Rappel de cours

-

Exo 1

Preuve par récurrence.
Proposition est vraie pour $u_0 = 0 = 2^0 - 1$.
Supposons que $u_n = 2^n - 1$ pour $n > 0$, vérifions si $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

$$u_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1$$

$$u_{n+1} = 2 * 2^n - 1$$

$$u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

La proposition est Vraie.

Exo 2

Preuve par récurrence.
Proposition est vraie pour $u_0 = 3 = 3^{2*0}$.
Supposons que $u_n = 3^{2n}$ pour $n > 0$, vérifions si $u_{n+1} = 3^{2(n+1)}$.

$$u_{n+1} = u_n^2$$

$$u_{n+1} = (3^{2n})^2$$

$$u_{n+1} = 3^{4n}$$

La proposition est Fausse.

Exo 3

Prenons $f(x) = x^2 + 1$, et déterminons le signe de $f(x) - x$ selon x.

$$f(x) - x = x^2 + 1 - x = x(x-1) + 1$$

$$f(x) - x, \begin{cases} > 0 & x \in]-\infty, 0[\\ > 0 & x = 0 \\ > 0 & x \in]0,1[\\ > 0 & x = 1 \\ > 0 & x \in]1, +\infty \end{cases}$$

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un assemblage de fonctions continues sur $\mathbb{R}$,
- La fonction f est stable sur $\mathbb{R}$ car $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$.
- La fonction f est strictement croissante
- La fonction f admet un point fixe , donc la suite $u_n = u_n^2 + 1$ est strictement croissante donc tend vers $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

En passant à la limite dans l'inégalité $u_n > u_0$, on obtient $l > u_0$, et la suite u_n n'est pas constante, on en déduit que $l = +\infty$ donc, la suite $\lim_{n \to +\infty} u_n = \{+\infty\}$.

La proposition est Vraie.

Exo 4

Prenons $f(x) = 1 + arctan(\frac{x}{2})$, et déterminon le signe de $f(x) - x$ selon x.

$$g(x) = f(x) - x = 1 + arctan(\frac{x}{2}) - x$$

La fonction $g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante, positive $\forall x \in]-\infty, x_{pf}[$, négative $\forall]x_{pf}, +\infty[$, donc elle s'annule pour un point $x_{pf} in]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{cases} f(x) > x & x \in]-\infty, x_{pf}[\\ = 0 & x_{pf} in]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}[\\ f(x) < x & x \in]x_{pf}, +\infty[\end{cases}$$

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un assemblage de fonctions continues sur $\mathbb{R}$,
- La fonction f est stable sur $\mathbb{R}$ car $f(\mathbb{R}) \subset]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}[\subset \mathbb{R}$.
- La fonction f est strictement croissante
- La fonction f admet un point fixe x_{pf}

Cas $u_0 = x_{pf}$, la suite est constante.
cas $u_0 \neq x_{pf}$. Comme la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on $f'(x_{pf}) > 1$, donc le point x_{pf} est répulsif et la suite u_n n'est pas convergente.

La proposition est Fausse.

Exo 5

La proposition est Fausse.

Exo 6

La proposition est Fausse.

Exo 7

La proposition est Fausse.

Exo 8

La proposition est Fausse.

Exo 9

La proposition est Fausse.

Exo 10

La proposition est Fausse.

Exo 11

La proposition est Fausse.

Exo 12

La proposition est Fausse.

Exo 13

Rappel de cours:

- Intégrale par partie. $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)$

  On prend
  $$\begin{array}{ll} f(x) = (x-1)^2 & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 2x-2 & g(x) = e^x \end{array}$$

  Donc $\int_0^1 (x-1)^2 e^x = [(x-1)^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 (2x-2)e^x = -1 - \int_0^1 (2x-2)e^x$
  On prend
  $$\begin{array}{ll} f(x) = 2x-2 & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 2 & g(x) = e^x \end{array}$$

  Donc $\int_0^1 (2x-2)e^x = [(2x-2)e(x)]_0^1 - \int_0^1 2e^x = [(2x-2)e(x)]_0^1 - 2[e^x]_0^1 = 2 - 2e + 2 = 4 - 2e.$

  Enfin $\int_0^1 (x-1)^2 e^x = -1 - (4-2e) = 2e - 5$
  La proposition est Vraie.

Exo 14

La proposition est Fausse.

Exo 15

La proposition est Fausse.

Exo 16

La proposition est Fausse.