Rappel de cours

- La composante de la force d'un point M, $\overrightarrow{F}(M)$ sur l'axe $\mathcal{O}_x$ est donnée par le produit scalaire $f(x) = \overrightarrow{F}(M).\overrightarrow{i}$.
- Le travail d'une force $\overrightarrow{F}$ sur un segment $\overrightarrow{AB}$ est donné par :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) = \int_{A\to B} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{i}\,dx = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx$$

- On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point A et B.

$$\forall A, B, C,\; W_{A\to B}\overrightarrow{F} = W_{A\to C}\overrightarrow{F} + W_{C\to B}\overrightarrow{F}$$

- Dans le cas où le chemin est rectiligne, si une force est conservatrice alors l'*énergie potentielle* associée à la force $\overrightarrow{F}$ est notée $E_p(x)$ est définie par :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) = \int_{A\to B} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{i}\,dx = E_p(x_a) - E_p(x_b)$$

.

Exo I

Q 1.1 a et b

Si la force $\overrightarrow{F_{el}}(x)$ est conservatrice alors on peut définir son énergie potentielle associée $E_{el}(x)$. La $\overrightarrow{F_{el)}}(x)$ est conservatrice si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi sur l'axe $\mathcal{O}_x$, soit $\forall A, B, C$, $W_{A\to B}\overrightarrow{F} = W_{A\to C}\overrightarrow{F} + W_{C\to B}\overrightarrow{F}$. Le travail de la force $\overrightarrow{F_{el}}(x)$ entre les points A et B sur l'axe $\mathcal{O}_x$ est donné par $W_{A\to B}\overrightarrow{F} = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx$ avec $f(x) = -\frac{A}{x^2}$ car la force $\overrightarrow{F_{el}}(x)$ est parallèle à l'axe $\mathcal{O}_x$.

$$W_{A\to B}\overrightarrow{F_{el}} = \int_{x_a}^{x_b} -\frac{A}{x^2}dx = \left[\frac{A}{x}\right]_{x_a}^{x_b} = \frac{A}{x_a} - \frac{A}{x_b}$$

Et,

$$W_{A\to C}\overrightarrow{F_{el}} + W_{C\to B}\overrightarrow{F_{el}} = (\frac{A}{x_a} - \frac{A}{x_c}) + (\frac{A}{x_c} - \frac{A}{x_b}) = \frac{A}{x_a} - \frac{A}{x_b} = W_{A\to B}\overrightarrow{F_{el}}$$

Donc la force $\overrightarrow{F_{el}}$ est conservatrice et $E_p(x) = \frac{A}{x}$.

Pour l'origine de l'énergie potentielle associée à la force $\overrightarrow{F_{el}}$, je dirais á l'origine de l'axe $\mathcal{O}_x$ car comme les deux ions ne peuvent pas s'interpenétrer alors l'abscisse du ion Na^+ ne peut pas être 0.

Q 1.2

On a:

$$\frac{dE_{rep}(x)}{dx} = -\overrightarrow{F_{rep}}.\overrightarrow{i}$$

$$\frac{dE_{rep}(x)}{dx} = \frac{d(\frac{B}{x^8})}{dx} = -\frac{8B}{x^9}$$

Donc $\overrightarrow{F_{rep}}.\overrightarrow{i} = \frac{8B}{x^9}.\overrightarrow{i}$. La force $\overrightarrow{F_{rep}}$ est répulsive car elle a le même sens que $\overrightarrow{i}$.

Q 1.3 a

Rappel de cours:

- L'énergie mécanique d'un système $E_m = E_c + E_p$ avec E_c l'énergie cinétique qui dépend de la masse et de la norme de la vitesse du système physique étudié et de l'énergie potentielle E_p qui correspond aux forces exercées sur le système.

L'énergie mécanique est égale à $E_m = E_c + E_p$. Avec l'énergie cinétique du système $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$ et l'énergie potentielle qui correspond aux 2 forces qui s'exercent sur le systéme, $\overrightarrow{F_{el}}$, $\overrightarrow{F_{rep}}$, $E_p = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^8}$.

Q 1.3 b

Les forces qui s'exercent surt le systéme sont conservatrices donc l'ènergie mécanique du système est concervée.

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^8}$$

Comme l'ion Na est lancé depuis l'infini vers l'ion Cl alors à $t = 0$, $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}3.84 \times 10^{-28}(-2 \times 10^6)^2 = 7.68 \times 10^{-16} J$.

Q 1.3 c

On a

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^8}$$

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E_m - \frac{A}{x} - \frac{B}{x^8})$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_m - \frac{A}{x} - \frac{B}{x^8})}$$

Non, on ne peux pas déterminer le sens du mouvement de l'ion Na. Pour cela il faut connaître les conditions initiales du système.

Q 1.3 d

Lorsque la force électromagnétique de cohésion devient négligeable devant la force de répulsion alors

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_m - \frac{B}{x^8})}$$

Cette équation est n'est valide que si $\frac{2}{m}(E_m - \frac{B}{x^8}) > 0$ ou $E_m > \frac{B}{x^8}$), comme E_m est constant et positif, et que la fonction $\frac{B}{x^8}$ est continue, lorsque $x(t = 0) > 0$ alors on a $x(t) > 0$.

L'abscisse minimum x_{min} est lorsque $E_m - \frac{B}{x^8} = 0$ ou $E_m = \frac{B}{x^8}$. Donc $x^8 = \frac{B}{E_m}$ ou $x = \sqrt[8]{\frac{B}{E_m}} = 9.90 \times 10^{-11} \approx 10^{-10}$.

Donc à la distance minimum les atomes distants de leurs rayon atomique respectif.

Q 1.3 e

??

