Exercices

Ce polycopié comporte de nombreux exercices qui ne seront pas tous étudiés en TD faute de temps. Les exercices sans étoile sont des exercices d'application directe du cours et sont donc à travailler prioritairement. Les exercices étoilés demandent un peu plus de réflexion et de recul. Nous vous conseillons vivement de regarder par vous-même les exercices laissés de côté, ce sera un excellent entraînement.

Fonctions, équations et inéquations

Exercice 1.— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^n$ pour tout x réel.

1. Montrer que si n est pair, alors la fonction f est paire et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que si n est impair, alors la fonction f est impaire et strictement croissante.

Exercice 2.— Résoudre les équations suivantes après avoir précisé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles ont un sens :

$$x - 1 = \sqrt{x+2}\,, \quad \ln(x^2-1) + 2\ln 2 = \ln(4x-1)\,, \quad |x-1| = |x+2|\,.$$

Exercice 3.— Résoudre les inéquations suivantes après avoir précisé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles ont un sens :

$$\frac{x^2-2x}{2x-3} > 1\,, \quad \frac{1}{x-3} > \frac{1}{3x-2}\,, \quad \sqrt{4x^2-1} < 2x+1\,.$$

Exercice 4.— Déterminer le domaine de définition des fonctions définies par les formules suivantes :

$$f_1(x) = \ln\ln|x|\,, \qquad f_2(x) = \ln|\ln|x||\,, \qquad f_3(x) = |\ln|\ln|x|||\,.$$

$$f_4(x) = \ln\left(\frac{1+x}{4-3x}\right), \qquad f_5(x) = \sqrt{5x+6} + \ln(1-x)\,, \qquad f_6(x) = \ln(x^2-2x-5)\,.$$

Exercice 5.— Soit $x \in]\pi/2, \pi[$ tel que $\cos x = -3/5$. Déterminer la valeur de $\sin x$ et $\tan x$.

Exercice 6.— Soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (\tan x)\tan(2x)$ pour tout x dans

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, (\cos x)\cos(2x) \neq 0\}\,.$$

Expliciter les ensembles D et $E = \{x \in D \,:\, f(x) \neq 1\}$.

Exercice 7.— Résoudre les inéquations suivantes après avoir précisé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles ont un sens :

$$\tan^2 x \leq 3\,, \quad \frac{\tan^2 x - 2}{\tan^2 x - 1} \leq \frac{1}{2}\,.$$

Exercice 8.— Déterminer, en fonction des paramètres réels a et λ, les racines du polynôme

$$P(t) = (\lambda+1)t^2 - 2at + \lambda - 1\,.$$

Etudier le signe de $P(t)$ en fonction de t.

Exercice 9.— $\star$ Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ il existe des réels a et b tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha \cos t + \beta \sin t = a \cos(t+b).$$

On remarquera pour cela que lorsque $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, on a la relation suivante pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cos t + \beta \sin t \;=\; \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos t + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin t\Big) \;=\; \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\big(c\cos t + d\sin t\big)$$

avec $c^2 + d^2 = 1$.
En déduire, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, la solution des équations et de l'inéquation suivantes :

$$\cos t + \sin t = \lambda, \quad \cos t + \sqrt{3}\sin t = \lambda, \quad \cos t - \sin t > 0.$$

Exercice 10.— Etablir les relations suivantes :

$$\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \tan\theta = \frac{2u}{1-u^2},$$

avec $u = \tan(\theta/2)$. Pour quelles valeurs de θ sont-elles valides ? En utilisant ces relations, résoudre de nouveau les (in)équations de l'exercice précédent.

Exercice 11.— On se donne trois fonctions réelles de variable réelle, f, g et h. On ne dispose que des informations suivantes :

1. Le domaine de définition de f est $]-2,2[$, f s'annule en -1, 0, 1, elle est strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur les autres points,
2. Le domaine de définition de g est $[0,3]$, g s'annule en 0, 1, 2, elle est strictement positive en dehors de ces points.
3. Le domaine de définition de h est $]-1,1]$, h est positive sur son ensemble de définition.

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f+g$ définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
2. $f \cdot g \cdot h$ définie par $(f \cdot g \cdot h)(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$,
3. $\ln(f \cdot g)$, $\ln(f \cdot g \cdot h)$, $\ln(g+h)$,
4. $\sqrt{f \cdot g}$, $\sqrt{g+h}$.

Exercice 12.— Soient des fonctions $f :]-\infty, \pi/2] \to \mathbb{R}$ et $g :]-1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \sin x & \text{si } x \in]0, \pi/2]. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]-1/2, 1/2], \\ \ln x & \text{si } x > 1/2. \end{cases}$$

Déterminer le domaine de définition et l'expression des fonctions composées $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 13.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$.

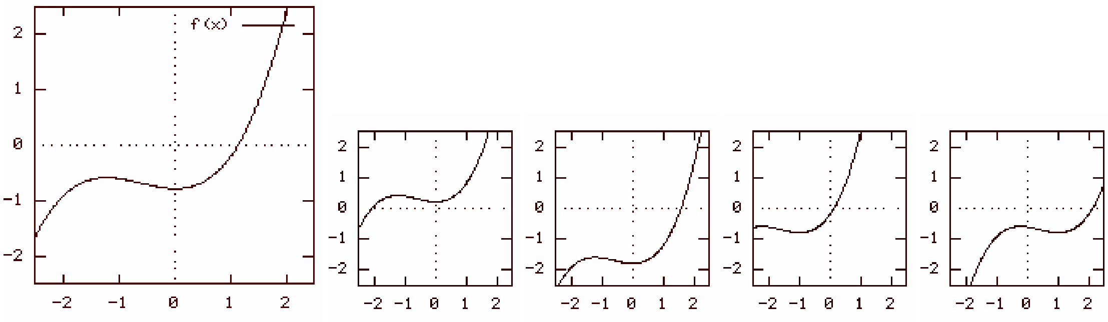
1. Montrer que pour tout $y \geq \ln 2$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \geq 1$.
2. Soit $g : [1, +\infty[\to [\ln 2, +\infty[$ la restriction de f à $[1, +\infty[$. Calculer $(g^{-1} \circ f)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 14.— Déterminer si les fonctions suivantes sont bien définies, injectives, surjectives, bijectives et, dans le dernier cas, donner l'expression de la fonction réciproque :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0, \\ -\frac{x}{2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{x}{2} & \text{si } x \leq 1, \\ (x-1)+1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1, \\ x^3 & \text{si } x > 1. \end{cases} \qquad f_4 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1], \\ x^3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 15.— Le premier dessin représente le graphe d'une fonction f. Parmi les quatre dessins suivants, lequel représente celui de la fonction $x \mapsto f(x) - 1$?



Même question pour les fonctions $x \mapsto f(x)+1$, $x \mapsto f(x+1)$, $x \mapsto f(x-1)$.

Exercice 16.— $\star$ Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(\pi x) \cos \pi(x-a)$. Déterminer pour quelles valeurs de a le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$.

