Rappel de cours

Travail

- La composante de la force d'un point M, $\vec{F}(M)$ sur l'axe $\mathcal{O}_x$ est donnée par le produit scalaire $f(x) = \vec{F}(M).\vec{i}$.
- Le travail d'une force $\vec{F}$ sur un segment $\vec{AB}$ est donné par :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{AB} = \int_{A\to B} \vec{F}.\vec{i}dx = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx$$

- On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point A et B.

$$\forall A, B, C,\ W_{A\to B}\vec{F} = W_{A\to C}\vec{F} + W_{C\to B}\vec{F}$$

- Dans le cas où le chemin est rectiligne, si une force est conservatrice alors l'*énergie potentielle* associée à la force $\vec{F}$ est notée $E_p(x)$ est définie par :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{A\to B} \vec{F}.\vec{i}dx = E_p(x_b) - E_p(x_a)$$

.

- Le travail du poids $\vec{P} = m\vec{g}$ sur le segment $\vec{AB}$ est $W_{A\to B}(\vec{P}) = -mg(z_b - z_a) = -mgh$.
- Le travail de la force de rappel élastique d'un ressort de raideur k, $\vec{F} = -k.x\vec{i}$ est $W_{A\to B}(\vec{F}) = -\frac{1}{2}k(x_a^2 - x_b^2)$.

Énergie

- L'énergie mécanique d'un système $E_m = E_c + E_p$ avec E_c l'énergie cinétique qui dépend de la masse et de la norme de la vitesse du système physique étudié et de l'énergie potentielle E_p qui correspond aux forces exercées sur le système.
- L'énergie cinétique du système $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
- L'énergie potentielle qui correspond à l'ensemble des forces conservatives qui s'exercent sur le systéme, $E_p(B) - E_p(A) = W_{A\to B}(\vec{F}_{conservatives})$
- $E_m(B) - E_m(A) = W_{A\to B}(\vec{F}_{non\,conservatives})$

Puissance

- La puissance P représente l'énergie transférée uniformement (ie. le travail) pendant une unité de temps, $P = \frac{W}{\Delta t}$.
- $1\,W = 1\,J.s^{-1} = 1\,N.m.s^{-1} = 1\,kg.m^2.s^{-3}$

Coordonnées polaires

Polaire vers cartésienne	Cartésienne vers polaire
$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$

- le vecteur dans le repère $(\vec{i}, \vec{j})$ est $\vec{u}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ et $\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$
- Le vecteur position d'un point est $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{u}_\rho(t)$

- Le vecteur vitesse est $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

- Le vecteur accélération est $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho}(t) - \rho\dot{\theta}^2(t))\vec{u}_\rho + (\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t))\vec{u}_\theta = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$

Posons $\vec{u}_T = \vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_N = \vec{u}_\rho$. Donc $\vec{u}_T$ est un vecteur tangent à la trajectoire du point et $\vec{u}_N$ est un vecteur normal à la trajectoire du point dirigé vers le centre du rayon de courbure.

Pour une trajectoire sur un cercle de rayon R. on a:

- $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_T = v\vec{u}_T$

- $\vec{a} = R\dot{\theta}^2\vec{u}_N + R\ddot{\theta}\vec{u}_T = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}\vec{u}_T$

Pour une trajectoire sur un cercle, on définit l'abcisse curviligne $s(t) = R\theta(t)$. On a

- $\vec{v} = \frac{ds}{dt}$

- $\vec{a} = \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{u}_N + \ddot{s}\vec{u}_T$

- La courbure d'une trajectoire autour d'un point A est $\mathcal{C} = \frac{d\theta}{ds}$.

- Le rayon de courbure d'une trajectoire autour d'un point A est $\mathcal{C} = \frac{1}{C} = \frac{ds}{d\theta}$.

Exo I - Liens entre Coordonnées

I.1.a

$$\begin{cases} x = 1\cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,cm \\ y = 1\sin(30) = \frac{1}{2}\,cm \end{cases}$$

I.1.b

$$\begin{cases} x = 20\cos(-30) = 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,mm \\ y = 20\sin(-30) = -20\frac{1}{2} = -10\,mm \end{cases}$$

I.1.c

$$\begin{cases} x = 8\cos(120) = -8\frac{1}{2} = 4\,mm \\ y = 8\sin(120) = 8\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,mm \end{cases}$$

