

Exercice 5**Question 1**

On a

$$E(X_1) = \int_a^1 t f(t) dt = \int_a^1 t \frac{1}{1-a} dt = \frac{1}{1-a} \frac{1-a^2}{2} = \frac{1+a}{2}$$

On a

$$E[X_1^2] = \int_a^1 t^2 f(t) dt = \int_a^1 t^2 \frac{1}{1-a} dt = \frac{1}{1-a} \frac{1-a^3}{3} = \frac{1+a+a^2}{3}$$

Donc

$$V(X_1) = E[X_1^2] - (E[X_1])^2 = \frac{1+a+a^2}{3} - \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$$

Question 2

On a

$$E[X_1] = \frac{1+a}{2} \implies a = 2E[X_1] - 1$$

Donc on prend comme EMM de a

$$\tilde{a}_n = 2\bar{a}_n - 1$$

Mais $0 < a < 1$, il faut donc que son estimateur soit aussi $0 < \tilde{a}_n < 1$ Donc

$$0 < 2\bar{a}_n - 1 < 1 \implies 1 < 2\bar{a}_n < 2 \implies 1/2 < \bar{a}_n < 1$$

Donc l'EMM est défini uniquement si la moyenne de l'échantillon \bar{a}_n est comprise entre 0.5 et 1.

Consistance. En appliquant le Lemme de l'application Continue (LAC). En prenant $h(x) = 2x - 1$, pour $1/2 < x < 1$. La fonction est continue. On a également, $\bar{a}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} E[X_1]$ selon la loi des grands nombres.

Donc $\tilde{a}_n = h(\bar{a}_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} h(E[X_1]) = a$. Donc consistance.

En appliquant le Théorème Central Limite (TCL) avec $\mu = a$ et $\sigma^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$ on a

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{a}_n - a)}{\sqrt{\sigma^2}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Question 3

On calcule

$$\mathcal{L}_a(x_i, \dots, x_n) = \prod_1^n \frac{1}{1-a} 1_{x_i \in [a, 1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n} \prod_1^n 1_{x_i \in [a, 1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n} 1_{\min(x_i) \leq x_i \leq 1}(x_i)$$

Ce qui donne la fonction suivante:

$$\mathcal{L}_a(x_i, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & a = 0 \\ \frac{1}{(1-a)^n} & 0 < a \leq \min(x_i) \\ 0 & \min(x_i) < a < 1 \end{cases}$$

$\mathcal{L}_a(x_i, \dots, x_n)$ est croissante sur $0 \leq a \leq \min(x_i)$ et nulle quand $\min(x_i) < a$ donc EMV est maximale lorsque $a = \min(x_i)$ donc $\hat{a} = \min(x_i)$.

$$P(Z_n \geq s) = P\left(\frac{n(\hat{a} - a)}{1-a} \geq s\right) = P\left(\hat{a} \geq \frac{s(1-a) + na}{n}\right)$$

$$P(\hat{a} \geq t) = P(\forall i \in [1, n] X_i \geq t) = P(X_1 \geq t)^n = \left(\int_t^1 \frac{1}{1-a} dy \right)^n = \left(\frac{1-t}{1-a} \right)^n$$

Donc

$$P(Z_n \geq s) = \left(\frac{1 - \frac{s(1-a)+na}{n}}{1-a} \right)^n = \left(\frac{\frac{n-s(1-a)-na}{n}}{1-a} \right)^n = \left(\frac{(n-s)(1-a)}{n(1-a)} \right)^n = \left(\frac{n-s}{n} \right)^n$$

On a

$$P(Z_n \geq s) \in [0, 1]$$

$$\left(\frac{n-s}{n} \right)^n \in [0, 1]$$

donc

$$s \in [0, n]$$

Convergence en loi: $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$. On a $P(Z_n \leq s) = 1 - P(Z_n \geq s) = 1 - \left(\frac{n-s}{n} \right)^n$

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{n-x}{n} \right)^n & 0 \leq x \leq n \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(\frac{n-x}{n} \right)^n = 1 - e^{-x}$$

La variable aléatoire Z_n converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

En prenant $g(x) = \frac{x(1-a)}{n} + a$, et on a :

$$\hat{a}_n = g(Z_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L} g(Z) = \frac{Z(1-a)}{n} + a$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}(1-a)}{n} + a = a$$

Donc \hat{a} est consistant.

