

Rappel de cours

Travail

- La composante de la force d'un point M , $\vec{F}(M)$ sur l'axe \mathcal{O}_x est donnée par le produit scalaire $f(x) = \vec{F}(M) \cdot \vec{i}$.
- Le travail d'une force \vec{F} sur un segment \vec{AB} est donné par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx$$

- On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point A et B .

$$\forall A, B, C, W_{A \rightarrow B} \vec{F} = W_{A \rightarrow C} \vec{F} + W_{C \rightarrow B} \vec{F}$$

- Dans le cas où le chemin est rectiligne, si une force est conservatrice alors l'énergie potentielle associée à la force \vec{F} est notée $E_p(x)$ est définie par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{x} = E_p(x_b) - E_p(x_a)$$

- Le travail du poids $\vec{P} = m\vec{g}$ sur le segment \vec{AB} est $W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mg(z_b - z_a) = -mgh$.
- Le travail de la force de rappel élastique d'un ressort de raideur k , $\vec{F} = -k.x\vec{i}$ est $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -\frac{1}{2}k(x_a^2 - x_b^2)$.

Énergie

- L'énergie mécanique d'un système $E_m = E_c + E_p$ avec E_c l'énergie cinétique qui dépend de la masse et de la norme de la vitesse du système physique étudié et de l'énergie potentielle E_p qui correspond aux forces exercées sur le système.
- L'énergie cinétique du système $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
- L'énergie potentielle qui correspond à l'ensemble des forces conservatives qui s'exercent sur le système, $E_p(B) - E_p(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{conservatives})$
- $E_m(B) - E_m(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{non conservatives})$

Puissance

- La puissance P représente l'énergie transférée uniformément (ie. le travail) pendant une unité de temps, $P = \frac{W}{\Delta t}$.
- $1 W = 1 J.s^{-1} = 1 N.m.s^{-1} = 1 kg.m^2.s^{-3}$

Coordonnées polaires

Polaire vers cartésienne	Cartésienne vers polaire
$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$

- le vecteur dans le repère (\vec{i}, \vec{j}) est $\vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$
- Le vecteur position d'un point est $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{u}_\rho(t)$

- Le vecteur vitesse est $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$
- Le vecteur accélération est $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho}(t) - \rho\dot{\theta}^2(t))\vec{u}_\rho + (\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t))\vec{u}_\theta = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$

Posons $\vec{u}_T = \vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_N = \vec{u}_\rho$. Donc \vec{u}_T est un vecteur tangent à la trajectoire du point et \vec{u}_N est un vecteur normal à la trajectoire du point dirigé vers le centre du rayon de courbure.

Pour une trajectoire sur un cercle de rayon R . on a:

- $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_T = v\vec{u}_T$
- $\vec{a} = R\dot{\theta}^2\vec{u}_N + R\ddot{\theta}\vec{u}_T = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}\vec{u}_T$

Pour une trajectoire sur un cercle, on définit l'abscisse curviligne $s(t) = R\theta(t)$. On a

- $\vec{v} = \frac{ds}{dt}$
- $\vec{a} = \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{u}_N + \ddot{s}\vec{u}_T$
- La courbure d'une trajectoire autour d'un point A est $\mathcal{C} = \frac{d\theta}{ds}$.
- Le rayon de courbure d'une trajectoire autour d'un point A est $\mathcal{C} = \frac{1}{C} = \frac{ds}{d\theta}$.

