Rappel de cours:

-

Exercice 5.1

5.1.1.a

La relation ϕ est linéaire de E si

- $\forall A, B \in E, \phi(A+B) = \phi(A) + \phi(B)$
- $\forall A \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \phi(\lambda A) = \lambda \phi(A)$

Posons $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ et $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

En utilisant deux fois la distibitibité par rapport à l'addition, on a:

$$\phi(A+B) = M_1.(A+B).M_2 = M_1.(A.M_2 + B.M_2) = M_1.A.M_2 + M_1.B.M_2 = \phi(A) + \phi(B)$$

On a $(\lambda A).B = \lambda(A.B) = A.(\lambda B)$ (voir cours).

$$\phi(\lambda A) = M_1.(\lambda A).M_2 = M_1.(\lambda(A.M_2)) = \lambda(M_1.A.M_2) = \lambda\phi(A)$$

Donc la relation $\phi(M)$ est linéaire.

5.1.1.b

La matrice A est un point fixe de la relation ϕ si $\phi(A) = A$, soit

$$\phi(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} .A. \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = A$$

$$\phi(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = A$$

5.1.2.a

$$\phi(P_1+P_2) = ((P_1+P_2)(1), (P_1+P_2)'(2)) = ((P_1(1)+P_2(1)), (P_1'+P_2')(2)) = (P_1(1)+P_2(1), P_1'(2)+P_2'(2))$$
$$= (P_1(1), P_1'(2)) + (P_2(1), P_2'(2)) = \phi(P_1) + \phi(P_2)$$

Et

$$\phi(\lambda P) = (\lambda P(1), (\lambda P(2))') = (\lambda P(1), \lambda P'(2)) = \lambda(P(1), P'(2)) = \lambda\phi(P)$$

La relation ϕ est linéaire.

5.1.2.b

$$\phi(t-1) = ((t-1)(1), (t-1)'(2)) = ((t-1)(1), (1)(2)) = (0, 1)$$

$$\phi((t-2)^2) = ((t-2)^2(1), ((t-2)^2)'(2)) = ((t-2)^2(1), (t^2-4t+4)'(2)) = ((t-2)^2(1), (2t-4)(2)) = (1, 0)$$

On cherche P, tel que $\phi(P) = (1, -1)$. Comme la relation ϕ est linéaire on a

$$(1,-1) = 1.(1,0) - 1.(0,1) = 1.\phi((t-2)^2) - 1.\phi(t-1) = \phi(1.(t-2)^2) + \phi(-(t-1)) = \phi((t-2)^2 - (t-1)) = \phi(t^2-5t+5)$$

Donc $P = t^2 - 5t + 5$.

5.1.3.a

$$\phi(f_1+f_2)=\int_0^1 (f_1+f_2)e^t dt=\int_0^1 f_1e^t+f_2e^t dt=\int_0^1 f_1e^t+\int_0^1 f_2e^t dt=\phi(f_1)+\phi(f_2)$$

$$\phi(\lambda f)=\int_0^1 (\lambda f)e^t dt=\int_0^1 \lambda f e^t dt=\lambda\int_0^1 fe^t dt=\lambda\phi(f)$$

5.1.3.b

Une fonction f de $E\to F$ appartient au noyau de ϕ si $\phi(f)=0_F$. Une fonction est dite affine si elle est de la forme $f(t)=at+b$. Donc on cherche une fonction $f=at+b$ tel que $\phi(f)=0$.

$$\phi(at+b)=\int_0^1 (at+b)e^t dt=\int_0^1 ate^t+be^t dt=a\int_0^1 te^t dt+b\int_0^1 e^t dt=a+b(e-1)=0$$

car $\int e^t dt=e^t$ et $\int te^t dt=(t-1)e^t$.

Il faut trouver a et b tel que $a+b(e-1)=0$. Prenons par exemple, $b=0$ donc $a=0$, et $b=1$ donc $a=1-e$.
Les 2 fonctions affines sont $f_0(t)=0t+0=0$ et $f_1(t)=(1-e)t+1$.

