Exercice 7

(a) on a $tan\, x = \frac{sin\, x}{cos\, x}$, donc $tan\, x$ est définie lorsque $cos\, x \neq 0$, ou $x \neq \pi/2 + n\,\pi$.

$$tan^2 x \leq 3$$

$$\sqrt{tan^2 x} \leq \sqrt{3}$$

$$|tan\, x| \leq \sqrt{3}$$

$$tan\, x \leq \sqrt{3}\ and\ -tan\, x \leq \sqrt{3}$$

$$x \leq \arctan\, \sqrt{3}\ and\ x \geq -\arctan\, \sqrt{3}$$

$$x \leq 1.249\ and\ x \geq -1.249$$

Comme $\pi/2 > 1.249$ alors $x \in [-1.249, 1.249]$ et la fonction tan est de période π, l'inéquation est vraie pour $x \in [-1.249 + n.\pi, 1.249 + n.\pi]$.

(b) La function $tan\, x$ est d'efini pour $x \neq \pi/2 + n\,\pi$. Faisons le changement de variable $y = tan\, x$. L'inéquation devient $\frac{y^2-2}{y^2-1}$ avec $y \neq |1|$.

$$\frac{y^2-2}{y^2-1} \leq \frac{1}{2}$$

$$2(y^2-2) \leq y^2 - 1$$

$$y^2 \leq 3$$

$$|y| \leq \sqrt{(}3)$$

$$y \leq \sqrt{(}3)\ and\ y \geq -3$$

$$tan\, x \leq \sqrt{(}3)\ and\ tan\, x \geq -3$$

$x \leq 1.249\ and\ x \geq -1.249$ par (a) et $tan\, x \neq |1|$ (car $y \neq |1|$), donc $x \neq |0.7854|$. Par conséquent l'inéquation est vérifiée lorsque $x \in [-1.249, -0.7854[\cup] - 0.7854, 0.7854[\cup]0.7854, 1.249]$ à la période de π.

Exercice 8

$$P(t) = (\lambda + 1)t^2 + 2at + \lambda - 1$$

$$\Delta = (2a)^2 - 4.(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

$$\Delta = (2a)^2 - 4.(\lambda^2 - 1)$$

$$\Delta = 4(a^2 - \lambda^2 + 1)$$

$$t = \frac{-2a \pm \sqrt{4(a^2 - \lambda^2 + 1)}}{2.(\lambda + 1)}$$

$$t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - \lambda^2 + 1}}{(\lambda + 1)}$$

(a) $a^2 - \lambda^2 + 1 = 0$, 1 seule racine $t = \frac{-a}{\lambda+1}$ avec $\lambda + 1 \neq 0$. On a $P(t)$ positif entre $]-\infty, \frac{-a}{\lambda+1}[$ et négatif entre $]\frac{-a}{\lambda+1}, +\infty]$ si $\frac{-a}{\lambda+1} > 0$ et l'inverse sinon.

(b) $a^2 - \lambda^2 + 1 > 0$, 2 seule racine $t = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-\lambda^2+1}}{(\lambda+1)}$, avec $\lambda + 1 \neq 0$. On a $P(t)$ positif entre $]-\infty, \frac{-a-\sqrt{a^2-\lambda^2+1}}{(\lambda+1)}[\cup]\frac{-a+\sqrt{a^2-\lambda^2+1}}{(\lambda+1)}, +\infty[$ et négatif entre $]\frac{-a-\sqrt{a^2-\lambda^2+1}}{(\lambda+1)}, \frac{-a+\sqrt{a^2-\lambda^2+1}}{(\lambda+1)}[$ si $\frac{-a}{\lambda+1} > 0$ et l'inverse sinon.

Exercice 9

P1

$$acos(t+b) = a(cos(t)cos(b) - sin(t)sin(b))$$

$$a(cos(t)cos(b) - sin(t)sin(b)) = a.cos(b).cos(t) - a.sin(b).sin(t)$$

$$a.cos(b).cos(t) - a.sin(b).sin(t) = \alpha cos(t) + \beta sin(t)$$

donc $\alpha = a.cos(b)$ et $\beta = -a.sin(b)$.

(a) $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-a.sin(b)}{a.cos(b)} = -tan(b)$ donc $b = tan^{-1}(\frac{-\beta}{\alpha})$

(b) $\alpha^2 + \beta^2 = a^2.cos^2(b) + a^2.sin^2(b) = a^2.(cos^2(b) + sin^2(b)) = a^2$ donc $a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

P2

(a) $cos(t) + sin(t) = \lambda$. Donc, $\alpha = \beta = 1$, ce qui fait $a = \sqrt{2}$ et $b = tan^{-1}(-1) = -\pi/4$. On a $cos(t - \pi/4) = cos(t) + sin(t) = \lambda$, donc $t = cos^{-1}(\lambda) + \pi/4$.

(b) idem avec $\alpha = 1$ et $\beta = \sqrt{3}$. Donc $a = 2$ et $b = tan^{-1}(-\sqrt{3})$.

(c) idem avec $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. $a = \sqrt{2}$ et $b = tan^{-1}(-1) = \pi/4$. On a $cos(t+\pi/4) = cos(t)+sin(t) = \lambda$, donc $t = cos^{-1}(\lambda) - \pi/4$.

QED