Exercice 17

Une suite rélle u_n converge vers le réel l si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon \implies |u_n - l| < \epsilon \text{ [P1]}$$

Une suite rélle u_n diverge vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_A \implies U_A \geq A \text{ [P2]}$$

Une suite rélle u_n diverge vers $-\infty$ si

$$\forall B \in \mathbb{R} \exists N_B \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_B \implies U_B \leq B \text{ [P3]}$$

Exercice 17.1

Supposons que $l = 2$.
Prenons un $\epsilon > 0$, trouvons un N_ϵ tel que $|u_{N_\epsilon} - 2| < \epsilon$. Par exemple, $N_\epsilon = 4$, car $|u_4 - 2| = |2 - 2| = 0 < \epsilon$.
Maintenant, vérifions [P1] pour $l = 2$. $\forall \epsilon > 0, \forall n > 4, |u_n - 2| < \epsilon$, calculons $u_{n>4} = 2 = u_4$, la propriété [P1] est vérifée pour tous les $n > N_\epsilon$.

Exercice 17.2

- $a = 1$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$
- $|a| < 1$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
- $a \leq -1$, pas de limite
- $a \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

Pour le second cas, posons $l = 0$, trouvons un N_ϵ tel que $|u_{N_\epsilon} - 0| < \epsilon$. Par exemple, $N_\epsilon, |a^{N_\epsilon}| < \epsilon$. N_ϵ existe car $|a| < 1$. On a bien $|u_{N_\epsilon} - 0| = |a^{N_\epsilon}| < \epsilon$.
Maintenant, vérifions [P1] pour $l = 0$. $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, |u_{N_\epsilon} - 0| < \epsilon$. Calculons $u_{N_\epsilon+1} = a^{N_\epsilon+1} < a^{N_\epsilon}$, la propriété [P1] est vérifée pour tous les $n > N_\epsilon$.
Même raisonnement pour les autres cas.

Exercice 17.3

La suite diverge. Prenons un A, et calculons N_A tel que $u_{N_A} > A$. Calculons u_{N_A+1}.
$u_{N_A+1} = \frac{(N_A+1)^{N_A+1}}{(N_A+1)!} = \frac{(N_A+1).....(N_A+1).(N_A+1)}{N_A!(N_A+1)} = \frac{(N_A+1).....(N_A+1)}{N_A!}$, Les nombres au numérateur sont toujours plus grand que ceux du numérateur pour u_{N_A}, donc la suite $u_{N_A+1} > u_{N_A} > A$.
La propriété $[P2]$ est vérifiée.

La suite diverge. Prenons un A, et calculons N_A tel que $u_{N_A} > A$. Calculons u_{N_A+1}.
$u_{N_A+1} = \frac{(N_A+1)!}{2^{N_A+1}} = \frac{N_A!(N_A+1)}{2.2.2.....2} = U_{N_A}.\frac{(N_A+1)}{2}$. Donc la suite $u_{N_A+1} > u_{N_A} > A$.
La propriété $[P2]$ est vérifiée.

Exercice 18

On a $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon \implies |u_n - l| < \epsilon$

Exercice 39

Exercice 39.1

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$$

Exercice 39.2

$$\lim_{n\to+\infty} v_{4n} = \sin(4n\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{4n+1} = \sin((4n+1)\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_{4n+2} = \sin((4n+2)\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{4n+3} = \sin((4n+3)\frac{\pi}{2}) = -1$$

Exercice 39.3

$$\lim_{n\to+\infty} w_{6n} = \sin(6n\frac{\pi}{3}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} w_{6n+1} = \sin((6n+1)\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} w_{6n+2} = \sin((6n+2)\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} w_{6n+3} = \sin((6n+3)\frac{\pi}{3}) = -1$$

$$\lim_{n\to+\infty} w_{6n+4} = \sin((6n+4)\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} w_{6n+5} = \sin((6n+5)\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 39.4

$$\lim_{n\to+\infty} x_{4n} = \sin^{4n}(4n\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_{4n+1} = \sin^{4n+1}((4n+1)\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_{4n+2} = \sin^{4n+2}((4n+2)\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_{4n+3} = \sin^{4n+3}((4n+3)\frac{\pi}{2}) = -1$$

Exercice 39.5

$$\lim_{n\to+\infty} x_{4n} = |\sin(4n\frac{\pi}{2})|^{\frac{4n}{2}} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_{4n+1} = |\sin((4n+1)\frac{\pi}{2})|^{\frac{4n+1}{2}} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_{4n+2} = |\sin((4n+2)\frac{\pi}{2})|^{\frac{4n+2}{2}} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_{4n+3} = |\sin((4n+3)\frac{\pi}{2})|^{\frac{4n+3}{2}} = 1$$

Exercice 39.6

$$\lim_{n\to+\infty} v_{4n} = 4n\sin(4n\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{4n+1} = (4n+1)\sin((4n+1)\frac{\pi}{2}) = 4n+1$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_{4n+2} = \sin((4n+2)\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{4n+3} = (4n+3)\sin((4n+3)\frac{\pi}{2}) = -4n-3$$

Exercice 40

Exercice 40.1

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 2n+1 = +\infty$$

Exercice 40.2

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \frac{2n+4}{2^{2n}} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \frac{2n+7}{e^{2n+1}} = 0$$

Exercice 40.3

Valeur $a = 0$, u_{2n} n'est pas définie.

