Exercice 1

La fonction $f(x)$ est paire ssi $\forall x, f(x) = f(-x)$, La fonction $f(x)$ est impaire ssi $\forall x, f(x) = -f(-x)$.

Soit une fonction $f(x)$,

$$f(x) = \frac{2f(x)}{2} = \frac{2f(x) + f(-x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Soit la fonction $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, la fonction $f_1(x)$ est paire car $f_1(-x) = \frac{f(-x)+f(--x)}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_1(x)$.
Soit la fonction $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, la fonction $f_2(x)$ est impaire car $f_2(-x) = \frac{f(-x)-f(--x)}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -f_2(x)$.

Pour toute fonction $f(x)$, on a trouvé une fonction $f_1(x)$ paire et une fonction $f_2(x)$ impaire tel que $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Buffon TD1 - Exercice 5

Vrai pour u_0? $u_0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$, oui.
Admettons que $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$, calculons u_{n+1}.

$$u_{n+1} = u_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Vrai pour v_0? $v_0 = \frac{0(0+1)(2.0+1)}{6} = 0$, oui.
Admettons que $v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, calculons v_{n+1}.

$$v_{n+1} = v_n + n + 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Vrai pour w_0? $w_0 = \left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2 = 0$, oui.
Admettons que $w_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, calculons w_{n+1}.

$$w_{n+1} = w_n + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$w_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2$$

Buffon TD1 - Exercice 6

Preuve par récurrence, suppposons $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies n! \geq 2^n$, trouvons un entier n pour lequel $n! \geq 2^n$ et vérifions la propriét'e pour $n+1$ avec l'hypothèse de récurence $n! \geq 2^n$. Prenons $n = 4$, on a $4! = 24 \geq 16 = 2^4$.

$$\begin{aligned} (n+1)! = n!(n+1) &\geq 2^n(n+1) \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= n2^n + 2^n > 2^{n+1}, \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

Pour $n_0 \geq 2$ la proposition est vraie. Donc il existe un n_0 (par exemple $n_0 = 2$) pour lequel la proposition est vraie.

Buffon TD1 - Exercice 7

$u_0 = 1, u_1 = u_0 = 1, u_2 = u_0 + u_1 = 2, u_3 = u_0 + u_1 + u_2 = 4, u_4 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 8.$

Vrai pour u_0?, $u_0 = 1 \leq 2^0 = 1$, Vrai.
Hypothèse de récurrence: $u_n \leq 2^n$, calculons u_{n+1}.

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = u_n + u_n = 2u_n \leq 2.2^n = 2^{n+1}$$

La proposition est vraie.

Buffon TD1 - Exercice 8

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \implies \left(\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z} \right) \right)$$

Pour $n = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \implies \left(x^0 + \frac{1}{x^0} \in \mathbb{Z}\right)\right)$ qui est vrai.
Pour $n = 1$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \implies \left(x^1 + \frac{1}{x^1} \in \mathbb{Z}\right)\right)$ qui est vrai.

Supposons la propriété vraie au rang $k < n$, calculons le rang n.

$$\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right) = x^n + x^{n-2} + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n - 2} = \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right) + \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \right)$$

Donc

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n} \right) = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \right)$$

Par hypothèse de récurence, on a $\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) \in \mathbb{Z}$ et $\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) \in \mathbb{Z}$. Donc $\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \in \mathbb{Z}$ car la soustraction de deux nombres dans $\mathbb{Z}$.

Buffon TD2 - Exercice 1.a

$$(1-a)\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} aka^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} ka^{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} - ka^{k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k} - na^{n} = \sum_{k=0}^{n} a^{k} - (n+1)a^{n}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} ka^{k} = \sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} - \sum_{k=0}^{n} a^{k} + (n+1)a^{n}$$

On a $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ et $\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right)' = \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)'$ Donc

$$\sum_{k=1}^{n} ka^{k} = \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)' - \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + (n+1)a^{n}$$

Buffon TD2 - Exercice 1.b

Trouver a, b, c, tel que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$.

