Rappel de cours

Travail

- La composante de la force d'un point M, $\vec{F}(M)$ sur l'axe $\mathcal{O}_x$ est donnée par le produit scalaire $f(x) = \vec{F}(M).\vec{i}$.
- Le travail d'une force $\vec{F}$ sur un segment $\vec{AB}$ est donné par :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{AB} = \int_{A\to B} \vec{F}.\vec{i}dx = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx$$

- On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point A et B.

$$\forall A, B, C,\ W_{A\to B}\vec{F} = W_{A\to C}\vec{F} + W_{C\to B}\vec{F}$$

- Dans le cas où le chemin est rectiligne, si une force est conservatrice alors l'*énergie potentielle* associée à la force $\vec{F}$ est notée $E_p(x)$ est définie par :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{A\to B} \vec{F}.\vec{i}dx = E_p(x_b) - E_p(x_a)$$

.

- Le travail du poids $\vec{P} = m\vec{g}$ sur le segment $\vec{AB}$ est $W_{A\to B}(\vec{P}) = -mg(z_b - z_a) = -mgh$.
- Le travail de la force de rappel élastique d'un ressort de raideur k, $\vec{F} = -k.x\vec{i}$ est $W_{A\to B}(\vec{F}) = -\frac{1}{2}k(x_a^2 - x_b^2)$.

Énergie

- L'énergie mécanique d'un système $E_m = E_c + E_p$ avec E_c l'énergie cinétique qui dépend de la masse et de la norme de la vitesse du système physique étudié et de l'énergie potentielle E_p qui correspond aux forces exercées sur le système.
- L'énergie cinétique du système $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
- L'énergie potentielle qui correspond à l'ensemble des forces conservatives qui s'exercent sur le systéme, $E_p(B) - E_p(A) = W_{A\to B}(\vec{F}_{conservatives})$
- $E_m(B) - E_m(A) = W_{A\to B}(\vec{F}_{non\, conservatives})$

Puissance

- La puissance P représente l'énergie transférée uniformement (ie. le travail) pendant une unité de temps, $P = \frac{W}{\Delta t}$.
- $1\,W = 1\,J.s^{-1} = 1\,N.m.s^{-1} = 1\,kg.m^2.s^{-3}$

Coordonnées polaires

Polaire vers cartésienne	Cartésienne vers polaire
$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$

- le vecteur dans le repère $(\vec{i}, \vec{j})$ est $\vec{u}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ et $\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$
- Le vecteur position d'un point est $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{u}_\rho(t)$
- Le vecteur vitesse est $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta$

Exo I

I.1.a

$$\begin{cases} x = 1\cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,cm \\ y = 1\sin(30) = \frac{1}{2}\,cm \end{cases}$$

I.1.b

$$\begin{cases} x = 20\cos(-30) = 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,mm \\ y = 20\sin(-30) = -20\frac{1}{2} = -10\,mm \end{cases}$$

I.1.c

$$\begin{cases} x = 8\cos(120) = -8\frac{1}{2} = 4\,mm \\ y = 8\sin(120) = 8\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,mm \end{cases}$$

