

Rappel de cours

Exercice 1**Exercice 1.1**

On a

$$e^A = \sum_{n=0 \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} A^n = A^0 + A^1 + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{6} A^3 + \dots + \frac{1}{n!} A^n + \dots$$

On a aussi

$$A^p = \begin{bmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^p \end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} e^A &= A^0 + A^1 + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{6} A^3 + \dots + \frac{1}{n!} A^n + \dots \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^2 \end{bmatrix} + \dots + \frac{1}{p!} \begin{bmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^p \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_1^2 + \dots + \frac{1}{p!} \lambda_1^p + \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \frac{1}{2} \lambda_2^2 + \dots + \frac{1}{p!} \lambda_2^p + \dots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n + \frac{1}{2} \lambda_n^2 + \dots + \frac{1}{p!} \lambda_n^p + \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le développement limité de $e^x = x^0 + x^1 + \frac{1}{2} x^2 + \dots + \frac{1}{p!} x^p + \dots$

Donc

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Si la matrice A est diagonalisable alors $\exists P \text{ et } D, A = PDP^{-1}$. Donc on a $A^n = A.A.\dots.A = PDP^{-1}.PDP^{-1}.\dots.PDP^{-1} = PD^n P^{-1}$. Donc

$$e^A = \sum_{k=0 \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0 \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} P D^k P^{-1} = P \cdot \sum_{k=0 \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} D^k \cdot P^{-1} = P \cdot e^D \cdot P^{-1}$$

On peut sortir les 2 matrices P et P^{-1} de la somme car elles peuvent être vues comme des constantes dans la somme (indépendance par rapport à n).

Exercice 1.2

Si la matrice A est nilpotente alors $\exists n, A^n = 0$ Donc

$$e^A = \sum_{k=0 \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0 \rightarrow n-1} \frac{1}{k!} A^k + \sum_{k=n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0 \rightarrow n-1} \frac{1}{k!} A^k + \frac{1}{n!} \cdot 0 + \frac{1}{n+1!} \cdot 0 + \dots = \sum_{k=0 \rightarrow n-1} \frac{1}{k!} A^k$$

Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degrés n alors

$$P(A) = a_0 A^0 + a_1 A^1 + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n = \sum_{k=0 \rightarrow n} a_k A^k$$

Définissons le polynôme P tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = \frac{1}{k!}$ et $a_0 = 1$ donc

$$P(A) = \sum_{k=0 \rightarrow n} a_k A^k = a_0 A^0 + \sum_{k=1 \rightarrow n} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0 \rightarrow n} \frac{1}{k!} A^k = e^A$$

si la matrice A est nilpotente de rang $n + 1$.

Exercice 1.3

On a $A = D + N$ avec D une matrice diagonale, N une matrice nilpotente et $DN = ND$. Donc

$$e^A = \sum_{k=0 \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0 \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} (D + N)^k$$

$$e^D e^N = \sum_{k=0 \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} D^k \cdot \sum_{l=0 \rightarrow n-1} \frac{1}{l!} N^l$$

Comme N est nilpotente de rang n on a

$$\sum_{k=0 \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} D^k \cdot \sum_{l=0 \rightarrow \infty} \frac{1}{l!} N^l$$

Donc

$$\begin{aligned} &= D^0 \sum_{l=0 \rightarrow \infty} \frac{N^l}{l!} + D^1 \sum_{l=0 \rightarrow \infty} \frac{N^l}{l!} + \frac{1}{2} D^2 \sum_{l=0 \rightarrow \infty} \frac{N^l}{l!} \dots + \frac{1}{n!} D^n \sum_{l=0 \rightarrow \infty} \frac{N^l}{l!} + \dots \\ &= \sum_{l=0 \rightarrow \infty} D^0 \frac{N^l}{l!} + \sum_{l=0 \rightarrow \infty} D^1 \frac{N^l}{l!} + \sum_{l=0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2} D^2 \frac{N^l}{l!} \dots + \sum_{l=0 \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} D^n \frac{N^l}{l!} + \dots \\ &= \sum_{k=0 \rightarrow \infty} \sum_{l=0 \rightarrow \infty} \frac{D^k}{k!} \frac{N^l}{l!} \\ &= \sum_{m=0 \rightarrow \infty} \sum_{k=0 \rightarrow m} \frac{D^k}{k!} \frac{N^{m-k}}{(m-k)!} \\ &= \sum_{m=0 \rightarrow \infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0 \rightarrow m} \frac{m!}{k!(m-k)!} D^k N^{m-k} \end{aligned}$$

