Premier Partiel de Mathématiques

8 octobre 2018 — durée : 2 h

– Barème indicatif–

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème. Le barème (indicatif) de l'épreuve est

$$24 \;=\; 6\text{ (Exercice)} \;+\; 6\text{ (Problème Partie 1)} \;+\; 12\text{ (Problème Partie 2)}\,.$$

La qualité de la rédaction interviendra pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice —Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent (en justifiant vos calculs). Justifier pourquoi elles n'existent pas sinon.

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+\cos(e^{n^2})}{n(n+\ln(n))}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3^n e^{-3n}$

Problème —

1. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On considère ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \;=\; a + a^2 + \cdots + a^n \;=\; \sum_{k=1}^{n} a^k\,.$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut u_n lorsque $a = 1$?

b) On suppose ici que $a \neq 1$. En simplifiant l'expression de $a\,u_n - u_n$, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \;=\; a\frac{1-a^n}{1-a}\,.$$

c) En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (en discutant selon la valeur de $a \in \mathbb{R}^+$).

d) Déterminer tous les $a \in \mathbb{R}^+$ pour lesquels cette limite appartient à $]1, +\infty[$.

2. On considère dans cette partie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) \;=\; -1 + x + x^2 + \cdots + x^n \;=\; -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k\,.$$

a) Montrer, sans dérivation, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Im} f_n \subset [-1, +\infty[$.

On admet dans la suite que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$**,** $\operatorname{Im} f_n = [-1, +\infty[$.

c) En déduire, en utilisant uniquement cette indication et la réponse à la question 2.a), que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}^+$.

d) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est décroissante.
Indication : Utiliser que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on a : $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

e) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite réelle que l'on notera ℓ.

f) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $x_n > \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire sur ℓ ?
Indication : Utiliser la réponse à la question 1.b).

g) Soit $a \in]\frac{1}{2}, 1[$. Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq N$, on a $x_n < a$. En déduire la valeur de ℓ.
Indication : Utiliser la réponse à la question 1.d).

Premier Partiel de Mathématiques
Correction

Correction Ex.– a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{n^2+\cos(e^{n^2})}{n(n+\ln(n))} \;=\; \frac{n^2}{n^2}\frac{1+\frac{\cos(e^{n^2})}{n^2}}{1+\frac{\ln(n)}{n}} \;=\; \frac{1+\frac{\cos(e^{n^2})}{n^2}}{1+\frac{\ln(n)}{n}}\,.$$

Par ailleurs, comme $\big(\cos(e^{n^2})\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée (car $|\cos(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos(e^{n^2})}{n^2} = 0$. Par croissances comparées, on a de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. On en déduit donc que

$$\frac{n^2+\cos(e^{n^2})}{n(n+\ln(n))} \;=\; \frac{1+\frac{\cos(e^{n^2})}{n^2}}{1+\frac{\ln(n)}{n}} \;\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\; \frac{1}{1} \;=\; 1\,.$$

b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1} \;=\; (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \;=\; \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \;\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\; 0\,.$$

c) Puisque $e \geq 2$, on a $|\frac{3}{e^3}| = \frac{3}{e^3} \leq \frac{3}{8} < 1$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$3^n e^{-3n} \;=\; \big(\frac{3}{e^3}\big)^n \;\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\; 0\,.$$

Correction Pb.–

1. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On considère ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n \;\in\; \mathbb{N}^*\,, \quad u_n \;=\; a+a^2+\cdots+a^n \;=\; \sum_{k=1}^{n} a^k\,.$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \sum_{k=1}^n 1 = n$ lorsque $a = 1$.

b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(a-1)u_n \;=\; a\,u_n - u_n \;=\; a^2+a^3+\cdots+a^{n+1}-(a+a^2+\cdots+a^n) \;=\; a^{n+1}-a$$

donc, lorsque $a \neq 1$,

$$u_n \;=\; \frac{a^{n+1}-a}{a-1} \;=\; a\frac{a^n-1}{a-1} \;=\; a\frac{1-a^n}{1-a}\,.$$

c) Lorsque $a = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = n \to +\infty$.

Lorsque $a > 1$, alors $a^n \to +\infty$ (d'après les puissances comparées du cours par exemple) et donc $u_n \to +\infty$ par somme et produit de limites.

