Rappel de cours

Definition 1. Un groupe est

-
-
-

Definition 2. Un anneau est un ensemble A muni de deux opérations (appelées addition $+$ et multiplication .), tel que $\forall a, b, c \in A$

- Addition commutative, $a + b = b + a$
- Addition associative, $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Addition distributive par rapport a la multiplication, $(a + b).c = a.c + b.c$
- Multiplication associative, $(a.b).c = a.(b.c)$
- Élément neutre pour l'addition, noté 0, tel que $a + 0 = 0 + a = a$
- tout élément possède un opposé noté $-a$ tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$
- Élément neutre pour la multiplication, noté 1, tel que $a.1 = 1.a = a$

Lorsque la multiplication est commutative $a.b = b.a$, l'anneau est dit commutatif.

Exercice 1

x, y sont nilpotents, donc $x^n = y^n = 0$.

- $(x.y)^{n+m} = (x.y).(x.y)\dots(x.y) = x.x\dots.x.y.y\dots y = x^n.x^m.y^n.y^m = 0.x^m.y^n.0 = 0$ car la multiplication est associative et commutative.

- $(x+y)^{n+m} = x^{n+m} + k_1x^{n+m-1}y + k_2x^{n+m-2}y^2 + \dots + k_{m+n-1}xy^{n+m-1} + y^{n+m}$. l'addition des puissances de x et de y est égale à $n+m$. Donc soit x est élevé 'a une puissance $\geq n$, soit y est élevé 'a une puissance $\geq m$. Par conséquent, $(x+y)^{n+m} = 0.x^m + k_1.0.x^{m-1}.y + k_2.0.x^{m-2}.y^2 + \dots k_{m+n-1}xy^{n-1}y^m + y^ny^m = 0+0+\dots+0 = 0$.

- pour que $1-x$ soit inversible, il faut trouver un y tel que $(1-x).y = 1$. Donc $y - yx = 1$. Si on prends $y = x^{n-1}$ on a $x^{n-1} + x.x^{n-1} = x^{n-1} + x^n = x^{n-1}$. Donc il reste x^{n-1}. D'un autre côté, si on prends $y = 1$, on a $1 + 1.x = 1$. Il faut donc éliminer x^{n-1} et x. Une facon de faire est de prendre $y = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$. Donc $(1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} - (x + x^2 + \dots + x^n) = 1 + x^n = 1$.

Exercice 2

Exercice 2.1

A est un anneau si:

- Addition is commutative, $v_1, v_2 \in A, v_1 + v_2 = (a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2}) = v_2 + v_1$

- Addition est associative, $v_1, v_2, v_3 \in A, (v_1 + v_2) + v_3 = ((a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})) + (a_3 + b_3\sqrt{2}) = (a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_3 + b_3\sqrt{2}) = (a_1 + b_1\sqrt{2}) + ((a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_3 + b_3\sqrt{2})) = v_1 + (v_2 + v_3)$

- Addition est distributive. $v_1, v_2, v_3 \in A, (v_1 + v_2).v_3 = ((a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})).(a_3 + b_3\sqrt{2}) = ((a_1 + b_1\sqrt{2}).(a_3 + b_3\sqrt{2})) + ((a_2 + b_2\sqrt{2}).(a_3 + b_3\sqrt{2})) = v_1.v_3 + v_2.v_3$

- Élément neutre 0. $v_1 \in A, v_1 + 0 = (a_1 + b_1\sqrt{2}) + 0 = (a_1 + b_1\sqrt{2}) = v_1$.

- Élément opposé $(-a) + (-b\sqrt{2})$. $v_1 + ((-a) + (-b\sqrt{2})) = (a + b\sqrt{2}) + (-a - b\sqrt{2}) = (a + (-a)) + (b\sqrt{2} + (-b\sqrt{2})) = 0 + 0 = 0$

- possède un élément neutre pour la multiplication. $v_1 * e = v_1$. donc $(a_1 + b_1\sqrt{2}).(a_2 + b_2\sqrt{2}) = a_1 + b_1\sqrt{2}$. donc $(a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{2} = a_1 + b_1\sqrt{2}$. Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a $(a_1a_2 + 2b_1b_2) = a_1$ et $a_1b_2 + b_1a_2 = b_1$. On a $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$ qui est une solution. Donc $1 + 0\sqrt{2} = 1$ est un élément neutre.

Exercice 2.2

$$N(xy) = N((a_1 + b_1\sqrt{2})(a_1 + b_1\sqrt{2})) = N((a_1b_1 + 2b_1b_2) + (b_1a_2 + b_2a_1)\sqrt{2}) = (a_1b_1 + 2b_1b_2)^2 - 2(b_1a_2 + b_2a_1)^2$$
$$= ((a_1b_1)^2 - 4(a_1b_1a_2b_2) + (2b_1b_1)^2) - 2((b_1a_2)^2 + 2(a_1b_1a_2b_2 + (b_2a_1)^2) = a_1^2b_1^2 - 2a_1^2b_1^2 - 2b_1^2a_2^2 + 4b_1^2b_2^2$$
$$= (a_1^2 - 2b_1^2)(a_2^2 - 2b_2^2) = N(x)N(y)$$

Exercice 2.3

Un él'ement $x \in A$ est inversible si $\exists y \in A, xy = 1$. $(a_1 + b_1\sqrt{2}).(a_2 + b_2\sqrt{2}) = 1$, donc $(a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} = 1$

$$\begin{cases} a_1a_2 + 2b_1b_2 & = 1 \\ a_1b_2 + a_2b_1 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1a_2 + 2b_1b_2 & = 1 \\ b_2 & = -a_2\frac{b_1}{a_1} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} a_1a_2 - 2\frac{b_1^2a_2}{a_1} & = 1 \\ b_2 & = -a_2\frac{b_1}{a_1} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} a_1^2a_2 - 2b_1^2a_2 & = a_1 \\ b_2 & = -a_2\frac{b_1}{a_1} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} a_2 & = \frac{a_1}{a_1^2-2b_1^2} = frac1N(x) \\ b_2 & = -a_2\frac{b_1}{a_1} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} a_2 & = \frac{a_1}{a_1^2-2b_1^2} = \frac{a_1}{N(x)} \\ b_2 & = -\frac{b_1}{a_1^2-2b_1^2} = -\frac{b_1}{N(x)} \end{array}\right.$$

Mais il faut que $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ donc $N(x) = 1$ ou $N(x) = -1$.

Exercice 3

Ensemble des nilpotents de A est défini par $NP = \{x \in A, \exists n \geq 1, x^n = 0\}$. Un déal de A est défini comme un sous-ensemble de I de A tel que $\forall x \in A, \forall y \in I, xy \in I$. Montrons que NP est un idéal de A. Si NP est in idéal de A alors $\forall x \in A, \forall y \in NP, xy \in NP$. Donc prenons $y \in NP$, donc $\exists n \geq 1, y^n = 0$ et un $z = xy$. $z \in NP,\ si\ \exists k \geq 1, z^k = 0$ ou $z \in NP,\ si\ \exists k \geq 1, (xy)^k = 0$. En prenant $k = n$ on a $(xy)^k = (xy)^n = x^n y^n = x^n.0 = 0$. Donc $z \in NP$. par onséquent l'ensemble des nilpotents de A est un idéal de A.

QED