Rappel de cours

•

Exercice 1.1

$$\begin{cases} x & +y & -z & -t & = 0 \\ x & -y & +z & -t & = 0 \\ x & & -t & = 0 \\ y & -z & = 0 \end{cases}$$

C'est un système d'équations homogène de rang 4, à 4 inconnues. Aucune ligne nulle. Les inconnues principales sont x et y. Les inconnues secondaires sont z et t.

Exercice 1.2

$$(S_0) \begin{cases} x & -3y & = a_1 & [1] \\ 3y & -6z & = a_2 & [2] \\ x & -6z & = a_3 & [3] \end{cases}$$

Calculer [1]+[2], $x - 6z = a_1 + a_2$, qui est égale à l'équation [3]. Donc $a_1 + a_2 = a_3$. Ou calculer [1]-[3], $-3y + 6z = a_1 - a_3$, qui est égale à la négation de l'équation [2]. Donc $a_2 = a_3 - a_1$.

$$(S_0) \begin{cases} x & -3y & = 1 & [1] \\ 3y & -6z & = 1 & [2] \\ x & -6z & = 2 & [3] \end{cases}$$

Lorsque $(a_1,a_2,a_3)=(1,1,2)$, le système est compatible car 2=1+1. La solution du système est $(x,y,z)=(a,\frac{a-1}{3},\frac{a-2}{6})$.

Lorsque $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$, le système est compatible. La solution du système est $(x, y, z) = (a, \frac{a}{3}, \frac{a}{6})$.

Exercice 1.3.a

La famille ((1,2,3,0),(3,1,2,0),(2,3,1,0),(3,2,1,0)) engendre \mathbb{R}^4 si

$$\forall a \in \mathbb{R}^4, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = a_1 \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = a_2 \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = a_3 \\ 0\lambda_1 & +0\lambda_2 & +0\lambda_3 & +0\lambda_4 & = a_4 \end{cases}$$

Le vecteur $(a_1, a_2, a_3, 1) \in \mathbb{R}^4$ mais ne peux pas être génére par la famille. Donc, cette famille n'engendre pas l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 .

Exercice 1.3.b

La famille ((1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1)) est libre si

$$\begin{cases} 1\lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0\\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0\\ 2\lambda_1 & +1\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0\\ 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +1\lambda_3 & = 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 : \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

 $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 : -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 : -\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0$$

 $L_4 \leftarrow L_4 + L_1 : -6\lambda_3 = 0$

Donc $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille est libre.

Exercice 1.4

La famille s'écrit $\mathcal{F} = ((1,1,0),(0,1,1),(0,1,-1))$. La famille engendre-t-elle \mathcal{P}_2 ? bd

$$\forall a \in \mathcal{P}^2, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= a_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= a_2 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= a_3 \end{cases}$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 : -2\lambda_3 = a_3 - a_2$$
$$L_2 : 2\lambda_2 = a_2 + a_3$$
$$L_1 : 2\lambda_1 = 2a_1 - a_2 - a_3$$

Donc $\lambda_1 = \frac{2a_1 - a_2 - a_3}{2}$, $\lambda_1 = \frac{a_2 + a_3}{2}$, $\lambda_1 = \frac{a_3 - a_2}{2}$. La famille \mathcal{F} engendre l'espace vectoriel \mathcal{P}_2 .

La famille est-elle libre?

$$\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 : -2\lambda_3 = 0$$

Donc $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille \mathcal{F} est libre.

Exercice 1.5

La famille $\mathcal{F} = (x \to \sin(x), x \to f(x)).$

$$\forall g: x \to g(x), \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \{ \lambda_1(x \to \sin(x)) \mid \lambda_2(x \to f(x)) = x \to g(x) \}$$

Non. Prenons $g: x \to \cos(x)$. Pour $x \to \infty$, on a $\lambda_1(x \to \sin(x)) = (x \to \cos(x)$ Il n'existe pas de λ_1 qui engendre la fonction $x \to \cos(x)$ car $\sin(x) \neq \frac{\cos(x)}{\lambda_1}$.

Exercice 1.6

La famille ((1,0,0,0),(1,2,0,0),(1,2,3,0),(1,2,3,4)) est libre si

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 & = 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$L_1 : \lambda_1 = 0$$

$$L_2 : 2\lambda_2 = 0$$

$$L_3: 3\lambda_3 = 0$$

$$L_3: 3\lambda_3=0$$

$$L_4: 4\lambda_4=0$$

Donc $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille est libre.

$$E\subset F\,ssi\,\forall f\in E,\,f\in F$$

On a $E = \lambda_{E1}u_1 + \lambda_{E2}u_2$ et $F = \lambda_{F1}u_1 + \lambda_{F2}u_2 + \lambda_{F3}u_3$ Soit $f \in E$, alors $f \in F$ avec $\lambda_{F1} = \lambda_{E1}, \lambda_{F2} = \lambda_{E2}, \lambda_{F3} = 0$. L'inclusion est strict car lorsque $\lambda_{F3} \neq 0$ alors $f \in F$ mais $f \notin E$.