Suites numériques et nombres réels

Exercice 17.— En utilisant la définition d'une limite donnée dans le cours, calculer les éventuelles limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour $n \in \mathbb{N}$, par

1. $u_n = 2$.
2. $u_n = a^n, a \in \mathbb{R}$ (on discutera selon les valeurs de a).
3. $u_n = \frac{n^n}{n!}$, $\quad v_n = \frac{n!}{2^n}$, $\quad w_n = \frac{a^n}{n!}$.

Exercice 18.— Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels convergeant vers une limite finie ℓ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $p_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(x_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

Exercice 19.— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est stationnaire.

Exercice 20.— Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sqrt{4 + \frac{(-1)^n}{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2 - \frac{1}{2n} \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 21.— Calculer les éventuelles limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour n suffisamment grand, par

1. $u_n = \frac{(-1)^n n^2+5}{n^2-8}$, $\quad v_n = \frac{3n^2-n+\cos n}{n^2-\sin n}$, $\quad w_n = 2^{-n}\sin(2^{-n})$.
2. $u_n = \frac{2n^2+3n-7}{e^n-n^8}$, $\quad v_n = \frac{n^n}{2^n}$, $\quad w_n = \frac{e^n}{n^n}$, $\quad x_n = \frac{n^n}{(n!)^{1/2}}$.
3. $u_n = \sin(\frac{\pi n}{2})$, $\quad v_n = (-1)^{(-1)^n}$, $\quad w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(-1)^n}}$.

Exercice 22.— Calculer les éventuelles limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et $v_n = (n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$.

Exercice 23.— Soit a un réel strictement supérieur à 1.

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que, pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq k$, on a :

$$a^n \geq \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}(a-1)^k = n^k \frac{(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{(k+1)!}(a-1)^k.$$

2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $n \geq n_k$, on a :

$$a^n \;\geq\; \frac{(a-1)^k}{2^k(k+1)!}\, n^k\,.$$

3. En déduire le résultat (admis) du cours suivant : pour tout $b \in \mathbb{Q}$, on a $\frac{a^n}{n^b} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Que devient cette limite si l'on suppose maintenant $|a| < 1$?

Exercice 24.— $\star$ En utilisant la deuxième question de l'exercice précédent, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$, on a $(1+\varepsilon)^n > n$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $n^{\frac{1}{n}}$ converge vers 1.

Exercice 25.— $\star$ Le but de cet exercice est de donner en fonction de n une expression simple du terme général des suites $(S_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{3,n})_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$S_{1,n} = \sum_{m=0}^{n} m, \quad S_{2,n} = \sum_{m=0}^{n} m^2, \quad S_{3,n} = \sum_{m=0}^{n} m^3.$$

1. En remarquant que $S_{1,n} = \sum_{m=0}^{n}(n-m)$, donner une expression simple de $2S_{1,n}$ puis de $S_{1,n}$.
2. (a) Montrer que pour tout réel x, on a $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
   (b) En déduire que
   $$\sum_{m=0}^{n}(m+1)^3 = \sum_{m=0}^{n}\left(m^3 + 3m^2 + 3m + 1\right)\,.$$
   (c) En déduire l'expression de $S_{2,n}$.
3. En vous inspirant de ce qui a été fait à la question précédente donner l'expression de $S_{3,n}$.

Exercice 26.—

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n et tout couple de réels (a,b), on a
$$a^n - b^n = (a-b)\Big(\sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j}b^j\Big).$$
2. Pour n impair, montrer que
$$a^n + b^n = (a+b)\Big(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a^{n-1-j}b^j\Big).$$

Exercice 27.— Donner la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies ci-dessous :

1. $u_n = \sum_{i=0}^{n}(\frac{1}{2})^i$,
2. $v_n = \sum_{i=0}^{n}(\frac{1}{2})^n$,
3. $w_n = \sum_{i=0}^{n} q^i$ (on discutera suivant les valeurs de q).

Exercice 28.—

1. En utilisant les développements de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, factoriser les expressions $\cos(a+1) - \cos(a-1)$ et $\cos(a+1) + \cos(a-1)$.
2. En déduire que la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Exercice 29.— Donner la borne supérieure et la borne inférieure des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

1. $[1,2]$, $]1,2[$, $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^\star\}$, $\{\frac{(-1)^n}{n} | n \in \mathbb{N}^\star\}$.

2. $f([-2,2])$ avec $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x > 1, \\ 1 & \text{si} \quad x \in [-1,1], \\ -x & \text{si} \quad x < -1. \end{cases}$
3. $g([0,2])$, où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \min(x, \sqrt{x})$.
4. $h(]0,2])$ où h est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $h(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

Exercice 30.— Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A+B$ la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A+B = \{a+b | a \in A, b \in B\}$.

1. Justifier que les ensembles A, B et $A+B$ admettent chacun une borne supérieure et que $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$.
2. Montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 31.— $\star$ On se donne A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. Justifier le fait que A et B admettent chacune une borne inférieure et une borne supérieure.
2. On suppose que $A \cap B$ est non vide. Justifier l'existence de $\inf(A \cap B)$ et $\sup(A \cap B)$ (resp. $\inf(A \cup B)$ et $\sup(A \cup B)$).
3. Comparer les réels $\inf(A \cap B)$ et $\inf(A \cup B)$.
4. Comparer également $\sup(A \cap B)$ et $\sup(A \cup B)$.

Exercice 32.— $\star$ Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit l'ensemble E_n par $E_n = \{k + \frac{n}{k} | k \in \mathbb{N}^\star\}$.

1. Montrer que E_n admet une borne inférieure, mais pas de borne supérieure.
2. Montrer que si $k \geq n+1$, alors $k + \frac{n}{k} \geq n+1 \geq \inf E_n$.
3. Montrer que $\inf E_n \geq 2\sqrt{n}$. Montrer qu'on a l'égalité quand n est le carré d'un entier.

Exercice 33.— $\star$ Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. On souhaite démontrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a$ (un tel élément a est appelé un point fixe de f). Pour cela, on considère l'ensemble $A = \{x \in [0,1] \text{ t.q. } f(x) \leq x\}$.

1. Montrer que $f(A) \subset A$.
2. Montrer que A admet une borne inférieure $a \in [0,1]$.
3. Montrer que $f(a)$ minore A.
4. Conclure.

Exercice 34.— Est-il vrai ou faux que :

1. si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$?
2. si une suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire ?
3. une suite est convergente si et seulement si elle est bornée ?
4. si une suite n'est pas majorée, elle est minorée ?

Exercice 35.— Soit a un réel strictement positif. On souhaite démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = a^{\frac{1}{n}}$ converge vers 1.

1. On suppose d'abord que $a > 1$.
   a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et minorée par 1.
   b) Montrer qu'elle ne peut pas admettre de limite $\ell > 1$ et conclure.
2. Conclure lorsque $a \in]0,1]$.

Exercice 36.— Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+$.

1. On suppose que $\ell \in [0,1[$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.

2. On suppose que $\ell > 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang. En déduire qu'elle admet une limite que l'on précisera.
3. Que dire lorsque $\ell = 1$?

