

Rappel de cours

Travail

- La composante de la force d'un point M , $\vec{F}(M)$ sur l'axe O_x est donnée par le produit scalaire $f(x) = \vec{F}(M) \cdot \vec{i}$.
- Le travail d'une force \vec{F} sur un segment \overrightarrow{AB} est donné par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot \vec{i} dx = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx$$

- On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point A et B .

$$\forall A, B, C, W_{A \rightarrow B} \vec{F} = W_{A \rightarrow C} \vec{F} + W_{C \rightarrow B} \vec{F}$$

- Dans le cas où le chemin est rectiligne, si une force est conservatrice alors l'énergie potentielle associée à la force \vec{F} est notée $E_p(x)$ est définie par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot \vec{i} dx = E_p(x_b) - E_p(x_a)$$

- Le travail du poids $\vec{P} = m\vec{g}$ sur le segment \overrightarrow{AB} est $W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mg(z_b - z_a) = -mgh$.
- Le travail de la force de rappel élastique d'un ressort de raideur k , $\vec{F} = -k.x\vec{i}$ est $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -\frac{1}{2}k(x_a^2 - x_b^2)$.

Énergie

- L'énergie mécanique d'un système $E_m = E_c + E_p$ avec E_c l'énergie cinétique qui dépend de la masse et de la norme de la vitesse du système physique étudié et de l'énergie potentielle E_p qui correspond aux forces exercées sur le système.
- L'énergie cinétique du système $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
- L'énergie potentielle qui correspond à l'ensemble des forces conservatives qui s'exercent sur le système, $E_p(B) - E_p(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{conservatives})$
- $E_m(B) - E_m(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{non conservatives})$

Puissance

- La puissance P représente l'énergie transférée uniformément (ie. le travail) pendant une unité de temps, $P = \frac{W}{\Delta t}$.
- $1 W = 1 J.s^{-1} = 1 N.m.s^{-1} = 1 kg.m^2.s^{-3}$

Exo 4.1.1

L'électron est soumis à la force gravitationnelle. Donc $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. On néglige l'énergie de la force gravitationnelle devant celle de l'énergie cinétique. On a $E_m = \frac{1}{2}mv^2 = 18 keV$, donc $v = \sqrt{\frac{2 \cdot 18 keV}{m}}$ et $m = 9.10 \cdot 10^{-31} kg$, $18 keV = 2.88 \cdot 10^{-12}$.

Exo 4.1.2

Il faut monter une masse de $m = 500 + 5 * 70 = 850 \text{ kg}$ à une vitesse de $v = 25/60 = 0.41 \text{ m/s}$. La puissance nécessaire est $P = m.g.v = 850 * 9.81 * 0.41 = 3418 \text{ Watt}$.

En l'absence de frottements la puissance nécessaire pour lever la cabine d'ascenseur est égale à la puissance fournie par le moteur. Le puissance du poids est résistante, celle du moteur est motrice.

v On a $P = \frac{W}{\Delta_t}$, donc $W = P * \Delta_t = 3418 * 60 = 205 \text{ kJ}$.

Exo 4.1.3

Q1

TWh représente des $10^{12}Wh$.

Q2

On a $1W = 1J/s$. On produit $429.10^{12}Wh$ pour une année, donc on a produit $\frac{429.10^{12}}{24*365.25} = 48.10^9 W$. Ce qui fait $48.10^9 * (24 * 365.25 * 3600) = 1.510^{18} J$.

Q3

La puissance électrique moyenne d'un réacteur est de $\frac{48.10^9}{58} = 0.82 MW$.

Exo 4.2

Q1

Le travail accompli par la force est $\vec{F} \cdot \vec{AB}$

Q2

On a $E_m = E_c + E_p$. L'énergie du système E_m est conservée. Donc $E_{c0} + E_p = E_{cf} + E_{pf}$ avec $E_{pf} = 0$ car aucune force ne s'exerce sur la masse. Donc l'accroissement de l'énergie cinétique est $E_{cf} - E_{c0} = E_p$.

