

Rappel de cours

Definition 1. La relation xRy est une relation d'équivalence sur l'ensemble E ssi:

- $\forall x \in E, xRx$
- $\forall x, y \in E, xRy \Rightarrow yRx$
- $\forall x, y, z \in E, xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Exercice 1

Exercice 1.1

La relation R n'est pas une relation d'équivalence car $(4, 4) \notin R$.

Si on ajoute le couple $(4, 4)$ à la relation R alors R est une relation d'équivalence car

- $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R$
- $(1, 2) \Rightarrow (2, 1), (3, 4) \Rightarrow (4, 3)$
- $(1, 1) \wedge (1, 2) \Rightarrow (1, 2), (1, 2) \wedge (2, 1) \Rightarrow (1, 1), (1, 2) \wedge (2, 2) \Rightarrow (1, 2), \dots$

Exercice 1.2

La liste des classes d'équivalence est $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}, \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.

Exercice 2

Exercice 2.1

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a, b)R(a, b) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = a^2 + b^2$ est vrai
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, ((a, b)R(c, d) \Rightarrow (c, d)R(a, b)) \Leftrightarrow (a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow c^2 + d^2 = a^2 + b^2)$ est vrai car l'égalité est symétrique
- $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}, ((a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \Rightarrow (a, b)R(e, f)) \Leftrightarrow (a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \wedge c^2 + d^2 = e^2 + f^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = e^2 + f^2)$ est vrai car l'égalité est transitive

Exercice 2.2

La relation R est l'ensemble des points du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercice 2.3

Pas compris $|R^2 \setminus \mathbb{R}$.

Exercice 3

Exercice 3.1

Prenons $x = a + i.b$, $y = c + i.d$ et $z = e + i.f$

- $\forall x \in \mathbb{C}, xRx \Leftrightarrow |x| = |x| \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ est vrai
- $\forall x, y \in \mathbb{C}, (xRy \Rightarrow yRx) \Leftrightarrow (|x| = |y| \Rightarrow |y| = |x|) \Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2} \Rightarrow \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{a^2 + b^2})$ est vrai car l'égalité est symétrique
- $\forall x, y, z \in \mathbb{C}, (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz) \Leftrightarrow (|x| = |y| \wedge |y| = |z| \Rightarrow |x| = |z|) \Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2} \wedge \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{e^2 + f^2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{e^2 + f^2})$ est vrai car l'égalité est transitive

Exercice 3.2

- $\forall x \in \mathbb{R}, xRx \Leftrightarrow e^x = e^x$ est vrai
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, (xRy \Rightarrow yRx) \Leftrightarrow (e^x = e^y \Rightarrow e^y = e^x)$ est vrai car l'égalité est symétrique
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz) \Leftrightarrow (e^x = e^y \wedge e^y = e^z \Rightarrow e^x = e^z)$ est vrai car l'égalité est transitive

Exercice 4

Exercice 4.1

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a, b)R(a, b) \Leftrightarrow ab = ba$ est vrai car la multiplication est commutative
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, ((a, b)R(c, d) \Rightarrow (c, d)R(a, b)) \Leftrightarrow (ad = bc \Rightarrow cb = da)$ est vrai car l'égalité est symétrique et la multiplication est commutative
- $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}, ((a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \Rightarrow (a, b)R(e, f)) \Leftrightarrow (ad = bc \wedge cf = de \Rightarrow af = be)$ est vrai car $a = \frac{bc}{d}$, donc $af = \frac{bc}{d}f$ mais $cf = de$ donc $af = \frac{bde}{d} = be$.

Exercice 4.2

$(p, q)R(x, y) \Leftrightarrow py = qx$ avec (p, q) premiers entre eux. Le seul couple est $x = np$ et $y = nq$. Donc la relation représente les couples $\forall n \in \mathbb{N}^*, (np, nq)$ avec (p, q) premiers entre eux.

Exercice 5

Exercice 5.1

- $\forall P \in \mathbb{R}, PRP \Leftrightarrow P - P$ est un multiple de X est vrai car 0 est un multiple de tous les nombres ($0 = 0 \cdot X$)
- $\forall P, Q \in \mathbb{R}, (PRQ \Rightarrow QRP) \Leftrightarrow (P - Q = k \cdot X \Rightarrow Q - P = k' \cdot X)?$ est vrai en prenant $k' = -k$ car $Q - P = -(P - Q) = -kX$
- $\forall P, Q, S \in \mathbb{R}, (PRQ \wedge QRS \Rightarrow PRS) \Leftrightarrow (P - Q = kX \wedge Q - S = k'X \Rightarrow P - S = k''X)?$ est vrai $P - S = (P - Q) - (Q - S) = kX + k'X = (k + k')X$

Exercice 5.2

$PRP(0) = P - P(0)$ mais $P(0)$ est le polynôme de degré 0, donc $P - P(0)$ est un polynôme avec le degré 0 égale à 0. On peut donc le factoriser par X . Par conséquent $P - P(0) = X \cdot k$ est un multiple de X

Exercice 5.3

En prenant par exemple, $\pi : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}[X], P \mapsto P - X$, on a $\forall P \in \mathbb{Z}[X], P(0) = (P - X)(0)$ car $P - X$ ne change pas de degré 0 du polynôme P .

