Rappel de cours:

-

Exercice 4.1

4.1.1

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

4.1.2

On a

$$C_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, C_2 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, C_3 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, C_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix},$$

La première ligne peut être formée en soustrayant la ligne l_2 et la ligne l_3. Donc, le rang de (l_1, l_2, l_3) est égal au rang de (l_2, l_3). Les lignes l_2, l_3 sont indépendante (non proportionnelle). Donc, le rang de (S) est 2.

Trouver une relation de dépendance entre C_1,C_2 et C_3:

$$aC_1 + bC_2 + cC_3 = 0$$

$$\begin{cases} a - b + 2c & = 0 \quad l_1 \\ 2a + b + c & = 0 \quad l_2 \\ a + 2b - c & = 0 \quad l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + 2c & = 0 \quad l_1 \\ -3b + 3c & = 0 \quad 2l_1 - l_2 \\ -3b + 3c & = 0 \quad l_1 - l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a & = -c \\ b & = c \end{cases}$$

Une relation de dépendance entre C_1,C_2 et C_3 est: $-C_1 + C_2 + C_3 = 0$.

Trouver une relation de dépendance entre C_1,C_2 et C_4:

$$aC_1 + bC_2 + dC_4 = 0$$

$$\begin{cases} a - b & = 0 \quad l_1 \\ 2a + b + 3d & = 0 \quad l_2 \\ a + 2b + 3d & = 0 \quad l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b & = 0 \quad l_1 \\ -3b - 3d & = 0 \quad 2l_1 - l_2 \\ -3b - 3d & = 0 \quad l_1 - l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a & = -d \\ b & = -d \end{cases}$$

Une relation de dépendance entre C_1,C_2 et C_4 est: $-C_1 - C_2 + C_4 = 0$.

Trouver une base (v_3, v_4) de E.
On a $C_3 = C_2 - C_1$ et $C_4 = C_1 + C_2$. Donc, $(x, y, z, t) = (x, y, y - x, x + y) = (0, y, y, y) + (x, 0, -x, x) = x(1, 0, -1, 1) + y(0, 1, 1, 1)$. En prenant $v_3 = (1, 0, -1, 1)$ et $v_4 = (0, 1, 1, 1)$ on a bien $E = Vect(v_3, v_4)$ et

$$av_3 + bv_4 = a(1, 0, -1, 1) + b(0, 1, 1, 1) = (a, 0, -a, a) + (0, b, b, b) = (a, b, b - a, a + b) = (0, 0, 0, 0)$$

Donc $a = b = 0$, $Vect(v_3, v_4)$ est libre.
Par conséquent $Vect(v_3, v_4)$ est une base de E.

Exercice 4.2

4.2.1

S est un plan vectoriel $Vect(v_1, v_2) = Vect((a, b), (-b, a))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

$$\forall p = (x, y), \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = p$$
$$\begin{cases} \lambda_1 a - \lambda_2 b & = x \quad l_1 \\ \lambda_1 b + \lambda_2 a & = y \quad l_2 \end{cases}$$

$$al_1 + bl_2, \lambda_1 a^2 - \lambda_2 ab + \lambda_1 b^2 + \lambda_2 ba = ax + by$$
$$\lambda_1 = \frac{ax + by}{a^2 + b^2}$$

$$bl_1 - al_2, \lambda_1 ab - \lambda_2^2 b - \lambda_1 ab - \lambda_2 a^2 = bx - ay$$
$$\lambda_2 = \frac{ay - bx}{a^2 + b^2}$$

Donc $Vect(v_1, v_2)$ est génératrice.

Quand $x = y = 0$ on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc $Vect(v_1, v_2)$ est libre.