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a(x^2+3x+2) + b(x^2+2x) + c(x^2+x)}{x(x+1)(x+2)}$$

Donc

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases}$$

Et $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = \frac{1}{2}$. Donc $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(k+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{2}(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2}) - (\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{2}(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2})$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

Buffon TD2 - Exercice 3.1

$$\sum_{k\in[1,2n], impair} 3^k = 3^1 + 3^3 + 3^5 + \ldots + 3^{2n-1} = 3 + 3.9 + (3.9).9 + \ldots(((\ldots))).9$$

Soit la suite géométrique définit par $u_0 = 3$ et de raison $q = 9$. La somme $\sum_{k\in[0,n]} u_k = u_0.\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$. Donc

$$\sum_{k\in[1,2n], impair} 3^k = 3.\left(\frac{1-9^{n-1}}{1-9}\right)$$

Buffon TD2 - Exercice 3.2

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(1-\frac{1}{k^2} = \sum_{k=2}^{n} \ln(\frac{k^2-1}{k^2} = \sum_{k=2}^{n} \ln(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1)+\ln(k+1)-ln(k^2)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - 2\sum_{k=2}^{n} ln(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n} ln(k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) + \ln(1) + \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) - \ln(2) + \ln(n) + \ln(n+1) - 2\sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) - 2\ln(n) = -\ln(2) + \ln(n) + \ln(n+1) - 2\ln(n)$$

$$= -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Buffon TD2 - Exercice 3.3

$$\prod k = 1n\left(1-\frac{1}{2k}\right) = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{6})\dots(1-\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\dots.\frac{2n-1}{2n} = \frac{\prod_{k=1}^{n} 2n-1}{\prod_{k=1}^{n} 2n} = \frac{\prod_{k=[1,2n],impair} n}{\prod_{k=[1,2n],pair} n}$$

Soit les séries arithmétique $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ et $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n + 2$.

$$\frac{\prod_{k=0}^{n} u_n}{\prod_{k=0}^{n} v_n}$$

Buffon TD2 - Exercice 3.4

$$\prod_{k=1}^{n} 3^k = 3.3^2.3^3.\dots.3^n = 3^{1+2+3+\dots+n} = 3^{\sum_{k=1}^{n} k} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Buffon TD2 - Exercice 3.6

$$\sum_{k=1}^{n} kk! = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)-1)k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1)k! - k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k! = (n-1)! - 1$$

Buffon TD3 - Exercice 1.1

Soit $z = a + bi$,

$$z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$$
$$(a + bi)(a - bi) + 3((a + bi) - (a - bi)) = 4 - 3i$$
$$a^2 + b^2 + 3(2bi) = 4 - 3i$$

Donc, on a $a^2 + b^2 = 4$ et $6b = -3$, ce qui fait $b = -\frac{1}{2}$ et $a = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Buffon TD3 - Exercice 1.3

Soit $z = a + bi$,

$$|z| = z + \bar{z}$$
$$\sqrt{a^2 + b^2} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$
$$b^2 = 3a^2$$

Buffon TD3 - Exercice 1.5

Soit $z = a + bi$,

$$|(1 + i)z - 2i| = 2$$
$$|(1 + i)(a + bi) - 2i| = 2$$
$$|a + bi + ai - b - 2i| = 2$$
$$\sqrt{(a - b)^2 + (a + b - 2)^2} = 2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 + (a + b - 2)^2 = 4$$
$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + b^2 + 2ab - 4a - 4b + 4 = 4$$
$$2a^2 + 2b^2 - 4a - 4b = 0$$
$$a^2 + b^2 - 2a - 2b = 0$$

Rappel de cours

- la fonction $f \in F^E$ est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent, $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ ou $\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.
- la fonction $f \in F^E$ est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent, $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
- la fonction $f \in F^E$ est bijective si elle est injective et bijective.
- soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$, la composée des fonctions f et g notée $g \circ f$ définie par $g \circ f : E \to G, x \to g(f(x))$.

Buffon TD5 - Exercice 4.1

P: Si $g \circ f$ est injective alors f aussi.
Comme $g \circ f$ est injective, on a $\forall (x_1, x_2) \in E^2, g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \implies x_1 = x_2$: [1].
Preuve par l'absurde.
Supposons que la fonction f n'est pas injective. Donc $\exists (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 \neq x_2$: [2].
En partant de $f(x_1) = f(x_2)$, on a $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ car g est une fonction. Donc de [1], on a $x_1 = x_2$.
En partant de $f(x_1) = f(x_2)$ et de [2], on a $x_1 \neq x_2$ ce qui contredit précédemment.
Donc la proposition P est vraie.

Buffon TD5 - Exercice 4.2

P: Si $g \circ f$ est surjective alors g aussi.
Comme $g \circ f$ est surjective, on a $\forall y \in G, \exists x \in E, y = g \circ f(x) = g(f(x))$: [1].
Comme f est une fonction donc $\forall x_e \in E, \exists! y_f \in F, y_f = f(x_e)$. Donc, $\forall y \in G, y = g(f(x))$ de [1], soit $b \in F, b = f(x)$, b existe et est unique par [2].
DOnc $\forall y \in G, y = g(f(x)) = g(b)$ ce qui est la définition de g est une fonction surjective. Donc la proposition P est vraie.

