

Rappel de cours

Definition 1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , (U_n) une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I . On dit que (u_n) converge **simplement** vers f sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(U_n(x))$ converge vers $f(x)$.

Definition 2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , (U_n) une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I . On dit que (u_n) converge **uniformément** vers f sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n > n_0, |(U_n(x)) - f(x)| < \epsilon$$

Definition 3. On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ converge **normalement** sur I si la série $\sum_{n \geq 0} \|U_n(x)\|_{\infty}$ est convergente.

Exercice 1

Montrons que la fonction $f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$ converge simplement pour $x \in [0, 1]$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^{-x} + 1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^{-x}}{n} = e^{-x}$$

La fonction $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x) = e^{-x}$. Montrons maintenant que $f_n(x)$ converge uniformément. Il faut que $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\epsilon \implies \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$. Calculons

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} - e^{-x} \right| = \left| \frac{ne^{-x} + x^2 - (n+x)e^{-x}}{n+x} \right| = \left| \frac{x^2 - xe^{-x}}{n+x} \right| < \frac{2}{n}$$

car $n+x \geq n$ et $|x^2 - xe^{-x}| < 2$ comme $x^2 \in [0, 1]$ et $xe^{-x} \in [0, \frac{1}{e}]$.

Prenons $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{2}{n}$, donc n_ϵ existe et doit être supérieur à $\frac{2}{\epsilon}$.

Exercice 2

Exercice 2.1

Montrons que la fonction $f_n(x) = \ln\left(x + \frac{1}{n}\right)$ converge simplement pour $x \in]0, +\infty[$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) = \ln(x + 0) = \ln(x)$$

La fonction $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x) = \ln(x)$. Montrons maintenant que $f_n(x)$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Il faut que $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\epsilon \implies \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$. Calculons

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) - \ln(x) \right| = \left| \ln\left(\frac{x + \frac{1}{n}}{x}\right) \right| = \left| \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right) \right| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{na}\right)$$

car $\frac{1}{na} \geq \frac{1}{nx}$ pour $x \in [a, +\infty[$.

Prenons $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \ln\left(1 + \frac{1}{na}\right)$, donc n_ϵ existe et doit être tel que $\ln\left(1 + \frac{1}{n_\epsilon a}\right) < \epsilon$.

Exercice 2.2

Non, car pour x proche de 0, il n'existe pas de borne supérieure pour $|f_n(x) - f(x)| = \left| \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right) \right|$.

Exercice 3

Exercice 3.1

Quand $x = 0$, on a $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Pour $x > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} xe^{-nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{nx}} = 0$$

On en déduit que la fonction $f_n(x)$ converge simplement vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 0 & x \in]0, +\infty[\end{cases} = 0$$

Exercice 3.2

Pour que la fonction $f_n(x)$ converge uniformément sur $[0, +\infty]$. Il faut que $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\epsilon \implies \sup_{x \in [0, +\infty]} |f_n(x) - 0| < \epsilon)$.

Cela revient à trouver si la fonction $f_n(x)$ a un maximum pour $x \in [0, +\infty]$.
La fonction est continue et positive sur $[0, \infty]$, cherchons si il existe un maximum.

Calculons $f'_n(x) = e^{-x}(1 - nx)$. on a $f'_n(x)$ qui s'annule lorsque $x = \frac{1}{n}$.

La fonction $f_n(x)$ croît entre $[0, \frac{1}{n}[$ jusqu'à la valeur $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{ne}$ et décroît ensuite pour $x \in]\frac{1}{n}, \infty]$. Donc il existe une valeur supérieure $\frac{1}{ne}$.

On a $\sup_{x \in [0, +\infty]} |f_n(x)| = \frac{1}{ne}$, donc il n_ϵ existe et doit être supérieure à $\frac{1}{e \cdot \epsilon}$. Par conséquent, la fonction $f_n(x)$ converge uniformément vers la fonction 0.

QED