Valeur $|a| < 1$, u_{2n}

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \frac{2n+4}{a^{2n}} = +\infty$$

Valeur $|a| = 1$, u_{2n}

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \frac{2n+4}{1^{2n}} = 2n+4$$

Valeur $|a| > 1$, u_{2n}

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \frac{2n+4}{a^{2n}} = 0$$

Et

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 2n+1 = +\infty$$

Exercice 40.4

$$\lim_{n\to+\infty} u_{3n} = \frac{3n+4}{3n} = 1 + \frac{4}{3n} = 1$$

Et

$$\lim_{n\to+\infty} u_{3n+1} = 3$$

Et

$$\lim_{n\to+\infty} u_{3n+2} = \frac{(3n+2)^2+1}{3n^2} = \frac{9n^2+12n+5}{3n^2} = 3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{3n^2} = 3$$

Exercice 51

Exercice 51.1

$$\lim_{x\to 1} x^2+1 = \lim_{x\to 0}(x+1)^2+1 = \lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{x\to 0} 2x + \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} 1 = 0+0+1+1 = 2$$

Exercice 51.2

$$\lim_{x\to+\infty} -x-\ln(x) = -\lim_{x\to+\infty} x - \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = -\infty-\infty = -\infty$$

Exercice 51.3

$$\lim_{x\to+\infty} x-\ln(x) = x.(1-\frac{\ln(x)}{x}) = \lim_{x\to+\infty} x. \lim_{x\to+\infty}(1-\frac{\ln(x)}{x}) = +\infty.(1-0) = +\infty$$

Car $\ln(x) << x$.

Exercice 51.4

Changement de variable $y = x-1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} + \ln(x-1) = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y+1-1} + \ln(y+1-1) = \lim_{y\to 0^+} \frac{1+y\ln(y)}{y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y}. \lim_{y\to 0^+}(1+y\ln(y))$$

$$= \frac{1}{0^+}.(1+0) = +\infty$$

Voir exercice 17.

Exercice 51.5

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 - x = \lim_{x\to-\infty} x(x-1) = \lim_{x\to-\infty} x. \lim_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty. -\infty = +\infty$$

Exercice 52

On a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, calculons $\lim_{x\to 0}\cos(x)$.
En utilisant la règle de l'Hospital, on a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin'(x)}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = \lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$.

Exercice 52.1

Changement de variable $y = x - \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos(y+\frac{\pi}{2})}{y} = \lim_{y\to 0} -\frac{\sin(y)}{y} = -1$$

Exercice 52.2

On a $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}. \lim_{x\to 0}\frac{1}{cos(x)} = 1.\frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0} cosx} = 1.1 = 1$$

Exercice 52.3

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-(\cos^2(x)+\sin^2(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\cos^2(x)}{x^2} - \frac{\sin^2(x))}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\cos^2(x)}{x^2}\right) - \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\cos^2(x)}{x^2}\right) - \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}. \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{x^2}(1-\cos(x)\right) - 1$$

Exercice 53

Exercice 53.1

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 53.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 53.3

Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$. 2 cas $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$ et $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$$

Exercice 53.4

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\tan(5x)}$$

Utilisation des développements limités de $sin(x)$ et $\tan(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x - \frac{(4x)^3}{3!} + \frac{(4x)^5}{5!} + \epsilon(x)}{5x + \frac{(5x)^3}{3} + \frac{2(5x)^5}{15} + \epsilon(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4 - \frac{(4x)^2}{3!} + \frac{(4x)^4}{5!} + \epsilon(x)}{5 + \frac{(5x)^2}{3} + \frac{(25x)^4}{15} + \epsilon(x)} = \frac{\lim_{x\to 0} 4 - \frac{(4x)^2}{3!} + \frac{(4x)^4}{5!} + \epsilon(x)}{\lim_{x\to 0} 5 - \frac{(5x)^2}{3} + \frac{(25x)^4}{15} + \epsilon(x)} = \frac{4}{5}$$

Exercice 53.5

Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{|\sin(4x)|}{\tan(5x)}$. 2 cas $\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin(4x)|}{\tan(5x)}$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{|\sin(4x)|}{\tan(5x)}$ Utilisation des développements limités de $sin(x)$ et $\tan(x)$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|4x - \frac{(4x)^3}{3!} + \frac{(4x)^5}{5!} + \epsilon(x)|}{5x + \frac{(5x)^3}{3} + \frac{2(5x)^5}{15} + \epsilon(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4 - \frac{(4x)^2}{3!} + \frac{(4x)^4}{5!} + \epsilon(x)}{5 + \frac{(5x)^2}{3} + \frac{(25x)^4}{15} + \epsilon(x)} = \frac{\lim_{x\to 0} 4 - \frac{(4x)^2}{3!} + \frac{(4x)^4}{5!} + \epsilon(x)}{\lim_{x\to 0} 5 - \frac{(5x)^2}{3} + \frac{(25x)^4}{15} + \epsilon(x)} = \frac{4}{5}$$

On sait que la fonction sin est impaire donc $\sin(-x) = -\sin(x)$.

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|4x - \frac{(4x)^3}{3!} + \frac{(4x)^5}{5!} + \epsilon(x)|}{5x + \frac{(5x)^3}{3} + \frac{2(5x)^5}{15} + \epsilon(x)} = \frac{-4x + \frac{(4x)^3}{3!} - \frac{(4x)^5}{5!} + \epsilon(x)}{5x + \frac{(5x)^3}{3} + \frac{2(5x)^5}{15} + \epsilon(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-4 + \frac{(4x)^2}{3!} - \frac{(4x)^4}{5!} + \epsilon(x)}{5 + \frac{(5x)^2}{3} + \frac{(25x)^4}{15} + \epsilon(x)} = -\frac{4}{5}$$

Exercice 53.6

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{2})}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{x} = -1$$

Exercice 54

Exercice 54.1.1

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{-4x^3 + 3x + 1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2 - 3x^{-1} + x^{-3}}{-4 + 3x^{-2} + x^{-3}} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 54.1.2

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{-4x^3 + 3x + 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 1}{-4(x+1)^3 + 3(x+1) + 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + 3x^2}{-4x^3 - 12x^2 - 9x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + 3x}{-4x^2 - 12x - 9} = \frac{\lim_{x\to 0} 2x^2 + 3x}{\lim_{x\to 0} -4x^2 - 12x - 9} = \frac{0}{9} = 0$$

