

## Exo 2.2.1

### Q1

$x(t) = -2a \sin^2(\omega t)$ , et  $(f^n)' = n f' f^{n-1}$ , avec  $n = 2$  et  $f = \sin(\omega t)$ . De plus,  $(\sin(f))' = f' \cos(f)$  avec  $f = \omega t$  donc  $v_x(t) = x'(t) = -2a * 2\omega \cos(\omega t) \sin(\omega t)$ .

$y(t) = 2a \sin(\omega t) \cos(\omega t)$  et  $(fg)' = f'g + g'f$ , avec  $f = \sin(\omega t)$  et  $g = \cos(\omega t)$ . Donc  $f' = \omega \cos(\omega t)$  et  $g' = -\omega \sin(\omega t)$ , alors  $2a(\omega \cos(\omega t) \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t) \sin(\omega t))$ .

$$v(t) = \left\{ \begin{array}{l} v_x(t) = x'(t) = -4a\omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ v_y(t) = y'(t) = 2a\omega (\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)) \\ v_z(t) = z'(t) = 0 \end{array} \right\}$$

$a_x(t) = v'_x(t)$  et  $v_x(t) = -4a\omega \cos(\omega t) \sin(\omega t)$  et  $(fg)' = f'g + g'f$ , avec  $f = \cos(\omega t)$  et  $g = \sin(\omega t)$ . Donc  $f' = -\omega \sin(\omega t)$  et  $g' = \omega \cos(\omega t)$ , alors  $-4a\omega((- \omega \sin(\omega t)) \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t) \cos(\omega t))$ . On a aussi  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ .

$a_y(t) = v'_y(t)$  et  $v_y(t) = 2a\omega (\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t))$  avec  $(f+g)' = f' + g'$ , on connaît la dérivée de  $\sin^2(\omega t)$ . Il faut calculer la dérivée de  $\cos^2(\omega t)$ . La dérivée est  $2\omega(-\sin(\omega t))\cos(\omega t)$ .

$$a(t) = \left\{ \begin{array}{l} a_x(t) = v'_x(t) = 4a\omega^2 \\ a_y(t) = v'_y(t) = -8a\omega^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \\ a_z(t) = v'_z(t) = 0 \end{array} \right\}$$

### Q2

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &= \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)} \\ &= \sqrt{(-4a\omega \cos(\omega t) \sin(\omega t))^2 + (2a\omega (\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)))^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{16a^2\omega^2 \cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t) + 4a^2\omega^2 (\cos^4(\omega t) - 2\cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t) + \sin^4(\omega t))} \\ &= \sqrt{8a^2\omega^2 \cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t) + 4a^2\omega^2 \cos^4(\omega t) + 4a^2\omega^2 \sin^4(\omega t)} \\ &= 2a\omega \sqrt{2\cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t) + \cos^4(\omega t) + \sin^4(\omega t)} \\ &= 2a\omega \sqrt{(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))^2} \\ &= 2a\omega \sqrt{1^2} \\ &= 2a\omega \end{aligned}$$

### Q3

Le vecteur vitesse est égale à  $= 2a\omega$  qui est constant. Donc le mouvement est uniforme.

### Q4

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 1 - 2\cos^2(x) \\ R &= \|AM\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ R^2 &= (x-a)^2 + (y-b)^2 \end{aligned}$$

ou en polaire

$$x = a + R\cos(\alpha), y = b + R\sin(\alpha),$$

**Q5**

Supposons que la voiture décrit un cercle de centre  $(x_c, y_c)$  et de rayon  $R$ . Donc

$$\begin{aligned}x_c + R\cos(\alpha) &= -2a\sin^2(\omega t) \\ y_c + R\sin(\alpha) &= -2a\sin(\omega t)\cos(\omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_c + R\cos(\alpha) &= -2a\left(\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right) \\ y_c + R\sin(\alpha) &= a\sin(2\omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_c + R\cos(\alpha) &= -2a + a\cos(2\omega t) \\ y_c + R\sin(\alpha) &= 0 + a\sin(2\omega t)\end{aligned}$$

$$x_c = -2a, y_c = 0, R = a, \alpha = 2\omega t$$

La voiture décrit un cercle de centre  $(-2a, 0)$  et de rayon  $a$ .

**Q6**

La période  $T$  est  $\frac{\omega}{\pi}$ .

**Q7**

$t$	$x_c$	$y_c$
0	$-2a + a\cos(2\omega * 0) = -a = -1$	$0 + a\sin(2\omega * 0) = 0$
$\frac{\pi}{4\omega}$	$-2a + a\cos(2\omega \frac{\pi}{4\omega}) = -2a = -2$	$0 + a\sin(2\omega \frac{\pi}{4\omega}) = a = 1$
$\frac{\pi}{2\omega}$	$-2a + a\cos(2\omega \frac{\pi}{2\omega}) = -3a = -3$	$0 + a\sin(2\omega \frac{\pi}{2\omega}) = 0$