Question 4

Vitesse de convergence de \tilde{a}_n . Il faut trouver le plus grand d qui vérifie:

$$n^d(\tilde{a}_n - a) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} 0$$

$$\forall \epsilon, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n^d(\tilde{a}_n - a) \geq \epsilon) = 0$$

$$\forall \epsilon, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tilde{a}_n \geq \frac{\epsilon}{n^d} + a) = 0$$

Maintenant calculons $\mathbb{P}(\tilde{a}_n \geq t)$.

$$\mathbb{P}(\tilde{a}_n \geq t) = \mathbb{P}(2\bar{a}_n - 1 \geq t) = \mathbb{P}\left(\bar{a}_n \geq \frac{t+1}{2}\right)$$

On a $F(x) = \frac{x}{1-a}$. Donc

$$\mathbb{P}(\tilde{a}_n \geq t) = \frac{1}{1-a} - \frac{\frac{t+1}{2}}{1-a} = \frac{1-t}{2(1-a)}$$

Exercice 6**Question 1****Question 1-a**

La fonction $x^{2k}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$ est paire donc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx$$

En prenant $k = 1$ on a $\mathbb{E}(U^2) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{2!}{2 \cdot 1!} = 1$ et

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\theta}} = \frac{1}{2} E(U^2) = \frac{1}{2}$$

En prenant $k = 2$ on a $\mathbb{E}(U^4) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{4!}{4 \cdot 2!} = 3$ et

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\theta}} = \frac{1}{2} E(U^4) = \frac{3}{2}$$

Question 1-b

Soit une variable aléatoire $Y = X_i^2$, l'événement $A = (Y \leq y)$ est équivalent à l'événement $B = (-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$. lorsque $y < 0$, on a $P(Y \leq y) = 0$. Lorsque $y \geq 0$,

$$F_Y(y) = P((Y \leq y)) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

et

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_X(\sqrt{y}) - \frac{\partial}{\partial y} F_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]$$

Dans notre cas, $f_X(x)$ est défini pour $x \geq 0$, donc $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})$. Ce qui fait :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[\frac{\sqrt{y}}{\theta} \exp\left(-\frac{\sqrt{y}^2}{2\theta}\right) \right] = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{y}{2\theta}\right)$$

qui est une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\theta}$.

Question 1-c

Calcul de $E(X_1)$

$$E(X_1) = \int_0^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

car $f_X(x) = 0$ lorsque $x < 0$.

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx$$

Par substitution prenant $u = \frac{x}{\sqrt{\theta}}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ et $\partial x = \sqrt{\theta} \partial u$, on obtient :

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \sqrt{\theta} du = \sqrt{\theta} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

D'après la question 1-a, pour $k = 1$, on a :

$$E(X_1) = \sqrt{2\pi\theta} \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{\sqrt{2\pi\theta}}{2} = \sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}$$

Calcul de $E(X_1^2)$

$$E(X_1^2) = \frac{1}{\frac{1}{2\theta}} = 2\theta$$

car $E(X_1^2)$ est une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\theta}$.

Calcul de $E(X_1^3)$

$$E(X_1^3) = \int_0^{+\infty} x^3 f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x) dx$$

car $f_X(x) = 0$ lorsque $x < 0$.

$$E(X_1^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx$$

Par substitution prenant $u = \frac{x}{\sqrt{\theta}}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ et $\partial x = \sqrt{\theta} \partial u$, on obtient :

$$E(X_1^3) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 u^4 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \sqrt{\theta} du = \sqrt{\theta} \theta^2 \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^4 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

D'après la question 1-a, pour $k = 2$, on a :

$$E(X_1^3) = \sqrt{2\pi\theta} \theta^2 \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{3\sqrt{2\pi\theta} \theta^2}{2}$$

Calcul de $E(X_1^4)$.

$$E(X_1^4) = \int_0^{+\infty} x^4 f_x(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^5}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx$$

Par substitution $u = x^2$, $\partial x = \frac{1}{2x} \partial u$, donc $u^2 = x^4$

$$= \frac{1}{2\theta} \int u^2 e^{-\frac{u}{2\theta}} du$$

Par substitution $v = -\frac{u}{2\theta}$, $\partial u = -2\theta \partial v$.

$$= \frac{1}{2\theta} \int 4\theta^2 v^2 e^{-\frac{-2\theta v}{2\theta}} - 2\theta dv = -4\theta^2 \int v^2 e^v dv$$

Par partie $f = v^2$, $g' = e^v$, donc $f' = 2v$ et $g = e^v$.

$$= -4\theta^2 \left(v^2 e^v - \int 2ve^v dv \right)$$

Par partie, $f = v$, $g' = e^v$, donc $f' = 1$ et $g = e^v$.