Exercice 54.2

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x+3}{3x^4 + 2} e^x =$$

Calculons

$$\lim_{x\to +\infty} ln\left(\frac{2x+3}{3x^4+2} e^x\right) = \lim_{x\to +\infty} ln\left(\frac{2x+3}{3x^4+2}\right) + ln(e^x) = \lim_{x\to +\infty} ln\left(\frac{2x^{-3} + 3x^{-4}}{3 + 2x{-4}}\right) + x$$

$$= \ln(\lim_{x\to +\infty} 2x^{-3} + 3x^{-4}) - \ln(\lim_{x\to +\infty} 3 + 2x^{-4}) + \lim_{x\to +\infty} x =$$

$$= \ln(\lim_{x\to +\infty} 2x + 3) - \ln(\lim_{x\to +\infty} x^4) - \ln(3) + \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

Exercice 54.3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{3x^4+2}e^{\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{3x^4+2}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x}{3x^4+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{-2}+3x^{-3}}{3+2x^{-4}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}2x^{-2}+3x^{-3}}{\lim_{x\to+\infty}3+2x^{-4}}=\frac{0}{3}=0$$

Exercice 54.4

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^4-2x^2)e^x$$

Calculons

$$\lim_{x\to+\infty}ln((3x^4-2x^2)e^x)=\lim_{x\to+\infty}ln(3x^4-2x^2)+\ln(e^x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2(3x^2-2))+x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2)+\ln(3x^2-2)+x=\infty+\infty+\infty=\infty$$

Exercice 55

Exercice 55.1

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos(x))}{\sin^2(x)}=\frac{\lim_{x\to0}\ln(\cos(x))}{\lim_{x\to0}sin^2(x)}=\frac{\ln(1)}{0+}=+\infty$$

Exercice 55.2

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln((x^{-1}+2)x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln((x^{-1}+2)+\ln(x)}{\ln(1+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln((x^{-1}+2)}{\ln(1+x)}+\frac{\ln(x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2)}{\ln(1+x)}+\frac{\ln(x)}{\ln(1+x)}=1$$

car a l'infini $x\approx1+x$.

Exercice 55.3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(}\ln(1+e^x))}{x^2}$$

On a l'infini $1+e^x\approx e^x$, donc $ln(1+e^x)\approx ln(e^x)=x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\ln(1+e^x)}}{x^2}\approx\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2}=0$$

Exercice 55.4

$$\lim_{x\to-\infty}\sin(x)\sin(\frac{1}{x^2})=\lim_{x\to-\infty}\sin(x).\lim_{x\to-\infty}\sin(\frac{1}{x^2})=[-1;1].0=0$$

Exercice 57

Exercice 57.1

$D_a=\mathbb{R}\setminus\{x^2+x-2=0\}$, $x^2+x-2=0$, donne $x_1=1$ et $x_2=-2$. Donc $a(x)=\frac{2(x+2)}{(x+2)(x-1}=\frac{2}{x-1}$. On a $D_a=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
$D_b=\mathbb{R}\setminus\{x^4+2x^2+1=0\}$, $x^4+2x^2+1=0$, n'a pas de racine car tout les membres sont positifs. Donc $D_b=\mathbb{R}$.

Exercice 57.2

$$a(x) = \frac{2}{3} + \epsilon_1(x-4)$$

$$\epsilon_1(x-4) = a(x) - \frac{2}{3} = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{3} = \frac{6-2x+2}{3(x-1)} = \frac{-2(x-4)}{3(x-1)}$$

$$\epsilon_1(X) = \frac{-2X}{3(X+3)}$$

$$a(x) = -\frac{2}{5} + \epsilon_2(x-4)$$

$$\epsilon_2(x+4) = a(x) + \frac{2}{5} = \frac{2}{x-1} + \frac{2}{5} = \frac{10+2x-2}{5(x-1)} = \frac{2(x+4)}{5(x-1)}$$

$$\epsilon_2(X) = \frac{2X}{5(X-5)}$$

On a $\epsilon_1(X) \neq \epsilon_2(X)$.

Exercice 57.3

La fonction $b(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée et un point x_0 est

$$b'(x_0) = \frac{b(x_0+h) - b(x_0)}{h}$$

$$b(x_0+h) = f(x_0) + hb'(x_o) = \frac{x_0-1}{x_0^4+2x_0^2+1} + hb'(x_0) = \frac{x_0-1}{x_0^4+2x_0^2+1} + \epsilon_0(h))$$

Donc $\epsilon_0(h) = hb'(x_0)$.

Exercice 60

Exercice 60.1

La fonction $f : x \to x^2$ est continue est en $x_0 = 1$ si $\lim_{x\to 1, x\neq 1} x^2 = f(1) = 1$. Calculons la limite $\lim_{x\to 1, x\neq 1} x^2$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1-\eta, 1+\eta[\setminus\{1\}, |f(x) - l| < \epsilon)$$

Prenons $l = 1$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1-\eta, 1+\eta[\setminus\{1\}, |f(x) - l| < \epsilon)$$

Cas x $]1, 1+\epsilon[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1+\eta[\setminus\{1\}, |(1+\eta)^2 - l| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1+\eta[\setminus\{1\}, |2\eta + \eta^2| < \epsilon)$$

Cas x $]1-\epsilon, 1[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1+\eta[\setminus\{1\}, |(1-\eta)^2 - l| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1+\eta[\setminus\{1\}, |-2\eta + \eta^2| < \epsilon)$$

Dans les 2 cas, η existe (par exemple $\eta = \frac{\epsilon}{10}$). Donc la fonction $f(x) = x^2$ est continue en $x_0 = 1$.

