Exercice 5

Question 5.A.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx = \int_{-\infty}^{\theta} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx + \int_{\theta}^{+\infty} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx$$

$$0 + \int_{\theta}^{+\infty} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} dx = \left[\frac{\theta^m}{x^m}\right]_{\theta}^{+\infty} = \frac{\theta^m}{\theta^m} - \frac{\theta^m}{\infty^m} = 1 - 0 = 1$$

Question 5.A.2

$$\forall t \geq \theta, P(X \geq t) = \forall t \geq \theta, 1 - P(X < t) = 1 - \int_{\theta}^{t} \frac{m\theta^m}{x^{m+1}} dx = 1 - \left[\frac{\theta^m}{x^m}\right]_{\theta}^{t} = \left(\frac{\theta}{t}\right)^m$$

Question 5.A.3

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx = 0 + \int_{\theta}^{+\infty} x\frac{m\theta^m}{x^{m+1}} dx = m\theta^m \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{x^m} dx =$$

$$m\theta^m \left[-\frac{1}{(m-1)x^{m-1}}\right]_{\theta}^{+\infty} = -\frac{m\theta^m}{m-1}\left(0 - \frac{1}{\theta^{m-1}}\right) = \frac{m\theta}{m-1}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{m\theta^m}{x^{m+1}} 1_{\lceil\theta,\infty\lceil}(x)dx = 0 + \int_{\theta}^{+\infty} x^2\frac{m\theta^m}{x^{m+1}} dx = m\theta^m \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{x^{m-1}} dx =$$

$$m\theta^m \left[-\frac{1}{(m-2)x^{m-2}}\right]_{\theta}^{+\infty} = -\frac{m\theta^m}{m-2}\left(0 - \frac{1}{\theta^{m-2}}\right) = \frac{m\theta^2}{m-2}$$

Question 5.A.3

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{m\theta^2}{m-2} - \left(\frac{m\theta}{m-1}\right)^2 =$$

$$\frac{m(m-1)^2 - m^2(m-2)}{(m-2)(m-1)^2}\theta^2 = \frac{m}{(m-2)(m-1)^2}\theta^2$$

Question 5.B.1

Méthode des moments de niveau 1, $M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, et $E(X) = M_1$ donc

$$M_1 = \frac{m\theta}{m-1}$$

Donc l'estimateur est

$$\hat{\theta_1} = \frac{m-1}{m} M_1 = \frac{m-1}{m}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Comme $m = 3$, on a

$$\hat{\theta_1} = \frac{2}{3}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

TBC

Question 5.B.2.a

Méthode du maximum de vraissemblance, on a

$$L_\theta(X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{3\theta^3}{x_i^4} 1_{[\theta,\infty[}(x_i) = 3^n \theta^{3n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^4} 1_{[\theta,\infty[}(x_i)$$

On traite 2 cas :

- Lorsque $\theta > \min\{x_i\}$, la fonction $1_{[\theta,\infty[}(x) = 0$ pour $x = \min\{x_i\}$. Donc, on a $L_\theta(X) = 0$.
- Lorsque $\theta \leq \min\{x_i\}$, la fonction $1_{[\theta,\infty[}(x) = 1, \forall x \in \{x_i\}$. Donc, on a $L_\theta(X) > 0$.

La fonction de vraissemblance de $L_\theta(X) = C\theta^3 n$ où C est un terme constant dependant de X. Par conséquent, Le maximum de vraissemblance correspond à la plus grande valeur possible de θ. Donc $\hat{\theta_2} = \min\{x_i\}$.

Question 5.B.2.b

La fonction de répartition de $\hat{\theta_2}$ est $F(t) = P(\min_{1\leq i\leq n} X_i < t)$. Donc

$$P(\min_{1\leq i\leq n} X_i < t) = 1 - P(\min_{1\leq i\leq n} X_i \geq t) = 1 - P(x_1 \geq t, \ldots, x_n \geq t)$$

Les variables x_i étant indépendentes et de même loi, on a

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(x_i \geq t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\theta}{t}\right)^3 1_{[\theta,\infty[}(t) = 1 - \left(\frac{\theta}{t}\right)^{3n} 1_{[\theta,\infty[}(t) = P(3n, \theta)$$

Question 5.B.2.c

La fonction de répartition de $\hat{\theta_2}$ suit une loit de Pareto $P(3n, \theta)$, l'espérance et la variance de la loi de Pareto $P(m, \theta)$ sont resp. $\frac{m\theta}{m-1}$ et $\frac{m}{(m-2)(m-1)^2}\theta^2$ (voir questions préliminaires), donc

$$E[\hat{\theta_2}] = \frac{3n}{3n-1}\theta$$

et

$$V[\hat{\theta_2}] = \frac{3n}{(3n-2)(3n-1)^2}\theta^2$$

Question 5.B.2.d

$$B(\hat{\theta_2}, \theta) = E[\hat{\theta_2} - \theta)] = E[\hat{\theta_2}] - E[\theta)] = \frac{3n}{3n-1}\theta - \theta = \frac{\theta}{3n-1}$$

- Première méthode: convergence en probabilité, $\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta_2} - \theta| > \epsilon) = 0$
- Seconde méthode: Utiliser le critère de faible consistance. c.a.d. si le risque quadratique $R(\hat{\theta_2}, \theta)$ converge vers 0 quand $n \to \infty$.