Q 1.4 a

Lorsque le système des deux ions est à l'équilibre on a :

$$\|\overrightarrow{F_{el}}\| = \|\overrightarrow{F_{rep}}\|$$

.

$$\frac{A}{x^2} = \frac{8B}{x^9}$$

$$A = \frac{8B}{x^7}$$

$$x = \sqrt[7]{8\frac{B}{A}}$$

$$x = \sqrt[7]{8\frac{7.1 \times 10^{-96}}{2.3 \times 10^{-28}}} = 3.05 \times 10^{-10} m = 3.05\text{Å}$$

Q 1.4 b

Voir courbes

Q 1.4 c

$$\frac{\left(7.1 \cdot 10^{-96}\right)}{\left(3.05 \cdot 10^{-10}\right)^8} - \frac{\left(2.3 \cdot 10^{-28}\right)}{\left(3.05 \cdot 10^{-10}\right)} = 6.5928716310^{19}$$

Exo II

Q 1.5 a

On a $F_{tot}(x) = F_{el}(x) + F_{rep}(x) = -\frac{A}{x^2} + \frac{8B}{x^9}$. Le développement limité de $F_{tot}(x)$ autour du point x_{eq}:

$$F_{tot}(x) = F_{tot}(x_eq) + F'_{tot}(x_{eq})(x - x_{eq})$$

On a $F_{tot}(x_eq) = 0$ car x_{eq} est la position d'équilibre.
On a $F'_{tot}(x) = \frac{2A}{x^3} - \frac{72B}{x^{10}}$. Donc

$$F_{tot}(x) = 0 + (\frac{2A}{x_{eq}^3} - \frac{72B}{x_{eq}^{10}})(x - x_{eq})$$

$$F_{tot}(x) = -(\frac{72B}{x_{eq}^{10}} - \frac{2A}{x_{eq}^3})(x - x_{eq})$$

Selon est de la forme

$$F_{tot}(x) = -k.(x - x_0)$$

Avec $k = \frac{72*7.1\times10^{-96}}{(3.05\times10^{-10})^{10}} - \frac{2*2.30\times10^{-28}}{(3.05\times10^{-10})^3} = 57.17 N.m$ et $x_0 = x_{eq}$.
En faisant le changement de variable $x - x_{eq} = \delta$ alors

$$F_{tot}(\delta) = -k.\delta$$

Q 1.5 b

L'équation du mouvement de Na^+ est

$$m\ddot{x}(\delta) = F_{tot}(\delta) = -k.\delta$$

$$\ddot{x}(\delta) + \frac{k}{m}\delta = 0$$

La résolution de l'équation différentielle donne $\delta(t) = x_0 cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$. $\delta(t)$ est une fonction oscillante autour de la position x_{eq}.

Q 1.5 c

La période de l'oscillation est $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ et la fréquence est $F = \frac{1}{T}$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3.84 \times 10^{-28}}{60}} = 1.59 \times 10^{-14}$$

Q 1.6 a

L'ion n suffit deux forces de sens contraire; la force provenant du ressort lié au ion $n+1$ et la force provenant de l'ion $n-1$. Ces forces sont propotionnels au coefficent du raideur k du ressort et à l'extension de chaque ressort. L'extension du ressort entre $n-1$ et n est $\delta_n - \delta_{n-1}$, celle avec le ressort $n+1$ est $\delta_{n+1} - \delta_n$. Donc la force totale est $k(\delta_{n+1} - \delta_n) - (k(\delta_n - \delta_{n-1}) = k(\delta_{n-1} - 2\delta_n + \delta_{n-1})$.

Selon PFD on a $m\ddot{\delta_n} = k(\delta_{n-1} - 2\delta_n + \delta_{n-1})$

Q 1.6 b

On a

$$\dot{\delta_n} = \alpha.\omega.ie^{i(wt-kx_n)}$$

et

$$\ddot{\delta_n} = \alpha.\omega.i.\omega.ie^{i(wt-kx_n)} = -\alpha.\omega^2 e^{i(wt-kx_n)}$$

Donc

$$-m.\alpha.\omega^2 e^{i(wt-kx_n)} = k(\delta_{n-1} - 2\delta_n + \delta_{n-1})$$
$$-m.\alpha.\omega^2 e^{i(wt-kx_n)} = k(\alpha e^{i(wt-kx_{n-1})} - 2(\alpha e^{i(wt-kx_n)}) + \alpha e^{i(wt-kx_{n+1})})$$
$$-m.\alpha.\omega^2 e^{i(wt-kx_n)} = k.\alpha(e^{i(wt-kx_{n-1})} - 2e^{i(wt-kx_n)} + e^{i(wt-kx_{n+1})})$$
$$m.\omega^2 e^{i(wt-kx_n)} = k(-e^{i(wt-kx_{n-1})} + 2e^{i(wt-kx_n)} - e^{i(wt-kx_{n+1})})$$

À l'équilibre les ion NA^+ sont espacés par la distance a. Donc,

$$m.\omega^2 e^{i(wt-k.n.a)} = k(-e^{i(wt-k(n-1)a)} + 2e^{i(wt-k.n.a)} - e^{i(wt-k(n+1)a)})$$
$$m.\omega^2 e^{i(wt-k.n.a)} = k(-e^{i(wt-k.n.a)}e^{ika} + 2e^{i(wt-k.n.a)} - e^{i(wt-k.n.a)}e^{-ika})$$
$$m.\omega^2 e^{i(wt-k.n.a)} = k.e^{i(wt-k.n.a)}(-e^{ika} + 2 - e^{-ika})$$
$$m.\omega^2 = k(-e^{ika} + 2 - e^{-ika})$$
$$m.\omega^2 = k(2 - 2cos(ka))$$
$$m.\omega^2 = 2k(1 - cos(ka))$$

QED.