Exo I

I.1.a

$$\begin{cases} x = 1 \cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm} \\ y = 1 \sin(30) = \frac{1}{2} \text{ cm} \end{cases}$$

I.1.b

$$\begin{cases} x = 20 \cos(-30) = 20 \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ mm} \\ y = 20 \sin(-30) = -20 \frac{1}{2} = -10 \text{ mm} \end{cases}$$

I.1.c

$$\begin{cases} x = 8 \cos(120) = -8 \frac{1}{2} = -4 \text{ mm} \\ y = 8 \sin(120) = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ mm} \end{cases}$$

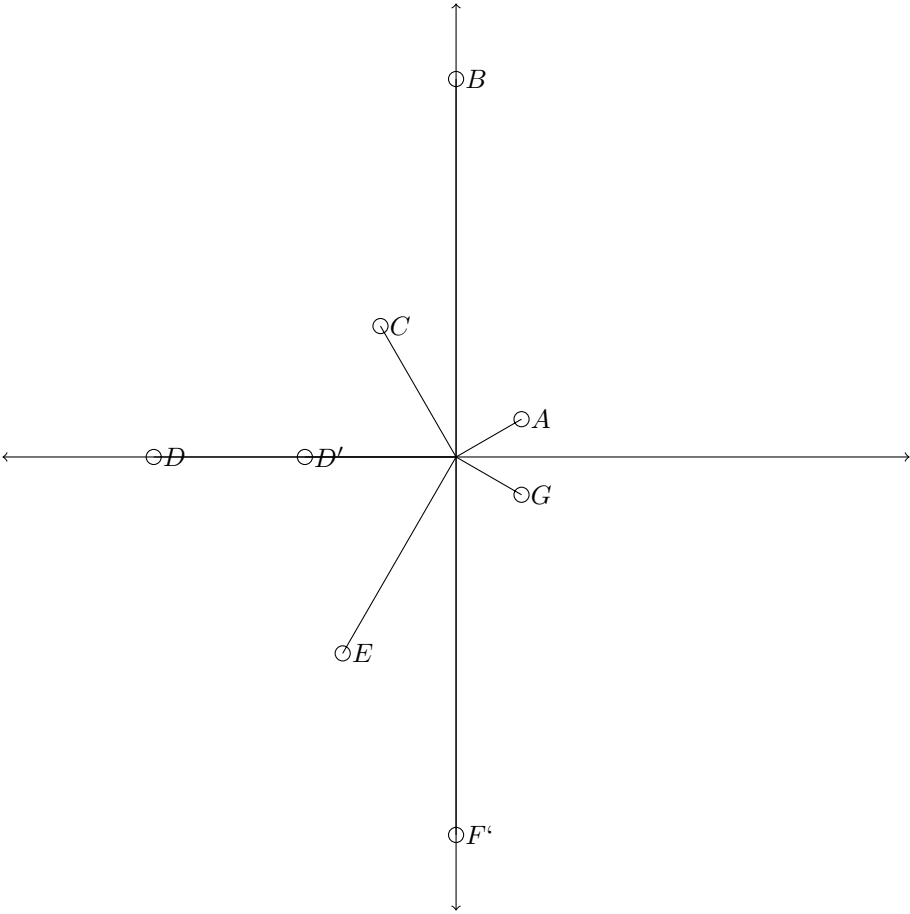
I.1.d

$$\begin{cases} x = 3 \cos(120) = -3 \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \text{ cm} \\ y = 3 \sin(120) = -3 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm} \end{cases}$$

I.2.a

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \text{ cm} \\ \theta = \arctan(\frac{5}{3}) = 90 - \arctan(\frac{3}{5}) = 90 - 31 = 59^\circ \end{cases}$$

