

**Exercice 5****Question 1**

On a

$$E(X_1) = \int_a^1 t f(t) dt = \int_a^1 t \frac{1}{1-a} dt = \frac{1}{1-a} \frac{1-a^2}{2} = \frac{1+a}{2}$$

On a

$$E[X_1^2] = \int_a^1 t^2 f(t) dt = \int_a^1 t^2 \frac{1}{1-a} dt = \frac{1}{1-a} \frac{1-a^3}{3} = \frac{1+a+a^2}{3}$$

Donc

$$V(X_1) = E[X_1^2] - (E[X_1])^2 = \frac{1+a+a^2}{3} - \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$$

**Question 2**

On a

$$E[X_1] = \frac{1+a}{2} \implies a = 2E[X_1] - 1$$

Donc on prend comme EMM de  $a$

$$\tilde{a}_n = 2\bar{a}_n - 1$$

Mais  $0 < a < 1$ , il faut donc que son estimateur soit aussi  $0 < \tilde{a}_n < 1$  Donc

$$0 < 2\bar{a}_n - 1 < 1 \implies 1 < 2\bar{a}_n < 2 \implies 1/2 < \bar{a}_n < 1$$

Donc l'EMM est défini uniquement si la moyenne de l'échantillon  $\bar{a}_n$  est comprise entre 0.5 et 1.

Consistance. En appliquant le Lemme de l'application Continue (LAC). En prenant  $h(x) = 2x - 1$ , pour  $1/2 < x < 1$ . La fonction est continue. On a également,  $\bar{a}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} E[X_1]$  selon la loi des grands nombres.

Donc  $\tilde{a}_n = h(\bar{a}_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} h(E[X_1]) = a$ . Donc consistance.

En appliquant le Théorème Central Limite (TCL) avec  $\mu = a$  et  $\sigma^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$  on a

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{a}_n - a)}{\sqrt{\sigma^2}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

**Question 3**

On calcule

$$\mathcal{L}_a(x_i, \dots, x_n) = \prod_1^n \frac{1}{1-a} 1_{x_i \in [a, 1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n} \prod_1^n 1_{x_i \in [a, 1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n} 1_{\min(x_i) \leq x_i \leq 1}(x_i)$$

Ce qui donne la fonction suivante:

$$\mathcal{L}_a(x_i, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & a = 0 \\ \frac{1}{(1-a)^n} & 0 < a \leq \min(x_i) \\ 0 & \min(x_i) < a < 1 \end{cases}$$

$\mathcal{L}_a(x_i, \dots, x_n)$  est croissante sur  $0 \leq a \leq \min(x_i)$  et nulle quand  $\min(x_i) < a$  donc EMV est maximale lorsque  $a = \min(x_i)$ . On a  $\hat{a}_n = \frac{1}{(1-\min(x_i))^n}$ .

Je ne comprends pas ce que représente  $Z_n$ .

**Question 4**

Vitesse de convergence de  $\tilde{a}_n$ . Il faut trouver le plus grand  $d$  qui vérifie:

$$n^d(\tilde{a}_n - a) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} 0$$

$$\forall \epsilon, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n^d(\tilde{a}_n - a) \geq \epsilon) = 0$$

$$\forall \epsilon, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}((2\tilde{a}_n) \geq \frac{\epsilon}{n^d} + a + 1) = 0$$

Je ne comprends rien.

**Exercice 6****Question 1-a**

en prenant  $k = 1$  on a

$$\mathbb{E}(U^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{2!}{2 \cdot 1!} = \frac{1}{2}$$

en prenant  $k = 2$  on a

$$\mathbb{E}(U^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{4!}{4 \cdot 2!} = \frac{3}{2}$$

**Question 1-b**

Je ne comprends même pas la question. J'abandonne. Good luck.