Enfin, lorsque $a \in [0,1[$, on a $a^n \to 0$. Par somme et produit de limites, on a donc dans ce cas $u_n \to \frac{a}{1-a}$.

d) Comme $u_n \to +\infty$ lorsque $a \geq 1$, il s'agit de déterminer les $a \in [0,1[$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in]1,+\infty[$. Il s'agit donc des $a \in [0,1[$ tels que $\frac{a}{1-a} > 1$, c-à-d des $a \in]\frac{1}{2},1[$.

2. On considère dans cette partie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) \;=\; -1 + x + x^2 + \cdots + x^n \;=\; -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k\,.$$

   a) Montrons d'abord par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété « $\mathcal{P}_k : x \mapsto x^k$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ » :

   – Initialisation : la propriété $\mathcal{P}_1$ est évidemment satisfaite.

   – Hérédité : supposons la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons que la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est alors aussi vraie. Cela découle de

$$0 \le x < y \implies 0 \;\le\; x^{k+1} \;=\; x\,x^k \underset{x<y \text{ et } x^k \ge 0}{\le} y\,x^k \underset{y>0 \,+\, \text{Hyp. Réc.}}{<} y\,y^k \;=\; y^{k+1}\,,$$

   ce qui établit la récurrence.

   On en déduit facilement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. En effet, $0 \le x < y$ implique $0 \le x^k < y^k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et donc $f_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n x^k < -1 + \sum_{k=1}^n y^k = f_n(y)$.

   b) Comme $f_n(0) = -1$, on déduit de la croissance de f_n sur $\mathbb{R}^+$ que $f_n(x) \ge -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, donc que $\operatorname{Im} f_n = f_n(\mathbb{R}^+) \subset [-1, +\infty[$.

   On admet dans la suite que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Im} f_n = [-1, +\infty[$.

   c) Puisque $\operatorname{Im} f_n = [-1, +\infty[$, on a $0 \in \operatorname{Im} f_n$ donc 0 admet au moins un antécédent par f_n, i.e. il existe (au moins) un élément $x_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(x_n) = 0$. La fonction f_n étant de plus strictement croissante, elle est injective donc 0 admet au plus un antécédent par f_n. L'élément x_n est donc le seul antécédent de 0 par f_n, i.e. l'unique élément de $\mathbb{R}^+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

   d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $x^{n+1} \ge 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. On en déduit en particulier que

$$0 \;=\; f_n(x_n) \;=\; f_{n+1}(x_{n+1}) \;\ge\; f_n(x_{n+1}) \quad \text{donc que} \quad f_n(x_n) \;\ge\; f_n(x_{n+1})\,.$$

   La stricte croissance de f_n implique alors $x_{n+1} \le x_n$ (puisque $x_{n+1} > x_n$ impliquerait $f_n(x_{n+1}) > f_n(x_n)$). On a donc montré que $x_{n+1} \le x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c-à-d la décroissance de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

   e) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant décroissante et minorée par 0 comme suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, elle admet une limite réelle ℓ.

   f) Comme f_n est croissante et $f_n(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour montrer que $x_n > \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit de montrer que $f_n(\frac{1}{2}) < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or d'après la question 1.b), on a $f_n(\frac{1}{2}) = -1 + \frac{1}{2}\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = -(\frac{1}{2})^n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $x_n > \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit alors du théorème des gendarmes que $\ell \ge \frac{1}{2}$.

   g) Soit $a \in]\frac{1}{2}, 1[$. D'après la question 1.d), on a donc

$$f_n(a) \;=\; -1 \;+\; \underbrace{a + a^2 + \cdots + a^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c \,\in\,]1,+\infty[} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1 + c \;\in]0, +\infty[\,.$$

   Il existe par conséquent un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $f_n(a) \ge \frac{c-1}{2} > 0 = f_n(x_n)$ pour tout entier $n \ge N$. Par croissance de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $x_n < a$ pour tout $n \ge N$. On en déduit $\ell \le a$ par le théorème des gendarmes. La limite ℓ de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie donc $\frac{1}{2} \le \ell \le a$ pour tout $a \in]\frac{1}{2}, 1[$ et donc $\frac{1}{2} \le \ell \le \inf]\frac{1}{2}, 1[= \frac{1}{2}$. Il vient $\ell = \frac{1}{2}$.