Exercice 37.— $\star$

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. On considère $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. Donner la borne supérieure et la borne inférieure de A.
2. Que peut-on dire si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée ?
3. On se donne maintenant $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. On pose $A = B \cup C$ avec $B = \{y_n | n \in \mathbb{N}\}$ et $C = \{z_n | n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que la borne supérieure et la borne inférieure de A sont des éléments de A que l'on précisera.

Exercice 38.— $\star$ On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels tendant vers 0. On considère les deux suites $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$T_n = \sum_{m=0}^{2n} (-1)^m a_m, \quad \Sigma_n = \sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^m a_m.$$

1. Montrer que les deux suites $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_m$ est convergente.

Exercice 39.— Donner les valeurs d'adhérence des suites définies de la manière suivante :

1. $u_n = (-1)^n$,
2. $v_n = \sin \frac{n\pi}{2}$,
3. $w_n = \sin \frac{n\pi}{3}$,
4. $x_n = (v_n)^n$,
5. $y_n = |v_n|^{n/2}$,
6. $z_n = n v_n$.

Exercice 40.— Calculer l'éventuelle limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1. $u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}, \quad u_{2n+1} = 2n + 1$,
2. $u_{2n} = \frac{2n+4}{2^{2n}}, \quad u_{2n+1} = \frac{2n+7}{e^{2n+1}}$,
3. $u_{2n} = \frac{2n+4}{a^{2n}}, \quad a \neq 0, \quad u_{2n+1} = 2n + 1$ (on discutera suivant les valeurs de a),
4. $u_{3n} = \frac{3n+4}{3n}, \quad u_{3n+1} = 3, \quad u_{3n+2} = \frac{(3n+2)^2+1}{3n^2}$.

Exercice 41.— On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$u_n = \begin{cases} \frac{n\pi}{3} & \text{si} \quad n = 2m+1, \ m \in \mathbb{N}, \\ \frac{n\pi}{2} & \text{si} \quad n = 2m, \ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = \sin u_{n^2}$. Quelles sont ses valeurs d'adhérence ? Lorsque $n = 2m + 1$, on pourra considérer les cas où $m = 3q$, $m = 3q + 1$, $m = 3q + 2$, où $q \in \mathbb{N}$.

Exercice 42.— $\star$ Donner un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possédant exactement deux valeurs d'adhérence, trois valeurs d'adhérence, puis n valeurs d'adhérence (avec n entier, $n \geq 2$).

Exercice 43.— $\star$ On considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée et on définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \inf\{x_m | m \geq n\}$ et $z_n = \sup\{x_m | m \geq n\}$.

1. Montrer que pour tout entier n, on a : $y_n \leq x_n \leq z_n$.
2. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer (x_n) tend vers ℓ si et seulement si (y_n) et (z_n) tendent vers ℓ.
4. On suppose ici que $x_n = \cos n\frac{\pi}{4}$. Que peut-on dire des suites (x_n), (y_n) et (z_n) ?
5. Montrer que les suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire le résultat suivant : une suite est convergente si et seulement si elle est bornée et admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice 44.—

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 45.— Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 46.—

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :
$$\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n}.$$
2. Plus généralement, montrer que quels que soient les entiers n et p dans $\mathbb{N}^*$ on a
$$\left|\sum_{j=n}^{n+p} \frac{(-1)^j}{j}\right| \leq \frac{1}{n}.$$
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j}, \; n \in \mathbb{N}^*,$$
est une suite de Cauchy.
4. Pourquoi peut-on affirmer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente ?

Exercice 47.— $\star$ On rappelle la propriété suivante de $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier (nécessairement unique) $[x]$, appelé partie entière de x, tel que $[x] \leq x < [x] + 1$.

1. Donner $[2]$, $[\frac{5}{2}]$, $[-\frac{1}{3}]$.
2. Pour tout x réel et tout entier naturel n, on pose $x_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$. Donner les valeurs de x_n pour $x = \pi$ et $0 \leq n \leq 5$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $|x - x_n| \leq 10^{-n}$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel x quel que soit ce réel x.

   On a montré que tout réel est limite d'une suite de rationnels. En langage mathématique, on dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Que peut-on dire de x si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire ?

Exercice 48.— On considère la fonction définie par $f(x) = 2$ pour tout réel x.

1. Montrer, en revenant à la définition du cours, que $f(x)$ admet pour limite $f(x_0)$ en $x_0 = 3$.
2. Montrer, en revenant à la définition du cours, que $f(x)$ admet pour limite $f(x_0)$ en tout x_0 réel.

Exercice 49.—
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

1. Déterminer un réel α_1 tel que
$$|x-1| < \alpha_1 \implies |g(x)-1| < 10^{-1}.$$
2. Soit ϵ un réel strictement positif. Déterminer un réel α_2 tel que
$$|x-1| < \alpha_2 \implies |g(x)-1| < \epsilon.$$
3. Soit ϵ et x_0 deux réels strictement positifs. Déterminer un réel α_3 tel que
$$|x-x_0| < \alpha_3 \implies |g(x)-g(x_0)| < \epsilon.$$

Exercice 50.— On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \frac{x+2}{x+3}$.

1. Déterminer un réel α_1 tel que
$$|x-1| < \alpha_1 \implies |h(x) - \frac{3}{4}| < 10^{-1}.$$
2. Soit ϵ un réel strictement positif. Déterminer un réel α_2 tel que
$$|x-1| < \alpha_2 \implies |h(x) - \frac{3}{4}| < \epsilon.$$

Exercice 51.— Déterminer la limite des expressions suivantes au point indiqué :

$$f_1(x) = x^2+1 \quad (1)\,, \qquad f_2(x) = -x - \ln x \quad (+\infty)\,, \qquad f_3(x) = x - \ln x \quad (+\infty)\,,$$
$$f_4(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x-1) \quad (1^+)\,, \qquad f_5(x) = x^2 - x \quad (-\infty)\,.$$

Exercice 52.— En utilisant uniquement le fait que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ lorsque $x \to 0$, établir que $\cos x \to 1$ lorsque $x \to 0$, puis étudier la limite des expressions suivantes au point x_0 indiqué :

$$f_1(x) = \frac{\cos x}{x - \pi/2}\,, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}\,; \qquad f_2(x) = \frac{\tan x}{x}\,, \quad x_0 = 0\,; \qquad f_3(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}\,, \quad x_0 = 0\,.$$

Exercice 53.— Etudier la limite des expressions suivantes au point indiqué :

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \quad (1)\,, \qquad f_2(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \quad (0)\,, \qquad f_3(x) = \frac{|x|}{x} \quad (0^{\pm})\,,$$
$$f_3(x) = \frac{\sin 4x}{\tan 5x} \quad (0)\,, \qquad f_4(x) = \frac{|\sin 4x|}{\tan 5x} \quad (0^{\pm})\,, \qquad f_5(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad (\pi/2)\,.$$

