Rappel de cours

Definition 1. Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes ssi:

- $(u_n)_{n\geq 0}$ est croisssante et $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
- $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n)_{n\geq 0} = 0$

Exercice 3

Pour que $\sum c_n z^n$ converge, il suffit de montrer, par le critère d'Abel, que $\exists M, \forall n, |\sum_{k=0}^{n} z^k| \leq M$. On a

$$|\sum_{k=0}^{n} z^k| < \sum_{k=0}^{n} |z^k| = \sum_{k=0}^{n} |z|^k == 1.\frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$$

Pb lorsque $|z| = 1$. Mais $|z| < 1$, donc $lim_{n\to\infty}|z| < 1$, donc $|\sum_{k=0}^{n} z^k| < \frac{1}{1-|z|}$. On a trouvé un $M = \frac{1}{1-|z|}$, ce qui permet de montrer que $\sum c_n z^n$ converge.

QED