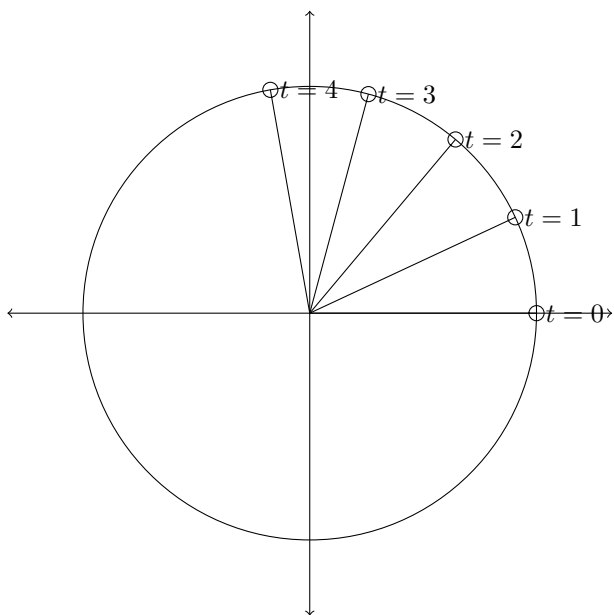
Exo II



Exo III

III.1

$$\rho(t) = \rho_0, \theta = \omega t$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = 0, \dot{\theta}(t) = \omega$$

La vitesse en coordonnées polaires

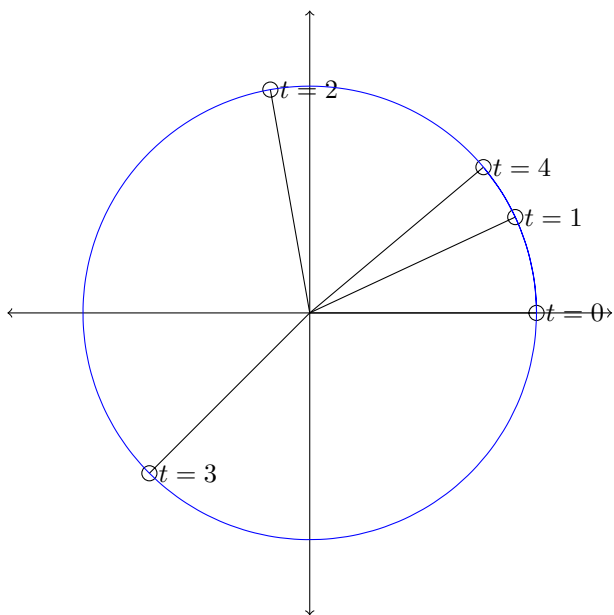
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = 0\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = 0\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta = 0(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \rho_0\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \rho_0\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

III.2

$$\rho(t) = \rho_0, \theta = \alpha t^2$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = 0, \dot{\theta}(t) = 2\alpha t$$

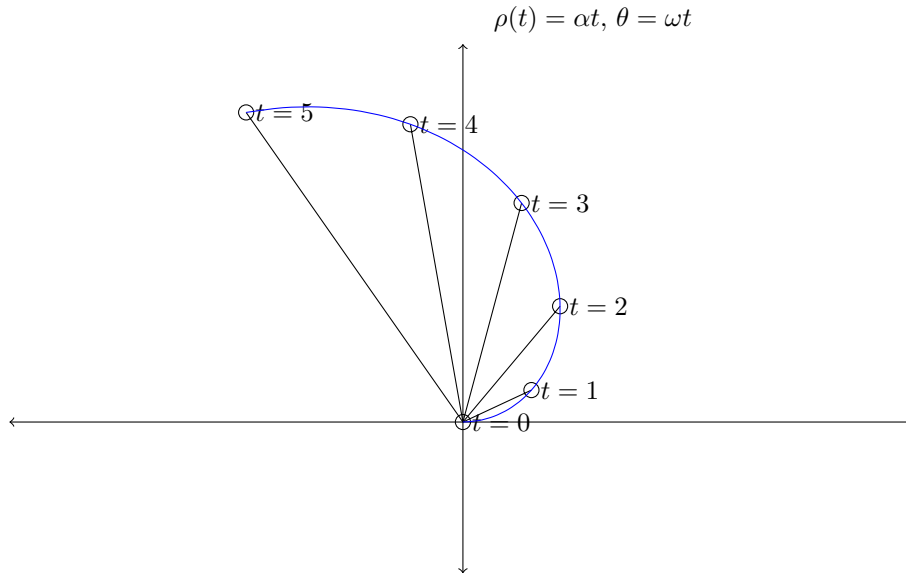
La vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = 0\vec{u}_\rho + \rho_0 2\alpha t \vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = 0\vec{u}_\rho + \rho_0 2\alpha t \vec{u}_\theta = 0(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + \rho_0 2\alpha t (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = \rho_0 2\alpha t (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$

