Maths 101 : Préparation du test 3

Anatole DEDECKER

17 novembre 2019

1 Vrai

Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x-\pi|\sin(x) \end{array} \right.$

f est dérivable sur $]-\infty, \pi[$ et sur $]\pi, +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables. Il reste donc à montrer que f est dérivable en π. Posons donc, pour x au voisinage de π :

$$\begin{aligned} \theta(x) &:= \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} \\ &= \frac{|x-\pi|\sin(x) - |\pi-\pi|\sin(\pi)}{x-\pi} \\ &= \frac{|x-\pi|\sin(x)}{x-\pi} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\lim_{x\to\pi^+} \theta(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{(x-\pi)\sin(x)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} \sin(x) = \sin(0) = 0$$
$$\lim_{x\to\pi^-} \theta(x) = \lim_{x\to\pi^-} -\frac{(x-\pi)\sin(x)}{x-\pi} = -\lim_{x\to\pi^-} \sin(x) = -\sin(0) = 0$$

Donc θ admet une limite, 0, en π. Donc f est dérivable en π.
f est donc bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

2 Vrai

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en x_0, de dérivée $f'(x_0)$ en x_0. On sait alors qu'il existe une fonction ϵ définie au voisinage de 0 et de limite nulle en 0 telle que, pour x voisin de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\epsilon(x-x_0)$$

En particulier, pour h dans un certain voisinage de 0, on pose :

$$\begin{aligned} \theta(x_0+h) &:= \frac{f(x_0+3h) - f(x_0+h)}{h} \\ &= \frac{f(x_0) + 3hf'(x_0) + 3h\epsilon(3h) - f(x_0) - hf'(x_0) - h\epsilon(h)}{h} \\ \theta(x_0+h) &= 2f'(x_0) + 3\epsilon(3h) - \epsilon(h) \end{aligned}$$

D'où il vient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+3h)-f(x_0+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \theta(x_0+h) = 2f'(x_0)$$

3 Faux

Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} R \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(2x)} \end{array} \right.$. Notons que f est dérivable en 0, et que :

$$f'(0) = \mathrm{e}^{\sin(2\times 0)} \times \cos(2\times 0) \times 2 = 2 \tag{3.1}$$

Supposons maintenant que, pour x voisin de 0, on ait :

$$f(x) = 1 + 3x + x\epsilon(x)$$

On remarque que cette expression est un DL d'ordre 1 de f au voisinage de 0. Cela implique donc que f est dérivable en 0, et que $f'(0) = 3$. Ce qui entre en contradiction avec (3.1).
L'affirmation est donc fausse.

4 Faux

Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x-1)^3 \end{array} \right.$
Montrons que f constitue un contre-exemple à l'affirmation 4.
On note que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $I = [-2, 3]$, et que $\forall x \in I$:

$$f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$$

On a bien $f'(1) = 0$, mais f' est positive sur $\mathbb{R}$, donc elle ne change pas de signe en 1.
Donc f n'admet pas d'extremum local en 1.
L'affirmation est donc fausse.

5 Faux

Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array} \right.$
f est définie sur $\mathbb{R}$, donc au voisinage de 0.
De plus $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -x = 0 = f(0) = \lim_{x\to 0^+} x = \lim_{x\to 0^+} f(x)$
Donc f est continue en 0. Montrons cependant que f n'est pas dérivable en 0.
Posons, pour x voisin de 0 :

$$\theta(x) := \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}$$

On a alors :

$$\lim_{x\to 0^+} \theta(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} \theta(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Donc θ n'admet pas de limite en 0. f n'est donc pas dérivable en 0, alors qu'elle est définie au voisinage de 0 et continue en 0.
L'affirmation est donc fausse.

6 Faux

Soit $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f : \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan^3(x) \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan^4(x) + \tan^2(x) \end{array} \right.$
On sait que tan est dérivable sur I, donc f l'est aussi par composée de fonctions dérivables sur I. On a alors, $\forall x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\tan^2(x) \times \tan'(x) \\ &= 3\tan^2(x)\left(1 + \tan^2(x)\right) \\ &= 3(\tan^4(x) + \tan^2(x)) \\ f'(x) &= 3g(x) \end{aligned}$$

Or, g n'est pas la fonction nulle sur I (puisque $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2$) donc :

$$f' = 3g \neq g$$

L'affirmation est donc fausse.

