Révision

Definition 1. Un *n-espace Euclidien* $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de n réels (appelé *n-tuple*).

$$\mathbb{R}^n = \{(p_1, \ldots, p_n), p_i \text{est un réel pour } i = 1, \ldots, n\}$$

Si $p = (p_1, \ldots, p_n)$ et $q = (q_1, \ldots, q_n)$, on définit $p + q = (p_1 + q_1, \ldots, p_n + q_n)$ et $\lambda p = (\lambda p_1, \ldots, \lambda p_n)$.

Definition 2. On définit le produit scalaire $\cdot$ dans $\mathbb{R}$ comme

$$p \cdot q = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$$

La norme d'un vecteur comme

$$\|p\| = \sqrt{p \cdot p}$$

La distance entre 2 points:

$$distance(p, q) = \|p - q\|$$

Definition 3. On définit le produit scalaire $\cdot$ dans $\mathbb{C}$ comme

$$p \cdot q = \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{q}_i$$

Definition 4. On a les propriétés suivantes: $p \cdot q = q \cdot p$, $(p + r) \cdot q = p \cdot q + r \cdot q$, $(\lambda p) \cdot q = \lambda(p \cdot q) = p \cdot (\lambda q)$ et $\|\lambda p\| = |\lambda| \|p\|$.
Les inégalités suivantes: $|p \cdot q| \leq \|p\| \|q\|$ (Cauchy-Schwarz) et $\|p + q\| \leq \|p\| + \|q\|$ (triangulaire).

Definition 5. On définit un angle entre 2 vecteurs comme:

$$\cos \theta = \frac{p \cdot q}{\|p\| \|q\|}$$

Definition 6. On définit une application linéaire A (linear map) de $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ comme:

$$A(\lambda_1 p + \lambda_2 q) = \lambda_1 A p + \lambda_2 A q$$

Definition 7. On définit une application linéaire J (complex) de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ comme:

$$J(p, q) = (-q, p)$$

L'application J a les propriétés suivantes: $J^2 = -1$, $(Jp) \cdot (Jq) = p \cdot q$ et $(Jp) \cdot p = 0$.

Definition 8. On définit une courbe paramétrée $\alpha(t) :]t_1, t_2[\to \mathbb{R}^n$ comme:

$$\alpha(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t))$$

avec chaque $a_i(t)$ une fonction de $]t_1, t_2[\to \mathbb{R}$.

Exemple de courbes paramétrées,

- la droite passant par 2 points p et q, $\beta(t) = p + t(q - p) = (1 - t)p + tq$
- le cercle de centre $p = (p_1, p_2)$ et de rayon r, $\theta(t) = (p_1 + r\cos(t), p_2 \sin(t))$ avec $0 \leq t < 2\pi$.

Definition 9. Si $\alpha(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t))$ est une courbe paramétrée, on définit la vitesse (vélocuté)de α comme:

$$v(t) = \|\alpha'(t)\| \; avec \; \alpha'(t) = (a_1'(t), a_2'(t), \ldots, a_n'(t))$$

Definition 10. Une courbe $\alpha(t) =]t_1, t_2[\to \mathbb{R}^n$ est dite réguliaire si chaque $a_i(t)$ est dérivable et que la vélocité en tout point n'est pas nulle. Si $\forall t \in]t_1, t_2[, \|\alpha'(t)\| = 1$ alors α est dite *vitesse unité*

Definition 11. Soit 2 courbes paramétrables différentiables $\alpha(t) = (a,b) \to \mathbb{R}^n$ et $\beta(t) = (a,b) \to \mathbb{R}^n$, on dit que:

- β est une *reparamétrage positif* de α si il existe une fonction dérivable $h : (c,d) \to (a,b)$ tel que $\forall tin]c,d[, h'(t) > 0$ et $\beta(t) = (\alpha \circ h)(t)$.
- β est une *reparamétrage négatif* de α si il existe une fonction dérivable $h : (c,d) \to (a,b)$ tel que $\forall tin]c,d[, h'(t) < 0$ et $\beta(t) = (\alpha \circ h)(t)$.
- β est une *reparamétrage* de α si β est soit un reparamétrage positif, soit un reparamétrage négatif de α.