III.3



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = \alpha, \dot{\theta}(t) = \omega$$

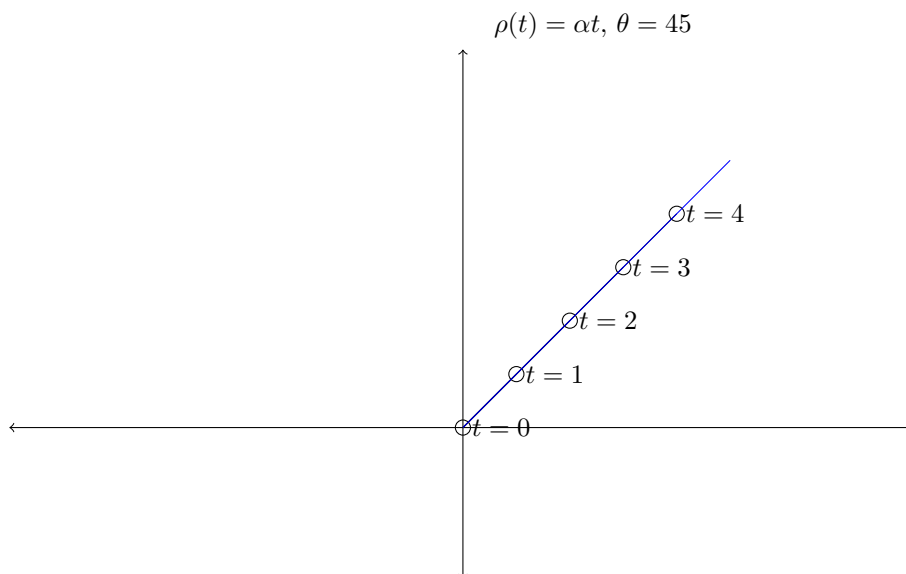
La vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho + \alpha t \omega \vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}_\rho + \rho_0 \omega \vec{u}_\theta = \alpha(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + \alpha t \omega (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = (\alpha \cos \theta - \alpha t \omega \sin \theta) \vec{i} + ((\alpha \sin \theta + \alpha t \omega \cos \theta)) \vec{j}$$

III.4



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = \alpha, \dot{\theta}(t) = 0$$

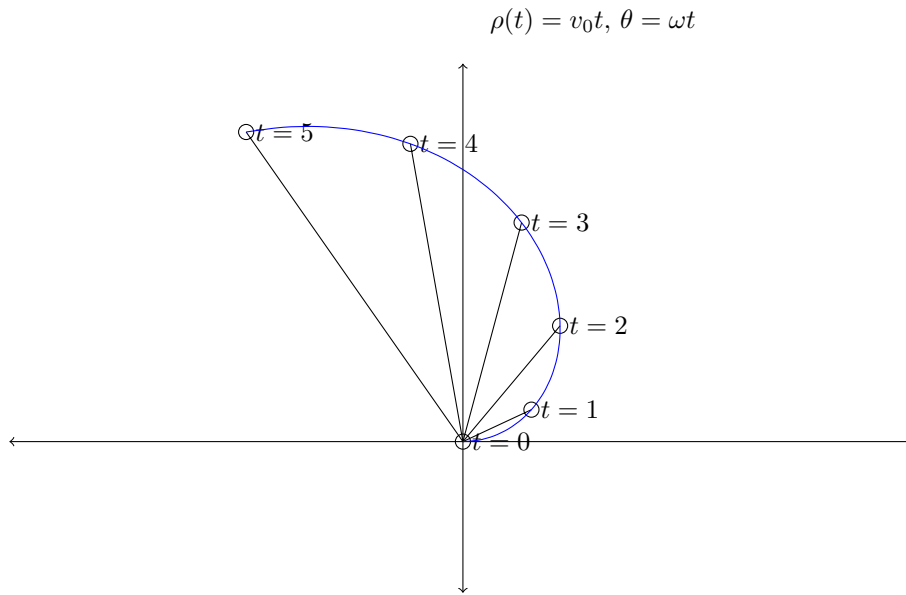
La vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho + \alpha \cdot 0 \cdot \vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho$$

La vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}_\rho = \alpha(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = \alpha\cos\theta\vec{i} + \alpha\sin\theta\vec{j}$$

III.5



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = v_0, \dot{\theta}(t) = \omega$$

La vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = v_0\vec{u}_\rho + \omega v_0 t \vec{u}_\theta$$

Avec $v_0 = 1$ et $\omega = 25$, on a $\theta(t) = \omega t$ donc $t = \theta(t)/\omega$. Donc

θ	t	$\vec{v}(t)$
90°	$90/25$	$\vec{v}(90/25) = \vec{u}_\rho + 25 \cdot 1 \cdot \frac{90}{25} \vec{u}_\theta = \vec{u}_\rho + 90\vec{u}_\theta$
180°	$180/25$	$\vec{v}(180/25) = \vec{u}_\rho + 180\vec{u}_\theta$
-90°	0	$\vec{v}(-90/25) = \vec{u}_\rho - 90\vec{u}_\theta$

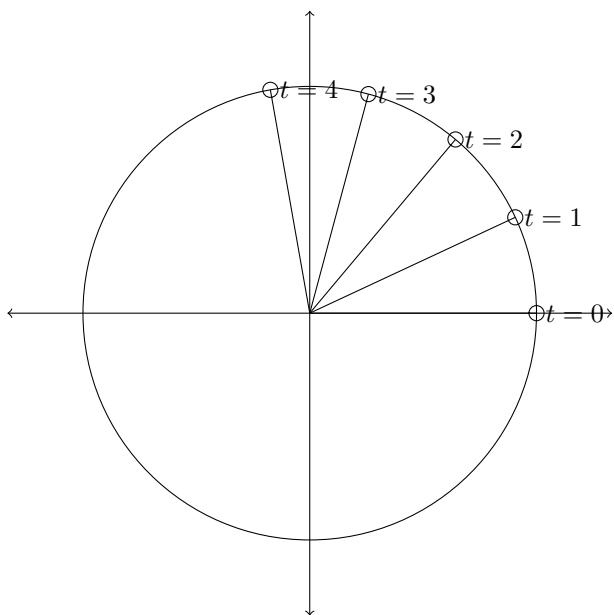
La vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta = \alpha(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \alpha t\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = (\alpha\cos\theta - \alpha t\omega\sin\theta)\vec{i} + ((\alpha\sin\theta + \alpha t\omega\cos\theta))\vec{j}$$

Exo IV

IV.1

$$\rho(t) = \rho_0, \theta(t) = \omega t$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = 0, \dot{\theta}(t) = \omega$$

