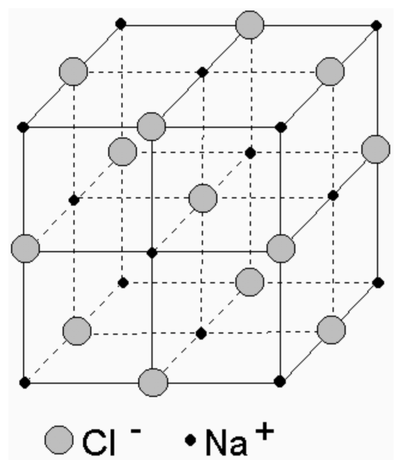
Devoir de physique n°2

L1-S1 PHYS 101 - 2019

À distribuer la semaine du 25 Novembre, à rendre la semaine du 09 Décembre

Cohésion du chlorure de sodium

Le cristal de chlorure de sodium (connu communément sous le nom de "sel de table") est formé d'un assemblage régulier périodique d'anions Cl^- et de cations Na^+ représenté sur la figure ci-contre. On propose dans cet exercice d'étudier au moyen d'une représentation simplifiée les forces de cohésion et les distances caractéristiques de cet assemblage.



N.B. les données nécessaires pour faire les applications numériques demandées sont regroupées à la fin du sujet.

I. Etude du système $Na^+ - Cl^-$

Figure 1 – Système $Na^+ - Cl^-$

On considère le système représenté figure 1 : un ion Cl^- est fixé à l'origine $x = 0$ et un ion Na^+ de masse m est contraint à se déplacer sur l'axe des abscisses de vecteur unitaire $\vec{\imath}$. La position de Na^+ est repérée par l'abscisse $x(t)$. On suppose $x(t = 0) > 0$ et on montrera par la suite que dans ce cas $x(t) > 0\ \forall t$ (ce qui correspond à l'impossibilité pour ces deux ions de s'interpénétrer).

1 - La force qui assure la cohésion du cristal est la force électromagnétique. Celle qui s'exerce sur l'ion Na^+ s'écrit:

$$\overrightarrow{F_{el}}(x) = -\frac{A}{x^2}\,\vec{\imath}$$

a) Montrer qu'il existe une énergie potentielle $E_{el}(x)$ associée à cette force, déterminer son expression en fonction de x. Où serait-il le plus judicieux de choisir l'origine des énergies potentielles – argumenter.

b) Rappeler comment on appelle une force ainsi "associée" à une énergie potentielle et une définition équivalente (en terme de travail) de cette catégorie de force.

2 - Pour garantir la non-interpénétration des ions, il existe des forces répulsives à courte distance que l'on modélisera par leur énergie potentielle répulsive :

$$E_{rep}(x) = \frac{B}{x^8}$$

Calculer la force $\overrightarrow{F_{rep}}(x)$ s'exerçant sur l'ion Na associée à cette énergie potentielle. Vérifier que cette force est bien répulsive.

3 - L'ion Na est lancé depuis l'infini vers Cl avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = -v_0\vec{\imath}$ $(v_0 > 0)$.

a) Déterminer l'expression de son énergie mécanique E_m

b) Justifier que E_m se conserve. Déterminer son expression. Application numérique.

c) Donner alors l'expression de la vitesse $\dot{x}$ en fonction de la position x et des paramètres du problème. Sans information supplémentaire. Peut-on déduire le sens du mouvement ? Expliquer.

d) On suppose à présent que Na^+ s'approche assez de Cl^- $(x \ll 1)$ pour que la force électromagnétique de cohésion devienne négligeable devant la force de répulsion.

Dans le cadre de cette approximation, justifier l'hypothèse affirmant que si $x(t = 0) > 0$, alors $x(t) > 0$.

Déterminer l'abscisse minimum $x_{min} > 0$. Application numérique. Commenter la valeur trouvée sachant que les rayons atomiques sont de l'ordre de l'angström.

e) Sachant qu'au contraire, à grande distance, la force de cohésion (attractive) domine, donner une idée de la nature de la trajectoire.