Q3

La puissance moyenne développé est $P = \frac{\Delta W}{\Delta_t} = \frac{E_p}{T} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{AB}}{T}$.

Exo 4.2.3 - Traineau

Q1.a

3 forces s'exercent sur la masse m ; la force de la pesanteur (verticale) \vec{P} , la force de réaction \vec{R} (perpendiculaire au plan incliné) et la force de frottement statique \vec{f} (parallèle au plan incliné). Comme la masse ne bouge pas, la somme des 3 forces est nulle.

On définit un repère orthonormé centré sur la masse m et parallèle au plan incliné. Dans ce repère, les 3 forces ont les coordonnées:

$$\begin{cases} P_x = -m.g.\sin(\beta) & R_x = 0 & f_x = \|\vec{f}\| \\ P_y = -m.g.\cos(\beta) & R_y = \|\vec{R}\| & f_y = 0 \end{cases}$$

Donc, on a $\|\vec{R}\| = m.g.\cos(\beta)$ et $\|\vec{f}\| = m.g.\cos(\beta)$.

Q1.b

Le coefficient de frottement statique k_s peut être déterminé pour l'angle minimum du plan incliné β_{min} faisant bouger la masse m .

$$k_s = \frac{\overrightarrow{f_{max}}}{\overrightarrow{R}}$$

$$k_s = \frac{-m.g.\sin(\beta_{min})}{-m.g.\cos(\beta_{min})}$$

$$k_s = \tan(\beta_{min})$$

Q1.c

Ne marche pas pour $\beta = 60^\circ$. Mais $\tan(6^\circ) = 0.1$.

Q2.a

Le travail $W_{C \rightarrow D} = W_{C \rightarrow D}(\overrightarrow{f'}) + W_{C \rightarrow D}(\overrightarrow{R}) + W_{C \rightarrow D}(\overrightarrow{P})$. On a

$$\begin{cases} W_{C \rightarrow D}(\overrightarrow{R}) = 0 \\ W_{C \rightarrow D}(\overrightarrow{f'}) = \overrightarrow{f'} \cdot l = -k_d \cdot m \cdot g \cdot \cos(\beta) \cdot l \\ W_{C \rightarrow D}(\overrightarrow{P}) = -m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\beta) \end{cases} \quad \text{La force } \overrightarrow{R} \text{ est toujours perpendiculaire au déplacement.}$$

Donc, $W_{C \rightarrow D} = m \cdot g \cdot l \cdot (\sin(\beta) - k_d \cdot \cos(\beta))$.

Q2.b

Le travail $W_{D \rightarrow E} = W_{D \rightarrow E}(\overrightarrow{f'}) + W_{D \rightarrow E}(\overrightarrow{R}) + W_{D \rightarrow E}(\overrightarrow{P})$. On a

$$\begin{cases} W_{D \rightarrow E}(\overrightarrow{R}) = 0 \\ W_{D \rightarrow E}(\overrightarrow{f'}) = \overrightarrow{f'} \cdot l = -k_d \cdot m \cdot g \cdot l' \\ W_{D \rightarrow E}(\overrightarrow{P}) = -m \cdot g \cdot h = 0 \end{cases} \quad \text{La force } \overrightarrow{R} \text{ est toujours perpendiculaire au déplacement.}$$

Donc, $W_{C \rightarrow D} = -k_d \cdot m \cdot g \cdot l'$.