Dérivées de $\dot{\rho}$ et $\dot{\theta}$

$$\ddot{\rho}(t) = 0, \ddot{\theta}(t) = 0$$

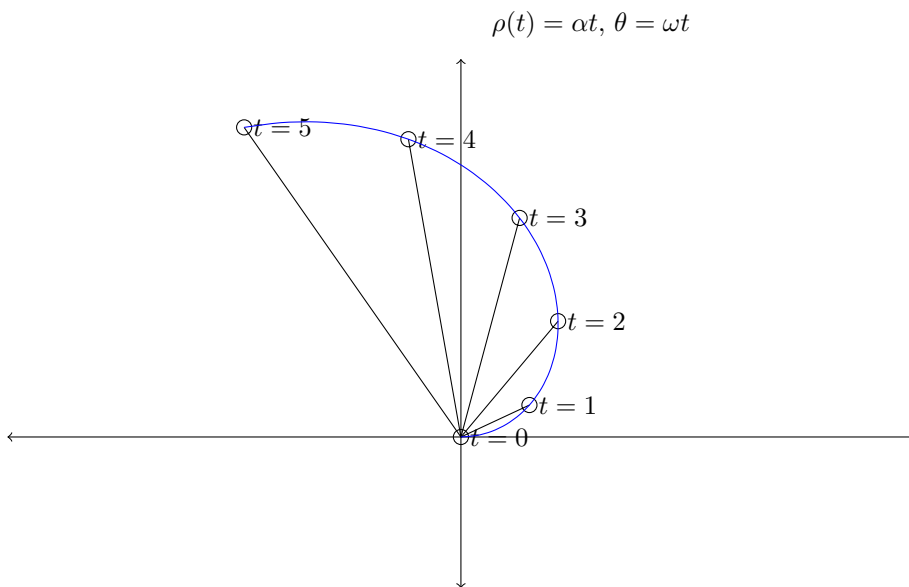
La vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = 0\vec{u}_\rho + \omega\vec{u}_\theta$$

L'accélération en coordonnées polaires

$$\vec{a} = (\ddot{\rho}(t) - \rho\dot{\theta}^2(t))\vec{u}_\rho + (\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t))\vec{u}_\theta = (0 - \rho_0\omega^2)\vec{u}_\rho + (\rho_0.0 + 2.0.\omega)\vec{u}_\theta = -\rho_0\omega^2\vec{u}_\rho$$

IV.2



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = \alpha, \dot{\theta}(t) = \omega$$

Dérivées de $\dot{\rho}$ et $\dot{\theta}$

$$\ddot{\rho}(t) = 0, \ddot{\theta}(t) = 0$$

La vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho + \alpha t\omega\vec{u}_\theta$$

L'accélération en coordonnées polaires

$$\vec{a} = (\ddot{\rho}(t) - \rho\dot{\theta}^2(t))\vec{u}_\rho + (\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t))\vec{u}_\theta = (0 - \rho_0\omega^2)\vec{u}_\rho + (\rho_0 \cdot 0 + 2 \cdot \alpha \cdot \omega)\vec{u}_\theta = -\rho_0\omega^2\vec{u}_\rho + 22 \cdot \alpha \cdot \omega\vec{u}_\theta$$

Exo V

V.1

$$\rho(t) = \rho_0, \theta(t) = \omega t$$

Voir courbe Exo III.3

Le point se déplace sur un cercle de rayon ρ_0 . Donc la distance parcourue par le point par rapport à l'axe \mathcal{O}_x est $s(t) = \rho_0\theta(t) = \rho_0\omega t$.

Le repère intrinsèque est Ω à l'intersection entre le cercle et l'axe \mathcal{O}_x . Le sens de déplacement est le sens anti-horaire (sens de déplacement du point).

$$\text{Le rayon de courbure } R = \frac{ds}{d\theta} = \frac{s(t)dt}{\theta(t)dt} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{\theta(t_2)-\theta(t_1)} = \frac{\rho_0\theta(t_2)-\rho_0\theta(t_1)}{\theta(t_2)-\theta(t_1)} = \rho_0.$$

La vitesse tangentielle pour une trajectoire sur un cercle de rayon R est $R\dot{\theta}$. Donc $\vec{v} = \rho_0\omega$.

L'accélération tangentielle pour un cercle de rayon R est $R\ddot{\theta}$. Donc l'accélération tangentielle est égale à 0.

L'accélération normale pour un cercle de rayon R est $R\dot{\theta}^2$. Donc l'accélération normale est égale à $\rho_0\omega^2$.

