Rappel de cours

Exercice 3

Exercice 3.1

Les matrices A et B commutent donc $A.B = B.A$. Calculons $B.A^2$

$$B.A^2 = B.A.A = (B.A).A = (A.B).A = A.B.A = A.(B.A) = A.(A.B) = A.A.B = A^2B$$

Comme $B.A^2 = A^2.B$ les matrices $A^@$ et B commutent.

Exercice 3.2

$$X_A(\lambda) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc$$

Exercice 3.3

$$A^2 = \begin{vmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{vmatrix}$$

$A \in vect(A^2, I^2)$ si il existe λ_1 et λ_2 tel que $A = \lambda_1 A^2 + \lambda_2 Id^2$ 4 équations a vérifier

$$\begin{cases} a = \lambda_1(a^2 + bc) + \lambda_2 & \\ b = \lambda_1(ab + bd) & \Longrightarrow \lambda_1(a + d) = 1 \\ c = \lambda_1(ac + cd) & \Longrightarrow \lambda_1(a + d) = 1 \\ d = \lambda_1(bc + d^2) + \lambda_2 & \end{cases}$$

On a $\lambda_1 = \frac{1}{a+d}$ car $a + d \neq 0$. Calculons λ_2

$$a = \frac{1}{a + d}(a^2 + bc) + \lambda_2$$

$$\frac{a^2 + ad}{a + d} = \frac{a^2 + bc}{a + d} + \frac{\lambda_2(a + d)}{a + d}$$

$$a^2 + ad = a^2 + bc + \lambda_2(a + d)$$

$$\lambda_2 = \frac{ad - bc}{a + d}$$

Vérifions λ_2

$$d = \lambda_1(bc + d^2) + \lambda_2 = \frac{bc + d^2}{a + d} + \frac{ad - bc}{a + d} = \frac{d(a + d)}{a + d} = d$$

λ_1 et λ_2 existent, donc $A \in vect(A^2, I^2)$.

Exercice 3.4

$$AB = (\lambda_1 A^2 + \lambda_2 Id^2)B = \lambda_1 A^2 B + \lambda_2 Id^2 B = \lambda_1 BA^2 + \lambda_2 Id^2 B = \lambda_1 BA^2 + \lambda_2 BId^2 = B(\lambda_1 A^2 + \lambda_2 Id^2) = BA$$

Exercice 5

Exercice 5.1

La dimension de la matrice $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ est $d = 4$ car sa base est:

$$U_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .U_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .U_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} .U_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Par définition, la dimension du $\mathbb{R} - ev$ est $2d = 8$.

Exercice 5.1

Par définition la base dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}-ev$ est $(U_1, iU_1, \ldots, U_4, iU_4)$. Donc la base est

$$U_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .U_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .U_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} .U_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$iU_1 = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .iU_2 = \begin{vmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .iU_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{vmatrix} .iU_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{vmatrix}$$

Exercice 6

Exercice 6.1

On a H de la forme

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} + ib_{11} & a_{12} + ib_{12} \\ a_{21} + ib_{21} & -a_{11} - ib_{11} \end{vmatrix}$$

Une base de H est

$$U_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} .U_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .U_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

La dimension de H est 3.

Exercice 6.2

On a

$$E_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .E_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .E_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} .E_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Donc

$$E_1 = E_{11} - E_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

et $Tr(E_{11} - E_{22}) = 1 + (-1) = 0$, matrice diagonale.

$$E_2 = E_{12} + E_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = U_2 + U_3$$

et $Tr(E_{12} + E_{21}) = 0 + 0 = 0$, $X_m(\lambda) = \lambda^2 - 1$, $S_p(E_{12} + E_{21}) = \{1, -1\}$....

$$E_3 = E_{11} - E_{22} + E_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

et $Tr(E_{11} - E_{22} + E_{12}) = 1 + (-1) = 0$, $X_m(\lambda) = \lambda^2 - 1$, $S_p(E_{11} - E_{22} + E_{12}) = \{1, -1\}$....
Donc les 3 matrices sont dans H.

Exercice 6.3

Calcul si (E_1, E_2, E_3) est une base de H.

Exercice 7

Exercice 7.1

On a $A^2 = A$ La matrice A est diagonalisable si il existe deux matrices T et D tel que $A = TDT^{-1}$. Il faut trouver les valeurs propres λ tel que $Ax = \lambda x$.

$$Ax = A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda^2 x = \lambda x$$

Les 2 solutions sont $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Les espaces propres sont $E_0 = \{x \in M_n(\mathbb{R}) | Ax = 0\}$ et $E_1 = \{x \in M_n(\mathbb{R}) | Ax = x\}$. Il maintenant trouver la dimension de E_0 et E_1 et montrer que leur somme est n ou que

Exercice 8

Si a et b sont premiers entre eux, que vaux $\gcd(a+b, a-b)$?

On a $\gcd(a, b) = 1$. Supposons $d = \gcd(a+b, a-b)$. Donc $d|a+b$ et $d|a-b$. Aussi, $a+b = k_1 d$ et $a-b = k_2 d$. On obtient 2 équations en additionnant et soustrayant. $2a = k_1 d + k_2 d$ et $2b = k_1 d - k_2 d$. Donc d divise $2a$ et $2b$. D'un autre coté, on a $\gcd(2a, 2b) = 2\gcd(a, b) = 2$. Par conséquent, le prlus grand diviseur commun de $2a$ et $2b$ est 2 et d est un diviseur de $2a$ et $2b$. Les seules valeurs possible pour d sont 1 et 2.

$$\gcd(a, b) = 1 \implies \gcd(a+b, a-b) = 1 \text{ ou } 2$$

Si a et b sont tous les 2 pairs (ou impairs) alors $\gcd(a+b, a-b) = 2$ car $a+b$ et $a-b$ sont pairs, si a et b ne sont pas tous les 2 pairs (ou impairs) alors $\gcd(a+b, a-b) = 1$ car $a+b$ et $a-b$ sont pair/impair ou impair/pair.