Q2.c

Les forces étant toutes conservatives on a $E_m = W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow E} = 0$

$$m \cdot g \cdot l \cdot (\sin(\beta) - k_d \cdot \cos(\beta)) - k_d \cdot m \cdot g \cdot l' = 0$$

$$l \cdot (\sin(\beta) - k_d \cdot \cos(\beta)) - k_d \cdot l' = 0$$

$$(\sin(\beta) - k_d \cdot \cos(\beta)) - k_d \frac{l'}{l} = 0$$

$$\sin(\beta) - k_d \cdot \cos(\beta) - k_d \cdot r = 0$$

$$\sin(\beta) - k_d(r + \cos(\beta)) = 0$$

$$k_d = \frac{\sin(\beta)}{r + \cos(\beta)}$$

Q2.d

On a

$$l' = \frac{l \cdot (\sin(\beta) - k_d \cdot \cos(\beta))}{k_d}$$

$$\text{Donc } l' = 5 \frac{\sin(6^\circ) - 0.05 \cos(6^\circ)}{0.05} = 5.48m.$$

Exo 4.3.1**Q1**

On a $F_g = G \frac{M_t \cdot m}{(R_t + h)^2}$ avec $G = 6.674 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$, R_t le rayon de la terre et M_t la masse de la terre.

Q2

Le développement limité de $f(x)$ au point x_0 est $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$. On a $f'(x) = n \cdot (1 + x)^{n-1}$. Donc,

$$f(x) = (1 + x_0)^n + n(1 + x_0)^{n-1} \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

En prenant $x_0 = 0$, cela fait $f(x) = 1 + n \cdot x^{n-1} + o(x)$.

Q3

On a $F_g = mg = G \frac{M_t \cdot m}{(R_t + h)^2}$. Donc à petite altitude,

$$g = G \frac{M_t}{R_t^2 (1 + \frac{h}{R_t})^2} = G \frac{M_t}{R_t (1 + 2 \frac{h}{R_t})} = G \frac{M_t}{R_t^2}$$

$$g = 9.82$$

avec $R_t = 6370 \text{ km}$ et $M_t = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Q4

On a $\int \frac{K}{x^2} = K \int \frac{1}{x^2} = \frac{-K}{x} + C$

Q5

On a

$$W_{0 \rightarrow h} = \int_0^h f(x) dx = \int_0^h G \frac{M_t \cdot m}{(R_t + x)^2} dx$$

Changement de variable $X = R_t + x$ donc $dX = dx$.

$$W_{0 \rightarrow h} = \int_{R_t}^{R_t+h} G \frac{M_t \cdot m}{X^2} dX = [-G \frac{M_t \cdot m}{X} + C]_{R_t}^{R_t+h}$$

$$W_{0 \rightarrow h} = -G \frac{M_t \cdot m}{R_t + h} + G \frac{M_t \cdot m}{R_t} = -G \cdot M_t \cdot m \left(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_t + h} \right)$$

$$W_{0 \rightarrow h} = -G \cdot M_t \cdot m \left(\frac{R_t + h - R_t}{R_t(R_t + h)} \right) = -G \cdot M_t \cdot m \left(\frac{h}{R_t(R_t + h)} \right)$$

Lorsque h est petit devant R_t on a:

$$W_{0 \rightarrow h} = -G \cdot M_t \cdot m \left(\frac{h}{R_t^2} \right) = -m \cdot g \cdot h$$

Exo 4.3.2

Q1

$$\int ax^2 + bx + c = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + d$$

Q2

On a $\vec{F} = -k.x.\vec{i}$, donc

$$E_p(x) = W_{0 \rightarrow x} F(x) = \int_0^x F(x) = \int_0^x -k.x = \left[-\frac{k}{2}x^2 \right]_0^x = -\frac{1}{2}k.x^2$$

Q3

L'énergie potentielle gravitationnelle est $E_p(x) = mgx$.

La forme de l'énergie potentielle totale est $E_p = mgx - \frac{1}{2}k.x^2$.

