Rappel de cours

-

Exercice 1.1

$$\begin{cases} x & +y & -z & -t & = 0 \\ x & -y & +z & -t & = 0 \\ x & & & -t & = 0 \\ & y & -z & & = 0 \end{cases}$$

C'est un système d'équations homogène de rang 4, à 4 inconnues. Aucune ligne nulle. Les inconnues principales sont x et y. Les inconnues secondaires sont z et t.

Exercice 1.2

$$(S_0)\begin{cases} x & -3y & & = a_1 & [1] \\ & 3y & -6z & = a_2 & [2] \\ x & & -6z & = a_3 & [3] \end{cases}$$

Calculer [1]+[2], $x - 6z = a_1 + a_2$, qui est égale à l'équation [3]. Donc $a_1 + a_2 = a_3$.
Ou calculer [1]-[3], $-3y + 6z = a_1 - a_3$, qui est égale à la négation de l'équation [2]. Donc $a_2 = a_3 - a_1$.

$$(S_0)\begin{cases} x & -3y & & = 1 & [1] \\ & 3y & -6z & = 1 & [2] \\ x & & -6z & = 2 & [3] \end{cases}$$

Lorsque $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 2)$, le systm̀e est compatible car $2 = 1 + 1$. La solution du système est $(x, y, z) = (a, \frac{a-1}{3}, \frac{a-2}{6})$.

Lorsque $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$, le systm̀e est compatible. La solution du système est $(x, y, z) = (a, \frac{a}{3}, \frac{a}{6})$.

Exercice 1.3.a

La famille $((1, 2, 3, 0), (3, 1, 2, 0), (2, 3, 1, 0), (3, 2, 1, 0))$ engendre $\mathbb{R}^4$ si

$$\forall a \in \mathbb{R}^4, \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = a_1 \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = a_2 \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = a_3 \\ 0\lambda_1 & +0\lambda_2 & +0\lambda_3 & +0\lambda_4 & = a_4 \end{cases}$$

Le vecteur $(a_1, a_2, a_3, 1) \in \mathbb{R}^4$ mais ne peux pas être généŕe par la famille. Donc, cette famille n'engendre pas l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

Exercice 1.3.b

La famille $((1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1))$ est libre si

$$\begin{cases} 1\lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0 \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & +1\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +1\lambda_3 & = 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 : \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 : -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 : -\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + L_1 : -6\lambda_3 = 0$$

Donc $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille est libre.

Exercice 1.4

La famille s'écrit $\mathcal{F} = ((1,1,0),(0,1,1),(0,1,-1))$.

La famille engendre-t-elle $\mathcal{P}_2$? bd

$$\forall a \in \mathcal{P}^2, \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & & = a_1 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = a_2 \\ & \lambda_2 & -\lambda_3 & = a_3 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 : -2\lambda_3 = a_3 - a_2$$

$$L_2 : 2\lambda_2 = a_2 + a_3$$

$$L_1 : 2\lambda_1 = 2a_1 - a_2 - a_3$$

Donc $\lambda_1 = \frac{2a_1 - a_2 - a_3}{2}$, $\lambda_1 = \frac{a_2 + a_3}{2}$, $\lambda_1 = \frac{a_3 - a_2}{2}$. La famille $\mathcal{F}$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$.

La famille est-elle libre?

$$\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & & = 0 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 : -2\lambda_3 = 0$$

Donc $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 1.5

La famille $\mathcal{F} = (x \to \sin(x), x \to f(x))$.

$$\forall g : x \to g(x), \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \{ \;\lambda_1(x \to \sin(x)) \quad \lambda_2(x \to f(x)) = x \to g(x)$$

Non. Prenons $g : x \to \cos(x)$. Pour $x \to \infty$, on a $\lambda_1(x \to \sin(x)) = (x \to cos(x)$ Il n'existe pas de λ_1 qui engendre la fonction $x \to \cos(x)$ car $\sin(x) \neq \frac{\cos(x)}{\lambda_1}$.

Exercice 1.6

La famille $((1,0,0,0),(1,2,0,0),(1,2,3,0),(1,2,3,4))$ est libre si

$$\begin{cases} \lambda_1 & & & & = 0 \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & & & = 0 \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & & = 0 \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & +4\lambda_4 & = 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$L_1 : \lambda_1 = 0$$

$$L_2 : 2\lambda_2 = 0$$

$$L_3 : 3\lambda_3 = 0$$

$$L_4 : 4\lambda_4 = 0$$

Donc $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille est libre.

$$E \subset F \, ssi \, \forall f \in E, \, f \in F$$

On a $E = \lambda_{E1} u_1 + \lambda_{E2} u_2$ et $F = \lambda_{F1} u_1 + \lambda_{F2} u_2 + \lambda_{F3} u_3$
Soit $f \in E$, alors $f \in F$ avec $\lambda_{F1} = \lambda_{E1}, \lambda_{F2} = \lambda_{E2}, \lambda_{F3} = 0$.
L'inclusion est strict car lorsque $\lambda_{F3} \neq 0$ alors $f \in F$ mais $f \notin E$.

Soit $f \in F$, alors $f \in \mathbb{R}^4$ avec $\lambda_1 = \lambda_{F1}, \lambda_2 = \lambda_{F2}, \lambda_3 = \lambda_{F3}$.
L'inclusion est strict car $(3,3,3,3) \in \mathbb{R}^4$ mais $(1,2,3,6) \notin F$ car $\neg\exists \lambda_{F1}, \lambda_{F2}, \lambda_{F3}, \lambda_{F4}, 0\lambda_{F1} + 0\lambda_{F2} 0\lambda_{F3} 0\lambda_{F4} = 6$.