Travaux Dirigés de Physique
Mécanique

L1 S1 Phys–101

Université Paris–Sud
2019–2020

Table des matières

TD 1

Dimensions - Lois d'échelle - Homogénéité

1.1 Dimensions

Exercice 1.1.1 *(★)* : On note l_i une longueur, m_i une masse et t_i un temps. Les expressions suivantes sont-elles homogènes ?

a) $m_1^2 - m_2 = m_3^3$ b) $l_1 \sin t_1 = l_2 \cos t_2$ c) $l_1 t_1^2 + \dfrac{l_2^2 t_2^3}{l_1 t_1} = \dfrac{l_1 t_1^3}{t_3}$

d) $m_1 l_1 = m_2 l_2 \exp(-t_1)$ e) $\dfrac{l_1}{l_2} = \log(\dfrac{t_1}{t_2})$ f) $m_1 \cos(\dfrac{l_1 t_2}{t_1 l_2}) = l_1 \exp(-t_1/t_2)$

Exercice 1.1.2 *(★)* : La force de gravitation entre deux masses m et M, situées à une distance r, l'une de l'autre a pour norme :

$$F = \frac{GmM}{r^2},$$

où G est la constante de gravitation universelle. Déterminer la dimension de G et son unité dans le système international.

Exercice 1.1.3 *(★★)* : Le but de cet exercice est d'évaluer la surface de la peau d'un humain adulte.

1. La masse de l'humain est $m = 70$ kg. Sachant que nous sommes constitué pratiquement que d'eau, en déduire le volume V de l'humain.
2. La hauteur de l'humain adulte est de 1.75 m. En déduire une estimation de sa surface.
3. On modélise l'humain par un cylindre de hauteur h, raffiner votre estimation.

Exercice 1.1.4 *(★)* : Justifier, en rappelant la définition du radian, qu'un angle n'a pas de dimension.

Exercice 1.1.5 *(★★)* : Un pendule simple est constitué d'une masse m suspendue à une tige de longueur ℓ, dont on peut négliger la masse. On note θ l'angle maximal que fait la tige avec la verticale, au cours de son mouvement d'oscillation. Déterminer la façon dont la période d'oscillation T varie en fonction de ℓ et de l'accélération de la pesanteur g.

Exercice 1.1.6 *(★★)* : Le débit d'absorption spécifique (DAS), aussi appelé SAR (pour specific absorption rate, en anglais), est utilisé pour caractériser la puissance électromagnétique absorbée par le corps humain lors de l'utilisation des téléphones portables. Pour un échantillon de masse donnée (typiquement 1 gramme), de conductivité σ et de masse volumique ρ, on mesure le champs électrique moyen E.

Le DAS est donné par le formule suivante :

$$\text{DAS } = \frac{\sigma E^2}{\rho}.$$

Sachant que le courant par unité de surface j engendrée par un champ E est donné par $j = \sigma E$ et que la puissance dissipée par unité de volume $\mathcal{P}$ est donnée par $\mathcal{P} = jE$, en déduire la dimension du DAS et son unité dans le système international.

Exercice 1.1.7 *(★★★)* : On veut comprendre pourquoi les grands animaux possèdent des os plus épais, en proportion de leur taille, que des animaux plus petits. On notera m la masse de l'animal considéré et L sa taille.

1. Rappelez la dimension d'une pression. Notons P_{max} la pression maximale que peut subir un os. En déduire la force maximale F_{max} que peut porter un os de section S.
2. L'animal devant supporter son propre poids, déterminer une inégalité faisant intervenir P_{max}, S, m et l'accélération de la pesanteur g. En déduire une inégalité entre P_{max}, L, g et la masse volumique ρ de l'animal.
3. Supposons que l'inégalité précédente est vérifiée pour un L donné, que se passe-t-il si on multiplie toutes les dimensions de l'animal par un même facteur ? Comment doit varier le rapport $\frac{S}{L^2}$ pour que l'animal ne soit pas écrasé par son propre poids ?

TD 2

Cinématique

2.1 Mouvements à une dimension

Exercice **2.1.1** *(★)* **Vitesse moyenne, vitesse instantanée** : On considère une particule qui se déplace le long d'un axe Ox (trajectoire rectiligne), de vecteur unitaire $\vec{i}$. On notera $\vec{v}(t) = v(t)\vec{i}$ le vecteur vitesse de la particule à chaque instant t. L'équation horaire du mouvement est donnée par $x(t) = \mu t^2 + \nu$. On donne $\mu = 5$ SI et $\nu = 3$ SI.

1. Donner les dimensions des constantes μ et ν.
2. *Rappels de mathématiques :*
   (a) Soit $f(x)$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Rappeler la définition de la dérivée $f'(x_0)$ de $f(x)$ en $x = x_0$.
   (b) On considère la fonction $f(x) = 5x^2 + 3$. Calculer $f'(2)$ en utilisant la définition que vous avez donnée à la question précédente.
   (c) Donner l'expression de la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. **Aspects formels et numériques :**
   (a) Calculer la vitesse moyenne de la particule entre l'instant $t_0 = 2.00000$ s et $t_1 = 3.00000$ s, puis entre $t_0 = 2.00000$ s et $t_1 = 2.10000$ s puis entre $t_0 = 2.00000$ s et $t_2 = 2.00100$ s et finalement entre $t_0 = 2.00000$ s et $t_3 = 2.00001$ s. On gardera les cinq chiffres significatifs.
   (b) Donner l'expression de la composante de la vitesse instantanée $v(t)$. En déduire la valeur de la vitesse à l'instant $t = t_0$.
   (c) Comparer les valeurs numériques obtenues pour la vitesse moyenne entre t_0 et $t_0 + \Delta t$ quand Δt varie entre 1 s et 10^{-5} s, et la valeur de $v(t)$ quand $t = t_0$. Conclure.
4. **Aspects graphiques :**
   (a) *Rappels de mathématiques :* Donner l'équation de la droite de coefficient directeur $a = 20$ et passant par le point $A = (2, 23)$.
   (b) Le graphe de la fonction $x(t) = 5t^2 + 3$ est représenté sur la figure 2.1, avec x exprimé en mètres et le temps t en secondes. Tracer la tangente à la courbe en t_0. Interpréter graphiquement les résultats trouvés précédemment.

