Rappel de cours

Definition 1. Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes ssi:

- $(u_n)_{n\geq 0}$ est croisssante et $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
- $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n)_{n\geq 0} = 0$

Exercice 1

Montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(n+1)^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{(n+1)^3}$$

$\forall n, u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croisssante.

Montrons que $(v_n)_{n\geq 1}$ est dćroissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - (u_n + \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^2} = \frac{n+2}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{-3n^2 - n - 1}{n^2(n+1)^3}$$

$\forall n, v_{n+1} - v_n < 0$ donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroisssante.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_n \leq v_n$

$$u_n \leq v_n, u_n \leq u_n + \frac{1}{n^2}$$

Vrai car $\frac{1}{n^2}$ est positif pour $n \geq 1$.

Montrons que $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n)_{n\geq 0} = 0$

$$\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n)_{n\geq 1} = \lim_{n\to\infty}(u_n + \frac{1}{n^2} - u_n)_{n\geq 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Vrai

Donc les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 2

Montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$\forall n, u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croisssante.

Montrons que $(v_n)_{n\geq 1}$ est dćroissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - (u_n + \frac{1}{n!}) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$

$$\frac{1-n}{(n+1)!}$$

$\forall n, v_{n+1} - v_n \leq 0$ donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroisssante.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_n \leq v_n$

$$u_n \leq v_n, u_n \leq u_n + \frac{1}{n!}$$

Vrai car $\frac{1}{n!}$ est positif pour $n \geq 1$.

Montrons que $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n)_{n\geq 0} = 0$

$$\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n)_{n\geq 1} = \lim_{n\to\infty}(u_n + \frac{1}{n!} - u_n)_{n\geq 1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0$$

Vrai

Donc les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 3

3.1

$\forall n \geq 1, u_n > 0$ car u_n est une somme de nombres tous positifs.
$\forall n \geq 1, u_n \leq 0$, ???

3.2

Montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k+n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n} = \frac{1}{n+1+n}$$

$\forall n, u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croisssante.

3.3

La suite u_n est borné et croissante donc elle converge. Calculons sa limite.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(2n) - \ln(n) = \ln(\frac{2n}{n}) = \ln(2)$$

Exercice 4

4.1

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{k^2+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$

$u_{n+1} - n_n > 0$ donc la suite u_n est croissante.

4.2

$$u_{2n} - n_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{k^2+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{(n+k)^2+1}$$

Preuve pae récurrence, pour $n = 1$, on a $u_2 - u_1 = 2/5 = 0.4$. Supposons que $u_{2n} - u_n \geq 1/4$, que vaut $u_{2(n+1)} - u_{(n+1)}$?

$$u_{2(n+1)} - u_{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{n+k}{(n+1+k)^2+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{(n+1+k)^2+1} + \frac{n+1}{(2n+2)^2+1} = u_n + \frac{n+1}{2(n+1)}$$

QED