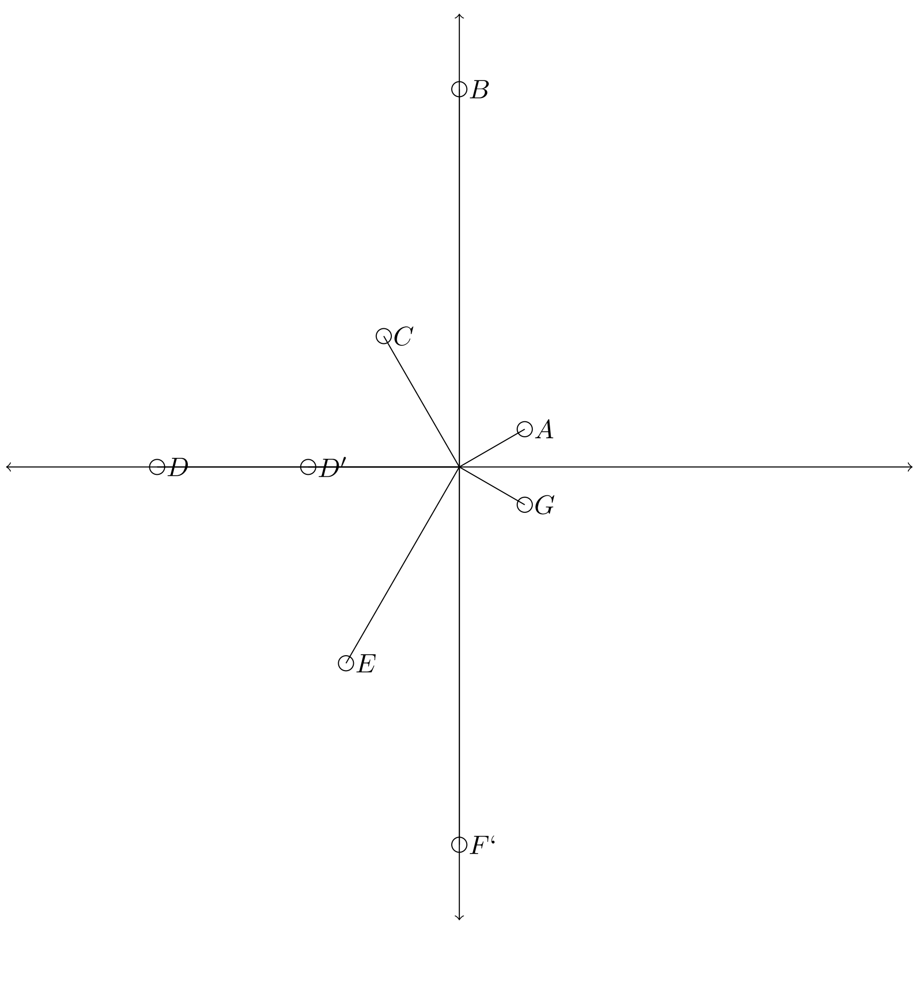
I.1.d

$$\begin{cases} x = 3\cos(120) = -3\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}\,cm \\ y = 3\sin(120) = -3\frac{\sqrt{3}}{2}\,cm \end{cases}$$

I.2.a

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}\,cm \\ \theta = \arctan(\frac{5}{3}) = 90 - \arctan(\frac{3}{5}) = 90 - 31 = 59^\circ \end{cases}$$

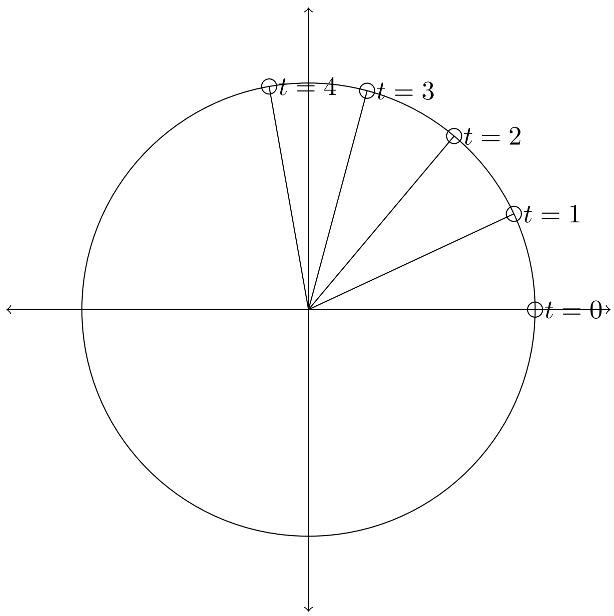
Exo II



Exo III

III.1

$$\rho(t) = \rho_0,\ \theta = \omega t$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = 0, \dot{\theta}(t) = \omega$$