L'accélération en coordonnées polaires est $\vec{a} = 0\vec{u}_T + \rho_0\omega^2\vec{u}_N$.

V.2

$$\rho(t) = \rho_0, \theta(t) = \alpha t^2$$

Voir courbe Exo III.4

Le point se déplace sur un cercle de rayon ρ_0 . Donc la distance parcourue par le point par rapport à l'axe \mathcal{O}_x est $s(t) = \rho_0\theta(t) = \rho_0\alpha t^2$.

Le repère intrinsèque est Ω à l'intersection entre le cercle et l'axe \mathcal{O}_x . Le sens de déplacement est le sens anti-horaire (sens de déplacement du point).

$$\text{Le rayon de courbure } R = \frac{ds}{d\theta} = \frac{s(t)dt}{\theta(t)dt} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{\theta(t_2)-\theta(t_1)} = \frac{\rho_0\theta(t_2)-\rho_0\theta(t_1)}{\theta(t_2)-\theta(t_1)} = \rho_0.$$

La vitesse tangentielle pour une trajectoire sur un cercle de rayon R est $R\dot{\theta}$. Donc $\vec{v} = 2\rho_0\alpha t$.

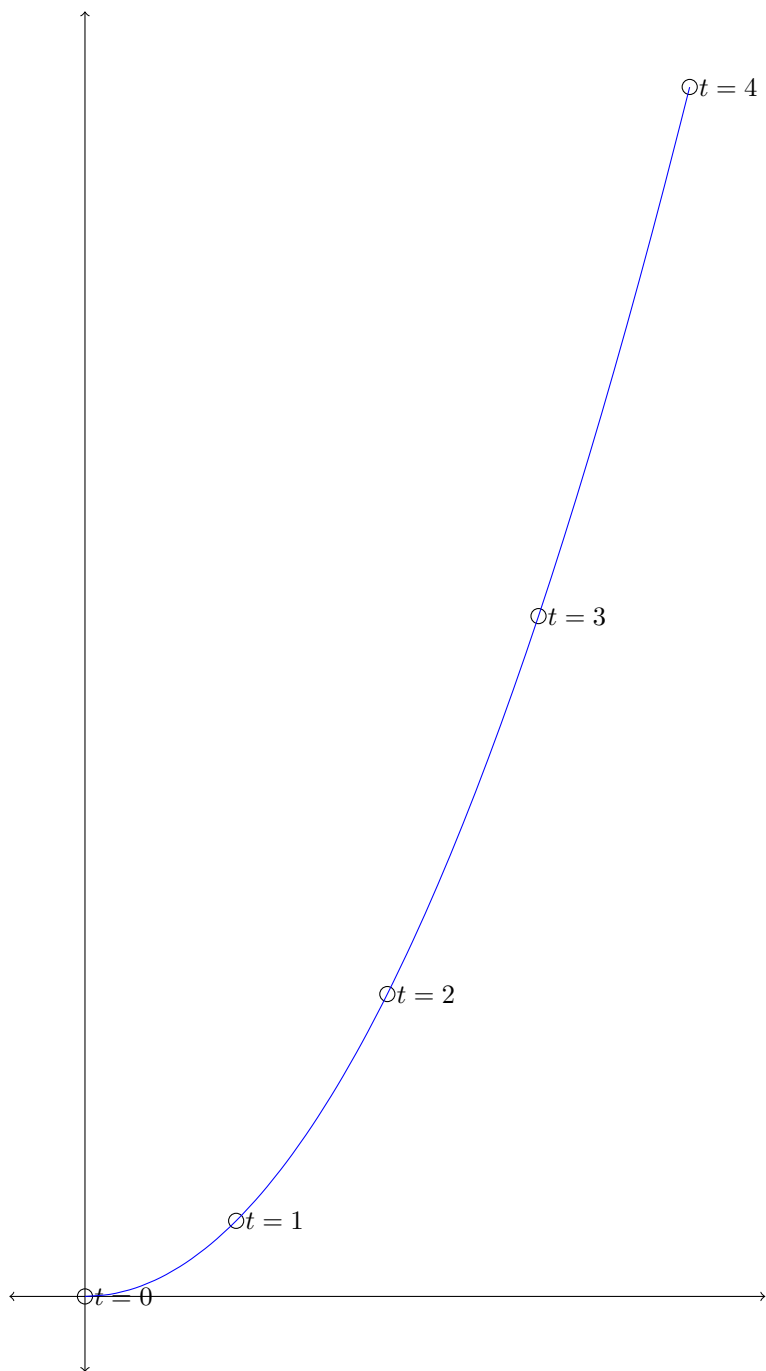
L'accélération tangentielle pour un cercle de rayon R est $R\ddot{\theta}$. Donc l'accélération tangentielle est égale à $2\rho_0\alpha$.