Exercice 54.— Déterminer les limites de chacune des expressions suivantes aux points indiqués :

$$\frac{2x^3-3x^2+1}{-4x^3+3x+1} \quad (+\infty \text{ et } 1)\,, \qquad \frac{2x+3}{3x^4+2}e^x \quad (+\infty)\,, \qquad \frac{2x+3}{3x^4+2}e^{\ln x} \quad (+\infty)\,,$$
$$(3x^4-2x^2)e^{-x} \quad (+\infty)\,, \qquad (3x^2-2x)e^{-\sqrt{x}} \quad (+\infty)\,, \qquad (3x^2-2x)e^{-2\ln x} \quad (+\infty)\,,$$
$$\sqrt{x}\ln(x^2+2x) \quad (0 \text{ et } +\infty)\,, \qquad \frac{\ln(x^2+2x)}{\sqrt{x}} \quad (0 \text{ et } +\infty)\,.$$

Exercice 55.— Déterminer la limite des expressions suivantes au point indiqué :

$$f_1(x)=\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} \quad (0)\,, \qquad f_2(x)=\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)} \quad (+\infty)\,, \qquad f_3(x)=\frac{\sqrt{\ln(1+e^x)}}{x^2} \quad (+\infty)\,,$$
$$f_4(x)=\sin x\sin(1/x^2) \quad (-\infty)\,.$$

Exercice 56.— Déterminer si les fonctions suivantes sont bien définies au voisinage de $+\infty$, puis si elles ont une limite lorsque $x\to+\infty$:

$$e^{x+\cos x}-e^x\,, \quad \frac{\sin\sqrt{x+1}}{\sin\sqrt{x}}\,, \quad \sqrt{1+\sin x+x}-\cos x\,, \quad \sqrt{1+x}+\sin\ln x-\sqrt{x}\,.$$

Exercice 57.— Dans cet exercice les fonctions notées ε sont définies (au moins) dans un certain voisinage de 0 et ont pour limite 0 en 0.

1. Déterminer les domaines de définition, resp D_a, D_b des fractions rationnelles suivantes :
$$a(x)=\frac{2x+4}{x^2+x-2}\,, \qquad b(x)=\frac{x-1}{x^4+2x^2+1}\,.$$
2. Justifier l'existence de deux fonctions ε_1 et ε_2 telles que pour tout x dans D_a :
$$a(x)=\frac{2}{3}+\varepsilon_1(x-4) \quad \text{et} \quad a(x)=-\frac{2}{5}+\varepsilon_2(x+4)\,.$$
Les fonctions ε_1, ε_2 sont-elles égales ?
3. Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Justifier l'existence d'une fonction ε_0 telle que pour tout h dans $\mathbb{R}$:
$$b(x_0+h)=\frac{x_0-1}{x_0^4+2x_0^2+1}+\varepsilon_0(h)\,.$$
Donner une formule pour la fonction ε_0.

Exercice 58.— $\star$ Soit $E:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ la fonction partie entière définie de la façon suivante : pour tout nombre réel x, on notera $E(x)$ l'unique entier $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\le x<k+1$.

1. Soit $x_0\in\mathbb{Z}$. Montrer que $E(x)$ admet en $x=x_0$ des limites à droite et à gauche distinctes.
2. Soit $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Montrer que $E(x)$ admet une limite lorsque $x\to x_0$.
3. La fonction E admet-elle des limites en $\pm\infty$?
4. Montrer que la fonction $f(x)=xE(1/x)$ admet une limite lorsque $x\to0$.

Exercice 59.— $\star$ Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on note $I_1(x)=[0,x]$, $I_2(x)=[-x,x]$ et $I_3(x)=[x,+\infty[$. Etant donnée une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on va définir des fonctions N_1, N_2, $N_3:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ de la façon suivante. Soit $k\in\{1,2,3\}$ et $x\in\mathbb{R}$. Si f admet un nombre fini $n(x)\in\mathbb{N}$ de zéros dans l'intervalle $I_k(x)$, on pose $N_k(x)=n(x)$. Sinon, on pose $N_k(x)=-1$. Déterminer si les fonctions N_k admettent une limite en 0.

Exercice 60.—

1. En revenant à la définition, justifier que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue en 1, puis en tout réel x_0.
2. Mêmes questions avec la fonction $x \mapsto x^3$, puis $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 61.— Démontrer soigneusement, en précisant les fonctions et opérations employées, la continuité des fonctions définies par les formules suivantes,

$$f_1(x) = \sin(x^2 + e^x)\,, \quad f_2(x) = \ln(1 - x^2) + \sqrt{2 - x^2}\,, \quad f_3(x) = \tan e^{-x}\,, \quad f_4(x) = E(x^2)\,,$$

sur les intervalles respectifs $I_1 = \mathbb{R}$, $I_2 =]-1, 1[$, $I_3 =]\ln(2/\pi), +\infty[$ et $I_4 = [1, \sqrt{2}[$.

Exercice 62.— Déterminer le domaine de définition puis étudier la continuité des fonctions définies par les formules suivantes :

1. $\sqrt{x^3 - 3}$
2. $\ln((x-1)^2(x+2)^4)$
3. $\ln(\sqrt{x^2+1} - 2)$
4. $\ln||x-1|+1|$
5. $\ln||x+1|-1|$
6. $\ln||x-1|-1|$
7. $\ln|\sqrt{x-1}+1|$
8. $\ln|\sqrt{x-1}-1|$
9. $\sqrt{\ln(x+1)-1}$

Exercice 63.—Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque :

$$1.\ u_n = \sqrt{4 + \frac{(-1)^n}{n}}\,, \qquad 2.\ u_n = n^{\frac{1}{n}}\,, \qquad 3.\ u_n = (\ln n)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 64.— Soit f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules :

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donner une formule pour la fonction composée $f \circ g$. Donner de même une formule pour $g \circ f$. Sur quels ensembles ces fonctions sont-elles continues ?

Exercice 65.— Peut-on prolonger par continuité à tout $\mathbb{R}$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par les formules suivantes :

$$f_1(x) = 4x - \frac{\sqrt{9x^2}}{x}\,, \quad f_2(x) = \sin(x)\ln|x|\,, \quad f_3(x) = 1 + \frac{e^x}{x}\,, \quad f_4(x) = \frac{(1+x^3)-1}{x}\ ?$$

Exercice 66.— $\star$ On considère une fonction f définie sur $]0,1]$ telle qu'il existe un réel $K > 0$ vérifiant

$$\forall x, y \in]0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

1. Montrer que f est continue sur $]0,1]$.
2. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers zéro à valeurs dans $]0,1]$ alors la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
3. En déduire que f admet un prolongement par continuité sur $[0,1]$.

Exercice 67.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0\,, \\ 2 + x & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue ?

2. Donner l'image par f de chacun des intervalles $[-2,-1]$, $[0,+\infty[$, $[-1,1]$.

Exercice 68.— Donner — éventuellement par son graphe — un exemple de fonction f continue sur le segment $[0,1]$ telle que $f(0)f(1)<0$ et pour laquelle l'équation $f(x)=0$ admet dans $[0,1]$:

1. une solution et une seule, en $x=\frac{1}{2}$,
2. exactement deux solutions,
3. une infinité de solutions.

Exercice 69.— Montrer que les équations suivantes ont au moins une solution dans l'intervalle I :

1. $x^7-x^2+1=0$ sur $I=[-2,0]$.
2. $\sqrt[3]{x^3+6x+1}-3x=2$ sur $I=\mathbb{R}$.
3. $\tan x=\dfrac{3}{2}x$ sur $I=]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}[$.

