Rappel de cours

Definition 1. Bla bla

Exercice 1

Exercice 1.a

Soit D une droite vectoriel, $D = \{M | \overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ et D' une demi-droite fermée (ou ouverte) d'origine A', $D' = \{M' | \overrightarrow{A'M'} = \lambda' \overrightarrow{u}, \lambda' \in \mathbb{R}^+\}$.

Soit A le point de la droite D tel que $F(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$, et les 2 points M_1 et M_2 tel que le point A soit au milieu du segment M_1M_2. Donc $\overrightarrow{AM_1} = -\overrightarrow{AM_2}$. Si l'application linéaire F existe alors on a $F(\overrightarrow{AM_1}) = F(-\overrightarrow{AM_2}) = -F(\overrightarrow{AM_2})$.

Soit le point M_2' tel que $F(\overrightarrow{AM_2}) = \overrightarrow{A'M_2'}$. Il existe λ_2' tel que $\overrightarrow{A'M_2} = \lambda_2' \overrightarrow{u}, \lambda_2' \in \mathbb{R}^+$. Il n'existe pas de λ_1 positif tel que $\overrightarrow{A'M_1} = \lambda_1' \overrightarrow{u}$. Ceci contredit l'existence de l'application linéaire.

Exercice 1.b

Si l'application linéaire F existe alors $F(c\overrightarrow{O}) = cF(\overrightarrow{O})$, mais par définition de O on a $c\overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}$ donc

$$F(c\overrightarrow{O}) = F(\overrightarrow{O}) = cF(\overrightarrow{O})$$

Donc $F(\overrightarrow{O}) = \overrightarrow{O}$ car c est différent de 0. Ceci contredit l'hypothèse que l'image de l'application F est privée de l'origine O.

Exercice 1.c

Soit l'application $F : \mathbb{R}^2 \setminus O \to \mathbb{R}$ tel que $F(x, y) = x - y$. Montrons que l'application F est linéaire.

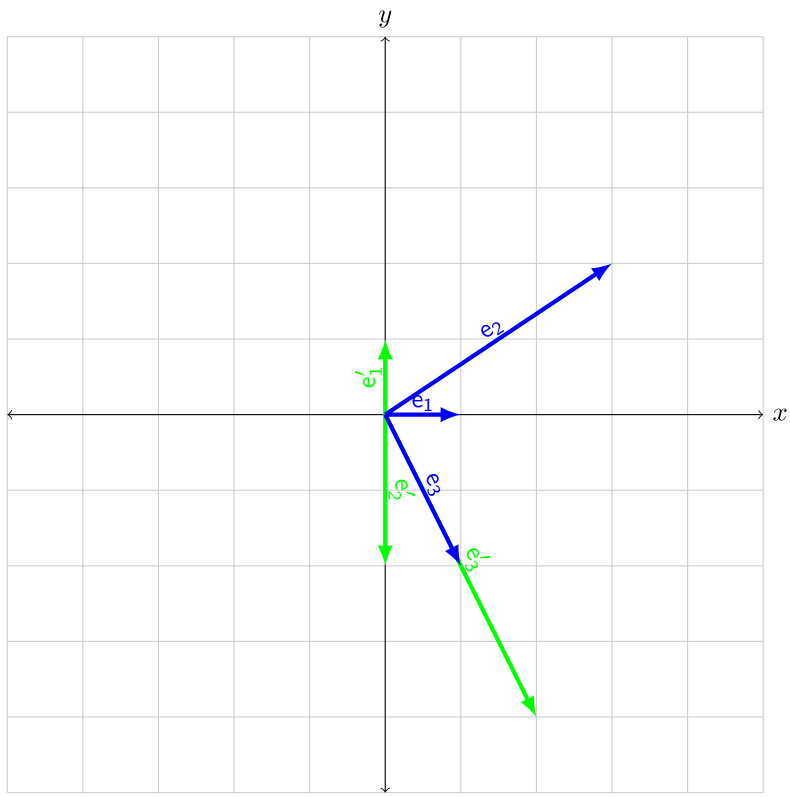
$$F(c(x, y)) = F((cx, cy)) = cx - cy = c(x - y) = cF((x, y))$$

et

$$F(A_1)+F(A_2) = F(x_1, y_1)+F(x_2, y_2) = x_1-y_1+x_2-y_2 = (x_1+x_2)-(y_1+y_2) = F((x_1+x_2, y_1+y_2)) = F(A_1+A_2)$$

Exercice 2

Exercice 2.a



$F(e_2) = F(-e_3 + 4e_1) = -F(e_3) + 4F(e_1) = -e'_3 + 4e'_1 = -(2, -4) + 4(0, 1) = (-2, 0) \neq e'_2 = (3, 2)$, donc pas linéaire.

