Rappel de cours

Exercice 5

Exercice 5.1

La dimension de la matrice $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ est $d = 4$ car sa base est:

$$U_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .U_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .U_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} .U_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Par définition, la dimension du $\mathbb{R} - ev$ est $2d = 8$.

Exercice 5.1

Par définition la base dans l'espace vectoriel $\mathbb{R} - ev$ est $(U_1, iU_1, \dots, U_4, iU_4)$. Donc la base est

$$U_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .U_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .U_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} .U_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$iU_1 = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .iU_2 = \begin{vmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .iU_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{vmatrix} .iU_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{vmatrix}$$

Exercice 6

Exercice 6.1

On a H de la forme

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} + ib_{11} & a_{12} + ib_{12} \\ a_{21} + ib_{21} & -a_{11} - ib_{11} \end{vmatrix}$$

Une base de H est

$$U_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} .U_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .U_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

La dimension de H est 3.

Exercice 6.2

On a

$$E_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .E_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .E_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} .E_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Donc

$$E_1 = E_{11} - E_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

et $Tr(E_{11} - E_{22}) = 1 + (-1) = 0$, matrice diagonale.

$$E_2 = E_{12} + E_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = U_2 + U_3$$

et $Tr(E_{12} + E_{21}) = 0 + 0 = 0$, $X_m(\lambda) = \lambda^2 - 1$, $S_p(E_{12} + E_{21}) = \{1, -1\}$....

$$E_3 = E_{11} - E_{22} + E_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

et $Tr(E_{11} - E_{22} + E_{12}) = 1 + (-1) = 0$, $X_m(\lambda) = \lambda^2 - 1$, $S_p(E_{11} - E_{22} + E_{12}) = \{1, -1\}$....

Donc les 3 matrices sont dans H.

Exercice 6.3

Calcul si (E_1, E_2, E_3) est une base de H.

Exercice 7

Exercice 7.1

On a $A^2 = A$ La matrice A est diagonalisable si il existe deux matrices T et D tel que $A = TDT^{-1}$. Il faut trouver les valeurs propres λ tel que $Ax = \lambda x$.

$$Ax = A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda^2 x = \lambda x$$

Les 2 solutions sont $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Les espaces propres sont $E_0 = \{x \in M_n(\mathbb{R}) | Ax = 0\}$ et $E_1 = \{x \in M_n(\mathbb{R}) | Ax = x\}$