Module Math 201 : Séries et Intégrales

Feuille d'exercices numéro 2

Convergence des suites ; sommes finies

Les exercices soulignés seront à chercher la semaine où vous serez chez vous, et ils feront l'objet d'un corrigé.

Exercice 1 - Pour tout entier $n \geq 1$ on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}.$$

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 - Reprendre l'exercice précédent avec les suites suivantes (on rappelle que $0! = 1$) :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Exercice 3 - Pour tout entier $n \geq 1$ on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}.$$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Démontrer la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge, et encadrer sa limite.

Exercice 4 - Pour tout entier $n \geq 1$ on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \ldots + \frac{n}{n^2+1}.$$

1. Démontrer la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{4}$.
3. En déduire que la suite (u_n) n'est pas de Cauchy. Que peut-on en conclure ?
4. Démontrer la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
5. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. A-t-on $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+p} - u_n) = 0$?

Exercice 5 - Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = e^{in\pi/3}$ pour tout $n \geq 1$ n'est pas de Cauchy. En déduire qu'elle n'a pas de limite.

Exercice 6 -

1. Montrer que pour tous entiers $n, p \geq 1$ on a
$$\sum_{j=n+1}^{n+p} \frac{1}{j^2} \leq \int_n^{n+p} \frac{1}{x^2} dx.$$
2. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose
$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}.$$
Démontrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy. Que peut-on en conclure ?
3. Donner une autre preuve du fait que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.

Exercice 7 - Etant donné un entier $n \geq 1$, calculer les sommes suivantes :
$$a_n = \sum_{k=3}^{15} \frac{k-1}{3}, \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{2^k} + 3k + n - 5\Big).$$

Exercice 8 - Même exercice avec :
$$u_n = \sum_{k=3}^{n} \Big(4^k - 2k + 5n - 2\Big).$$

Exercice 9 - Démontrer que pour tout $n \geq 0$ on a
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
et en déduire la valeur de la somme
$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \ldots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1.$$

Exercice 10 - Démontrer que pour tout $n \geq 0$ on a
$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Exercice 11 - En utilisant si nécessaire la formule pour $\sum_{k=1}^{n} k^2$ démontrée à l'exercice 9, exprimer en fonction de n chacune des sommes suivantes :
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1)^2, \quad c_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \max(i,j).$$

Exercice 12 - Etant donné un entier $n \geq 1$, calculer (en utilisant si nécessaire l'exercice 9)
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j).$$