

## Rappel de cours

**Definition 1.** La relation  $xRy$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble  $E$  ssi:

- $\forall x \in E, xRx$
- $\forall x, y \in E, xRy \Leftrightarrow yRx$
- $\forall x, y, z \in E, xRy \wedge yRz \Leftrightarrow xRz$

## Exercice 1

### Exercice 1.1

- $\forall x \in \mathbb{N}, x \sim x \Leftrightarrow x = 2^k x$  est vrai pour  $k = 0$
- $\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \sim y \Rightarrow y \sim x) \Leftrightarrow (y = 2^{k_1} x \Rightarrow x = 2^{k_2} y)$  est vrai pour  $k_2 = -k_1$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, (x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z) \Leftrightarrow (y = 2^{k_1} x \wedge z = 2^{k_2} y \Rightarrow z = 2^{k'} x)$  est vrai pour  $k' = k_1 + k_2$

### Exercice 1.2

Admettons qu'une classe d'équivalence a au moins 2 nombres impairs, donc  $\exists k \in \mathbb{N}, (2n+1) = 2^k(2m+1)$ . La seule valeur de  $k$  possible est  $k = 0$  car pour  $k > 0$  un coté est impair et l'autre est pair et pour  $k < 0$ , un coté n'est pas un entier. Pour  $k = 0$  on a  $(2n+1) = 2^0(2m+1)$ , donc  $n = m$ . Si il y a un nombre impair, il est unique.

Chaque nombre impair est dans une classe d'équivalence car pour tout  $a = 2n+1 \in E$ , soit  $2a \in E$ , donc  $a \sim 2a$ , soit  $2a \notin E$  alors  $a \sim a$ .

L'ensemble  $E$  contient  $n$  nombres impairs, donc il y a  $n$  classes d'équivalence.

### Exercice 1.3

Comme  $|A| = n+1$  alors il y a au moins deux éléments de  $A$  qui sont dans la même classe d'équivalence (car  $E$  contient  $n$  classes d'équivalence). Si ils sont dans la même classe alors  $a \sim b$  existe.

Si on a  $a \sim b$ , alors  $a = 2^k b$ . Lorsque  $k \geq 0$ ,  $a$  est un multiple de  $b$ , lorsque  $k < 0$ ,  $b$  est un multiple de  $a$ .

## Exercice 2

On a  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ , Soit  $d = \text{pgcd}(a+b, a-b)$ , donc  $a+b = n.d$  et  $a-b = n'.d$ .

$$2a = (a+b) + (a-b) = n.d + n'.d = d(n+n')$$

$$2b = (a+b) - (a-b) = n.d - n'.d = d(n-n')$$

Donc  $d$  divise le  $\text{pgcd}(2a, 2b)$  et  $\text{pgcd}(2a, 2b) = 2$  car  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux. Il existe que 2 nombres qui divisent 2: 1 ou 2.

$$\text{pgcd}(a+b, a-b) = 1 \text{ ou } 2$$

## Exercice 3

Équations diophantiennes du premier degré. 1. Trouver une solution particulière de  $15x - 22y = 1$ ;  $x = 3, y = 2$ . Donc  $15 \cdot 3 - 22 \cdot 2 = 1$ . En soustrayant les 2 équations on a

$$15x - 22y - (15 \cdot 3 - 22 \cdot 2) = 0, 15(x-3) - 22(y-2) = 0, 15(x-3) = 22(y-2)$$

2. Les entiers 15 et 22 sont premiers entre eux donc  $22|(x-3)$ , donc  $x = 22k + 3$ .

$$15(x-3) = 22(y+2), 15(22k+3-3) = 22(y+2), y = 15k + 2$$

La solution est  $x = 22k + 3$  et  $y = 15k + 2$ .

## Exercice 4

$$15x + 24y = 5, 3(5x + 8y) = 5$$

. Pas de solution car 5 n'est pas un multiple de 3.

## Exercice 5

Preuve par récurrence. Soit la suite  $a_{n+1} = 10a_n + 1$  et  $a_0 = 1$ . La suite  $a_n$  représente les nombres 1, 11, 111, 1111, 11111, ... 1. Vrai pour  $a_0$  avec  $n = 1, m = 1$ . Supposons que  $a_n \bmod n.m = 0$ , quelles sont les conditions pour que  $a_{n+1} \bmod n.m' = 0$ ? On a  $a_n \bmod nm = 0$  donc  $\exists k, a_n = k.n.m$ .

$$a_{n+1} \bmod n.m' = (10a_n + 1) \bmod n.m' = (10k.n.m + 1) \bmod n.m'$$

Pour que  $a_{n+1} \bmod n.m' = 0$ ? il faut  $\exists k', a_{n+1} = k'.n.m'$  donc  $k'.n.m' = 10k.n.m + 1$ .

Sous quelles conditions est-ce vrai?

Si  $n = 2l$  (ie  $2|n$ ), alors  $2k'.l.m' = 20k.l.m + 1$ , il n'existe aucune valeur de  $k, m, k', m'$  car un coté est pair et l'autre impair.

Si  $n = 5l$  (ie  $5|n$ ), alors  $5k'.l.m' = 50k.l.m + 1$ , il n'existe aucune valeur de  $k, m, k', m'$  car un coté se termine par 5 ou 0 et l'autre par 1.

## Exercice 6

Il suffit de trouver tous les entiers  $j, m$  qui vérifient  $31j + 12m = 208$ .

Trouver une solution particulière à l'équation  $31j + 12m = 1$ , soit  $j = -5$  et  $m = 13$ . Donc

$$308 = 308(31.(-5) + 12.13) = 31j + 12m$$

$$31(j + 308.5) = 12(13.308 - m)$$

Les entiers 12 et 31 sont premiers entre eux donc  $12|j + 308.5$  et  $12k = j + 308.5$

$$31(12k - 308.5 + 308.5) = 12(13.308 - m), 31.12k = 12(13.308 - m), 31k = 13.308 - m, m = 13.308 - 31k$$

Il faut trouver le  $k$  tel que  $1 \leq m \leq 12$ .  $k = 129$ , et  $j = 8$ ,  $m = 5$ . Donc il est né le 8 mai.

## Exercice 7

### Exercice 7.1

$1995 = 3 * 5 * 7 * 19$  et  $2975 = 5^2 * 7 * 17$ , donc  $\text{pgcd}(1995, 2975) = 5 * 7 = 35$

$2975 = 1.1995 + 980$ ,  $1995 = 2.980 + 35$ ,  $980 = 40.35 + 0$  donc  $\text{pgcd}(2975, 1995) = \text{pgcd}(1995, 980) = \text{pgcd}(980, 35) = 35$

### Exercice 7.2

$n.k + 8 = 2003$  et  $n * k' + 27 = 3002$ . donc  $nk = 1995$  et  $nk' = 2975$  et  $\text{pgcd}(1975, 2975) = 35$ .

Ceci fait  $n.k = 35 * 57$  et  $n.k' = 35 * 85$ . Donc, la solution est  $n = 35$ .

## Exercice 8

On cherche  $c$  tel que  $11c + 1 = x^2$ . Ceci donne l'équation diophantienne de degré 2:  $x^2 - 11c - 1 = 0$ . La solution est  $x = 22k + 21$  et  $c = 44k^2 + 84k + 40 = 2(22k^2 + 42k + 20)$ . Il n'existe pas de nombre premier  $c$ .

QED