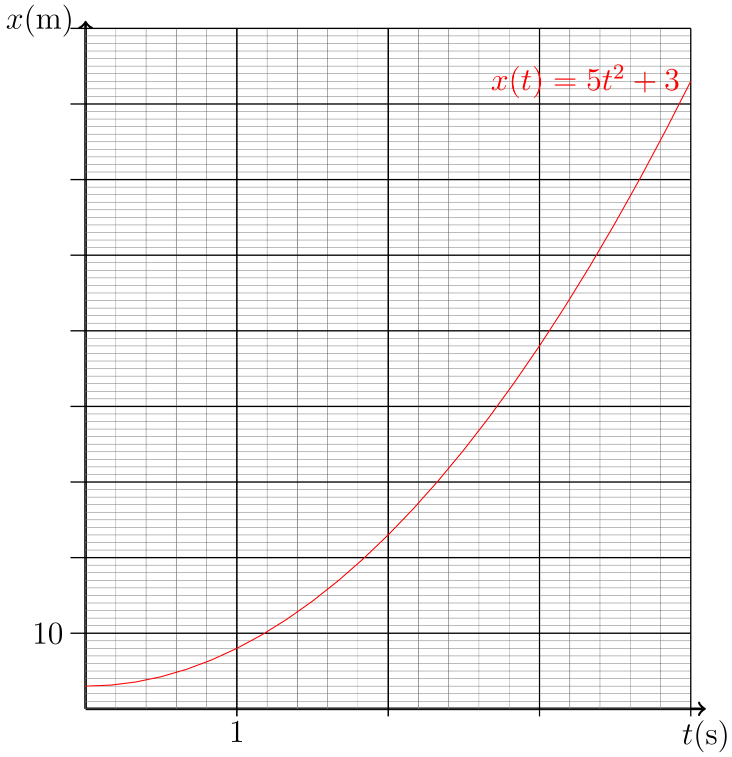


FIGURE 2.1 – Graphe de $x(t) = 5t^2 + 3$

Exercice 2.1.2 *(★)* : Un point mobile M peut se déplacer suivant une trajectoire rectiligne le long d'un axe Ox. On enregistre $a(t)$ la composante de son vecteur accélération sur l'axe Ox en fonction du temps et on obtient le résultat de la figure 2.2. Le mobile part de l'origine sans vitesse initiale. On note $v(t)$ la composante de la vitesse sur l'axe Ox. A chaque instant t, on repère la position du point M par son abscisse $x(t)$ sur l'axe Ox.

1. *Rappels de mathématiques :*
   (a) Rappeler la définition d'une primitive $F(x)$ d'une fonction $f(x)$.
   (b) Soit $f(x) = C$ où C est une constante. Donner les expressions de toutes les primitives de f.
   (c) Soit $g(x) = Cx$, où C est une constante. Donner les expressions de toutes les primitives de la fonction g.
2. On commence par étudier le mouvement entre $t = 0$ et $t = 2$ secondes. Etablir l'expression de l'évolution de la vitesse $v(t)$ du mobile en fonction du temps t (on supposera que $v(t)$ est une fonction continue du temps). Même question pour la position $x(t)$. Tracer l'évolution de $a(t)$, $v(t)$, $x(t)$. On pourra utiliser le papier millimétré de la page suivante.
3. Mêmes questions entre 2 et 4 secondes. (*Indication : prendre en compte des considérations de continuité*). Noter en particulier à quels instants la vitesse du mobile s'annule. Qu'en est-il du graphe $x(t)$ à ces instants-là ?
4. Quelle est la valeur de la vitesse moyenne entre 0 et 2 s ? Répondre à la question en utilisant directement le graphe représentant $v(t)$.

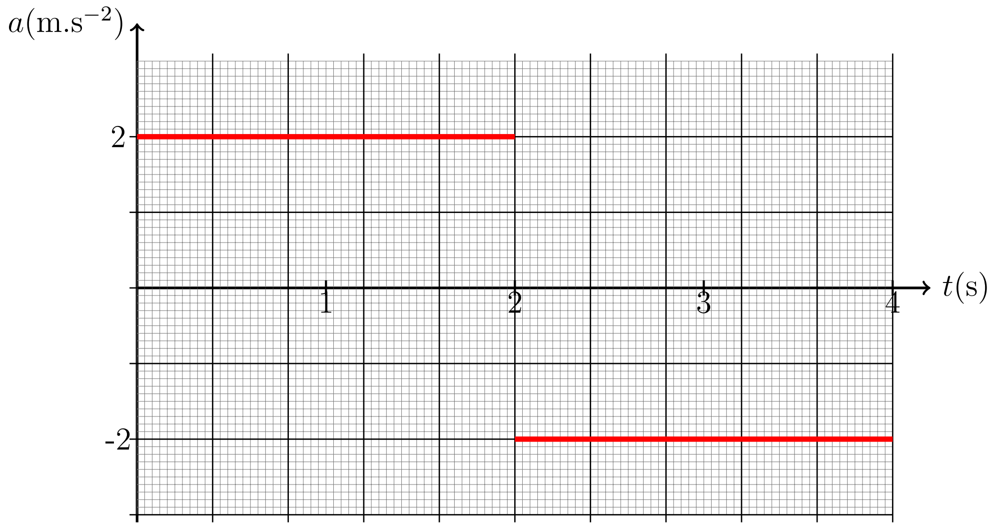


Figure 2.2 – *Accélération en fonction du temps.*

2.2 Mouvements dans un plan

Exercice 2.2.1 *(★★)* **Mouvement circulaire uniforme** : Un enfant s'amuse avec un circuit de voitures. On suppose que l'on peut assimiler le comportement d'une voiture à celui d'un point matériel M dans le plan xOy. Le mouvement de la voiture est défini par les équations paramétriques :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x(t) = -2a\sin^2\omega t \\ y(t) = 2a\sin\omega t\cos\omega t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

où on a noté $\sin^2(x) = [\sin(x)]^2$.

1. Etablir l'expression des composantes de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$, en fonction du temps t.
2. *Rappels de mathématiques :* Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan. Rappeler l'expression de la norme $\|\vec{v}\|$ en fonction de ses composantes v_1 et v_2 dans une base orthonormée.
3. Montrer que le mouvement est uniforme. C'est à dire que la norme du vecteur vitesse est constante.
4. *Rappels de mathématiques :*
   (a) Rappeler l'expression de $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
   (b) Rappeler l'expression de $\cos(2x)$ en fonction de $\sin^2(x)$.
   (c) Donner l'équation cartésienne d'un cercle de rayon R et dont le centre est le point A de coordonnées (a, b). Pour cela on pourra écrire que tout point M de coordonnées (x, y) est sur le cercle si et seulement si la distance AM est R.
5. Montrer que le mouvement de la voiture est circulaire. On précisera le centre du cercle, la valeur R du rayon.
6. En déduire l'expression de période T du mouvement.
7. On se propose de représenter la trajectoire de la voiture dans le plan xOy : noter sur un schéma la position $M_i; (i = 0, 1, 2)$ du mobile aux instants $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{4\omega}$ et $t_2 = \frac{\pi}{2\omega}$ secondes. On prendra $a = 1$ cm et $\omega = 1$ rad.s^{-1}. Représenter les vecteurs vitesse et accélération à ces différents instants.

