Rappel de cours

-

Exercice 1.1

$$\begin{cases} x & +y & -z & -t & = 0 \\ x & -y & +z & -t & = 0 \\ x & & & -t & = 0 \\ & y & -z & & = 0 \end{cases}$$

C'est un système d'équations homogène de rang 4, à 4 inconnues. Aucune ligne nulle. Les inconnues principales sont x et y. Les inconnues secondaires sont z et t.

Exercice 1.2

$$(S_0)\begin{cases} x & -3y & & = a_1 \\ & 3y & -6z & = a_2 \\ x & & -6z & = a_3 \end{cases}$$

Calculer $L2 \leftarrow L1 + L2$, $x - 6z = a_1 + a_2$, qui est égale à l'équation [3]. Donc $a_1 + a_2 = a_3$.
Ou calculer $L3 \leftarrow L3 - L1$, $-3y + 6z = a_1 - a_3$, qui est égale à la négation de l'équation [2]. Donc $a_2 = a_3 - a_1$.

$$(S_0)\begin{cases} x & -3y & & = 1 \\ & 3y & -6z & = 1 \\ x & & -6z & = 2 \end{cases}$$

Lorsque $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 2)$, le systme est compatible car $2 = 1 + 1$. La solution du système est $(x, y, z) = (a, \frac{a-1}{3}, \frac{a-2}{6})$.

Lorsque $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$, le systme est compatible. La solution du système est $(x, y, z) = (a, \frac{a}{3}, \frac{a}{6})$.

Exercice 1.3.a

La famille $((1, 2, 3, 0), (3, 1, 2, 0), (2, 3, 1, 0), (3, 2, 1, 0))$ engendre $\mathbb{R}^4$ si

$$\forall a \in \mathbb{R}^4, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R},\ \lambda_1(1, 2, 3, 0) + \lambda_2(3, 1, 2, 0) + \lambda_3(2, 3, 1, 0) + \lambda_4(3, 2, 1, 0) = a$$

$$\forall (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = a_1 \\ 2\lambda_1 & +\lambda_2 & +3\lambda_3 & +2\lambda_4 & = a_2 \\ 3\lambda_1 & +2\lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & = a_3 \\ 0\lambda_1 & +0\lambda_2 & +0\lambda_3 & +0\lambda_4 & = a_4 \end{cases}$$

Le vecteur $(a_1, a_2, a_3, 1) \in \mathbb{R}^4$ mais ne peux pas être généŕe par la famille. Donc, cette famille n'engendre pas l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

Exercice 1.3.b

La famille $((1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1))$ est libre si

$$\begin{cases} 1\lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0 \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & +1\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +1\lambda_3 & = 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 :\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 : -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 : -\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + L_1 : -6\lambda_3 = 0$$

Donc $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille est libre.

Exercice 1.4

La famille s'écrit $\mathcal{F} = ((1,1,0),(0,1,1),(0,1,-1))$.

La famille engendre-t-elle $\mathcal{P}_2$? bd

$$\forall a \in \mathcal{P}^2, \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & & = a_1 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = a_2 \\ & \lambda_2 & -\lambda_3 & = a_3 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 : -2\lambda_3 = a_3 - a_2$$

$$L_2 : 2\lambda_2 = a_2 + a_3$$

$$L_1 : 2\lambda_1 = 2a_1 - a_2 - a_3$$

Donc $\lambda_1 = \frac{2a_1-a_2-a_3}{2}$, $\lambda_1 = \frac{a_2+a_3}{2}$, $\lambda_1 = \frac{a_3-a_2}{2}$. La famille $\mathcal{F}$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$.

La famille est-elle libre?

$$\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & & = 0 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 : -2\lambda_3 = 0$$

Donc $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 1.5

La famille $\mathcal{F} = (x \to \sin(x), x \to f(x))$.

$$\forall g : x \to g(x), \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \{ \;\; \lambda_1(x \to \sin(x)) \quad \lambda_2(x \to f(x)) = x \to g(x)$$

Non. Prenons $g : x \to \cos(x)$. Pour $x \to \infty$, on a $\lambda_1(x \to \sin(x)) = (x \to cos(x)$ Il n'existe pas de λ_1 qui engendre la fonction $x \to \cos(x)$ car $\sin(x) \neq \frac{\cos(x)}{\lambda_1}$.

