Exercice 1

Question 1.1

Supposons que la proposition est vraie, on a

$$\frac{\sqrt{n}(V_n^2 - \sigma^2)}{\sqrt{\bar{\mu_4} - \sigma^4}} = \mathscr{N}(0,1)$$

$$(V_n^2 - \sigma^2) = \frac{\sqrt{\bar{\mu_4} - \sigma^4}}{\sqrt{n}} \mathscr{N}(0,1)$$

$$(V_n^2 - \sigma^2) = \mathscr{N}(0, \frac{\bar{\mu_4} - \sigma^4}{n})$$

$$V_n^2 = \sigma^2 + \mathscr{N}(0, \frac{\bar{\mu_4} - \sigma^4}{n})$$

$$V_n^2 = \mathscr{N}(\sigma^2, \frac{\bar{\mu_4} - \sigma^4}{n})$$

Donc la proposition est vraie si V_n^2 suit une loi normale. Il faut montrer que $E(V_n^2) = \sigma^2$ et $V(V_n^2) = \frac{\bar{\mu_4} - \sigma^4}{n}$.

$$E(V_n^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left((X_i - m)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2 - 2X_i m + m^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - 2E(X_i m) + E(m^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - E(X_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

et

$$V(V_n^2) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V((X_i - m)^2) =$$

????

Question 1.2

$$\hat{\sigma}_n^2 = V_n^2 - (\bar{X}_n - m)^2$$

Question 1.3

Question 1.4

Exercice 2

Question 2.1

Si une variable aléatoire X_i suit une loi normale $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ alors sa loi chi deux de degrés n est égale à $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$. Comme on a la variable aléatoire X_i suit une loi normale $\mathscr{N}(5, \sigma^2)$, on a $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - 5}{\sigma}\right)^2$ qui suit la loi de chi deux de degrés n.

Question 2.2

Calculons $E(V_n^2)$, si c'est égal à σ^2, c'est que l'estimateur est non biaisé. D'abord on simplifie:

$$V_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-5)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-10X_i+25) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 10\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}25$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 50 + 25 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 25$$

Petit rappel $E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 5$ la moyenne.

Donc

$$E(V_n^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-5)^2\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 25\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - 25 =$$

Mais on a $\sigma^2 = V(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i)$ donc $E(X_i^2) = \sigma^2 + E^2(X_i)$. Dans notre cas $E(X_i) = 5$ donc $E(X_i^2) = \sigma^2 + 25$.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - 25 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 + 25 - 25 = \sigma^2 + 25 - 25 = \sigma^2$$

V_n^2 est un estimateur non biaisé donc $B(V_n^2) = 0$.

Le risque quadratique est défini par

$$R(V_n^2) = E((V_n^2-5)^2) = B^2(V_n^2) + V(V_n^2) = V(V_n^2) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-5)^2\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V((X_i-5)^2)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E((X_i-5)^2-5)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2-10X_i+25-5)^2$$

????

Question 2.3