Exercice 2.2.2 *(★★)* **Trajectoire elliptique** : Une particule M se déplace le long d'une courbe définie, dans un repère $Oxyz$, par les équations paramétriques (fonction du temps t) suivantes :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x(t) = 2a\cos 2\omega t \\ y(t) = 4a\sin 2\omega t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la trajectoire (après avoir reporté quelques points caractéristiques) dans le plan Oxy. On prendra $a = 1$ cm et $\omega = 1$ rad.s^{-1}. Montrer que la trajectoire du point M est bien une ellipse. On donnera les valeur des demi-axes de l'ellipse.

2. Quel est le temps mis par la particule pour faire un tour complet ?
3. Etablir l'expression de la vitesse et celle de l'accélération de la particule. Reporter le vecteur vitesse sur le graphe pour $t = 0$ s et $t = \frac{\pi}{2}$ s. Commenter.

Les coordonnées x, y des points M appartenant à une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b $(a > b)$ vérifient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2.3 Changement de référentiel

Exercice 2.3.1 *(★)* : Des flocons de neige tombent verticalement par rapport au sol, en parcourant 8 m par seconde. A quelle vitesse les passagers d'une voiture, roulant à 50 km.h^{-1} sur une route droite, les voient-ils frapper le pare-brise du véhicule ?

Exercice 2.3.2 *(★★)* : Un enfant lâche une bille dans la cage de l'escalier de son immeuble depuis le 4ème étage, à l'instant où l'ascenseur y passe. Son père, qui monte par l'ascenseur jusqu'au 10ème étage avec une vitesse constante, observe aussi la chute de la bille. Les grandeurs physiques suivantes sont-elles identiques pour l'enfant et pour son père :

1. la vitesse de la bille à un instant donné ?
2. le temps de chute total ?
3. l'accélération de la bille à un instant quelconque ?
4. la distance totale parcourue par la bille ?

Exercice 2.3.3 *(★★)* : Un avion s'envole de Brest vers Bâle. Sa vitesse, constante par rapport à l'air, est égale à 360 km.h^{-1} et le vent souffle du Nord-Ouest à 60 km.h^{-1}. On admettra que Brest est à l'Ouest de Bâle à environ 1000 km.

1. Quel doit être le cap suivi par le pilote ?
2. Quelle est la durée du voyage ?
3. Reprendre les question 1 et 2 pour le voyage de retour.

TD 3

Dynamique du point

3.1 Mouvements à une dimension

Exercice 3.1.1 *(★)* **Course de billes** : Deux billes sont lâchées simultanément, sans vitesse initiale, d'un point O sur deux glissières rectilignes de pentes différentes. On considère leur passage en deux points A et B situés sur la même horizontale. On néglige les frottements. Comparer en A et B :

1. *Rappels de mathématiques :*
   (a) On considère un vecteur $\vec{u}$ dans le plan Oxy,. Le vecteur $\vec{u}$ fait un angle α avec l'axe Ox. Donner les expressions des deux composantes u_x et u_y de $\vec{u}$ dans le repère Oxy, en fonction de la norme $\|\vec{u}\|$ et de l'angle α.
   (b) le vecteur $\vec{w}$ fait un angle β avec l'axe Oy. Donner les expressions des deux composantes w_x et w_y de $\vec{w}$ dans le repère Oxy, en fonction de la norme $\|\vec{w}\|$ et de l'angle β.
2. Les accélérations des deux billes.
3. Leurs temps de parcourt depuis O.
4. Leurs vitesses.

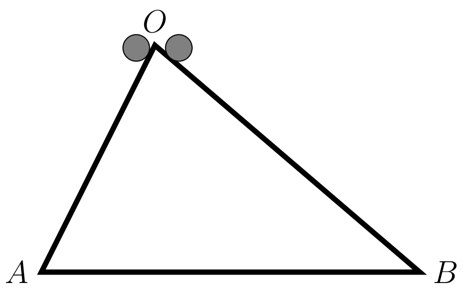


FIGURE 3.1 – *Deux billes sur deux glissières.*

Exercice 3.1.2 *(★)* **Plan incliné** : Un corps de masse m est immobile sur un plan incliné d'un angle α. On note k_s le coefficient de frottement statique et k_d le coefficient de frottement dynamique (dit aussi cinétique).

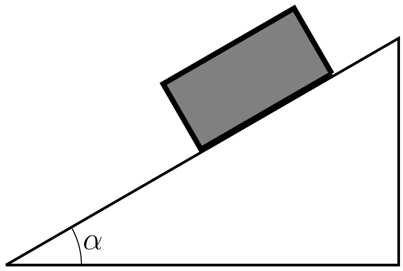


FIGURE 3.2 – *Corps de masse m sur un plan incliné.*

1. Rappeler l'inégalité qui relie les coefficients k_s et k_d.
2. Donner l'expression de l'angle limite α_l tel que pour $\alpha < \alpha_l$ le corps est à l'équilibre.
3. A l'instant $t = 0$, on change l'angle d'inclinaison α de façon soudaine, de telle sorte que $\alpha > \alpha_l$. Déterminer la distance parcourue sur le plan $x(t)$ en fonction du temps t.

Exercice 3.1.3 *(★)* **Ressort** : Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k est suspendu par une de ses extrémités au point C. Une masse m est accrochée à l'autre extrémité du ressort(voir figure 3.3).

1. **Equilibre :** Déterminer la longueur ℓ_e du ressort à l'équilibre.
2. *Rappels de mathématiques :*
   (a) Donner l'expression de la dérivée première $f'(x)$ et de la dérivée seconde $f''(x)$ de la fonction $f(x) = \sin(ax)$ où $a \in \mathbb{R}$.
   (b) Donner la solution générale (c'est à dire l'ensemble de toutes les solutions) de l'équation différentielle :
   $$f''(x) = -a^2 f(x); \quad a \in \mathbb{R}.$$
3. **Dynamique :** On étire le ressort d'une longueur y_0 à partir de sa position d'équilibre, puis on le lâche sans vitesse initiale. On note O la position de la masse quand elle est à l'équilibre, et on choisit O comme l'origine des coordonnées, pour repérer la position $y(t)$ de la masse.
   (a) Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $y(t)$.
   (b) Donner l'expression de la solution générale (l'ensemble des solutions) de cette équation différentielle. En déduire l'expression de la période T du mouvement, en fonction de k et m. Pourquoi le système est qualifié de harmonique ?
   (c) Donner l'expression de $y(t)$ compte tenu des conditions initiales.