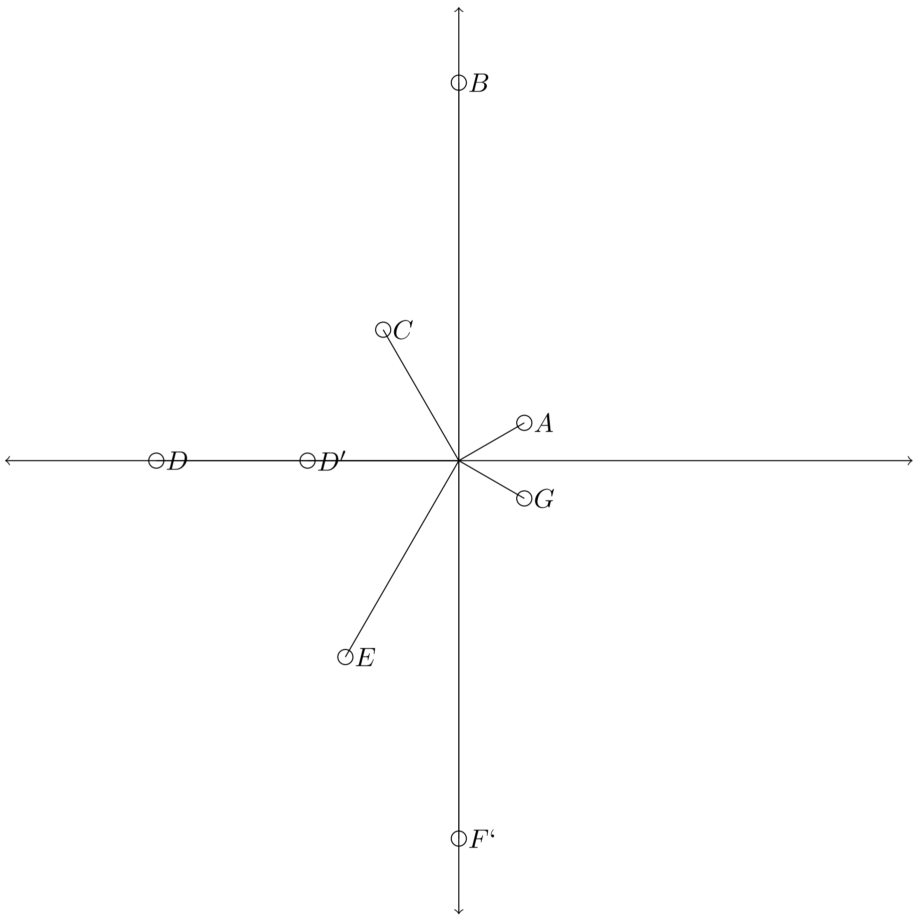
I.1.d

$$\begin{cases} x = 3\cos(120) = -3\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}\,cm \\ y = 3\sin(120) = -3\frac{\sqrt{3}}{2}\,cm \end{cases}$$

I.2.a

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}\,cm \\ \theta = \arctan(\frac{5}{3}) = 90 - \arctan(\frac{3}{5}) = 90 - 31 = 59^\circ \end{cases}$$

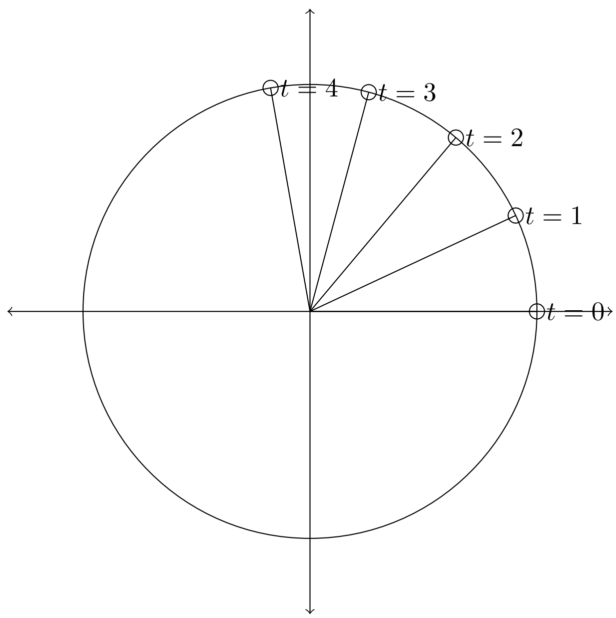
Exo II - Repère en coordonnées polaires



Exo III - Vitesse en coordonnées polaires

III.1

$$\rho(t) = \rho_0,\ \theta = \omega t$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = 0, \dot{\theta}(t) = \omega$$

