

## Exercice 1

La fonction  $f(x)$  est paire ssi  $\forall x, f(x) = f(-x)$ , La fonction  $f(x)$  est impaire ssi  $\forall x, f(x) = -f(-x)$ .

Soit une fonction  $f(x)$ ,

$$f(x) = \frac{2f(x)}{2} = \frac{2f(x) + f(-x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Soit la fonction  $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ , la fonction  $f_1(x)$  est paire car  $f_1(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_1(x)$ .

Soit la fonction  $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ , la fonction  $f_2(x)$  est impaire car  $f_2(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -f_2(x)$ .

Pour toute fonction  $f(x)$ , on a trouvé une fonction  $f_1(x)$  paire et une fonction  $f_2(x)$  impaire tel que  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ .

## Buffon TD1 - Exercice 5

Vrai pour  $u_0$ ?  $u_0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$ , oui.

Admettons que  $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ , calculons  $u_{n+1}$ .

$$u_{n+1} = u_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Vrai pour  $v_0$ ?  $v_0 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6} = 0$ , oui.

Admettons que  $v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , calculons  $v_{n+1}$ .

$$v_{n+1} = v_n + n + 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Vrai pour  $w_0$ ?  $w_0 = \left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2 = 0$ , oui.

Admettons que  $w_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ , calculons  $w_{n+1}$ .

$$w_{n+1} = w_n + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$w_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2$$

## Buffon TD1 - Exercice 6

Preuve par récurrence, supposons  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies n! \geq 2^n$ , trouvons un entier  $n$  pour lequel  $n! \geq 2^n$  et vérifions la propriété pour  $n+1$  avec l'hypothèse de récurrence  $n! \geq 2^n$ . Prenons  $n=4$ , on a  $4! = 24 \geq 16 = 2^4$ .

$$\begin{aligned}(n+1)! &= n!(n+1) \geq 2^n(n+1) \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= n2^n + 2^n > 2^{n+1}, \text{ pour } n \geq 2\end{aligned}$$

Pour  $n_0 \geq 2$  la proposition est vraie. Donc il existe un  $n_0$  (par exemple  $n_0 = 2$ ) pour lequel la proposition est vraie.

### Buffon TD1 - Exercice 7

$$u_0 = 1, u_1 = u_0 = 1, u_2 = u_0 + u_1 = 2, u_3 = u_0 + u_1 + u_2 = 4, u_4 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 8.$$

Vrai pour  $u_0$ ?,  $u_0 = 1 \leq 2^0 = 1$ , Vrai.

Hypothèse de récurrence:  $u_n \leq 2^n$ , calculons  $u_{n+1}$ .

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_n + u_n = 2u_n \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

La proposition est vraie.

### Buffon TD1 - Exercice 8

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left( x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \implies \left( \forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z} \right) \right)$$

Pour  $n = 0$ , on a  $\forall x \in \mathbb{R}, \left( x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \implies \left( x^0 + \frac{1}{x^0} \in \mathbb{Z} \right) \right)$  qui est vrai.

Pour  $n = 1$ , on a  $\forall x \in \mathbb{R}, \left( x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \implies \left( x^1 + \frac{1}{x^1} \in \mathbb{Z} \right) \right)$  qui est vrai.

Supposons la propriété vraie au rang  $k < n$ , calculons le rang  $n$ .

$$\left( x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) \left( x + \frac{1}{x} \right) = x^n + x^{n-2} + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-2}} = \left( x^n + \frac{1}{x^n} \right) + \left( x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \right)$$

Donc

$$\left( x^n + \frac{1}{x^n} \right) = \left( x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) - \left( x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \right)$$

Par hypothèse de récurrence, on a  $\left( x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) \in \mathbb{Z}$  et  $\left( x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \right) \in \mathbb{Z}$ . Donc  $\left( x^n + \frac{1}{x^n} \right) \in \mathbb{Z}$  car la soustraction de deux nombres dans  $\mathbb{Z}$ .

### Buffon TD2 - Exercice 1.a

$$(1-a) \sum_{k=1}^n ka^{k-1} = \sum_{k=1}^n ka^{k-1} - \sum_{k=1}^n aka^{k-1} = \sum_{k=1}^n ka^{k-1} - \sum_{k=1}^n ka^k$$

$$\sum_{k=1}^n ka^{k-1} - ka^n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k - na^n = \sum_{k=0}^n a^k - (n+1)a^n$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n ka^k = \sum_{k=1}^n ka^{k-1} - \sum_{k=0}^n a^k + (n+1)a^n$$

On a  $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$  et  $\sum_{k=1}^n ka^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^n a^k\right)' = \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)'$  Donc

$$\sum_{k=1}^n ka^k = \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)' - \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + (n+1)a^n$$

### Buffon TD2 - Exercice 1.b

Trouver  $a, b, c$ , tel que  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$ .