Comme les matrices N et D commutent,

$$= \sum_{m=0 \rightarrow \infty} \frac{1}{m!} (D + N)^m = e^{D+N}$$

On peut faire le même raisonnement en partant de $e^N e^D$

Pas besoin de D diagonale??

Exercice 1.4

D'après le Théorème de la décomposition de Dunford, toute matrice M peut se décomposer en une somme de deux matrices D et N tel que D soit diagonalisable, N soit nilpotente et les 2 matrices commutent ($ND = DN$). Donc pour calculer, on trouve les matrices A et B et $e^M = e^{A+B} = e^A e^B$. Comme A est diagonalisable on a $A = PDP^{-1}$. Donc $e^A = Pe^D P^{-1}$. La matrice D est diagonale donc le calcul de e^D est trivial (question 1). Comme B est nilpotente de rang n , on peut faire le calcul de e^B car on a une borne n .

Exercice 2

Exercice 2.1

Exercice 12.3.

Montrons que si F_1 et F_2 sont deux sous espace affines de E alors $F_1 \subset F_2 \implies F_1 \cup F_2$ est un sous-espace affine. On a $F_1 \subset F_2 \implies F_1 \cup F_2 = F_2$ et F_2 est un sous espace affine par hypothèse donc $F_1 \cup F_2$ l'est également. Même raisonnement pour $F_2 \subset F_1 \implies F_1 \cup F_2$ est un sous-espace affine.

Montrons que si F_1 et F_2 sont deux sous espace affines de E alors si $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace affine alors $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$. Preuve par l'absurde. Il existe P tel que $P \in F_1 - F_2$ et Q tel que $Q \in F_2 - F_1$. On a $P \in F_1 \in F_1 \cup F_2$ et $Q \in F_2 \in F_1 \cup F_2$. Donc $P - Q \in F_1 \cup F_2$. On peut écrire $P = Q + (P - Q)$ donc $(P - Q) \notin F_2$ car sinon P serait dans F_2 et contredirait l'hypothèse $P \in F_1 - F_2$. De même, $Q = P + (Q - P)$ donc $(Q - P) \notin F_1$ car sinon Q serait dans F_1 et contredirait l'hypothèse $Q \in F_2 - F_1$. Par conséquent $P - Q \notin F_1 \cup F_2$ ce qui contredit notre hypothèse de départ.

Exercice 13.1

Soit a et b deux points de T on a $\text{vect}(\vec{ab}) = b - a = u_1 + k_b \vec{T} - (u_1 + k_a \vec{T}) = (k_b - k_a) \vec{T}$ donc $\text{vect}(\vec{ab}) \in \vec{T}$

Soit $v \in \vec{V}$, on a $v_1 + kv \in V \subset T$ et par définition $v_1 \in V \subset T$. Donc $(v_1 + v) - v_1 = v \in \vec{T}$. Même raisonnement pour $w \in \vec{W}$, donc $w \in \vec{T}$.