La vitesse en coordonnnées polaires

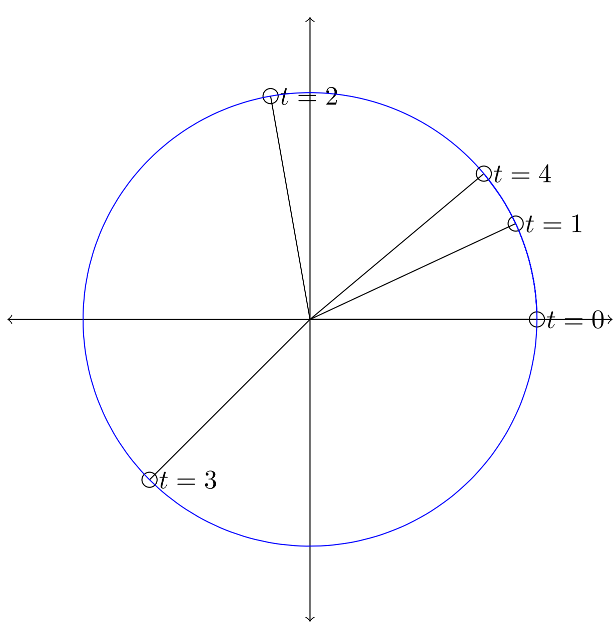
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = 0\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnnées cartésiennes

$$\vec{v} = 0\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta = 0(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \rho_0\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \rho_0\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

III.2

$$\rho(t) = \rho_0,\ \theta = \alpha t^2$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = 0,\ \dot{\theta}(t) = 2\alpha t$$

La vitesse en coordonnnées polaires

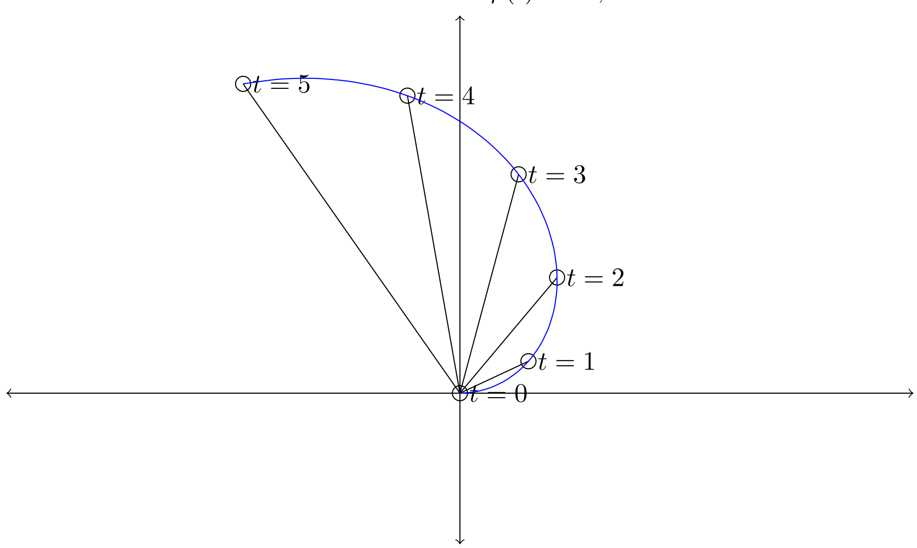
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = 0\vec{u}_\rho + \rho_0 2\alpha t\vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnnées cartésiennes

$$\vec{v} = 0\vec{u}_\rho + \rho_0 2\alpha t\vec{u}_\theta = 0(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \rho_0 2\alpha t(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \rho_0 2\alpha t(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

III.3

$\rho(t) = \alpha t$, $\theta = \omega t$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = \alpha, \dot{\theta}(t) = \omega$$

La vitesse en coordonnnées polaires

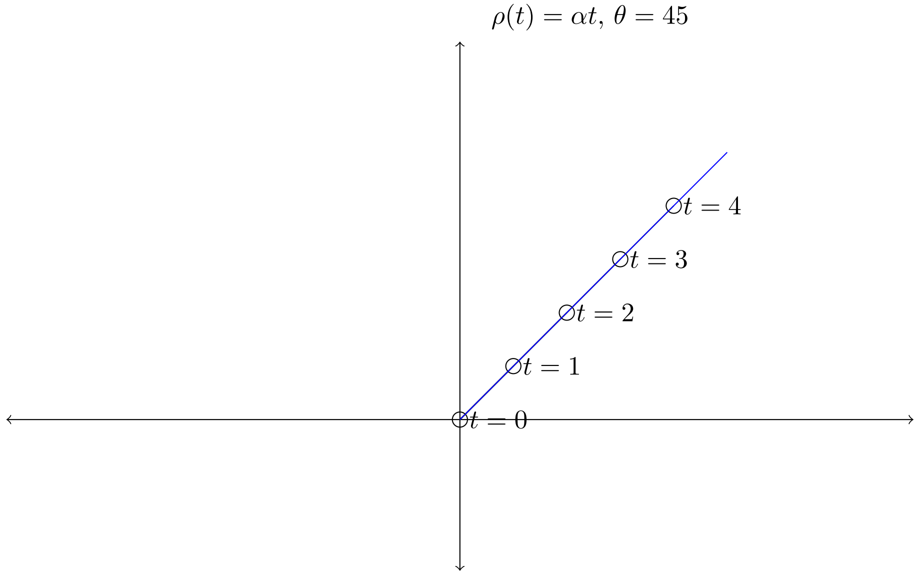
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho + \alpha t\omega\vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnnées cartésiennes

