

Rappel de cours:

•

Exercice 5.1

5.1.1.a

La relation ϕ est linéaire de E si

- $\forall A, B \in E, \phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$
- $\forall A \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \phi(\lambda A) = \lambda \phi(A)$

Posons $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ et $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

En utilisant deux fois la distributivité par rapport à l'addition, on a:

$$\phi(A + B) = M_1.(A + B).M_2 = M_1.(A.M_2 + B.M_2) = M_1.A.M_2 + M_1.B.M_2 = \phi(A) + \phi(B)$$

On a $(\lambda A).B = \lambda(A.B) = A.(\lambda B)$ (voir cours).

$$\phi(\lambda A) = M_1.(\lambda A).M_2 = M_1.(\lambda(A.M_2)) = \lambda(M_1.A.M_2) = \lambda \phi(A)$$

Donc la relation $\phi(M)$ est linéaire.

5.1.1.b

La matrice A est un point fixe de la relation ϕ si $\phi(A) = A$, soit

$$\phi(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} . A . \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = A$$

$$\phi(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = A$$

5.1.2.a

$$\begin{aligned} \phi(P_1 + P_2) &= ((P_1 + P_2)(1), (P_1 + P_2)'(2)) = ((P_1(1) + P_2(1)), (P_1'(2) + P_2'(2))) \\ &= (P_1(1) + P_2(1), P_1'(2) + P_2'(2)) \\ &= (P_1(1), P_1'(2)) + (P_2(1), P_2'(2)) = \phi(P_1) + \phi(P_2) \end{aligned}$$

Et

$$\phi(\lambda P) = (\lambda P(1), (\lambda P(2))') = (\lambda P(1), \lambda P'(2)) = \lambda(P(1), P'(2)) = \lambda \phi(P)$$

La relation ϕ est linéaire.

5.1.2.b

$$\phi(t - 1) = ((t - 1)(1), (t - 1)'(2)) = ((t - 1)(1), (1)(2)) = (0, 1)$$

$$\phi((t - 2)^2) = ((t - 2)^2(1), ((t - 2)^2)'(2)) = ((t - 2)^2(1), (t^2 - 4t + 4)'(2)) = ((t - 2)^2(1), (2t - 4)(2)) = (1, 0)$$

On cherche P , tel que $\phi(P) = (1, -1)$. Comme la relation ϕ est linéaire on a

$$(1, -1) = 1.(1, 0) - 1.(0, 1) = 1.\phi((t - 2)^2) - 1.\phi(t - 1) = \phi(1.(t - 2)^2) + \phi(-(t - 1)) = \phi((t - 2)^2 - (t - 1)) = \phi(t^2 - 5t + 5)$$

Donc $P = t^2 - 5t + 5$.

5.1.3.a

$$\phi(f_1 + f_2) = \int_0^1 (f_1 + f_2)e^t dt = \int_0^1 f_1 e^t + f_2 e^t dt = \int_0^1 f_1 e^t + \int_0^1 f_2 e^t dt = \phi(f_1) + \phi(f_2)$$

$$\phi(\lambda f) = \int_0^1 (\lambda f)e^t dt = \int_0^1 \lambda f e^t dt = \lambda \int_0^1 f e^t dt = \lambda \phi(f)$$

5.1.3.b

Une fonction f de $E \rightarrow F$ appartient au noyau de ϕ si $\phi(f) = 0_F$. Une fonction est dite affine si elle est de la forme $f(t) = at + b$. Donc on cherche une fonction $f = at + b$ tel que $\phi(f) = 0$.

$$\phi(at + b) = \int_0^1 (at + b)e^t dt = \int_0^1 ate^t + be^t dt = a \int_0^1 te^t dt + b \int_0^1 e^t dt = a + b(e - 1) = 0$$

$$\text{car } \int e^t dt = e^t \text{ et } \int te^t dt = (t - 1)e^t.$$

Il faut trouver a et b tel que $a + b(e - 1) = 0$. Prenons par exemple, $b = 0$ donc $a = 0$, et $b = 1$ donc $a = 1 - e$.

Les 2 fonctions affines sont $f_0(t) = 0t + 0 = 0$ et $f_1(t) = (1 - e)t + 1$.