Prenons $x_0 \in \mathbb{R}$, on fait la même démonstration mais avec une limite $l = x_0^2$.
Cas x $]x_0, x_0+\epsilon[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0+\eta[\setminus\{1\}, |(x_0+\eta)^2 - x_0^2| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0+\eta[\setminus\{1\}, |2x_0\eta + \eta^2| < \epsilon)$$

Cas x $]x_0 - \epsilon, x_0[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\setminus\{1\}, |(x_0 - \eta)^2 - x_0^2| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\setminus\{1\}, |-2x_0\eta + \eta^2| < \epsilon)$$

Dans les 2 cas, η existe (par exemple $\eta = \frac{\epsilon}{x_0^2}$). Donc la fonction $f(x) = x^2$ est continue en x_0 donc en tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 60.2

La fonction $f : x \to x^3$ est continue est en $x_0 = 1$ si $\lim\limits_{x\to 1, x\neq 1} x^3 = f(1) = 1$. Calculons la limite $\lim\limits_{x\to 1, x\neq 1} x^3$.
Cas x $]1, 1 + \epsilon[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1 + \eta[\setminus\{1\}, |(1 + \eta)^3 - l| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1 + \eta[\setminus\{1\}, |3\eta + 3\eta^2 + \eta^3| < \epsilon)$$

Cas x $]1 - \epsilon, 1[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1 + \eta[\setminus\{1\}, |(1 - \eta)^3 - l| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]1, 1 + \eta[\setminus\{1\}, |-3\eta + 3\eta^2 - \eta^3| < \epsilon)$$

Dans les 2 cas, η existe (par exemple $\eta = \frac{\epsilon}{10}$). Donc la fonction $f(x) = x^3$ est continue en $x_0 = 1$.

Prenons $x_0 \in \mathbb{R}$, on fait la même démonstration mais avec une limite $l = x_0^3$.
Cas x $]x_0, x_0 + \epsilon[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\setminus\{1\}, |(x_0 + \eta)^3 - x_0^3| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\setminus\{1\}, |2x_0\eta + \eta^2| < \epsilon)$$

Cas x $]x_0 - \epsilon, x_0[$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\setminus\{1\}, |(x_0 - \eta)^3 - x_0^3| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } (\forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\setminus\{1\}, |-2x_0\eta + \eta^2| < \epsilon)$$

Dans les 2 cas, η existe (par exemple $\eta = \frac{\epsilon}{x_0^3}$). Donc la fonction $f(x) = x^3$ est continue en x_0 donc en tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour $f(x) = x^n$, il faut généraliser avec $(x_0 - \eta)^n$ et prendre $\eta = \frac{\epsilon}{x_0^n}$.

Exercice 62

Exercice 62.1

Continuité de $\sqrt{x^3 - 3}$. La fonction est définie lorsque $x^3 - 3 \geq 0$, donc $x \geq \sqrt[3]{3}$. La fonction est une combinaison de fonctions continues sur leur domaines de définition, donc la fonction est continue sur $]\sqrt[3]{3}, +\infty[$.

Exercice 62.2

Continuité de $\ln((x-1)^2(x+2)^4)$. La fonction est définie lorsque $(x-1)^2(x+2)^4 > 0$. On a $(x-1)^2 \geq 0$ et $(x+2)^4 \geq 0$. On a $(x-1)^2 > 0$ lorsque $x \neq 1$ et $(x+2)^4 > 0$ lorsque $x \neq -2$. Donc le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Calculons la continuité en $x_0 = 1$.

$$lim_{x\to 1, x\neq 1}(x-1)^2(x+2)^4 = 0.3^4 = 0$$

$$lim_{x\to 1, x\neq 1} ln((x-1)^2(x+2)^4) = -\infty$$

Donc la fonction n'est pas continue.

Exercice 62.3

Continuité de $\ln(\sqrt{x^2+1}-2)$. La fonction est définie lorsque $\sqrt{x^2+1}-2>0$ donc $\sqrt{x^2+1}>2$, $|x^2+1|>4$, $x^2>3$ et $x>\sqrt{3}$. La fonction est définie sur $]\sqrt{3},+\infty[$. La fonction est une combinaison de fonctions continues sur leurs domaines de définition, donc la fonction est continue sur $]\sqrt{3},+\infty[$.

Exercice 62.4

Continuité de $\ln||x-1|+1|$. La fonction est définie lorsque $||x-1|+1|>0$. On a $|x-1|\geq 0$, donc $||x-1|+1| = |x-1|+1$. 2 cas:

- $x<1$, $\lim_{x\to 1^-}\ln(|x-1|+1) = \lim_{x\to 1^-}\ln(2-x) = \ln(1) = 0$
- $x>1$, $\lim_{x\to 1^+}\ln(|x-1|+1) = \lim_{x\to 1^+}\ln(x) = \ln(1) = 0$

On a $\lim_{x\to 1, x\neq 1}\ln||x-1|+1| = 0 = \ln||x-1|+1| = \ln(1)$.

La fonction est une combinaison de fonctions continues sur les domaines $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$ et continue par prolongement en 1. Donc la fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 62.5

Continuité de $\ln||x+1|-1|$. La fonction est définie lorsque $||x+1|-1|>0$.
$||x+1|-1| = |x+1|-1$ lorsque $|x+1|>1$ et $||x+1|-1| = 1-|x+1|$ lorsque $|x+1|<1$.

- $|x+1|>1$, lorsque $x>0$ et $x<-2$
- $|x+1|<1$, lorsque $-2<x<0$.

Le domaine de définition est $\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$.
Il faut vérifier la continuité aux points -2 et 0.

On a $\lim_{x\to 0}\ln||x+1|-1| = \lim_{x\to 0}\ln 0 = -\infty$, donc la fonction n'est pas continue.

Exercice 62.6

Continuité de $\ln||x-1|-1|$. La fonction est définie lorsque $||x-1|-1|>0$.
$||x-1|-1| = |x-1|-1$ lorsque $|x-1|>1$ et $||x-1|-1| = 1-|x-1|$ lorsque $|x-1|<1$.

- $|x-1|>1$, lorsque $x<0$ et $x>2$
- $|x-1|<1$, lorsque $0<x<2$.

