Rappel de cours

Definition 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (U_n) une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I. On dit que (u_n) converge **simplement** vers f sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(U_n(x))$ converge vers $f(x)$.

Definition 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (U_n) une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I. On dit que (u_n) converge **uniformément** vers f sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n > n_0, |(U_n(x)) - f(x)| < \epsilon$$

Definition 3. On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ converge **normalement** sur I si la série $\sum_{n \geq 0} ||U_n(x)||_\infty$ est convergente.

Definition 4. On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ converge **normalement** sur I si la série $\sum_{n \geq 0} ||U_n(x)||_\infty$ est convergente.

Exercice 1

Exercice 1.1

Montrons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ avec $f_n(x) = e^{\frac{x}{n}}$ converge simplement pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{x}{n}} = e^0 = 1$$

La fonction $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x) = 1$.

Exercice 1.2

Montrons maintenant que $f_n(x)$ converge uniformément sur l'intervalle $[0,1]$. Il faut que $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\epsilon \implies \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$. Calculons

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|e^{\frac{x}{n}} - 1\right| \leq \left|e^{\frac{1}{n}} - 1\right|$$

car sur $[0,1]$, $\frac{x}{n} \leq \frac{1}{n}$.
Prenons $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = e^{\frac{1}{n}} - 1$, donc n_ϵ existe et doit eˆtre supérieur à $\frac{1}{\ln(\epsilon+1)}$.

Exercice 1.3

Pour montrer que $f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Il faut que $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\epsilon \implies \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$. Comme x n'est pas borné, il n'est pas possibile de trouver un $\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x}{n}$.

Exercice 2

Exercice 2.1

On a $a_n = \frac{1}{n}$, calculons

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Donc, le rayon de convergence $R = \frac{1}{L} = 1$.

Exercice 2.2

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n\geq 1} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

donc

$$S(x) = \int S'(x)dx = \int \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x)$$

Exercice 3

Pour la première série, $R_1 = 1 = \frac{1}{L}$, donc $L = 1$, c'est à dire que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
Pour la seconde série, on a $b_n = \frac{a_n}{n!}$. Calculons

$$L_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a_n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}n!}{a_n(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{1}{n+1} = 0$$

Donc $R_2 = \frac{1}{L_2} = +\infty$.

Exercice 4

Exercice 4.1

$$\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{(x-2)}+\frac{c}{(x-1)} = \frac{a(x-1)}{(x-2)^2(x-1)}+\frac{b(x-2)(x-1)}{(x-2)^2(x-1)}+\frac{c(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{a(x-1)+b(x-2)(x-1)+c(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}$$

$$= \frac{ax-a+bx^2-bx-2bx+2b+cx^2-c4x+4c}{(x-2)^2(x-1)}$$

Donc

$$\begin{cases} b+c=0 & x^2 \\ a-3b-4c=0 & x \\ -a+2b+4c=1 & x^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-c \\ a=c \\ c=1 \end{cases}$$

Donc $a=1, b=-1, c=1$.

$$\frac{1}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-1)}$$

Exercice 4.2

Utilisons le développement de Taylor sur $f_3(x) = \frac{1}{(x-1)}$ au voisinage de 0. On a

$$\frac{f_3(0)}{0!} = -1$$

$$f_3'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}, \frac{f_3'(0)}{1!} = -1$$

$$f_3^{(2)}(x) = \frac{2}{(x-1)^3}, \frac{f_3^{(2)}(0)}{2!} = -1$$

$$f_3^{(3)}(x) = \frac{6}{(x-1)^4}, \frac{f_3^{(3)}(0)}{3!} = -1$$

Donc, au voisinage de 0

$$\frac{1}{(x-1)} = \sum_{n\geq 0} -x^n$$

Utilisons le développement de Taylor sur $f_2(x) = -\frac{1}{(x-2)}$ au voisinage de 0. On a

$$\frac{f_2(0)}{0!} = \frac{1}{2}$$

$$f_2'(x) = \frac{1}{(x-2)^2}, \frac{f_3'(0)}{1!} = \frac{1}{4}$$

$$f_2^{(2)}(x) = -\frac{2}{(x-2)^3}, \frac{f_3^{(2)}(0)}{2!} = \frac{1}{8}$$

$$f_2^{(3)}(x) = \frac{6}{(x-2)^4}, \frac{f_3^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{16}$$

Donc, au voisinage de 0

$$-\frac{1}{(x-2)} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} x^n$$

Utilisons le développement de Taylor sur $f_1(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ au voisinage de 0. On a

$$\frac{f_2(0)}{0!} = \frac{1}{4}$$

$$f_2'(x) = -\frac{2}{(x-2)^3}, \frac{f_3'(0)}{1!} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$f_2^{(2)}(x) = \frac{6}{(x-2)^4}, \frac{f_3^{(2)}(0)}{2!} = \frac{3}{16}$$

$$f_2^{(3)}(x) = -\frac{24}{(x-2)^5}, \frac{f_3^{(3)}(0)}{3!} = \frac{4}{32}$$

Donc, au voisinage de 0

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n$$

Donc

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-1)} = \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n + \frac{1}{2^{n+1}} x^n - x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{n+3-2^{n+2}}{2^{n+2}} x^n$$

Le rayon de convergence de $f_3(x)$ est

$$R_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{-1} = 1$$

Le rayon de convergence de $f_2(x)$ est

$$R_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}$$

Le rayon de convergence de $f_1(x)$ est

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{2^{n+3}}}{\frac{n+1}{2^{n+2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{2(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{2}$$

Le rayon de converge de $f(x)$ au voisinage de 0 est $min(R_1, R_2, R_3) = \frac{1}{2}$.

Exercice 5

Exercice 5.1

On a $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x(t) : [0,1] \to \frac{e^{-xt}}{1+t}$ est continue car assemblage de fonctions continues sur t. Donc, la fonction F est bien définie.
La dérivée partielle $\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{-xt}}{1+t}\right] dt = -\frac{te^{-xt}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ car assemblage de fonctions continues.
Donc $F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{d}{dx}\left[\frac{e^{-xt}}{1+t}\right] dt = \int_0^1 -\frac{te^{-xt}}{1+t} dt$$

Exercice 5.2

$$F'(x) - F(x) = \int_0^1 -\frac{te^{-xt}}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t} dt = -\int_0^1 \frac{te^{-xt}+e^{-xt}}{1+t} dt = -\int_0^1 \frac{(t+1)e^{-xt}}{1+t} dt = -\int_0^1 e^{-xt} dt$$

$$= -\left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^1 = \frac{e^{-xt}}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}(1-e^{-xt})$$

QED