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta = \alpha(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \alpha t\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = (\alpha\cos\theta - \alpha t\omega\sin\theta)\vec{i} + ((\alpha\sin\theta + \alpha t\omega\cos\theta))\vec{j}$$

III.4

$\rho(t) = \alpha t$, $\theta = 45$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = \alpha, \dot{\theta}(t) = 0$$

La vitesse en coordonnnées polaires

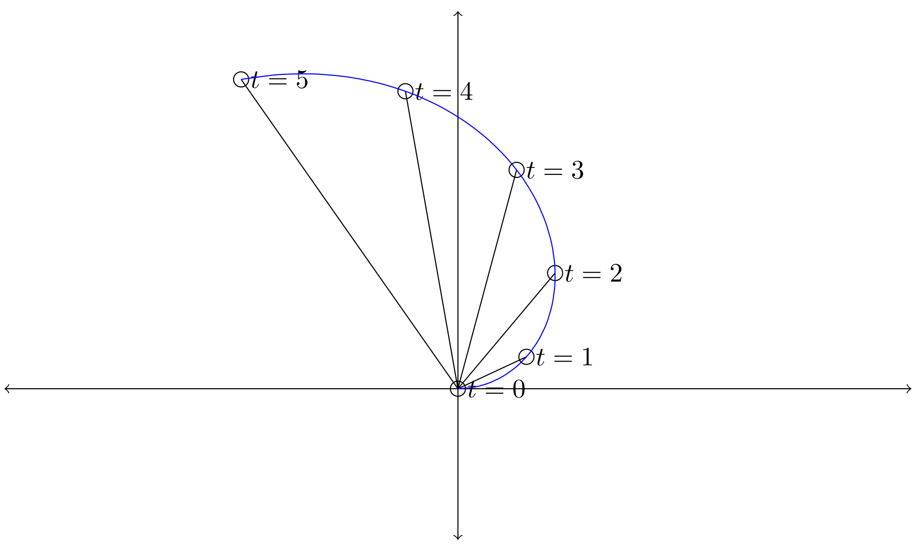
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho + \alpha.0.\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho$$

La vitesse en coordonnnées cartésiennes

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}_\rho = \alpha(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = \alpha\cos\theta\vec{i} + \alpha\sin\theta\vec{j}$$

III.5

$$\rho(t) = v_0 t,\ \theta = \omega t$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = v_0, \dot{\theta}(t) = \omega$$

La vitesse en coordonnnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = v_0\vec{u}_\rho + \omega v_0 t\vec{u}_\theta$$

Avec $v_0 = 1$ et $\omega = 25$, on a $\theta(t) = \omega t$ donc $t = \theta(t)/\omega$. Donc

θ	t	$\vec{v}(t)$
$90°$	$90/25$	$\vec{v}(90/25) = \vec{u}_\rho + 25.1.\frac{90}{25}\vec{u}_\theta = \vec{u}_\rho + 90\vec{u}_\theta$
$180°$	$180/25$	$\vec{v}(180/25) = \vec{u}_\rho + 180\vec{u}_\theta$
$-90°$	0	$\vec{v}(-90/25) = \vec{u}_\rho - 90\vec{u}_\theta$

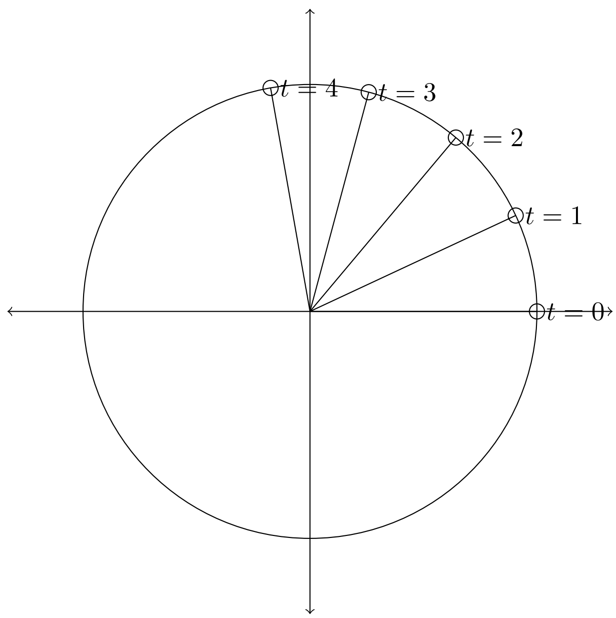
La vitesse en coordonnnées cartésiennes

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta = \alpha(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \alpha t\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = (\alpha\cos\theta - \alpha t\omega\sin\theta)\vec{i} + ((\alpha\sin\theta + \alpha t\omega\cos\theta))\vec{j}$$