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a(x^2 + 3x + 2) + b(x^2 + 2x) + c(x^2 + x)}{x(x+1)(x+2)}$$

Donc

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases}$$

Et  $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{1}{2}$ . Donc  $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} \right) - \left( \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \end{aligned}$$

### Buffon TD2 - Exercice 3.1

$$\sum_{k \in [1, 2n], \text{impair}} 3^k = 3^1 + 3^3 + 3^5 + \dots + 3^{2n-1} = 3 + 3.9 + (3.9).9 + \dots (((\dots))).9$$

Soit la suite géométrique définie par  $u_0 = 3$  et de raison  $q = 9$ . La somme  $\sum_{k \in [0, n]} u_k = u_0 \cdot \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ . Donc

$$\sum_{k \in [1, 2n], \text{impair}} 3^k = 3 \cdot \left(\frac{1-9^{n+1}}{1-9}\right)$$

**Buffon TD2 - Exercice 3.2**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln(k-1) + \ln(k+1) - \ln(k^2) \\
&= \sum_{k=2}^n \ln(k-1) + \sum_{k=2}^n \ln(k+1) - 2 \sum_{k=2}^n \ln(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) - 2 \sum_{k=2}^n \ln(k) \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) + \ln(1) + \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) - \ln(2) + \ln(n) + \ln(n+1) - 2 \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) - 2 \ln(n) = -\ln(2) + \ln(n) + \ln(n+1) - 2 \ln(n) \\
&= -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

**Buffon TD2 - Exercice 3.3**

$$\prod k = 1n \left(1 - \frac{1}{2k}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} = \frac{\prod_{k=1}^n 2n-1}{\prod_{k=1}^n 2n} = \frac{\prod_{k=[1,2n], \text{impair}} n}{\prod_{k=[1,2n], \text{pair}} n}$$

Soit les séries arithmétique  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + 2$  et  $v_0 = 0$  et  $v_{n+1} = v_n + 2$ .

$$\frac{\prod_{k=0}^n u_n}{\prod_{k=0}^n v_n}$$

**Buffon TD2 - Exercice 3.4**

$$\prod_{k=1}^n 3^k = 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \dots 3^n = 3^{1+2+3+\dots+n} = 3^{\sum_{k=1}^n k} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

**Buffon TD2 - Exercice 3.6**

$$\sum_{k=1}^n k k! = \sum_{k=1}^n ((k+1) - 1) k! = \sum_{k=1}^n (k+1) k! - k! = \sum_{k=1}^n (k+1)! - \sum_{k=1}^n k! = (n+1)! - 1$$

### Buffon TD3 - Exercice 1.1

Soit  $z = a + bi$ ,

$$z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$$

$$(a + bi)(a - bi) + 3((a + bi) - (a - bi)) = 4 - 3i$$

$$a^2 + b^2 + 3(2bi) = 4 - 3i$$

Donc, on a  $a^2 + b^2 = 4$  et  $6b = -3$ , ce qui fait  $b = -\frac{1}{2}$  et  $a = \frac{\sqrt{15}}{2}$ .

### Buffon TD3 - Exercice 1.3

Soit  $z = a + bi$ ,

$$|z| = z + \bar{z}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$$b^2 = 3a^2$$

### Buffon TD3 - Exercice 1.5

Soit  $z = a + bi$ ,

$$|(1 + i)z - 2i| = 2$$

$$|(1 + i)(a + bi) - 2i| = 2$$

$$|a + bi + ai - b - 2i| = 2$$

$$\sqrt{(a - b)^2 + (a + b - 2)^2} = 2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + (a + b - 2)^2 = 4$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + b^2 + 2ab - 4a - 4b + 4 = 4$$

$$2a^2 + 2b^2 - 4a - 4b = 0$$

$$a^2 + b^2 - 2a - 2b = 0$$

## Rappel de cours

- la fonction  $f \in F^E$  est injective si tout élément de  $F$  admet au plus un antécédent,  $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$  ou  $\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ .
- la fonction  $f \in F^E$  est surjective si tout élément de  $F$  admet exactement un antécédent,  $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$ .
- la fonction  $f \in F^E$  est bijective si elle est injective et surjective.
- soit  $f \in F^E$  et  $g \in G^F$ , la composée des fonctions  $f$  et  $g$  notée  $g \circ f$  définie par  $g \circ f : E \rightarrow G, x \rightarrow g(f(x))$ .

