**Université d'Orsay - Paris-Saclay** **MEU203**
**LEU – 1er semestre 2020-2021**

# Feuille d'exercices 1

Rappels, distance et topologie sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 1.1 – Centre et rayon des intervalles** Soient $b, c$ deux réels tels que $b < c$. Déterminer un réel $a$ et un réel $r > 0$ tels que $]b; c[$ coïncide avec l'intervalle ouvert de centre $a$ de rayon $r$.

Commencer par un dessin ! Cela permettra de deviner quel $a$ et quel $r$ choisir. Puis argumenter...

**Exercice 1.2 – Opérations et intervalles.**

**1.** Déterminer l'intervalle $I = \{x \in \mathbb{R},$ tel que $\exists s \in [0; 1], \exists t \in [-1; 1]$ avec $x = s + t\}$. Même question en remplaçant $[-1; 1]$ par $]-1; 1[$. Deviner les bornes. Puis démontrer soigneusement votre affirmation.

**2.** Déterminer l'intervalle $J = \{x \in \mathbb{R},$ tel que $\exists s \in [-2; -1], \exists t \in [-4; -3]$ avec $x = st\}$. Même question en remplaçant $[-2; -1]$ par $]-2; 1[$. Même indication.

**Exercice 1.3 – Unions d'intervalles.**

Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que $I \cap J \neq \emptyset$. Démontrer que $I \cup J$ est un intervalle.

Utiliser la caractérisation des intervalles par les sous-intervalles fermés !

**Exercice 1.4 – Réels et décimaux.** Soit $\underline{c} = (c_n)_{n\geq 1}$ une suite quelconque de *chiffres*, c'est à dire que pour tout $n \geq 1$ on a $c_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Pour tout $k \geq 1$ posons $d_k = \dfrac{c_1}{10} + \dfrac{c_2}{100} + \cdots + \dfrac{c_k}{10^k}$.

Soit $E(\underline{c}) = \{d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots\}$ : c'est l'ensemble des valeurs de la suite $(d_k)_{k\geq 1}$. On pose $S(\underline{c}) = \sup(E(\underline{c}))$.

**1.** Si tous les chiffres $c_n$ valent 0, que vaut $S(\underline{c})$ ? Si tous les chiffres $c_n$ valent 9, que vaut $S(\underline{c})$ ?

Pour comprendre les notations introduites choisissez votre suite de chiffre $(c_n)_{n\geq 1}$ préférée (non constante) et déterminez les quantités définies par l'énoncé !

**2.** Montrer que $S(\underline{c})$ est dans $[0, 1]$ et est la limite de la suite $(d_n)_{n\geq 1}$.

**3.** Réciproquement, pour tout nombre $x \in [0, 1]$, montrer qu'il existe au moins une suite de chiffres $(c_n)_{n\geq 1}$ telle que $S(\underline{c}) = x$. Revoyez et utilisez l'écriture décimale des réels ! Donner un exemple de réel $x \in [0, 1]$ tel qu'il existe deux suites différentes $\underline{c}, \underline{c}'$ pour lesquelles on a $S(\underline{c}) = S(\underline{c}') = x$. Ainsi l'écriture décimale n'est pas unique.

**Exercice 1.5 – Diamètres.** Vérifier que les parties suivantes sont bornées puis calculer leur diamètre :

$$A = [0; 1] \ ; \ B = ]-2; 3[ \ ; \ C = \{4; 5; 6\} \ ; \ D = \{x \in ]0; 1[, x \text{ est rationnel}\}.$$

Quand ce n'est pas immédiat, commencez par deviner les diamètres. Puis démontrer soigneusement votre affirmation.

**Exercice 1.6 – Parties bornées de $\mathbb{R}$.**

**1.** Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie bornée. Montrer que si $F \subset E$ alors $F$ est bornée.

**2.** Montrer qu'une intersection quelconque de parties bornées est bornée.

**3.** Montrer qu'une union de deux parties bornées est bornée.

Utilisez la caractérisation de "borné" qui vous convient le mieux.

**Exercice 1.7 – Ouverts ? fermés ?** Revoir et utiliser correctement les définitions de voisinage, d'ouvert, de fermé.

**1.** Montrer que $[0; 1]$ n'est pas ouvert et que $]1; 2[$ n'est pas fermé. Montrer que $[-1; 0[$ n'est ni ouvert ni fermé.