On pourra donner une valeur approchée de l'une de ces racines en utilisant la méthode de la dichotomie — à l'aide du moyen de calcul de son choix.

Exercice 70.— Soit $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=l<1\,.$$

Montrer qu'il existe $\alpha\geq 0$ tel que $f(\alpha)=\alpha$.

Exercice 71.— $\star$ On s'intéresse ici à l'existence de valeurs laissées invariantes par une fonction f.

1. Montrer que l'équation $\cos x=x$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ admet une solution sur l'intervalle $[0,1]$.
2. Montrer que plus généralement, si $f:[0,1]\to[0,1]$ est une fonction continue alors l'équation $f(x)=x$ d'inconnue $x\in[0,1]$ admet au moins une solution.
3. Donner des exemples de fonctions f comme dans le point précédent telles que :
   a. l'équation $f(x)=x$ d'inconnue $x\in[0,1]$ admet exactement une solution.
   b. l'équation $f(x)=x$ d'inconnue $x\in[0,1]$ admet exactement deux solutions.
   c. l'équation $f(x)=x$ d'inconnue $x\in[0,1]$ admet une infinité de solutions.

Exercice 72.— $\star$ Montrer que l'équation $\sin x=\frac{x}{x+1}$ d'inconnue $x\in[0,+\infty[$ admet une infinité de solutions. On pourra pour cela introduire la fonction différence entre les deux membres de l'égalité et tester ses valeurs aux points de la forme $2k\pi$ et $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{N}$.

Exercice 73.— $\star$ Pour un entier naturel $n\geq 2$, on considère la fonction polynomiale définie par :

$$p_n(x)=x^n-n.x+n-2\,.$$

1. Montrer que l'équation $p_n(x)=0$ d'inconnue $x\in[0,1]$ admet une unique solution notée α_n.
2. Quel est le signe de $p_{n+1}(\alpha_n)$? La suite (α_n) est-elle monotone ?
3. A quelle condition naturelle sur $\beta>0$ peut-on affirmer que pour tous les entiers n à partir d'un certain rang on a l'encadrement $1-\frac{\beta}{n}\leq\alpha_n\leq 1$. Quelle est la limite de la suite (α_n) ?
4. A quelle condition naturelle sur $\beta>0$ peut-on affirmer qu'à partir d'un certain rang on a $\alpha_n\leq 1-\frac{\beta}{n}$? Il pourra être utile d'étudier le signe de la fonction $\phi(\beta)=e^{-\beta}+\beta-2$.
5. Quelle est la limite de $(n(1-\alpha_n))$?

Exercice 74.— $\star$ On considère un cycliste qui parcourt 90km en 4 heures.

1. Est-il raisonnable de considérer que la fonction $d:t\mapsto d(t)$ donnant la distance parcourue jusqu'à un instant t est continue ?
2. Montrer qu'il existe un intervalle de deux heures pendant son trajet durant lequel il a parcouru exactement 45km.

3. Montrer qu'il existe un intervalle de 80mn pendant le trajet du cycliste durant lequel il a parcouru exactement 30km.
4. Généralisation ?

Exercice 75.— $\star$ Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues telles que $g \circ f = f \circ g$.

1. On note $E = \{x \in [0,1] \ : \ f(x) = x\}$. Montrer qu'il existe au moins un élément $x_0 \in E$.
2. Vérifier que si $x \in E$ alors $g(x) \in E$.
3. On veut montrer ici que E possède un plus petit élément, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in E$ tel que $\alpha \leq x$ pour tout $x \in E$.
   a. Montrer que E possède une borne inférieure $\alpha \in [0,1]$.
   b. En considérant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E convergeant vers α, montrer que $\alpha \in E$ et conclure.
4. On peut montrer de même que E a un plus grand élément noté β. En étudiant la fonction $\phi(x) = f(x) - g(x)$ sur le segment $[\alpha, \beta]$, montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Dérivée — TAF

Exercice 76.— En revenant à la définition, démontrer qu'une fonction constante sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée nulle.

Exercice 77.— On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$. En revenant à la définition, montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et préciser sa dérivée sur cet intervalle. La fonction g est-elle dérivable en zéro ?

Exercice 78.—

1. En revenant à la définition, montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable en tout réel x_0 de dérivée $2x_0$.
2. Même question avec la fonction $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ (on pourra utiliser la factorisation de $a^n - b^n$).

Exercice 79.— $\star$

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ si x est un rationnel et $f(x) = 0$ si x est un irrationnel. La fontion f est-elle dérivable en zéro ? Continue en zéro ?
2. On considère maintenant la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$ si x est un rationnel et $h(x) = 0$ si x est un irrationnel. Montrer que la fonction h dérivable en zéro.

Exercice 80.— Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\phi(x) = \begin{cases} a + bx - x^2 & x \leq 0\,, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & x > 0\,. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de a et b la fonction ϕ est-elle continue ?
2. Pour quelles valeurs de a et b la fonction ϕ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 81.— Soient $f, g, h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\,, \quad g(x) = \sin\sqrt{x}\,, \quad h(x) = \cos\sqrt{x}\,.$$

Prolonger chacune des fonctions f, g, h par continuité en 0, puis étudier la dérivabilité de ce prolongement.

Exercice 82.— Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sin f(x^2)\,, \quad f_2(x) = \sin(f(x)^2)\,, \quad f_3(x) = \sin^2 f(x)\,,$$
$$f_4(x) = \sqrt{1 + f(x)^4}\,, \quad f_5(x) = \ln(2 + \cos f(x))\,, \quad f_6(x) = \tan\frac{\pi}{2 + f(x)^2}\,.$$

Exercice 83.— Etude de formes indéterminées.

1. Ecrire le $\mathrm{DL}_1(0)$ des fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \cos x$. Discuter, en fonction de la valeur des paramètres réels α et β, si
$$\frac{\alpha\sqrt{1+x}+\beta\cos x}{x}\,.$$
admet ou non une limite lorsque $x \to 0^+$.
2. Ecrire le $\mathrm{DL}_1(1)$ des fonctions $x \mapsto \ln^2 x$ et $x \mapsto \cos(x^2)$. Discuter, en fonction de la valeur du paramètre réel α, si
$$\frac{\ln^2 x+\alpha\cos x^2}{x-1}$$
admet une limite lorsque $x \to 1$.

Exercice 84.— Déterminer le domaine de définition de la fonction :
$$f(x)=\frac{\ln(1+x^3)\ln x}{x-1}\,.$$
Montrer que f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}_+$. Etudier la dérivabilité à droite en 0 de ce prolongement.

