Rappel de cours

-

Exo 1

Preuve par récurrence.
Proposition est vraie pour $u_0 = 0 = 2^0 - 1$.
Supposons que $u_n = 2^n - 1$ pour $n > 0$, vérifions si $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

$$u_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1$$

$$u_{n+1} = 2 * 2^n - 1$$

$$u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

La proposition est Vraie.

Exo 2

Preuve par récurrence.
Proposition est vraie pour $u_0 = 3 = 3^{2*0}$.
Supposons que $u_n = 3^{2n}$ pour $n > 0$, vérifions si $u_{n+1} = 3^{2(n+1)}$.

$$u_{n+1} = u_n^2$$

$$u_{n+1} = (3^{2n})^2$$

$$u_{n+1} = 3^{4n}$$

La proposition est Fausse.

Exo 3

Prenons $f(x) = x^2 + 1$, et déterminons le signe de $f(x) - x$ selon x.

$$f(x) - x = x^2 + 1 - x = x(x-1) + 1$$

$$f(x) - x, \begin{cases} > 0 & x \in]-\infty, 0[\\ > 0 & x = 0 \\ > 0 & x \in]0, 1[\\ > 0 & x = 1 \\ > 0 & x \in]1, +\infty \end{cases}$$

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un assemblage de fonctions continues sur $\mathbb{R}$,
- La fonction f est stable sur $\mathbb{R}$ car $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$.
- La fonction f est strictement croissante
- La fonction f admet un point fixe , donc la suite $u_n = u_n^2 + 1$ est strictement croissante donc tend vers $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

En passant à la limite dans l'inégalité $u_n > u_0$, on obtient $l > u_0$, et la suite u_n n'est pas constante, on en déduit que $l = +\infty$ donc, la suite $\lim_{n \to +\infty} u_n = \{+\infty\}$.

La proposition est Vraie.

Exo 4

Prenons $f(x) = 1 + arctan(\frac{x}{2})$, et déterminon le signe de $f(x) - x$ selon x.

$$g(x) = f(x) - x = 1 + arctan(\frac{x}{2}) - x$$

La fonction $g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante, positive $\forall x \in]-\infty, x_{pf}[$, négative $\forall]x_{pf}, +\infty[$, donc elle s'annule pour un point $x_{pf} in]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{cases} f(x) > x & x \in]-\infty, x_{pf}[\\ = 0 & x_{pf} in]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}[\\ f(x) < x & x \in]x_{pf}, +\infty[\end{cases}$$

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un assemblage de fonctions continues sur $\mathbb{R}$,
- La fonction f est stable sur $\mathbb{R}$ car $f(\mathbb{R}) \subset]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}[\subset \mathbb{R}$.
- La fonction f est strictement croissante
- La fonction f admet un point fixe x_{pf}

Cas $u_0 = x_{pf}$, la suite est constante.
cas $u_0 \neq x_{pf}$. Comme la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on $f'(x_{pf}) > 1$, donc le point x_{pf} est répulsif et la suite u_n n'est pas convergente.

La proposition est Fausse.

Exo 5

La proposition est Fausse.

Exo 6

Prenons la valeur $x = \frac{3\pi}{4}$. On a :

$$sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$$

Donc $arcsin(sin(x)) \neq x$.

La proposition est Fausse.

Exo 7

La proposition est Fausse.

Exo 8

La proposition est Fausse.

Exo 9

La proposition est Fausse.

Exo 10

Rappel de cours:

- Intégrale de Riemann. $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n}) \rightarrow_{n\rightarrow\infty} \int_a^b f(x)dx$

On a $\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} sin(\frac{\pi k}{2n})$.
En prenant $b=\pi$, $a=0$, $x=k/n$, on a $f(x)=sin(\frac{\pi}{2}x)$

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} sin(\frac{\pi k}{2n}) = \int_0^{\pi} sin(\frac{\pi}{2}x)dx$$

Intégrale par substitution: $u=\frac{\pi}{2}x$, donc $\frac{du}{dx}=\frac{\pi}{2}$ et $dx=\frac{2}{\pi}du$

$$\int sin(\frac{\pi}{2}x)dx = \frac{2}{\pi}\int sin(u)du = -\frac{2}{\pi}cos(u) = -\frac{2}{\pi}cos(\frac{\pi}{2}x)$$

$$\int_0^{\pi} sin(\frac{\pi}{2}x) = [-\frac{2}{\pi}cos(\frac{\pi}{2}x)]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi} + \frac{cos(\frac{\pi^2}{2})}{n} \neq 1$$

La proposition est Fausse.

Exo 11

On a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2(1+k^2/n^2)} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1+(k/n)^2} = \frac{1}{n}.\frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1+(k/n)^2}$$

En prenant: $a=0$, $b=1$ et $x=k/n$ on a $f(x)=\frac{nx}{1+x^2}$ donc

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} = lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}.\int_0^1\frac{nx}{1+x^2}$$

$$\int_0^1\frac{x}{1+x^2} = [\frac{ln(x^2+1)}{2}]_0^1 = \frac{ln(2)}{2} - \frac{ln(1)}{2}$$

Donc

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} \neq \frac{\pi}{4}$$

La proposition est Fausse.

Exo 12

On a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2(1+k^2/n^2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2} = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}$$

En prenant: $a=0$, $b=1$ et $x=k/n$ on a $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ donc

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2} = [arctan(x)]_0^1 = arctan(1) - arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

La proposition est Vraie.

Exo 13

Rappel de cours:

- Intégrale par partie. $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)$

  On prend

$$\begin{array}{ll} f(x) = (x-1)^2 & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 2x-2 & g(x) = e^x \end{array}$$

  Donc $\int_0^1 (x-1)^2 e^x = [(x-1)^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 (2x-2)e^x = -1 - \int_0^1 (2x-2)e^x$
  On prend

$$\begin{array}{ll} f(x) = 2x-2 & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 2 & g(x) = e^x \end{array}$$

  Donc $\int_0^1 (2x-2)e^x = [(2x-2)e(x)]_0^1 - \int_0^1 2e^x = [(2x-2)e(x)]_0^1 - 2[e^x]_0^1 = 2 - 2e + 2 = 4 - 2e.$

  Enfin $\int_0^1 (x-1)^2 e^x = -1 - (4-2e) = 2e - 5$
  La proposition est Vraie.

Exo 14

La proposition est Fausse.

Exo 15

La proposition est Fausse.

Exo 16

La proposition est Fausse.