Question 1

On voit clairement sur le nuage de points (circonference/hauteur) que cela suit une droite. On essaye de trouver les valeurs de la droites qui minimisent le risque quadratique.

Question 2

Pour minimiser la fonction $\varphi(\beta_1, \beta_2)$ il faut trouver dériver la fonction par rapport à $beta_1$ et $beta_2$ et trouver les valeurs qui annulent les 2 dérivées.

$$\frac{\partial\varphi(\beta_1,\beta_2)}{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_1-\beta_2x_i)^2}{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-\beta_1Y_i-\beta_2x_iY_i-\beta_1Y_i+\beta_1^2+\beta_1\beta_2x_i-\beta_2x_iY_i+\beta_2x_i\beta_1+\beta_2^2x_i^2}{\beta_1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}-Y_i-Y_i+2\beta_1+\beta_2x_i+\beta_2x_i = 2\sum_{i=1}^{n}-Y_i+\beta_2x_i+\beta_1$$

$$\frac{\partial\varphi(\beta_1,\beta_2)}{\beta_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_1-\beta_2x_i)^2}{\beta_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-\beta_1Y_i-\beta_2x_iY_i-\beta_1Y_i+\beta_1^2+\beta_1\beta_2x_i-\beta_2x_iY_i+\beta_2x_i\beta_1+\beta_2^2x_i^2}{\beta_2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}-x_iY_i+\beta_1x_i-x_iY_i+\beta_1x_i+2\beta_2x_i^2 = 2\sum_{i=1}^{n}x_i(-Y_i+\beta_2x_i+\beta_1)$$

On cherche $\hat{\beta_1}$ et $\hat{\beta_2}$ les valeurs qui annulent le système

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}x_i(-Y_i+\beta_2x_i+\beta_1)=0 \\ \sum_{i=1}^{n}-Y_i+\beta_2x_i+\beta_1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}-Y_ix_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_2x_i^2+\sum_{i=1}^{n}\beta_1x_i=0 & (1) \\ \sum_{i=1}^{n}-Y_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_2x_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_1=0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}-Y_ix_i+\beta_2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\beta_1\sum_{i=1}^{n}x_i=0 & (1) \\ \sum_{i=1}^{n}-Y_i+\beta_2\sum_{i=1}^{n}x_i+n\beta_1=0 & (2) \end{cases}$$

On fait $(3)=n(1)-(2)\sum_{i=1}^{n}x_i$

$$\begin{cases} n\sum_{i=1}^{n}-Y_ix_i+n\beta_2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}Y_i\sum_{i=1}^{n}x_i-\beta_2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=0 & (3) \\ \sum_{i=1}^{n}-Y_i+n\beta_2\sum_{i=1}^{n}x_i+n\beta_1=0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -n\sum_{i=1}^{n}Y_ix_i+\sum_{i=1}^{n}Y_i\sum_{i=1}^{n}x_i=\beta_2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-n\beta_2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & (3) \\ \sum_{i=1}^{n}-Y_i+n\beta_2\sum_{i=1}^{n}x_i+n\beta_1=0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i\sum_{i=1}^{n}x_i-n\sum_{i=1}^{n}Y_ix_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-n\sum_{i=1}^{n}x_i^2} & (3) \\ \beta_1=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}Y_i-n\beta_2\sum_{i=1}^{n}x_i) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i\sum_{i=1}^{n}x_i-n\sum_{i=1}^{n}Y_ix_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-n\sum_{i=1}^{n}x_i^2} & (3) \\ \beta_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iY_i-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}Y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-n\sum_{i=1}^{n}x_i^2} & (2) \end{cases}$$

Question 3

Voir Python On obtient $\beta_1 = 9.037475668452768$ et $\beta_2 = 0.257137855007109$.

Question 4

On a $Y_i = \beta_1 + \beta_2x_i\epsilon_i$, donc $\epsilon_i = \beta_1 + \beta_2x_i - Y_i$ avec X_i et Y_i sont 2 variables aléatoires indépendantes et la combinaison linéaire de variables aléatoires est une variable aléatoire. Identiquement distribué????.

En calculant la moyenne de ϵ_i, on obtient $5.07\mathrm{e}^{-16}$. Il semble raisonnable de dire que $\varphi(\beta_1, \beta_2)$ est un estimateur sans biais, donc $E(\beta_1 + \beta_2x_i - Y_i) - E(\epsilon_i) = 0$.

Question 5

???

Question 6

Pour trouver le minimum par rapport a β, il suffit de dériver l'expression par rapport à β et annuler l'expression. On remarque que $\sum_{i=1}^{n}(Y - X\beta)^2 = (Y - X\beta)^t(Y - X\beta)$

$$(Y - X\beta)^t(Y - X\beta) = Y^tY - 2\beta^tX^tY + \beta^tX^tX\beta$$

et

$$\frac{\partial(Y - X\beta)^t(Y - X\beta)}{\partial\beta} = X^tY - X^tX\beta$$

On cherche

$$X^tY - X^tX\hat{\beta} = 0$$

Donc

$$\hat{\beta} = (X^tX)^{-1}X^tY$$

Question 7

Voir Python

Question 8

??

Test de Student

Question 9

Soient Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite et U une variable indépendante de Z et distribuée suivant la loi la loi du chi-deux à k degrés de liberté. Par définition la variable $T = \frac{Z}{\sqrt{U/k}}$ suit une loi de Student à k degrés de liberté.

Prenons $U = (n-3)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ et $Z = \hat{\beta}_3$. On sait que U suit une loi de chi-deux à $(n-3)$ degrés de liberté (voir question précédente) et que Z suit une loi normale centrée et réduite. Donc

$$T = \frac{\hat{\beta}_3}{\sqrt{\frac{(n-3)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}{n-3}}} = \frac{\hat{\beta}_3}{\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}} = \frac{\hat{\beta}_3\sigma}{\hat{\sigma}}$$