

Rappel de cours:

•

Exercice 5.1

5.1.1.a

La relation ϕ est linéaire de E si

- $\forall A, B \in E, \phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$
- $\forall A \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \phi(\lambda A) = \lambda \phi(A)$

Posons $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ et $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

En utilisant deux fois la distributivité par rapport à l'addition, on a:

$$\phi(A + B) = M_1.(A + B).M_2 = M_1.(A.M_2 + B.M_2) = M_1.A.M_2 + M_1.B.M_2 = \phi(A) + \phi(B)$$

On a $(\lambda A).B = \lambda(A.B) = A.(\lambda B)$ (voir cours).

$$\phi(\lambda A) = M_1.(\lambda A).M_2 = M_1.(\lambda(A.M_2)) = \lambda(M_1.A.M_2) = \lambda \phi(A)$$

Donc la relation $\phi(M)$ est linéaire.

5.1.1.b

La matrice A est un point fixe de la relation ϕ si $\phi(A) = A$, soit

$$\phi(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} . A . \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = A$$

$$\phi(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = A$$

5.1.2.a

$$\begin{aligned} \phi(P_1 + P_2) &= ((P_1 + P_2)(1), (P_1 + P_2)'(2)) = ((P_1(1) + P_2(1)), (P_1'(2) + P_2'(2))) \\ &= (P_1(1) + P_2(1), P_1'(2) + P_2'(2)) \\ &= (P_1(1), P_1'(2)) + (P_2(1), P_2'(2)) = \phi(P_1) + \phi(P_2) \end{aligned}$$

Et

$$\phi(\lambda P) = (\lambda P(1), (\lambda P(2))') = (\lambda P(1), \lambda P'(2)) = \lambda(P(1), P'(2)) = \lambda \phi(P)$$

La relation ϕ est linéaire.

5.1.2.b

$$\phi(t - 1) = ((t - 1)(1), (t - 1)'(2)) = ((t - 1)(1), (1)(2)) = (0, 1)$$

$$\phi((t - 2)^2) = ((t - 2)^2(1), ((t - 2)^2)'(2)) = ((t - 2)^2(1), (t^2 - 4t + 4)'(2)) = ((t - 2)^2(1), (2t - 4)(2)) = (1, 0)$$

On cherche P , tel que $\phi(P) = (1, -1)$. Comme la relation ϕ est linéaire on a

$$(1, -1) = 1.(1, 0) - 1.(0, 1) = 1.\phi((t - 2)^2) - 1.\phi(t - 1) = \phi(1.(t - 2)^2) + \phi(-(t - 1)) = \phi((t - 2)^2 - (t - 1)) = \phi(t^2 - 5t + 5)$$

Donc $P = t^2 - 5t + 5$.

5.1.3.a

$$\phi(f_1 + f_2) = \int_0^1 (f_1 + f_2)e^t dt = \int_0^1 f_1 e^t + f_2 e^t dt = \int_0^1 f_1 e^t + \int_0^1 f_2 e^t dt = \phi(f_1) + \phi(f_2)$$

$$\phi(\lambda f) = \int_0^1 (\lambda f)e^t dt = \int_0^1 \lambda f e^t dt = \lambda \int_0^1 f e^t dt = \lambda \phi(f)$$

5.1.3.b

Une fonction f de $E \rightarrow F$ appartient au noyau de ϕ si $\phi(f) = 0_F$. Une fonction est dite affine si elle est de la forme $f(t) = at + b$. Donc on cherche une fonction $f = at + b$ tel que $\phi(f) = 0$.

$$\phi(at + b) = \int_0^1 (at + b)e^t dt = \int_0^1 ate^t + be^t dt = a \int_0^1 te^t dt + b \int_0^1 e^t dt = a + b(e - 1) = 0$$

$$\text{car } \int e^t dt = e^t \text{ et } \int te^t dt = (t - 1)e^t.$$

Il faut trouver a et b tel que $a + b(e - 1) = 0$. Prenons par exemple, $b = 0$ donc $a = 0$, et $b = 1$ donc $a = 1 - e$.

Les 2 fonctions affines sont $f_0(t) = 0t + 0 = 0$ et $f_1(t) = (1 - e)t + 1$.

