

## Rappel de cours

**Definition 1.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(U_n)$  une suite de fonctions définies sur  $I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ . On dit que  $(u_n)$  converge **simplemment** vers  $f$  sur  $I$  si pour tout  $x \in I$ , la suite  $(U_n(x))$  converge vers  $f(x)$ .

**Definition 2.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(U_n)$  une suite de fonctions définies sur  $I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ . On dit que  $(u_n)$  converge **uniformément** vers  $f$  sur  $I$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n > n_0, |(U_n(x)) - f(x)| < \epsilon$$

**Definition 3.**

## Exercice 2

### Exercice 2.1

Il faut trouver une fonction  $f(x)$  tel que  $\forall x \in I$ , la suite  $(U_n(x))$  converge vers  $f(x)$ . On a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(U_n(0)) = 0$ , il faut vérifier si la suite de  $(U_n)$  converge et trouver la fonction de convergence. Comme d'habitude, trouver une borne supérieure qui converge.

1. Trouver une suite de fonction  $(V_n)$  et exprimer  $(V_n)$  en fonction de  $(U_n)$ . Prendre la fonction  $(V_n)$  tel que  $V_n = g(x, n)U_n$  et  $\frac{1}{g(x, n)}$  converge.
2. Vérifier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n(x) = 0$  et que  $V_n(x)$  est positive donc il existe un  $c > 0$ , tel que  $\forall n > n_0, 0 \leq (V_n) \leq c$ .
3. Remplacer  $(V_n)$  dans l'expression, simplifier et regarder si la borne supérieure converge.

Prenons  $V_n = U_n \cdot \frac{n^2}{x^2}$ , donc  $V_n = \frac{n^3}{e^{x\sqrt{n}}}$   
On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n(x) = 0$  et  $\forall x \in [0, +\infty[, V_n(x) \geq 0$  et prenons  $c = 1$ . Donc

$$0 \leq V_n(x) \leq 1$$

$$0 < U_n(x) \frac{n^2}{x^2} < 1$$

$$0 < U_n(x) < \frac{x^2}{n^2}$$

Comme la borne supérieure converge alors  $(U_n)$  converge aussi.

### Exercice 2.2

La dérivée de  $(nx^2 \cdot e^{-x\sqrt{n}})' = -x(n^{3/2}x - 2n)e^{-x\sqrt{n}}$ . La dérivée s'annule en 2 points  $x = 0$  et  $x = \frac{2}{\sqrt{n}}$ . on a  $f(0) = 0$  et

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = n \cdot \frac{4}{n} \cdot e^{-\frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}} = 4 \cdot e^{-2} = 0.5413$$

Donc  $\sup_{x \in [0, +\infty[} u_n(x) = 4 \cdot e^{-2}$ , comme le sup est constant, la série de fonction  $u_n$  ne converge pas.  
QED