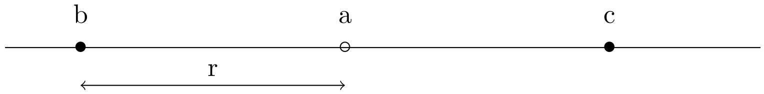
Rappel de cours

Definition 1. Soit $(x_n)_n$ une suite réelle. On dit que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0; \exists N \text{ tel que }, \forall pq \geq N, q \geq N, \text{ on a } |x_p - x_q| < \epsilon$$

Definition 2. Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie. On dit que E est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $r > 0$, il existe $e \in E$ tel que e est r-proche de x, soit $|x - e| < r$.

Exercice 1.1



Les points b et c coïncident avec les bornes d'un intervalle ouverts $]b, c[$. L'intervalle équivalent de centre a et de rayon r est défini par le centre a au milieu des 2 points b et c, donc $a = \frac{b+c}{2}$ et le rayon soit la distance entre les points a et b (resp. c), donc $r = a - b = \frac{b+c}{2} - b = \frac{c-b}{2}$.

Exercice 1.2

$$I = [0 + (-1), 1 + 1] = [-1, 2]$$

On a $sin[0, 1] \equiv 0 \leq s \leq 1$ et $tin[-1, 1] \equiv -1 \leq t \leq 1$. La borne inférieure de l'intervalle $s + t$ est égale à $min(0 + (-1), 0 + 1, 1 + (-1), 1 + 1)$ car l'addition est une fonction strictement croissante. Mais on sait que $0 + (-1) < 0 + 1$,$0 + (-1) < 1 + (-1)$, $0 + (-1) < 1 + 1$ car $0 < 1$ donc $min(\ldots) = 0 + (-1)$. Même raisonnement pour la borne supérieur. Pour les bornes, les deux intervalles ont des bornes fermées donc la valeurs des bornes sont dans l'intervalles. par conséquent l'intervalle $s + t$ est égelement un intervalle fermé Donc $I = [-1, 2]$.

$$I' =]0 + (-1), 1 + 1[=] - 1, 2[$$

Mais raisonnement sur la valeur des bornes. Maintenant l'intervalle t est un intervalle ouvert. Donc ses bornes ne sont pas dans l'intervalle t. Par conséquent elles ne peuvent pas être dans l'intervalle $s + t$.

$$J = [3, 8]$$

On a $sin[-2, -1] \equiv -2 \leq s \leq -1$ et $tin[-4, -3] \equiv -4 \leq t \leq -3$. La borne inférieure de l'intervalle $s + t$ est égale à $min((-2) * (-4), (-2) * (-3), (-1) * (-4), (-1) * (-3)1 + 1)$ car la multiplication est une fonction strictement croissante. Même raisonnement pour la borne supérieur en prenant le max. Pour les bornes, les deux intervalles ont des bornes fermées donc la valeurs des bornes sont dans l'intervalles. par conséquent l'intervalle $s + t$ est égelement un intervalle fermé Donc $I = [3, 8]$.

$$I' =]3, 8[$$

Mais raisonnement sur la valeur des bornes. Maintenant l'intervalle t est un intervalle ouvert. Donc ses bornes ne sont pas dans l'intervalle t. Par conséquent elles ne peuvent pas être dans l'intervalle $s + t$.

Exercice 1.3

On a $I \cap J = \emptyset$ donc $\exists a$ tel que $a \in I$ et $a \in J$. On a $a \leq \sup(I)(ou + \infty)$ et $\inf(J)(ou - \infty) \leq a$, donc $\inf(J)(ou - \infty) \leq a \leq \sup(I)(ou + \infty)$.

Prenons $a, b \in (I \cup J)^2, a < b$, a-t-on $[a, b] \subset I \cup J$? Plusieurs cas:

- $(a, b) \in I^2$, I est un intervalle donc $[a, b] \subset I$ (caractérisation des intervalles) et $I \subset (I \cup J)$ (par définition, donc $[a, b] \subset (I \cup J)$.
- $(a, b) \in J^2$, même raisonnement
- $a \in I, b \in J$, I est un intervalle donc $[a, \sup(I)] \subset I$ (caractérisation des intervalles) et $[\inf(J), b] \subset J$, on a $\inf(J) \leq \sup(I)$
- $a \in J, b \in I$, ???