Donc $Vect(v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

T est un plan vectoriel $Vect(v_3, v_4) = Vect((c, d), (d, -c))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

$$\forall p = (x, y), \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_4 = p$$
$$\begin{cases} \lambda_1 c + \lambda_2 d & = x \quad l_1 \\ \lambda_1 d - \lambda_2 c & = y \quad l_2 \end{cases}$$

$$cl_1 + dl_2, \lambda_1 c^2 - \lambda_2 cd + \lambda_1 d^2 - \lambda_2 cd = cx + dy$$
$$\lambda_1 = \frac{cx + dy}{c^2 + d^2}$$

$$dl_1 - cl_2, \lambda_1 cd + \lambda_2 d^2 - \lambda_1 dc + \lambda_2 c^2 = dx - `cy$$
$$\lambda_2 = \frac{dx - cy}{c^2 + d^2}$$

Donc $Vect(v_1 = 3, v_4)$ est génératrice.

Quand $x = y = 0$ on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc $Vect(v_3, v_4)$ est libre.

Donc $Vect(v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.5

4.5.1

$$A^2 = A.A = \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix} = 3A - I_2$$

$$A^3 = A.A^2 = \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}5 & 8\\8 & 13\end{vmatrix} = 8.\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix} = 8A - 3I_2$$

Supposons que A^n est de la forme $\begin{vmatrix}a & b\\b & a+b\end{vmatrix}$.
Vrai pour $n = 0$.

$$A^{n+1} = A.A^n = \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}a & b\\b & a+b\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a+b & a+2b\\a+2b & 2a+3b\end{vmatrix}$$

Vrai pour $n+1$ si vrai pour n, donc vérifié pour tout n.

On a donc

$$A^n = \begin{vmatrix}A^n_{\{1,1\}} & A^n_{\{1,2\}}\\A^n_{\{1,2\}} & A^n_{\{1,1\}} + A^n_{\{1,2\}}\end{vmatrix} = kA + jI^2 = k.\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} + j.\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}k+j & k\\k & 2k+j\end{vmatrix}$$

On a $k = A^n_{\{1,2\}}$, et $j = A^n_{\{1,1\}} - A^n_{\{1,2\}}$.

4.5.2

Famille libre si $\lambda_1 A + \lambda_2 I^2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$$\lambda_1.\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} + \lambda_2.\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1\\\lambda_1 & \lambda_1+2\lambda_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{vmatrix}$$

Donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. La famille (A, I^2) est libre.

4.5.3.a

On a montré que $A^{n+1} = A^{n+1}_{\{1,2\}}A + (A^{n+1}_{\{1,1\}} - A^{n+1}_{\{1,2\}})I_2$ et on pose $A^{n+1} = a^{n+1}A + b^{n+1}I_2$.
De même, $A^n = A^n_{\{1,2\}}A + (A^n_{\{1,1\}} - A^n_{\{1,2\}})I_2$ et $A^n = a^nA + b^nI_2$. Donc $a^n = A^n_{\{1,2\}}$, et $b^n = A^n_{\{1,1\}} - A^n_{\{1,2\}}$.

$$A^{n+1} = A.A^n = \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}A^n_{\{1,1\}} & A^n_{\{1,2\}}\\A^n_{\{1,2\}} & A^n_{\{1,1\}} + A^n_{\{1,2\}}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}A^n_{\{1,1\}} + A^n_{\{1,2\}} & A^n_{\{1,1\}} + 2A^n_{\{1,2\}}\\A^n_{\{1,1\}} + 2A^n_{\{1,2\}} & 2A^n_{\{1,1\}} + 3A^n_{\{1,2\}}\end{vmatrix}$$

Donc

$$A^{n+1} = (A^n_{\{1,1\}} + 2A^n_{\{1,2\}}).A + (A^n_{\{1,1\}} + A^n_{\{1,2\}} - (A^n_{\{1,1\}} + 2A^n_{\{1,2\}}))I_2$$

$$\begin{cases} a^{n+1} = & A^n_{\{1,1\}} + 2A^n_{\{1,2\}}\\ b^{n+1} = & -A^n_{\{1,2\}}\\ a^n = & A^n_{\{1,2\}}\\ b^n = & A^n_{\{1,1\}} - A^n_{\{1,2\}}\end{cases}$$

$$\begin{cases} a^{n+1} = & A^n_{\{1,1\}} + 2A^n_{\{1,2\}}\\ b^{n+1} = & -A^n_{\{1,2\}}\\ A^n_{\{1,1\}} = & a^n + b^n\\ A^n_{\{1,2\}} = & a^n\end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} a^{n+1} = 3a^n + b^n \\ b^{n+1} = -a^n \end{cases}$$

On a $a_0 = 0, b_0 = 1$ et $a_1 = 1, b_1 = 0$.