## Buffon TD5 - Exercice 4.1

$P$ : Si  $g \circ f$  est injective alors  $f$  aussi.

Comme  $g \circ f$  est injective, on a  $\forall (x_1, x_2) \in E^2, g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \implies x_1 = x_2 : [1]$ .

Preuve par l'absurde.

Supposons que la fonction  $f$  n'est pas injective. Donc  $\exists (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 \neq x_2 : [2]$ .

En partant de  $f(x_1) = f(x_2)$ , on a  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$  car  $g$  est une fonction. Donc de [1], on a  $x_1 = x_2$ .

En partant de  $f(x_1) = f(x_2)$  et de [2], on a  $x_1 \neq x_2$  ce qui contredit précédemment.

Donc la proposition  $P$  est vraie.

## Buffon TD5 - Exercice 4.2

$P$ : Si  $g \circ f$  est surjective alors  $g$  aussi.

Comme  $g \circ f$  est surjective, on a  $\forall y \in G, \exists! x \in E, y = g \circ f(x) = g(f(x)) : [1]$ .

Comme  $f$  est une fonction donc  $\forall x_e \in E, \exists! y_f \in F, y_f = f(x_e)$ . Donc,  $\forall y \in G, y = g(f(x))$  de [1], soit  $b \in F, b = f(x)$ ,  $b$  existe et est unique par [2].

Donc  $\forall y \in G, y = g(f(x)) = g(b)$  ce qui est la définition de  $g$  est une fonction surjective. Donc la proposition  $P$  est vraie.

## Buffon TD5 - Exercice 4.3

$P$ : si  $g \circ f$  est injective et si  $f$  est surjective alors  $g$  est injective. Comme  $g \circ f$  est injective, on a  $\forall (x_1, x_2) \in E^2, g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \implies x_1 = x_2 : [1]$ .

Comme  $f$  est surjective, on a  $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x) : [2]$ .

Prenons  $x_1, x_2$  tel que  $g(x) = g(y) : [3]$ . Comme  $f$  est surjective [2], il existe  $a, b$  tel que  $x = f(a)$  et  $y = f(b)$ . Donc par  $g(f(a)) = g(f(b))$ .

par [1], on a donc  $a = b$ . Par conséquent  $f(a) = f(b)$  car  $f$  est une fonction. Donc  $x = y$  et  $g(x) = g(y) \implies x = y$  qui est la définition de  $g$  est injective.

Donc la proposition  $P$  est vraie.

## Buffon TD5 - Exercice 4.4

$P$ : si  $g \circ f$  est surjective et si  $g$  est injective alors  $f$  est surjective.

Comme  $g \circ f$  est surjective, on a  $\forall y \in G, \exists! x \in E, y = g \circ f(x) = g(f(x)) : [1]$ .

Comme  $g$  est injective, on a  $\forall (x_1, x_2) \in F^2, g(x_1) = g(x_2) \implies x_1 = x_2 : [2]$ .

## Exercice Cauchy

Solution de l'équation différentielle de la forme  $(y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$  est  $y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_1(t)$  avec  $A(t)$  une primitive de la fonction  $a(t)$  et  $y_1(t)$  est une solution particulière de l'équation.

Pour  $y'(t) - \frac{y(t)}{t^2} = e^{\frac{1}{i}} \sin(t)$ , donc  $a(t) = \frac{1}{t^2}$  et  $b(t) = e^{\frac{1}{i}} \sin(t)$ . On a  $A(t) = -\frac{1}{t}$ . Recherchons une solution particulière de la forme  $y_1(t) = \lambda(t)a^{A(t)}$  avec  $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$ .

$$\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)} = e^{\frac{1}{i}} \sin(t)e^{-\frac{1}{i}} = \sin(t)$$

donc  $\lambda(t) = -\cos(t)$  et  $y_1(t) = -\cos(t)e^{-\frac{1}{i}}$

Par conséquent

$$y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_1(t) = \lambda e^{-\frac{1}{i}} - \cos(t)e^{-\frac{1}{i}} = e^{-\frac{1}{i}}(\lambda - \cos(t))$$

Calculons l'unique solution  $y(2\pi) = e^{-\frac{1}{2\pi}}(\lambda - \cos(2\pi)) = \lambda e^{-\frac{1}{2\pi}} = 0$ .

Donc  $\lambda = 0$  et l'unique solution est

$$y(t) = -\cos(t)e^{-\frac{1}{i}}$$

QED