Rappel de cours

Méthode de Newton

- Identification des racines d'une fonction. (ie. une racine est une valeur r tel que $f(r) = 0$.
- La méthode se fait par approximation à partir d'une valeur supposée proche de la racine
- Developper la suite $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Le plus loin on va dans la suite, le plus proche on est de la racine.

Exercice 1

La suite $(x_n)_n$ est

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \; avec \; x_0 = 2$$

On a $f(x) = xe^{-x}$, donc $f'(x) = (1-x)e^{-x}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n e^{-x_n}}{(1-x_n)e^{-x_n}} = x_n - \frac{x_n}{1-x_n} = x_n + \frac{x_n}{x_n - 1}$$

On a $x - 1 < x$, donc $\frac{x}{x-1} > 1$ lorsque $x > 1$. On a $x_0 \geq 2 > 1$, à chaque pas on ajoute une valeur positive donc $x_n > 2$.

$$x_{n+1} - x_n = x_n + \frac{x_n}{x_n - 1} - x_n = \frac{x_n}{x_n - 1}$$

On a $x - 1 < x$, donc $\frac{x}{x-1} > 1$ lorsque $x > 1$. On a $x_0 \geq 2 > 1$, donc $x_{n+1} - x_n > 1$. La suite est strictement croissante donc elle divergence quand $x \to \infty$.

Séance 2 - Densité dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 - Une définition équivalente

1 - Si $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists d \in D \bigcap]x-\epsilon, x+\epsilon[$ alors $x-\epsilon < d < x+\epsilon$, prenons $a = x-\epsilon$ et $b = x+\epsilon$ alors $a < d < b$
2 - $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists d \in D, a < d < b$ alors prenons $x = \frac{a+b}{2}$ et $\epsilon = b - x = \frac{b-a}{2}$ alors $x + \epsilon = x + b - x = b$ et $x - \epsilon == \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} = a$ donc $x - \epsilon < d < x + \epsilon$.

Exercice 2 - Les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$

2.1

Si $\beta > 0$, prenons l'entier $i = E(\beta)$ alors $\beta - 1 < i \leq \beta$ et $\beta - \alpha > 1$, donc $\alpha < \beta - 1$ donc $\alpha < i < \beta$.

Si $\alpha < 0$, prenons l'entier $i = E(\alpha)$ alors $\alpha \leq i < \alpha + 1$ et $\beta - \alpha > 1$, donc $\beta > \alpha + 1$ donc $\alpha < i < \beta$.

2.2

On a $x - 1 < E(x) \leq x$.
On a $b - a > 0$. Si $q(b-a) > 1$ alors $q > \frac{1}{b-a}$. Prenons $q = E(\frac{1}{b-a}) + 1$.

$$x - 1 < E(x)$$

$$x - 1 + 1 < E(x) + 1$$

$$\frac{1}{b-a} < E(\frac{1}{b-a}) + 1$$

$$\frac{1}{b-a} < q$$

$$(b-a)\frac{1}{b-a} < q(b-a)$$

$$1 < q(b-a)$$

L'entier $q = E(\frac{1}{b-a}) + 1$.

2.3

On cherche $p, q \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a < \frac{p}{q} < b$.
De la question 2.3, on a montré que $\exists q \in \mathbb{N}^*, q(b-a) > 1$ et $b - a > 0$ donc

$$b - a > \frac{1}{q}$$

$$b > a + \frac{1}{q}$$

$$b > \frac{aq+1}{q}$$

Prenons $p = E(aq)$, donc $p \leq aq < p + 1$.

$$b > \frac{aq+1}{q} > \frac{p+1}{q}$$

et

$$\frac{p}{q} \leq a < \frac{p+1}{q}$$

donc
$$a < \frac{p+1}{q} < \frac{aq+1}{q} < b$$

Prenons $d = \frac{p+1}{q}$ alors $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists d \in \mathbb{Q}, a < d < b$.
Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 - Densité et ensembles finis

3.1

Tout ensemble fini admet un majorant M.
Prenons $a, b \in \mathbb{R}, a > M \ et \ b > M$, $\nexists d \in X, a < d < b$.
Donc X n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

3.2

Comme D est dense dans $\mathbb{R}$ alors $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists d \in D, a < d < b$. Si on consedère $n+1$ sous-intervalles de $]a; b[$ alors la propriété et également vérifiée sur chaque sous-intervalle (car vrai pour tout réel a et b).
Donc, l'ensemble $D \backslash \{d_1, ..., d_n\}$ contient au moins une valeur tel que $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists d \in D, a < d < b$ (choisir une valeur dans l'intervalle qui ne contient aucun $\{d_1, ..., d_n\}$).
Donc $D \backslash \{d_1, ..., d_n\}$ est dense.

Exercice 4 - Une dichotomie modifiée

4.1

4.2

Preuve par contradiction
Si I est vide alors $\alpha = \beta$, donc $Inf \ X = Sup \ X$. L'ensemble X contient 2 éléments distincts x_1 et x_2. On a $x_1 < x_2$ (car ils sont distincts)
et $Inf \ X \leq x_1$ car $Inf \ X$ est une borne inférieure.
et $Sup \ X \geq x_2$ car $Sup \ X$ est une borne inférieure.
Donc $Inf \ X \leq x_1 < x_2 \leq Sup \ X$

Ceci contredit l'hypothèse $Inf \ X = Sup \ X$ donc I n'est pas vide.

Exercice 5 - Rationnel ou irrationnel ?

5.1

Preuve par contradiction.

Si $\sqrt{2}$ est rationnel alors $\exists p, q \in \mathbb{N}^*$, $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ avec p,q premiers entre eux.

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2q^2$$

Comme $2q^2$ est pair, alors p^2 est doit être pair, donc p est pair également.
Soit $p = 2r$ (comme p est pair), donc $p^2 = (2r)^2 = 4r^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2r^2$ alors q^2 est pair, donc q est pair.
p et q sont tous les deux pairs, ils ne peuvent pas être premier entre eux, $\rightarrow$ contradiction.
Donc $\sqrt(2)$ est irrationnel.

5.2

Preuve par contradiction.

Si $p^{\frac{1}{n}}$ est rationnel alors $\exists a, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b} = p^{\frac{1}{n}}$ avec a,b premiers entre eux.
On a

$$p = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$p.b^n = a^n$$

$$p.b^n = a.a^{n-1}$$

p est premier donc a ne divise pas p.
a,b sont premiers entre eux donc a ne divise pas b^n.
Donc la proposition est fausse et $p^{\frac{1}{n}}$ est irrationnel.

5.3

Preuve par contradiction.
Si $r^{\frac{1}{n}}$ est rationnel alors $\exists a, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b} = r^{\frac{1}{n}}$ avec a,b premiers entre eux.
On a

$$r = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

r est un nombre rationnel donc $r = \frac{c}{d}$.

$$\frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\log\left(\frac{c}{d}\right) = n.\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

c et d sont fixés par r, donc pour une certaine valeur N trés grande cette relation n'est pas vérifiée car $\log\left(\frac{c}{d}\right) < N.\log\left(\frac{a}{b}\right)$.
Donc $r^{\frac{1}{n}}$ est irrationnel pour $n > N$.