Exercice 5

Question 1

On a

$$E(X_1) = \int_a^1 t f(t)\, dt = \int_a^1 t \frac{1}{1-a}\, dt = \frac{1}{1-a} \frac{1-a^2}{2} = \frac{1+a}{2}$$

On a

$$E[X_1^2] = \int_a^1 t^2 f(t)\, dt = \int_a^1 t^2 \frac{1}{1-a}\, dt = \frac{1}{1-a} \frac{1-a^3}{3} = \frac{1+a+a^2}{3}$$

Donc

$$V(X_1) = E[X_1^2](E[X_1])^2 = \frac{1+a+a^2}{3} - \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$$

Question 2

On a

$$E[X_1] = \frac{1+a}{2} \implies a = 2E[X_1] - 1$$

Donc on prend comme EMM de a

$$\tilde{a}_n = 2\bar{a}_n - 1$$

Mais $0 < a < 1$, il faut donc que son estimateur soit aussi $0 < \tilde{a}_n < 1$ Donc

$$0 < 2\bar{a}_n - 1 < 1 \implies 1 < 2\bar{a}_n < 2 \implies 1/2 < \bar{a}_n < 1$$

Donc l'EMM est défini uniquement si la moyenne de l'échantillon $\bar{a}_n$ est comprise entre 0.5 et 1.

Consistance. En appliquant le Lemme de l'application Continue (LAC). En prenant $h(x) = 2x - 1$, pour $1/2 < x < 1$. La fonction est continue. On a également, $\bar{a}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} E[X_1]$ selon la loi des grands nombres. Donc $\tilde{a}_n = h(\bar{a}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} h(E[X_1]) = a$. Donc consistance.

En appliquant le Théoème Central Limite (TCL) avec $\mu = a$ et $\sigma^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$ on a

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{a}_n - a)}{\sqrt{\sigma^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Question 3

On calcule

$$\mathcal{L}_a(x_i, \ldots, x_n) = \prod_1^n \frac{1}{1-a} 1_{x_i \in [a,1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n} \prod_1^n 1_{x_i \in [a,1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n} 1_{min(x_i) \leq x_i \leq 1}(x_i)$$

Ce qui donne la fonction suivante:

$$\mathcal{L}_a(x_i, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & a = 0 \\ \frac{1}{(1-a)^n} & 0 < a \leq min(x_i) \\ 0 & min(x_i) < a < 1 \end{cases}$$

$\mathcal{L}_a(x_i, \ldots, x_n)$ est croissante sur $0 \leq a \leq min(x_i)$ et nulle quand $min(x_i) < a$ donc EMV est maximale lorsque $a = min(x_i)$. On a $\hat{a} = \frac{1}{(1-min(x_i))^n}$.