Definition 1. On définit un *espace de probibilité* par un triplet $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ avec:

- Ω est un ensemble de résultats
- $\mathscr{F}$ une collection de sous-ensembles de Ω qui satisfait:
  - $\Omega \in \mathscr{F}$
  - $\forall A \in \mathscr{F} \implies {}^cA \in \mathscr{F}$
  - $A_1, A_2 \dots A_n \in \mathscr{F} \implies \cup_{m=1\dots n} A_m \in \mathscr{F}$
- P, une application de $\mathscr{F} \to [0, 1]$

Par exemple: $\Omega = \{1, 2, 3\}, \mathscr{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Un autre exemple $\mathbb{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ est appelé l'ensemble des sous-ensembles.

Definition 2. L'application P est définie par les 3 règles suivantes:

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall A \in \mathscr{F}, P({}^cA) = 1 - P(A)$
- Toute suite dénombrable d'événements disjoints $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{F}, P(\cup_{m=1..n} A_m) = \sum_{m=1}^{n} P(A_m)$

On peut déduire tous les théorèmes suivants:

- $P(\emptyset) = 0$. Ω et $\emptyset$ sont disjoints et $\Omega \cup \emptyset = \Omega$ donc

  $$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

  donc $P(\emptyset) = 0$
- si $A_1 \subset A_2 \implies P(A_1) \leq P(A_2)$. On a $A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$ car $A_1 \subset A_2$. Et A_1 et $(A_2 - A_1)$ sont disjoints donc

  $$P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1)$$
  $$P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$$

  Comme $P(X)$ est positif, on a $P(A_2) - P(A_1) \geq 0$, donc $P(A_2) \geq P(A_1)$
- $\forall X \in \mathscr{F}, P(X) \leq 1$. On a $\forall X \in \mathscr{F}, X \subset \Omega$ part définition, donc $P(X) \leq P(\Omega) = 1$

QED