Definition 12. Quelques propriétés $\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t)$, $\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\|h'(t)$

Definition 13. On définit la *longueur* d'une courbe paramétrée α sur l'intervale $[a,b]$ comme:

$$length[\alpha] = \int_a^b v(t)dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\|dt$$

Definition 14. Si β est un reparamétrage de α alors

$$length[\beta] \ sur \ [c,d] = length[\alpha] \ sur \ [h(c), h(d)]$$

Definition 15. Prenons une chiffre c avec $a < c < b$. La *fonction de longueur d'arc* (abscisse curviligne) s_α de la courbe paramétrée $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}$ à partir de c comme:

$$s_\alpha(t) = length[c,t][\alpha] = \int_c^t \|\alpha'(u)\|du$$

pour $a \leq t < b$.

L'avantage d'un parcours à vitesse constante ($\|\alpha'(t)\| = c$). Donc $\|\alpha'(t)\|^2 = \alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = c^2$. En dérivant, on obtient $\alpha''(t) \cdot \alpha'(t) + \alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 0$. Donc, $\alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 0$, c'est à dire que les vecteurs vitesse et accélération sont orthogonaux (produit scalaire nul).

Definition 16. Soit $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^2$, on définit la courbure $\kappa 2[\alpha]$ et α par:

$$\kappa 2[\alpha](t) = \frac{\alpha''(t).J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

pour $a \leq t < b$.

Cela vient de pour chaque instant t, on peut définir un repère orthonormé mobile $(\alpha(t), \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|})$, avec $\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ le vecteur tangente normé à l'instant t et $\frac{J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ le vecteur normal normé. La composante normale du vecteur accélération ($\alpha''(t)$) à l'instant t est égale à $\alpha''(t) \cdot \frac{J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$

Definition 17. Le reparamétrage par longueur d'arc de la courbe paramétrée α, (ou reparametrage selon le vecteur vitesse unité) est :

$$s_\alpha(t) = length[0,t][\alpha] = \int_0^t \|\alpha'(u)\|du$$

Exercice 1

Calculer la fonction longueur d'arc de $\alpha : t \to a(c\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t)$. On a $\alpha' = (t\cos t, t\sin t)$ et $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = t$. Donc

$$s_\alpha(t) = \int_c^t \|\alpha'(u)\|du = \int_c^t udu = \left[\frac{u^2}{2}\right]_c^t = \frac{t^2}{2} - \frac{c^2}{2}$$

Exercice 2

Montrer que pour $\alpha(t) = (a_1(t), a_2(t))$,

$$\alpha'(t) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\alpha(t+\delta) - \alpha(t)}{\delta}$$

$$\alpha'(t) = (a_1'(t), a_2'(t)) = (\lim_{\delta\to 0} \frac{a_1(t+\delta) - a_1(t)}{\delta}, \lim_{\delta\to 0} \frac{a_2(t+\delta) - a_2(t)}{\delta})$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \left(\frac{a_1(t+\delta) - a_1(t)}{\delta}, \frac{a_2(t+\delta) - a_2(t)}{\delta} \right) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} \left(a_1(t+\delta) - a_1(t), a_2(t+\delta) - a_2(t) \right)$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} \left(a_1(t+\delta), a_2(t+\delta)) - (a_1(t), a_2(t)) \right) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} \left(\alpha(t+\delta) - \alpha(t) \right)$$

Exercice 3

Montrer que la courbure de la courbe parametrée d'un cercle de centre $p = (p_1, p_2)$ et de rayon r est égale à $\frac{1}{r}$.

$$\beta(t) = (p_1 + r\cos t, p_2 + r\sin t)$$
$$\beta'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$$
$$\beta''(t) = (-r\cos t, -r\sin t)$$

et

$$J\beta'(t) = (-r\cos t, -r\sin t)$$
$$\beta''(t) \cdot J\beta'(t) = (-r\cos t)(-r\cos t) + (-r\sin t)(-r\sin t) = r^2$$
$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{(-r\sin t)(-r\sin t) + (r\cos t)(r\cos t)} = r$$

Donc

$$s_\beta(t) = \frac{\beta''(t).J\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

Exercice 4

Le reparamétrage par longueur d'arc de la courbe paramétrée $\alpha : t \to (t^2, t^3)$, (ou reparametrage selon le vecteur vitesse unité) est :

$$s_\alpha(t) = length[0,t][\alpha] = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du$$

Donc $\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$ et $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = t\sqrt{4 + 9t^2}$ On a

$$s_\alpha(t) = length[0,t][\alpha] = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \|u\sqrt{4+9u^2}\| du = \left[\frac{(9u^2+4)^{\frac{3}{2}}}{27} \right]_0^t = \frac{(9t^2+4)^{\frac{3}{2}}}{27} - \frac{8}{27}$$