7 Vrai

Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{array} \right.$
Notons d'abord que f est impaire. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{1 + (-x)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = -f(x)$$

Remarquons également que $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &> x^2 \geq 0 \\ \sqrt{1 + x^2} &> \sqrt{x^2} \text{ par croissance de } \sqrt{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ \sqrt{1 + x^2} &> |x| = x \text{ car } x \in \mathbb{R}_+ \\ \sqrt{1 + x^2} &> x \end{aligned} \tag{7.1}$$

Notons alors que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient, à dénominateur ne s'annulant pas, de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ ($x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $1 + x^2 > 0$).
On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times \sqrt{1 + x^2} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1 + x^2} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}\left(\sqrt{1 + x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}\right) \\ &> \frac{1}{1 + x^2}\left(x - \frac{x^2}{x}\right) \text{ d'après (7.1)} \\ f'(x) &> 0 \end{aligned}$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} \\
&= \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}
\end{aligned}$$

On a donc par somme, composée par une fonction continue, et quotient des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

En utilisant alors la parité impaire de f, on trouve alors que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.
On trouve alors que $\sup(\mathrm{Im} f) = 1$ et $\inf(\mathrm{Im} f) = -1$.
Supposons alors que 1 soit également le maximum de $\mathrm{Im} f$. Alors $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q $f(x) = 1$. Mais alors par stricte croissance de f, $f(x+1) > f(x) = 1$ ce qui contredit $\sup(\mathrm{Im} f) = 1$. Donc f n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}$, et d'après sa parité impaire, elle n'admet pas non plus de minimum sur $\mathbb{R}$.
L'affirmation est donc vraie.

8 Vrai

Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 2\sin(x) \end{array} \right.$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 + 2\cos(x)$$

On remarque alors que f' est également dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = -2\sin(x)$$

On a $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0 \\ f''\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = -2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0 \end{array} \right. \tag{8.1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = 1 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 0 \\ f''\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = -2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3} > 0 \end{array} \right. \tag{8.2}$$

Considérons alors les ensembles $E := \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $F := \left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
E (resp. F) contient bien une infinité d'éléments, puisque l'application $k \mapsto$

$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ (resp. $k \mapsto \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$) est strictement croissante, donc établit une injection de $\mathbb{Z}$ dans E (resp. F). De plus, d'après (8.1) (resp. (8.2)), les éléments de E (resp. de F) sont des maximants (resp. des minimants) locaux de f. Donc f admet bien une infinité de maximums (resp. minimums) sur $\mathbb{R}$.

9 Faux

Soit $f : I = [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in I, f(x) := \begin{cases} x \text{ si } x \in [0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrons que f constitue un contre-exemple à l'affirmation 9.
Déterminons pour cela l'ensemble $\mathrm{Im} f$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} f &= f(I) \\ &= f([0,1[) \cup f(\{1\}) \\ &= \mathrm{Id}([0,1[) \cup \{0\} \\ &= [0,1[\cup \{0\} \\ \mathrm{Im} f &= [0,1[\end{aligned}$$

f est donc bien bornée.
On note alors que $\sup(\mathrm{Im} f) = 1 \notin \mathrm{Im} f$. Donc $\mathrm{Im} f$ n'admet pas de maximum.
Donc f est bornée mais n'admet pas de maximum sur I.
L'affirmation est donc fausse.

10 Vrai

Soit $I := [0,1]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
On sait que l'image d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle fermé, donc $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ t.q $\mathrm{Im} f = f(I) = [a,b]$.
b est alors le maximum de l'ensemble $f(I)$, on a donc bien que f admet b comme maximum global sur I.

