité : soient deux fonctions f et g bornées et deux nombres réels (ou complexes) λ et μ :

$$\int_a^b dx [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda \int_a^b dx f(x) + \mu \int_a^b dx g(x) \quad (\text{D.7})$$

- Analyse dimensionnelle (pour les physiciens)

$$\left[\int dx f(x) \right] = [x] [f(x)] \quad (\text{D.8})$$

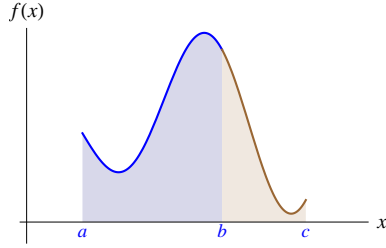


FIGURE D.2: Illustration de la relation de Chasles D.6.

D.1.3 Relation avec la dérivation

La relation avec la dérivation découle de la définition. Définissons la fonction

$$F(x) = \int_a^x dt f(t) \quad (\text{D.9})$$

appelée « *une primitive de f* » (notons qu'il faut faire bien attention à donner un nom différent à la variable « muette » d'intégration, t , et aux autres variables « parlantes », ici x , afin d'éviter les confusions). On utilise la relation de Chasles

$$F(x + \varepsilon) - F(x) = \int_x^{x+\varepsilon} dt f(t) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\simeq} \varepsilon f(x); \quad (\text{D.10})$$

l'approximation découle de ce que $f(x)$ est quasiment constante sur l'intervalle $[x, x + \varepsilon]$ de largeur « petite ». On divise par ε : $[F(x + \varepsilon) - F(x)] / \varepsilon$. À la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ on retrouve la dérivée :

$$F'(x) = f(x). \quad (\text{D.11})$$

Autrement dit, les opérations de dérivation et d'intégration sont inverses :

$$\boxed{f(x) \xrightleftharpoons[\int dx]{\frac{d}{dx}} f'(x)} \quad (\text{D.12})$$

Remarque : une primitive n'est pas unique. Soient F_1 et F_2 deux primitives de f . Alors $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$, i.e. F_1 et F_2 diffèrent par une constante.

D.2 Calcul des intégrales

Dans cette partie, nous passons en revue les méthodes de base qui permettent de calculer des intégrales.

D.2.1 Identification d'une primitive

Le paragraphe précédent nous fournit un moyen *pratique* de calculer les intégrales. Si on connaît une primitive F de f (i.e. « deviner » une

fonction F telle que $F' = f$), alors

$$\int_a^b dt f(t) = \left[F(t) \right]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a). \quad (\text{D.13})$$

Exemple : Considérons $I = \int_0^\pi dt \sin(t)$. On se rappelle que $\cos' = -\sin$ et donc $I = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$.

Quelques primitives de fonctions élémentaires : Il faut donc garder en tête quelques primitives des fonctions élémentaires.

$f(x)$	$F(x) = \int dx f(x)$
x^a pour $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$1/x$	$\ln x $
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) $
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$-\ln \cos(x) $
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$	$\ln \cosh(x)$

On a toutefois souvent à considérer des intégrales de fonctions plus compliquées. Dans ce cas, on doit essayer différentes techniques (i.e. des « trucs »). Nous en décrivons quelques uns.

D.2.2 Changement de variable

Soit $u(x)$ une fonction *bijective* sur $[a, b]$. On a

$$\int_a^b dx u'(x) f(u(x)) = \int_{u(a)}^{u(b)} du f(u) \quad (\text{D.14})$$

La propriété devient évidente si on utilise la notation $u'(x) = \frac{du}{dx}$. Pour effectuer le changement de variable, il est commode d'écrire $dx u'(x) = dx \frac{du(x)}{dx} = du(x)$ (c'est une « différentielle »).

Exemple 1 :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} d\theta \tan \theta &= \int_0^{\pi/4} d\theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \int_0^{\pi/4} \frac{-d(\cos \theta)}{\cos \theta} \\ &= - \int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{u} = \left[\ln |u| \right]_{1/\sqrt{2}}^1 = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Exemple 2 : Avec de l'usage on peut deviner quel changement de variable est naturel. Par exemple

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

D.2.3 Intégration par parties

On a très souvent à considérer des intégrales de produits de fonctions, $\int dx f(x) g(x)$. Dans certains cas il est utile d'utiliser « l'intégration par parties », consistant à intégrer f et dériver g .

Partons de la formule bien connue $(Fg)' = F'g + Fg'$ et passons un des termes dans l'autre membre : $F'g = (Fg)' - Fg'$. L'intégration de cette dernière équation sur $[a, b]$ nous donne la formule très utile :

$$\boxed{\int_a^b dx f(x) g(x) = \left[F(x) g(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b dx F(x) g'(x)} \quad (\text{D.15})$$

Exemple :

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x = \left[-e^{-x} x \right]_0^\infty - \int_0^\infty dx (-e^{-x}) = 1$$

D.2.4 Dérivation par rapport à un paramètre sous le signe \int

Il est parfois utile d'utiliser

$$\int_a^b dx \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_a^b dx f(x, \lambda) \quad (\text{D.16})$$

(l'inversion de la dérivation et de l'intégration est licite dans la plupart des cas, sauf cas pathologique). Ce type de formule permet parfois de simplifier l'intégrande.

Exemple :

$$J(a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty dt t^n e^{-at} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} \int_0^\infty dt e^{-at} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{1}{a} = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

où $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.