

Rappel de cours

Definition 1. Soit $u \rightarrow \|u\|$ une norme \mathbb{R}^m . La distance sur \mathbb{R}^m est la fonction $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $d(v, w) = \|w - v\|$. En particulier, on notera d_1 ; d_∞ ; d_2 les distances associées $\|\cdot\|_1$; $\|\cdot\|_\infty$; $\|\cdot\|_2$. Donc :

- $d_1((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) = |y_1 - x_1| + \dots + |y_m - x_m|$
- $d_\infty((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) = \max(|y_1 - x_1|, \dots, |y_m - x_m|)$
- $d_2((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2}$

Definition 2.

Exercice 3.3

Exercice 3.3.1

La fonction $f(x)$ est un assemblage de fonctions continues sur le domaine $\mathbb{R} \setminus (0,0)$. Pour que la fonction soit bornée, il faut trouver une valeur $M_1, \forall (x,y) \in \mathbb{R} \setminus (0,0), f(x,y) \leq M_1$ (majorant) et une valeur $M_2, \forall (x,y) \in \mathbb{R} \setminus (0,0), f(x,y) \geq M_2$ (minorant). Il n'existe pas de méthode, il faut essayer des valeurs. Déjà on voit que suivant les valeurs de x et y , la fonction peut être positive ($xy > 0$) ou négative ($xy < 0$), donc les bornes ne sont pas 0 et $M_1 < 0$ et $M_2 > 0$ si elles existent. Il faut ensuite essayer des combinaisons possibles comme $x = y, x \gg y, x \ll y, (x,y)$ proche des points de non continuité (ici $(0,0)$).

$x = y, f(x,y) = 1, x \gg y, f(x,y) = 0, x \ll y, f(x,y) = 0, (x,y) \approx (0,0), f(x,y)$ indéfinie. Donc essayons $M_1 = 1$.

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} \leq 1$$

$$0 \leq x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Ceci est vrai $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$, donc $M_1 = 1$ est un majorant. De même $M_2 = -1$ est un minorant. Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \setminus (0,0), -1 \leq f(x,y) \leq 1$.

Exercice 3.3.2.a

Prenons $\epsilon = 0.5$, et $(x,y) \alpha$ - proche $(0,0)$ avec $x = y$. On a $f(x,y) = 1$. On a trouvé un point α - proche de $(0,0)$ tel que $f(x,y) > \epsilon$ donc la fonction n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 3.3.2.b

$g(x,y) = xf(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ continue en $(0,0)$? Pour un ϵ donné, on cherche un α tel que si $|\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}| < \alpha$ alors $|f(x,y) - 0| < \epsilon$ (on prends 0 car on suppose que la continuité en $(0,0)$ est 0). On a $\sqrt{x^2 + y^2} < \alpha$, donc $|y| < y^2 < \alpha^2$. Et on a $|\frac{2x^2}{x^2+y^2}| < 2$. Prenons $\alpha < \sqrt{\epsilon/2}$. Donc

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| y \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \right| < \alpha^2 \cdot 2 = \epsilon$$

Exercice 3.4

Calculons $|f(A) - f(B)|$.

$$|f(A) - f(B)| = |f(x_a, y_a) - f(x_b, y_b)| = |a(x_a - x_b) + b(y_a - y_b)|$$

On a $\|A - B\|_\infty = \max(|(x_a - x_b)|, |(y_a - y_b)|)$. Prenons $K = 2|\max(a, b)|$ montrons que

$$\begin{aligned} |a(x_a - x_b) + b(y_a - y_b)| &< |\max(a, b)(x_a - x_b) + \max(a, b)(y_a - y_b)| = |\max(a, b)| \cdot |(x_a - x_b) + (y_a - y_b)| \\ &< |\max(a, b)| \cdot |2 \max(|(x_a - x_b)|, |(y_a - y_b)|)| = |2 \max(a, b)| \cdot \max(|(x_a - x_b)|, |(y_a - y_b)|) = |2 \max(a, b)| \|A - B\|_\infty \end{aligned}$$

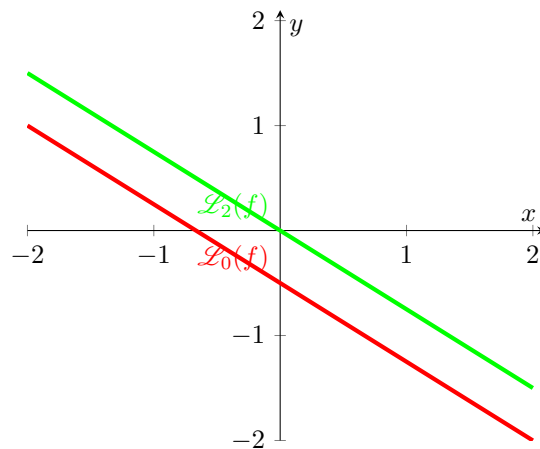
On a $\|A - B\|_2 = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$. Dans \mathbb{R}^2 , on a $\|\cdot\|_\infty < \|\cdot\|_2$ on a donc,

$$|a(x_a - x_b) + b(y_a - y_b)| < |2 \max(a, b)| \|A - B\|_\infty < |2 \max(a, b)| \|A - B\|_2$$

