Rappel de cours

Definition 1. Bla bla

Exercice 1

Exercice 1.1

On a $m > 0$ et $n > 0$ donc $\frac{m.n}{(n+m)^2} > 0$, donc 0 est un minorant.

$$\frac{m.n}{(n+m)^2} = \frac{1}{\frac{m}{n} + 2 + \frac{n}{m}}$$

Il faut montrer que

$$\begin{aligned}
&\tfrac{m}{n} + \tfrac{n}{m} \geq 2 \\
&\tfrac{m^2+n^2}{m.n} \geq 2 \\
&m^2 + n^2 - 2m.n \geq 0 \\
&(m-n)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Donc 1/4 est un majorant.

On a 1/4 est la borne supérieure de A si il n'existe aucun majorant inférieur à 1/4. On a $1/4 \in A$ pour $m = n = 1$. Donc il n'existe pas de plus petit majorant.

On a 0 est la borne inférieure de A si il n'existe aucun minorant supérieur à 0. Quand $n = 1$, on a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{(m+1)^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0$$

Donc il n'exise pas de minorant supérieur à 0.

Exercice 1.2

Montrons que 2 est un majorant et 0 un minorant.

On a $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > 0$ car $n, m \in \mathbb{N}^*$. DOnc 0 est un minorant.

On a $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{m+n}{n.m}$, montrons que

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{n} \leq 2 \\
&\tfrac{m+n}{n.m} \leq 2 \\
&m + n \leq 2m.n \\
&m + n - 2m.n \leq 0 \\
&m(1-n) + n(1-m) \leq 0
\end{aligned}$$

Vrai car $(1-n) \leq 0$, $(1-m) \leq 0$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$. Donc 2 est un majorant.

On a 2 est la borne supérieure de A si il n'existe aucun majorant inférieur à 2. On a $2 \in A$ pour $m = n = 1$. Donc il n'existe pas de plus petit majorant.

On a 0 est la borne inférieure de A si il n'existe aucun minorant supérieur à 0. On a

$$\lim_{m\to\infty, n\to\infty,} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \lim_{m\to\infty, n\to\infty,} \frac{1}{m} + \lim_{m\to\infty, n\to\infty,} \frac{1}{n} = 0$$

Donc il n'exise pas de minorant supérieur à 0.

Exercice 1.3

La fonction $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ est strictement croissante pour $x \leq -3$ ($f'(x) = \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$). Donc $f(-3) = 2$ est la borne supérieure de A. On a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+1/x}{1+2/x} = 1$$

Donc 1 est la borne inférieure. Oui la borne supérieure est atteinte pour $x = -3$ mais pas la borne inférieure car c'est une limite.

Maintenant si on prend $x \leq 3$ c'est autre chose car $\sup(A) = \infty$ et $\inf(A) = -\infty$ quand $x \to -2$.

Exercice 1.4

Si A est borné alors il existe $\sup(A)$ et $\inf(A)$. Divisons en 3 cas; $x < y$, $x = y$, et $x > y$.

Pour le cas $x = y$ on a $0 \in A$. Pas très intéressant car $|x - y| \geq 0$. Donc, 0 n'est pas un majorant.

Pour le cas $x > y$ on a $|x-y| = x-y$. La plus grande valeur possible est quand $x = \sup(A)$ et $y = \inf(A)$ (ie. plus grand écart possible) donc $|\sup(A) - inf(A)|$.
Pour le cas $x < y$ on a $|x - y| = y - x$. La plus grande valeur possible est quand $x = \inf(A)$ et $y = \sup(A)$ (ie. plus grand écart possible) donc $|\sup(A) - inf(A)|$.