
Rappel de cours

Exercice 2.1**Exercice 2.1.1**

$$\int_0^\pi x \sin(x) dx$$

Prenons $f = x$ et $g' = \sin(x)$ donc $f' = 1$ et $g = -\cos(x)$

$$\int f g' = f g - \int f' g = -x \cos(x) - \int -\cos(x) = \sin(x) - x \cos(x)$$

$$\int_0^\pi x \sin(x) dx = [\sin(x) - x \cos(x)]_0^\pi = \pi$$

Exercice 2.1.2

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$$

Prenons $u = e^x + 1$, on a $\frac{du}{dx} = e^x$ donc $dx = e^{-x} du$.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{u}} e^{-x} du = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{e^x + 1}$$

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx = [2\sqrt{e^x + 1}]_0^{\ln(2)} = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Exercice 2.1.3

$$\int_0^1 \frac{4}{x^4 - 4} dx$$

Substitution $u = x^4 - 4$ - Dead end.

On a $x^4 - 4 = x^{2^2} - 2^2 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$

$$\frac{1}{(x^2 - 2)(x^2 + 2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x^2 - 2} - \frac{1}{x^2 + 2} \right)$$

$$\int_0^1 \frac{4}{x^4 - 4} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 2} - \frac{1}{x^2 + 2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 2} dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2} dx$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})} dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x + \sqrt{2}} - \frac{1}{x - \sqrt{2}} \right) dx$$

Maintenant, prenons $u = x + \sqrt{2}$, $\frac{du}{dx} = 1$ donc $du = dx$ et

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{2}} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln(u) = \ln(x + \sqrt{2})$$

de même avec $u = x - \sqrt{2}$

$$\int \frac{1}{x - \sqrt{2}} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln(u) = \ln(x - \sqrt{2})$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 2} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left([\ln(x + \sqrt{2})]_0^1 - [\ln(x - \sqrt{2})]_0^1 \right)$$

et pour la seconde partie

$$\int \frac{1}{x^2+2} dx$$

On connaît l'intégrale de $\frac{1}{x^2+1}$, c'est presque pareil. Il faut juste éliminer le 2 avec un changement de variable judicieux (ou astucieux). Prenons $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$, on a $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $dx = \sqrt{2}du$. Ce qui fait:

$$\int \frac{1}{x^2+2} dx = \int \frac{1}{(\sqrt{2}u)^2+2} \sqrt{2}du = \int \frac{\sqrt{2}}{2u^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{u^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(u) = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+2} dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Pour finir

$$\int_0^1 \frac{4}{x^4-4} dx = \text{blabla} - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Exercice 2.1.4

$$\int_{-1}^1 \ln(1+x^2) dx$$

Prenons $f = \ln(1+x^2)$ et $g' = 1$ donc $f' = \frac{2x}{x^2+1}$ et $g = x$

$$\int f g' = f g - \int f' g = x \ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1} dx$$

Prenons $u = x^2 + 1$, on a $\frac{du}{dx} = 2x$ donc $dx = \frac{1}{2x} du$

$$\int \frac{2x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{2x^2}{u} \frac{1}{2x} du = \int \frac{x}{u} du$$

Dead end.

On connaît l'intégrale de $\frac{1}{x^2+1}$

$$\int \frac{2x^2}{x^2+1} dx = 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = 2 \int \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} dx = 2 \int 1 - \frac{1}{x^2+1} dx = 2 \int 1 dx - 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx = 2(x - \arctan(x))$$

donc

$$\int_{-1}^1 \ln(1+x^2) dx = [x \ln(x^2+1) + 2(\arctan(x) - x)]_{-1}^1 = \ln(2) + 2\pi/4 - 2 - (-\ln(2) + 2 - 2\pi/4) = 2\ln(2) + \pi - 4$$

Exercice 2.1.5

$$\int_0^1 x^2 e^x dx$$

Prenons $f = x^2$ et $g' = e^x$ donc $f' = 2x$ et $g = e^x$

$$\int f g' = f g - \int f' g = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