4 - Dans cette question, on s'intéresse à la position d'équilibre de ce système de deux ions.

a) Donner une définition de cette position d'équilibre et en déduire l'abscisse x_{eq} correspondante. Application numérique en mètres et angström.

b) Sur un même graphe, tracer qualitativement les énergies potentielles attractive $E_{el}(x)$, répulsive $E_{rep}(x)$ et totale $E_{ptot}(x)$ en fonction de x.

c) Indiquer le point de la courbe $E_{ptot}(x)$ associé à la position d'équilibre x_{eq} et calculer en ce point l'énergie potentielle totale $E_{ptot}(x_{eq})$.

II. Étude des mouvements autour de la position d'équilibre

5 - On se place à présent autour de la position d'équilibre calculée précédemment. On s'intéresse aux petits déplacements $\delta = x - x_{eq}$ autour de cette position d'équilibre. $\|\delta\| \ll \|x_{eq}\|$

a) En utilisant le développement limité a l'ordre 1 de $F_{tot}(x)$ autour de x_{eq}, montrer que la force peut se mettre sous la forme d'une force de rappel. Dans le cadre de cette approximation déduire l'expression de la constante de raideur K du ressort équivalent en fonction de A, B et x_{eq}, puis uniquement en fonction de A et B.

On prendra pour la suite $K = 60\ N.m$.

Rappel : le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction f(x) autour d'un point x_{eq} s'écrit :
$\boldsymbol{f(x) \approx f(x_{eq}) + f'(x_{eq})(x - x_{eq})}$

b) Écrire l'Équation du mouvement de Na^+ dans cette approximation.

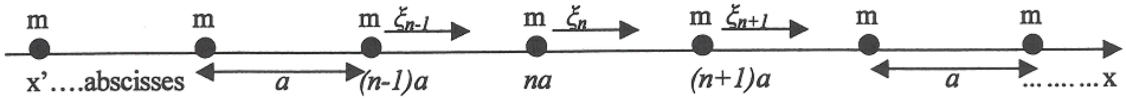
Il est plus judicieux d'utiliser δ comme variable pour décrire le mouvement.

c) Cette équation est celle d'une fonction périodique oscillant autour de la position d'équilibre. Donner l'expression de la pulsation, puis de la fréquence et de la période de ces oscillations.

Application numérique pour la période.

6 - Toujours dans le cadre de cette approximation, on considère une chaine unidimensionnelle infinie d'ions, de masses m identiques, initialement à leurs positions d'équilibre $x_n = na, n$ un nombre entier relatif (la distance inter-ionique d'équilibre a dans cette chaine est légèrement différente de x_{eq} calculée précédemment pour un système de deux ions). Le déplacement de chaque ion n autour de cette position d'équilibre est donné par δ_n. Les interactions sont

modélisées par des ressorts de raideur K liant chaque ion à ses voisins immédiats (n-1 et n+1) (on néglige les interactions avec les ions plus distants).



a) En écrivant le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ion n établir une équation différentielle qui relie $\delta_n, \ddot{\delta}_n, \delta_{n-1}, \delta_{n+1}$.

b) On déplace à présent un des ions puis on le relâche, ce qui donne naissance dans la chaine

à une onde de déformation que l'on suppose de la forme :

$$\delta_n(t) = \alpha e^{i(\omega t - kx_n)}$$

k est appelé nombre d'onde associé à cette onde de déformation. En adaptant puis substituant cette forme aux variables $\delta_n, \ddot{\delta}_n, \delta_{n-1}, \delta_{n+1}$ dans l'équation obtenue en a), donnez une relation nécessairement vérifiée entre ω et k pour que la forme proposée convienne.

Cette relation est appelée relation de dispersion.

Valeurs numériques pour les calculs :

$m = 3.84 \times 10^{-28}\ kg$

$A = e^2/4\pi\varepsilon_0 = 2.30 \times 10^{-28}\ N.m^2$

$B = 7.1 \times 10^{-96}\ J.m^8$

$v_0 = 2 \times 10^6 m.s^{-1}$

$K = 60\ N.m^{-1}$