Exo 4.4.1

Q1

$$\begin{aligned}\int 2 dx &= 2x + C \\ \int Ax dx &= \frac{1}{2}Ax^2 + C \\ \int -\frac{K}{x^2} dx &= \frac{K}{x} + C\end{aligned}$$

Q2

Une force est conservative si le calcul de son travail ne dépend pas du chemin parcouru. Donc, il suffit de montrer que

$$W_{A \rightarrow C} \vec{F} = W_{A \rightarrow B} \vec{F} + W_{B \rightarrow C} \vec{F}$$

Q3.a

$$\begin{aligned}W_{x_1 \rightarrow x_2} \vec{F} &= \int_{x_1 \rightarrow x_2} -\frac{GmM}{x^2} dx = \left[\frac{GmM}{x} \right]_{x_1}^{x_2} \\ W_{A \rightarrow C} \vec{F} &= \frac{GmM}{C} - \frac{GmM}{A} \\ W_{A \rightarrow B} \vec{F} + W_{B \rightarrow C} \vec{F} &= \frac{GmM}{B} - \frac{GmM}{A} + \frac{GmM}{C} - \frac{GmM}{B} = \frac{GmM}{C} - \frac{GmM}{A} = W_{A \rightarrow C} \vec{F}\end{aligned}$$

Conservative.

Q3.c

$$\begin{aligned}W_{x_1 \rightarrow x_2} \vec{F} &= \int_{x_1 \rightarrow x_2} -kx dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2 \right]_{x_1}^{x_2} \\ W_{A \rightarrow C} \vec{F} &= -\frac{1}{2}kC^2 + \frac{1}{2}kA^2 \\ W_{A \rightarrow B} \vec{F} + W_{B \rightarrow C} \vec{F} &= -\frac{1}{2}kB^2 + \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}kC^2 - \frac{1}{2}kB^2 = -\frac{1}{2}kC^2 + \frac{1}{2}kA^2 = W_{A \rightarrow C} \vec{F}\end{aligned}$$

Conservative.

Q3.d

$$W_{x_1 \rightarrow x_2} \vec{F} = \int_{x_1 \rightarrow x_2} -\gamma \dot{x} dx$$

Cette intégrale d'épend de la vitesse au point x . La vitesse est indépendante de la position de x donc la force est non conservative.

Q3.e

$$W_{x_1 \rightarrow x_2} \vec{F} = \int_{x_1 \rightarrow x_2} -\Lambda x dx = \left[\frac{1}{2} \Lambda x^2 \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$W_{A \rightarrow C} \vec{F} = \frac{1}{2} \Lambda C^2 - \frac{1}{2} \Lambda A^2$$

$$W_{A \rightarrow B} \vec{F} + W_{B \rightarrow C} \vec{F} = \frac{1}{2} \Lambda B^2 - \frac{1}{2} \Lambda A^2 + \frac{1}{2} \Lambda C^2 - \frac{1}{2} \Lambda B^2 = \frac{1}{2} \Lambda C^2 - \frac{1}{2} \Lambda A^2 = W_{A \rightarrow C} \vec{F}$$

Conservative.

Exo 4.4.2**Q1**

L'énergie potentielle d'une masse m est à 1000m d'altitude est: $E_p = W_{0 \rightarrow 1000} mg dx = [mgx]_0^{1000} = 1.g.1000 - 1.g.0 = 9810$

Q2

L'énergie cinétique au moment de l'impact est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Comme il n'y a pas de frottement et que les forces sont conservatives alors l'énergie est conservée. Donc

$$E_p = E_c$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 9810$$

$$v = \sqrt{2 * 9810} = 140m/s$$

Q3

Durant la chute l'énergie potentielle est de :

$$E_p(x) = W_{x \rightarrow 1000} mg dx = [mgx]_x^{1000} = 1.g.1000 - 1.gx = 9810 - gx$$

L'énergie cinétique est:

$$E_c(x) = \frac{1}{2}mv(x)^2 = \frac{1}{2}v(x)^2$$

L'énergie est conservée donc

$$E_c(x) = E_p(x)$$

$$v(x) = \sqrt{2(9810 - gx)}$$