Soit $f \in F$, alors $f \in \mathbb{R}^4$ avec $\lambda_1 = \lambda_{F1}, \lambda_2 = \lambda_{F2}, \lambda_3 = \lambda_{F3}$. L'inclusion est strict car $(3,3,3,3) \in \mathbb{R}^4$ mais $(1,2,3,6) \notin F$ car $\neg \exists \lambda_{F1}, \lambda_{F2}, \lambda_{F3}, \lambda_{F4}, 0\lambda_{F1} + 0\lambda_{F2}0\lambda_{F3}0\lambda_{F4} = 6$.

Exercice 1.7

la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base canonique de \mathbb{R}^4 donc

$$\forall a \in \mathbb{R}^4, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} \lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{21} + \lambda_3 e_{31} + \lambda_4 e_{41} = a_1 \\ \lambda_1 e_{12} + \lambda_2 e_{22} + \lambda_3 e_{32} + \lambda_4 e_{42} = a_2 \\ \lambda_1 e_{13} + \lambda_2 e_{23} + \lambda_3 e_{33} + \lambda_4 e_{43} = a_3 \\ \lambda_1 e_{14} + \lambda_2 e_{24} + \lambda_3 e_{34} + \lambda_4 e_{44} = a_4 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \lambda_1 e_{11} & +\lambda_2 e_{21} & +\lambda_3 e_{31} & +\lambda_4 e_{41} & = 0 \\ \lambda_1 e_{12} & +\lambda_2 e_{22} & +\lambda_3 e_{32} & +\lambda_4 e_{42} & = 0 \\ \lambda_1 e_{13} & +\lambda_2 e_{23} & +\lambda_3 e_{33} & +\lambda_4 e_{43} & = 0 \\ \lambda_1 e_{14} & +\lambda_2 e_{24} & +\lambda_3 e_{34} & +\lambda_4 e_{44} & = 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Pour que (u_1, u_2, e_2, e_4) soit une base canonique de \mathbb{R}^4 , il faut montrer:

P1:

$$\forall b \in \mathbb{R}^4, \exists (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} \beta_1 & +2\beta_2 & +\beta_3 e_{21} & +\beta_4 e_{41} & = b_1 \\ & & +\beta_3 e_{22} & +\beta_4 e_{42} & = b_2 \\ 2\beta_1 & +3\beta_2 & +\beta_3 e_{23} & +\beta_4 e_{43} & = b_3 \\ & & +\beta_3 e_{24} & +\beta_4 e_{44} & = b_4 \end{cases}$$

Démonstration de P1

Posons

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = \lambda_2 \\ \beta_4 = \lambda_4 \end{cases}$$

et P2:

$$\begin{cases} \beta_1 & +2\beta_2 & +\beta_3e_{21} & +\beta_4e_{41} & = 0 \\ & +\beta_3e_{22} & +\beta_4e_{42} & = 0 \\ 2\beta_1 & +3\beta_2 & +\beta_3e_{23} & +\beta_4e_{43} & = 0 \\ & +\beta_3e_{24} & +\beta_4e_{44} & = 0 \end{cases} \implies \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

Démonstration de P2

$$L4 \leftarrow e_{22}L4 - e_{24}L2 : \beta_4(e_{22}e_{44} - e_{24}e_{42}) = 0$$

Exercice 1.8

Exercice 1.9

la famille (v_1, v_2, v_3) est une base canonique de \mathbb{R}^3 donc

$$\forall a \in \mathbb{R}^3, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = a$$

 $_{
m et}$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Pour que (u_1, u_2, u_3) soit une base canonique de \mathbb{R}^3 , il faut montrer: P1:

$$\forall b \in \mathbb{R}^3, \exists \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}, \beta_1 v_1 + \beta_2 (v_1 + v_2) + \beta_3 (v_1 + v_2 + v_3) = b$$

Démonstration de P1.

$$\forall b \in \mathbb{R}^{3}, \exists \beta_{1}, \beta_{2}, \beta_{3} \in \mathbb{R}, \ \beta_{1}v_{1} + \beta_{2}v_{1} + \beta_{2}v_{2} + \beta_{3}v_{1} + \beta_{3}v_{2} + \beta_{3}v_{3} = b$$

$$\forall b \in \mathbb{R}^{3}, \exists \beta_{1}, \beta_{2}, \beta_{3} \in \mathbb{R}, \ v_{1}(\beta_{1} + \beta_{2} + \beta_{3}) + v_{2}(\beta_{2} + \beta_{3}) + \beta_{3}v_{3} = b$$

$$\begin{cases} \beta_{1} + \beta_{2} + \beta_{3} = \lambda_{1} \\ \beta_{2} + \beta_{3} = \lambda_{2} \\ \beta_{3} = \lambda_{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_{1} = \lambda_{1} - \lambda_{2} \\ \beta_{2} = \lambda_{2} - \lambda_{3} \\ \beta_{3} = \lambda_{3} \end{cases}$$

Propriété vérifiée.

et P2:

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 (v_1 + v_2) + \beta_3 (v_1 + v_2 + v_3) = 0 \implies \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

Démonstration de P2.

$$v_1(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + v_2(\beta_2 + \beta_3) + \beta_3 v_3 = 0 \implies \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

Posons

$$\begin{cases} \beta_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ \beta_2 = \lambda_2 - \lambda_3 \\ \beta_3 = \lambda_3 \end{cases}$$

$$v_1(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_3) + v_2(\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_3) + \lambda_3 v_3 = 0$$

Par hypothèse

$$v_1\lambda_1 + v_2\lambda_2 + \lambda_3v_3 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 - 0 \\ \beta_2 = 0 - 0 \\ \beta_3 = 0 \end{cases}$$

Propriété vérifiée.