Exercice 85.— Pour chacune des fonctions suivantes : préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité puis calculer l'expression de la fonction dérivée.
$$f_1(x)=x^2+1+x^{11}+x^{101}\,,\qquad f_2(x)=x^5\cos x\,,\qquad f_3(x)=e^x\sin x\,,$$
$$f_4(x)=\frac{1+x}{x-7}\,,\qquad f_5(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}\,,\qquad f_6(x)=\frac{1-x^3}{(1+x)^2}\,,\qquad f_7(x)=\frac{x+\sin x}{\cos x}\,,$$
$$f_8(x)=(1+x^2)^{2/3}\,,\qquad f_9(x)=\sqrt{1+(x\sin x)^2}\,,\qquad f_{10}(x)=\ln\tan x\,,$$
$$f_{11}(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,,\qquad f_{12}(x)=\frac{1}{1+\sin x}\,,\qquad f_{13}(x)=\frac{x^2}{2-\cos x}\,,\qquad f_{14}(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}\,,$$
$$f_{15}(x)=\exp(1/\ln x)\,,\qquad f_{16}(x)=\ln\ln\ln x\,,\qquad f_{17}(x)=x|x|\,,\qquad f_{18}(x)=\frac{x^2}{1+|x|}\,.$$

Exercice 86.— Soient $f(x)=\sin x$ et $g(x)=-x\cos x$. Montrer qu'en tout point d'intersection des graphes de f et g, les tangentes sont perpendiculaires.

Exercice 87.— Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $\phi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définies par
$$f(x)=\tan\frac{x^4-1}{x^4+1}\,,\qquad \phi(x)=\frac{x-1}{x+1}\,.$$
Quelle est l'image de ϕ ? En déduire que $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 88.— Soit f la fonction définie par
$$f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{si}\quad x\geq 1\\ x^2-x & \text{si}\quad x<1\end{cases}$$
1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$. Donner une formule pour sa dérivée.
2. Quelle est la limite de $f'(x)$ lorsque $x\to 1$? La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 89.— Déterminer l'ensemble de définition, étudier les variations et rechercher les extrema locaux de chacune des fonctions suivantes :
$$f_1(x)=x^4-x^2\,,\qquad f_2(x)=x^5-5x^3\,,\qquad f_3(x)=\frac{x}{1+x^2}\,,$$
$$f_4(x)=\frac{\ln x}{x}\,,\qquad f_5(x)=x\ln x\,,\qquad f_6(x)=e^x\sin x\,.$$

Exercice 90.— Etudier les variations et rechercher les extrema locaux des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos x + \sin x\,, \quad f_2(x) = \cos x - \sin x\,, \quad f_3(x) = \frac{1}{2}x - \sin x\,, \quad f_4(x) = x + 2\cos x\,.$$

Exercice 91.— Étudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 92.— On veut ici démontrer l'encadrement $2x/\pi < \sin x < x$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$.

1. Montrer que l'on a $x\cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^{-1}\sin x$ sur l'intervalle $]0, \pi]$. Conclure.

Exercice 93.— $\star$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

1. Démontrer, sans grands calculs, que l'équation $f'(x) = 0$ d'inconnue réelle x admet au moins trois solutions.
2. Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction Q définie par $Q(x) = P(a + x)$ est une fonction polynomiale et en déduire que $P(a) = 0$ si et seulement si il existe une fonction polynomiale $\tilde{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $P(x) = (x - a)\tilde{P}(x)$ pour tout x réel.
3. En déduire que l'équation $f'(x) = 0$ d'inconnue réelle x admet exactement trois solutions.

Exercice 94.— $\star$ Montrer que si une fonction polynomiale admet n (un entier) racines distinctes dans $\mathbb{R}$ alors sa dérivée admet $n-1$ racines. Est-il vrai, *a contrario* , que si la dérivée admet $n-1$ racines, alors la fonction admet au moins n racines ? Donner un exemple.

Exercice 95.— Etablir les inégalités suivantes :

1. Pour tous réels a et b : $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$,
2. Pour tous réels x et h : $|\cos(x + h) - \cos x| \leq |h|$,
3. Pour tout réel x : $|e^{2x} - e^x| \leq |x|e^{2|x|}$.

Exercice 96.— Soit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}\,.$$
2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer la limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive. Que peut-on en conclure ?

Exercice 97.— Quelques calculs de limites.

1. A l'aide du théorème des acroissements finis, montrer que pour tout $x > 0$:
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}\,.$$
2. En déduire successivement les limites des fonctions suivantes lorsque $x \to +\infty$:
$$f_1(x) = \sqrt{x}\,(\ln(x+1) - \ln x)\,, \qquad f_2(x) = x\,(\ln(x+1) - \ln x)\,.$$

Exercice 98.— $\star$ On considère une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $]a, b]$. On suppose que $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ existe et est finie.

1. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $]a, b]$ qui converge vers a alors la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2. En déduire que f admet un prolongement par continuité sur $[a, b]$.
3. Montrer que ce prolongement est dérivable en a.

Exercice 99.—

1. Démontrer que pout tout réel x appartenant à un intervalle $[a, b]$, il existe un réel $t \in [0, 1]$ tel que $x = (1 - t)a + bt$.
2. Montrer que pour tout réel $a \in [0, 1]$, pour tous nombres réels x, y et pour tout entier naturel p, on a
$$(ax + (1 - a)y)^{2p} \leq ax^{2p} + (1 - a)y^{2p}.$$
3. Quel est le plus grand intervalle $J \subset \mathbb{R}$ tel que
$$(ax + (1 - a)y)^{2p+1} \leq ax^{2p+1} + (1 - a)y^{2p+1}$$
pour tous $x, y \in J$, $a \in [0, 1]$ et p entier naturel ?

Exercice 100.— En utilisant les deux dernères questions de l'exercice précédent, montrer que
$$(ax + (1 - a)y)^{1/n} \geq ax^{1/n} + (1 - a)y^{1/n}$$
pour tous $a \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^\star$, $x, y \geq 0$.

Exercice 101.— On considère la fonction f de $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\begin{cases} f(x) &= \alpha x + \beta \quad \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ f(x) &= ax + b \quad \text{si} \quad x \in [1, 2]. \end{cases}$$
Comment faut-il choisir α, β, a, b pour que la fonction f soit continue sur $[0, 2]$? dérivable sur $[0, 2]$? convexe sur $[0, 2]$?

Exercice 102.— $\star$

1. Donner un polynôme P de degré 4 tel que la fonction $x \mapsto P(x)$ soit convexe sur $\mathbb{R}$ tout entier (on remarquera que l'on peut construire un tel P à partir d'un polynôme de degré 2 à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $X^2 + 1$ ou $X^2 + X + 1$).
2. Un tel polynôme peut-il admettre plus de deux racines réelles ?
3. Donner un polynôme P_2 de degré 4 tel que la fonction $x \mapsto P_2(x)$ soit convexe sur $\mathbb{R}$ tout entier et admettant deux racines réelles distinctes.
4. Même question avec deux racines réelles d'ordre de multiplicité deux.
5. Même question avec aucune racine réelle.

Suites Récurrentes

Exercice 103.— On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle définie ?
2. Pour quelle valeurs de u_0 la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle croissante ? Décroissante ?
3. Pour quelles valeurs de u_0 la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet-elle une limite ? Dans ce cas quelle est cette limite ?

Exercice 104.—

1. Etudier le signe de la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto x - \ln x$.
2. Montrer que quel que soit le réel $a > 0$, la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln u_n$ et $u_0 = a$ n'est pas définie pour tout entier n.

