Rappel de cours

Exercice 2

Exercice 2.1.a

Fausse, car plus de 7 nombres entre les nombres premiers 191 et 179.

Exercice 2.1.b

Vraie, soit 7 entiers consécutifs $a, a+1, a+2, \ldots, a+6$. Soit :

- $a = 6k$, donc c'est un multiple de 6
- $a = 6k + r, 0 < r < 6$, donc ce n'est pas un multiple de 6. si $r = 1$ alors $a + 5 = 6(k+1)$, si $r = 2$ alors $a + 4 = 6(k+1)$, $\ldots$,si $r = 5$ alors $a + 1 = 6(k+1)$

  Donc il existe toujours un multiple de 6 parmi 7 entiers consécutifs.

Exercice 2.2.a

Fausse. $a = 7$ et $b = 5$, premiers entre eux et $a + b = 12$ et $a - b = 2$ non premiers entre eux.

Exercice 2.2.b

Vraie. Preuve par contracdiction.
Supposons que ab et $a + b$ ne sont pas premiers entre eux donc $\exists d > 1, \gcd(ab, a+b) = d$. Donc $d|ab$, supposons que $d|a$, comme $d|a+b$, alors $a = k_1 d$ et $a + b = k_2 d$, donc $k_1 d + b = k_2 d$ ce qui montre aue $d|b$. On vient de trouver un d qui divise a et b, contredisant qu'ils sont premiers entre eux. Par conséquent, Si a et b sont premiers entre eux alors ab et $a + b$ sont premiers entre eux.

Exercice 2.3

Fausse. Contre-exemple $x = 27$ car $27^2 + 1 = 729 + 1 = 730 = 73 * 10$.
Sinon admettons qu'il existe un x tel que $x^2 \equiv -1 \pmod{73}$. On sait par le petit théorème de Fermat que $x^{72} \equiv 1 \pmod{73}$. Donc $x^{2^{36}} \equiv 1 \pmod{73} \implies (-1)^{36} \equiv 1 \pmod{73}$. Ce qui est vrai car $1 \equiv 1 \pmod{73}$. Donc il existe un x. Sinon admettons qu'il existe un x tel que $x^2 \equiv -1 \pmod{73}$. On sait par le le petit théorème de Fermat que $x^72 \equiv 1 \pmod{73}$. Donc $x^{2^36} \equiv 1 \pmod{73} \implies (-1)^{36} \equiv 1 \pmod{73}$. Ce qui est vrai car $1 \equiv 1 \pmod{73}$. Donc il existe un x.

Exercice 2.4

Vraie. Si $x^18 \equiv n \pmod{37}$ alors $x^18 = 37k + n$. Donc $x^36 = x^{18^2} = (37k+n)^2 = 37^2k^2 + 74nk + n^2 = 37(37k^2 + 2nk) + n^2 = n^2 \pmod{37}$. D'après le petit théorème de Fermat on a $x^{36} \equiv 1 \pmod{37}$ donc il faut que $n^2 = 1$. Ceci implique $n = 1$ ou $n = -1$ donc $x^18 \equiv 1 \pmod{37}$ ou $x^{18} \equiv -1 \pmod{37}$.

Exercice 4

Exercice 4.1

x	$x^2 \pmod{7}$
$0, 7, \ldots, 7k$	$0 \pmod{7} = 0$
$1, 8, \ldots, 7k+1$	$1 \pmod{7} = 1$
$2, 9, \ldots, 7k+2$	$4 \pmod{7} = 4$
$3, 10, \ldots, 7k+3$	$9 \pmod{7} = 2$
$4, 11, \ldots, 7k+4$	$16 \pmod{7} = 2$
$5, 12, \ldots, 7k+5$	$25 \pmod{7} = 4$
$6, 13, \ldots, 7k+6$	$36 \pmod{7} = 1$

Exercice 4.2

Montrons que $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 7 \implies a \equiv 0 \pmod 7$ et $b \equiv 0 \pmod 7$, Les valeurs possibles pour $x^2 \pmod 7$ sont $\{0, 1, 2, 4\}$, la seule combinaison qui donne $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 7$ est $a^2 \pmod 7 = 0$ et $b^2 \pmod 7 = 0$, d'aprés le tableau 1 est la seule valeur de x qui donne $x^2 \equiv 0 \pmod 7$ donc que 7 divise a et b.

Exercice 4.3

$0^2 + 0^2 = 7.0^2$ est vraie

Exercice 4.4

On a $x = 7k_x$ et $y = 7k_y$, donc $x^2 + x^2 = 49k_x^2 + 49k_y^2 = 7(7k_x^2 + 7k_y^2) = 7z^2$. Donc $z^2 = 7(k_x^2 + k_y^2)$. donc 7 divise z^2. D'aprés le tableau 1, la seule valeur pour $x^2 \equiv 0 \pmod 7$ est $x = 7k$. Donc $z = 7k$.

QED