La vitesse en coordonnnées polaires

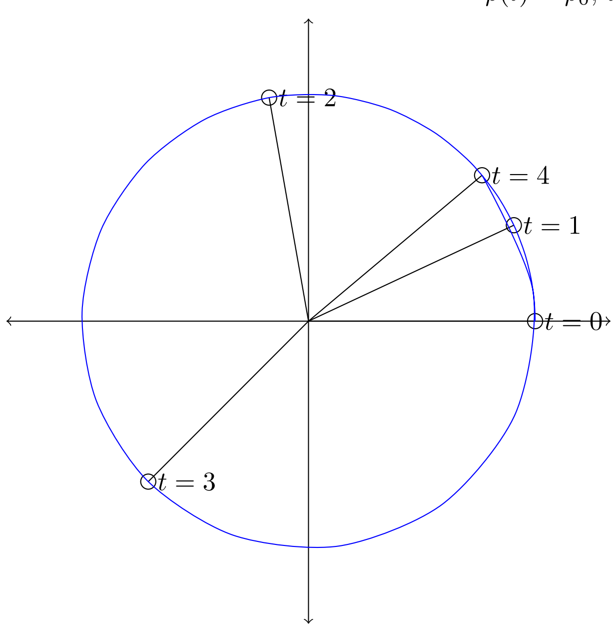
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = 0\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnnées cartésiennes

$$\vec{v} = 0\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta = 0(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \rho_0\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \rho_0\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

III.2

$$\rho(t) = \rho_0,\ \theta = \alpha t^2$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = 0,\ \dot{\theta}(t) = 2\alpha t$$

La vitesse en coordonnnées polaires

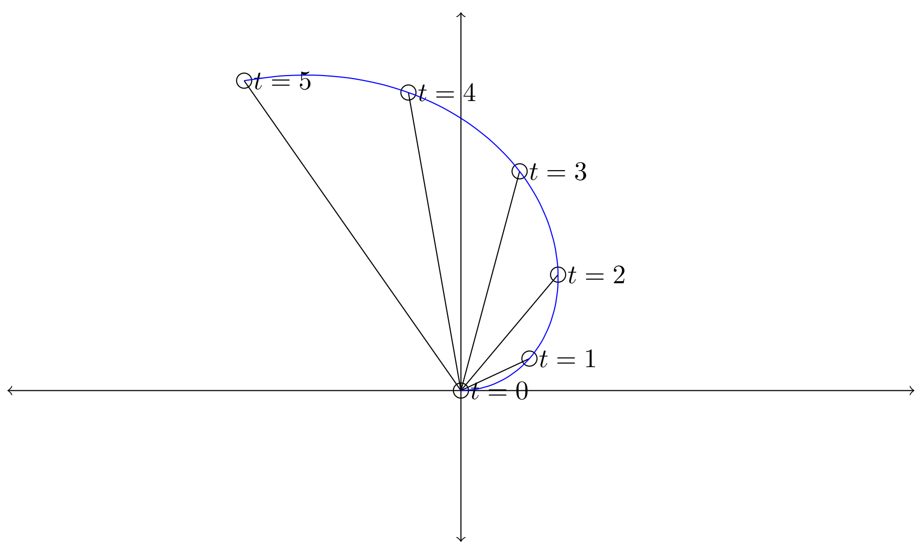
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = 0\vec{u}_\rho + \rho_0 2\alpha t\vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnnées cartésiennes

$$\vec{v} = 0\vec{u}_\rho + \rho_0 2\alpha t\vec{u}_\theta = 0(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \rho_0 2\alpha t(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \rho_0 2\alpha t(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

III.3

$$\rho(t) = \alpha t,\ \theta = \omega t$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = \alpha, \dot{\theta}(t) = \omega$$

La vitesse en coordonnnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho + \alpha t\omega\vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnnées cartésiennes

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta = \alpha(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \alpha t\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = (\alpha\cos\theta - \alpha t\omega\sin\theta)\vec{i} + ((\alpha\sin\theta + \alpha t\omega\cos\theta))\vec{j}$$