Exercice 1.4

Exercice 1.5

A

L'intervalle A est minoré par -1 ($A \subset [-1, +\infty]$) et majoré par 2 ($A \subset [-\infty; 2]$) donc l'intervalle A est bornée. Le diamètre $d(A) = \sup(d(x, x'), x, x' \in A)$. Le diamètre de $A = 1 - 0 = 1$.

B

L'intervalle B est minoré par -3 ($B \subset [-3, +\infty]$) et majoré par 4 ($B \subset [-\infty; 4]$) donc l'intervalle B est bornée. Le diamètre $d(B) = \sup(d(x, x'), \forall x, x' \in B)$. Au passage à la limite le diamètre de $B = \lim_{\epsilon \to 0}(3 - \epsilon) - (-2 + \epsilon) = 5$.

C

La partie C est bornée par 7 car $\forall x \in C, |x| \leq 7$. Le diamétre de C est $d(C) = \sup(d(x, x'), \forall x, x' \in C)$. Le diamètre de $C = \max(C) - \min(C) = 6 - 4 = 2$.

D

La partie D est bornée par 2 car $\forall x \in D, |x| \leq 2$. Le diamétre de D est $d(D) = \sup(d(x, x'), \forall x, x' \in D)$. Le diamètre de $C = max(C) - min(C) = \lim_{\epsilon \to 0}(1 - \epsilon) - (0 + \epsilon) = 1$.

Exercice 1.6

1.6.1

La partie E est bornée donc $\exists M, m \in \mathbb{R}, E \subset [m, M]$, on a $F \subset E$, donc $F \subset [m, M]$ (car l'inclusion est transitive). m est un minorant de F et M est un majorant de F dons F est bornée.

1.6.2

Soit E, F deux parties bornées. $\exists M_E, m_E \in \mathbb{R}, E \subset [m_E, M_E]$ et $\exists M_F, m_F \in \mathbb{R}, E \subset [m_F, M_F]$. On a $\forall x, x \in E et x \in F, x \in [m_E, M_E] et x \in [m_F, M_F]$ Donc $x \geq m_E et x \geq m_F \implies x \geq \max(m_E, m_F)$, de même pour le majorant. Donc $E \cup F \in [\max(m_E, m_F), \min(M_E, M_F)]$, $E \cup F$ est bornée.

1.6.3

Soit E, F deux parties bornées. $\exists M_E, m_E \in \mathbb{R}, E \subset [m_E, M_E]$ et $\exists M_F, m_F \in \mathbb{R}, E \subset [m_F, M_F]$. On a $\forall x, x \in E et x \in F, x \in [m_E, M_E] ou x \in [m_F, M_F]$ Donc $x \geq m_E ou x \geq m_F \implies x \geq \min(m_E, m_F)$, de même pour le majorant. Donc $E \cup F \in [\min(m_E, m_F), \max(M_E, M_F)]$, $E \cup F$ est bornée.

Exercice 1.7

1.7.1

Si $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ est ouvert alors $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \exists \epsilon > 0,]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Soit un point $x = a + \alpha$ avec $\alpha > 0$ quelconque. On a $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Prenons $\epsilon = \frac{\alpha}{2}$. On a bien $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$ car $a \notin]x - \epsilon, x + \epsilon[$. Donc $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ est ouvert.
$\{a\}$ est fermé car $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ est ouvert.

1.7.2

De l'exercice précédenton a $\forall n > 1, \mathbb{R} \setminus \{a_n\}$ qui est ouvert. De plus, une réunion quelconque douverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ est ouvert. Par conséquent $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ est fermé.

Exercice 1.8

1.8.1

Si $[0,1]$ est ouvert alors $\forall x \in [0,1], \exists \epsilon > 0,]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset [0,1]$. Prenons $x = 0$ (ou 1), on a $x \in [0,1]$ mais $x - \epsilon \notin [0,1]$. Donc $[0,1]$ n'est pas ouvert.

Si $]1,2[$ est fermé alors $\mathbb{R}\backslash]1,2[$ est ouvert. Donc $\forall x \in \mathbb{R}\backslash]1,2[, \exists \epsilon > 0,]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset \mathbb{R}\backslash]1,2[$. Prenons $x = 1$ (ou 2), on a $x \in \mathbb{R}\backslash]1,2[$ mais $x + \epsilon \notin \mathbb{R}\backslash]1,2[, \forall \epsilon > 0$. Donc $\mathbb{R}\backslash]1,2[$ n'est pas ouvert et $]1,2[$ n'est pas fermé.

$[-1,0[$, ni ouvert, ni fermé. Tu fais.