Exercice 5

On a $\alpha(t) = a_1(t) + ia_2(t)$, donc $\alpha'(t) = a_1'(t) + ia_2'(t)$ et $\alpha''(t) = a_1''(t) + ia_2''(t)$,

Calculons

$$J\alpha'(t) = i\alpha'(t) = (-a_2'(t), a_1(t))$$

et

$$\alpha''(t).J\alpha'(t) = a_1''(t) * -a_2'(t) + a_2''(t) * a_1(t)$$

Calculons

$$\alpha''(t)\overline{\alpha'(t)} = (a_1''(t) + ia_2''(t))\overline{(a_1'(t) + ia_2'(t))} = (a_1''(t) + ia_2''(t))(a_1'(t) - ia_2'(t))$$
$$= a_1''(t)a_1(t) - ia_1''(t)a_2'(t) + ia_2''(t)a_1'(t) + a_2''(t)a_2'(t)$$

Donc

$$Im(\alpha''(t)\overline{\alpha'(t)}) = a_1''(t)a_2'(t) + a_2''(t)a_1'(t) = \alpha''(t).J\alpha'(t)$$

Exercice 6

En partant de l'equation [1] $e^{i\theta_0} = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0$, Essayons de contruire deux fonctions $h(t)$ et $\theta(t)$ tel que $h(t) = e^{i\theta(t)}$. Prenons

$$f(t) = \tfrac{\alpha'(t)\cdot\beta'(t)}{\|\alpha'(t)\|\|\beta'(t)\|} \quad g(t) = \tfrac{\alpha'(t)\cdot J\beta'(t)}{\|\alpha'(t)\|\|\beta'(t)\|}$$

Calculons

$$f^2(t) + g^2(t) = \left(\frac{\alpha'(t)\cdot\beta'(t)}{\|\alpha'(t)\|\|\beta'(t)\|}\right)^2 + \left(\frac{\alpha'(t)\cdot J\beta'(t)}{\|\alpha'(t)\|\|\beta'(t)\|}\right)^2 = \frac{(\alpha'(t)\cdot\beta'(t))^2 + (\alpha'(t)\cdot J\beta'(t))^2}{(\|\alpha'(t)\|\|\beta'(t)\|)^2}$$

$$= \frac{(\|\alpha'(t)\|\|\beta'(t)\|)^2}{(\|\alpha'(t)\|\|\beta'(t)\|)^2} = 1$$

Contruisons la fonction $h(t) = f(t) + ig(t)$, on a

$$h(t)\overline{h(t)} = (f(t) + ig(t))(f(t) - ig(t)) = f^2(t) + if(t)g(t) - if(t)g(t) + g^2(t) = f^2(t) + g^2(t) = 1$$

.

Définissons

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} h'(s)\overline{h(s)}ds$$

Calculons

$$\frac{d}{dt}h(t)e^{-i\theta(t)} = h'(t)e^{-i\theta(t)} - ih(t)\theta' e^{-i\theta(t)} = e^{-i\theta(t)}(h(t)' - ih(t)\theta'(t))$$

Mais $\theta'(t) = ih'(t)h(t)$ Donc

$$\frac{d}{dt}h(t)e^{-i\theta(t)} = e^{-i\theta(t)}(h' - ih(t)h'(t)\overline{h(t)})$$

Comme $h(t)\overline{h(t)} = 1$, on a $\frac{d}{dt}h(t)e^{-i\theta(t)} = 0$ donc $h(t)e^{-i\theta(t)}$ est égale à une constante c.Calculons

$$h(t_0)e^{-i\theta(t_0)} = (f(t_0) + ig(t_0))e^{-i\theta(t_0)} = e^{i\theta(t_0)}e^{-i\theta(t_0)} = 1$$

car [1].

Par conséquent

$$h(t)e^{-i\theta(t)} = c = 1$$

et

$$h(t) = e^{i\theta(t)} = \cos\theta(t) + i\sin\theta(t) = f(t) + ig(t)$$

Ce qui fait que

$$\cos(t) = \tfrac{\alpha'(t)\cdot\beta'(t)}{\|\alpha'(t)\|\|\beta'(t)\|} \quad \sin(t) = \tfrac{\alpha'(t)\cdot J\beta'(t)}{\|\alpha'(t)\|\|\beta'(t)\|}$$

QED