Rappel de cours

Équation différentielle

- Équation différentielle du premier degrés; $y'(t) = a(t).y(t) + b(t)$
  - Résoudre l'équation homogène; $y'(t) = a(t).y(t)$. Solution $y_0(t) = \lambda e^{A(t)}$ avec $A'(t) = a(t)$. Il faut intégrer $a(t)$.
  - Calculer une solution particulière avec la methode de la variation de la constante. $y_1(t) = \lambda(t).e^{A(t)}$ avec $A'(t) = a(t)$ et $\lambda'(t) = b(t).e^{-A(t)}$. Il faut intégrer $\lambda'(t)$ et remplacer dans $y_1(t)$.
  - Solution générale $y(t) = y_0(t) + y_1(t)$
  - Trouver λ par le calcul d'une valeur donnée.
- Équation différentielle du second degrés a coefficient constant; $y''(t) + b.y'(t) + a.y(t) = b(t)$
  - Résoudre l'équation homogène; $y''(t) + b.y'(t) + a.y(t) = 0$
  - Calcul des racines r_1, r_2 de l'équation $r^2 + br + a = 0$
  - $y_0(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$
  - Calculer une solution particulière de $y''(t)+b.y'(t)+a.y(t) = 0$ à partir de la formule généralement proposée ou deviner une solution. Il faut dériver 2 fois la formule proposée et la remplacer dans l'équation. Ensuite trouver les coeeficients.
  - La solution générale est $y(t) = y_0(t) + y_1(t)$

Formule de Taylor

- La formule de Taylor pour le developpement limité d'ordre n est

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

- Inégalité de Taylor-Lagrance est

$$|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq M \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'(t) - \frac{t}{t^2+1}y(t) = t$$

1.1

Si l'équation homogène est de la forme:

$$y'(t) = a(t)y(t)$$

Alors la solution est

$$y_0(t) = \lambda e^{A(t)} \ avec\ A'(t) = a(t)$$

Dans notre cas on a $a(t) = \frac{t}{t^2+1}$, on cherche $A(t) = \int \frac{t}{t^2+1}dt$. Par substitution $u = t^2 + 1$, ce qui fait $\frac{du}{dt} = 2t$, donc $dt = \frac{1}{2t}du$.

$$\int \frac{t}{t^2+1}dt = \int \frac{t}{t^2+1}\frac{1}{2t}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln(u) = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$$

Donc

$$y_0(t) = \lambda e^{\frac{1}{2}\ln(t^2+1)} = \lambda\sqrt{e^{\ln(t^2+1)}} = \lambda\sqrt{t^2+1)}$$

1.2

Calculer une solution particulière par la methode de la variation de la constante. Si l'équation homogène est de la forme:

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

Alors la solution est

$$y_1(t) = \lambda(t)e^{A(t)} \ avec\ A'(t) = a(t)\ et\ \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

Dans notre cas $a(t) = \frac{t}{t^2+1}$, $A(t) = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$, $\lambda(t) = \int t.e^{-A(t)}dt = \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$. Par substitution $u = t^2+1$, $\frac{du}{dt} = 2t$ donc $dt = \frac{1}{2t}du$

$$\int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\frac{1}{2t}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}.2\sqrt{u} = \sqrt{u} = \sqrt{t^2+1}$$

Donc

$$y_1(t) = \lambda(t)e^{A(t)} = \sqrt{t^2+1}.\sqrt{t^2+1} = t^2+1$$

1.3

L'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ est

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) = \lambda\sqrt{t^2+1} + t^2 + 1$$

$$y(0) = \lambda\sqrt{0^2+1} + 0^2 + 1 = 0,\ donc\ \lambda = -1$$

Donc

$$y(t) = -\sqrt{t^2+1} + t^2 + 1$$

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle :

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 3t^2 - 2t$$

2.1

Si l'équation homogène est de la forme:

$$y''(t) + b.y'(t) + a.y(t) = 0$$

Alors la solution est

$$y_0(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ avec\ r_1, r_2\ les\ solutions\ de\ r^2 + br + a = 0$$

Dans notre cas $b = -2$ et $a = -3$. Les solution de l'équation $r^2 - 2r - 3 = 0$ sont

$$r_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 4.(1)(-3)}}{2.(1)} = 3,\ r_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{(-2)^2 - 4.(1)(-3)}}{2.(1)} = -1$$

Donc

$$y_0(t) = \lambda e^{3t} + \mu e^{-t}$$

2.2

En prenant $y(t) = at^2 + bt + c$, $y'(t) = 2at + b$ et $y''(t) = 2a$ on a

$$2a - 2(2at + b) - 3(at^2 + bt + c) = 3t^2 - 2t = 2a - 4at - 2b - 3at^2 - 3bt - 3c = 3t^2 - 2t$$

$$(-3a - 3)t^2 + (-3b - 4a + 2)t + 2a - 3c = 0$$

Il faut résoudre

$$\begin{cases} 2a - 3c = 0 \\ -3b - 4a + 2 = 0 \\ -3a - 3 = 0 \end{cases}$$

Donc $a = -1$, $b = 2$ et $c = -\frac{2}{3}$.

