

Rappel de cours

•

Exercice 1.1

$$\begin{cases} x & +y & -z & -t & = 0 \\ x & -y & +z & -t & = 0 \\ x & & & -t & = 0 \\ & y & -z & & = 0 \end{cases}$$

C'est un système d'équations homogène de rang 4, à 4 inconnues. Aucune ligne nulle. Les inconnues principales sont x et y . Les inconnues secondaires sont z et t .

Exercice 1.2

$$(S_0) \begin{cases} x & -3y & & = a_1 & [1] \\ & 3y & -6z & = a_2 & [2] \\ x & & -6z & = a_3 & [3] \end{cases}$$

Calculer $[1]+[2]$, $x - 6z = a_1 + a_2$, qui est égale à l'équation $[3]$. Donc $a_1 + a_2 = a_3$.
Ou calculer $[1]-[3]$, $-3y + 6z = a_1 - a_3$, qui est égale à la négation de l'équation $[2]$. Donc $a_2 = a_3 - a_1$.

$$(S_0) \begin{cases} x & -3y & & = 1 & [1] \\ & 3y & -6z & = 1 & [2] \\ x & & -6z & = 2 & [3] \end{cases}$$

Lorsque $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 2)$, le système est compatible car $2 = 1 + 1$. La solution du système est $(x, y, z) = (a, \frac{a-1}{3}, \frac{a-2}{6})$.

Lorsque $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$, le système est compatible. La solution du système est $(x, y, z) = (a, \frac{a}{3}, \frac{a}{6})$.

Exercice 1.3.a

La famille $((1, 2, 3, 0), (3, 1, 2, 0), (2, 3, 1, 0), (3, 2, 1, 0))$ engendre \mathbb{R}^4 si

$$\forall a \in \mathbb{R}^4, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = a_1 \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = a_2 \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = a_3 \\ 0\lambda_1 & +0\lambda_2 & +0\lambda_3 & +0\lambda_4 & = a_4 \end{cases}$$

Le vecteur $(a_1, a_2, a_3, 1) \in \mathbb{R}^4$ mais ne peut pas être généré par la famille. Donc, cette famille n'engendre pas l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 .

Exercice 1.3.b

La famille $((1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1))$ est libre si

$$\begin{cases} 1\lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0 \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & +1\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +1\lambda_3 & = 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 : \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 : -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 : -\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + L_1 : -6\lambda_3 = 0$$

Donc $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille est libre.

Exercice 1.4

La famille s'écrit $\mathcal{F} = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1))$.

La famille engendre-t-elle \mathcal{P}_2 ? bd

$$\forall a \in \mathcal{P}^2, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & & = a_1 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = a_2 \\ & \lambda_2 & -\lambda_3 & = a_3 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 : -2\lambda_3 = a_3 - a_2$$

$$L_2 : 2\lambda_2 = a_2 + a_3$$

$$L_1 : 2\lambda_1 = 2a_1 - a_2 - a_3$$

Donc $\lambda_1 = \frac{2a_1 - a_2 - a_3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}$, $\lambda_3 = \frac{a_3 - a_2}{2}$. La famille \mathcal{F} engendre l'espace vectoriel \mathcal{P}_2 .

La famille est-elle libre?

$$\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & & = 0 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 : -2\lambda_3 = 0$$

Donc $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille \mathcal{F} est libre.