Exercice 5.2

5.2.1

$$f(x,y,z,t)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 3 & 4\\ -1 & 2 & -4 & 3\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-y+3z-t\\ 2x+y+3z+4t\\ -x+2y-4z+3t\end{vmatrix}$$

5.2.2.a

$Ker(f)=\{X\in\mathbb{R}^4, f(X)=0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$\begin{cases} x-y+3z-t & =0 \quad l_1\\ 2x+y+3z+4t & =0 \quad l_2\\ -x+2y-4z+3t & =0 \quad l_3\end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+3z-t & =0 \quad l_1\\ -3y+3z-6t & =0 \quad 2l_1-l_2\\ y-z+2t & =0 \quad l_1+l_3\end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+3z-t & =0 \quad l_1\\ y-z+2t & =0 \quad l_1+l_3\\ 0 & =0 \quad (2l_1-l_2)+3(l_1+l_3)\end{cases}$$

On a 2 variables primaires (x,y) et deux variables secondaires (z,t). Donc $Ker(f)=\{X\in\mathbb{R}^3, X=(2z-t,z-2t,z,t)\}$.

5.2.2.b

$$\begin{cases} x-y+3z-t & = x_b \quad l_1 \\ 2x+y+3z+4t & = y_b \quad l_2 \\ -x+2y-4z+3t & = z_b \quad l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+3z-t & = x_b \\ y-z+2t & = x_b+z_b \\ -3y+3z-6t & = 2x_b-y_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+3z-t & = x_b \\ y-z+2t & = x_b+z_b \\ -3(x_b+z_b) & = 2x_b-y_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+3z-t & = x_b \\ y-z+2t & = x_b+z_b \\ -5x_b+y_b-3z_b & = 0 \end{cases}$$

L'application f est injective ssi $Ker(f) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$. On a $Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, X = (4z-t, z-2t, z, t)\} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. L'application n'est pas injective.

L'application est surjective ssi $Im(f) = \mathbb{R}^3$. On a $Im(f) = B = (x_b, y_b, z_b) \neq \mathbb{R}^3$ car il y a une relation entre $x_b, y_b et z_b$. Donc l'application f n'est pas surjective.

5.2.3.a

$$\begin{aligned} &u_1 = 3e_1 - e_3 = 3(1,0,0,0) - (0,0,1,0) = (3,0,-1,0) \\ &u_2 = e_2 - e_4 = (0,1,0,0) - (0,0,0,1) = (0,1,0,-1) \\ &f(u_1) = (3-0-3-0, 6-0-3-0, -3+0+4+0) = (0,3,1) \\ &f(u_2) = (0-1+0--1, 0+1+0-4, -0+2-0-3) = (0,-3,-1) \end{aligned}$$

On a $Vect(f(u_1), f(u_2)) = \{(0,3,1), (0,-3,-1)\}$. On remarque que $f(u_1) = -f(u_2)$, donc les 2 vecteurs sont colinéaires. Par conséquent $Vect(f(u_1), f(u_2))$ ne représente que les points de la droite de du plan (y, z) et de vecteur directeur $(0, 3, 1)$.

5.2.3.b

On a $Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, X = (-2z-t, z-2t, z, t)\}$, les points de l'espace vectorielle sont $(x_f, y_f, z_f, t_f) = (-2z-t, z-2t, z, t)$.
$E = Vect((3,0,-1,0), (0,1,0,-1))$, les points de l'espace vectorielle D sont $(x_e, y_e, z_e, t_e) = a.(3,0,-1,0) + b.(0,1,0,-1) = (3a, b, -a, -b)$.

$E \cap Ker(f)$ sont les points communs entre E et $Ker(f)$. Donc

$$\begin{cases} 3a & = -2z-t \\ b & = z-2t \\ -a & = z \\ -b & = t \end{cases}$$

La solution de ce système est $b = a$. Donc $D = (3a, a, -a, -a)$ ou $D = (3, 1, -1, -1)$.

$D' = (3,0,-1,0)$ et $D = (3,1,-1,-1)$ sont supplémentaires dans E si $((3,0,-1,0), (3,1,-1,-1))$ est une base de E.

Famille libre?

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_2 & = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ -\lambda_2 & = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, la famille est libre.
Et génératrice?

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 & = x \\ \lambda_2 & = y \\ -\lambda_1 - \lambda_2 & = z \\ -\lambda_2 & = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & = t + y \\ 0 & = x + 3z \\ \lambda_2 & = y \\ -\lambda_1 & = z + y \end{cases}$$

Oups la famille n'est pas génératrice. Problème.

5.3

5.3.1

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5.3.2.a

$$f(1, 0, 1, -1) = (4, 1, 0, 1)$$

$$f(0, -1, 1, -2) = (-4, -1, 0, -1)$$

$$\begin{cases} 4\lambda_1 - 4\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ 0\lambda_1 - 0\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \end{cases}$$

On a $\lambda_1 = \lambda_2$, la famille n'est pas libre.

Ou plus subtilement, on remarque que $f(1, 0, 1, -1) = -f(0, -1, 1, -2)$ donc la famille est liée.

