Exercice 1

Exercice 1.1

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \frac{2r\cos(\theta)}{\partial r} = 2\cos(\theta)$$
$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = \frac{2r\cos(\theta)}{\partial \theta} = -2r\sin(\theta)$$
$$\frac{\partial Y}{\partial r} = \frac{3r\sin(\theta)}{\partial r} = 3\sin(\theta)$$
$$\frac{\partial Y}{\partial \theta} = \frac{3r\sin(\theta)}{\partial \theta} = 3r\cos(\theta)$$

Exercice 1.2

Dérivable ??

La matrice Jacobienne de $F(r,\theta)$ est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & -2r\sin(\theta) \\ 3\sin(\theta) & 3r\cos(theta) \end{vmatrix}$$

Le déterminant Jacobien est $(2\cos(\theta))(3r\cos(\theta)) - (-2r\sin(\theta))(3\sin(\theta)) = 6r\cos^2(\theta) + 6r\sin^2(\theta) = 6r$

Exercice 1.3

D'après le théorème d'inversion locale, notons $x_0 = (1,0)$ si $DF(1,0)$ est inversible et F est de classe C^1 alors $\exists r > 0,$ tel que $B = B(x_0, r)$ et la restriction de F à B est un difféomorphisme sur $B \to F(B)$. On sait que F est de classe C^1, que $DF(1,0)$ est inversible car son déterminant Jacobien est $6 * 1 = 6$ (différent de 0). $F(1,0) = (2*1*\cos(0), 3*1*\sin(0)) = (2,0)$. Donc F est un difféomorhisme sur $(1,0) \to (2,0)$.

Exercice 1.4

Montrons que l'application $F(r,\theta)$ est bijective. SOit (x, Y) tel que $F(r,\theta) = (x,y)$ on a alors

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = (r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)) = r^2$$

donc on peut définir r uniquement á partir de (x,y).

$$\frac{2y}{3x} = \frac{6r\sin(\theta)}{6r\cos(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

donc on peut définir θ uniquement à partir de (x,y).

L'application réciproque est

$$F^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2}, \arctan\left(\frac{2y}{3x}\right)\right)$$
$$DF^{-1}(2,0) = \left(\frac{\partial F^{-1}}{\partial x}(2,0), \frac{\partial F^{-1}}{\partial y}(2,0)\right) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial F^{-1}}{\partial x}(2,0) = \frac{x}{4\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}}(2,0) =$$
$$\frac{\partial F^{-1}}{\partial y}(2,0) = \frac{6x}{4y^2 + 9x^2}(2,0) = \frac{1}{3}$$

donc

$$DF^{-1}(2,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

Exercice 1.5

On a $X(1,0)+Y(1,0)=2.1.\cos(0)+3.1.\sin(0)=2$. Donc l'équation $X(r,\theta)+Y(r,\theta)=2$ admet au moins la solution $(1,0)$.

la suite???

Exercice 2

Exercice 2.1

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=1$

Rien compris.

Exercice 3

Exercice 3.1

Aucune idée

Exercice 3.2

$$\nabla f_1(x,y,z)=\left(\frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial e^{x+y+z}}{\partial x},\frac{\partial e^{x+y+z}}{\partial y},\frac{\partial e^{x+y+z}}{\partial z}\right)=(e^{x+y+z},e^{x+y+z},e^{x+y+z})$$

$$\nabla f_2(x,y,z)=\left(\frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial z}\right)=(3x^2,-3y^2,1+3z^2)$$

Exercice 3.3

$$\det\begin{vmatrix} e^{x+y+z} & e^{x+y+z} \\ -3y^2 & 1+3z^2 \end{vmatrix}=e^{x+y+z}(1+3z^2+3y^2)$$

C'est nul si $e^{x+y+z}=0$ pas possible, ou $1+3z^2+3y^2=0$ impossible aussi. Donc le déterminant est non toujours nul.

Exercice 3.4

On peut prendre $F(x,y,z)=(f_1(x,y,z)-a_0)+(f_2(x,y,z)-b_0)$. car, $(x,y,z)\in\Gamma \implies f_1(x,y,z)-a_0=0\wedge f_2(x,y,z)-b_0=0$.

Exercice 3.5

???

Exercice 4

Exercice 4.1

Rien compris

QED