Exercice 1.6

La famille $((1,0,0,0),(1,2,0,0),(1,2,3,0),(1,2,3,4))$ est libre si

$$\begin{cases} \lambda_1 & & & & = 0 \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & & & = 0 \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & & = 0 \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & +4\lambda_4 & = 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$L_1 : \lambda_1 = 0$$

$$L_2 : 2\lambda_2 = 0$$

$$L_3 : 3\lambda_3 = 0$$

$$L_4 : 4\lambda_4 = 0$$

Donc $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille est libre.

$$E \subset F\, ssi\, \forall f \in E,\, f \in F$$

On a $E = \lambda_{E1}u_1 + \lambda_{E2}u_2$ et $F = \lambda_{F1}u_1 + \lambda_{F2}u_2 + \lambda_{F3}u_3$
Soit $f \in E$, alors $f \in F$ avec $\lambda_{F1} = \lambda_{E1}, \lambda_{F2} = \lambda_{E2}, \lambda_{F3} = 0$.
L'inclusion est strict car lorsque $\lambda_{F3} \neq 0$ alors $f \in F$ mais $f \notin E$.

Soit $f \in F$, alors $f \in \mathbb{R}^4$ avec $\lambda_1 = \lambda_{F1}, \lambda_2 = \lambda_{F2}, \lambda_3 = \lambda_{F3}$.
L'inclusion est strict car $(3,3,3,3) \in \mathbb{R}^4$ mais $(1,2,3,6) \notin F$ car $\neg\exists\lambda_{F1}, \lambda_{F2}, \lambda_{F3}, \lambda_{F4}, 0\lambda_{F1}{+}0\lambda_{F2}0\lambda_{F3}0\lambda_{F4} = 6$.

Exercice 1.7

la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base canonique de $\mathbb{R}^4$ donc

$$\forall a \in \mathbb{R}^4, \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} \lambda_1 e_{11} & +\lambda_2 e_{21} & +\lambda_3 e_{31} & +\lambda_4 e_{41} & = a_1 \\ \lambda_1 e_{12} & +\lambda_2 e_{22} & +\lambda_3 e_{32} & +\lambda_4 e_{42} & = a_2 \\ \lambda_1 e_{13} & +\lambda_2 e_{23} & +\lambda_3 e_{33} & +\lambda_4 e_{43} & = a_3 \\ \lambda_1 e_{14} & +\lambda_2 e_{24} & +\lambda_3 e_{34} & +\lambda_4 e_{44} & = a_4 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \lambda_1 e_{11} & +\lambda_2 e_{21} & +\lambda_3 e_{31} & +\lambda_4 e_{41} & = 0 \\ \lambda_1 e_{12} & +\lambda_2 e_{22} & +\lambda_3 e_{32} & +\lambda_4 e_{42} & = 0 \\ \lambda_1 e_{13} & +\lambda_2 e_{23} & +\lambda_3 e_{33} & +\lambda_4 e_{43} & = 0 \\ \lambda_1 e_{14} & +\lambda_2 e_{24} & +\lambda_3 e_{34} & +\lambda_4 e_{44} & = 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Pour que (u_1, u_2, e_2, e_4) soit une base canonique de $\mathbb{R}^4$, il faut montrer:
P1:

$$\forall b \in \mathbb{R}^4, \exists(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} \beta_1 & +2\beta_2 & +\beta_3 e_{21} & +\beta_4 e_{41} & = b_1 \\ & & +\beta_3 e_{22} & +\beta_4 e_{42} & = b_2 \\ 2\beta_1 & +3\beta_2 & +\beta_3 e_{23} & +\beta_4 e_{43} & = b_3 \\ & & +\beta_3 e_{24} & +\beta_4 e_{44} & = b_4 \end{cases}$$

Démonstration de P1

Posons

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = \lambda_2 \\ \beta_4 = \lambda_4 \end{cases}$$

et P2:

$$\begin{cases} \beta_1 & +2\beta_2 & +\beta_3 e_{21} & +\beta_4 e_{41} & = 0 \\ & & +\beta_3 e_{22} & +\beta_4 e_{42} & = 0 \\ 2\beta_1 & +3\beta_2 & +\beta_3 e_{23} & +\beta_4 e_{43} & = 0 \\ & & +\beta_3 e_{24} & +\beta_4 e_{44} & = 0 \end{cases} \implies \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

