Rappel de cours

Definition 1. Soit E un K-espace vectoriel. Une partie F de E est appele un sous-espace vectoriel si :

- $0_E \in F$,
- $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$,
- $\lambda.u \in F$ pour tout $\lambda \in K$ et tout $u \in F$.

Definition 2. Une famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de E est une famille libre ou linéairement indépendante si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, cest-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_p = 0$$

Definition 3. Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E. La famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$. Ce qui peut s'écrire aussi :

$$\forall v \in E, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p, v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p$$

Exercice 1

1-a

Il suffit de montrer les 3 conditions qui définissent un sous-espace vectoriel.

- $0_F \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La fonction $0_F : x \to 0$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $0_F \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- Pour tout $u, v \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $u+v \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, car la somme de 2 fonctions continues est une fonction continue
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\lambda.u \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car la multiplication par une constante ne change pas la continuité d'une fonction.

Donc $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1-b

Notons $G(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f \in C(\mathbb{R},R)$ qui sont dérivables et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + xf(x) = 0$. Il suffit de montrer les 3 conditions qui définissent un sous-espace vectoriel.

- $0_C \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $0'_C(x) + x.0_C(x) = 0 + x.0 = 0$ donc $0_C \in G(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- Pour tout $u, v \in G(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $u'(x) + x.u(x) = 0$ et $v'(x) + x.v(x) = 0$. On a $(u+v)'(x) + x.(u+v)(x) = u'(x) + v'(x) + x.u(x) + x.v(x) = 0 + 0 = 0$. Donc $u + v \in G(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in G(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $(\lambda.u(x))' + x.(\lambda.u(x)) = \lambda.u'(x) + \lambda.x.u(x) = \lambda(u'(x) + x.u(x)) = \lambda.0 = 0$ donc $\lambda.u \in G(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Donc $G(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1-c

Notons $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f \in C(\mathbb{R},R)$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$. Il suffit de montrer les 3 conditions qui définissent un sous-espace vectoriel.

- $0_C \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $0 \leq 0_E(x) \leq 1$
- Pour tout $u, v \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $0 \leq u(x) \leq 1$ et $0 \leq v(x) \leq 1$. On a $(u+v)(x) = u(x) + v(x) \geq 1$. Donc $u + v \notin H(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in G(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\lambda.u(x) \geq 1$ lorsque $\lambda > 1$ donc $\lambda.u \notin H(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Donc $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 2

2-a

Famille libre?
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1(3,5) + \lambda_2(7,-3) = 0$

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 7\lambda_2 = 0 & (1) \\ 5\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 7\lambda_2 = 0 & \\ 0\lambda_1 + 44\lambda_2 = 0 & 5(1) - 3(2) \end{cases}$$

On a $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$. Donc, la famille est libre.

Famille génératrice?

$$\forall v=(x,y)\in E, \exists \lambda_1,\lambda_2, v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2=\lambda_1(3,5)+\lambda_2(7,-3)$$

$$\begin{cases} 3\lambda_1+7\lambda_2=x & (1)\\ 5\lambda_1-3\lambda_2=y & (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lambda_1+7\lambda_2=x & (1)\\ 0\lambda_1+44\lambda_2=5x-3y & 5(1)-3(2)\end{cases}$$

Il existe $\lambda_2=\frac{5x-3y}{44}$ et $\lambda_1=\frac{3x+y}{44}$. Donc, la famille est génératrice.

2-c

Famille libre?
$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3=\lambda_1(1,2,3)+\lambda_2(4,5,6)+\lambda_3(2,1,7)=0$

$$\begin{cases} 1\lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3=0 & (1)\\ 2\lambda_1+5\lambda_2+1\lambda_3=0 & (2)\\ 3\lambda_1+6\lambda_2+7\lambda_3=0 & (3)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3=0 & (1)\\ 0\lambda_1-3\lambda_2-3\lambda_3=0 & (2)-2(1)=(4)\\ 0\lambda_1-6\lambda_2+1\lambda_3=0 & (3)-3(1)=(5)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3=0 & (1)\\ 0\lambda_1-3\lambda_2-3\lambda_3=0 & (2)-2(1)=(4)\\ 0\lambda_1-33\lambda_2+0\lambda_3=0 & 3(5)+(4)\end{cases}$$

On a $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$ et $\lambda_1=0$. Donc, la famille est libre.

Famille génératrice?

$$\forall v=(x,y,z)\in E, \exists \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3, v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3=\lambda_1(1,2,3)+\lambda_2(4,5,6)+\lambda_2(2,1,7)$$

$$\begin{cases} 1\lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3=x & (1)\\ 2\lambda_1+5\lambda_2+1\lambda_3=y & (2)\\ 3\lambda_1+6\lambda_2+7\lambda_3=z & (3)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3=x & (1)\\ 0\lambda_1-3\lambda_2-3\lambda_3=y-2x & (2)-2(1)=(4)\\ 0\lambda_1-6\lambda_2+1\lambda_3=z-3x & (3)-3(1)=(5)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3=x & (1)\\ 0\lambda_1-3\lambda_2-3\lambda_3=y-2x & (4)\\ 0\lambda_1-33\lambda_2+0\lambda_3=3(z-3x)+y-2x=3z-11x+y & 3(5)+(4)\end{cases}$$

Il existe $\lambda_2=-\frac{3z-11x+y}{33}$, $\lambda_3=\frac{5x-3y}{44}$ et $\lambda_1=\frac{3x+y}{44}$. Donc, la famille est génératrice.

2-d

Famille libre?