Première méthode. On a

$$(|\hat{\theta_2} - \theta| > \epsilon) = (\hat{\theta_2} - \theta > \epsilon) \cap (\hat{\theta_2} > \theta) \cup (\theta - \hat{\theta_2} > \epsilon) \cap (\hat{\theta_2} < \theta)$$

On sait d'après la fonction de répartition que l'événement $(\hat{\theta_2} < \theta) = 0$ et que l'événement $(\hat{\theta_2} > \theta) = 1$. Donc

$$P(|\hat{\theta_2} - \theta| > \epsilon) = P(\hat{\theta_2} - \theta > \epsilon) = P(\hat{\theta_2} > \epsilon + \theta) = \left(\frac{\theta}{\theta + \epsilon}\right)^{3n}$$

Comme ϵ est positif, on a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\theta}{\theta+\epsilon}\right)^{3n}=0$$

Donc l'estimateur $\hat{\theta_2}$ est consistant.

Seconde méthode.

$$R(\hat{\theta_2},\theta)=V(\hat{\theta_2})-B^2(\hat{\theta_2},\theta)=\frac{3n}{(3n-2)(3n-1)^2}\theta^2-\frac{1}{(3n-1)^2}\theta^2=\frac{2\theta^2}{(3n-1)^2}$$

et

$$\frac{2\theta^2}{(3n-1)^2}\rightarrow_{n\to\infty}0$$

Donc l'estimateur $\hat{\theta_2}$ est consistant.

Question 5.B.3

On cherche un estimateur sans biais $\hat{\theta_3}$ donc par définition $E[\hat{\theta_3}]=\theta$. On a trouvé à la question précédente que $B(\hat{\theta_2},\theta)=\frac{\theta}{3n-1}$ donc que

$$E[\hat{\theta_2}]=B(\hat{\theta_2},\theta)-E[\theta]=B(\hat{\theta_2},\theta)-\theta=\frac{\theta}{3n-1}-\theta=\frac{3n\theta}{3n-1}$$

Ce qui fait $\theta=\frac{3n-1}{3n}E[\hat{\theta_2}]$ et $E[\hat{\theta_3}]=\frac{3n-1}{3n}E[\hat{\theta_2}]$.

Si on définit $\hat{\theta_3}=\frac{3n-1}{3n}\hat{\theta_2}$, il est facile de montrer que $E[\hat{\theta_3}]=\theta$ car

$$E[\hat{\theta_3}]=E\left[\frac{3n-1}{3n}\hat{\theta_2}\right]=\frac{3n-1}{3n}E[\hat{\theta_2}]=\frac{3n-1}{3n}\frac{3n}{3n-1}\theta=\theta$$

Pour montrer sa consistence, il faut montrer que son rsique quadratique tend vers 0 quand n tend vers l'infini. on a

$$R(\hat{\theta_3},\theta)=V(\hat{\theta_3})-B(\hat{\theta_3},\theta)=V(\hat{\theta_3})=V\left(\frac{3n-1}{3n}\hat{\theta_2}\right)=\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2V(\hat{\theta_2})$$

$$=\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2\frac{3n}{(3n-2)(3n-1)^2}\theta^2=\frac{\theta^2}{3n(3n-2)}$$

et

$$\frac{\theta^2}{3n(3n-2)}\rightarrow_{n\to\infty}0$$

Donc l'estimateur $\hat{\theta_3}=\frac{3n-1}{3n}\hat{\theta_2}$ est sans biais et est consistant.

Question 5.B.4

Des questions préćedentes on a

$\hat{\theta}$	$B(\hat{\theta},\theta)$	$R(\hat{\theta},\theta)$
$\hat{\theta_1}$	0	$\frac{\theta^2}{3n}$
$\hat{\theta_2}$	$\frac{\theta}{3n-1}$	$\frac{3n}{(3n-2)(3n-1)^2}\theta^2$
$\hat{\theta_3}$	0	$\frac{\theta^2}{3n(3n-2)}$

L'estimateur $\hat{\theta_2}$ a un biais, il est donc moins bon que les 2 autres. Les estimateurs $\hat{\theta_1}$ et $\hat{\theta_3}$ sont sans biais et on a l'estimateur $\hat{\theta_3}$ qui converge plus rapidement que $\hat{\theta_1}$. Donc, le meilleur estimateur est $th\hat{e}ta_3$.