 (u_1, u_2, u_3) est une base canonique de \mathbb{R}^3 . Les coordonnées du vecteur $v = 2v_1 - v_2 + 3v_3 = (2 - (-1))u_1 + ((-1) - 3)u_2 + 3u_3 = 3u_1 - 4u_2 + 3u_3$

Exercice 1.10

Deux vecteurs sont colinénaires si $u_1 = \lambda u_2$

$$\begin{cases} 1 = 0\lambda \\ -1 = \lambda \\ 1 = -\lambda \\ -1 = \lambda \end{cases}$$

De L1, il n'existe pas de λ , donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 = 0 \implies \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 \beta_4 = 0$$

$$\begin{cases} \beta_1 & +\beta_3e_{31} & +\beta_4e_{41} & = 0 \\ -\beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3e_{32} & +\beta_4e_{42} & = 0 \\ \beta_1 & -\beta_2 & +\beta_3e_{33} & +\beta_4e_{43} & = 0 \\ -\beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3e_{34} & +\beta_4e_{44} & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

$$L2 \leftarrow L2 + L3 : \beta_3(e_{32} + e_{33}) + \beta_4(e_{42} + e_{43}) = 0$$

$$L3 \leftarrow L3 + L4 : \beta_3(e_{33} + e_{34}) + \beta_4(e_{43} + e_{44}) = 0$$

$$L5 \leftarrow (e_{33} + e_{34})L2 - (e_{32} + e_{33})L3 : \beta_4((e_{33} + e_{34})(e_{42} + e_{43}) - (e_{32} + e_{33})(e_{43} + e_{44})) = 0$$

Pour avoir $\beta_4 = 0$ il faut $(e_{33} + e_{34})(e_{42} + e_{43}) - (e_{32} + e_{33})(e_{43} + e_{44}) \neq 0$.

Pour avoir $\beta_3 = 0$ lorsque $\beta_4 = 0$, il faut $(e_{32} + e_{33}) \neq 0$ et $(e_{33} + e_{34}) \neq 0$. De L1, on a $\beta_1 = 0$ lorsque $\beta_3 = \beta_4 = 0$.

De L2, L3, L4, on a $\beta_2 = 0$ lorsque $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = 0$.

Donc prenons $e^3 = (17, 1, 1, 1)$ et $e^4 = (7, 1, 1, 2)$.

Il faut vérifier qu'aucune des 4 vecteurs n'est colinéaire:

- e_2 avec les 3 autres, vrai car $e_{22} = 0$
- e_1 et e_3 vrai car de e_{11} , il faudrait $\lambda = 7$ qui est faux pour e_{12}
- e_1 et e_4 vrai car de e_{11} , il faudrait $\lambda=17$ qui est faux pour e_{12}
- e_3 et e_4 vrai car e_{31} et e_{41} sont premiers entre eux.

Exercice 1.11

On a

•
$$P_1(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$
, posons $v_1 = (1, -5, 6)$

•
$$P_2(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$$
, posons $v_2 = (1, -4, 3)$

•
$$P_3(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$
, posons $v_3 = (1, -3, 2)$

Montrons que

$$\forall a \in \mathcal{P}_2, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = a$$

$$\forall a \in \mathcal{P}_2, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda_1(x^2 - 5x + 6) + \lambda_2(x^2 - 4x + 3) + \lambda_3(x^2 - 3x + 2) = \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3$$
$$\forall a \in \mathcal{P}_2, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, x^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + x(-5\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_3) + 6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \beta_2 = -5\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_3 \\ \beta_3 = 6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} 3\lambda_1 = -\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 \\ \lambda_2 = -4\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3 \\ 2\lambda_3 = 9\beta_1 + 3\beta_2 + 1\beta_3 \end{cases}$$

La propriété est vraie.

Montrons que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 & -5\lambda_2 & +6\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & -4\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & -3\lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 : \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$$

$$L_3 \leftarrow L3 - L1 : 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0$$

 $L_4 \leftarrow L3 - 2L2 : 2\lambda_3 = 0$

 Donc

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

La famille (v_1, v_2, v_3) est une base de l'espace \mathcal{P}_2 . Les coordonnées de $Q(x) = \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3$ dans la base $(P_1(x), P_2(x), P_3(x))$ sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \\ \lambda_2 = -4\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3 \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}(9\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_3) \end{cases}$$