

Rappel de cours

Une matrice $n \times n$ A est diagonalisable ($A = PDP^{-1}$) si:

- Elle a n vecteurs propres linéairement indépendants, condition pour avoir une matrice P formée des vecteurs propres en colonne qui est inversible.
- Elle a n valeurs propres distinctes, car n valeurs propres génèrent n vecteurs propres linéairement indépendants
- $\sum \dim E_{sp_n}(A) = n$
- pour chaque valeur propre sp , on a $\dim E_{sp}(A) = \text{multiplicité } sp$. La multiplicité de sp le nombre de racine de sp .
- si $\chi_A(X) = P(X)$ et $P(X)$ est un polynome scindé (ie $P(X) = C(X - A_1)(X - A_2) \dots (X - A_{m-1})(X - A_m)$).
- si $\chi_A(X) = P(X)$ et $P(A) = 0$.

Exercice 3

Exercice 3-e

On a

$$e_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1.2.3 \dots (n-1).n}{1.2.3 \dots (n-1).n} < \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot 1.1 \dots 1 = \frac{2}{n^2}$$

On sait que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge ($\sum_0^\infty \frac{1}{n^2}$ converge). En appliquant le Théorème de Riemann, on déduit que la suite de terme général e_n converge.

Exercice 3-f

On a

$$f_n = \frac{1}{n^2 \ln n} < \frac{1}{n^3}$$

On sait que la série de terme général $\frac{1}{n^3}$ converge ($\sum_0^\infty \frac{1}{n^3}$ converge). En appliquant le Théorème de Riemann, on déduit que la suite de terme général f_n converge.

Exercice 3-g

On a

$$f_n = \frac{2^n + 3^n + n^4}{n5^n + 7n^7 + 2}$$

Exercice 3-h

On a

$$f_n = \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n = \left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \right)^n < \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n}$$

C'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme -1. Donc $\sum_0^\infty \frac{1}{2^n} = -\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = -2(1 - \frac{1}{2^n})$.
Donc la suite de terme général h_n converge.

Exercice 4

Exercice 4-i

On a

$$i_n = \left(\frac{3n+1}{n+5} \right)^n = \left(\frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{n}} \right)^n < 3^n =$$

C'est une série géométrique de raison 3 et de premier terme $\frac{1}{5}$. Donc $\sum_0^\infty 3^n = \frac{1}{5} \frac{1-3^n}{1-3} = -\frac{1}{5} \frac{1-3^n}{2}$. Donc la suite de terme général i_n diverge.

QED