Prenons $f = 2x$ et $g' = e^x$ donc $f' = 2$ et $g = e^x$

$$\int f g' = f g - \int f' g = 2x e^x - \int 2 e^x dx = 2x e^x - 2e^x$$

Donc

$$\int_{-1}^1 \ln(1+x^2) dx = [x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x] = e - 5e^{-1}$$

Exercice 2.2**Exercice 2.2.1**

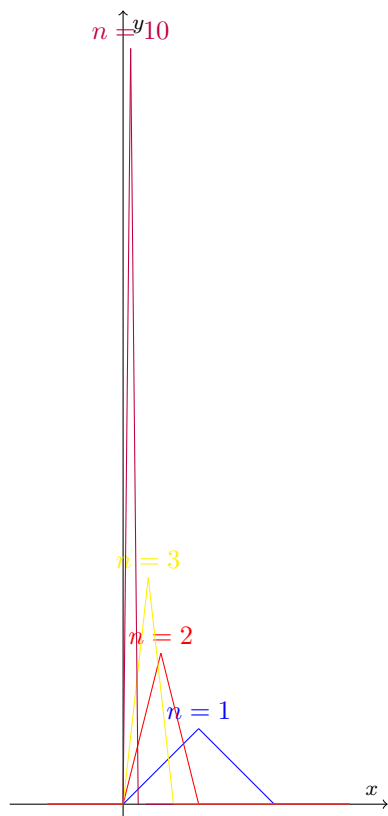
$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{dt}{1+t+t^2}$, on a donc $f(x) = F(x^2) - F(0)$ avec $F(x)$ la fonction intégrale de $f(x)$. donc

$$f'(x) = (F(x^2) - F(0))' = (F(x^2))' - (F(0))' = (x^2)' f(x^2) - 0f(0) = \frac{2x}{1+x^2+x^4}$$

Exercice 2.2.2

$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{1+t+t^2}$, on a donc $f(x) = F(x^2) - F(x)$ avec $F(x)$ la fonction intégrale de $f(x)$. donc

$$f'(x) = (F(x^2) - F(x))' = (F(x^2))' - (F(x))' = (x^2)' f(x^2) - f(x) = \frac{2x}{1+x^2+x^4} - 1$$

Exercice 2.7**Exercice 2.7.1****Exercice 1.4.1.1**

Convergence simple. Pour un x donne, prenons $\epsilon > 0$ et $n_0 > 2/x$. Dans ce cas, $\forall n \geq n_0, f_n(x) = 0$ donc la serie de fonction converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$.

pour $n = 1$,

$$\int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 x = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

pour $n = 2$,

$$\int_0^1 f_n(x) = \int_0^{1/2} 4x + \int_{1/2}^1 4 - 4x = [2x^2]_0^{1/2} + [4x - 2x^2]_{1/2}^1 = \frac{2}{4} + 4 - 2 - 2 + \frac{2}{4} = 1$$

pour $n > 3$,

$$\int_0^1 f_n(x) = \int_0^{1/n} n^2 x + \int_{1/n}^{2/n} 2n - n^2 x + \int_{2/n}^1 0 = \left[\frac{n^2 x^2}{2} \right]_0^{1/n} + \left[2nx - \frac{n^2 x^2}{2} \right]_{1/n}^{2/n} + 0 = \frac{1}{2} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = 1$$

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$.

Autres exercices 1

$$x \rightarrow e^{-nx^2}$$

Convergence simple. Pour un x donne différent de 0, prenons $\epsilon > 0$ et un n_0 tel que $\epsilon = e^{-n_0 x}$ donc $n_0 = -\frac{\ln(\epsilon)}{x^2}$. Dans ce cas, $\forall n \geq n_0, |f_n(x)| < \epsilon$ donc la serie de fonction converge simplement. Lorsque $n \rightarrow \infty$ on a la fonction $f(x)$ qui tend vers 0. Pour $x = 0$, la série de fonction converge vers 1.

