

Exercice 1

D'abord toujours définir l'univers: Choisir 5 cartes parmi 32 cartes $card(\Omega) = \mathbb{C}_5^{32}$

Exercice 1.1

Pour avoir *une seule* paire, il faut 2 cartes de même hauteur, et 3 cartes qui n'ont pas cette hauteur. Pour une hauteur donnée, il y a \mathbb{C}_2^4 possibilités (2 couleurs parmi 4). Dans un jeu de 32 cartes, il y a 8 hauteurs différentes. Il faut 1 paire, donc \mathbb{C}_1^8 . Maintenant, il faut s'occuper des 3 autres cartes. Comme il faut une *seule* paire, les 3 autres cartes doivent être différentes de la hauteur de la paire. Il reste donc 7 autres hauteurs donc \mathbb{C}_3^7 et chacune des 3 cartes peut prendre n'importe quelle couleur donc \mathbb{C}_1^4 . Donc

$$P(\text{une seule paire}) = \frac{\mathbb{C}_1^8 \cdot \mathbb{C}_2^4 \cdot \mathbb{C}_3^7 \cdot \mathbb{C}_1^4 \cdot \mathbb{C}_1^4}{\mathbb{C}_5^{32}} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 35 \cdot 4 \cdot 4}{201376} = 53.39\%$$

Exercice 1.2

Pour avoir *deux* paires, il faut 2 fois 2 cartes de même hauteur, et 1 carte qui n'a pas ces hauteurs. Pour une hauteur donnée, il y a \mathbb{C}_2^4 possibilités (2 couleurs parmi 4). Dans un jeu de 32 cartes, il y a 8 hauteurs différentes. Il faut 1 paire, donc \mathbb{C}_1^8 et une seconde paire différente \mathbb{C}_1^7 . Maintenant, il faut s'occuper de la dernière carte. Comme il faut deux paires, la dernière carte doit être différente de la hauteur des 2 paires. Il reste donc 6 autres hauteurs donc \mathbb{C}_1^6 et elle peut prendre n'importe quelle couleur donc \mathbb{C}_1^4 . Donc

$$P(\text{deux paires}) = \frac{\mathbb{C}_1^8 \cdot \mathbb{C}_2^4 \cdot \mathbb{C}_1^7 \cdot \mathbb{C}_2^4 \cdot \mathbb{C}_1^6 \cdot \mathbb{C}_1^4}{\mathbb{C}_5^{32}} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4}{201376} =$$

Exercice 1.3

Pour avoir un brelan, il faut 3 cartes de même hauteur, et 2 cartes qui n'ont pas cette hauteur. Pour une hauteur donnée, il y a \mathbb{C}_3^4 possibilités (3 couleurs parmi 4). Dans un jeu de 32 cartes, il y a 8 hauteurs différentes. Il faut 1 brelan, donc \mathbb{C}_1^8 . Maintenant, il faut s'occuper des 2 dernières cartes. Comme il faut un brelan uniquement, les deux dernières cartes doivent être différentes de la hauteur du brelan. Il reste donc 7 autres hauteurs donc \mathbb{C}_2^7 et elles peuvent prendre n'importe quelle couleur donc \mathbb{C}_1^4 . Donc

$$P(\text{un brelan}) = \frac{\mathbb{C}_1^8 \cdot \mathbb{C}_3^4 \cdot \mathbb{C}_2^7 \cdot \mathbb{C}_1^4 \cdot \mathbb{C}_1^4}{\mathbb{C}_5^{32}} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 21 \cdot 4 \cdot 4}{201376} = 5.33\%$$

Exercice 1.4

Pour avoir un carré, il faut 4 cartes de même hauteur, et 1 carte qui n'a pas cette hauteur. Pour une hauteur donnée, il y a \mathbb{C}_4^4 possibilités (4 couleurs parmi 4). Dans un jeu de 32 cartes, il y a 8 hauteurs différentes. Il faut 1 carré, donc \mathbb{C}_1^8 . Maintenant, il faut s'occuper de la dernière carte. Comme il faut un carré, la dernière carte doit être différente de la hauteur du carré. Il reste donc 7 autres hauteurs donc \mathbb{C}_1^7 et elle peut prendre n'importe quelle couleur donc \mathbb{C}_1^4 . Donc

$$P(\text{un carré}) = \frac{\mathbb{C}_1^8 \cdot \mathbb{C}_4^4 \cdot \mathbb{C}_1^7 \cdot \mathbb{C}_1^4}{\mathbb{C}_5^{32}} = \frac{8 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 4}{224} = 0.11\%$$

QED