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \lambda_1(1,2,3,4) + \lambda_2(2,3,4,5) + \lambda_3(4,5,6,7) = 0$$

$$\begin{cases} 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 & (1) \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 & (2) \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 & (3) \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 & (4) \end{cases}$$

Famille génératrice?

$$\forall v = (x,y,z) \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \lambda_1(1,2,3,4) + \lambda_2(2,3,4,5) + \lambda_3(4,5,6,7)$$

$$\begin{cases} 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = x & (1) \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = y & (2) \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 = z & (3) \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 7\lambda_3 = w & (4) \end{cases}$$

Exercice 3

3-a

$$v = (1,-1) = \lambda_1.(1,2) + \lambda_2.(5,3) = (\lambda_1 + 5\lambda_2, 2\lambda_1 + 3\lambda_2)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 1 & (1) \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - 5\lambda_2 & (1) \\ 2 - 10\lambda_2 + 3\lambda_2 = -1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - 5\lambda_2 & (1) \\ \lambda_2 = \frac{3}{7} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - 5\frac{3}{7} = \frac{7}{7} - \frac{15}{7} = \frac{-8}{7} & (1) \\ \lambda_2 = \frac{3}{7} & (2) \end{cases}$$

Dans la base $\mathcal{B}$, $v = (\frac{-8}{7}, \frac{3}{7})$.

3-b

$$v = (1+X)^3 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3 = \lambda_1 + X\lambda_2 + X^2\lambda_3 + X^3\lambda_4$$

Dans la base $\mathcal{B}$, $v = (1,3,3,1)$???

3-c

$$v = X^2 = \lambda_1 + (X+1)\lambda_2 + (X+1)^2\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + X(\lambda_2 + 2\lambda_3) + X^2\lambda_3$$

Dans la base $\mathcal{B}$, $v = (1,-2,1)$???

3-d

$$v = \cos^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos_2) = \lambda_1 + \lambda_2 \cos + \lambda_3 \sin + \lambda_4 \cos_2 + \lambda_5 \sin_2$$

Dans la base $\mathcal{B}$, $v = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0)$???

Exercice 4

On fixe x_2, x_3, x_4 et on regarde comment x_1 est impacté. Soit la base $((x_{11},1,0,0),(x_{12},0,1,0),(x_{13},0,0,1))$, pour vérifier $2x_1+3x_2-x_3+x_4=0$ il faut $x_{11}=\frac{-3}{2}$, $x_{12}=\frac{1}{2}$ et $x_{13}=-\frac{1}{2}$.
Ceci est mécamiquement une base car les 3 vecteurs sont mutuellement indépendants.

Exercice 8

$$E+F=\{v\in\mathbb{R}^3 : v=\lambda_{1e}u_1+\lambda_{2e}u_2+\lambda_{3e}u_3+\lambda_{1f}u_4+\lambda_{2f}u_5\}$$

Il faut résoudre:

$$\begin{cases} \lambda_{1e}+\lambda_{2e}+3\lambda_{3e}+\lambda_{1f}+\lambda_{2f} \\ 2\lambda_{1e}+0\lambda_{2e}+2\lambda_{3e}+\lambda_{1f}+2\lambda_{2f} \\ 3\lambda_{1e}-\lambda_{2e}+1\lambda_{3e}+\lambda_{1f}+2\lambda_{2f} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

λ_{3e}, et λ_{1f} sont indéterminés, donc les vecteurs u_3 et u_4 peuvent s'exprimer en fonction des 3 autres vecteurs ($u_3=u_1+2u_2$ et $u_4=1/2.(u_1+u_2)$). Donc la base de $E+F$ est $\{u_1,u_2,u_5\}$.

$$E\cap F=\{v\in\mathbb{R}^3 : v=\lambda_{1e}u_1+\lambda_{2e}u_2+\lambda_{3e}u_3 \wedge v=\lambda_{1f}u_4+\lambda_{2f}u_5\}$$
$$E\cap F=\{v\in\mathbb{R}^3 : \lambda_{1e}u_1+\lambda_{2e}u_2+\lambda_{3e}u_3-\lambda_{1f}u_4-\lambda_{2f}u_5=0\}$$

$$\begin{cases} \lambda_{1e}+\lambda_{2e}+3\lambda_{3e}-\lambda_{1f}-\lambda_{2f}=0 & (1) \\ 2\lambda_{1e}+0\lambda_{2e}+2\lambda_{3e}-\lambda_{1f}-2\lambda_{2f}=0 & (2) \\ 3\lambda_{1e}-\lambda_{2e}+1\lambda_{3e}-\lambda_{1f}-2\lambda_{2f}=0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_{1e}=-\lambda_{2e}-3\lambda_{3e}+\lambda_{1f}+\lambda_{2f} & (1) \\ \lambda_{2e}=-2\lambda_{3e}+\frac{1}{2}\lambda_{1f}=0 & (2) \\ \lambda_{2f}=0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{1e}=-\lambda_{2e}-3\lambda_{3e}+(4\lambda_{3e}+2\lambda_{2e}=\lambda_{2e}+\lambda_{3e} & (1) \\ \lambda_{1f}=4\lambda_{3e}+2\lambda_{2e} & (2) \\ \lambda_{2f}=0 & (3) \end{cases}$$

La base est $\{x\in\mathbb{R}^3 : (\lambda_{2e}+\lambda_{3e})u_1+\lambda_{2e}u_2+\lambda_{3e}u_3\}$, $\{x\in\mathbb{R}^3 : (2\lambda_{2e}+4\lambda_{3e}, 2\lambda_{2e}+4\lambda_{3e}, 2\lambda_{2e}+4\lambda_{3e})\} = \{x\in\mathbb{R}^3 : (1,1,1)\}$.

QED