Rappel de cours

propriété 4.1

Soit $b(x,y)$ une forme bilinéaire. Définissons $f(x,y) = \frac{b(x,y)+b(y,x)}{2}$ on a

$$\forall(x,y), f(x,y) = \frac{b(x,y)+b(y,x)}{2} = \frac{b(y,x)+b(x,y)}{2} = f(y,x)$$

donc $f(x,y)$ est symétrique. Définissons $g(x,y) = \frac{b(x,y)-b(y,x)}{2}$, on a

$$g(x,y) = \frac{b(x,y)-b(y,x)}{2} = -\frac{b(y,x)-b(x,y)}{2} = -g(x,y)$$

donc $g(x,y)$ est anti-symétrique. On peut décomposer $b(x,y)$ en

$$\frac{b(x,y)+b(y,x)}{2} + \frac{b(x,y)-b(y,x)}{2} = f(x,y) + g(x,y)$$

Question 1

Une forme quadratique q $\mathbb{R}^n$ est dite *définie négative* si $\forall x \in E, q(x) \leq 0$.

Exercice 1

Exercice 1.1

Le vecteur $\overrightarrow{ab} = (-2, 2, 1)$, le vecteur $\overrightarrow{ac} = (-10, 4, -1)$. Les 2 vecteurs ne sont pas colinéaire donc l'espace affine est définie par $F = a + \mathbb{R}\overrightarrow{ab} + \mathbb{R}\overrightarrow{ac}$. Sa représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 5 - 2\lambda_1 - 10\lambda_2 \\ y = -1 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ z = 1 + \lambda_1 - 1\lambda_2 \end{cases}$$

Exercice 1.2

L'espace affine de G est définie par une droite $G = d + \lambda\overrightarrow{u}$. La dimension de lespace affine F est 2, celle de G est 1. L'intersection des espaces affines F et G est soit l'ensemble vide, soit un point (dim = 0). soit une droite (dim =1).

Exercice 1.3

L'équation paramétrique de G est

$$\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 1 \\ z = t + 3\lambda \end{cases}$$

L'intersection de F et G est

$$\begin{cases} 5 - 2\lambda_1 - 10\lambda_2 = 6\lambda \\ -1 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 1 \\ 1 + \lambda_1 - 1\lambda_2 = t + 3\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\lambda + 2\lambda_1 + 10\lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ 3\lambda - \lambda_1 + \lambda_2 = 1 - t \end{cases}$$

Avec $(1) - 2(3)$ on a

$$\begin{cases} 6\lambda + 2\lambda_1 + 10\lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ 4\lambda_1 + 8\lambda_2 = 3 + 2t \end{cases}$$

Avec $4(2) - (3)$ on a

$$\begin{cases} 6\lambda + 2\lambda_1 + 10\lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ 0 = 1 - 2t \end{cases}$$

Si $t \neq 1/2$, alors l'intersection est vide, sinon

$$\begin{cases} 6\lambda = 7 - 6\lambda_2 \\ \lambda_1 = 1 - 2\lambda_2 \end{cases}$$

Donc, l'intersection est la droite passant par d et de vecteur u.

Exercice 2

Exercice 2.1.a

On a $f(a_2) = a_2$ et $f(a_3) = a_3$. L'image de $(a_2 a_3)$ par F est $F(a_2 a_3) = f(a_3 - a_2) = f(a_3) - f(a_2) = a_3 - a_2 = (a_2 a_3)$ car l'application f est une application affine????.

Exercice 2.1.b

$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0a_1}) = \overrightarrow{f}(a_1 - a_0) = \overrightarrow{f}(a_1) - \overrightarrow{f}(a_0) = b_1 - b_0 = \overrightarrow{b_0b_1}$ On a $\overrightarrow{a_0a_1} = (1,0,0)$ et $\overrightarrow{b_0b_1} = (1,0,0)$ donc les vecteurs sont égaux. Donc 1 est valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

Exercice 2.1.c

On a $f(a_2) = a_2$ et $f(a_3) = a_3$, un point p de la droite (a_2, a_3) peut s'écrire sous la forme $p = a_2 + \lambda\overrightarrow{a_2a_3}$. Donc $f(p) = f(a_2 + \lambda\overrightarrow{a_2a_3}) = f(a_2) + \lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_2a_3}) = a_2 + \lambda(\overrightarrow{a_2a_3}) = p$. Donc l'ensemble des points de la droite est un invariant par f.

Exercice 2.2.a

On a (a_0, a_2, b_0, a_3) qui est un parallélogramme car $\overrightarrow{a_0a_2} = \overrightarrow{a_3b_0}$. Par conséquent le milieu m de (a_0, b_0) est égale au milieu de (a_3, a_2). Donc m appartient à la droite (a_2, a_3), donc c'est un point fixe de f.

Exercice 2.2.b

On a $\overrightarrow{a_0b_0} = 2\overrightarrow{a_0m}$, et

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0b})) = \overrightarrow{f(a_0)f(b_0)} = \overrightarrow{b_0f(b_0)}$$

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0m}) = \overrightarrow{f(a_0)f(m)} = \overrightarrow{b_0m}$$

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0b_0}) = \overrightarrow{f}(2\overrightarrow{a_0m}) = 2\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0m}) = 2\overrightarrow{b_0m}$$

Donc $\overrightarrow{b_0f(b_0)} = 2\overrightarrow{b_0m}$. Comme le point m est le milieu de (a_0, b_0), on a $f(b_0) = a_0$.

On a $f(b_1) = a_1$ mais je ne sais pas demontré.

Exercice 2.2.c

$f \circ f = id$ pour chacun des points définis et le milieu m' de (a_1, b_1) qui est un invariant car $f(a_1b_1) = 2f(a_1m')$, $b_1a_1 = 2b_1f(m')$.

f est une symétrie par rapport au plan passant pas la droite (a_2, a_3) et de direction (a_0, b_0).

Exercice 2.3

Une base du repère $\mathcal{R}$ est $(\overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}, \overrightarrow{a_0a_3})$. la transformée de la base par f donne $(\overrightarrow{b_0b_1}, \overrightarrow{b_0a_2}, \overrightarrow{b_0b_3})$ avec $\overrightarrow{b_0b_1} = (0,0,1)$, $\overrightarrow{b_0a_2} = (0,-1,0)$ et $\overrightarrow{b_0a_3} = (-1,0,0)$ donc la matrice associée a l'application f est

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$