

## Rappel de cours

Méthode de Newton

•

### Exercice 1

#### Exercice 1.1.a

La définition de "  $f$  est dérivable en  $x_0$  " (note  $f'(x_0)$ ) si la limite existe et est finie.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pour  $x_0 = 0$ , on a

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

#### Exercice 1.1.b

$$\begin{aligned} l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{f(2x) - f(0)}{2x} - \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2 \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0} \frac{f(X) - f(0)}{X} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= 2 \lim_{X \rightarrow 0} \frac{f(X) - f(0)}{X} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2f'(0) - f'(0) = f'(0) \end{aligned}$$

#### Exercice 1.2.a

1 - Montrons que  $f$  dérivable en 0  $\implies g$  dérivable en 0.

$g$  dérivable en 0 si il existe  $a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - lx - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - l$$

$f$  est dérivable en 0 donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$  existe,  $l$  existe également donc  $a$  existe.

2 - Montrons que  $g$  dérivable en 0  $\implies f$  dérivable en 0.

$g$  dérivable en 0 donc il existe  $a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - lx - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - l$$

Par hypothèse  $a$  et  $l$  existe, par conséquent  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$  existe ( $= a + l$ ). Donc  $f$  est dérivable en 0.

#### Exercice 1.2.b

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{X \rightarrow 0} g(X)$$

Car  $2^n$  est toujours très grand devant  $x$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

$$\lim_{X \rightarrow 0} g(X) = \lim_{X \rightarrow 0} f(X) - lX = \lim_{X \rightarrow 0} f(X) - l \lim_{X \rightarrow 0} X = \lim_{X \rightarrow 0} f(X) = f(0)$$

Car comme la fonction  $f$  est dérivable en 0, elle est continue en 0. On a  $g(0) = f(0) - l0 = f(0)$  donc  $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g(0)$ .

**Exercice 1.3.a**

La fonction  $h$  est continue en 0, si  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - 2lx - f(x) + lx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} - l = l - l = 0$$

Donc  $h$  est continue en 0.

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$  est équivalent à  $\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, |x| < \sigma \implies |h(x)| < \epsilon$  et  $\forall x \in [a, b], |h(x)| < \sup |h(x)|$ .

**Exercice 1.3.b**

On a  $\forall k, \forall x \in [-\alpha_\epsilon, \alpha_\epsilon], X = \frac{x}{2^k} \in [-\frac{\alpha_\epsilon}{2^k}, \frac{\alpha_\epsilon}{2^k}] \subset [-\alpha_\epsilon, \alpha_\epsilon]$ . Donc

$$|h(X)| < \epsilon$$

$$\sum_{k=1}^n |h(\frac{x}{2^k})| < \sum_{k=1}^n \epsilon$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} |h(\frac{x}{2^k})| < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \epsilon$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} |h(\frac{x}{2^k})| < \epsilon \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$$

Par inégalité triangulaire

$$|\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} h(\frac{x}{2^k})| < \epsilon \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$$

**Exercice 1.3.c**

Soit la suite  $v_n = \frac{1}{2^n}$ . Suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

$$\sum_{k=1}^n v_k = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v_k = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$$

La suite  $u_n$  est strictement croissante,  $u_1 = 1/2$  et sa limite est 1, donc la suite  $u_n$  est majorée par 1.

**Exercice 1.4.a**

Soit la relation  $g(x) - g(\frac{x}{2^n}) = x \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} h(\frac{x}{2^k})$ , montrons  $g(x) - g(\frac{x}{2^{n+1}}) = x \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} h(\frac{x}{2^k})$ .

Pour  $x = 0$ , on a  $g(0) - g(\frac{0}{2^n}) = 0 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} h(\frac{x}{2^k})$ .

Vrai

Pour  $x \neq 0$ ,

$$g(x) - g(\frac{x}{2^{n+1}}) = x \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} h(\frac{x}{2^k}) = x \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} h(\frac{x}{2^k}) + \frac{1}{2^{n+1}} h(\frac{x}{2^{n+1}}) \right)$$

$$g(x) - g(\frac{x}{2^{n+1}}) = g(x) - g(\frac{x}{2^n}) + \frac{x}{2^{n+1}} h(\frac{x}{2^{n+1}})$$

$$g\left(\frac{x}{2^n}\right) - g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{x}{2^{n+1}} h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

$$\frac{g\left(\frac{2x}{2^{n+1}}\right) - g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^{n+1}}} = h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

Vrai.