11 Vrai

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Notons $T > 0$ une de ses périodes.
Posons $\forall k \in \mathbb{Z}$, $I_k := [kT, (k+1)T]$.
Remarquons que l'ensemble des I_k forme une partition de $\mathbb{R}$, i.e $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$
On a alors, $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x \in I_k &\implies kT \leq x \leq (k+1)T \\ &\implies x - kT \in I_0 \\ &\implies f(x) = f(x - kT) \in f(I_0) \text{ par } T\text{-périodicité de } f \end{aligned}$$

Donc, $\forall k \in \mathbb{Z},\ f(I_k) = f(I_0)$.
On en déduit :

$$\mathrm{Im}f = f(\mathbb{R}) = f\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f(I_k) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f(I_0) = f(I_0)$$

Or, I_0 est un intervalle fermé, donc son image par la fonction f, continue, est également un intervalle fermé, i.e $\exists a, b \in \mathbb{R}$ t.q $\mathrm{Im}f = f(I_0) = [a, b]$
b est alors le maximum de $\mathrm{Im}f$, i.e le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
L'affirmation est donc vraie.

12 Vrai

Soit $f : \begin{cases} I = [-1, 1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{2013} \end{cases}$
Notons que f est dérivable sur I, et que $\forall x \in I, f'(x) = 2013x^{2012} = |f'(x)|$ (car 2012 est pair).
Or, on a $\forall x \in I$:

$$\begin{aligned} x^{2012} &\leq 1 \\ 2013x^{2012} &\leq 2013 \\ |f'(x)| &\leq 2013 \end{aligned}$$

On peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis, ce qui nous donne :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| = \left|x^{2013} - y^{2013}\right| \leq 2013\,|x - y|$$

L'affirmation est donc vraie.

13 Vrai

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{gathered} n + 1 > n \\ \sqrt{n+1} > \sqrt{n} \text{ par stricte croissance de } \sqrt{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ 2\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n} > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ par stricte décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} \\ \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} \\ \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{gathered}$$

L'affirmation est donc vraie.

14 Faux

Posons $x = -2\pi \in \mathbb{R}$. On a alors $\cos(x) - 1 = 0 > -2\pi = x$
Ce qui contredit l'affirmation.

15 Vrai

Soient $f : \left\{ \begin{array}{l}]1 : +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\ln(x)) \end{array} \right.$ et $a, b \in]1 : +\infty[$ tels que $1 < a < b$. Notons que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur leur ensemble de définition. f est donc notamment dérivable (et donc continue) sur $[a, b]$, et on a $\forall x \in [a, b]$:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(x)} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln(x)}$$

D'après le théorème des accroissements finis, on sait alors que $\exists c \in]a, b[$ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= f'(c) \\ \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &= \frac{1}{c \ln(c)} \\ \ln(\ln(a)) - \ln(\ln(b)) &= \frac{a - b}{c \ln(c)} \\ \ln\left(\frac{\ln(a)}{\ln(b)}\right) &= \frac{a - b}{c \ln(c)} \\ \frac{\ln(a)}{\ln(b)} &= \exp\left(\frac{a - b}{c \ln(c)}\right) \end{aligned}$$

L'affirmation est donc vraie.

16 Faux

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$$

Notons $g := f|_{\mathbb{R}^*}$. f est donc un prolongement de g. Montrons que g n'admet aucun prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ en 0. g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ comme composées et produits de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est donc notamment dérivable sur $\mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^*$, de dérivée :

$$g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2} = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Soient les suites $\left(x_n := \frac{1}{2n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(y_n := \frac{1}{(2n+1)\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Remarquons $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = 0$.

Cependant, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} g'(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) \right) = -1$$
$$\lim_{n\to+\infty} g'(y_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)\pi) - \cos(\pi + 2n\pi) \right) = 1$$

On a donc deux suites (x_n) et (y_n) telles que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0$, mais $\lim_{n\to+\infty} g'(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} g'(y_n)$
Donc, d'après la caractérisation séquentielle des limites de fonction, on trouve que g' n'admet pas de limite en 0. Donc g ne peut pas être prolongée par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.
f étant un prolongement de g, on en déduit que f ne peut pas être de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
L'affirmation est donc fausse.