Le domaine de définition est $\mathbb{R}\setminus\{2,0\}$.
Il faut vérifier la continuité aux points 2 et 0.

On a $\lim_{x\to 0}\ln||x-1|-1| = \lim_{x\to 0}\ln 0 = -\infty$, donc la fonction n'est pas continue.

Exercice 62.7

Continuité de $\ln|\sqrt{x-1}+1|$. La fonction est définie lorsque $|\sqrt{x-1}+1|>0$ pour le ln ceci est vrai car $\sqrt{x-1}>0$ et lorsque $x-1>0$ pour la racine carré. Donc la fonction est définie sur $]1,+\infty[$.
La fonction est une combinaison de fonctions continues sur le domaine $]1,+\infty[$, donc la fonction est continue sur $]1,+\infty[$.

Exercice 62.8

Continuité de $\ln|\sqrt{x-1}-1|$. La fonction est définie lorsque $|\sqrt{x-1}-1|>0$ pour le ln et lorsque $x-1>0$ pour la racine carré.
Donc $x>1$.

$|\sqrt{x-1}-1|=\sqrt{x-1}-1$ lorsque $\sqrt{x-1}-1>0$ et $|\sqrt{x-1}-1|=1-\sqrt{x-1}$ lorsque $\sqrt{x-1}-1<0$

- $\sqrt{x-1}-1>0$, $\sqrt{x-1}>1$, $|x-1|>1$ toujours vrai pour $x>2$,
- $1-\sqrt{x-1}>0$, $1>\sqrt{x-1}$, $1>|x-1|$ impossible lorsque $x<2$.

La fonction est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Calculons la continuité en $x_0=2$, $\lim_{x\to 2, x\neq 2}\ln|\sqrt{x-1}-1|$
$\lim_{x\to 2, x\neq 2}|\sqrt{x-1}-1|=|\sqrt{\lim_{x\to 2, x\neq 2} x-1}-1|=|0|=0$
Donc $\lim_{x\to 2, x\neq 2}\ln|\sqrt{x-1}-1|=-\infty$. La fonction n'est pas continue en 2.

Exercice 62.9

Continuité de $\sqrt{\ln(x+1)-1}$. La fonction est définie lorsque $\ln(x+1)-1>0$ pour la racine carré et $x+1>0$ pour le ln.
Donc $x>-1$ et $\ln(x+1)>1$, donc $e^{\ln(x+1)}>e^1$, donc $x>e-1$.

Le domaine de définition de la fonction est $]e-1,+\infty[$. La fonction est un assemblage de fonction continue sur leurs domaines de définition. Donc la fonction est continue sur $]e-1,+\infty[$.

Exercice 64

Exercice 64.1

$$f\circ g(x)=f(g(x))=\begin{cases}\frac{(x-1)+|x-1|}{2} & x<0\\ \frac{x^2+|x^2|}{2} & x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & x\geq 0\end{cases}$$

$f\circ g$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $lim_{x\to 0, x\neq 0} f\circ g(x)=0$.

Exercice 64.2

$$g\circ f(x)=g(f(x))=\begin{cases}\frac{x+|x|}{2}-1 & \frac{x+|x|}{2}<0\\ \left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 & \frac{x+|x|}{2}\geq 0\end{cases}$$

On a $\frac{x+|x|}{2}\geq 0$, $x+|x|\geq 0$. 2 cas $x\geq 0$, $x+x\geq 0$ donc $x\geq 0$ et $x<0$, $x+(-x)\geq 0$ toujours vrai. Donc $\frac{x+|x|}{2}\geq 0$ quand $x\geq 0$

On a $\frac{x+|x|}{2}<0$, $x+|x|<0$. 2 cas $x\neq 0$, $x+x<0$ impossible et $x<0$, $x+(-x)<0$ impossible. Donc $\frac{x+|x|}{2}<0$ impossible.
$g\circ f(x)=g(f(x))=\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2=x^2$ pour $x\in[0,+\infty[$.

Exercice 65

Exercice 65.1

Calculons

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} 4x-\frac{\sqrt{9x^2}}{x}=\lim_{x\to 0, x\neq 0} 4x-\frac{3|x|}{x}$$

Calcul des limites à droite et à gauche

$$\lim_{x\to 0^+, x\neq 0} 4x-\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+, x\neq 0} 4x-\frac{3x}{x}=\lim_{x\to 0^+, x\neq 0} 4x-3=-3$$

$$\lim_{x\to 0^-, x\neq 0} 4x - \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+, x\neq 0} 4x + \frac{3x}{x} = \lim_{x\to 0^+, x\neq 0} 4x + 3 = 3$$

Pas de limite en 0, la fonction $f_1(x)$ ne peux pas être prolongée en 0.

Exercice 65.2

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \sin(x)\ln(|x|)$$

Calcul des limites à droite et à gauche (L'Hospital rule)

$$\lim_{x\to 0^+, x\neq 0} \sin(x)\ln(|x|) = \lim_{x\to 0^+, x\neq 0} \sin(x)\ln(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-, x\neq 0} \sin(x)\ln(|x|) = \lim_{x\to 0^-, x\neq 0} \sin(x)\ln(-x) = 0$$

La fontion $f_2(x)$ peut être prolongée en 0.

$$f_{2p} = \begin{cases} f_2(x) & \mathbb{R}^* \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Exercice 65.3

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} 1 + \frac{e^x}{x}$$

Calcul des limites à droite et à gauche (L'Hospital rule)

$$\lim_{x\to 0^+, x\neq 0} 1 + \frac{e^x}{x} = 1 + \frac{\lim_{x\to 0^+, x\neq 0} e^x}{\lim_{x\to 0^+, x\neq 0} x} = 1 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-, x\neq 0} 1 + \frac{e^x}{x} = 1 + \frac{\lim_{x\to 0^-, x\neq 0} e^x}{\lim_{x\to 0^-, x\neq 0} x} = 1 + \frac{1}{0^-} = -\infty$$

La fonction diverge en 0 donc pas de prologement possible.

