

Exercice 5**Question 1**

On a

$$E(X_1) = \int_a^1 t f(t) dt = \int_a^1 t \frac{1}{1-a} dt = \frac{1}{1-a} \frac{1-a^2}{2} = \frac{1+a}{2}$$

On a

$$E[X_1^2] = \int_a^1 t^2 f(t) dt = \int_a^1 t^2 \frac{1}{1-a} dt = \frac{1}{1-a} \frac{1-a^3}{3} = \frac{1+a+a^2}{3}$$

Donc

$$V(X_1) = E[X_1^2](E[X_1])^2 = \frac{1+a+a^2}{3} - \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$$

Question 2

On a

$$E[X_1] = \frac{1+a}{2} \implies a = 2E[X_1] - 1$$

Donc on prend comme EMM de a

$$\tilde{a}_n = 2\bar{a}_n - 1$$

Mais $0 < a < 1$, il faut donc que son estimateur soit aussi $0 < \tilde{a}_n < 1$ Donc

$$0 < 2\bar{a}_n - 1 < 1 \implies 1 < 2\bar{a}_n < 2 \implies 1/2 < \bar{a}_n < 1$$

Donc l'EMM est défini uniquement si la moyenne de l'échantillon \bar{a}_n est comprise entre 0.5 et 1.

Consistance. En appliquant le Lemme de l'application Continue (LAC). En prenant $h(x) = 2x - 1$, pour $1/2 < x < 1$. La fonction est continue. On a également, $\bar{a}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} E[X_1]$ selon la loi des grands nombres.

Donc $\tilde{a}_n = h(\bar{a}_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} h(E[X_1]) = a$. Donc consistance.

En appliquant le Théorème Central Limite (TCL) avec $\mu = a$ et $\sigma^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$ on a

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{a}_n - a)}{\sqrt{\sigma^2}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Question 3

On calcule

$$\mathcal{L}_a(x_i, \dots, x_n) = \prod_1^n \frac{1}{1-a} 1_{x_i \in [a, 1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n} \prod_1^n 1_{x_i \in [a, 1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n} 1_{\min(x_i) \leq x_i \leq 1}(x_i)$$

Ce qui donne la fonction suivante:

$$\mathcal{L}_a(x_i, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & a = 0 \\ \frac{1}{(1-a)^n} & 0 < a \leq \min(x_i) \\ 0 & \min(x_i) < a < 1 \end{cases}$$

$\mathcal{L}_a(x_i, \dots, x_n)$ est croissante sur $0 \leq a \leq \min(x_i)$ et nulle quand $\min(x_i) < a$ donc EMV est maximale lorsque $a = \min(x_i)$. On a $\hat{a}_n = \frac{1}{(1-\min(x_i))^n}$.

Je ne comprends pas ce que représente Z_n .

Question 4

Vitesse de convergence de \tilde{a}_n . Il faut trouver le plus grand d qui vérifie :

$$n^d(\tilde{a}_n - a) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} 0$$

$$\forall \epsilon, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n^d(\tilde{a}_n - a) \geq \epsilon) = 0$$

$$\forall \epsilon, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}((2\tilde{a}_n) \geq \frac{\epsilon}{n^d} + a + 1) = 0$$

Je ne comprends rien.

Exercice 6**Question 1****Question 1-a**

en prenant $k = 1$ on a

$$\mathbb{E}(U^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{2!}{2 \cdot 1!} = \frac{1}{2}$$

en prenant $k = 2$ on a

$$\mathbb{E}(U^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{4!}{4 \cdot 2!} = \frac{3}{2}$$

Question 1-b

Soit une variable aléatoire $Y = X_i^2$, l'événement $A = (Y \leq y)$ est équivalent à l'événement $B = (-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$. lorsque $y < 0$, on a $P(Y \leq y) = 0$. Lorsque $y \geq 0$,

$$F_Y(y) = P((Y \leq y)) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

et

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_X(\sqrt{y}) - \frac{\partial}{\partial y} F_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]$$

Dans notre cas, $f_X(x)$ est défini pour $x \geq 0$, donc $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})$. Ce qui fait :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[\frac{\sqrt{y}}{\theta} \exp\left(-\frac{\sqrt{y}^2}{2\theta}\right) \right] = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{y}{2\theta}\right)$$

qui est une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\theta}$.

Question 1-c

Calcul de $E(X_1)$

$$E(X_1) = \int_0^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

car $f_X(x) = 0$ lorsque $x < 0$.

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx$$

Par substitution prenant $u = \frac{x}{\sqrt{\theta}}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ et $\partial x = \sqrt{\theta} \partial u$, on obtient :

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \sqrt{\theta} du = \sqrt{\theta} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

D'après la question 1-a, pour $k = 1$, on a :

$$E(X_1) = \sqrt{2\pi\theta} \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{\sqrt{2\pi\theta}}{2} = \sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}$$

Calcul de $E(X_1^2)$

$$E(X_1^2) = \frac{1}{\frac{1}{2\theta}} = 2\theta$$

car $E(X_1^2)$ est une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\theta}$.

Calcul de $E(X_1^3)$

$$E(X_1^3) = \int_0^{+\infty} x^3 f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x) dx$$

car $f_X(x) = 0$ lorsque $x < 0$.

$$E(X_1^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx$$

Par substitution prenant $u = \frac{x}{\sqrt{\theta}}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ et $\partial x = \sqrt{\theta} \partial u$, on obtient :

$$E(X_1^3) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 u^4 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \sqrt{\theta} du = \sqrt{\theta} \theta^2 \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^4 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

D'après la question 1-a, pour $k = 2$, on a :

$$E(X_1^3) = \sqrt{2\pi\theta} \theta^2 \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{3\sqrt{2\pi\theta} \theta^2}{2}$$

Calcul de $E(X_1^4)$.

$$E(X_1^4) = \int_0^{+\infty} x^4 f_x(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^5}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx = 8\theta^2$$

Par utilisation d'un solveur internet.

Question 2

Question 2-a

On calcule

$$\mathcal{L}_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_1^n \frac{x_i^2}{\theta} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\theta}\right) 1_{x_i \in [0, +\infty]}(x_i) = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{\theta^n} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2\theta}\right) \prod_1^n 1_{x_i \in [0, +\infty]}(x_i)$$

On calcule $\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}_\theta(x_1, \dots, x_n)$ et on cherche les points où la dérivée s'annule.

En utilisant un solveur internet on a

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}_\theta(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 x_2 \dots x_n \theta^{-n-2} \cdot (2n\theta - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)) e^{-\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{2\theta}}}{2}$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}_\theta(x_1, \dots, x_n) = 0$$

quand $\hat{\theta}_n = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{2n} = \frac{\mu}{2}$.

Question 3

Question 3-a