## Rappel de cours

**Definition 1.** Soit $\mathscr{E}$ un K-espace vectoriel. Une partie F de $\mathscr{E}$ est appele un sous-espace vectoriel si :

- $0_E \in F$,
- $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$,
- $\lambda.u \in F$ pour tout $\lambda \in K$ et tout $u \in F$.

**Definition 2.** Une famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de $E$ est une famille libre ou linéairement indépendante si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, cest-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_p = 0$$

**Definition 3.** Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de $E$. La famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$. Ce qui peut s'écrire aussi :

$$\forall v \in E, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p, v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p$$

**Definition 4.** Si $f : E \to F$ est une application linéaire, on définit le noyau de $f$ comme étant le sous-espace vectoriel (sev) de $E$ défini par

$$ker(f) := \{x \in E | f(x) = 0\}$$

On définit l'image de f comme étant le sev de F défini par

$$Im(f) = \{y \in F | \exists x \in E, f(x) = y\}$$

La dimension de $Im(f)$ s'appelle aussi le rang de f et se note $rg(f)$.

**Definition 5.** Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel de dimension $n$, et $B, B'$ deux bases de $\mathscr{E}$. On appelle la *matrice de passage* de la base $B$ vers la base $B'$, notée $P_{b,B'}$, la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées du j-ième vecteur de la base $B'$ par rapport la base $B$.
Dans le cas particulier où $B$ est la base canonique de $\mathscr{E}$, alors la matrice de passe est formée des vecteurs de $B'$.

**Definition 6.** Soit

- $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, ume application linéaire
- $B, B'$ deux bases de $\mathscr{E}$
- $P_{B,B'}$, la matrice de passage de $B$ vers $B'$
- $A = Mat_B(f)$, la matrice de l'application $f$ dans la base $B$
- $B = Mat_{B'}(f)$, la matrice de l'application $f$ dans la base $B'$

Alors

$$B = P^{-1} A P$$

## Exercice 1

Soit $U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1+x_2-2x_3+4x_4 = 0\}$ et $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 | 2x_1+3x_2+x_3+5x_4 = 0\}$.
Il faut calculer $U \cap V$.
Trouvons une base pour l'espace vectoriel $U$.

$$U = \begin{pmatrix} -x_2+2x_3-4x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = ((-1,1,0,0),(2,0,1,0),(-4,0,0,1))$$

Trouvons une base pour l'espace vectoriel $V$.

$$U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1-3x_2-5x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = ((1,0,-2,0),(0,1,-3,0),(0,0,-5,1))$$

Pour qu'un vecteur $v$ appartienne à $U \cap V$, il est nécessaire et suffisant d'avoir $v$ comme une combinaison linéaire des 2 bases de $U$ et $V$, donc

$$v = a_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{14}{5} \end{vmatrix}$$

D'où

$$v = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

On obtient le système d'équations

$$\begin{cases} a_1 = & b_2 \\ a_2 = & -\frac{1}{5}b_2 + \frac{3}{5}b_3 \\ a_3 = & b_3 \\ b_1 = & \frac{7}{5}b_2 + \frac{14}{5}b_3 \end{cases}$$

On peut maintenant calculer $v$

$$v = b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{5}b_2 + \frac{3}{5}b_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La base de $U \cap V$ est

$$((-1-\frac{1}{5}.2, 1-\frac{1}{5}.0, 0-\frac{1}{5}.1, 0-\frac{1}{5}.0), (\frac{3}{5}.2-4, \frac{3}{5}.0+0, \frac{3}{5}.1+0, \frac{3}{5}.0+1))$$

$$((-\frac{7}{5}, 1, -\frac{1}{5}, 0), (-\frac{14}{5}, 0, \frac{3}{5}, 1))$$

## Exercice 2

Le rang est la dimension de l'image de $f$. Commencons par calculer l'image de $f$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R}^3 | \exists x \in \mathbb{R}^3, f(x) = y\}$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 4x_2 + 3x_3, 3x_1 + x_2 + x_3, 5x_1 + 2x_2 + 3x_3) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$Imf = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})$$

Il faut vérifier si ces vecteurs sont libres ou pas? On écrit une relation de liaison entre les vecteurs.

$$a. \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c. \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

On échelonne la matrice et on obtient

$$a. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Il y a une unique solution; $a, b, c = 0$. Donc $Imf$ est linéairement indépendent et est une base. La dimension de $Imf = 3$, donc le rang de $f = 3$.