Exercice 105.—

1. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$.
2. En déduire que le suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$, avec $u_0 > 0$, est convergente.

Exercice 106.— On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ avec $u_0 > 0$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 107.— ⋆ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n positif et $u_0 > -1$.

1. Justifier que u_n est définie pour tout n.
2. Donner le sens de variation de la fonction f sur $]-1, +\infty[$.
3. On pose $l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que si $u_0 > l$ alors $u_0 > u_2 > l > u_1$ et que si $-1 < u_0 < l$ alors $u_0 < u_2 < l < u_1$.
4. On suppose $u_0 > l$. On définit les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$) par $v_n = u_{2n}$ (resp. $w_n = u_{2n+1}$). Etudier la convergence des deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. En déduire que si $u_0 > l$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.
6. Que peut-on dire si $u_0 \in]-1, l[$?

Exercice 108.—

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit par récurrence les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $x_0 = a$, $y_0 = b$, et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n + y_n}.$$

1. Etudier le signe de x_n et y_n.
2. Montrer que ces deux suites sont décroissantes.
3. En déduire que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites que l'on précisera.

Exercice 109.— On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs majorée par $M \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}.$$

1. Etudier la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $y_{n+1} = \sqrt{M + y_n}$, $y_0 = \sqrt{M}$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n on a $x_n \leq y_n$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 110.— Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 0, a_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

Soit aussi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $b_n = a_n - a_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que (b_n) est une suite géométrique et donner son expression explicite.
2. Que vaut $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$?
3. En déduire l'expression de a_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (a_n).

Exercice 111.— $\star$

1. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \cos(x_n)$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite x_n est convergente.
2. Que peut-on dire de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $y_{n+1} = \sin(y_n)$ et $y_0 \in \mathbb{R}$?

Exercice 112.—

On considère une fonction f de classe C^1 d'un intervalle $[a, b]$ dans lui-même telle que $|f'(x)| < 1$ pour tout réel $x \in [a, b]$

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in [a, b]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l vérifiant $f(l) = l$.
3. Montrer que f admet un unique point fixe dans $[a, b]$.

Exercice 113.—

1. Déterminer un réel $K \in]0, 1[$ tel que pour tous x, y dans $[0, 1]$:
$$|\cos x - \cos y| \leq K|x - y|.$$
2. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \cos u_n$ et $u_0 \in [0, 1]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l tel que $\cos l = l$.

Fonctions réciproques

Exercice 114.— Déterminez les réels m pour que la fonction définie par $f(x) = \ln(x^3 + x^2 + mx)$ soit une bijection de $]0, +\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.

Exercice 115.—Calculer les limites suivantes lorsque $x \to +\infty$:
$$f_1(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \qquad f_2(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x.$$

Exercice 116.— Soit $f(x) = \arccos \cos x$ et $g(x) = \arcsin \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est périodique de période 2π. Simplifier $f(x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. Dessiner le graphe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est périodique de période 2π. Simplifier $g(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$. Dessiner le graphe de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 117.— Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
2. Exprimer $\tan(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$. En déduire une expression simplifiée de $\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.
3. Justifier que $f(x) = \arcsin(2\sin(x)\cos(x))$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et simplifier $f(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 118.— Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.
2. $\sqrt{3}\cos(3x) + \sin(3x) = 1$.
3. $\sin x - 2\cos(2x) = 0$.

Exercice 119.— Montrer l'égalité $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$. On pourra commencer par calculer $\tan(\alpha+\beta)$ en fonction de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$.

Exercice 120.— $\star$ Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\arctan 2x + \arctan x = \pi/4$.
2. $\arcsin 2x - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin x$.
3. $\arctan x + \arctan(x\sqrt{3}) = 7\pi/12$.

Exercice 121.— $\star$ Montrez que $\arcsin(4/5) = 2\arctan(1/2)$.

Exercice 122.— $\star$ Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Montrer que $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Que se passe-t-il lorsque x est au voisinage de $-\infty$?

Exercice 123.— $\star$ Donnez le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \arccos(x^2 + 2x - 1).$$

Calculez la dérivée de f, et précisez le domaine de validité de ce calcul.

Exercice 124.— Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (en précisant le domaine de validité du calcul). En déduire une nouvelle expression plus simple pour la fonction initiale.

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{2}\right), \quad g(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Exercice 125.— On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{2x} - 3e^x - 4$.

1. Vérifier que f est une bijection de $I = [\ln\frac{3}{2}, +\infty[$ dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la réciproque de f.
2. Vérifier que f est convexe sur I.
3. Montrer que f^{-1} est concave sur J
4. Que peut-on dire sur $]-\infty, \ln\frac{3}{2}]$?

Exercice 126.— $\star$

1. On considère une fonction f dérivable sur un intervalle $I =]a, b[$ telle que $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \in I$ et f' décroissante sur I. Montrer que f est une bijection de I dans un intervalle que l'on précisera. On note f^{-1} la réciproque. Montrer que f^{-1} est convexe sur J.
2. Que peut-on dire si on suppose maintenant f' croissante ?

Primitives — intégrales

Exercice 127.— Préciser l'ensemble de définition et déterminer les primitives des fonctions :

$$f_1(x) = \tan^2 x, \quad f_2(x) = \tan x, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}, \quad f_4(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$
$$f_5(x) = |x^2 - 1|, \quad f_6(x) = \frac{1}{(x-5)^3}, \quad f_7(x) = \ln(4-x), \quad f_8(x) = |x|^{2/5}.$$

Exercice 128.—

1. En utilisant les sommes de Riemann, calculer $\int_0^1 x^2dx$. On rappelle que $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. En utilisant les sommes de Riemann associées à des fonctions que l'on déterminera, calculer les limites des suites suivantes :
   a) $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n\alpha+i\beta}$ avec α et β deux réels strictement positifs,
   b) $I_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 129.— Déterminer les limites de $\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$ et de $\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}$.

Exercice 130.— Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \cos x \sin^4 x dx\,, \quad I_2 = \int_0^2 (1+|x-1|^3)dx\,, \quad I_3 = \int_{\pi/4}^0 \tan x dx\,,$$
$$I_4 = \int_0^{\pi/6} \cos^3 x + \sin^3 x dx\,, \quad I_5 = \int_{-1}^{-2} \frac{x^2}{4+x^3}dx\,, \quad I_6 = \int_0^{1/2} \frac{e^{\arctan(2x)}}{1+4x^2}dx\,,$$
$$I_7 = \int_{1/2}^0 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad I_8 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad I_9 = \int_0^{-1} x\sqrt{1+x^2}dx\,, \quad I_{10} = \int_{-1}^2 |x|dx\,.$$

Exercice 131.— On note $D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \sin x + \cos x \neq 0\}$.

1. Déterminer D. Quel est le plus grand intervalle $I \subset D$ contenant 0 ?
2. On définit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ en posant $f(x) = (\sin x)(\cos x + \sin x)^{-1}$. Trouver les réels a, b tels que $f(x) = a + b(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^{-1}$.
3. Déterminer une primitive de f sur I.

Exercice 132.— Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2)$.

1. Etudier f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point $E(e, f(e))$.
3. Calculer l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe et la tangente T.