Exercice 5.2**5.2.1**

$$f(x, y, z, t) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - y + 3z - t \\ 2x + y + 3z + 4t \\ -x + 2y - 4z + 3t \end{vmatrix}$$

5.2.2.a

$$\text{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{R}^4, f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t & = 0 & l_1 \\ 2x + y + 3z + 4t & = 0 & l_2 \\ -x + 2y - 4z + 3t & = 0 & l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t & = 0 & l_1 \\ -3y + 3z - 6t & = 0 & 2l_1 - l_2 \\ y - z + 2t & = 0 & l_1 + l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t & = 0 & l_1 \\ y - z + 2t & = 0 & l_1 + l_3 \\ 0 & = 0 & (2l_1 - l_2) + 3(l_1 + l_3) \end{cases}$$

On a 2 variables primaires (x,y) et deux variables secondaires (z,t). Donc $\text{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, X = (2z - t, z - 2t, z, t)\}$.

5.2.2.b

$$\begin{cases} x - y + 3z - t &= x_b & l_1 \\ 2x + y + 3z + 4t &= y_b & l_2 \\ -x + 2y - 4z + 3t &= z_b & l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t &= x_b \\ y - z + 2t &= x_b + z_b \\ -3y + 3z - 6t &= 2x_b - y_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t &= x_b \\ y - z + 2t &= x_b + z_b \\ -3(x_b + z_b) &= 2x_b - y_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t &= x_b \\ y - z + 2t &= x_b + z_b \\ -5x_b + y_b - 3z_b &= 0 \end{cases}$$

L'application f est injective ssi $\text{Ker}(f) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a $\text{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, X = (4z - t, z - 2t, z, t)\} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. L'application n'est pas injective.

L'application est surjective ssi $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. On a $\text{Im}(f) = B = (x_b, y_b, z_b) \neq \mathbb{R}^3$ car il y a une relation entre x_b, y_b et z_b . Donc l'application f n'est pas surjective.

5.2.3.a

$$\begin{aligned} u_1 &= 3e_1 - e_3 = 3(1, 0, 0, 0) - (0, 0, 1, 0) = (3, 0, -1, 0) \\ u_2 &= e_2 - e_4 = (0, 1, 0, 0) - (0, 0, 0, 1) = (0, 1, 0, -1) \\ f(u_1) &= (3 - 0 - 3 - 0, 6 - 0 - 3 - 0, -3 + 0 + 4 + 0) = (0, 3, 1) \\ f(u_2) &= (0 - 1 + 0 - 1, 0 + 1 + 0 - 4, -0 + 2 - 0 - 3) = (0, -3, -1) \end{aligned}$$

On a $\text{Vect}(f(u_1), f(u_2)) = \{(0, 3, 1), (0, -3, -1)\}$. On remarque que $f(u_1) = -f(u_2)$, donc les 2 vecteurs sont colinéaires. Par conséquent $\text{Vect}(f(u_1), f(u_2))$ ne représente que les points de la droite de du plan (y, z) et de vecteur directeur $(0, 3, 1)$.

5.2.3.b

On a $\text{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, X = (-2z - t, z - 2t, z, t)\}$, les points de l'espace vectorielle sont $(x_f, y_f, z_f, t_f) = (-2z - t, z - 2t, z, t)$.

$E = \text{Vect}((3, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$, les points de l'espace vectorielle D sont $(x_e, y_e, z_e, t_e) = a.(3, 0, -1, 0) + b.(0, 1, 0, -1) = (3a, b, -a, -b)$.

$E \cap \text{Ker}(f)$ sont les points communs entre E et $\text{Ker}(f)$. Donc

$$\begin{cases} 3a &= -2z - t \\ b &= z - 2t \\ -a &= z \\ -b &= t \end{cases}$$

La solution de ce système est $b = a$. Donc $D = (3a, a, -a, -a)$ ou $D = (3, 1, -1, -1)$.

$D' = (3, 0, -1, 0)$ et $D = (3, 1, -1, -1)$ sont supplémentaires dans E si $((3, 0, -1, 0), (3, 1, -1, -1))$ est une base de E .

Famille libre?

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, la famille est libre.
Et génératrice?

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 &= x \\ \lambda_2 &= y \\ -\lambda_1 - \lambda_2 &= z \\ -\lambda_2 &= t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 &= t + y \\ 0 &= x + 3z \\ \lambda_2 &= y \\ -\lambda_1 &= z + y \end{cases}$$

Oups la famille n'est pas génératrice. Problème.

5.3

5.3.1

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5.3.2.a

$$f(1, 0, 1, -1) = (4, 1, 0, 1)$$

$$f(0, -1, 1, -2) = (-4, -1, 0, -1)$$

$$\begin{cases} 4\lambda_1 - 4\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ 0\lambda_1 - 0\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

On a $\lambda_1 = \lambda_2$, la famille n'est pas libre.

Ou plus subtilement, on remarque que $f(1, 0, 1, -1) = -f(0, -1, 1, -2)$ donc la famille est liée.