Exercice 3.1.4 *(★)* **Parachutiste** : On considère un parachutiste qui saute d'un avion. Si on néglige les frottements qu'il subit de la part de l'air, son mouvement vertical serait uniformément accéléré. Dans la réalité, ce n'est pas le cas et les frottements jouent donc un rôle important. On donne : coefficient de viscosité de l'air $\eta = 1.18 \times 10^{-5}$ kg.m^{-1}.s^{-1}, accélération de la pesanteur $g = 9.81$ m.s^{-2}, masse volumique de l'air $\rho_a = 1.29$ kg.m^{-3}. Si certaines valeurs numériques vous paraissent manquantes, estimez les.

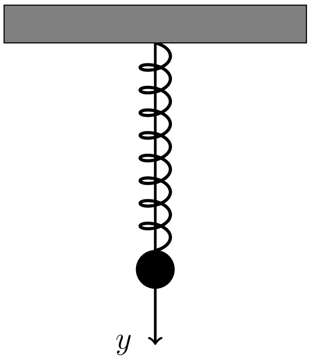


FIGURE 3.3 – *Une masse suspendue à un ressort.*

1. Si ces frottements sont de type fluide, la force de frottement exercé par l'air est de la forme

$$\vec{F} = -20\eta L\vec{v},$$

où L est la taille typique du parachutiste et $\vec{v}$ la vitesse du parachutiste. On néglige la poussée d'Archimède dans l'air. En considérant que le mouvement est vertical, montrer, que le parachutiste atteint une vitesse verticale limite. On estimera cette vitesse limite avec et sans parachute. Donner la valeur numérique de cette vitesse limite en m.s^{-1} et en km.h^{-1}. Commenter.

2. Si la vitesse devient trop élevée, la norme de la force de frottement n'est plus proportionnelle à la norme de la vitesse. Dans ce cas, on peut modéliser la force de frottement par l'expression suivante :

$$\vec{F} = -C\rho_a L^2\|\vec{v}\|\vec{v}.$$

   (a) Quelle est la dimension de C ? On prendra $C = 1$ SI dans la suite.

   (b) En considérant un mouvement purement vertical, déterminer la vitesse limite de descente du parachutiste. Comparer à celle que vous avez estimée.

Exercice 3.1.5 *(★★)* **Ressorts** : Un anneau de masse m est enfilé sur une tige horizontale de longueur ℓ, que l'on prendra comme axe Ox, porté par le vecteur unitaire $\vec{i}$. L'anneau est reliée à deux ressorts comme le montre la figure 3.4. Le premier ressort de raideur k_1 et de longueur à vide ℓ_1^o est fixé à une extrémité de la tige O. L'autre ressort, de raideur k_2 et de longueur à vide ℓ_2^o est fixé à l'autre extrémité de la tige. On supposera l'anneau ponctuel et on négligera tous les frottements.

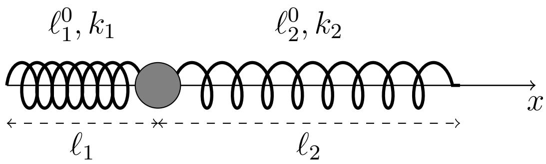


FIGURE 3.4 – *un anneau accroché à deux ressorts*

1. Déterminer les longueurs de chacun des ressorts ℓ_1^e et ℓ_2^e, lorsque l'anneau est à l'équilibre en M_e.
2. A l'instant $t = 0$, on écarte l'anneau de sa position d'équilibre pour l'amener en M_0, et on le lache sans vitesse initiale. On note $M(t)$ la position de l'anneau à l'instant t et on définit $x(t) = \left(\overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OM_e}\right) \cdot \vec{i}$. Donner l'équation différentielle satisfaite par $x(t)$.
3. Donner l'expression de $x(t)$ en fonction du temps t. En déduire la période, et l'amplitude du mouvement de l'anneau.

3.2 Mouvements à deux dimensions

Exercice 3.2.1 *(★)* **Balistique** :

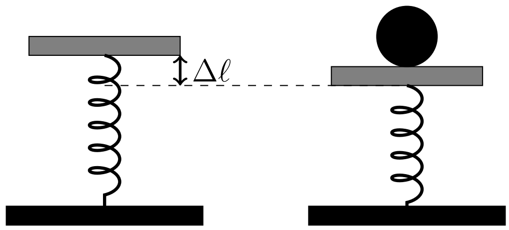
1. **Sans frottement :** A l'instant $t = 0$, on lance du point O, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, un projectile ponctuel M de masse m ; $\vec{v}_0$ fait un angle α_0 avec le plan horizontal et la projection de $\vec{v}_0$ sur ce plan est portée par Ox. On suppose que l'accélération de la pesanteur est indépendante de l'altitude z. On suppose que le mouvement est un mouvement de chute libre dans le vide.
   (a) Calculer la vitesse du projectile à l'instant t.
   (b) Quelles sont les équations horaires du mouvement $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Commentaires.
   (c) Quelle est l'équation de la trajectoire ? Pour quelle valeur de α_0 la portée est-elle maximum ?
2. **Avec frottement :** On reprend le problème précédent en supposant que le projectile est soumis à une force de freinage proportionnelle à sa vitesse $\vec{f} = -k\vec{v}$ (k étant une constante positive).
   (a) *Rappels de mathématiques :*
      i. Rappeler l'expression de la dérivée de la fonction $f(u) = e^u$ et de la fonction $g(u) = e^{-au}$, où a est une constante réelle.
      ii. Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle :
      $$f'(x) + af(x) = 0$$
      iii. Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle :
      $$f'(x) + af(x) = b$$
   (b) Établir les équations différentielles du mouvement. On écrira les équations différentielles satisfaites par les composantes (v_x, v_y, v_z) du vecteur vitesse
   (c) En déduire la vitesse à l'instant t. Que se passe-t-il quand t tend vers l'infini ?
   (d) Quelles sont les équations horaires du mouvement $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$? Montrer que lorsque t tend vers l'infini, la trajectoire admet une asymptote. Donner l'allure de cette trajectoire.
   (e) (*Facultatif*) Montrer que si le coefficient de frottement k est suffisamment faible, on retrouve les équations de la chute libre dans le vide (*faire un développement limité à l'aide de la formule de Taylor*).