Convergence uniforme. Pour un n donné et un $x \neq 0$, calculons $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. Pour un n donné on pourra toujours trouvé un x tel que $e^{-nx^2} > \epsilon$. donc la série ne converge par uniformément pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$ calculons $|f_n(x) - f(x)| = e^{-n \cdot 0} - 1 = 0$ donc la fonction converge uniformément pour $x = 0$.

Autres exercices 2

$$x \rightarrow \frac{1}{1 + nx^2}$$

Convergence simple. Pour un x donne différent de 0, prenons $\epsilon > 0$ et un n_0 tel que $\epsilon = \frac{1}{1 + n_0 x^2}$ donc $n_0 = \frac{1 - \epsilon}{\epsilon x^2}$. Dans ce cas, $\forall n \geq n_0, |f_n(x)| < \epsilon$ donc la serie de fonction converge simplement. Lorsque $n \rightarrow \infty$ on a la fonction $f(x)$ qui tend vers 0. Pour $x = 0$, la série de fonction converge vers 1.

Convergence uniforme. Pour un n donné et un $x \neq 0$, calculons $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. Pour un n donné on pourra toujours trouvé un x tel que $\frac{1}{1 + nx^2} > \epsilon$. donc la série ne converge par uniformément pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$ calculons $|f_n(x) - f(x)| = e^{-n \cdot 0} - 1 = 0$ donc la fonction converge uniformément pour $x = 0$.

Autres exercices 3

$$x \rightarrow \sin(x)^n \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}]$$

Convergence simple. Pour un x donne différent de $\frac{\pi}{2}$, prenons $\epsilon > 0$ et un n_0 tel que $\epsilon = \sin(x)_0^n$ donc $n_0 = \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(\sin(x))}$. Dans ce cas, $\forall n \geq n_0, |f_n(x)| < \epsilon$ donc la serie de fonction converge simplement. Lorsque $n \rightarrow \infty$ on a la fonction $f(x)$ qui tend vers 0. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, la série de fonction converge vers 1.

Convergence uniforme. Pour un n donné et un $x \neq \frac{\pi}{2}$, calculons $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. Pour un n donné on pourra toujours trouvé un x tel que $\frac{1}{1 + nx^2} > \epsilon$. donc la série ne converge par uniformément pour $x \neq \frac{\pi}{2}$. Pour $x = \frac{\pi}{2}$ calculons $|f_n(x) - f(x)| = \sin(\frac{\pi}{2})^n - 1 = 0$ donc la fonction converge uniformément pour $x = \frac{\pi}{2}$.

Autres exercices 4

$$x \rightarrow \frac{1}{n} \sin(nx) \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}]$$

Convergence simple. Pour un x donne différent de $\frac{\pi}{2}$, prenons $\epsilon > 0$ et un n_0 tel que $\epsilon > \frac{1}{n_0} \sin(n_0 x)$ donc $n_0 = \frac{1}{\epsilon}$ car $0 \leq \sin(x) \leq 1$. Dans ce cas, $\forall n \geq n_0, |f_n(x)| < \epsilon$ donc la serie de fonction converge simplement. Lorsque $n \rightarrow \infty$ on a la fonction $f(x)$ qui tend vers 0. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, la série de fonction converge vers 1.

Convergence uniforme. Pour un n donné et un $x \neq \frac{\pi}{2}$, calculons $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. Pour un n donné on pourra toujours trouvé un x tel que $\frac{1}{1 + nx^2} > \epsilon$. donc la série ne converge par uniformément pour $x \neq \frac{\pi}{2}$. Pour $x = \frac{\pi}{2}$ calculons $|f_n(x) - f(x)| = \sin(\frac{\pi}{2})^n - 1 = 0$ donc la fonction converge uniformément pour $x = \frac{\pi}{2}$.