**2.** Soit $C$ l'ensemble des réels $x$ tels que au moins l'un des chiffres du développement décimal de $x$ est 5.

**a.** Démontrer que $C$ n'est pas ouvert. Considérer certains réels qui n'ont qu'un seul 5 dans leur développement décimal.

**b.** Soit $O = \{x \in C, x$ n'est pas décimal$\}$. Démontrer que $O$ est ouvert. Remarque : pour $x \in C$ on a : $C$ voisinage de $x \iff x \in O$ !

**Exercice 1.8 – Topologie et borne supérieure.**

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée. Soit $M = \sup(E)$.

**1.** Montrer que si $E$ est ouvert alors $M \notin E$. Raisonner par l'absurde, en utilisant que $M$ est un majorant.

**2.** Montrer que si $E$ est fermé alors $M \in E$. Raisonner par l'absurde, en utilisant que $M$ est le plus petit des majorants.

**3.** Reformuler les résultats obtenus en termes de majorants.

**Exercice 1.9 – Description des ouverts de $\mathbb{R}$.** Soit $O \subset \mathbb{R}$ un ouvert.

**1.** Soit $x_0 \in O$ fixé. On considère $R^+(x_0) = \{r > 0, [x_0, x_0 + r[ \subset O\}$ et $R^-(x_0) = \{r > 0, ]x_0 - r; x_0] \subset O\}$.

**a.** Montrer que $R^+(x_0) \cap R^-(x_0) \neq \emptyset$.

**b.** Montrer que : ou bien $R^+(x_0) = ]0; +\infty[$, ou bien il existe un réel $r^+ > 0$ tel que $R^+(x_0) = ]0; r^+]$. On pourra vérifier d'abord que $R^+(x_0)$ est un intervalle.

**c.** Montrer qu'il existe un et un seul intervalle ouvert $O(x_0)$ tel que

(1) $O(x_0)$ est voisinage de $x_0$ ;

(2) $O(x_0)$ est contenu dans $O$ ;

(3) Pour tout intervalle ouvert $U$ tel que $\{x_0\} \subset U \subset O$ on a $U \subset O(x_0)$.

Faire un dessin ! On pourra définir $O^+(x_0) = [x_0; +\infty[$ si $R^+(x_0) = ]0; +\infty[$, et $O^+(x_0) = [x_0; x_0 + r^+[$ si $R^+(x_0) = ]0; r^+]$, puis définir de même $O^-(x_0)$.

**2.** Montrer qu'il existe une famille dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints dont la réunion est $O$ (on pourra considérer la famille formée de tous les intervalles ouverts $O(r)$, où $r$ est un nombre rationnel contenu dans $O$).

**Exercice 1.10 – Exemples de suite de Cauchy de $\mathbb{R}$**

**1.** Pour tout entier naturel $n$ on pose $x_n = \dfrac{\cos(0)}{10^0} + \dfrac{\cos(1)}{10^1} + \dfrac{\cos(2)}{10^2} + \cdots + \dfrac{\cos(n)}{10^n}$. Montrer que $\big(x_n\big)_n$ est de Cauchy. On pourra majorer $|x_p - x_q|$ par la somme des termes d'une suite géométrique.

**2.** Soit $f : [0; +\infty[$ une fonction dérivable telle que $f'(x)$ est décroissante et $\lim_{x\to\infty} x f'(x) = 0$. Montrer que la suite $\big(f(n)\big)_n$ est de Cauchy. Penser au théorème des accroissements finis.

**Exercice 1.11 – Comment transformer une suite bornée en suite convergente !**

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique réelle *bornée*. Pour tout entier $n \geq 0$ on pose $s_n := \sup\{x_k, k \geq n\}$.

**1.** Exemples : pour chacune des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ ci-dessous expliciter la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ associée :

$$x_n = \frac{1}{2^n} \ ; \ x_n = (-1)^n \ ; \ x_n = -\frac{1}{2^n} \ ; \ x_n = \frac{1}{1 + (n-4)^2} \ ; \ x_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \ .$$

Pour deviner la réponse il peut être utile de représenter sur un graphique les premiers points $(n, x_n)$.

*On revient à l'étude générale.*

**2.** Montrer que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée. Si $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ et $B$ majorée alors $\sup(A) \leq \sup(B)$.

**3.** Montrer alors qu'il existe un réel $L$ avec la propriété suivante :
pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $I(\varepsilon)$ des $k \in \mathbb{N}$ tels que $x_k \in ]L - \varepsilon; L + \varepsilon[$ est infini, et de plus l'ensemble $J(\varepsilon)$ des $\ell \in \mathbb{N}$ tels que $x_\ell \in ]L + \varepsilon; +\infty[$ est fini. Comme $(s_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée...