3.3 Dynamique et changement de référentiel

Exercice 3.3.1 *(★)* : Je suis sur le tapis roulant de la station de RER "Les Halles" à Paris. La vitesse $v_t = 2$ m/s du tapis par rapport au sol est constante. Je lance un ballon verticalement avec une vitesse initiale $v_0 = 1$ m/s. On néglige les frottements de l'air sur le ballon.

1. Le ballon retombe-t-il
   — devant ma main ?
   — derrière ma main ?
   — dans ma main ?
   Décrire la trajectoire du ballon telle que je la vois.
2. Décrire précisément la trajectoire vue par une personne immobile à coté du tapis roulant. On donnera l'équation cartésienne de la trajectoire.

Exercice 3.3.2 *(★★)* : Une balance est constituée d'un plateau supporté par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Lorsque le plateau est vide, la balance affiche 0. Lorsqu'on dépose une masse m sur le plateau, la position d'équilibre du plateau est modifiée, le ressort est compressé d'une quantité $\Delta\ell$ et la balance affiche la valeur de la masse m.



1. Quelle est en fait la quantité physique directement mesurée par la balance ?
2. Expliquer comment en mesurant $\Delta\ell$, on peut en déduire la valeur de la masse m déposée sur le plateau ? On donnera une équation reliant m à $\Delta\ell$ et les autres paramètres du problème.
3. La balance est maintenant située dans un ascenseur. L'ascenseur étant à l'arrêt, la balance indique 70 kg. L'ascenseur monte en décrivant trois phases :
   phase 1 : Une phase d'accélération constante de 2,0 ms^{-2}.
   phase 2 : Une phase d'accélération nulle.
   phase 3 : Une phase de décélération constante de 2,0 ms^{-2}.
   (a) Quelle indication fournit balance durant chacune des phases du mouvement de l'ascenseur ? On prendra $g = 9.81$ ms^{-2}.
   (b) Après l'arrêt, le câble casse et l'ascenseur tombe en chute libre. Qu'indique alors la balance ? Expliquer pourquoi on appelle ce mouvement une *chute libre.*

TD 4

Energie

4.1 Energie – Puissance

Exercice 4.1.1 *(★)* **Télévision du XXième siècle** : Donner la valeur de la vitesse d'un électron dans un tube de télévision sachant qu'il frappe l'écran avec une énergie $E_c = 18$ keV.

Exercice 4.1.2 *(★)* **Ascenseur** : Un ascenseur monte cinq personnes pesant chacune 70 kg d'une hauteur de 25 m à vitesse constante en une minute. L'ascenseur pèse 500 kg à vide. Calculer la puissance de la force exercée par le moteur, puis la puissance du poids de l'ascenseur. Préciser leur nature (motrice/résistante). Calculer le travail du poids

Exercice 4.1.3 *(★)* **Production d'électricité** : La production d'électricité nucléaire en 2010 en France a été de 429 TWh.

1. Quelle quantité physique représente l'unité TWh.
2. Donner la valeur en Joule de l'énergie électrique nucléaire produite en 2010.
3. En France, 58 réacteurs nucléaires sont en service. Quelle est, en moyenne, la puissance électrique délivrée par réacteur nucléaire.

4.2 Travail d'une force – Théorème de l'énergie cinétique

Exercice 4.2.1 *(★)* **Force constante** : Un corps de masse m est astreint à se déplacer sans frottement en ligne droite. Il possède une vitesse initiale $\vec{v}_0$. Une force constante $\vec{F}$, colinéaire à $\vec{v}_0$ et de même sens que $\vec{v}_0$, agit sur ce corps pendant un temps T.

1. Calculer le travail accompli par la force.
2. Quel est l'accroissement de l'énergie cinétique ? Donner l'énergie cinétique finale.
3. Calculer la puissance instantanée puis la puissance moyenne développée. Illustrer ces deux quantités en traçant la puissance instantanée en fonction du temps.
   AN : $\|\overrightarrow{F}\| = 100$ N, $T = 10$ s, $m = 1$ kg et $\|\vec{v}_0\| = 2$ m/s.

Exercice 4.2.2 *(★)* **Frottement** : Un point matériel M, de masse m se déplace en frottant sur un rail rectiligne et horizontal. La norme de la force de frottement solide est constante, égale à $\|\vec{F}\| = kmg$, où k est le coefficient de frottement solide et g l'accélération de la pesanteur. La position du point est repérée par son abscisse x. A $t = 0$, M est en $x = 0$ et il est lancé avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$, où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire dans la direction du rail.

1. La force de frottement est-elle conservative ?
2. Calculer le travail effectué par la force de frottement lorsque M s'est déplacé d'une distance x.
3. En déduire la vitesse de M en fonction de x.
4. M s'arrête-t-il ? Si oui, en quel point ?

Exercice 4.2.3 *(★★)* **Traîneau** : On lâche un traîneau au sommet C d'une pente inclinée, faisant un angle β avec l'horizontale. La piste étant enneigée et le sol durci par le gel, la réaction du plan incliné comporte une composante normale $\vec{R}$ et une force de frottement $\vec{f}$ parallèle au plan incliné.

1. **Statique:**
   On suppose que le frottement est suffisant pour que le traîneau reste immobile sur la pente inclinée. On rappelle que le coefficient de *frottement statique* k_s est défini par :
   $$k_s = \frac{\|\overrightarrow{f_{\max}}\|}{\|\vec{R}\|} \tag{4.1}$$
   où $\|\overrightarrow{f_{\max}}\|$ est la norme maximale de la force de frottement $\vec{f}$ que le contact peut fournir tout en maintenant le traîneau immobile.
   (a) Exprimer les normes de $\vec{f}$ et de $\vec{R}$ en fonction de m, β et l'accélération de la pesanteur g.
   (b) En déduire une relation entre le coefficient de frottement statique k_s et l'angle β pour que le traîneau se mette en mouvement.
   (c) A.N. : vérifier que cette relation est bien satisfaite avec $k_s = 0.1$ (frottement métal sur glace) et $\beta = 60°$.
2. **Dynamique:**
   Le traîneau est maintenant en mouvement, on note $\vec{f'}$ la force de frottement dynamique. Il termine en D son mouvement sur la piste inclinée puis se déplace sur une piste horizontale, de même nature que la piste CD, jusqu'à son arrêt au point E. On note $\ell = CD$ et $\ell' = DE$ et k_d le coefficient de frottement dynamique.
   (a) Calculer le travail W_{CD} de la résultante des forces appliquées au traîneau sur le trajet incliné CD. On exprimera W_{CD} en fonction de k_d, ℓ, β, m et g.
   (b) Calculer le travail W_{DE} de la résultante des forces appliquées au traîneau sur le trajet horizontal DE. On exprimera W_{DE} en fonction de k_d, ℓ', m et g.
   (c) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer k_d en fonction du rapport $r = \frac{\ell'}{\ell}$ et de β.
   (d) A.N : calculer ℓ' sachant que $\ell = 5$ m, $k_d = 0.05$ et $\beta = 60°$.

