Rappel de cours

Definition 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (U_n) une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I. On dit que (u_n) converge **simplement** vers f sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(U_n(x))$ converge vers $f(x)$.

Definition 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (U_n) une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I. On dit que (u_n) converge **uniformément** vers f sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n > n_0, |(U_n(x)) - f(x)| < \epsilon$$

Definition 3. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ converge **normalement** sur I si la série $\sum_{n\geq 0} ||U_n(x)||_\infty$ est convergente.

Definition 4. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ converge **normalement** sur I si la série $\sum_{n\geq 0} ||U_n(x)||_\infty$ est convergente.

Exercice 1

Exercice 1.1

Montrons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ avec $f_n(x) = e^{\frac{x}{n}}$ converge simplement pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{x}{n}} = e^0 = 1$$

La fonction $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x) = 1$.

Exercice 1.2

Montrons maintenant que $f_n(x)$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, 1]$. Il faut que $\forall\epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\epsilon \implies \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$. Calculons

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|e^{\frac{x}{n}} - 1\right| \leq \left|e^{\frac{1}{n}} - 1\right|$$

car sur $[0, 1]$, $\frac{x}{n} \leq \frac{1}{n}$.
Prenons $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = e^{\frac{1}{n}} - 1$, donc n_ϵ existe et doit eître supérieur à $\frac{1}{\ln(\epsilon+1)}$.

Exercice 1.3

Pour montrer que $f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Il faut que $\forall\epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\epsilon \implies \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$. Comme x n'est pas borné, il n'est pas possibile de trouver un $\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x}{n}$.

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Exercice 4.1

$$\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{(x-2)}+\frac{c}{(x-1)} = \frac{a(x-1)}{(x-2)^2(x-1)}+\frac{b(x-2)(x-1)}{(x-2)^2(x-1)}+\frac{c(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{a(x-1)+b(x-2)(x-1)+c(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}$$

$$= \frac{ax - a + bx^2 - bx - 2bx + 2b + cx^2 - c4x + 4c}{(x-2)^2(x-1)}$$

Donc

$$\begin{cases} b + c = 0 & x^2 \\ a - 3b - 4c = 0 & x \\ -a + 2b + 4c = 1 & x^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -c \\ a = c \\ c = 1 \end{cases}$$

Donc $a = 1, b = -1, c = 1$.

$$\frac{1}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-1)}$$

Exercice 4.2

Utilisons le développement de Taylor sur $f_3(x) = \frac{1}{(x-1)}$ au voisinage de 0. On a

$$\frac{f_3(0)}{0!} = -1$$

$$f_3'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}, \frac{f_3'(0)}{1!} = -1$$

$$f_3^{(2)}(x) = \frac{2}{(x-1)^3}, \frac{f_3^{(2)}(0)}{2!} = -1$$

$$f_3^{(3)}(x) = \frac{6}{(x-1)^4}, \frac{f_3^{(3)}(0)}{3!} = -1$$

Donc, au voisinage de 0

$$\frac{1}{(x-1)} = \sum_{n\geq 0} -x^n$$

Utilisons le développement de Taylor sur $f_2(x) = -\frac{1}{(x-2)}$ au voisinage de 0. On a

$$\frac{f_2(0)}{0!} = \frac{1}{2}$$

$$f_2'(x) = \frac{1}{(x-2)^2}, \frac{f_3'(0)}{1!} = \frac{1}{4}$$

$$f_2^{(2)}(x) = -\frac{2}{(x-2)^3}, \frac{f_3^{(2)}(0)}{2!} = \frac{1}{8}$$

$$f_2^{(3)}(x) = \frac{6}{(x-2)^4}, \frac{f_3^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{16}$$

Donc, au voisinage de 0

$$-\frac{1}{(x-2)} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} x^n$$

Utilisons le développement de Taylor sur $f_1(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ au voisinage de 0. On a

$$\frac{f_2(0)}{0!} = \frac{1}{4}$$

$$f_2'(x) = -\frac{2}{(x-2)^3}, \frac{f_3'(0)}{1!} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$f_2^{(2)}(x) = \frac{6}{(x-2)^4}, \frac{f_3^{(2)}(0)}{2!} = \frac{3}{16}$$

$$f_2^{(3)}(x) = -\frac{24}{(x-2)^5}, \frac{f_3^{(3)}(0)}{3!} = \frac{4}{32}$$

Donc, au voisinage de 0

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n$$

Donc

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-1)} = \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n + \frac{1}{2^{n+1}} x^n - x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{n+3-2^{n+2}}{2^{n+2}} x^n$$

Le rayon de convergence de $f_3(x)$ est

$$R_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{-1} = 1$$

Le rayon de convergence de $f_2(x)$ est

$$R_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}$$

Le rayon de convergence de $f_1(x)$ est

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{2^{n+3}}}{\frac{n+1}{2^{n+2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{2(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{2}$$

Le rayon de converge de $f(x)$ au voisinage de 0 est $min(R_1, R_2, R_3) = \frac{1}{2}$.

Exercice 5

QED