Exercice 133.— Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^3+3x^2+7x+5}\,.$$

On recherche une primitive de f.

1. Trouver une racine réelle évidente du polynôme x^3+3x^2+7x+5.
2. On note x_0 la racine précédente. Déterminer les réels p, q tels que
$$x^3+3x^2+7x+5 = (x-x_0)(x^2+px+q)\,.$$
3. Déterminer les réels a, b, c tels que
$$f(x) = \frac{a}{x-x_0} + \frac{bx+c}{x^2+px+q}\,.$$
4. Déterminer les réels λ et μ tels que $bx+c = \lambda(2x+p)+\mu$.
5. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \frac{1}{(x+1)^2+4}\,.$$
Trouver une primitive de g.

6. Conclure.

Exercice 134.— Soit la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}\,.$$

1. Etudier les variations sur $]1,+\infty[$ de la fonction $f(x) = (x\ln x)^{-1}$.
2. En déduire que pour tout entier $k \geq 2$ on a la majoration
$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)dt\,,$$
puis donner pour tout $n \geq 2$ une minoration de u_n par une intégrale à préciser.
3. Soit un entier $n \geq 2$. Calculer
$$I_n = \int_2^{n+1} f(t)dt\,.$$
En déduire $\lim I_n$ et $\lim u_n$.

Exercice 135.— Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}dx\,,\quad I_2 = \int_0^{\pi/3} x\cos(2x)dx\,,\quad I_3 = \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}dx\,,\quad I_4 = \int_0^{1/2} \arcsin x dx\,.$$

Exercice 136.— A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur leur intervalle de définition :

$$f(x) = (x^2-x)(\ln x - 1)\,,\quad g(x) = 2x^3 e^{x^2+1}\,,\quad h(x) = \frac{x+1}{e^x}\,.$$

Exercice 137.— Soit la fonction $I :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $\alpha > 0$ par

$$I(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx\,.$$

1. Déterminer les réels a, b, c tels que
$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}\,.$$
2. En utilisant une intégration par parties, calculer $I(\alpha)$.
3. Calculer $\lim_{0^+} I(\alpha)$.

Exercice 138.— Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (x\cos x + \sin x)\ln x dx\,,\quad I_2 = \int_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x)dx\,,\quad I_3 = \int_1^e (\ln x)^3 dx\,.$$

Exercice 139.— Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle sur lequel ce calcul est valable.

$$f_1(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,,\quad f_2(x) = \arcsin x\,,\quad f_3(x) = \frac{1}{1+4x^2}\,,\quad f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,.$$

Exercice 140.— On veut calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \sin(\pi x^{1/3})dx\,.$$

1. Trouver une primitive de $\phi(x) = x^2 \sin x$ en effectuant plusieurs intégrations par parties.
2. Calculer I en utilisant le changement de variables $u = \pi x^{1/3}$.

Exercice 141.— Justifier la bonne définition de chacune des intégrales suivantes, puis trouver leur valeur à l'aide du changement de variable indiqué :

$$\int_0^2 x\sqrt{x+1}dx\,, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x dx\,, \qquad \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx\,, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}\,.$$

On posera respectivement $u = x+1$, $u = \cos^2 x$, $u = \cos x$ et $x = u^2 - 1$.

Exercice 142.— $\star$ Calculer l'intégrale suivante où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$:

$$\int_a^b x\sqrt{(b-x)(x-a)}\,\mathrm{d}x.$$

On pourra utiliser le changement de variables $x = (1-t)a + tb$ où la nouvelle variable t varie dans l'intervalle $[0,1]$ puis le changement de variables $t = \sin^2 u$ où u varie dans $[0, \pi/2]$.

Exercice 143.— Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-1}^1 \arctan\left(\frac{1+\cos^5 x}{\pi + \sqrt{x^8 - 2x^4 + 1}}\right)\sin x dx\,.$$

Exercice 144.— Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère les fonctions suivantes :

$$\varphi_1(x) = \int_0^{\cos x} f(t)dt, \qquad \varphi_2(x) = \int_x^{x^3} f(t)dt, \qquad \varphi_3(x) = \int_x^{x^3} f(tx)dt\,.$$

1. Montrer que φ_1 et φ_2 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer φ_1' et φ_2'.
2. Montrer que φ_3 est continue en 0, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ puis calculer $\varphi_3'(x)$ si $x \neq 0$.
3. Montrer que $\varphi_3 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 145.— $\star$ On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}dt\,.$$

1. Pourquoi f est-elle bien définie ? Montrer qu'il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire que f est constante et calculer sa valeur.

Exercice 146.—

1. Montrer que pour tous entiers $n \geq 2$ et $p \geq 1$, on a
$$\sum_{j=n}^{n+p} \frac{1}{j^2} \leq \int_{n-1}^{n+p} \frac{1}{x^2}dx.$$
2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose
$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}.$$
Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy. Que peut-on conclure ?

3. Généraliser ce résultat à la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ définie, pour tout $n \geq 1$, par

$$T_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^m} \ , \quad \text{où } m \text{ est un entier fixé supérieur ou égal à 2.}$$

Exercice 147.— $\star$ Pour tout entier naturel n on note :

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{\sin x}\,, \qquad I_n = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} f_n(x)dx\,.$$

1. Justifier la bonne définition de I_n. Rappeler les valeurs $\sin(\pi/3)$, $\sin(2\pi/3)$, $\tan(\pi/6)$, $\tan(\pi/3)$.
2. Donner la valeur de I_1.
3. Donner la valeur de I_0. On pourra effectuer le changement de variable $t = \tan(x/2)$ en utilisant la relation $\sin x = 2t/(1+t^2)$.
4. n étant un entier naturel, simplifier $I_{n+2} - I_n$ en utilisant autant de fois que nécessaire la relation trigonométrique $\cos p - \cos q = -2\sin((p-q)/2)\sin((p+q)/2)$.
5. En déduire la valeur de I_n lorsque n est impair.
6. Donner les valeurs de I_2 et de I_4.

Exercice 148.— $\star$ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\,, \\ -x\ln x & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

On pose pour tout $(h,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$I_k = \int_0^1 \frac{(f(x))^k}{k!}dx \quad \text{ et } \quad H_{h,k} = \int_0^1 x^h(\ln x)^k dx\,.$$

1. Calculer I_1.
2. Montrer que $(h+1)H_{h,k} = -kH_{h,k-1}$ pour tout $k \geq 1$.
3. Calculer $H_{h,0}$. En déduire que $H_{h,k} = (-1)^k k!(h+1)^{-k-1}$.
4. En utilisant ce qui précède trouver la valeur de I_k.

Exercice 149.— $\star$ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 que l'on suppose strictement croissante. On considère les deux intégrales :

$$I_1 = \int_a^b f(t)dt\,, \qquad I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt\,.$$

1. Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Faire le changement de variable $t = f(u)$ dans I_2 et calculer I_2 en fonction de I_1.
3. En supposant $a, b, f(a), f(b) \geq 0$, faire un dessin des deux sous-graphes $0 \leq y \leq f(x)$ et $0 \leq x \leq f^{-1}(y)$ et interpréter ce résultat géométriquement.