Exercice 2.b

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} .(1,0,0) = (m_{11}, m_{21}, m_{31}) & = (0,0,0) \\ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} .(0,1,0) = (m_{21}, m_{22}, m_{23}) & = (0,0,1) \\ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} .(0,0,1) = (m_{13}, m_{23}, m_{33}) & = (1,0,0) \end{cases}$$

Solution unique.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .(x, y, z) = (z, 0, y)$$

Exercice 2.c

$$\begin{cases}
\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \end{pmatrix}.(1,0,0) = (m_{11}, m_{21}, m_{31}, m_{41}) & = (1,0,0,0)(\text{ie } X^3) \\
\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \end{pmatrix}.(0,1,0) = (m_{12}, m_{22}, m_{32}, m_{42}) & = (0,1,0,0)(\text{ie } X^2) \\
\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \end{pmatrix}.(0,0,1) = (m_{13}, m_{23}, m_{33}, m_{43}) & = (0,0,1,0)(\text{ie } X) \\
\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \end{pmatrix}.(1,1,1) = & \\
(m_{11}+m_{12}+m_{13}, m_{21}+m_{22}+m_{23}, m_{31}+m_{32}+m_{33}, m_{41}+m_{42}+m_{43}) & \\
= (1,1,1,0) & \neq (0,0,0,1)(\text{ie } 1)
\end{cases}$$

Pas de solution. QED

Exercice 2.d

$$\begin{cases}
\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \\ m_{13} & m_{23} \\ m_{14} & m_{24} \\ m_{15} & m_{25} \end{pmatrix}.(1,0,0,0,1) = (m_{11}+m_{15}, m_{21}+m_{25}) & = (2,-1) \\
\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \\ m_{13} & m_{23} \\ m_{14} & m_{24} \\ m_{15} & m_{25} \end{pmatrix}.(0,0,1,0,0) = (m_{13}, m_{23}) & = (3,0)
\end{cases}$$

donc

$$\begin{cases}
m_{11}+m_{15} & = 2 \\
m_{21}+m_{25} & = -1 \\
m_{13} & = 3 \\
m_{23} & = 0
\end{cases}$$

Il y a un infinité d'applications:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \\ 3 & 0 \\ m_{14} & m_{24} \\ 2-m_{11} & -1-m_{21} \end{pmatrix}.(X^4, X^3, X^2, X, 1)$$
$$= (m_{11}X^4 + m_{12}X^3 + 3X^2 + m_{14}X + 2 - m_{11}, m_{21}X^4 + m_{22}X^3 + m_{24}X - 1 - m_{21})$$

Exercice 2.e

$$\left\{\begin{array}{ll}
\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} \end{pmatrix}.(0,0,2,1). = (2m_{13}+m_{14}, 2m_{23}+m_{24}, 2m_{33}+m_{34}) & = (0,1,1) \\
\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} \end{pmatrix}.(1,1,1,0) = (m_{11}+m_{12}+m_{13}, m_{21}+m_{22}+m_{23}, m_{31}+m_{32}+m_{33}) & = (0,2,2) \\
\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} \end{pmatrix}.(2,2,0,1) = (2m_{11}+2m_{12}+m_{14}, 2m_{21}+2m_{22}+m_{24}, 2m_{31}+2m_{32}+m_{34}) & = (0,3,3)
\end{array}\right.$$

donc

$$\left\{\begin{array}{lll}
2m_{13}+m_{14} & =0 & \to m_{14} = -2m_{13} \\
2m_{23}+m_{24} & =1 & \to m_{24} = 1-2m_{13} \\
2m_{33}+m_{34} & =1 & \to m_{34} = 1-2m_{33} \\
m_{11}+m_{12}+m_{13} & =0 & \\
m_{21}+m_{22}+m_{23} & =2 & \\
m_{31}+m_{32}+m_{33} & =2 & \\
2m_{11}+2m_{12}+m_{14} & =0 & \to m_{11}+m_{12}-m_{13} = 0 \\
2m_{21}+2m_{22}+m_{24} & =3 & \to m_{21}+m_{22}-m_{23} = 1 \\
2m_{31}+2m_{32}+m_{34} & =3 & \to m_{31}+m_{32}-m_{33} = 1
\end{array}\right.$$