Exercice 65.4

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{(1+x^3)-1}{x} = \lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0, x\neq 0} x^2 = 0$$

On a

$$f_{4p} = \begin{cases} f_4(x) & \mathbb{R}^* \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Je pense qu'il voulait plutôt

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{(1+x)^3-1}{x} = \lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{x^3+3x^2+3x}{x} = \lim_{x\to 0, x\neq 0} x^2+3x+3 = 3$$

On a

$$f_{4p} = \begin{cases} f_4(x) & \mathbb{R}^* \\ 3 & x = 0 \end{cases}$$

Exercice 69

Exercice 69.1

$x^7 - x^2 + 1 = 0$ sur $I = [-2, 0]$. La fonction est continue car assemblage de fonction continue sur le domaine I. On a $(-2)^7 - (-2)^2 + 1 < 0$ et $(0)^7 - (0)^2 + 1 > 0$. Selon the théorème des valeurs intermédiaires, il existe un c tel que $c^7 - c^2 + 1 = 0$.

Exercice 69.2

Il faut trouver 2 valeurs x_1 et x_2 tel que $f(x_1) > 2$ et $f(x_2) < 2$ et appliquer ensuite le théorème des valeurs intermédiaires.

On a $f(0) = 1$, donc prenons $x_2 = 0$. On a $f(-3) = \sqrt[3]{10} + 6 > 2$, prenons $x_1 = 3$. D'après TVI, il existe un $-3 < c < 0$ tel que $f(c) = 2$.

Exercice 69.3

$\tan x - \frac{2}{3}x = 0$ sur $I =]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}[$.

Faisons le tableau de variation de $f(x)$ sur I. La dérivée est $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{3}$. Sur l'intervalle I on a $f'(x) > 0$. donc la fonction $f(x)$ est croissante sur I et $f(\frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{6} > 0$. Donc il n'existe pas de $c \in I$tel que $f(c) = 0$.

Exercice 76

Prenons un $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x)$ est dérivable en x_0 si $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite lorsque $h \to 0, h \neq 0$.

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{0}{h} = 0$$

Exercice 77

Prenons un $x_0 \in \mathbb{R}^+$, la fonction $f(x)$ est dérivable en x_0 si $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite lorsque $h \to 0, h \neq 0$.

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{h}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

La fonction n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{h\to 0^-, h\neq 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$ n'existe pas.

Exercice 79

Exercice 79.1

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{x est rationnel} \\ 0 & \text{x est irrationnel} \end{cases}$$

La fonction n'est pas dérivable et est continue en 0.

Exercice 79.2

$$f'(x) = \begin{cases} \lim_{h\to 0, h\neq 0} 2x + h & \text{x est rationnel} \\ 0 & \text{x est irrationnel} \end{cases}$$

Pour $x = 0$, on a

$$f'(0) = \begin{cases} \lim_{h\to 0, h\neq 0} 2.0 + h = 0 & \text{x est rationnel} \\ 0 & \text{x est irrationnel} \end{cases}$$

La fonction est dérivable en $x = 0$.

Exercice 80

La fonction est continue en $x=0$, si $\lim_{x\to 0^-} a+bx-x^2 = \lim_{x\to 0^+} 1-\frac{1}{1+x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} 1-\frac{1}{1+x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} a+bx-x^2 = a + \lim_{x\to 0^-} x(b-x) = 0$$

Il faut $a=0$ et b quelconque.

La fonction est dérivable en $x=0$, si $(a+bx-x^2)' = \left(1-\frac{1}{1+x}\right)'$.

$$(a+bx-x^2)' = b-2x$$

$$\left(1-\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$$

En $x=0$, $b=1$ et a quelconque.

Exercice 81

Exercice 81.1

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & x \in\in]0,+\infty[\\ \lim_{x\to 0^+, x\neq 0} e^{\frac{1}{x^2}} & x=0 \end{cases}$$

Calculons $\lim_{x\to 0, x\neq 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{\lim_{x\to 0, x\neq 0} x^2}} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$.

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & x \in\in]0,+\infty[\\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Exercice 81.2

La fonction $g(x)=\sin(\sqrt{x})$ est définie sur $x\geq 0$. Calculons $\lim_{x\to 0^+, x\neq 0}, \sin(x) = \sin(\sqrt{\lim_{x\to 0^+, x\neq 0} x}) = \sin(\sqrt{0^+}) = 0$.

$$g_p(x) = \begin{cases} g(x) & x \in]0,+\infty[\\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Exercice 81.3

La fonction $h(x)=\cos(\sqrt{x})$ est définie sur $x\geq 0$. Calculons $\lim_{x\to 0^+, x\neq 0}, \cos(x) = \cos(\sqrt{\lim_{x\to 0^+, x\neq 0} x}) = \cos(\sqrt{0^+}) = 1$.

$$h_p(x) = \begin{cases} h(x) & x \in]0,+\infty[\\ 1 & x=0 \end{cases}$$

Exercice 83

Exercice 83.1

$$DL_1(0)\sqrt{1+x} = 1+\frac{x^2}{2} \text{ et } DL_1(0)\cos x = 1-\frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha\sqrt{1+x}+\beta\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha(1+\frac{x^2}{2})+\beta(1-\frac{x^2}{2})}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha+\beta)}{x} + \frac{x(\alpha-\beta)}{2}$$

- $\alpha = -\beta$, la limite est égale à 0
- $\alpha + \beta > 0$, la limite est égale à $+\infty$
- $\alpha + \beta < 0$, la limite est égale à $-\infty$