Exo IV - Vitesse et accélération en coordonnées polaires

IV.1

$$\rho(t) = \rho_0,\ \theta(t) = \omega t$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = 0, \dot{\theta}(t) = \omega$$

Dérivées de $\dot{\rho}$ et $\dot{\theta}$

$$\ddot{\rho}(t) = 0, \ddot{\theta}(t) = 0$$

La vitesse en coordonnnées polaires

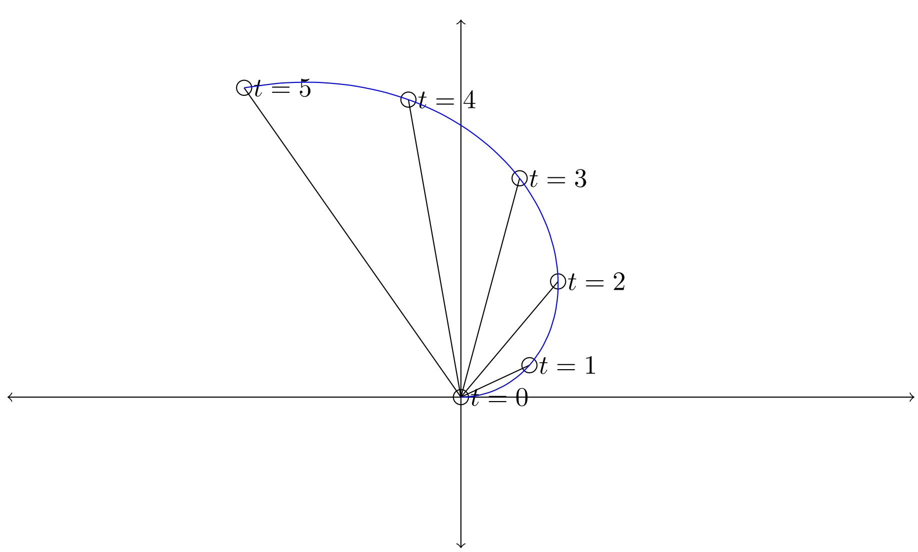
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = 0\vec{u}_\rho + \omega\vec{u}_\theta$$

L'accélération en coordonnnées polaires

$$\vec{a} = (\ddot{\rho}(t) - \rho\dot{\theta}^2(t))\vec{u}_\rho + (\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t))\vec{u}_\theta = (0 - \rho_0\omega^2)\vec{u}_\rho + (\rho_0.0 + 2.0.\omega)\vec{u}_\theta = -\rho_0\omega^2\vec{u}_\rho$$

IV.2

$$\rho(t) = \alpha t,\ \theta = \omega t$$



Dérivées de ρ et θ

$$\dot{\rho}(t) = \alpha, \dot{\theta}(t) = \omega$$

Dérivées de $\dot{\rho}$ et $\dot{\theta}$

$$\ddot{\rho}(t) = 0, \ddot{\theta}(t) = 0$$

La vitesse en coordonnnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho + \alpha t\omega\vec{u}_\theta$$

L'accélération en coordonnnées polaires

$$\vec{a} = (\ddot{\rho}(t) - \rho\dot{\theta}^2(t))\vec{u}_\rho + (\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t))\vec{u}_\theta = (0 - \rho_0\omega^2)\vec{u}_\rho + (\rho_0.0 + 2.\alpha.\omega)\vec{u}_\theta = -\rho_0\omega^2\vec{u}_\rho + 22.\alpha.\omega\vec{u}_\theta$$

Exo V - Coordonnées intrinsèques

V.1

$$\rho(t) = \rho_0,\ \theta(t) = \omega t$$

Voir courbe Exo III.3

Le point se déplace sur un cercle de rayon ρ_0. Donc la distance parcourue par le point par rapport à l'axe $\mathcal{O}_x$ est $s(t) = \rho_0\theta(t) = \rho_0\omega t$.

Le repère intinsèque est Ω à l'intersection entre le cercle et l'axe $\mathcal{O}_x$. Le sens de déplacement est le sens anti-horaire (sens de déplacement du point.