Il y a un infinité d'applications:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ -m_{11} & 3/2-m_{21} & 3/2-m_{31} \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.(X^3, X^2, X^1, 1)$$
$$= (X^3m_{11} - X^2m_{11}, X^3m_{21} + X^2(3/2-m_{21}) + 1/2X, X^3m_{31} + X^2(3/2-m_{31}) + 1/2X)$$
$$= (X^3m_{11} - X^2m_{11})Y^2, (X^3m_{21} + X^2(3/2-m_{21}) + 1/2X)Y + X^3m_{31} + X^2(3/2-m_{31}) + 1/2X$$

Exercice 2.f

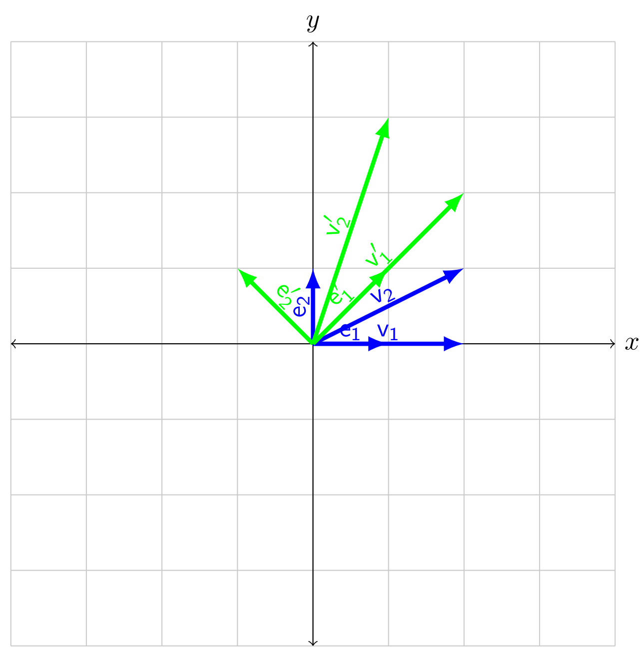
$$\left\{\begin{array}{ll}
\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix}.(1,1,1,0). = (m_1+m_2+m_3) & = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix}.(0,i,i,i). = (m_2i+m_3i+m_4i) & = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{14} \end{pmatrix}.(-1,1,1,2). = (-m_1+m_2+m_3+2m_4) & = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}
\end{array}\right.$$

avec chaque matrice dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$.

$$\begin{cases} m_{1\_11} + m_{2\_11} + m_{3\_11} = 1 + 0i \\ m_{2\_11}i + m_{3\_11}i + m_{4\_11}i = 0 + 0i \\ -m_{1\_11} + m_{2\_11} + m_{3\_11} + 2m_{4\_11} = -1 + 0i \\ m_{1\_12} + m_{2\_12} + m_{3\_12} = -2 + 0i \\ m_{2\_12}i + m_{3\_12}i + m_{4\_12}i = 2 + 0i \\ -m_{1\_12} + m_{2\_12} + m_{3\_12} + 2m_{4\_12} = 0 + 0i \\ m_{1\_21} + m_{2\_21} + m_{3\_21} = 0 + 0i \\ m_{2\_21}i + m_{3\_21}i + m_{4\_21}i = 2 + 0i \\ -m_{1\_21} + m_{2\_21} + m_{3\_21} + 2m_{4\_21} = 0 + i \\ m_{1\_22} + m_{2\_22} + m_{3\_22} = 3 + 0i \\ m_{2\_22}i + m_{3\_22}i + m_{4\_22}i = 4 + 0i \\ -m_{1\_22} + m_{2\_22} + m_{3\_22} + 2m_{4\_22} = 1 + 0i \end{cases}$$