5.3.2.b

L'application f est injective si $\text{Ker}(f) = \{0\}$ avec $\text{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{R}^4, f(X) = 0\}$.
De la question précédente on a:

$$f(1, 0, 1, -1) + f(0, -1, 1, -2) = 0$$

L'application f est linéaire, donc

$$f(1, -1, 2, -3) = 0$$

Donc

$$(1, -1, 2, -3) \in \text{Ker}(f)$$

Donc

$$\text{Ker}(f) \neq \{0\}$$

Donc l'application f n'est pas injective.

5.3.2.c

Une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension est injective si, et seulement si, elle est surjective. L'application f est linéaire, de même dimension et elle n'est pas injective donc elle n'est pas surjective.

5.3.3.a

On note les vecteurs colonnes de A: $C_1 = (3, 1, -1, 2)$, $C_2 = (4, 2, -1, -1)$, $C_3 = (2, -1, 3, 0)$ et $C_4 = (1, -1, 2, 1)$.

Le deuxième vecteur-colonne est une combinaison linéaire des troisième et quatrième vecteurs-colonnes si $\exists a, b \in \mathbb{R}, C_2 = aC_3 + bC_4$.

$$(4, 2, -1, -1) = a(2, -1, 3, 0) + b(1, -1, 2, 1) = (2a + b, -a - b, 3a + 2b, b)$$

Donc

$$\begin{cases} 2a + b &= 4 \\ -a - b &= 2 \\ 3a + 2b &= -1 \\ b &= -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b &\neq 4 \\ a &= -1 \\ 3a + 2b &= -1 \\ b &= -1 \end{cases}$$

Contradiction. Donc non.

5.3.3.b

Voir cours

5.3.3.c**5.4****5.4.1**

En utilisant la distributivité par rapport à l'addition.

$$g(A + B) = (A + B)M - M(A + B) = AM + BM - MA - MB = AM - MA + BM - MB = g(A) + g(B)$$

$$g(\lambda A) = (\lambda A)M - M(\lambda A) = \lambda(AM) - \lambda(MA) = \lambda(AM - MA) = \lambda g(A)$$

Donc g est linéaire.

5.4.2

Par définition, $\text{Ker}(g) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g(M) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$.

On a $g(M) = AM - MA = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $AM = MA$ qui est la définition de E .

Donc $\text{Ker}(g) = E$.

5.4.3

On a $M \in E$, $AM = MA$.

La matrice $A \in E$ car $AA = AA$.

La matrice $I_2 \in E$ car $I_2A = A = AI_2$.

On a trouvé 2 matrices qui appartiennent à E . Comme $\text{Ker}(g) = E$, on a $g(A) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et $g(I_2) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. De plus, la relation g est linéaire donc $g(\lambda_1 A + \lambda_2 I_2) = \lambda_1 g(A) + \lambda_2 g(I_2) = \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Donc $\lambda_1 A + \lambda_2 I_2$ est dans $\text{Ker}(g)$. Par conséquent $\text{Ker}(g) = \{A, I_2, \lambda_1 A + \lambda_2 I_2\}$, et $\dim \text{Ker}(g) \geq 2$.

5.4.4

A et I_2 forment une base de $\text{Ker}(g)$ car la famille (A, I_2) est libre et génératrice. $\dim \text{Ker}(g)$ et $\text{rang}(g)$ voir cours.

5.4.5

On a $g(A^2) = A^2 A - AA^2 = A^3 - A^3 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Donc la matrice $A^2 \in \text{Ker}(g)$.

Comme les matrices A et I_2 sont une base de $\text{Ker}(g)$ alors tous les éléments de l'ensemble $\text{Ker}(g)$ peuvent s'exprimer comme une combinaison linéaire des matrices A et I_2 . Ou plus bestialement,

$$A^2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4A - I_2$$

Une matrice M_g est dans l'image de la relation g ssi il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $g(M) = AM - MA = M_g$. Soit $M = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$

$$AM = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2m_{11} + 3m_{21} & 2m_{12} + 3m_{22} \\ m_{11} + 2m_{21} & m_{12} + 2m_{22} \end{vmatrix}$$

$$MA = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2m_{11} + m_{12} & 3m_{11} + 2m_{12} \\ 2m_{21} + m_{22} & 3m_{21} + 2m_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_g = AM - MA = \begin{vmatrix} 3m_{21} - m_{12} & 3m_{22} - 3m_{11} \\ m_{11} - m_{22} & m_{12} - 3m_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -3b \\ b & -a \end{vmatrix}$$

avec $a = 3m_{21} - m_{12}$ et $b = m_{11} - m_{22}$.

QED