

Rappel de cours

Definition 1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , (U_n) une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I . On dit que (u_n) converge **simplement** vers f sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(U_n(x))$ converge vers $f(x)$.

Definition 2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , (U_n) une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I . On dit que (u_n) converge **uniformément** vers f sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n > n_0, |(U_n(x)) - f(x)| < \epsilon$$

Definition 3. On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ converge **normalement** sur I si la série $\sum_{n \geq 0} \|U_n(x)\|_\infty$ est convergente.

Definition 4. On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ converge **normalement** sur I si la série $\sum_{n \geq 0} \|U_n(x)\|_\infty$ est convergente.

Exercice 1**Exercice 2****Exercice 3****Exercice 4****Exercice 4.1**

$$\begin{aligned} \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x-2)} + \frac{c}{(x-1)} &= \frac{a(x-1)}{(x-2)^2(x-1)} + \frac{b(x-2)(x-1)}{(x-2)^2(x-1)} + \frac{c(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{a(x-1) + b(x-2)(x-1) + c(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)} \\ &= \frac{ax - a + bx^2 - bx - 2bx + 2b + cx^2 - c4x + 4c}{(x-2)^2(x-1)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} b + c = 0 & x^2 \\ a - 3b - 4c = 0 & x \\ -a + 2b + 4c = 1 & x^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -c \\ a = c \\ c = 1 \end{cases}$$

Donc $a = 1, b = -1, c = 1$.

$$\frac{1}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-1)}$$

Exercice 4.2

Utilisons le développement de Taylor sur $f_3(x) = \frac{1}{(x-1)}$ au voisinage de 0. On a

$$\begin{aligned} \frac{f_3(0)}{0!} &= -1 \\ f_3'(x) &= -\frac{1}{(x-1)^2}, \quad \frac{f_3'(0)}{1!} = -1 \\ f_3^{(2)}(x) &= \frac{2}{(x-1)^3}, \quad \frac{f_3^{(2)}(0)}{2!} = -1 \\ f_3^{(3)}(x) &= \frac{6}{(x-1)^4}, \quad \frac{f_3^{(3)}(0)}{3!} = -1 \end{aligned}$$

Donc, au voisinage de 0

$$\frac{1}{(x-1)} = \sum_{n \geq 0} -x^n$$

Utilisons le développement de Taylor sur $f_2(x) = -\frac{1}{(x-2)}$ au voisinage de 0. On a

$$\begin{aligned} \frac{f_2(0)}{0!} &= \frac{1}{2} \\ f_2'(x) &= \frac{1}{(x-2)^2}, \quad \frac{f_2'(0)}{1!} = \frac{1}{4} \\ f_2^{(2)}(x) &= -\frac{2}{(x-2)^3}, \quad \frac{f_2^{(2)}(0)}{2!} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$f_2^{(3)}(x) = \frac{6}{(x-2)^4}, \quad \frac{f_3^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{16}$$

Donc, au voisinage de 0

$$-\frac{1}{(x-2)} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} x^n$$

Utilisons le développement de Taylor sur $f_1(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ au voisinage de 0. On a

$$\frac{f_2(0)}{0!} = \frac{1}{4}$$

$$f_2'(x) = -\frac{2}{(x-2)^3}, \quad \frac{f_3'(0)}{1!} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$f_2^{(2)}(x) = \frac{6}{(x-2)^4}, \quad \frac{f_3^{(2)}(0)}{2!} = \frac{3}{16}$$

$$f_2^{(3)}(x) = -\frac{24}{(x-2)^5}, \quad \frac{f_3^{(3)}(0)}{3!} = \frac{4}{32}$$

Donc, au voisinage de 0

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n$$

Donc

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-1)} = \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n + \frac{1}{2^{n+1}} x^n - x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{n+3-2^{n+2}}{2^{n+2}} x^n$$

Le rayon de convergence de $f_3(x)$ est

$$R_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{-1} = 1$$

Le rayon de convergence de $f_2(x)$ est

$$R_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}$$

Le rayon de convergence de $f_1(x)$ est

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{2^{n+3}}}{\frac{n+1}{2^{n+2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{2(1 + \frac{1}{n})} = \frac{1}{2}$$

Le rayon de convergence de $f(x)$ au voisinage de 0 est $\min(R_1, R_2, R_3) = \frac{1}{2}$.

Exercice 5

QED