Exo 2.2.1

Q1

$x(t) = -2asin^2(\omega t))$, et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$, avec $n = 2$ et $f = sin(\omega t)$. De plus, $(sin(f))' = f'cos(f)$ avec $f = \omega t$ donc $v_x(t) = x'(t) = -2a * 2\omega cos(\omega t)sin(\omega t)$.

$y(t) = 2asin(\omega t)cos(\omega t)$ et $(fg)' = f'g + g'f$, avec $f = sin(\omega t)$ et $g = cos((\omega t)$. Donc $f' = \omega cos(\omega t)$ et $g' = -\omega sin(\omega t)$, alors $2a(\omega cos(\omega t)cos(\omega t) - \omega sin(\omega t)sin(\omega t))$.

$$v(t) = \left\{ \begin{array}{l} v_x(t) = x'(t) = -4a\omega cos(\omega t)sin(\omega t) \\ v_y(t) = y'(t) = 2a\omega(cos^2(\omega t) - sin^2(\omega t)) \\ v_z(t) = z'(t) = 0 \end{array} \right\}$$

$a_x(t) = v_x'(t)$ et $v_x(t) = -4a\omega cos(\omega t)sin(\omega t)$ et $(fg)' = f'g + g'f$, avec avec $f = cos(\omega t)$ et $g = sin((\omega t)$. Donc $f' = -\omega sin(\omega t)$ et $g' = \omega cos(\omega t)$, alors $-4a\omega((-\omega sin(\omega t))sin(\omega t) + \omega cos(\omega t)cos(\omega t))$. On a aussi $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$.

$a_y(t) = v_y'(t)$ et $v_y(t) = 2a\omega(cos^2(\omega t) - sin^2(\omega t))$ avec $(f + g)' = f' + g'$, on connait la dérivée de $sin^2(\omega t)$. Il faut calculer la dérivée de $cos^2(\omega t)$. La dérivée est $2\omega(-sin(\omega t))cos(\omega t)$.

$$a(t) = \left\{ \begin{array}{l} a_x(t) = v_x'(t) = 4a\omega^2 \\ a_y(t) = v_y'(t) = -8a\omega^2 sin(\omega t)cos(\omega t) \\ a_z(t) = v_z'(t) = 0 \end{array} \right\}$$

Q2

$$\|v(t)\| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$$

$$= \sqrt{(-4a\omega cos(\omega t)sin(\omega t))^2 + (2a\omega(cos^2(\omega t) - sin^2(\omega t))^2 + 0^2)}$$

$$= \sqrt{16a^2\omega^2 cos^2(\omega t)sin^2(\omega t) + 4a^2\omega^2(cos^4(\omega t) - 2cos^2(\omega t)sin^2(\omega t) + sin^4(\omega t))}$$

$$= \sqrt{8a^2\omega^2 cos^2(\omega t)sin^2(\omega t) + 4a^2\omega^2 cos^4(\omega t) + 4a^2\omega sin^4(\omega t))}$$

$$= 2a\omega\sqrt{2cos^2(\omega t)sin^2(\omega t) + cos^4(\omega t) + sin^4(\omega t))}$$

$$= 2a\omega\sqrt{(cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t))^2}$$

$$= 2a\omega\sqrt{1^2}$$

$$= 2a\omega$$

Q3

Le vecteur vitesse est égale à $= 2a\omega$ qui est constant. Donc le mouvement est uniforme.

Q4

$$sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$$

$$cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) = 1 - 2sin^2(x) = 1 - 2cos^2(x)$$

$$R = \|AM\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$R^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

ou en polaire

$$x = a + Rcos(\alpha), y = b + Rsin(\alpha),$$

Q5

Supposons que la voiture décrit un cercle de centre (x_c, y_c) et de rayon R. Donc

$$\begin{aligned} x_c + Rcos(\alpha) &= -2asin^2(\omega t) \\ y_c + Rsin(\alpha) &= -2asin(\omega t)cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_c + Rcos(\alpha) &= -2a(\tfrac{1-cos(2\omega t)}{2}) \\ y_c + Rsin(\alpha) &= asin(2\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_c + Rcos(\alpha) &= -2a + acos(2\omega t) \\ y_c + Rsin(\alpha) &= 0 + asin(2\omega t) \end{aligned}$$

$$x_c = -2a, y_c = 0, R = a, \alpha = 2\omega t$$

La voiture décrit un cercle de centre $(-2a, 0)$ et de rayon a.

Q6

La période T est $\frac{\omega}{\pi}$.

Q7

t	x_c	y_c
0	$-2a + acos(2\omega * 0) = -a = -1$	$0 + asin(2\omega * 0) = 0$
$\frac{\pi}{4\omega}$	$-2a + acos(2\omega \frac{\pi}{4\omega}) = -2a = -2$	$0 + asin(2\omega \frac{\pi}{4\omega}) = a = 1$
$\frac{\pi}{2\omega}$	$-2a + acos(2\omega \frac{\pi}{2\omega}) = -3a = -3$	$0 + asin(2\omega \frac{\pi}{2\omega}) = 0$