Le rayon de courbure $R = \frac{ds}{d\theta} = \frac{s(t)dt}{theta(t)dt} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{\theta(t_2)-\theta(t_1)} = \frac{\rho_0\theta(t_2)-\rho_0\theta(t_1)}{\theta(t_2)-\theta(t_1)} = \rho_0$.

La vitesse tangentielle pour une trajectoire sur un cercle de rayon R est $R\dot{\theta}$. Donc $\vec{v} = \rho_0\omega$.

L'accélération tangentielle pour un cercle de rayon R est $R\ddot{\theta}$. Donc l'accélération tangentielle est égale à 0.

L'accélération normale pour un cercle de rayon R est $R\dot{\theta}^2$. Donc l'accélération normale est égale à $\rho_0\omega^2$.

L'accélération en coordonnées polaires est $\vec{a} = 0\vec{u}_T + \rho_0\omega^2\vec{u}_N$.

V.2

$$\rho(t) = \rho_0,\ \theta(t) = \alpha t^2$$

Voir courbe Exo III.4

Le point se déplace sur un cercle de rayon ρ_0. Donc la distance parcourue par le point par rapport à l'axe $\mathcal{O}_x$ est $s(t) = \rho_0\theta(t) = \rho_0\alpha t^2$.

Le repère intinsèque est Ω à l'intersection entre le cercle et l'axe $\mathcal{O}_x$. Le sens de déplacement est le sens anti-horaire (sens de déplacement du point.

Le rayon de courbure $R = \frac{ds}{d\theta} = \frac{s(t)dt}{theta(t)dt} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{\theta(t_2)-\theta(t_1)} = \frac{\rho_0\theta(t_2)-\rho_0\theta(t_1)}{\theta(t_2)-\theta(t_1)} = \rho_0$.

La vitesse tangentielle pour une trajectoire sur un cercle de rayon R est $R\dot{\theta}$. Donc $\vec{v} = 2\rho_0\alpha t$.

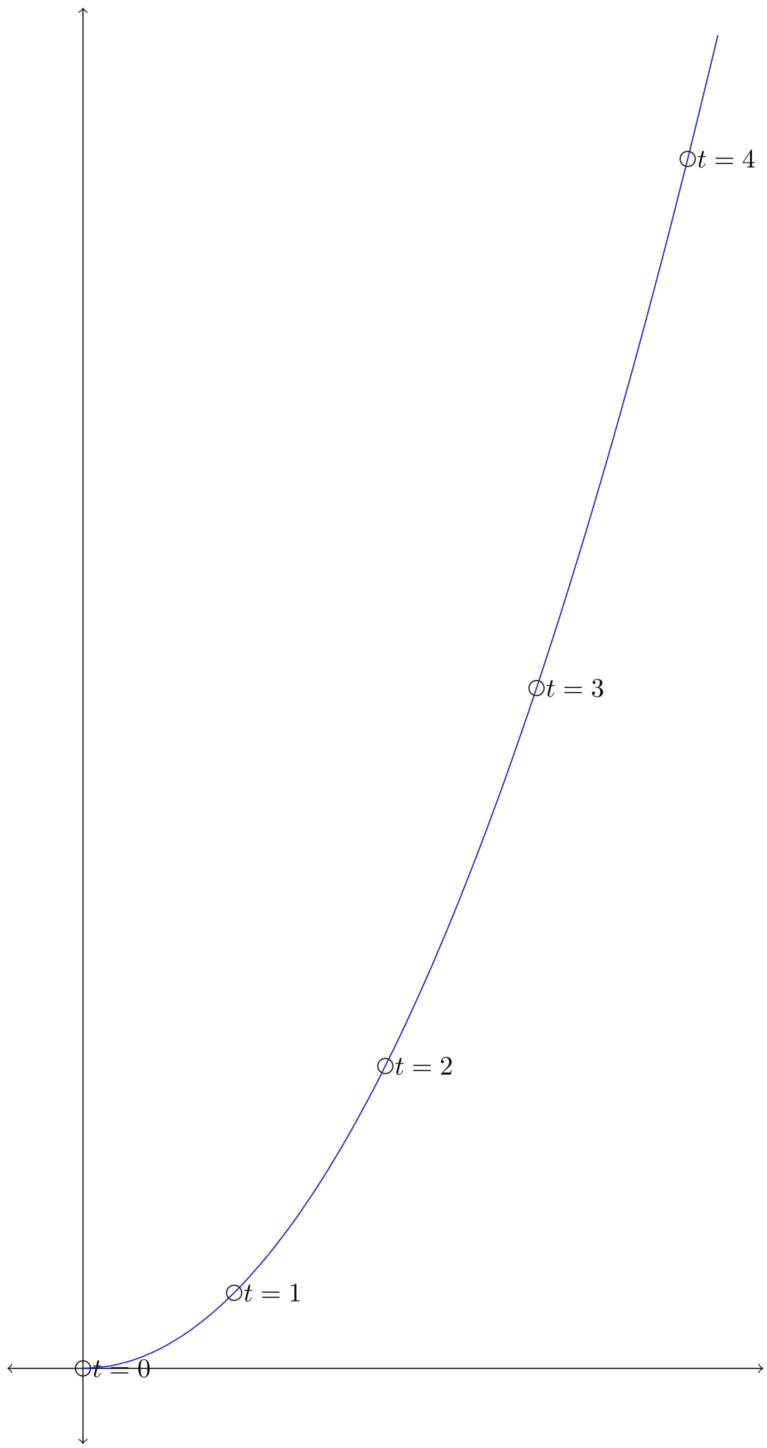
L'accélération tangentielle pour un cercle de rayon R est $R\ddot{\theta}$. Donc l'accélération tangentielle est égale à $2\rho_0\alpha$.