5.3.2.b

L'application f est injective si $Ker(f) = \{0\}$ avec $Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^4, f(X) = 0\}$.
De la question précédente on a:

$$f(1, 0, 1, -1) + f(0, -1, 1, -2) = 0$$

L'application f est linéaire, donc

$$f(1, -1, 2, -3) = 0$$

Donc

$$(1, -1, 2, -3) \in Ker(f)$$

Donc

$$Ker(f) \neq \{0\}$$

Donc l'application f n'est pas injective.

5.3.2.c

Une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension est injective si, et seulement si, elle est surjective. L'application f est linéaire, de même dimension et elle n'est pas injective donc elle n'est pas surjective.

5.3.3.a

On note les vecteurs colonnes de A: $C_1 = (3, 1, -1, 2)$, $C_2 = (4, 2, -1, -1)$, $C_3 = (2, -1, 3, 0)$ et $C_4 = (1, -1, 2, 1)$.

Le deuxième vecteur-colonne est unee combinaison linéaire des troisième et quatrième vecteurs-colonnes si $\exists a, b \in \mathbb{R}, C_2 = aC_3 + bC_4$.

$$(4, 2, -1, -1) = a(2, -1, 3, 0) + b(1, -1, 2, 1) = (2a + b, -a - b, 3a + 2b, b)$$

Donc

$$\begin{cases} 2a + b & = 4 \\ -a - b & = 2 \\ 3a + 2b & = -1 \\ b & = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b & \neq 4 \\ a & = -1 \\ 3a + 2b & = -1 \\ b & = -1 \end{cases}$$

Contradiction. Donc non.

5.3.3.b

Voir cours

5.3.3.c

5.4

5.4.1

En utilisant la distributivité par rapport à l'addition.

$$g(A+B) = (A+B)M - M(A+B) = AM + BM - MA - MB = AM - MA + BM - MB = g(A) + g(B)$$

$$g(\lambda A) = (\lambda A)M - M(\lambda A) = \lambda(AM) - \lambda(MA) = \lambda(AM - MA) = \lambda g(A)$$

Donc g est linéaire.

5.4.2

Par définition, $Ker(g) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g(M) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$.
On a $g(M) = AM - MA = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = MA$ qui est la définition de E.

Donc $Ker(g) = E$.

5.4.3

On a $M \in E, AM = MA$.
La matrice $A \in E$ car $AA = AA$.
La matrice $I_2 \in E$ car $I_2A = A = AI_2$.

On a trouvé 2 matrices qui appartiennent à E. Comme $Ker(g) = E$, on a $g(A) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et $g(I_2) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. De plus, la relation g est linéaire donc $g(\lambda_1 A + \lambda_2 I_2) = \lambda_1 g(A) + \lambda_2 g(I_2) = \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Donc $\lambda_1 A + \lambda_2 I_2$ est dans $Ker(g)$. Par conséquent $Ker(g) = \{A, I_2, \lambda_1 A + \lambda_2 I_2\}$, et $dim\, Ker(g) \geq 2$.

5.4.4

A et I_2 forment une base de $Ker(g)$ car la famille (A, I_2) est libre et génératrice. $dim\, Ker(g)$ et $rang(g)$ voir cours.

5.4.5

On a $g(A^2) = A^2A - AA^2 = A^3 - A^3 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Donc la matrice $A^2 \in Ker(g)$.

Comme les matrices A et I_2 sont une base de $Ker(g)$ alors tous les élément de l'ensemble $Ker(g)$ peuvent s'exprimer comme une combinaison linéaire des matrices A et I_2. Ou plus bestialement,

$$A^2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4A - I_2$$

Une matrice M_g est dans l'image de la relation g ssi il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $g(M) = AM - MA = M_g$. Soit $M = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$

$$AM = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2m_{11} + 3m_{21} & 2m_{12} + 3m_{22} \\ m_{11} + 2m_{21} & m_{12} + 2m_{22} \end{vmatrix}$$

$$MA = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2m_{11} + m_{12} & 3m_{11} + 2m_{12} \\ 2m_{21} + m_{22} & 3m_{21} + 2m_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_g = AM - MA = \begin{vmatrix} 3m_{21} - m_{12} & 3m_{22} - 3m_{11} \\ m_{11} - m_{22} & m_{12} - 3m_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -3b \\ b & -a \end{vmatrix}$$

avec $a = 3m_{21} - m_{12}$ et $b = m_{11} - m_{22}$.
QED

5.5

5.5.a

Par définition on a $Ker(f) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(X) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$. Donc, calculons $f(X) = 0$ avec $X = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ 2x_{11} + 4x_{21} & 2x_{12} + 4x_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} & = 0 \\ x_{12} + 2x_{22} & = 0 \\ 2x_{11} + 4x_{21} & = 0 \\ 2x_{12} + 4x_{22} & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} & = -2x_{21} \\ x_{12} & = -2x_{22} \end{cases}$$

Donc

$$Ker(f) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \forall a, b \in \mathbb{R}, X = \begin{vmatrix} -2a & -2b \\ a & b \end{vmatrix}\}$$

Une base pour $ker(f)$ est $(-2a, -2b, a, b)$.

