Rappel de cours:

-

## Exercice 5.1

### 5.1.1.a

La relation $\phi$ est linéaire de $E$ si

- $\forall A, B \in E, \phi(A+B) = \phi(A) + \phi(B)$
- $\forall A \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \phi(\lambda A) = \lambda \phi(A)$

Posons $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ et $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

En utilisant deux fois la distibitibité par rapport à l'addition, on a:

$$\phi(A+B) = M_1.(A+B).M_2 = M_1.(A.M_2 + B.M_2) = M_1.A.M_2 + M_1.B.M_2 = \phi(A) + \phi(B)$$

On a $(\lambda A).B = \lambda(A.B) = A.(\lambda B)$ (voir cours).

$$\phi(\lambda A) = M_1.(\lambda A).M_2 = M_1.(\lambda(A.M_2)) = \lambda(M_1.A.M_2) = \lambda\phi(A)$$

Donc la relation $\phi(M)$ est linéaire.

### 5.1.1.b

La matrice $A$ est un point fixe de la relation $\phi$ si $\phi(A) = A$, soit

$$\phi(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} .A. \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = A$$

$$\phi(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = A$$

### 5.1.2.a

$$\phi(P_1+P_2) = ((P_1+P_2)(1), (P_1+P_2)'(2)) = ((P_1(1)+P_2(1)), (P_1'+P_2')(2)) = (P_1(1)+P_2(1), P_1'(2)+P_2'(2))$$
$$= (P_1(1), P_1'(2)) + (P_2(1), P_2'(2)) = \phi(P_1) + \phi(P_2)$$

Et

$$\phi(\lambda P) = (\lambda P(1), (\lambda P(2))') = (\lambda P(1), \lambda P'(2)) = \lambda(P(1), P'(2)) = \lambda\phi(P)$$

La relation $\phi$ est linéaire.

### 5.1.2.b

$$\phi(t-1) = ((t-1)(1), (t-1)'(2)) = ((t-1)(1), (1)(2)) = (0, 1)$$

$$\phi((t-2)^2) = ((t-2)^2(1), ((t-2)^2)'(2)) = ((t-2)^2(1), (t^2-4t+4)'(2)) = ((t-2)^2(1), (2t-4)(2)) = (1, 0)$$

On cherche $P$, tel que $\phi(P) = (1, -1)$. Comme la relation $\phi$ est linéaire on a

$$(1,-1) = 1.(1,0) - 1.(0,1) = 1.\phi((t-2)^2) - 1.\phi(t-1) = \phi(1.(t-2)^2) + \phi(-(t-1)) = \phi((t-2)^2 - (t-1)) = \phi(t^2-5t+5)$$

Donc $P = t^2 - 5t + 5$.

**5.1.3.a**

$$\phi(f_1+f_2) = \int_0^1 (f_1+f_2)e^t dt = \int_0^1 f_1e^t + f_2e^t dt = \int_0^1 f_1e^t + \int_0^1 f_2e^t dt = \phi(f_1) + \phi(f_2)$$

$$\phi(\lambda f) = \int_0^1 (\lambda f)e^t dt = \int_0^1 \lambda f e^t dt = \lambda \int_0^1 f e^t dt = \lambda\phi(f)$$

**5.1.3.b**

Une fonction $f$ de $E \to F$ appartient au noyau de $\phi$ si $\phi(f) = 0_F$. Une fonction est dite affine si elle est de la forme $f(t) = at + b$. Donc on cherche une fonction $f = at + b$ tel que $\phi(f) = 0$.

$$\phi(at+b) = \int_0^1 (at+b)e^t dt = \int_0^1 ate^t + be^t dt = a\int_0^1 te^t dt + b\int_0^1 e^t dt = a + b(e-1) = 0$$

car $\int e^t dt = e^t$ et $\int te^t dt = (t-1)e^t$.

Il faut trouver $a$ et $b$ tel que $a + b(e-1) = 0$. Prenons par exemple, $b = 0$ donc $a = 0$, et $b = 1$ donc $a = 1 - e$.
Les 2 fonctions affines sont $f_0(t) = 0t + 0 = 0$ et $f_1(t) = (1-e)t + 1$.

## Exercice 5.2

**5.2.1**

$$f(x,y,z,t) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - y + 3z - t \\ 2x + y + 3z + 4t \\ -x + 2y - 4z + 3t \end{vmatrix}$$

**5.2.2.a**

QED