L'accélération normale pour un cercle de rayon R est $R\dot{\theta}^2$. Donc l'accélération normale est égale à $4\rho_0\omega^2 t^2$.

L'accélération en coordonnées polaires est $\vec{a} = 2\rho_0\alpha\vec{u}_T + 4\rho_0\omega^2 t^2 vecu_N$.

V.3

$$y = \frac{1}{2}\alpha x^2,\, x = v_0 t$$



Le déplacement du point sur la trajectoire est $x\vec{i} + y\vec{j}$ dans le repère cartésien. Donc $v_0 t\vec{i} + \frac{1}{2}\alpha x^2\vec{j} = v_0 t\vec{i} + \frac{1}{2}\alpha v_0^2 t^2\vec{j}$. La vitesse

$$\vec{v}(t) = \frac{v_0 t\vec{i} + \frac{1}{2}\alpha v_0^2 t^2\vec{j}}{dt} = v_0\vec{i} + \alpha v_0^2 t\vec{j}$$

On a $\vec{v}(0) = v_0\vec{i}$.

On a $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{v_0\vec{i}+\alpha v_0^2 t\vec{j}}{dt} = 0\vec{i} + \alpha v_0^2\vec{j} = \alpha v_0^2\vec{j}$.

On a $\vec{a}(0) = \alpha v_0^2\vec{j}$.

On a $\vec{a} = \dot{v}\vec{u}_T + \frac{v^2(0)}{R}\vec{u}_N$. En $x = 0$, on a $\vec{a} = \alpha v_0^2\vec{j}$ et $\vec{u}_N = \vec{j}$. Donc, le rayon de courbure de la parabole en $x = 0$ est $\frac{v^2(0)}{R} = \alpha v_0^2$. Ce qui fait $R = \frac{1}{\alpha}$.

Le rayon de courbure en $x = 0$ ne dépend pas de v_0 car la vitesse $\vec{v}(0)$ est normale à l'accélération $\vec{a}(0)$.

Exo VI - Énergie

VI.1

$$F_x = -2x,\ F_y = 2y$$

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_x}{dy} = \frac{d(-2x)}{dy} = 0 \\ \frac{dF_y}{dx} = \frac{d(2y)}{dx} = 0 \end{cases}$$

La force est conservative. Calcul de l'énergie potentielle E_p dérivée de la force. Il faut trouver $E_p(x, y)$ tel que :

$$\begin{cases} F_x = -2x = -\frac{dE_p(x,y)}{dx} \\ F_y = 2y = -\frac{dE_p(x,y)}{dy} \end{cases}$$

Intégration de la première équation: $E_p(x, y) = \int -F_x\, dx = \int 2x\, dx = x^2 + f(y)$.
Identification de la fonction $f(y)$.

$$2y = -\frac{dE_p(x, y)}{dy} = -\frac{d(x^2 + f(y)}{dy} = -f'(y)$$

Donc $f(y) = -y^2$.

L'énergie potentielle dérivée est donc $E_p = x^2 - y^2$.

VI.2

$$F_x = -2y,\ F_y = -2x$$

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_x}{dy} = \frac{d(-2y)}{dy} = -2 \\ \frac{dF_y}{dx} = \frac{d(-2x)}{dx} = -2 \end{cases}$$

La force est conservative. Calcul de l'énergie potentielle E_p dérivée de la force. Il faut trouver $E_p(x, y)$ tel que :

$$\begin{cases} F_x = -2y = -\frac{dE_p(x,y)}{dx} \\ F_y = -2x = -\frac{dE_p(x,y)}{dy} \end{cases}$$

Intégration de la première équation: $E_p(x, y) = \int -F_x\, dx = \int 2y\, dx = 2yx + f(y)$.
Identification de la fonction $f(y)$.

$$2x = \frac{dE_p(x, y)}{dy} = \frac{d(2yx + f(y))}{dy} = 2x + f'(y)$$

Donc $f'(y) = 0$ et $f(y) = C^{ste}$.