On peut conclure que $\vec{V} + \vec{W} + \text{vect}(\vec{ab}) \subset \vec{T}$

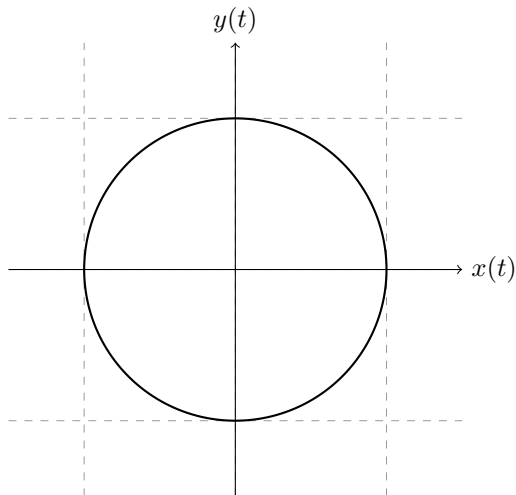
On a soit $V \subset W$ ou $W \subset V$ (voir question précédente). Prenons le cas $W \subset V$, donc $V = v_1 + \vec{V} \subset v_1 + (\vec{V} + \vec{W} + \text{vect}(\vec{ab}))$ et $W = v_1 + \vec{W} \subset v_1 + (\vec{V} + \vec{W} + \text{vect}(\vec{ab}))$ Donc $T = V \cup W \subset v_1 + (\vec{V} + \vec{W} + \text{vect}(\vec{ab}))$ et par conséquent $\vec{T} \subset \vec{V} + \vec{W} + \vec{ab}$.

On peut conclure que $\vec{T} = \vec{V} + \vec{W} + \text{vect}(\vec{ab})$

Exercice 3

Exercice 3.1

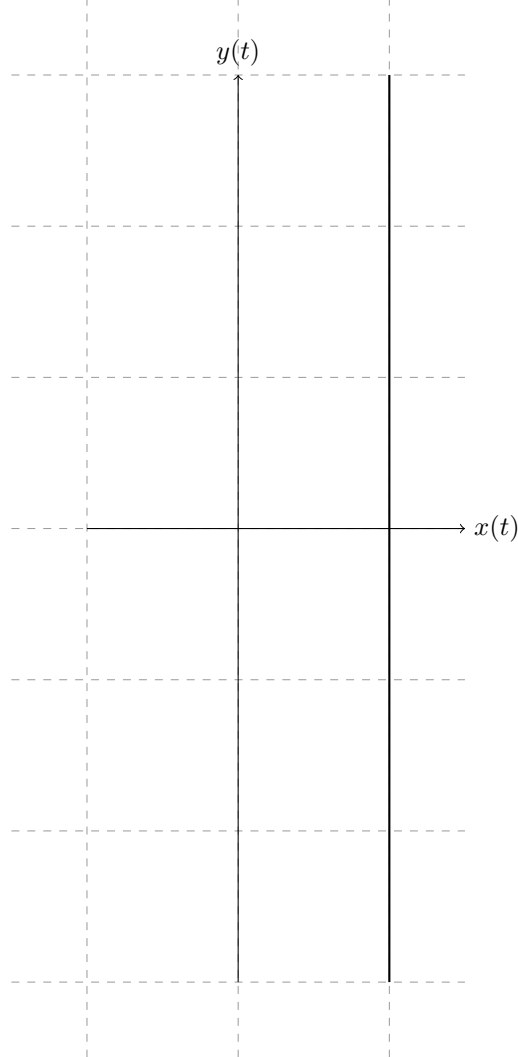
$E = \{(x^2 + y^2 = 1)\}$. C'est l'équation paramétrique du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.



Pas un espace affine (ni une droite, ni un point ni un plan)

Exercice 3.2

$E = \{((x-1)^2 + 0(y-1)^2 = 0)\}$, il faut que $x = 1$ et y quelconque donc E est la droite verticale passant

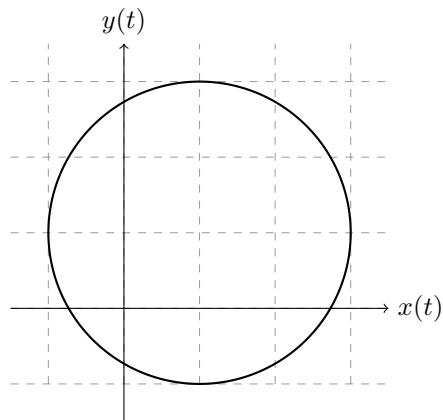


par le point $(1,0)$.

