Rappel de cours

Definition 1. La relation xRy est une relation d'équivalence sur l'ensemble E ssi:

- $\forall x \in E, xRx$
- $\forall x, y \in E, xRy \Rightarrow yRx$
- $\forall x, y, z \in E, xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Exercice 1

Exercice 1.1

La relation R n'est pas une relation d'équivalence car $(4,4) \notin R$.
Si on ajoute le couple $(4,4)$ à la relation R alors R est une relation d'équivalence car

- $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in R$
- $(1,2) \Rightarrow (2,1),(3,4) \Rightarrow (4,3)$
- $(1,1) \wedge (1,2) \Rightarrow (1,2),(1,2) \wedge (2,1) \Rightarrow (1,1),(1,2) \wedge (2,2) \Rightarrow (1,2),\ldots$

Exercice 1.2

La liste des classes d'équivalence est $\{(1,1),(1,2),2,1),2,2)\},\{(3,3),(3,4),4,3),(4,4)\}$.

Exercice 2

Exercice 2.1

- $\forall a,b \in \mathbb{R},(a,b)R(a,b) \Leftrightarrow a^2+b^2=a^2+b^2$ est vrai
- $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R},((a,b)R(c,d) \Rightarrow (c,d)R(a,b)) \Leftrightarrow (a^2+b^2=c^2+d^2 \Rightarrow c^2+d^2=a^2+b^2)$ est vrai car l'égalité est symetrique
- $\forall a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R},((a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \Rightarrow (a,b)R(e,f)) \Leftrightarrow (a^2+b^2=c^2+d^2 \wedge c^2+d^2=e^2+f^2 \Rightarrow a^2+b^2=e^2+f^2)$ est vrai car l'égalit'e est transitive

Exercice 2.2

La relation R est l'ensemble des points du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$.

Exercice 2.3

Pas compris $|R^2 \setminus \mathbb{R}$.

Exercice 3

Exercice 3.1

Prenons $x=a+i.b$, $y=c+i.d$ et $z=e+i.f$

- $\forall x \in \mathbb{C},xRx \Leftrightarrow |x|=|x| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$ est vrai
- $\forall x,y \in \mathbb{C},(xRy \Rightarrow yRx) \Leftrightarrow (|x|=|y| \Rightarrow |y|=|x|) \Leftrightarrow (\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{c^2+d^2} \Rightarrow \sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{a^2+b^2})$ est vrai car l'égalité est symetrique
- $\forall x,y,z \in \mathbb{C},(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz) \Leftrightarrow (|x|=|y| \wedge |y|=|z| \Rightarrow |x|=|z|) \Leftrightarrow (\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{c^2+d^2} \wedge \sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{e^2+f^2} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{e^2+f^2})$ est vrai car l'égalit'e est transitive

Exercice 3.2

- $\forall x \in \mathbb{R},xRx \Leftrightarrow e^x=e^x$ est vrai
- $\forall x,y \in \mathbb{R},(xRy \Rightarrow yRx) \Leftrightarrow (e^x=e^y \Rightarrow e^y=e^x)$ est vrai car l'égalité est symetrique
- $\forall x,y,z \in \mathbb{R},(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz) \Leftrightarrow (e^x=e^y \wedge e^y=e^z \Rightarrow e^x=e^z)$ est vrai car l'égalit'e est transitive

Exercice 4

Exercice 4.1

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a,b)R(a,b) \Leftrightarrow ab = ba$ est vrai car la multiplication est commutative
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, ((a,b)R(c,d) \Rightarrow (c,d)R(a,b)) \Leftrightarrow (ad = bc \Rightarrow cb = da)$ est vrai car l'égalité est symetrique et la multiplication est commutative
- $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}, ((a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \Rightarrow (a,b)R(e,f)) \Leftrightarrow (ad = bc \wedge cf = de \Rightarrow af = be)$ est vrai car $a = \frac{bc}{d}$, donc $af = \frac{bc}{d}f$ mais $cf = de$ donc $af = \frac{bde}{d} = be$.

Exercice 4.2

$(p,q)R(x,y) \Leftrightarrow py = qx$ avec (p,q) premiers entre eux. Le seul couple est $x = np$ et $y = nq$. Donc la relation représente les couples $\forall nin\mathbb{N}^*, (np, nq)$ avec (p,q) premiers entre eux.

Exercice 5

Exercice 5.1

- $\forall P \in \mathbb{R}, PRP \Leftrightarrow P - P$ est un multiple de X est vrai car 0 est un multiple de tous les nombres $(0 = 0.x)$
- $\forall P, Q \in \mathbb{R}, (PRQ \Rightarrow QRP) \Leftrightarrow (P - Q = k.X \Rightarrow Q - P = k'X)$? est vrai en prenant $k' = -k$ car $Q - P = -(P - Q) = -kX$
- $\forall P, Q, S \in \mathbb{R}, (PRQ \wedge QRS \Rightarrow PRS) \Leftrightarrow (P - Q = kX \wedge Q - S = k'X \Rightarrow P - S = k''X)$? est vrai $P - S = (P - Q) - (Q - S) = kX + k'X = (k + k')X$

Exercice 5.2

$PRP(0) = P - P(0)$ mais $P(0)$ est le polynome de degré 0, donc $P - P(0)$ est un polynome avec le degré 0 égale à 0. On peut donc le factoriser par X. Par conséquent $P - P(0) = X.k$ est un multiple de X

Exercice 5.3

En prenant par exemple, $\pi : \mathbb{Z}[X] \to Z[X], P \to P - X$, on a $\forall P \in \mathbb{Z}[X], P(0) = (P - X)(0)$ car $P - X$ ne change pas de degré 0 du polynome P.