Exercice 3

Exercice 3.a

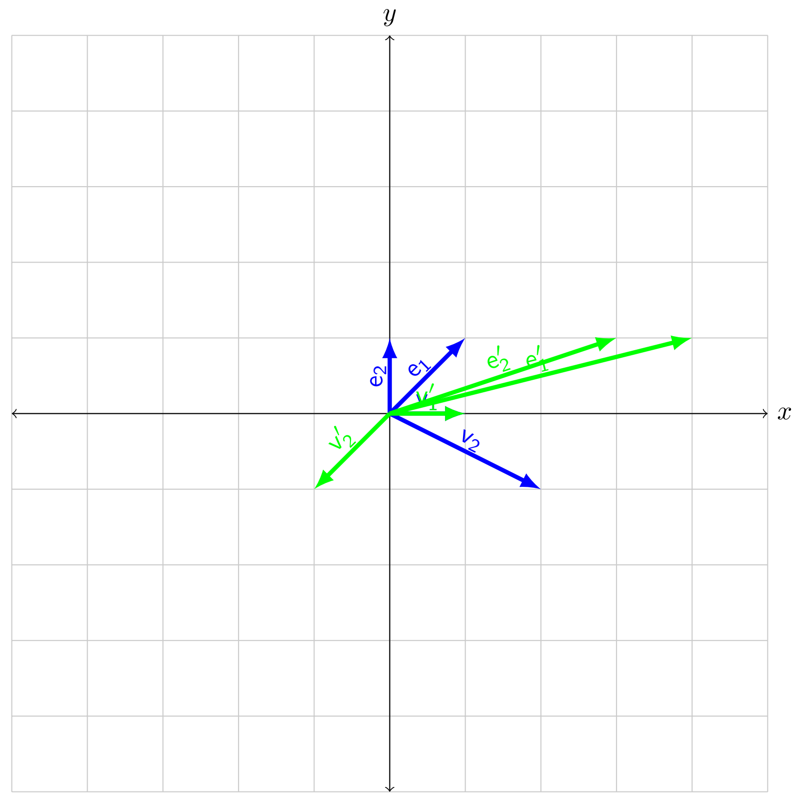


On a $F(v_1) = F(2e_1) = 2F(e_1) = (2,2)$ et $F(v_2) = F(2e_1 + e_2) = 2F(e_1) + F(e_2) = (1,3)$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

F est ????

Exercice 3.b

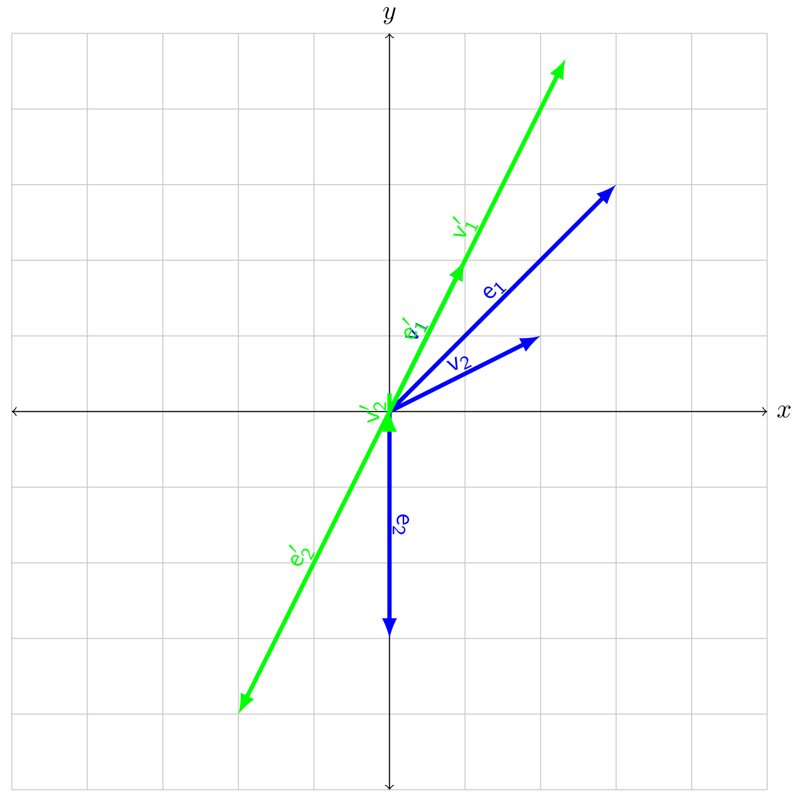


On a $F(v_1) = F(e_1 - e_2) = F(e_1) - F(e_2) = (1, 0)$ et $F(v_2) = F(2e_1 - 3e_2) = 2F(e_1) - 3F(e_2) = (-1, -1)$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

F est ??.

Exercice 3.c



On a $F(v_1) = F(1/3e_1 - e_2) = 1/3F(e_1) - F(e_2) = (7/3, 14/3)$ et $F(v_2) = F(2/3e_1 + 1/3e_2) = 2/3F(e_1) + 1/3F(e_2) = (0, 0)$

$$F = \begin{pmatrix} 7 & -2/3 \\ -2 & 4/3 \end{pmatrix}$$

F est projection sur la droite $y = 2x$ suivant le vecteur $(-2, -1)$.