

## Rappel de cours

**Definition 1.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. Une partie  $F$  de  $E$  est appelée un sous-espace vectoriel si :

- $0_E \in F$ ,
- $u + v \in F$  pour tous  $u, v \in F$ ,
- $\lambda.u \in F$  pour tout  $\lambda \in K$  et tout  $u \in F$ .

**Definition 2.** Une famille  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  de  $E$  est une famille libre ou linéairement indépendante si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_p = 0$$

**Definition 3.** Soient  $v_1, \dots, v_p$  des vecteurs de  $E$ . La famille  $\{v_1, \dots, v_p\}$  est une famille génératrice de l'espace vectoriel  $E$  si tout vecteur de  $E$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $v_1, \dots, v_p$ . Ce qui peut s'écrire aussi :

$$\forall v \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p, v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

## Exercice 1

Soit  $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0\}$  et  $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0\}$ . Il faut calculer  $U \cap V$ .

Trouvons une base pour l'espace vectoriel  $U$ .

$$U = \begin{pmatrix} -x_2 + 2x_3 - 4x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = ((-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (-4, 0, 0, 1))$$

Trouvons une base pour l'espace vectoriel  $V$ .

$$V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1 - 3x_2 - 5x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = ((1, 0, -2, 0), (0, 1, -3, 0), (0, 0, -5, 1))$$

Pour qu'un vecteur  $v$  appartienne à  $U \cap V$ , il est nécessaire et suffisant d'avoir  $v$  comme une combinaison linéaire des 2 bases de  $U$  et  $V$ , donc

$$v = a_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{14}{5} \end{vmatrix}$$

D'où

$$v = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

On obtient le système d'équations

$$\begin{cases} a_1 = b_2 \\ a_2 = -\frac{1}{5}b_2 + \frac{3}{5}b_3 \\ a_3 = b_3 \\ b_1 = \frac{7}{5}b_2 + \frac{14}{5}b_3 \end{cases}$$

On peut maintenant calculer  $v$

$$v = b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{5}b_2 + \frac{3}{5}b_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La base de  $U \cap V$  est

$$\begin{aligned} &((-1 - \frac{1}{5}, 2, 1 - \frac{1}{5}, 0, 0 - \frac{1}{5}, 1, 0 - \frac{1}{5}, 0), (\frac{3}{5}, 2 - 4, \frac{3}{5}, 0 + 0, \frac{3}{5}, 1 + 0, \frac{3}{5}, 0 + 1)) \\ &((- \frac{7}{5}, 1, -\frac{1}{5}, 0), (-\frac{14}{5}, 0, \frac{3}{5}, 1)) \end{aligned}$$

## Exercice 2

QED