Donc

$$y_1(t) = -t^2 + 2t - \frac{2}{3}$$

2.3

La solution de F est

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) = \lambda e^{3t} + \mu e^{-t} - t^2 + 2t - \frac{2}{3}$$

2.3

Avec $y'(0) = -4$, $y(0) = 0$

$$y(0) = \lambda e^{3.0} + \mu e^{-0} - 0^2 + 2.0 - \frac{2}{3} = \lambda + \mu - \frac{2}{3} = 0$$

$$y'(0) = 3\lambda e^{3.0} - \mu e^{-0} - 2.0 + 2 = 3\lambda - \mu + 2 = -4$$

Donc $4\mu - 4 = 4$, donc $\mu = 2$ et $\lambda = -\frac{4}{3}$ Donc

$$y(t) = -\frac{4}{3}e^{3t} + 2e^{-t} - t^2 + 2t - \frac{2}{3}$$

Exercice 3

La formule de Taylor pour le developpement limité d'ordre n est

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

3.1

Dans notre cas, $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$, $b = x$ et $n = 2$. Donc

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{(x-0)^k}{k!} \sin^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \sin^{(2+1)}(t)dt$$

$$\sin(x) = \sin(0) + x\cos(0) - \frac{x^2}{2}\sin(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}(-\cos(t))dt = x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\cos(t)dt$$

3.2

Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\frac{(x-t)^2}{2} > 0$ et $cos(x) \geq 0$. Donc, le signe du reste integral est négatif.

3.3

Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $cos(x) \leq 1$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrance on a

$$|f(b) - \sum_{k=0}^{2} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq M\frac{x^3}{3!}$$

$$|\sin(x) - x| \leq M\frac{x^3}{6}$$

Avec M un majorant de $|-cos(t)|$. Donc $M = 1$. On a donc

$$|\sin(x) - x| \leq \frac{x^3}{6}$$

On a $sin(x) - x < 0$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ Donc

$$-\sin(x) + x \leq \frac{x^3}{6}$$

$$x + \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$$

3.4

Exercice 4

$$y'(t) + t.y(t) = t^3.y^3(t)$$

4.1

On a $y(t) = 0$ et $y'(t) = 0$. Donc

$$0 + t.0 = t^3.0^3$$

Donc $(y) = 0$ est une solution.

4.2

Si la fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $y^3(t) \neq 0$, donc on peut diviser les 2 cotés par $y^3(t)$. Donc si $y(t)$ est solution de B alors $y(t)$ est solution de $\frac{y'(t)}{y^3(t)} + \frac{t.y(t)}{y^3(t)} = t^3.y(t)$. Et si $y(t)$ est solution de $\frac{y'(t)}{y^3(t)} + \frac{t.y(t)}{y^3(t)} = t^3.y(t)$ et $y(t) \neq 0$ alors $y(t)$ est solution de B en multiplant les 2 cotés par $y^3(t)$.

4.3

Posons $z(t) = \frac{1}{y^2(t)}$, on a $z'(t) = -2\frac{y'(t)}{y^3(t)}$. Donc

$$-\frac{1}{2}z'(t) + t.z(t) = t^3$$

4.4

L'équation homogène est

$$z'(t) = 2t.z(t)$$

Donc $a(t) = 2t$, $A(t) = t^2$. La solution de l'équation homogène est

$$z_0(t) = \lambda e^{t^2}$$

La solution particulière par la méthode de la variation de la constante. Si l'équation homogène est de la forme:

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

Alors la solution est

$$z_1(t) = \lambda(t)e^{A(t)} \; avec \; A'(t) = a(t) \; et \; \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

Dans notre cas, $-\frac{1}{2}z'(t) + t.z(t) = t^3$, soit $z'(t) = 2t.z(t) - 2t^3$. Donc, $a(t) = 2t$, $A(t) = t^2$, et $\lambda'(t) = -2t^3e^{-t^2}$.

$$\lambda(t) = \int -2t^3e^{-t^2}dt$$

Par substitution avec $u = t^2$, $\frac{du}{dt} = 2t$, donc $dt = \frac{1}{2t}du$

$$\int -2t^3e^{-t^2}dt = \int -2t^3e^{-t^2}\frac{1}{2t}du = -\int t^2e^{-t^2}du = -\int ue^{-u}du$$

Intégration par parties avec $f = u$, $g' = e^{-u}$. Donc $f' = 1$ et $g = -e^{-u}$.

$$\int f.g' = f.g - \int f'.g$$

Donc

$$-\int ue^{-u}du = -(-ue^{-u} - \int -e^{-u}du) = ue^{-u} - \int e^{-u}du = ue^{-u} + e^{-u} == (u+1)e^{-u} = (t^2+1)e^{-t^2}$$

$$z_1(t) = (t^2+1)e^{-t^2}e^{t^2} = (t^2+1)$$

La solution générale est

$$z(t) = z_0(t) + z_1(t) = \lambda e^{t^2} + t^2 + 1$$

4.4

$$z(t) = \frac{1}{y^2(t)}$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{z(t)}}$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{\lambda e^{t^2} + t^2 + 1}} \; avec \; \lambda > 0$$