Démonstration de P2

$$L4 \leftarrow e_{22}L4 - e_{24}L2 :\ \beta_4(e_{22}e_{44} - e_{24}e_{42}) = 0$$

Exercice 1.8

$$(S) \begin{cases} x & +y & +2z & -t & = 0 \\ 3x & +4y & +2z & +t & = 0 \end{cases}$$

Première étape, mettre le systeème sous forme échelonnée. $L2 \leftarrow L2 - 3L1$

$$(S)\begin{cases} x & +y & +2z & -t & =0 \\ & y & -4z & +4t & =0 \end{cases}$$

C'est un systéme de rang 2, avec 2 inconnues principales x, y et 2 inconnues secondaires z, t. Les solutions s'écrivent

$$(x_1, y_1, z_1, t_1) = (-6z_1 + 5t_1, 4z_1 - 4t_1, z_1, t_1) = z_1(-6, 4, 1, 0) + t_1(5, -4, 0, 1)$$

La famille $(u_1, u_2) = ((-6, 4, 1, 0), (5, -4, 0, 1))$ forme une base $\mathcal{B}$, de dimension 2 ($p - r$, avec p le nombre d'inconnues du système et r son rang).

Le vecteur $v = (2, -3, 1, -1)$ est solution de (S) si $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = u_3$.

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \begin{cases} -6\lambda_1 & +5\lambda_2 & =2 \\ 4\lambda_1 & -4\lambda_2 & =-3 \\ \lambda_1 & +0\lambda_2 & =1 \\ 0\lambda_1 & +\lambda_2 & =-1 \end{cases}$$

Faux, car $-6 - 5 \neq 2$.

La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle liée? Une famille est liée si $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, non tous nul, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$.

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \begin{cases} -6\lambda_1 & +5\lambda_2 & +2\lambda_3 & =0 \\ 4\lambda_1 & -4\lambda_2 & -3\lambda_3 & =0 \\ \lambda_1 & +0\lambda_2 & +\lambda_3 & =0 \\ 0\lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda_3 & =0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -\lambda_3,\ \lambda_2 = \lambda_3,\ 6\lambda_3 + 5\lambda_3 + 2\lambda_3 = 0,\ -4\lambda_3 - 4\lambda_3 - 3\lambda_3 = 0$$

Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est libre donc elle n'est pas liée.

Exercice 1.9

la famille (v_1, v_2, v_3) est une base canonique de $\mathbb{R}^3$ donc

$$\forall a \in \mathbb{R}^3, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = a$$

et

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Pour que (u_1, u_2, u_3) soit une base canonique de $\mathbb{R}^3$, il faut montrer:
P1:

$$\forall b \in \mathbb{R}^3, \exists \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R},\ \beta_1 v_1 + \beta_2(v_1 + v_2) + \beta_3(v_1 + v_2 + v_3) = b$$

Démonstration de P1.

$$\forall b \in \mathbb{R}^3, \exists \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R},\ \beta_1 v_1 + \beta_2 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_1 + \beta_3 v_2 + \beta_3 v_3 = b$$

$$\forall b \in \mathbb{R}^3, \exists \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R},\ v_1(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + v_2(\beta_2 + \beta_3) + \beta_3 v_3 = b$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \lambda_1 \\ \beta_2 + \beta_3 = \lambda_2 \\ \beta_3 = \lambda_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ \beta_2 = \lambda_2 - \lambda_3 \\ \beta_3 = \lambda_3 \end{cases}$$

Propriété vérifiée.

et P2:

$$\beta_1 v_1 + \beta_2(v_1 + v_2) + \beta_3(v_1 + v_2 + v_3) = 0 \implies \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

Démonstration de P2.

$$v_1(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + v_2(\beta_2 + \beta_3) + \beta_3 v_3 = 0 \implies \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

Posons

$$\begin{cases} \beta_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ \beta_2 = \lambda_2 - \lambda_3 \\ \beta_3 = \lambda_3 \end{cases}$$

$$v_1(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_3) + v_2(\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_3) + \lambda_3 v_3 = 0$$

Par hypothèse

$$v_1\lambda_1 + v_2\lambda_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 - 0 \\ \beta_2 = 0 - 0 \\ \beta_3 = 0 \end{cases}$$

Propriété vérifiée.

