Definition 1. On définit un *espace de probibilité* par un triplet $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ avec:

- Ω est un ensemble de résultats
- $\mathscr{F}$ une collection de sous-ensembles de Ω qui satisfait:
  - $\Omega \in \mathscr{F}$
  - $\forall A \in \mathscr{F} \implies {}^cA \in \mathscr{F}$
  - $A_1, A_2 \ldots A_n \in \mathscr{F} \implies \cup_{m=1\ldots n} A_m \in \mathscr{F}$
- P, une application de $\mathscr{F} \to [0,1]$

Par exemple: $\Omega = \{1,2,3\}, \mathscr{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Un autre exemple $\mathbb{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ est appelé l'ensemble des sous-ensembles.

Definition 2. L'application P est définie par les 3 règles suivantes:

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall A \in \mathscr{F}, P({}^cA) = 1 - P(A)$
- Toute suite dénombrable d'événements disjoints $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, P(\cup_{m=1..n} A_m) = \sum_{m=1}^{n} P(A_m)$

On peut déduire tous les théorèmes suivants:

- $P(\emptyset) = 0$. Ω et $\emptyset$ sont disjoints et $\Omega \cup \emptyset = \Omega$ donc

  $$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

  donc $P(\emptyset) = 0$
- si $A_1 \subset A_2 \implies P(A_1) \leq P(A_2)$. On a $A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$ car $A_1 \subset A_2$. Et A_1 et $(A_2 - A_1)$ sont disjoints donc

  $$P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1)$$
  $$P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$$

  Comme $P(X)$ est positif, on a $P(A_2) - P(A_1) \geq 0$, donc $P(A_2) \geq P(A_1)$
- $\forall X \in \mathscr{F}, P(X) \leq 1$. On a $\forall X \in \mathscr{F}, X \subset \Omega$ part définition, donc $P(X) \leq P(\Omega) = 1$
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont les ensembles élémentaires des éléments de Ω, alors $\sum_{m=1}^{n} P(A_m) = 1$ on a $\cup_{m=1}^{n} A_m = \Omega$ et tous les A_m sont disjoints donc

  $$1 = P(\Omega) = P(\cup_{m=1}^{n} A_m) = \sum_{m=1}^{n} P(A_m)$$
- $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$. On a $A_1 \cup A_2 = (A_1 - (A_1 \cap A_2)) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 - (A_1 \cap A_2))$. Les 3 ensembles sont disjoints et $A_1 = (A_1 - (A_1 \cap A_2)) \cup (A_1 \cap A_2)$ et $A_2 = (A_2 - (A_1 \cap A_2)) \cup (A_1 \cap A_2)$. Les ensemnles sont disjoints. Donc

  $$P(A_1) = P(A_1 - (A_1 \cap A_2)) + P(A_1 \cap A_2), P(A_1 - (A_1 \cap A_2)) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$$
  $$P(A_2) = P(A_2 - (A_1 \cap A_2)) + P(A_1 \cap A_2), P(A_2 - (A_1 \cap A_2)) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$
  $$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 - (A_1 \cap A_2)) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_2 - (A_1 \cap A_2))$$
  $$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$
  $$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Definition 3. Si Ω est fini, la *mesure équiprobable* est définie comme la mesure de probabilité qui attribue la valeur $\frac{1}{card(\Omega)}$ a tous les singletons $\{\omega\}$ de Ω.

Definition 4. Soit deux événements A et B avec $P(A) > 0$. On définit la *probabilite conditionnelle* $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, la probabilité de B sachant que l'évément A est apparu.

Definition 5. Deux événements A et B sont indépendants si $P(B|A) = P(B)$. C'est à dire que la probabilité de B n'est pas affecteée par l'occurence ou non de l'événement A.

On peut déduire tous les théorèmes suivants:

- $P(A \cap B) = P(B|A).P(A)$ par définition
- Si les 2 événements A et B sont indépendants alors $P(A \cap B) = P(A).P(B)$. on a $P(A \cap B) = P(B|A).P(A)$ et $P(B|A) = P(B)$ donc

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Definition 6. On appelle *variable alátoire* d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que $\forall v \in \mathbb{R}, X^{-1}(v) \in \mathscr{F}$.

Definition 7. Soit une variable aléatoire X et supposons que toutes les valeurs possibles de X sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on définit $P(X = x_k) = P(X^{-1}(x_k)) = f(x_k), \forall k = 1, 2, \ldots, n$

On en déduit que des propriétés des probabilités que:

- $f(x) \geq 0$
- $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = 1$

Definition 8. On définit une fonction (ie loi) de distribution pour une variable aléatoire X, la fonction $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{l=-\infty}^{x} P(X = l)$.

On en déduit que:

- $F(x)$ est une fonction non décroissante, si $x \leq y$ alors $F(x)\ leqF(y)$
- $\lim_{x \to -\infty} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} = 1$

QED