5.5.b

Par définition, on a $Im(f) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = X\}$. Posons, $M = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$ et calculons $f(M)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11} + 2m_{21} & m_{12} + 2m_{22} \\ 2m_{11} + 4m_{21} & 2m_{12} + 4m_{22} \end{vmatrix}$$

Donc

$$X = \begin{vmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{vmatrix} \text{ avec } a = m_{11} + 2m_{21} \text{ et } b = m_{12} + 2m_{22}$$

Une base pour $Im(f)$ est $(a, b, 2a, 2b)$ avec $a = m_{11} + 2m_{21}$ et $b = m_{12} + 2m_{22}$.

5.6

5.6.1

On a l'application $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), f(Q) = AQ$. L'application f est linéaire si $f(Q_1 + \lambda Q_2) = f(Q_1) + \lambda f(Q_2)$.

$$f(Q_1 + \lambda Q_2) = A.(Q_1 + \lambda Q_2) = A.Q_1 + A.\lambda Q_2 = A.Q_1 + \lambda A.Q_2 = f(Q_1) + \lambda f(Q_2)$$

L'application f est linéaire.

5.6.2

On a $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \exists Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), M = AQ\}$.
Le triplet $(E, +, .)$ avec la loi $+$ qui est l'addition entre matrices et la loi . la multiplication d'une matrice par une constante, est un espace vectoriel si il vérifie les 8 propriétés suivantes:

- 1 - $\forall M_1, M_2 \in E, M_1 + M_2 = M_2 + M_1$
- 2 - $\forall M_1, M_2, M_3 \in E, M_1 + (M_2 + M_3) = (M_1 + M_2) + M_3$
- 3 - $\exists e \in E, \forall M \in E, M + e = e + M = M$
- 4 - $\forall M_1 \in E, \exists M_2 \in E, M_1 + M_2 = M_2 + M_1 = e$
- N - $\forall M \in E, 1.M = M$
- A - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall M \in E, \lambda.(\mu M) = (\lambda\mu).M$
- D_1 - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall M \in E, (\lambda + \mu).M = \lambda.M + \mu.M$

- D_2 - $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall M_1, M_2 \in E, \lambda.(M_1 + M_2) = \lambda.M_1 + \lambda.M_2$

Vérifions les 8 propriétés:

- 1 - $\forall M_1, M_2 \in E, M_1 + M_2 = AQ_1 + AQ_2 = AQ_2 + AQ_1 = M_2 + M_1$, Vrai
- 2 - $\forall M_1, M_2, M_3 \in E, M_1 + (M_2 + M_3) = AQ_1 + (AQ_2 + AQM_3) = (AQ_1 + AQ_2) + AQ_3 = (M_1 + M_2) + M_3$, Vrai
- 3 - Prenons $e = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. On a $e \in E$ car $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = A0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ et $M + e = AQ + 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = M$ et $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} + AQ = M$, Vrai
- 4 - $\forall M_1 \in E, \exists M_2 \in E, M_1 + M_2 = e$. Partie 1, $M_1 + M_2 = e \implies AQ_1 + M_2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \implies M_2 = e + (-AQ_1) \implies M_2 = -AQ1 \implies M2 = A(-Q_1)$. Donc M_2 existe, Vrai.
- N - $\forall M \in E, 1.M = 1.AQ = (1A)Q = AQ = M$, Vrai
- A - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall M \in E, \lambda.(\mu M) = \lambda.(\mu AQ) = \lambda\mu.AQ = (\lambda\mu).AQ = (\lambda\mu).M$, Vrai
- D_1 - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall M \in E, (\lambda + \mu).M = \lambda.M + \mu.M$, Vrai par distribution de la loi + sur la loi .
- D_2 - $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall M_1, M_2 \in E, \lambda.(M_1 + M_2) = \lambda.M_1 + \lambda.M_2$Vrai par distribution de la loi . sur la loi +