Exercice 6

Prenons $a = 7k + r$ et $b = 7k' + r'$ avec $r, r' < 7$. On a

$$a^2 + b^2 = (7k + r)^2 + (7k' + r')^2 = 49k^2 + 14kr + r^2 + 49k'^2 + 14k'r' + r'^2 = 7(7k^2 + 2kr + 7k' + 2k'^2 r') + r^2 + r'^2$$

On a $7|a^2 + b^2$ donc $7|7(7k^2 + 2kr + 7k'^2 + 2k'r') + r^2 + r'^2$, donc $7|r^2 + r'^2$ et $r, r' < 7$. On a

$0^2 \bmod 7$	0
$1^2 \bmod 7$	1
$2^2 \bmod 7$	4
$3^2 \bmod 7$	2
$4^2 \bmod 7$	2
$5^2 \bmod 7$	4
$6^2 \bmod 7$	1

La seule combinaison possible est $r = 0$ et $r' = 0$. Donc $7|a$ et $7|b$.

Exercice 7

Preuve par récurrence. Vrai pour $n = 0$ ($3^1 + 2^2 = 7$). Supposons vrai pour n , $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$ est-ce que $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 7k'$

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{(2n+1)+2} + 2^{(n+2)+1} = 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2}$$

On a $3^{2n+1} = 7k - 2^{n+2}$ (hypothèse)

$$9 \cdot (7k - 2^{n+2}) + 2 \cdot 2^{n+2} = 63k - 7 \cdot 2^{n+2} = 7(9k + 2^{n+2})$$

Donc vrai en prenant $k' = 9k + 2^{n+2}$.

Exercice 8

Preuve par récurrence. pour $n = 1$, on a $2^{3+3} - 7 - 8 = 64 - 15 = 49$. Supposons vrai pour $49 \mid 2^{3n+3} - 7n - 8$ au rang n , vérifions que $49 \mid 2^{3(n+1)+3} - 7(n+1) - 8$

$$\begin{aligned} 2^{3(n+1)+3} - 7(n+1) - 8 &= 2^{3n+3+3} - 7(n+1) - 8 = 2^3 \cdot 2^{3n+3} - 7n - 7 - 8 = (7+1)2^{3n+3} - 7n - 7 - 8 = 7 \cdot 2^{3n+3} - 7 + (2^{3n+3} - 7n - 8) \\ &= 7(2^{3n+3} - 1) + (2^{3n+3} - 7n - 8) \end{aligned}$$

On a $49 \mid (2^{3n+3} - 7n - 8)$ par hypothèse de récurrence. Il reste à montrer que $49 \mid 7(2^{3n+3} - 1)$ ou $7 \mid 2^{3n+3} - 1$.

Preuve par récurrence, pour $n=1$, $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ qui est divisible par 7. Supposons $7 \mid 2^{3n+3} - 1$ et vérifions $7 \mid 2^{3(n+1)+3} - 1$.

$$2^{3(n+1)+3} - 1 = 2^{3n+3+3} - 1 = 2^3 \cdot 2^{3n+3} - 1 = (7+1) \cdot 2^{3n+3} - 1 = 7 \cdot 2^{3n+3} + 2^{3n+3} - 1$$

On a $7 \mid 2^{3n+3} - 1$ par hypothèse de récurrence. et $7 \mid 7 \cdot 2^{3n+3}$. donc $\forall n \in \mathbb{N}, 7 \mid 2^{3n+3} - 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, 49 \mid 7(2^{3n+3} - 1)$, et $\forall n \in \mathbb{N}, 49 \mid 7(2^{3n+3} - 1) + (2^{3n+3} - 7n - 8)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 49 \mid 2^{3n+3} - 7n - 8$.

La proposition est vraie.

Exercice 9

Exercice 9.1

Preuve par récurrence. Vrai pour $n = 0$ ($2^3 + 3^1 = 11$). Supposons vrai pour n , $2^{6n+3} + 3^{2n+1} = 11k$ est-ce que $2^{6(n+1)+3} + 3^{2(n+1)+1} = 11k'$

$$2^{6(n+1)+3} + 3^{2(n+1)+1} = 2^{(6n+3)+6} + 3^{2n+1+2} = 2^6 \cdot 2^{6n+3} + 3^2 \cdot 3^{2n+1}$$

On a $2^{6n+3} = 11k - 3^{2n+1}$ (hypothèse)

$$2^6 \cdot (11k - 3^{2n+1}) + 3^2 \cdot 3^{2n+1} = 2^6 \cdot 11k - 2^6 \cdot 3^{2n+1} + 3^2 \cdot 3^{2n+1} = 11(2^6 k + 5 \cdot 3^{2n+1})$$

Donc vrai en prenant $k' = 2^6 k + 5 \cdot 3^{2n+1}$.

Exercice 10

- On a $p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$
- p est premier donc il est impair ($p = 2^n + 1$). On a $(p+1)(p-1) = (2^n + 2)(2^n)$. Soit $2 \mid (p+1)$, soit $4 \mid (p-1)$. Donc $p^2 - 1 = 2k \cdot 4k' = 8(kk')$.
- p est premier donc $p \bmod 3 = 1$ ou $p \bmod 3 = 2$. Si $p \bmod 3 = 1$ alors $(p+1)(p-1) = (p+1) \cdot 3k = 3((p+1)k)$, et Si $p \bmod 3 = 2$ alors $(p+1)(p-1) = 3k \cdot (p-1) = 3(k(p-1))$ donc $p^2 - 1 = 3k'$

3 et 8 sont premiers entre eux, et p est premier donc $p^2 - 1 = 3 * 8 * k = 24k$.

QED