

Exercice 1

Exercice 1.1

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial r} &= \frac{2r \cos(\theta)}{\partial r} = 2 \cos(\theta) \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} &= \frac{2r \cos(\theta)}{\partial \theta} = -2r \sin(\theta) \\ \frac{\partial Y}{\partial r} &= \frac{3r \sin(\theta)}{\partial r} = 3 \sin(\theta) \\ \frac{\partial Y}{\partial \theta} &= \frac{3r \sin(\theta)}{\partial \theta} = 3r \cos(\theta)\end{aligned}$$

Exercice 1.2

Dérivable ??

La matrice Jacobienne de $F(r, \theta)$ est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cos(\theta) & -2r \sin(\theta) \\ 3 \sin(\theta) & 3r \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

Le déterminant Jacobien est $(2 \cos(\theta))(3r \cos(\theta)) - (-2r \sin(\theta))(3 \sin(\theta)) = 6r \cos^2(\theta) + 6r \sin^2(\theta) = 6r$

Exercice 1.3

D'après le théorème d'inversion locale, notons $x_0 = (1, 0)$ si $DF(1, 0)$ est inversible et F est de classe C^1 alors $\exists r > 0$, tel que $B = B(x_0, r)$ et la restriction de F à B est un difféomorphisme sur $B \rightarrow F(B)$. On sait que F est de classe C^1 , que $DF(1, 0)$ est inversible car son déterminant Jacobien est $6 * 1 = 6$ (différent de 0). $F(1, 0) = (2 * 1 * \cos(0), 3 * 1 * \sin(0)) = (2, 0)$. Donc F est un difféomorphisme sur $(1, 0) \rightarrow (2, 0)$.

Exercice 1.4

Montrons que l'application $F(r, \theta)$ est bijective. Soit (x, Y) tel que $F(r, \theta) = (x, y)$ on a alors

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = (r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)) = r^2$$

donc on peut définir r uniquement à partir de (x, y) .

$$\frac{2y}{3x} = \frac{6r \sin(\theta)}{6r \cos(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

donc on peut définir θ uniquement à partir de (x, y) .

L'application réciproque est

$$F^{-1}(x, y) = \left(\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2}, \arctan\left(\frac{2y}{3x}\right) \right)$$

$$DF^{-1}(2, 0) = \left(\frac{\partial F^{-1}}{\partial x}(2, 0), \frac{\partial F^{-1}}{\partial y}(2, 0) \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial F^{-1}}{\partial x}(2, 0) = \frac{x}{4\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}}(2, 0) =$$

$$\frac{\partial F^{-1}}{\partial y}(2, 0) = \frac{6x}{4y^2 + 9x^2}(2, 0) = \frac{1}{3}$$

donc

$$DF^{-1}(2, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$$

Exercice 1.5

On a $X(1, 0) + Y(1, 0) = 2.1. \cos(0) + 3.1. \sin(0) = 2$. Donc l'équation $X(r, \theta) + Y(r, \theta) = 2$ admet au moins la solution $(1, 0)$.
la suite???

Exercice 2

Exercice 2.1

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 1$ Rien compris.

Exercice 3

Exercice 3.1

Aucune idée

Exercice 3.2

$$\begin{aligned}\nabla f_1(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial e^{x+y+z}}{\partial x}, \frac{\partial e^{x+y+z}}{\partial y}, \frac{\partial e^{x+y+z}}{\partial z} \right) = (e^{x+y+z}, e^{x+y+z}, e^{x+y+z}) \\ \nabla f_2(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z} \right) = (3x^2, -3y^2, 1 + 3z^2)\end{aligned}$$

Exercice 3.3

$$\det \begin{vmatrix} e^{x+y+z} & e^{x+y+z} \\ -3y^2 & 1 + 3z^2 \end{vmatrix} = e^{x+y+z}(1 + 3z^2 + 3y^2)$$

C'est nul si $e^{x+y+z} = 0$ pas possible, ou $1 + 3z^2 + 3y^2 = 0$ impossible aussi. Donc le déterminant est non toujours nul.

Exercice 3.4

On peut prendre $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z) - a_0) + (f_2(x, y, z) - b_0)$. car, $(x, y, z) \in \Gamma \implies f_1(x, y, z) - a_0 = 0 \wedge f_2(x, y, z) - b_0 = 0$.

Exercice 3.5

???

Exercice 4

Exercice 4.1

Rien compris
QED