$$= -4\theta^2 \left(v^2 e^v - 2ve^v + 2 \int e^v dv \right) = -4\theta^2 (v^2 e^v - 2ve^v + 2e^v) = -4\theta^2 \left(-\frac{u^2}{4\theta^2} e^{-\frac{u}{2\theta}} + 2\frac{u}{2\theta} e^{-\frac{u}{2\theta}} + 2e^{-\frac{u}{2\theta}} \right)$$

$$= -4\theta^2 \left(-\frac{x^4}{4\theta^2} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} + 2\frac{x^2}{2\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} + 2e^{-\frac{x^2}{2\theta}} \right) = -(x^4 + 4\theta x^2 + 8\theta^2) e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$$

Donc

$$E(X_1^4) = \int_0^{+\infty} x^4 f_x(x) dx = \left[-(x^4 + 4\theta x^2 + 8\theta^2) e^{-\frac{x^2}{2\theta}} \right]_0^{+\infty} = 8\theta^2$$

Facile, non?

Question 2**Question 2-a**

On calcule

$$\mathcal{L}_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_1^n \frac{x_i^2}{\theta} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\theta}\right) 1_{x_i \in [0, +\infty]}(x_i) = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{\theta^n} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2\theta}\right) \prod_1^n 1_{x_i \in [0, +\infty]}(x_i)$$

On calcule $\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}_\theta(x_1, \dots, x_n)$ et on cherche les points où la dérivée s'annule.

En utilisant un solveur internet on a

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}_\theta(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 x_2 \dots x_n \theta^{-n-2} \cdot (2n\theta - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)) e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2\theta}}}{2}$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}_\theta(x_1, \dots, x_n) = 0$$

quand $\hat{\theta}_n = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}{2n}$.

Ou plus simple (en passant par le log car $\mathcal{L}_\theta(x_1, \dots, x_n) \neq 0$)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(\mathcal{L}_\theta(x_1, \dots, x_n)) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\ln(x_1 x_2 \dots x_n) - \ln(\theta^n) - \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2\theta} \right) = -\frac{n}{\theta} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2\theta^2}$$

Et

$$-\frac{n}{\theta} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2\theta^2} = \frac{-2n\theta + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2\theta^2} = 0$$

quand $\hat{\theta}_n = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_1^n x_i^2$.

Question 2-b

Le biais de $\hat{\theta}$ est :

$$b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta = E\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2n}\right) - \theta = \frac{1}{2n} (E(x_1^2) + E(x_2^2) + \dots + E(x_n^2)) - \theta$$

Même loi, donc tous les $E(x_i^2)$ sont identiques.

$$= \frac{1}{2n} (2\theta + 2\theta + \dots + 2\theta) - \theta = \frac{2n\theta}{2n} - \theta = 0$$

Le risque quadratique de $\hat{\theta}$ est :

$$r(\hat{\theta}) = E((\hat{\theta} - \theta)^2) = b(\hat{\theta}) + V(\hat{\theta}) = 0 + V(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - (E(\hat{\theta}))^2$$

Question 2-c**Question 2-d****Question 3****Question 3-a****Question 3-b****Question 4****Question 4-a**

$$E(\bar{U}^2) = E\left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i\right)^2\right) = \frac{1}{n^2} E\left(\left(\sum_{i=1}^n U_i\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} E \left(\sum_{i=1}^n U_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} U_i U_j \right) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n E(U_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(U_i U_j) \right)$$

Comme les U_i suivent la même loi, elles ont la même espérance, de plus elles sont indépendantes donc $E(U_i U_j) = E(U_i) E(U_j)$. Donc

$$E(\bar{U}^2) = \frac{1}{n^2} \left(n E(U_1^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E(U_1))^2 \right)$$

On a aussi $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$. Donc

$$\begin{aligned} E(\bar{U}^2) &= \frac{1}{n^2} \left(n(V(U_1) + (E(U_1))^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E(U_1))^2 \right) = \frac{1}{n^2} \left(n(V(U_1) + (E(U_1))^2) + 2 \frac{n(n-1)}{2} (E(U_1))^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^2} (nV(U_1) + n(E(U_1))^2 + n(n-1)(E(U_1))^2) = \frac{1}{n^2} (nV(U_1) + n^2(E(U_1))^2) = (E(U_1))^2 + \frac{V(U_1)}{n} \end{aligned}$$

La seconde partie, on admet.

Question 4-b