Exercice 83.2

$$DL_1(1)\ln^2 x = DL_1(0)\ln^2(x+1) = (x+1)^2 \text{ et } DL_1(1)\cos(x^2) = DL_1(0)\cos((x+1)^2) = 1 - \frac{(x+1)^4}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln^2(x) + \alpha\cos(x^2)}{x-1} = \lim_{X\to 0} \frac{\ln^2(X+1) + \alpha\cos((X+1)^2)}{X} = \lim_{X\to 0} \frac{(X+1)^2 + \alpha(1 - \frac{(X+1)^4}{2})}{X}$$
$$=$$

Exercice 85

Exercice 85.1

Le domaine de définition de $f_1(x)$ est $\mathbb{R}$, la dérivée $f'(x) = 2x + 11x^{10} + 101x^{100}$. Le domaine de définition de $f_1'(x)$ est $\mathbb{R}$

Exercice 85.5

La fonction $f_5(x)$ est définie lorsque $x > 0$ pour ln, $x - 1 \geq 0$ pour la racine carré et $\sqrt{x-1} \neq 0$ pour la division. Donc $x > 0$, $x \geq 1$ et $x \neq 1$ donc $x > 1$.

Prenons $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \sqrt{x-1}$. $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$
$f_5'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x-1}}{x} - \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{1}{x\sqrt{x-1}} - \frac{\ln(x)}{2(x-1)^{\frac{2}{3}}}$.

Domaine de définition de $f_5'(x)$ est $x \neq 0$ et $\sqrt{x-1} \neq 0$ pour la division, $x - 1 \geq 0$ pour la racine carré, $x > 0$ pour la ln et $(x-1)^{\frac{2}{3}}$ pour la seconde division. Donc, $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \geq 1$ et $x > 0$ donc $x > 1$.

Exercice 85.16

$f_{16} = \ln\ln\ln x$, il faut $\ln\ln x > 0$ Donc, $ln(x) > 1$, donc $x > e$. Le domaine de définition est $]e, +\infty[$.

$$f_{16}' = \frac{d}{dx}\ln\ln\ln x = \frac{1}{\ln\ln x}\frac{d}{dx}(\ln\ln x) = \frac{\frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)}{\ln\ln x} = \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$$

Le domaine de définition de $f_{16}'(x)$ est $x \neq 0$, $\ln x \neq 0$ et $\ln\ln x \neq 0$ pour la division, $x > 0$ pour le $\ln x$ et $\ln x > 0$ pour le $\ln\ln x$. Donc $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq e$, $x > 0$, $x > 1$, donc $]1, +\infty[\setminus\{e\}$.

Exercice 85.17

$f_{17}(x) = x|x|$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$$f_17(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0, +\infty[\\ -x^2 & x \in [-\infty, 0[\end{cases}$$

$$f_1'7(x) = \begin{cases} 2x \in [0, +\infty[\\ -2x \in [-\infty, 0[\end{cases} = |2x|$$

$f_{17}'(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 117

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}?$$

Soit $\theta = \arccos(x)$, $x = \cos(\arccos(x)) = \cos(\theta) = \frac{adj}{hyp}$ et $hyp^2 = adj^2 + opp^2$. En prenant la norme $hyp = 1$ on a $x = adj$ et $opp = \sqrt{1-x^2}$.

$$\sin(\arccos(x)) = \sin(\theta) = \frac{opp}{hyp} = opp = \sqrt{1-x^2}$$

Exercice 118

Exercice 118.2

$$\sqrt{3}\cos(3x) + \sin(3x) = 1$$

Posons $3x = u$.

$$\sqrt{3}\cos(u) + \sin(u) = 1$$

$$\sin(u) = 1 - \sqrt{3}\cos(u)$$

$$\sin^2(u) = (1-\sqrt{3}\cos(u))^2 = 1 - 2\sqrt{3}\cos(u) + 3\cos^2(u)$$

$$\cos^2(u) = 1 - \sin^2(x) = 2\sqrt{3}\cos(u) - 3\cos^2(u)$$

$$2\sqrt{3}\cos(u) - 4\cos^2(u) = 0$$

$$\cos(u)(2\sqrt{3} - 4\cos(u)) = 0$$

2 solutions $cos(u) = 0$ et $cos(u) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Donc $u = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ et $u = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$. Et $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ et $x = -\frac{\pi}{18} + 2\pi n$.

Exercice 119

On a

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$\tan(\arctan(1)+\arctan(2)+\arctan(3)) = \frac{\tan(\arctan(1)) + \tan(\arctan(2)+\arctan(3))}{1-\tan(\arctan(1))\tan(\arctan(2)+\arctan(3))} = \frac{1+\tan(\arctan(2)+\arctan(3))}{1-\tan(\arctan(2)+\arctan(3))}$$

$$\tan(\arctan(2)+\arctan(3)) = \frac{\tan(\arctan(2))+\tan(\arctan(3))}{1-\tan(\arctan(2))\tan(\arctan(4))} = \frac{5}{-5} = -1$$

Donc

$$\tan(\arctan(1)+\arctan(2)+\arctan(3)) = \frac{1-1}{1-(-1)} = 0$$

Donc $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$.

Exercice 125

Exercice 125.1

Calculons $f'(x) = 2e^{2x} - 3e^x = e^x(2e^x - 3)$. $f'(x) > 0$ lorsque $e^x > \frac{3}{2}$ ou $x > \ln(\frac{3}{2})$. La function $f(x)$ est continue (assemblage de fonctions continues) et monotone sur $I =]\ln(\frac{3}{2}), +\infty[$. C'est donc une bijection sur I. On a

$$J =]f(\ln(\frac{3}{2})), f(+\infty)[=]e^{2\ln(\frac{3}{2})} - e^{\ln(\frac{3}{2})} - 4, e^{2+\infty} - e^{+\infty} - 4 =]\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 4, +\infty[=] - \frac{13}{4}, +\infty[$$

Exercice 125.2

V'erifions que $f'(x)$ est croissante sur I. Calcul de $f''(x) = 4e^{2x} - 3e^x$ $f''(x) = e^x(4e^x - 3) > 0$, lorsque $4e^x - 3 > 0$, $x > \ln(\frac{3}{4})$. Sur $]f(\ln(\frac{3}{2})), f(+\infty)[$ on a $f''(x)$ positive, donc $f(x)$ est convexe.