4.5.3.b

On a $X_n = \begin{vmatrix} a_n \\ b_n \end{vmatrix}$. On cherche B tel que $X_{n+1} = BX_n = B \begin{vmatrix} a_n \\ b_n \end{vmatrix}$.

$$X_{n+1} = \begin{vmatrix} 3a_n + b_n \\ -a_n \end{vmatrix} = B \begin{vmatrix} a_n \\ b_n \end{vmatrix}$$

Donc

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

4.5.3.c

On a

$$B^2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = k.B + j.I_2 = k. \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + j. \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3k + j & k \\ -k & j \end{vmatrix}$$

Ceci fait $k = 3$ et $j = -1$, donc $B^2 = 3B - I_2$.

Exercice 4.6

Exercice 4.6.1

$$S(a,b) = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}, S(a,-b) = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$$

$$S(a,b).S(a,-b) = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & ab - ab \\ ab - ab & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = S(a^2 + b^2, 0)$$

$$S(a_1,b_1).S(a_2,b_2) = \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_2a_1 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \end{vmatrix} = S(a_1a_2 - b_1b_2, a_2b_1 + a_1b_2)$$

$$T(a_1,b_1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{vmatrix}, T(a_2,b_2) = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{vmatrix}$$

$$T(a_1,b_1).T(a_2,b_2) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1a_2 - a_1b_2 & a_1a_2 + b_1b_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 & a_1b_2 - b_1a_2 \end{vmatrix} = S(b_1a_2 - a_1b_2, a_1a_2 + b_1b_2)$$

$$S(a_1,b_1).T(a_2,b_2) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ a_1b_2 + b_1a_1 & b_1b_2 - a_1a_2 \end{vmatrix} = T(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$$

$$T(a_1,b_1).S(a_2,b_2) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2a_1 + b_2b_1 & b_2a_1 - a_2b_1 \\ b_2a_1 - a_2b_1 & b_2b_1 + a_2a_1 \end{vmatrix} = T(bc - ad, bd + ac)$$

Exercice 4.6.2

Prenons $c_1 = a_1 + ib_1 = S(a_1, b_1)$ et $c_2 = a_2 + ib_2 = S(a_2, b_2)$.

$$c_1 + c_2 = S(a_1, b_1) + S(a_2, b_2) = \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{vmatrix} =$$
$$S(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$c_1.c_2 = S(a_1, b_1).S(a_2, b_2) = S(a_1a_2 - b_1b_2, a_2b_1 + a_1b_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_2b_1 + a_1b_2)$$

$S(a, b).s(a - b)$ correspond à la multiplication d'un nombre complexe et de son conjugué.

Exercice 4.6.3.a

$$\sigma(M) = \Sigma X_M = T(1, 0)X_M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_M \\ y_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_M \\ -y_M \end{vmatrix}$$

La transformation $\sigma(M)$ correspond à la symétrie par rapport à l'axe des abcisses.

Exercice 4.6.3.b

v

$$\sigma'(M) = \Sigma' X_M = T(0, 1)X_M = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_M \\ y_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_M \\ x_M \end{vmatrix}$$

La transformation $\sigma'(M)$ correspond à la symétrie par rapport à la diagonale $y = x$.

Exercice 4.6.3.c

$$r(M) = R.X_M = S(0, 1)X_M = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_M \\ y_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y_M \\ x_M \end{vmatrix}$$

La transformation $r(M)$ correspond à la rotation de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'origine.

Exercice 4.7

Exercice 4.7.1

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La somme des lignes et des colonnes est égale à $s(I_3) = 1$, donc I_3 est une matrice magique.

E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si $0_E \in E$ et si E est stable par combinaison linéaire $\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v \in E$.

$$0_E = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La somme des lignes et des colonnes est égale à $s(0_E) = 0$, donc 0_E est une matrice magique ($0_E \in E$).

