Rappel de cours

Definition 1. Bla bla

Exercice 1

Exercice 1.1

Les 2 premières colonnes de la matrice $M = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ sont linéairement indépendantes. Il s'en suit que l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ associée est surjective. C'est donc un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.

Calcul de $Ker(M)$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -9\lambda_2 + 15\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{2}{5}\lambda_2 \\ \lambda_3 = \frac{3}{5}\lambda_2 \end{cases}$$

Donc $Ker(M) = \{(-2, 5, 3)\}$ donc $\dim Ker(M) = 1$

Il faut trouver une solution particulière

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 6\lambda_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \\ -9\lambda_2 + 15\lambda_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \\ 3\lambda_3 = 1 + \frac{9}{5}\lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lambda_3 = 1 + \frac{9}{5}\lambda_2 \\ \lambda_1 = -\frac{2}{5}\lambda_2 \end{cases}$$

Une solution particulière est $\{0, 0, \frac{1}{3}\}$.

La nature est une droite affine.

L'équation paramátrique est donc

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{vmatrix} + (\mathbb{R} \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix})$$

Exercice 1.2

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ avec $f(x, y, z) = M. \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$. et il y a une solution si $\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$

Exercice 1.3

Nommons $H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + 3z = 1$ et $H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 4y - 6z = 2$. Chaque équation du sous-système admet une solution (ie. F). Ceux sont donc des sous espaces affines. Il reste a montrer que ceux sont des plans. On peut dire que $F = H_1 \cup H_2$ car c'est la solution du système.

Exercice 2

Exercice 2.1

Soit $M_1 = \begin{vmatrix} -1 & \lambda & -3 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix}$. Calculons $Ker(M_1)$.

$$\begin{cases} -x + \lambda y - 3z = 0 \\ x - 3y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + \lambda y - 3z = 0 \\ (\lambda - 3)y + (-3 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3z + 3y \\ 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda = 3$, on a $Ker(M_1) = \{(-3, 0, 1), (3, 1, 0)\}$, ce 'est pas une droite affine mais un plan affine car $\dim Ker(M_1) = 2$. Si $\lambda \neq 3$, on a $Ker(M_1) = \{(-\lambda - 3, -1, 1)\}$.

Soit $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & -2 \end{vmatrix}$. Calculons $Ker(M_2)$.

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ \lambda x - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -z \\ \lambda x = 2z \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$, $Ker(M_2) = \{(1, 0, 0)\}$. Si $\lambda \neq 0$, $Ker(M_2) = \{(\frac{2}{\lambda}, -1, 1)\}$

Exercice 2.2

Solution particulère de M_1 quand $\lambda \neq 3$

$$\begin{cases} -x + \lambda y - 3z = \lambda - 1 \\ x - 3y + \lambda z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + \lambda y - 3z = \lambda - 1 \\ (\lambda - 3)y + (\lambda - 3)z = (\lambda - 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - (\lambda + 3)z \\ y = 1 - z \end{cases}$$

Les points $A_1 = (1 - (\lambda + 3)z, 1 - z, z)$. Donc, on a la droite affine $(1 - (\lambda + 3)z, 1 - z, z) + \mathbb{R}(-\lambda - 3, -1, 1)$

Solution particulère de M_2 quand $\lambda = 0$

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

Les points $A_2 = (x, 2, 0)$. Donc, on a la droite affine $(x, 2, 0) + \mathbb{R}(1, 0, 0)$

Solution particulère de M_2 quand $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} y + z = -\lambda + 2 \\ \lambda x - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\lambda + 2 - z \\ x = \frac{2}{\lambda} z \end{cases}$$

Les points $A_2 = (\frac{2}{\lambda} z, -\lambda + 2 - z, z)$. Donc, on a la droite affine $(\frac{2}{\lambda} z, -\lambda + 2 - z, z) + \mathbb{R}(\frac{2}{\lambda}, -1, 1)$

Exercice 2.3

Pour M_1 on a $\lambda \neq 3$. Premier cas $\lambda = 0$, on a donc 2 coefficients directeur de droites affines $(-3, -1, 1)$ pour M_1 et $(-1, 0, 0)$ pour M_2. Les 2 droites ne sont pas parallèles (car leurs coefficients directeurs ne peuvent pas être égaux), donc non confondues aussi. Elles sont donc sécantes.