Exercice 3.5

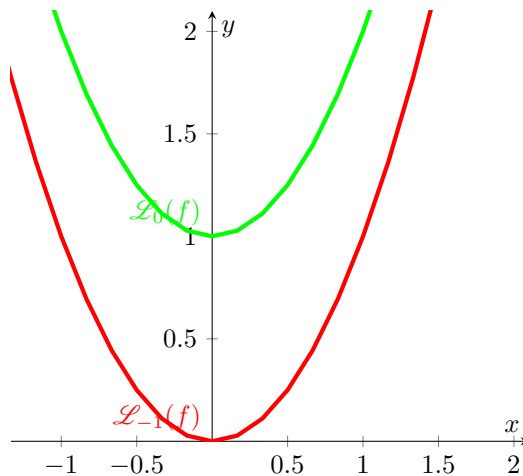
Exercice 3.5.1

On a $\mathcal{L}_0(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}$, donc cela représente la droite $y = \frac{-3x-2}{4}$.
On a $\mathcal{L}_2(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2\}$, donc cela représente la droite $y = -\frac{3}{4}x$.



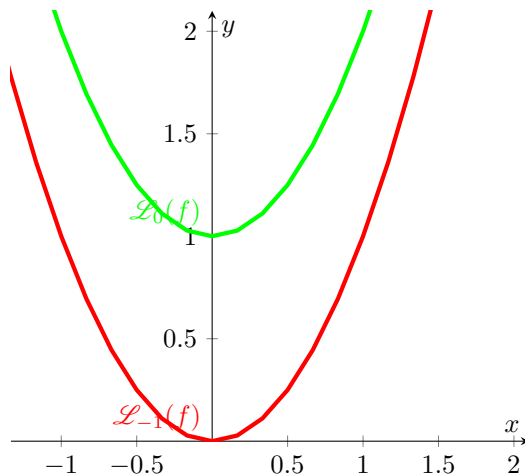
Exercice 3.5.2

On a $\mathcal{L}_{-1}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = -1\}$, donc cela représente $y = x^2$.
On a $\mathcal{L}_0(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}$, donc cela représente $y = x^2 + 1$.



Exercice 3.5.2

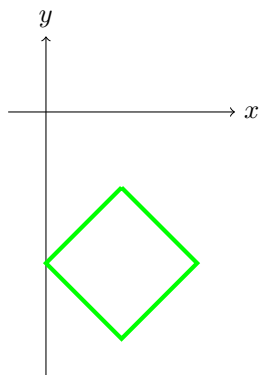
On a $\mathcal{L}_{-1}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = -1\}$, donc cela représente $y = x^2$.
On a $\mathcal{L}_0(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}$, donc cela représente $y = x^2 + 1$.



Exercice 3.5.3

On a $\mathcal{L}_4(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = |x - 1| + |y + 2| = 1\}$, cela représente 4 droites

On a $\mathcal{L}_{-5}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = |x - 1| + |y + 2| = -5\}$, ensemble vide, addition de 2 nombres positifs ne peut pas être négatif.

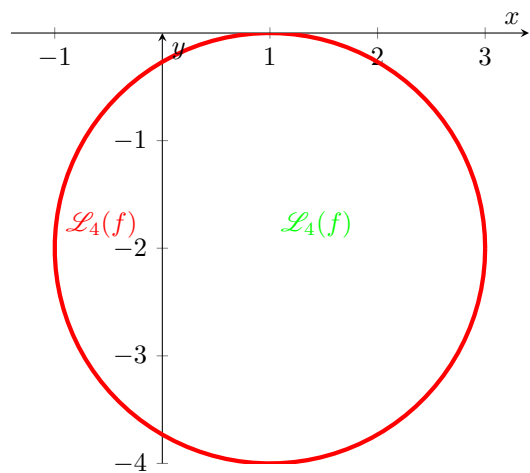


Exercice 3.5.4

On a $\mathcal{L}_4(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4\}$, donc cela représente le cercle de centre $(1, -2)$ et de rayon 2.

On a $\mathcal{L}_0(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0\}$, donc cela représente le point $(1, -2)$ (cercle de centre $(1, -2)$ et de rayon 0).

On a $\mathcal{L}_{-3}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -3\}$, ensemble vide, addition de 2 nombres positifs ne peut pas être négatif.



Exercice 3.6

Exercice 3.6.1

QED