**4.** Montrer que si la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers un réel $\ell$ alors on a aussi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \ell$.

**5.** Dans cette dernière question on suppose que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.

**a.** Vérifier que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée. Pour $p, q \geq N_1$ on a $|x_p - x_q| \leq 1$...

**b.** Montrer que $d(x_n, s_n) \to 0$ puis que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente. Pour majorer $d(x_n, s_n)$, on pourra utiliser $d(x_n, x_m)$, $d(x_m, L)$ et $d(L, s_n)$.

**Exercice 1.12 –** Soit $I \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de tous les nombres irrationnels. Montrer que $I$ est dense dans $\mathbb{R}$. On rappelle que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. On pourra alors considérer des nombres de la forme $r + \frac{\sqrt{2}}{10^n}$ avec $r \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 1.13 – Fonction Lipschitzienne.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Démontrer que $f$ est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. TAF !

**Exercice 1.14 – Fonction continue mais pas Lipschitzienne.**
Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Montrer que $f$ est continue sur $[0;1]$. Montrer que $f$ Lipschitzienne sur $[\varepsilon;1]$ pour tout $\varepsilon \in ]0;1[$. Montrer que $f$ n'est pas Lipschitzienne sur $[0;1]$. Taux d'accroissement en 0.

**Exercice 1.15 – La meilleure constante de Lipschitz.** Variations sur le TAF.
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable, et telle que $\sup_{x\in[a;b]} |f'(x)| = 1$.

**1.** Montrer que $f$ est 1-Lipschitzienne sur $[a;b]$.

**2.** Montrer que $f$ n'est pas $0,99$-Lipschitzienne sur $[a;b]$.

**Exercice 1.16 – Opérations sur les fonctions Lipschitziennes.** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que $f$ est $K$-Lipschitzienne et que $g$ est $L$-Lipschitzienne.

**1.** Montrer que $f + g$ est Lipschitzienne : avec quel constante de Lipschitz ?

**2.** Montrer que $f \circ g$ est Lipschitzienne : avec quel constante de Lipschitz ?

**3.** Donner un exemple où $K = L = 1$ mais $f \times g$ n'est pas Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Montrer cependant que pour tout $M \geq 0$ la fonction produit $f \times g$ est Lipschitzienne sur $[-M;M]$, et en donner une constante de Lipschitz.

**Exercice 1.17 – Fonction Lipschitzienne sur une partie dense.** Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $f$ vérifie la propriété suivante :
pour deux rationnels quelconques $r, s \in [0;1]$ on a $|f(r) - f(s)| \leq K|r - s|$.
Montrer qu'alors $f$ est $K$-Lipschitzienne sur $[0;1]$. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 1.18 – Une seule exponentielle continue !**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour $x, y$ quelconques on a $f(x + y) = f(x)f(y)$.

**1.** Montrer que $f(0)^2 = f(0)$. Si $f(0) = 0$ déterminer la fonction $f$. *Dans la suite on suppose* $f(0) \neq 0$.

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel $> 0$ et soit $x \in \mathbb{R}$ un réel. Montrer que $f(nx) = [f(x)]^n$, que $f(x) > 0$, puis que $f(\frac{x}{n}) = \sqrt[n]{f(x)}$. Exprimer aussi $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Enfin pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ montrer que $f(rx) = [f(x)]^r$.

**3.** Montrer qu'il existe un réel $K$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \exp(Kx)$ (on pourra poser $K = \ln\big(f(1)\big)$ et considérer la fonction $g(x) = \frac{f(x)}{\exp(Kx)}$).

**Exercice 1.19 – Parties définies par des inégalités continues.**
Parmi les parties suivantes déterminer celles qui sont ouvertes et celles qui sont fermées :

$$\{x \in \mathbb{R}, -2 < x^3 + x + 1 < 1 \text{ ou } 2\cos(x) > -1\}\ ,\ \{x \in \mathbb{R}, \sin(x) \leq \frac{1}{3} \text{ et } \sqrt{1+x^2} \geq 2\}\ ,$$

$$\{x \in \mathbb{R}, 2 \leq \mathrm{e}^x \leq 3 \text{ ou } \frac{1-x^2}{1+x^2} \geq \frac{1}{2}\}\ ,\ \{x \in \mathbb{R}, 2 < x^2\ln(2+x^2) < 3 \text{ et } -2 < \sqrt[3]{x} < 1\}.$$