#### Exercice 1.4.b

$$g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right) = x \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} h\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Pour  $x \neq 0$ ,

$$\frac{g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} h\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

$$\left| \frac{g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \right| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} h\left(\frac{x}{2^k}\right) \right|$$

De 1.3.b

$$\left| \frac{g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \right| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} h\left(\frac{x}{2^k}\right) \right| < \epsilon \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$$

Quand  $n \rightarrow \infty$ , par 1.3.c

$$\left| \frac{g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{g(x) - g(0)}{x} \right| < \epsilon$$

#### Exercice 1.4.c

La fonction  $h$  est dérivable en 0.

### Exercice 2

#### Exercice 2.1.a

Si la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  alors  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  existe pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = l_1$$

Et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = l_2$$

Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = 2l$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = l_1 + l_2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

$$f'(x) = \tilde{f}(x)$$

???

**Exercice 2.1.b**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

On a

$$\tilde{f}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{2h} = 0$$

**Exercice 2.1.c**

$$f(x) = |x|$$

$f(x)$  est continu en 0, non dérivable en 0 et pseudo-dérivable en 0.

$$\tilde{f}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

**Exercice 2.2.a**

On suppose que la fonction  $f$  n'est pas croissante  $\exists a, b \in \mathbb{R}, a < b, f(a) > f(b)$  alors  $f(b) < m = \frac{f(a)+f(b)}{2} < f(a)$ . Soit  $F = \{x \in [a, b], f(x) = m\}$  et  $c = \max(F)$ . La fonction  $f$  est continue donc elle coupe la droite  $y = m$  au moins une fois entre les points  $a$  et  $b$ , par conséquent l'ensemble  $F$  n'est pas vide.

On a  $\forall x \in ]c, b], f(x) < m$  car  $m > f(b)$  et si la fonction  $f$  coupait la droite  $y = m$  après  $c$ , cela contredirait la définition de  $c$ . Donc  $c$  est le plus petit majorant de  $E$ , car aucun point supérieur ou égal à  $c$  n'est dans  $E$ . Donc  $c$  est la borne supérieure.

**Exercice 2.2.b**

$f$  est continue et  $x \in E$ , donc  $f(x) > m$ . Posons  $h = c - (x + \epsilon)$ . On a  $f(x+h) = f(c-\epsilon) > f(c) = m$ .

$m = f(c) \notin E$  voir précédent (2.2.a).

**Exercice 2.2.c**

Soit  $F_1 = \{x \in [a, c[, f(x) = m\}$  et  $c_1 = \max(\{a\} \cup F_1)$ . Posons la suite  $h_n = \frac{c-c_1}{2^n}$ , on a  $h_n > 0$  car  $c > c_1$ . On a  $\forall x \in ]c_1, c[, f(x) > m$  car la fonction  $f$  est continue. Donc  $f(c-h_n) > f(c) = m$  et  $f(x-h_n) \in E$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0$ .

**Exercice 2.2.d**

Voir précédent (2.2.a).

**Exercice 2.2.e**

Voir précédent (2.2.a).

**Exercice 2.2.f**

On a  $f(c+h_n) < f(c-h_n)$  car  $f(c-h_n) \in E$  et  $f(c+h_n) \notin E$ . (voir précédent 2.2.c et 2.2.e). Donc  $f(c+h_n) - f(c-h_n) < 0$ . Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(c+h_n) - f(c-h_n)}{2h_n} < 0$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(c+h_n) - f(c-h_n)}{2h_n} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g_\alpha(x+h) - g_\alpha(x-h)}{2h} = \tilde{f} < 0$$

**Exercice 2.3.a**

$$\begin{aligned}\tilde{g}_\alpha(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_\alpha(x+h) - g_\alpha(x-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + \alpha(x+h) - f(x-h) - \alpha(x-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\alpha h}{2h} = \tilde{f}(x) + \alpha\end{aligned}$$

**Exercice 2.3.b**

On a  $\alpha > 0$ ,  $\tilde{f}(x) \geq 0$ , donc  $\tilde{g}_\alpha(x) = \tilde{f}(x) + \alpha > 0$ . En 2.1 on a montré que si  $\tilde{f}(x) \geq \alpha' > 0$  alors la fonction  $f$  est croissante. Comme  $\tilde{g}_\alpha(x) > \alpha > 0$  alors  $g_\alpha(x)$  est croissante.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y, g(x) \leq g(y)$$

Donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y, f(x) + \alpha x \leq f(y) + \alpha y$$

**Exercice 2.3.c**

La fonction  $f$  est croissante sûrement mais pourquoi?.

QED.