4.3 Energie potentielle

Exercice 4.3.1 *(★)* **Energie potentielle gravitationnelle** : On considère un objet de masse m soumis au champ de gravitation terrestre (on notera M la masse de la terre).

1. Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}_G$ à l'altitude h.
2. *Rappel de mathématiques :* Donner l'expression du développement limité au second ordre de la fonction $f(x) = (1+x)^n$, dans le voisinage de zéro.
3. Si $h \ll R_T$, le rayon terrestre, donner une approximation de la force $\vec{F}_G$. Déduire l'énergie potentielle gravitationnelle à petite altitude. Exprimer g en fonction de G, M et R_T.
4. *Rappels de mathématiques :* Donner l'expression des primitives de la fonction $f(x) = \frac{K}{x^2}$.
5. Donner l'expression générale de l'énergie potentielle gravitationnelle pour une hauteur h quelconque.

Exercice 4.3.2 *(★)* **Energie potentielle élastique** : Une masse m se déplaçant horizontalement sur un axe, que l'on appelle Ox, est attachée à l'extrémité d'un ressort. On repère la position de la masse par son abcisse $x(t)$. On choisit l'origine des abcissses $x = 0$ comme étant la position d'équilibre de la masse. On note $\vec{i}$ le vecteur unitaire dans la direction et le sens de Ox.

1. *Rappels de mathématiques :* Donner l'expression des primirives de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des constantes réelles quelconques.
2. Rappeler l'expression de la force de rappel $\vec{F}(x) = F(x)\vec{i}$ en fonction de x. En déduire l'expression de l'énergie potentielle $E_p(x)$ dont elle dérive. Tracer le graphe représentant $E_p(x)$.
3. L'axe est tourné de 90° et la masse subit maintenant son poids en plus de la force de rappel. Donner l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle. Quelle est la forme de l'énergie potentielle totale (gravitationnelle + élastique) ? Conclusion ?

4.4 Systèmes conservatifs

Exercice 4.4.1 *(★)* **Forces conservatives** : On considère une particule se mouvant le long d'une droite Ox, repérée par une coordonnée $x(t)$. On note $\vec{i}$ un vecteur unitaire dans la direction et le sens de Ox.

1. *Rappels mathématiques :* Donner les expressions des primitives des fonctions suivantes
$$f(x) = 2; \quad g(x) = Ax; \quad h(x) = -\frac{K}{x^2},$$
où A et K sont des constantes réelles.
2. Rappeler la définition d'une force conservative.
3. Les forces suivantes sont-elles conservatives ? Si c'est le cas, donner l'expression de l'énergie potentielle associée.

(a) La force de gravitation qu'exerce une masse M située en O sur une masse m située au point $x\vec{i}$: $\vec{F}(x) = -\frac{GmM}{x^2}\vec{i}$, où G est la constante universelle de le gravitation.

(b) La force de gravitation exercée sur une masse m à une hauteur z faible de la surface de la Terre. On effectuera un développement limité de la force $\vec{F}(x)$ de la question précédente, lorsque la valeur de x est proche de celle du rayon de la Terre R. C'est a dire que $x = R+z$, avec $z \ll R$.

(c) La force de rappel d'un ressort $\vec{F} = -kx\vec{i}$.

(d) La force de frottement fluide $\vec{F} = -\gamma\dot{x}\vec{i}$?

(e) Une force de frottement solide, qui est constante lors du déplacement du mobile sur son support.

Exercice 4.4.2 *(★)* **Energie gravitationnelle** : On donne $g = 9.8$ m.s^{-2}.

1. Quelle est l'énergie potentielle d'une masse de 1 kg à 1 km d'altitude ? L'energie potentielle est choisie nulle à la surface du sol.
2. Quelle est l'énergie cinétique quand cette masse, lâchée à 1 km d'altitude, touche le sol ? On négligera le frottement.
3. Quelles sont les énergies cinétique et potentielle au milieu de la chute ? Commentaire.

Exercice 4.4.3 *(★)* **Déplacement d'une masse** :

1. Quel travail doit-on fournir pour élever une masse M d'une même hauteur h, soit verticalement, soit en tirant sans frottement sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale, à la même vitesse considérée comme constante ?
2. Quelle puissance doit-on développer pour effectuer ce travail ?
3. Quel est le travail du poids pendant ce mouvement ? Est-il positif ou négatif ? Comment le travail à fournir serait-il modifié s'il existait des forces de frottement sur l'air ou sur le plan incliné ?

Exercice 4.4.4 *(★)* **Masse uniformément accélérée** :

1. Quel travail doit-on fournir pour élever une masse M, initialement au repos, d'une hauteur h selon un mouvement uniformément accéléré, avec une accélération $\vec{a}$?
2. Quelle puissance doit-on développer pour faire effectuer ce mouvement à la masse ? Est-elle constante au cours du temps ?
3. Quelles sont alors les variations d'énergie potentielle et cinétique correspondantes ?
4. Si, à la fin de l'accélération, on lâche la masse M, jusqu'à quelle hauteur va-t-elle monter ? Quelles sont alors son énergie potentielle et son énergie cinétique ?

Exercice 4.4.5 *(★)* **Masse lâchée sur un ressort.** : On considère un ressort, de raideur k, vertical et dont l'extrémité la plus basse est fixée. L'extrémité la plus haute est libre et la longueur du ressort est sa longueur à vide ℓ_0. On lâche un objet de masse m, sans vitesse initiale, d'une hauteur $z = h$ au dessus de l'extrémité libre du ressort que l'on prend comme origine des coordonnées $z = 0$. Quelle est position la plus basse atteinte par la masse ?