Exercice 6

Preuve par l'absurde. Supposons $a \neq 7k_a$ (a n'est pas un multiple de 7), on a $a^2 \neq 49k_a^2$. Si $a^2 + b^2 = 7k$, $49k_a^2 + b^2 = 7k$, $b^2 = 7k - 49k_a^2 = 49(\frac{k}{7} - k_a^2)$ donc $b \neq 7\sqrt{\frac{k}{7} - k_a^2}$. Donc b n'est pas un multiple de 7. Cela ne nous amène pas loin.???

Exercice 7

Preuve par récurrence. Vrai pour $n = 0$ $(3^1 + 2^2 = 7)$. Supposons vrai pour n, $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$ est-ce que $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 7k'$

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{(2n+1)+2} + 2^{(n+2)+1} = 9.3^{2n+1} + 2.2^{n+2}$$

On a $3^{2n+1} = 7k - 2^{n+2}$ (hypothèse)

$$9.(7k - 2^{n+2}) + 2.2^{n+2} = 63k - 7.2^{n+2} = 7(9k + 2^{n+2})$$

Donc vrai en prenant $k' = 9k + 2^{n+2}$.

Exercice 8

Preuve par récurrence. pour $n=1$, on a $2^{3+3}-7-8=64-15=49$. Supposons vrai pour $49|2^{3n+3}-7n-8$ au rang n, vérifions que $49|2^{3(n+1)+3}-7(n+1)-8$

$$2^{3(n+1)+3}-7(n+1)-8=2^{3n+3+3}-7(n+1)-8=2^3.2^{3n+3}-7n-7-8=(7+1)2^{3n+3}-7n-7-8=7.2^{3n+3}-7+(2^{3n+3}-7n-8)$$
$$=7(2^{3n+3}-1)+(2^{3n+3}-7n-8)$$

On a $49|(2^{3n+3}-7n-8)$ par hypothèse de récurrence. Il reste à montrer que $49|7(2^{3n+3}-1)$ ou $7|2^{3n+3}-1$.

Preuve par récurrence, pour n=1, $2^6-1=64-1=63$ qui est divisible par 7. Supposons $7|2^{3n+3}-1$ et vérifions $7|2^{3(n+1)+3}-1$.

$$2^{3(n+1)+3}-1=2^{3n+3+3}-1=2^3.2^{3n+3}-1=(7+1).2^{3n+3}-1=7.2^{3n+3}+2^{3n+3}-1$$

On a $7|2^{3n+3}-1$ par hypothèse de récurrence. et $7|7.2^{3n+3}$. donc $\forall n\in\mathbb{N}, 7|2^{3n+3}-1$, et $\forall n\in\mathbb{N}, 49|7(2^{3n+3}-1)$, et $\forall n\in\mathbb{N}, 49|7(2^{3n+3}-1)+(2^{3n+3}-7n-8)$ et $\forall n\in\mathbb{N}, 49|2^{3n+3}-7n-8$.

La roposition est vraie.

Exercice 9

Exercice 9.1

Preuve par récurrence. Vrai pour $n=0$ ($2^3+3^1=11$). Supposons vrai pour n, $2^{6n+3}+3^{2n+1}=11k$ est-ce que $2^{6(n+1)+3}+3^{2(n+1)+1}=11k'$

$$2^{6(n+1)+3}+3^{2(n+1)+1}=2^{(6n+3)+6}+3^{2n+1+2}=2^6.2^{6n+1}+3^2.2^{2n+1}$$

On a $2^{6n+3}=11k-2^{2n+1}$ (hypothèse)

$$2^6.(11k-3^{2n+1})+3^2.3^{2n+1}=2^6.11k-2^6.3^{2n+1}+3^2.3^{2n+1}=11(2^6k+5.3^{2n+1})$$

Donc vrai en prenant $k'=2^6k+5.3^{2n+1}$.

Exercice 10

- On a $p^2-1=(p+1)(p-1)$
- p est premier donc il est impair ($p=2^n+1$). On a $(p+1)(p-1)=(2^n+2)(2^n)$. Soit $2|(p+1)$, soit $4|(p-1)$. Donc $p^2-1=2k.4k'=8(kk')$.
- p est premier donc $p \mod 3=1$ ou $p \mod 3=2$. Si $p \mod 3=1$ alors $(p+1)(p-1)=(p+1).3k=3((p+1)k)$, et Si $p \mod 3=2$ alors $(p+1)(p-1)=3k.(p-1)=3(k(p-1))$ donc $p^2-1=3k'$

3 et 8 sont premiers entre eux, et p est premier donc $p^2-1=3*8*k=24k$.
QED