Révision

Definition 1. Un *n-espace Euclidien* $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de n réels (appelé *n-tuple*).

$$\mathbb{R}^n = \{(p_1, \ldots, p_n), p_i \text{est un réel pour } i = 1, \ldots, n\}$$

Si $p = (p_1, \ldots, p_n)$ et $q = (q_1, \ldots, q_n)$, on définit $p + q = (p_1 + q_1, \ldots, p_n + q_n)$ et $\lambda p = (\lambda p_1, \ldots, \lambda p_n)$.

Definition 2. On définit le produit scalaire $\cdot$ comme

$$p \cdot q = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$$

La norme d'un vecteur comme

$$\|p\| = \sqrt{p \cdot p}$$

La distance entre 2 points:

$$distance(p, q) = \|p - q\|$$

Definition 3. On a les propriétés suivantes: $p \cdot q = q \cdot p$, $(p + r) \cdot q = p \cdot q + r \cdot q$, $(\lambda p) \cdot q = \lambda(p \cdot q) = p \cdot (\lambda q)$ et $\|\lambda p\| = |\lambda| \|p\|$.
Les inégalités suivantes: $|p \cdot q| \leq \|p\| \|q\|$ (Cauchy-Schwarz) et $\|p + q\| \leq \|p\| + \|q\|$ (triangulaire).

Definition 4. On définit un angle entre 2 vecteurs comme:

$$\cos \theta = \frac{p \cdot q}{\|p\| \|q\|}$$

Definition 5. On définit une application linéaire A (linear map) de $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ comme:

$$A(\lambda_1 p + \lambda_2 q) = \lambda_1 Ap + \lambda_2 Aq$$

Definition 6. On définit une application linéaire J (complex) de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ comme:

$$J(p, q) = (-q, p)$$

L'application J a les propriétés suivantes: $J^2 = -1$, $(Jp) \cdot (Jq) = p \cdot q$ et $(Jp) \cdot p = 0$.

Definition 7. On définit une courbe paramétrée $\alpha(t) :]t_1, t_2[\to \mathbb{R}^n$ comme:

$$\alpha(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t))$$

avec chaque $a_i(t)$ une fonction de $]t_1, t_2[\to \mathbb{R}$.

Exemple de courbes paramétrées,

- la droite passant par 2 points p et q, $\beta(t) = p + t(q - p) = (1 - t)p + tq$
- le cercle de centre $p = (p_1, p_2)$ et de rayon r, $\theta(t) = (p_1 + r \cos(t), p_2 \sin(t))$ avec $0 \leq t < 2\pi$.

Definition 8. Si $\alpha(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t))$ est une courbe paramétréd, on définit la vitesse (vélocuté)de α comme:

$$\alpha'(t) = (a_1'(t), a_2'(t), \ldots, a_n'(t))$$

Definition 9. Une courbe $\alpha(t) =]t_1, t_2[\to \mathbb{R}^n$ est dite réguliaire si chaque $a_i(t)$ est dérivable et que la vélocité en tout point n'est pas nulle. Si $\forall t \in]t_1, t_2[, \|\alpha'(t)\| = 1$ alors α est dite *vitesse unité*

Definition 10. Soit 2 courbes paramétrables différentiables $\alpha(t) = (a, b) \to \mathbb{R}^n$ et $\beta(t) = (a, b) \to \mathbb{R}^n$, on dit que:

- β est une *reparamétrage positif* de α si il existe une fonction dérivable $h : (c, d) \to (a, b)$ tel que $\forall tin]c, d[, h'(t) > 0$ et $\beta(t) = (\alpha \circ h)(t)$.

- β est une *reparamétrage négatif* de α si il existe une fonction dérivable $h : (c,d) \to (a,b)$ tel que $\forall tin]c,d[, h'(t) < 0$ et $\beta(t) = (\alpha \circ h)(t)$.
- β est une *reparamétrage* de α si β est soit un reparamétrage positif, soit un reparamétrage négatif de α.

Definition 11. Quelques propriétés $\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t)$, $\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\|h'(t)$

Definition 12. On définit la *longueur* d'une courbe paramétrée α sur l'intervale $[a,b]$ comme:

$$length[\alpha] = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Definition 13. Si β est un reparamétrage de α alors

$$length[\beta]\ sur\ [c,d] = length[\alpha]\ sur\ [h(c), h(d)]$$

Definition 14. Prenons une chiffre c avec $a < c < b$. La *la fonction de longueur d'arc* s_α de la courbe paramétrée $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}$ à partir de c comme:

$$s_\alpha(t) = length[c,t][\alpha] = \int_c^t \|\alpha'(u)\| du$$

pour $a \leq t < b$.

Definition 15. Soit $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^2$, on définit la courbure $k2[\alpha]$ et α par:

$$k2[\alpha](t) = \frac{\alpha''(t).J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

pour $a \leq t < b$.

Definition 16. Le reparamétrage par longueur d'arcde la courbe paramétrée α, (ou reparametrage selon le vecteur vitesse unité) est :

$$s_\alpha(t) = length[0,t][\alpha] = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du$$

Exercice 1

1.1

QED