Exercice 125.3

$f^{-1}(x)$ est concave sur J si $f(x)$ est convexe et strictement croissante sur I.

Exercice 125.4

La dérivé est nulle en un seul point $\ln(\frac{3}{2}))$ et elle est négative sur $]-\infty, \ln(\frac{3}{2}))[$. Donc $f(x)$ est concave sur I.

Exercice 130

Exercice 130.1

$$\int_0^{\pi/4} \cos(x)\sin^4(x)dx$$

Substitution $u = \sin(x)$, donc $\frac{du}{dx} = \cos(x)$ et $dx = \frac{du}{cos(x)}$.

$$\int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/4)} \cos(x)u^4 \frac{du}{cos(x)} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^4 du = \left[\frac{u^5}{5}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{5}((\frac{\sqrt{2}}{2})^5 - 0) = 0.3535$$

Exercice 130.4

$$\int_0^{\pi/6} \cos^3(x) + \sin^3(x)dx = \int_0^{\pi/6} \cos^3(x) + \int_0^{\pi/6} \sin^3(x)dx$$

Première partie. $\int_0^{\pi/6} \cos^3(x)dx = \int_0^{\pi/6} \cos^2(x)\cos(x)dx = \int_0^{\pi/6} (1 - \sin^2(x))\cos(x)dx$ Substitution $u = \sin(x)$, donc $\frac{du}{dx} = \cos(x)$ et $dx = \frac{du}{\cos(x)}$.

$$\int_0^{\pi/6} (1 - \sin^2(x))\cos(x)dx = \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/6)} (1 - u^2)\cos(x)\frac{du}{\cos(x)} = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 - u^2 = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

Seconde partie. $\int_0^{\pi/6} \sin^3(x)dx = \int_0^{\pi/6} \sin^2(x)\sin(x)dx = \int_0^{\pi/6} (1 - \cos^2(x))\sin(x)dx$ Substitution $u = \cos(x)$, donc $\frac{du}{dx} = -\sin(x)$ et $dx = -\frac{du}{\sin(x)}$.

$$\int_0^{\pi/6} (1 - \cos^2(x))\sin(x)dx = \int_{\cos(0)}^{\cos(\pi/6)} (1 - u^2)\sin(x) - \frac{du}{\sin(x)} = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u^2 - 1 = \left[\frac{u^3}{3} - u\right]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Donc

$$\int_0^{\pi/6} \cos^3(x) + \sin^3(x)dx = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{u^3}{3} - u\right]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Exercice 130.7

$$\int_{1/2}^0 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}dx$$

Substitution $u = 1 - x^2$, donc $\frac{du}{dx} = -2x$ et $dx = -\frac{du}{2x}$

$$\int_{1/2}^0 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \int_{3/4}^1 \frac{x}{\sqrt{u}} - \frac{du}{2x} = \int_{3/4}^1 -\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$= \left[-\frac{1}{2} 2\sqrt(u) \right]_{3/4}^{1} = \left[-\sqrt(u) \right]_{3/4}^{1} = \frac{\sqrt{3}2}{-}1$$

Exercice 130.8

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin(x)]_0^1 = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 130.10

$$\int_{-1}^{2} |x| dx = \int_{-1}^{0} |x| dx + \int_{0}^{2} |x| dx = \int_{-1}^{0} -x dx + \int_{0}^{2} x dx = \left[\frac{-x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0}^{2} = \frac{3}{2}$$

Exercice 133

Exercice 133.1

$$x = -1$$

Exercice 133.2

$$(x+1)(x^2+px+q) = x^3 + (p+1)x^2 + (p+q)x + 5 = x^3 + 3x^2 + 7x + 5$$

Donc $p = 2$ et $q = 5$.

Exercice 133.3

Développer et trouver $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$ et $c = \frac{5}{4}$

Exercice 135

Exercice 135.2

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(2x) dx$$

Par partie; $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, $g'(x) = cos(2)$, $g(x) = \frac{sin(2x)}{2}$. Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(2x) dx = \left[\frac{x \sin(2x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2x)}{2} dx$$

Maintenant substitution $u = 2x$ donc $\frac{du}{dx} = 2$ et $dx = \frac{du}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2x)}{2} dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin(u)}{2} \frac{du}{2} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin(u) du = \frac{1}{4} \left[-\cos(u) \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(2x) dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{3}{8}$$

Exercice 136

Exercice 136.2

$$g(x) = 2x^2 e^{(x^2+1)} = 2ex^3 e^{x^2}$$

Domaine de définition de $g(x)$ est $]-\infty, +\infty[$.
D'abord substitution $u = x^2$, donc $\frac{du}{dx} = 2x$ et $dx = \frac{du}{2x}$

$$\int 2ex^3 e^{x^2} dx = 2e \int x^3 e^{x^2} dx = 2e \int x^3 e^u \frac{du}{2x} = e \int x^2 e^u du = e \int ue^u du$$

Par partie avec $f = u$, $f' = 1$, $g' = e^u$, $g = e^u$,

$$\int ue^u du = ue^u - \int e^u du = ue^u - e^u = e^{x^2}(x^2 - 1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2ex^3 e^{x^2} dx = e \left[(e^{x^2}(x^2 - 1)) \right]_{-\infty}^{+\infty} = e.0 = 0$$

Exercice 143

$$\int_{-1}^{1} \arctan(\frac{1 + cos^5(x)}{\pi + \sqrt{x^8 - 2x^4 + 1}}) \sin(x) = 0$$

car $\int_{-1}^{1} \sin(x) = 0$ et la fonction $\frac{1+cos^5(x)}{\pi+\sqrt{x^8-2x^4+1}}$ est paire.

QED