(u_1, u_2, u_3) est une base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Les coordonnées du vecteur $v = 2v_1 - v_2 + 3v_3 = (2 - (-1))u_1 + ((-1) - 3)u_2 + 3u_3 = 3u_1 - 4u_2 + 3u_3$

Exercice 1.10

Deux vecteurs sont colinénaires si $u_1 = \lambda u_2$

$$\begin{cases} 1 = 0\lambda \\ -1 = \lambda \\ 1 = -\lambda \\ -1 = \lambda \end{cases}$$

De L1, il n'existe pas de λ, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 = 0 \implies \beta_1 = \beta_2 = \beta_3\beta_4 = 0$$

$$\begin{cases} \beta_1 & & +\beta_3 e_{31} & +\beta_4 e_{41} & = 0 \\ -\beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3 e_{32} & +\beta_4 e_{42} & = 0 \\ \beta_1 & -\beta_2 & +\beta_3 e_{33} & +\beta_4 e_{43} & = 0 \\ -\beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3 e_{34} & +\beta_4 e_{44} & = 0 \end{cases} \implies \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

$$L2 \leftarrow L2 + L3 : \ \beta_3(e_{32} + e_{33}) + \beta_4(e_{42} + e_{43}) = 0$$

$$L3 \leftarrow L3 + L4 : \ \beta_3(e_{33} + e_{34}) + \beta_4(e_{43} + e_{44}) = 0$$

$$L5 \leftarrow (e_{33} + e_{34})L2 - (e_{32} + e_{33})L3 : \ \beta_4((e_{33} + e_{34})(e_{42} + e_{43}) - (e_{32} + e_{33})(e_{43} + e_{44})) = 0$$

Pour avoir $\beta_4 = 0$ il faut $(e_{33} + e_{34})(e_{42} + e_{43}) - (e_{32} + e_{33})(e_{43} + e_{44}) \neq 0$.
Pour avoir $\beta_3 = 0$ lorsque $\beta_4 = 0$, il faut $(e_{32} + e_{33}) \neq 0$ et $(e_{33} + e_{34}) \neq 0$. De $L1$, on a $\beta_1 = 0$ lorsque $\beta_3 = \beta_4 = 0$.
De $L2, L3, L4$, on a $\beta_2 = 0$ lorsque $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = 0$.
Donc prenons $e3 = (17, 1, 1, 1)$ et $e4 = (7, 1, 1, 2)$.
Il faut vérifier qu'aucune des 4 vecteurs n'est colinéaire:

- e_2 avec les 3 autres, vrai car $e_{22} = 0$

- e_1 et e_3 vrai car de e_{11}, il faudrait $\lambda = 7$ qui est faux pour e_{12}
- e_1 et e_4 vrai car de e_{11}, il faudrait $\lambda = 17$ qui est faux pour e_{12}
- e_3 et e_4 vrai car e_{31} et e_{41} sont premiers entre eux.

Exercice 1.11

On a

- $P_1(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$, posons $v_1 = (1, -5, 6)$
- $P_2(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$, posons $v_2 = (1, -4, 3)$
- $P_3(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$, posons $v_3 = (1, -3, 2)$

Montrons que

$$\forall a \in \mathcal{P}_2, \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = a$$

$$\forall a \in \mathcal{P}_2, \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda_1(x^2 - 5x + 6) + \lambda_2(x^2 - 4x + 3) + \lambda_3(x^2 - 3x + 2) = \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3$$

$$\forall a \in \mathcal{P}_2, \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, x^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + x(-5\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_3) + 6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3$$

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \beta_2 = -5\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_3 \\ \beta_3 = 6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{array}\right.$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{l} 3\lambda_1 = -\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 \\ \lambda_2 = -4\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3 \\ 2\lambda_3 = 9\beta_1 + 3\beta_2 + 1\beta_3 \end{array}\right.$$

La propriété est vraie.

Montrons que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \lambda_1 & -5\lambda_2 & +6\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & -4\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & -3\lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \end{array}\right.$$

$$L_2 \leftarrow L2 - L1 : \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$$

$$L_3 \leftarrow L3 - L1 : 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0$$

$$L_4 \leftarrow L3 - 2L2 : 2\lambda_3 = 0$$

Donc

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

La famille (v_1, v_2, v_3) est une base de l'espace $\mathcal{P}_2$.

Les coordonnées de $Q(x) = \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3$ dans la base $(P_1(x), P_2(x), P_3(x))$ sont

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = -\frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \\ \lambda_2 = -4\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3 \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}(9\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_3) \end{array}\right.$$