Question 3

Prenons le repère de centre O, avec l'axe Ox aligné avec la droite OA. Dans ce repère, le point A a l'affixe $a + i0$, le point $B = ae^{i\frac{\pi}{3}}$ car le triangle direct ABC est un triangle isocèle et O est le centre du triangle donc $\|OA\| = \|OB\| = \|OC\|$. Les droites OA et OB sont à $\frac{2\pi}{3}$. L'affixe du vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ dirigeant la droite OB est $\frac{a.e^{\frac{i2\pi}{3}}}{\|OB\|} = \frac{\|OA\|.e^{\frac{i2\pi}{3}}}{\|OB\|} = e^{2\frac{i\pi}{3}}$. Les droites OA et OC sont à $\frac{\pi}{3}$. L'affixe du vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ dirigeant la droite OC est $\frac{a.e^{\frac{i\pi}{3}}}{\|OC\|} = \frac{\|OA\|.e^{\frac{i\pi}{3}}}{\|OC\|} = e^{\frac{i\pi}{3}}$.

Dans ce repère, la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est $r(z) = e^{\frac{2\pi}{3}}z$.

Dans ce repère, on a $\sigma_1(z) = \overline{z}$ (ie réflexion sur l'axe Ox).

Dans ce repère, on a $\sigma_2(z) = (e^{\frac{i2\pi}{3}})^2.\overline{z} = e^{\frac{i4\pi}{3}}.\overline{z}$ (réflexion de droite OB).

Dans ce repère, on a $\sigma_3(z) = (e^{\frac{i\pi}{3}})^2.\overline{z} = e^{\frac{i2\pi}{3}}.\overline{z}$ (réflexion de droite OC).

Donc $\sigma_1 \circ \sigma_2(z) = \overline{e^{\frac{i4\pi}{3}}.\overline{z}} = e^{\frac{-i4\pi}{3}}.z = e^{\frac{i2\pi}{3}}.z = r(z)$.

Donc $\sigma_1 \circ \sigma_3(z) = \overline{e^{\frac{i2\pi}{3}}.\overline{z}} = e^{\frac{-i2\pi}{3}}.z = e^{\frac{i4\pi}{3}}.z = r \circ r(z)$.

Question 4

On a $\sigma_1 \circ \sigma_1 = Id$ car une réflexion est une involution.
On a

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = r$$
$$\sigma_1 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ r$$
$$Id \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ r$$
$$\sigma_2 = s \circ r$$

On a

$$\sigma_1 \circ \sigma_3 = r \circ r$$
$$\sigma_1 \circ \sigma_1 \circ \sigma_3 = \sigma_1 \circ r \circ r$$
$$Id \circ \sigma_3 = \sigma_1 \circ r \circ r$$
$$\sigma_3 = s \circ r \circ r = s \circ r^2$$

Question 5

On a $\sigma_2 \circ \sigma_2 = Id$ car une réflexion est une involution. $s = s^{-1} \circ Id$

On a

$$(s \circ r) \circ (s \circ r) = \sigma_2 \circ \sigma_2 = Id$$

On a

$$(s \circ r) \circ (s \circ r) = Id$$
$$s \circ r \circ s \circ r = Id$$
$$s^{-1} \circ s \circ r \circ s \circ r = s^{-1} \circ Id$$
$$s^{-1} \circ s \circ r \circ s \circ r \circ r{-}1 = s^{-1} \circ Id \circ r^{-1}$$
$$Id \circ r \circ s \circ Id = s \circ r^{-1}$$
$$r \circ s = s \circ r^{-1}$$

Question 6

Montrons d'abord que $\sigma_3 = s \circ r^{-1}$. On a $r \circ r \circ r = e^{\frac{2\pi}{3}} \circ e^{\frac{2\pi}{3}} e^{\frac{2\pi}{3}} = e^{\frac{6\pi}{3}} = e^{2\pi} = Id$:

$$\sigma_3 = s \circ r \circ r$$
$$\sigma_3 \circ r = s \circ r \circ r \circ r$$
$$\sigma_3 \circ r = s \circ Id$$
$$\sigma_3 \circ r \circ r^{-1} = s \circ Id \circ r^{-1}$$
$$\sigma_3 = s \circ r^{-1} = r \circ s$$