Second cas $\lambda \neq 0$, on a donc 2 coefficients directeur de droites affines $(-\lambda - 3, -1, 1)$ pour M_1 et $(\frac{2}{\lambda}, -1, 1)$ pour M_2. Pour que les droites soient parallèles il faut que $-\lambda - 3 = \frac{2}{\lambda}$. Donc trouver les solutions de l'équation $|lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, soit $\lambda = -2$ ou $\lambda = -1$. Pour que les droites soient confondues, il faut également que leurs points soient identiques, pour les valeurs de $lambda$. Quand $\lambda = 1$, on a $A_1 = (-3z, 1 - z, z)$ et $A_2 = (2z, 1, z)$, il existe un point commun quand $z = 0$. C'est le point $A = (0, 1, 0)$. Quand Quand $\lambda = 2$, on a $A_1 = (1 - 5z, -1, z)$ et $A_2 = (z, 0, z)$. Il n'existe pas de point commun (à cause de y).

Pour résumer:

- $\lambda = 0$, droites sécantes
- $\lambda = 1$, et point $(0, 1, 0)$, droites confondues
- $\lambda = 1$, et point non $(0, 1, 0)$, droites parallèles
- $\lambda = 2$, droites parallèles
- $\lambda \neq 3$, droites sécantes

Exercice 5

Exercice 5.1

Le plan passe par l'origine donc Quand $x = y = z = 0$, il faut que l'équation soit vraie. Donc le terme de gauche doit être 0. Il faut donc

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b = -c \end{cases}$$

Donc $x - y + z = 0$ est une équation du plan passant par l'origine et de vecteurs $(1, 2, 1)$ et $(0, 1, 1)$.

Exercice 5.2

Plan parallèlle donc il doit vérifier l'équation $kx - ky + kz = b$. Il passe par le point $(0, 0, 1)$ donc $k = b$. Ce qui fait que un plan déquation $kx - ky + kz = k$

Son équation paramétrique

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + (\mathbb{R} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} + \mathbb{R} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix})$$

Exercice 5.3

Droite passant par le point $(1, 0, 0)$ et dirigée par le vecteur $(1, 0, 1)$. Équation paramétrique

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + (\mathbb{R} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix})$$

Donc son équation est

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 + 0t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Intersection est donc

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \\ kx - ky + kz = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Le point d'intersection est $(1, 0, 0)$.

Exercice 16

La dimension d'un espace affine est celle de sa direction. Donc, un espace affine de dimension 1 est une droite.

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R} \to & \mathbb{R}^n \\ & x \to & \begin{pmatrix} a_1x + b_1 \\ \vdots \\ a_nx + b_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

Exercice 17

Si une application affine f commute avec toute translation t on a $f \circ t = t \circ f$. Une tranlation de vecteur v est caractérisée par $t_v(a) = b$ avec $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{v}$ ou sous la forme d'une application affine $t_v(x) = x + \overrightarrow{v}$. Une application linéaire s'écrit sous la forme $f(x) = f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax})$. Donc

$$f \circ t_v(x) = f(t_v(x)) = f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{at(x)})$$

$$t_v \circ f(x) = t_v(f(x)) = f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax}) + \overrightarrow{v}$$

Donc par commutation

$$f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{at(x)}) = f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax}) + \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{at(x)}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax}) + \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a(x + \overrightarrow{v})}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax}) + \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax}) + \overrightarrow{v}$$

$\overrightarrow{f}$ est une application linéaire donc

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax}) + \overrightarrow{v}$$

Donc $\overrightarrow{f}(x) = Id(x)$. Par conséquent $f(x) = f(a) + \overrightarrow{ax}$ qui est par définition une translation.