1.8.2.a

Si $\mathbb{C}$ est ouvert alors $\forall x \in \mathbb{C}, \exists \epsilon > 0,]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset \mathbb{C}$. Prenons un nombre réel x dont le developpement decimal égale à 5 est le dernier chiffre. On a $x \in \mathbb{C}$. Il n'existe pas de $\nexists \epsilon,]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset \mathbb{C}$ car soit n la puissance associé a 5. Si $\epsilon \leq 10^n, x - \frac{\epsilon}{2} \notin \mathbb{C}$ et si $\epsilon > 10^n, x - \frac{10^n}{2} \in]x-\epsilon, x+\epsilon[mais \notin \mathbb{C}$ car il ne contient pas de 5 dans son developpement limité.

1.8.2.b

On a $x \in \mathbb{C}$, donc x contient au moins un 5 dans son développement limité et au moins un 5 n'est pas le dernier chiffre (car x n'est pas décimal). Soit n le rang du premier chiffre $\neq 0$ aprés le premier 5 (il existe car x n'est pas décimal), prenons $\epsilon = 10^n$ on a bien $\in]x-\epsilon, x+\epsilon[\in \mathbb{C}$ car tous les nombre contienne le premier 5.

Exercice 1.9

1.9.1

Soit $E = [a,b]$ fermé donc $a \leq x \leq b$, et $M = \sup(E)$. Démonstration par l'absurde. Si $M \notin E$ alors prenons $M_1 = \frac{b+M}{2}$. On a $M_1 > b$ donc c'est un majorant de E et $M_1 < M$ ceci contredit $M = \sup(E)$. Donc $M \in E$.

1.9.2

Soit $E =]a,b[$ ouvert donc $a < x < b$, et $M = \sup(E)$. Si $M \in E$ alors $M < b$ donc M n'est pas un majorant de E. Ceci contredit $M = \sup(E)$. Donc $M \notin E$.

1.9.3

??

Exercice 1.10

1.10.1

Prenons $p > q$ et calculons $|x_p - x_q|$

$$|x_p - x_q| = |\frac{\cos(0)}{10^0} + \frac{\cos(1)}{10^1} + \ldots + \frac{\cos(p)}{10^p} - (\frac{\cos(0)}{10^0} + \frac{\cos(1)}{10^1} + \ldots + \frac{\cos(p)}{10^p} + \ldots + \frac{\cos(q)}{10^q})|$$

$$= \frac{\cos(p+1)}{10^{p+1}} + \ldots + \frac{\cos(q)}{10^q} < \frac{1}{10^{p+1}} + \ldots + \frac{1}{10^q} = \frac{1}{10^{p+1}}\left(1 + \frac{1}{10^1} + \ldots + \frac{1}{10^{q-p-1}}\right) < \frac{2}{10^{p+1}}$$

car $1 + \frac{1}{10^1} + \ldots + \frac{1}{10^{q-p-1}} < 2$. Donc si on prend $N, \epsilon > \frac{2}{10^N+1}$, pour tout ϵ, on a trouvé un entier N tel que $(x_n)_n$ vérifie la propriété de Cauchy.

1.10.2

Exercice 1.11

1.11.1

Calculons $|x_p - x_q|$ avec $p > q$.

$$|x_p - x_q| = \left|\sum_{n=0}^{p} \frac{\cos(n)}{10^n} - \sum_{n=0}^{q} \frac{\cos(n)}{10^n}\right| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{\cos(n)}{10^n}\right| = \frac{1}{10^{p+1}} \left|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{\cos(n)}{10^{n-(p+1)}}\right|$$

$$= \frac{1}{10^{p+1}} \left|\cos(p+1) + \frac{\cos(p+2)}{10} + \frac{\cos(p+2)}{10^2} + \ldots + \frac{\cos(q)}{10^{q-(p+1)}}\right|$$

On a $-1 < \cos(n) < 1$,

$$= \frac{1}{10^{p+1}} \left|1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{q-(p+1)}}\right| < \frac{2}{10^{p+1}}$$

Donc $\forall p, q > N, |x_p - x_q| < \frac{2}{10^N}$. Ceci démontre que x_n est une suite de Cauchy.

1.11.2

On a $\lim_{x\to\infty} xf'(x) = 0 \implies \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ car on a $f'(x)$ qui tend vers 0 plus rapidement que n croit. (ou $n = o(\frac{1}{f'(x)})$. Donc $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0 \implies \lim_{x\to\infty} f(x) = C$ donc la fonction f converge vers C donc $(f(x_n))_n$ est de Cauchy.

QED