Exercice 5.2**5.2.1**

$$f(x, y, z, t) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - y + 3z - t \\ 2x + y + 3z + 4t \\ -x + 2y - 4z + 3t \end{vmatrix}$$

5.2.2.a

$$\text{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{R}^4, f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t & = 0 & l_1 \\ 2x + y + 3z + 4t & = 0 & l_2 \\ -x + 2y - 4z + 3t & = 0 & l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t & = 0 & l_1 \\ -3y + 3z - 6t & = 0 & 2l_1 - l_2 \\ y - z + 2t & = 0 & l_1 + l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t & = 0 & l_1 \\ y - z + 2t & = 0 & l_1 + l_3 \\ 0 & = 0 & (2l_1 - l_2) + 3(l_1 + l_3) \end{cases}$$

On a 2 variables primaires (x,y) et deux variables secondaires (z,t). Donc $\text{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, X = (2z - t, z - 2t, z, t)\}$.

5.2.2.b

$$\begin{cases} x - y + 3z - t &= x_b & l_1 \\ 2x + y + 3z + 4t &= y_b & l_2 \\ -x + 2y - 4z + 3t &= z_b & l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t &= x_b \\ y - z + 2t &= x_b + z_b \\ -3y + 3z - 6t &= 2x_b - y_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t &= x_b \\ y - z + 2t &= x_b + z_b \\ -3(x_b + z_b) &= 2x_b - y_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t &= x_b \\ y - z + 2t &= x_b + z_b \\ -5x_b + y_b - 3z_b &= 0 \end{cases}$$

La fonction f est injective ssi $\text{Ker}(f) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a $\text{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, X = (4z - t, z - 2t, z, t)\} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. La fonction n'est pas injective.

La fonction est surjective ssi $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. On a $\text{Im}(f) = B = (x_b, y_b, z_b) \neq \mathbb{R}^3$ car il y a une relation entre x_b, y_b et z_b . Donc la fonction f n'est pas surjective.

5.2.3.a

$$\begin{aligned} u_1 &= 3e_1 - e_3 = 3(1, 0, 0, 0) - (0, 0, 1, 0) = (3, 0, -1, 0) \\ u_2 &= e_2 - e_4 = (0, 1, 0, 0) - (0, 0, 0, 1) = (0, 1, 0, -1) \\ f(u_1) &= (3 - 0 - 3 - 0, 6 - 0 - 3 - 0, -3 + 0 + 4 + 0) = (0, 3, 1) \\ f(u_2) &= (0 - 1 + 0 - 1, 0 + 1 + 0 - 4, -0 + 2 - 0 - 3) = (0, -3, -1) \end{aligned}$$

On a $\text{Vect}(f(u_1), f(u_2)) = \{(0, 3, 1), (0, -3, -1)\}$. On remarque que $f(u_1) = -f(u_2)$, donc les 2 vecteurs sont colinéaires. Par conséquent $\text{Vect}(f(u_1), f(u_2))$ ne représente que les points de la droite de du plan (y, z) et de vecteur directeur $(0, 3, 1)$.

5.2.3.b

On a $\text{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, X = (-2z - t, z - 2t, z, t)\}$, les points de l'espace vectorielle sont $(x_f, y_f, z_f, t_f) = (-2z - t, z - 2t, z, t)$.

$E = \text{Vect}((3, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$, les points de l'espace vectorielle D sont $(x_e, y_e, z_e, t_e) = a.(3, 0, -1, 0) + b.(0, 1, 0, -1) = (3a, b, -a, -b)$.

$E \cap \text{Ker}(f)$ sont les points communs entre E et $\text{Ker}(f)$. Donc

$$\begin{cases} 3a &= -2z - t \\ b &= z - 2t \\ -a &= z \\ -b &= t \end{cases}$$

La solution de ce système est $b = a$. Donc $D = (3a, a, -a, -a)$ ou $D = (3, 1, -1, -1)$.

$D' = (3, 0, -1, 0)$ et $D = (3, 1, -1, -1)$ sont supplémentaires dans E si $((3, 0, -1, 0), (3, 1, -1, -1))$ est une base de E .

Famille libre?

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, la famille est libre.
Et génératrice?

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 &= x \\ \lambda_2 &= y \\ -\lambda_1 - \lambda_2 &= z \\ -\lambda_2 &= t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 &= t + y \\ 0 &= x + 3z \\ \lambda_2 &= y \\ -\lambda_1 &= z + y \end{cases}$$

Oups la famille n'est pas génératrice. Problème.

QED