Exercice 18

Si c'est une homotéthie de centre O et de rapport k alors on a $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OB'}$. avec $\overrightarrow{OA} = (1 - x_o, 1 - y_o)$, $\overrightarrow{OA'} = (-2 - x_o, 2 - y_o)$, $\overrightarrow{OB} = (1 - x_o, 3 - y_o)$ et $\overrightarrow{OB'} = (-2 - x_o, 1 - y_o)$. Il faut résoudre le systémptyse

$$\begin{cases} 1 - x_o = k(-2 - x_o) \\ 1 - y_o = k(2 - y_o) \\ 1 - x_o = k(-2 - x_o) \\ 3 - yo = k(1 - y_o) \end{cases}$$

(1) et (3) identiques

$$\begin{cases} 1 - x_o = k(-2 - x_o) \\ 1 - y_o = k(2 - y_o) \\ 3 - y_o = k(1 - y_o) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 2k + x_o(k - 1) = 0 \\ 1 - 2k + y_o(k - 1) = 0 \\ 3 - k + y_o(k - 1) = 0 \end{cases}$$

(3)-(2) donne $k = -2$. Donc $x_o = -1$ et $y_o = 5/3$.

C'est une homotéthie de centre $O = (-1, 5/3)$ et de rapport $k = -2$.

Exercice 21

Exercice 21.1

On a $h : M_1 \to M_2, \overrightarrow{AM_2} = \lambda\overrightarrow{AM_1}$ et $h' : M_1 \to M_2, \overrightarrow{BM_2} = \mu\overrightarrow{AM_1}$ et $\lambda\mu = 1$. Soit un point O on a par h, $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_2} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM_1}) = \lambda\overrightarrow{OM_1} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OA}$. de même on a par h', $\overrightarrow{OM_2} = \lambda\overrightarrow{OM_1} + (1 - \mu)\overrightarrow{OB}$.

Calculons $h \circ h'(M)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Oh \circ h'(M)} = \overrightarrow{Oh(h'(M))} &= \lambda\overrightarrow{Oh'(M)} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} = \lambda(\mu\overrightarrow{OM} + (1 - \mu)\overrightarrow{OB}) + (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} \\ &= \lambda\mu\overrightarrow{OM} + \lambda(1 - \mu)\overrightarrow{OB} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

comme on a $\lambda\mu = 1$ donc

$$\overrightarrow{Oh \circ h'(M)} = \overrightarrow{OM} + (\lambda - 1)\overrightarrow{OB} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + (1 - \lambda)\overrightarrow{BA}$$

Donc

- si $A = B$ on a $\overrightarrow{Oh \circ h'(M)} = \overrightarrow{OM}$, donc l'identité.
- si $A \neq B$ on a $\overrightarrow{Oh \circ h'(M)} = \overrightarrow{OM} + (1 - \lambda)\overrightarrow{BA}$, qui est une translation de vecteur $(1 - \lambda)\overrightarrow{BA}$

Pour $h' \circ h(M)$, même résultat raisonnement. Donc

- si $A = B$ on a $\overrightarrow{Oh \circ h'(M)} = \overrightarrow{OM}$, donc l'identité.
- si $A \neq B$ on a $\overrightarrow{Oh \circ h'(M)} = \overrightarrow{OM} + (1 - \mu)\overrightarrow{AB}$, qui est une translation de vecteur $(1 - \mu)\overrightarrow{AB}$

Exercice 21.2

Avec $\lambda = 1/3$ et $\mu = 2$ on a

$$\overrightarrow{Oh \circ h'(M)} = \lambda\mu\overrightarrow{OM} + \lambda(1 - \mu)\overrightarrow{OB} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} = 2/3\overrightarrow{OM} - 1/3\overrightarrow{OB} + 2/3\overrightarrow{OA} =??$$

$$\overrightarrow{Oh' \circ h(M)} = \mu\lambda\overrightarrow{OM} + \mu(1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + (1 - \mu)\overrightarrow{OB} = 2/3\overrightarrow{OM} + 4/3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =??$$