Exercice 4.4.6 *(★★)* **Vitesse de libération** : On rappelle que l'énergie potentielle gravitationnelle d'un objet de masse m à distance r du centre de gravité d'une planète de masse M est

$$E_p(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

1. Comment définir la "*vitesse de libération*" ?
2. Déterminer l'expression de vitesse de libération puis déterminer sa valeur pour la Terre. AN : On donne $M_{\text{Terre}} = 5.97 \times 10^{24}$ kg et $G = 6.67 \times 10^{-11}$ kg^{-1}m^{3}s^{-2}.
3. Pouvez-vous expliquer pourquoi la lune n'a pas d'atmosphère ? On donne $M_{\text{Lune}} = 7.36 \times 10^{22}$ kg.

Exercice 4.4.7 *(★★)* **Positron** : Un positron de charge e, de masse m, est lancé en direction d'un ion lourd, de charge e, supposé immobile en O. Le mouvement est rectiligne suivant l'axe Ox. La vitesse initiale quand le positron est à l'infini est $-v_0\vec{i}$ avec $v_0 > 0$. La force qui s'exerce sur le positron est $\vec{F} = \frac{ke^2}{x^2}\vec{i}$ où k est une constante positive.

1. Décrire qualitativement le mouvement.
2. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $x(t)$. Sait-on la résoudre ?
3. Calculer le travail de $\vec{F}$ sur le segment AB, A d'abscisse $a > 0$, B d'abscisse $b > a$. Que devient ce travail quand b tend vers l'infini ?
4. Calculer l'énergie potentielle $U(x)$ avec $\lim_{x\to\infty} U(x) = 0$. Vérifier le théorème de l'énergie mécanique. Tracer le graphe de $U(x)$.
5. Exprimer l'énergie mécanique E en fonction de x, de $\dot{x}$ et des constantes. Expliquer pourquoi elle se conserve. Donner sa valeur en fonction de m et v_0.
6. Montrer que x ne peut pas prendre des valeurs trop petites. Déterminer l'expression de x_{min}, la valeur minimum de x.
7. A.N. : On donne $k = 9 \times 10^9$ N.m^2.C^{-2}, $v_0 = 2 \times 10^6$ m.s^{-1}, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg. Calculer x_{min}.
8. Le positron passe deux fois au même point. Comparer les deux vitesses. Exprimer la vitesse en fonction de v_0, x et x_{min}. Calculer la vitesse quand le positron est à l'abscisse $2x_{\text{min}}$.

Exercice 4.4.8 *(★★)* **Particule soumise à une force conservative** : On considère une particule se déplaçant sur un axe Ox, repérée par son abscisse x, et soumise à une force conservative dérivant d'une énergie potentielle $V(x)$. Tracer l'allure de la norme de sa vitesse $v(t)$, sur l'axe Ox, puis de $x(t)$ si l'énergie mécanique vaut E_1, puis E_2 dans les deux cas présentés sur la figure 4.1. On envisagera différentes conditions initiales.

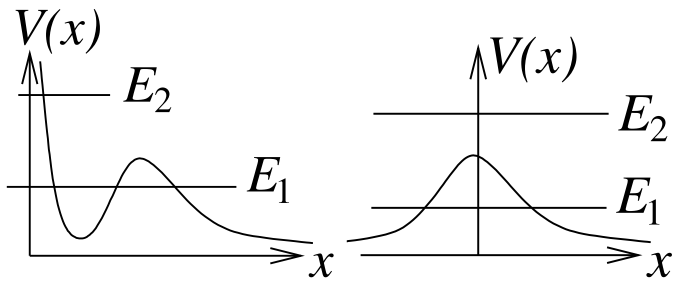


FIGURE 4.1 – Energies potentielles

TD 5

Systèmes à deux corps

5.1 Centre de masse

Exercice 5.1.1 *(★)* **Système Terre-Lune** : Est-ce que le centre de masse du système Terre-Lune se trouve à l'extérieur ou à l'intérieur de la Terre ? On donne les masses de la Terre et de la Lune $M_T \simeq 5.9 \times 10^{24}$ kg, $M_L \simeq 7.4 \times 10^{22}$ kg respectivement ; la distance entre la Terre et la Lune $R_{TL} \simeq 380000$ km et le Rayon de la Terre $R_T \simeq 6400$ km.

Exercice 5.1.2 *(★)* : Soient trois points matériels de masses identiques situés dans le plan Oxy et repérés par leurs coordonnées cartésiennes en centimètres:

$$A(0,0), B(2,0), C(0,3).$$

Déterminer les coordonnées du centre de masse des points (A, B, C). On fera un schéma.

Exercice 5.1.3 *(★★)* **Propriétés géométriques** :

1. Montrer que le centre de masse G_{123} de trois points matériels (M_1, M_2, M_3), de masses respectives m_1, m_2, et m_3 est le centre de masse des deux points matériels (G_{12}, M_3) de masses respectives $m_1 + m_2$ et m_3.
2. Généraliser cette propriété au cas de N points matériels ($N > 3$).
3. En déduire une construction graphique du centre de masse d'un triangle, puis d'un quadrilatère formé de masses identiques.

5.2 Dynamique et énergie

Exercice 5.2.1 *(★★)* : Deux billes, B_1 et B_2 que l'on assimile à des points matériels, de masse m_1 et m_2 respectivement, sont reliées par un ressort, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Le ressort, avec les deux billes à ses extrémités, est posé sur une table horizontale. A l'instant initial $t = 0$, la bille B_1 possède une vitesse v_1 et B_2 est au repos. La longueur du ressort à cet instant est sa longueur

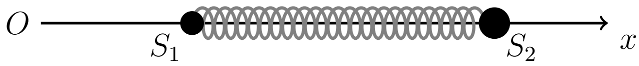


FIGURE 5.1 – Deux billes reliées par un ressort, sur un axe Ox horizontal.