Donc

$$E = \sigma_3(D') = \sigma_3(\sigma_1(D)) = \sigma_3 \circ \sigma_1(D)$$
$$\sigma_3 \circ \sigma_1(D) = r \circ s \circ s(D) = r(D)$$

Et

$$E' = \sigma_2(E) = \sigma_2(\sigma_3(D')) = \sigma_2 \circ \sigma_3(D')$$

de la question 4, $\sigma_2 = s \circ r$ et $\sigma_2 = s \circ r \circ r$,

$$\sigma_2 \circ \sigma_3(D') = s \circ r \circ s \circ r \circ r(D') = s \circ s \circ r^{-1} \circ r \circ r(D') = r(D')$$

Et

$$F = \sigma_1(E') = \sigma_1(\sigma_2(E)) = \sigma_1 \circ \sigma_2(E)$$

de la question 4, $\sigma_2 = s \circ r$,

$$\sigma_1 \circ \sigma_2(E) = s \circ s \circ r(E) = r(E)$$

Et

$$F' = \sigma_3(F) = \sigma_3(\sigma_1(E')) = \sigma_3 \circ \sigma_1(E')$$
$$\sigma_3 \circ \sigma_1(E') = r \circ s \circ s(E') = r(E')$$

Question 7

On a $E = r(D)$ et $F = r(E)$. Donc $\|\overrightarrow{OD}\| = \|\overrightarrow{OE}\| = \|\overrightarrow{OF}\|$. Donc les triangles EOD, EOF, FOD sont isocèles.

Et $\widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \frac{2\pi}{3}$ donc $\widehat{FOD} = \frac{2\pi}{3}$ car $r \circ r \circ r = Id$.

Donc $\widehat{ODE} = \widehat{OED} = \frac{\pi}{6}$, $\widehat{OEF} = \widehat{OFE} = \frac{\pi}{6}$, $\widehat{OFD} = \widehat{ODF} = \frac{\pi}{6}$

Donc $\widehat{DEF} = \widehat{DEO} + \widehat{OEF} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{DEF} = \widehat{DEO} + \widehat{OEF} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{EFD} = \widehat{EFO} + \widehat{OFD} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{FDE} = \widehat{FDO} + \widehat{ODE} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Donc, le triangle DEF est équilatéral. Le triangle est direct car O est le centre du cercle circonscrit du triangle DEF et les angles $\widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \frac{2\pi}{3}$.

Démonstration identique pour le triangle $D'E'F'$.

Question 8

On a $E = r(D)$, donc $D = r^{-1}(E)$, donc l'angle orienté $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD})$ est $-\frac{2\pi}{3}$.

On a $D'D \parallel BC$ car $D' = \sigma_1(D)$ et $B = \sigma_1(C)$ (la droite OA est la hauteur du coté BC). On a $D'E \parallel AB$ pour la même raison. Et l'angle orient'e $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ car le triangle ABC est direct.

Il y a deux cas:

- ??
- ??

Question 9

On a $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{6}$, donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD'}) = \frac{\pi}{6}$ car c'est la réflexion du triangle AOD par rapport à la droite OA. La réflexion inverse les angles. Donc l'angle orienté $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OD'} = \frac{\pi}{3})$.
On a également les angles orientés $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OD'}) = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OE'}) = (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OF'})$ car ceux sont des rotations et que la rotation conserve les angles.
La rotation r étant plus grande que $\frac{\pi}{3}$, l'hexagone $DD'EE'FF'$ est direct.

Le triangle ABC est équilatéral direct, donc l'angle orienté $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OD'}) = \frac{2\pi}{3}$. Donc $B = r(A)$. L'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}) = \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$ car la rotation r conserve les angles.
On a $\widehat{AOB} = \widehat{AOD'} + \widehat{D'OE} + \widehat{EOB}$, donc L'angle orienté $(\overrightarrow{OD'}, \overrightarrow{OE}) = \frac{\pi}{3}$ et le triangle $D'OE$ est équilatéral. De même pour les triangles $E'OF$ et $F'OD$. L'hexagone $DD'EE'FF'$ est composé de 6 triangles équilatérals, il est donc régulier.

QED