Buffon TD5 - Exercice 4.3

P:si $g \circ f$ est injective et si f est surjective alors g est injective Comme $g \circ f$ est injective, on a $\forall (x_1, x_2) \in E^2, g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \implies x_1 = x_2$:[1].
Comme f est surjective, on a $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$: [2].

Prenons x_1, x_2 tel que $g(x) = g(y)$: [3]. Comme f est surjective [2], il existe a, b tel que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Donc par $g(f(a) = g(f(b)$.
par [1], on a donc $a = b$. Par conséquent $f(a) = f(b)$ car f est une fonction. Donc $x = y$ et $g(x) = g(y) \implies x = y$ qui es la définition de g est injective.
Donc la proposition P est vraie.

Buffon TD5 - Exercice 4.4

P: si $g \circ f$ est surjective et si g est injective alors f est surjective.
Comme $g \circ f$ est surjective, on a $\forall y \in G, \exists x \in E, y = g \circ f(x) = g(f(x))$: [1].
Comme g est injective, on a $\forall (x_1, x_2) \in F^2, g(x_1) = g(x_2) \implies x_1 = x_2$: [2].

De [1], $\forall z_1 \in G, \exists x_1 \in E, z_1 = g(f(x_1))$. donc $\exists y_1 \in F, y_1 = f(x_1)$.
De [2], $\nexists y_2 \in F, y_2 \neq y_1, g(y_1) = g(y_2)$. Donc y_1 est unique.
$\exists y_1 \in F, \forall x \in E, y_1 \neq f(x)$.

Buffon TD7 - Exercice 1.1

Etude de $\arcsin(\frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}})$.
1-dérivée de la fonction. On prend $g(x) = \arcsin(x)$ et $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}$. Donc

$$\left(arcsin(\frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}})\right)' = (g \circ f(x))' = f'(x).\frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

Donc calcul de $f'(x) = \left(\frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$ avec $u(x) = 1+x$ et $v(x) = \sqrt{2(1+x^2)}$. Donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \sqrt(2)w(x)^{1/2} = \sqrt(2).\frac{1}{2}.w^{\frac{1}{2}-1}w'(x)$ avec $w(x) = 1+x^2$ et $w'(x) = 2x$. Donc

$$f'(x) = \frac{1.\sqrt{1+x^2} - (1+x)\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}}}{2(1+x^2)} = \frac{1-x}{2\sqrt{2}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Et

$$d(x) = \left(arcsin(\frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}})\right)' = \frac{1-x}{2\sqrt{2}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}}}$$

La dérivée de la fonction n'est pas définie en $x = 1$. Lorque $x < 1$, $d(x) > 0$ et lorque $x > 1$, $d(x) < 0$ Donc $f(1) = 1$est un maximum.

Regardons le domaine de définition de $\arcsin(\frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}})$. $\arcsin(x)$ est définie pour $x \in]-1,1[$. Calculons les x tel que $-1 < \frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}} < 1$. On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc la fonction est définie sur $x \in]-\infty,+\infty[$.

Donc $\lim_{x\to+\infty} \arcsin(f(x)) = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$, Donc $\lim_{x\to-\infty} \arcsin(f(x)) = \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\pi}{4}$ et $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ le maximum.

Exercice Cauchy

Solution de l'équation différentielle de la forme $(y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ est $y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_1(t)$ avec $A(t)$ une primitive de la fonction $a(t)$ et $y_1(t)$ est une solution particulière de l'équation.

Pour $y'(t) - \frac{y(t)}{t^2} = e^{\frac{1}{t}} \sin(t)$, donc $a(t) = \frac{1}{t^2}$ et $b(t) = e^{\frac{1}{t}} \sin(t)$. On a $A(t) = -\frac{1}{t}$. Recherchons une solution particulière de la forme $y_1(t) = \lambda(t)a^{A(t)}$ avec $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$.

$$\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)} = e^{\frac{1}{t}} \sin(t)e^{-\frac{1}{t}} = sin(t)$$

donc $\lambda(t) = -\cos(t)$ et $y_1(t) = -\cos(t)e^{-\frac{1}{t}}$
Par conséquent

$$y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_1(t) = \lambda e^{-\frac{1}{n}} - \cos(t)e^{-\frac{1}{t}} = e^{-\frac{1}{n}}(\lambda - cos(t))$$

Calculons l'unique solution $y(2\pi) = e^{-\frac{1}{2\pi}}(\lambda - \cos(2\pi)) = \lambda e^{-\frac{1}{2\pi}} = 0$.
Donc $\lambda = 0$ et l'unique solution est

$$y(t) = -\cos(t)e^{-\frac{1}{t}}$$

QED