à vide. On suppose que le ressort et les masses ne peuvent se déplacer que le long d'un axe Ox, dont l'origine O est constituée par la position initiale de B_1. On repère la position des billes par leurs abscisses respectives x_1 et x_2 sur l'axe Ox. Le but de cet exercice est de déterminer les équations horairse des points matériels, c'est à dire les fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour tout $t > 0$. Le référentiel dans lequel la table est immobile est considéré comme un référentiel galiléen. On négligera tous les frottements

1. Déterminer la position initiale du centre de masse $x_G(t = 0) = OG(t = 0)$.
2. Déterminer l'équation horaire du centre de masse $x_G(t) = OG(t)$.
3. On se place dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$. Ce référentiel est-il galiléen ? Justifier.
4. Déterminer l'équation horaire du mouvement relatif $x(t)$ de la bille B_1 par rapport à B_2. C'est à dire la fonction $x(t) = x_2(t) - x_1(t)$.
5. En déduire les équations horaire de chacun des points matériels, $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

5.3 Collisions

Exercice 5.3.1 *(★)* **Expérience de Chadwick** : Des neutrons de masse m sont émis avec une vitesse v par une cible de béryllium frappée par des particules α (les particules α sont des noyaux d'Helium (He)). On bombarde avec ces neutrons des cibles contenant des atomes d'hydrogène ou d'azote au repos et l'on mesure les vitesses maximales v'_p et v'_N des protons ou des noyaux d'azote émis (en prenant comme hypothèses $M_N = 14\ M_p$ et $v'_p = 7.5\ v'_N$). En supposant les collisions élastiques, montrer que l'on peut en déduire une valeur approchée de la masse du neutron.

Exercice 5.3.2 *(★)* **Ralentisseur de neutrons** : Dans un réacteur nucléaire, les neutrons rapides émis au cours de la fission de l'uranium doivent être ralentis. Pour réaliser ce ralentissement, on leur fait traverser un matériau dans lequel ils subissent des collisions avec des noyaux que l'on considérera au repos. En supposant que les collisions sont frontales, calculer la perte d'énergie cinétique subie par un neutron de masse m_1 de vitesse v_1 qui heurte un atome de masse m_2. Dans quelles conditions la perte d'énergie est-elle maximale ?

Exercice 5.3.3 *(★)* **Skateboard** : Je suis sur un skateboard immobile. J'ai dans les mains une boule de pétanque de masse $m = 1$ kg. Ma masse est $M = 70$ kg. Je lance la boule de pétanque horizontalement vers l'arrière, avec une vitesse $v = 6$m/s. On négligera les frottements.

1. Je m'aperçois que je me déplace vers l'avant avec une vitesse V. Expliquer le phénomène.

2. Déterminer l'expression de V en fonction des données, puis sa valeur numérique.
3. Déterminer le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$.

Exercice 5.3.4 *(★★)* **Trains** : Une locomotive de masse m_1 cherche à accrocher un train de wagon au repos de masse m_2. Pour cela elle se dirige en ligne droite à vitesse constante v_1 vers le train de wagons.

1. La locomotive rate sa manoeuvre. On suppose le choc élastique, déterminer les vitesses v_1' et v_2' de la locomotive et du train de wagons après le choc.
2. La locomotive réussit la manoeuvre et on suppose que le choc est parfaitement mou.
   (a) Déterminer la quantité de mouvement du convoi (locomotive + wagons) après le choc.
   (b) Déterminer la quantité d'énergie ΔE absorbée par le choc en fonction des masses et de la vitesse v_1 de la locomotive avant le choc.
   (c) Pour comprendre la signification de ΔE on reprendra les deux questions précédentes mais dans le référentiel du centre de masse.
   (d) Préciser la signification de l'hypothèse de choc mou.
3. A.N : $v_1 = 2$ km/h, $m_1 = 10$ tonnes, $m_2 = 500$ tonnes.

Exercice 5.3.5 *(★★)* : On considère le choc élastique de deux particules de même masse m et de vitesses initiales $\vec{v_1}$ donnée et $\vec{v_2} = \vec{0}$. On appelle θ et ϕ les angles entre la direction incidente (direction de $\vec{v_1}$) avec les directions des vitesses finales $\vec{v_1}'$ et $\vec{v_2}'$ respectivement.

1. Montrer que $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$.
2. Calculer la norme v_2' de $\vec{v_2}'$ et l'énergie cinétique $E'_{k,2}$ communiquées à la particule 2 en fonction de θ et de $v_1 = \|\vec{v_1}\|$. Pour quelles valeurs de θ, $E'_{k,2}$ est elle extrémale ?

Exercice 5.3.6 *(★★★)* **Une balle et un ballon** : Une balle B_1 de masse m_1 et de rayon R_1 est située au dessus d'un ballon B_2 de masse m_2 et de rayon R_2. On supposera que $m_1 \leq m_2$. Les deux sont pratiquement collés l'un au dessus de l'autre et sont lâchés au dessus du sol, sans vitesse initiale, d'une hauteur h_1 pour B_1 et donc d'une hauteur $h_2 = h_1 - R_1 - R_2$, pour B_2 (voir figure 5.2).

On considère que les chocs sont élastiques et on néglige les frottements. Le but de cet exercice est de déterminer la hauteur atteinte par B_1 après le rebond de B_2 sur le sol.

1. Déterminer les vitesses $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ de B_1 et B_2 juste après le rebond de B_2 sur le sol mais juste avant que B_2 rentre en collision avec B_1.
2. En déduire la vitesse de $\vec{v_1}'$ après le choc avec B_2.
3. En déduire la hauteur h_1' finale atteinte par B_1 après le choc.
4. Calculer h_1' dans la limite où $m_1 \ll m_2$.
5. Faites l'expérience en faisant attention à ne pas avoir d'objet fragile autour de vous.

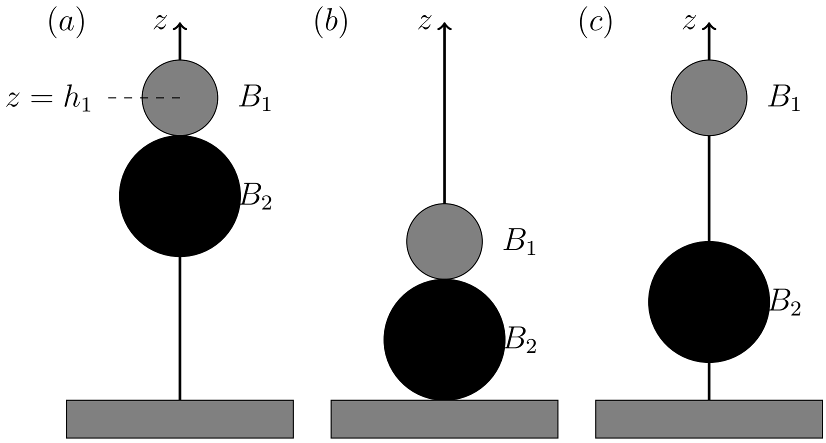


FIGURE 5.2 – (a) La balle et le ballon sont lâchés, d'une hauteur h_1 pour la balle B_1 et d'une hauteur h_2 pour B_2. (b) le ballon B_2 rebondit sur le sol et rentre en collision avec B_1. (c) Après leurs rebonds, les deux ballons remontent.