## Exercice 3

## Exercice 3.1 - $KerA$

Le noyau $KerA = \{X \in \mathbb{R}^3, A.X = 0\}$. Prenons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$A.X = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x + 2y + z & = 0 \\ 2x + 3y + z & = 0 \\ x + y & = 0 \end{cases}$$

Apres échelonnage, on a

$$\begin{cases} x + 2y + z & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases}$$

En prenant $z$ comme paramètre secondaire on obtient:

$$KerA = \{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}\} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .z, z \in \mathbb{R}\} = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

## Exercice 3.1 - $ImA$

L'image de $A$ est l'espace vectoriel engendré par la famille génératrice des colonnes de $A$.

$$ImA = Vect(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix})$$

Il faut maintenant trouver une base de $ImA$. Il faut vérifier si ces vecteurs sont libres ou pas? On écrit une relation de liaison entre les vecteurs.

$$a.\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$$

Ceci est $KerA$, comme $KerA \neq \{0\}$, la famille n'est pas libre. Prenons les 2 premiers vecteurs comme base et vérifions si ils sont libres. Base de $ImA = vect(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix})$. Ils sont libres car linéairement indépendent. C'est une base de $ImA$.

## Exercice 4

La proposition est fausse. Soit $F_1, F_2, F_3$ 3 sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, $F_1 = \{(0,x) : x \in \mathbb{R}\}, F_2 = \{(y,0) : y \in \mathbb{R}\}, F_3 = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$. On a $F_1 \cap F_3 = \{(0,0)\}$ et $F_2 \cap F_3 = \{(0,0)\}$. On a $(F_1 \cap F_3) + (F_2 \cap F_3) = \{0_{\mathbb{R}^2}\} + \{0_{\mathbb{R}^2}\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. On a $(F_1 + F_2) = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ donc $(F_1 + F_2) \cap F_3 = (x,x) : x \in \mathbb{R} = F_3$.

## Exercice 5

La matrice de passage $P_{B,B'}$ est

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\2 & -1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

## Exercice 6

$ker f \oplus Im f = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow ker f \cap Im f = \{0\}$. Trouvons un endomorphisme $f$ tel que $ker f \cap Im f \neq \{0\}$

Prenons $f = \begin{vmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{vmatrix}$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Calculons $ker f$ et $im f$.

$$a.\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0$$

Donc $ker f = Vect((z, 0))$

L'image de $f$ est l'espace vectoriel engendré par la famille génératrice des colonnes de $f$.

$$ImA = Vect(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$$

Il faut maintenant trouver une base de $Im f$. $Vect((z, 0))$ est une famille de $f$.

$$ker f + Im f = Vect((z, 0)) \neq \mathbb{R}^2$$

de plus $ker f \cap Im f \neq \{0\}$

EN fait ceci est vrai lorsque $f$ est un

## Exercice 7

Les matrices $A$ et $B$ sont semblables si $\exists P, A = PBP^{-1}$. Prenons $B$ égale à la matrice identité $I_d$. On a $PBP^{-1} = PI_dP^{-1} = PP^{-1} = I_d$. Prenons $A$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ de rang 2 et différente de $I_d$. On a $\nexists P, A = PI_dP^{-1}$, donc la proposition est fausse.

## Exercice 8

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \\ 0 & c & d & 0 \end{vmatrix} = -a. \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} + b. \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} = a.d. \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - b.c. \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

On a $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Donc

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \\ 0 & c & d & 0 \end{vmatrix} = a.d.(ad - bc) - b.c.(ad - bc) = (ad - bc)^2$$

QED