Espace affine $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$.

Exercice 3.3

$E = \{((x-1)^2 + (y-1)^2 = 4)\}$, C'est l'équation paramétrique du cercle de centre $(1,1)$ et de rayon 2.



Pas un espace affine (ni une droite, ni un point ni un plan)

Exercice 3.4

$$E = \{((x-2)^2 + (y-2)^2 = -1)\}, \text{ pas de solution } E = \emptyset.$$

Pas un espace affine (ni une droite, ni un point ni un plan)

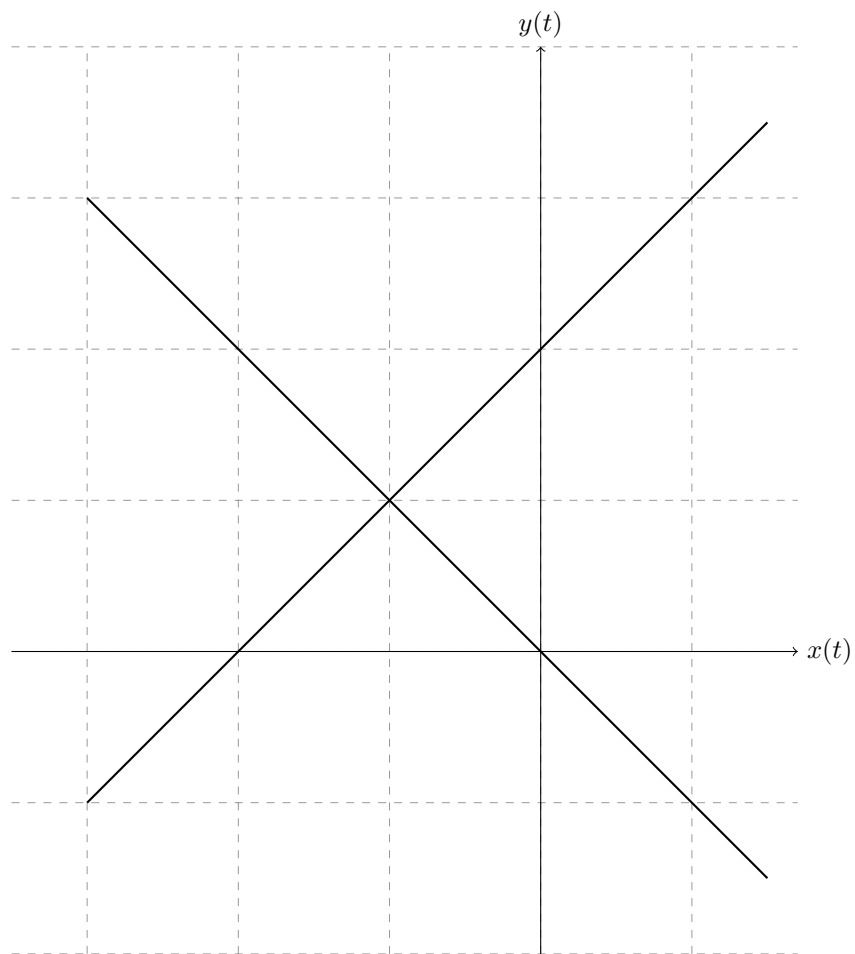
Exercice 3.5

$$E = \{((x+1)^2 + (y-1)^2 = 0)\}, \text{ solution est un seul point } (-1, 1).$$

$$\text{Espace affine } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (\mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}).$$

Exercice 3.6

$$E = \{(x+1)^2 - (y-1)^2 = 0\} = \{(x+1)^2 = (y-1)^2\} = \{|x+1| = |y-1| = |1-y|\}. \text{ Première solution } x = -y, \text{ seconde solution } y = x+2. \text{ Donc 2 droites.}$$



Union de 2 sous-espaces affines:

- $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (\mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$.
- $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (\mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix})$

Ce n'est pas un sous espace affine. Car la relation de Chasles n'est pas respect'e si on prend le premier vecteur sur la première droite et le second sur la seconde.