Posons $s(u) = a$ et $s(v) = b$. Montrons que

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v \in E$$

$$\lambda u + \mu v = \lambda \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda u_{11} + \mu v_{11} & \lambda u_{12} + \mu v_{12} & \lambda u_{13} + \mu v_{13} \\ \lambda u_{21} + \mu v_{21} & \lambda u_{22} + \mu v_{22} & \lambda u_{23} + \mu v_{23} \\ \lambda u_{31} + \mu v_{31} & \lambda u_{32} + \mu v_{32} & \lambda u_{33} + \mu v_{33} \end{vmatrix}$$

$s(\lambda u+\mu v) = \lambda u_{11}+\mu v_{11}+\lambda u_{21}+\mu v_{21}+\lambda u_{31}+\mu v_{31} = \lambda(u_{11}+u_{21}+u_{31})+\mu(v_{11}+v_{21}+v_{31}) = \lambda s(u)+\mu s(v)$
Idem pour les autres lignes et colonnes.

$\lambda u + \mu v \in E$. Donc, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 4.7.2

Soit $u, v \in E$, on a

$$u.v = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} u_{11}.v_{11} + u_{12}.v_{21} + u_{13}.v_{31} & u_{11}.v_{12} + u_{12}.v_{22} + u_{13}.v_{32} & u_{11}.v_{13} + u_{12}.v_{23} + u_{13}.v_{33} \\ u_{21}.v_{11} + u_{22}.v_{21} + u_{23}.v_{31} & u_{21}.v_{12} + u_{22}.v_{22} + u_{23}.v_{32} & u_{21}.v_{13} + u_{22}.v_{23} + u_{23}.v_{33} \\ u_{31}.v_{11} + u_{32}.v_{21} + u_{33}.v_{31} & u_{31}.v_{12} + u_{32}.v_{22} + u_{33}.v_{32} & u_{31}.v_{13} + u_{32}.v_{23} + u_{33}.v_{33} \end{vmatrix}$$

$$s(u.v) = u_{11}.v_{11} + u_{12}.v_{21} + u_{13}.v_{31} + u_{11}.v_{12} + u_{12}.v_{22} + u_{13}.v_{32} + u_{11}.v_{13} + u_{12}.v_{23} + u_{13}.v_{33} =$$

$u_{11}(v_{11}+v_{12}+v_{13})+u_{12}(v_{21}+v_{22}+v_{23})+u_{13}(v_{31}+v_{32}+v_{33}) = u_{11}s(v)+u_{12}s(v)+u_{13}s(v) = s(v)(u_{11}+u_{12}+u_{13}) = s(v).s(u)$
Idem pour les autres lignes et colonnes.
Donc, $u.v \in E$.

On a $s(u.v) = (s(u).s(v)$.

Exercice 4.7.3.a

F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si $0_E \in F$ et si F est stable par combinaison linéaire $\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v \in F$.

$$0_E = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La somme des lignes et des colonnes est égale à $s(0_E) = 0$, donc 0_E est une matrice magique à somme nulle ($0_E \in F$).

On a $s(u) = 0$ et $s(v) = 0$. Montrons que

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v \in F$$

$$\lambda u + \mu v = \lambda \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda u_{11} + \mu v_{11} & \lambda u_{12} + \mu v_{12} & \lambda u_{13} + \mu v_{13} \\ \lambda u_{21} + \mu v_{21} & \lambda u_{22} + \mu v_{22} & \lambda u_{23} + \mu v_{23} \\ \lambda u_{31} + \mu v_{31} & \lambda u_{32} + \mu v_{32} & \lambda u_{33} + \mu v_{33} \end{vmatrix}$$

$s(\lambda u+\mu v) = \lambda u_{11}+\mu v_{11}+\lambda u_{21}+\mu v_{21}+\lambda u_{31}+\mu v_{31} = \lambda(u_{11}+u_{21}+u_{31})+\mu(v_{11}+v_{21}+v_{31}) = \lambda s(u)+\mu s(v) = 0$
Idem pour les autres lignes et colonnes.

$\lambda u + \mu v \in F$. Donc, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

QED