L'accélération normale pour un cercle de rayon R est $R\dot{\theta}^2$. Donc l'accélération normale est égale à $4\rho_0\omega^2 t^2$.

L'accélération en coordonnées polaires est $\vec{a} = 2\rho_0\alpha\vec{u}_T + 4\rho_0\omega^2 t^2\vec{u}_N$.

V.2

$$y = \frac{1}{2}\alpha x^2, x = v_0 t$$



Le déplacement du point sur la trajectoire est $x\vec{i} + y\vec{j}$ dans le repère cartésien. Donc $v_0 t\vec{i} + \frac{1}{2}\alpha x^2\vec{j} = v_0 t\vec{i} + \frac{1}{2}\alpha v_0^2 t^2\vec{j}$. La vitesse

$$\vec{v}(t) = \frac{v_0 t\vec{i} + \frac{1}{2}\alpha v_0^2 t^2 \text{vec}j}{dt} = v_0\vec{i} + \alpha v_0^2 t\vec{j}$$

On a $\vec{v}(0) = v_0\vec{i}$.

On a $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{v_0\vec{i} + \alpha v_0^2 t \vec{j}}{dt} = 0\vec{i} + \alpha v_0^2 \vec{j} = \alpha v_0^2 \vec{j}$.

On a $\vec{a}(0) = \alpha v_0^2 \vec{j}$.

On a $\vec{a} = v\vec{u}_T + \frac{v^2(0)}{R}\vec{u}_N$. En $x = 0$, on a $\vec{a} = \alpha v_0^2 \vec{j}$ et $\vec{u}_N = \vec{j}$. Donc, le rayon de courbure de la parabole en $x = 0$ est $\frac{v^2(0)}{R} = \alpha v_0^2$. Ce qui fait $R = \frac{1}{\alpha}$.

Le rayon de courbure en $x = 0$ ne dépend pas de v_0 car la vitesse $\vec{v}(0)$ est normale à l'accélération $\vec{a}(0)$.

Exo VI

VI.1

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_x}{dy} = \frac{d(-2x)}{dy} = 0 \\ \frac{dF_y}{dx} = \frac{d(2y)}{dx} = 0 \end{cases}$$

La force est conservative. Calcul de l'énergie potentielle E_p dérivée de la force. Il faut trouver $E_p(x, y)$ tel que :

$$\begin{cases} F_x = -2x = -\frac{dE_p(x, y)}{dx} \\ F_y = 2y = -\frac{dE_p(x, y)}{dy} \end{cases}$$

Intégration de la première équation: $E_p(x, y) = \int -F_x dx = \int 2x dx = x^2 + f(y)$.

Identification de la fonction $f(y)$. $2y = -\frac{dE_p(x, y)}{dy} = -\frac{d(x^2 + f(y))}{dy} = -f'(y)$ Donc $f(y) = -y^2$.

L'énergie potentielle dérivée est donc $E_p = x^2 - y^2$.

VI.2