L'énergie potentielle dérivée est donc $E_p = 2yx + C^{ste}$.

VI.3

$$F_\rho = \sin\theta,\ F_\theta = \cos\theta$$

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_\rho}{d\theta} = \frac{d(\sin\theta)}{d\theta} = \cos\theta \\ \frac{d(\rho F_\theta)}{d\rho} = \frac{d(\rho\cos\theta)}{d\rho} = \cos\theta \end{cases}$$

La force est conservative. Calcul de l'énergie potentielle E_p dérivée de la force. Il faut trouver $E_p(\rho,\theta)$ tel que :

$$\begin{cases} F_\rho = \sin\theta = -\frac{dE_p(\rho,\theta)}{d\rho} \\ \rho F_\theta = \rho\cos\theta = -\frac{dE_p(\rho,\theta)}{d\theta} \end{cases}$$

Intégration de la première équation: $E_p(\rho,\theta) = -\int F_\rho\, d\rho = -\int \sin\theta\, d\rho = -\rho\sin\theta + f(\theta)$.
Identification de la fonction $f(\theta)$.

$$\rho\cos\theta = -\frac{dE_p(\rho,\theta)}{d\theta} = -\frac{d(-\rho\sin\theta + f(\theta))}{dy} = \rho\cos\theta + f'(\theta)$$

Donc $f'(\theta) = 0$ et $f(\theta) = C^{ste}$.

L'énergie potentielle dérivée est donc $E_p = -\rho\sin\theta + C^{ste}$.

VI.4

$$F_\rho = \sin\theta,\ F_\theta = -\cos\theta$$

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_\rho}{d\theta} = \frac{d(\sin\theta)}{d\theta} = \cos\theta \\ \frac{d(\rho F_\theta)}{d\rho} = \frac{d(-\rho\cos\theta)}{d\rho} = -\cos\theta \end{cases}$$

La force n'est pas conservative. Donc pas une énergie potentielle.

VI.5

$$F_\rho = \rho\sin\theta,\ F_\theta = \rho\cos\theta$$

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_\rho}{d\theta} = \frac{d(\rho\sin\theta)}{d\theta} = \rho\cos\theta \\ \frac{d(\rho F_\theta)}{d\rho} = \frac{d(\rho^2\cos\theta)}{d\rho} = 2\rho\cos\theta \end{cases}$$

La force n'est pas conservative. Donc pas une énergie potentielle.

VI.6

$$F_\rho = 2\rho\sin\theta,\ F_\theta = -\rho\cos\theta$$

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_\rho}{d\theta} = \frac{d(2\rho\sin\theta)}{d\theta} = 2\rho\cos\theta \\ \frac{d(\rho F_\theta)}{d\rho} = \frac{d(-\rho^2\cos\theta)}{d\rho} = -2\rho\cos\theta \end{cases}$$

La force n'est pas conservative. Donc pas une énergie potentielle.

VI.7

$$F_\rho = 2\rho\sin\theta,\ F_\theta = \rho\cos\theta$$

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_\rho}{d\theta} = \frac{d(2\rho\sin\theta)}{d\theta} = 2\rho\cos\theta \\ \frac{d(\rho F_\theta)}{d\rho} = \frac{d(\rho^2\cos\theta)}{d\rho} = 2\rho\cos\theta \end{cases}$$

La force est conservative. Calcul de l'énergie potentielle E_p dérivée de la force. Il faut trouver $E_p(\rho,\theta)$ tel que :

$$\begin{cases} F_\rho = 2\rho\sin\theta = -\frac{dE_p(\rho,\theta)}{d\rho} \\ \rho F_\theta = \rho^2\cos\theta = -\frac{dE_p(\rho,\theta)}{d\theta} \end{cases}$$

Intégration de la première équation: $E_p(\rho,\theta) = -\int F_\rho\, d\rho = -\int 2\rho\sin\theta\, d\rho = -2\rho\sin\theta + f(\theta)$.
Identification de la fonction $f(\theta)$.

$$\rho^2\cos\theta = -\frac{dE_p(\rho,\theta)}{d\theta} = -\frac{d(-2\rho\sin\theta + f(\theta)}{dy} = \rho^2\cos\theta + f'(\theta)$$

Donc $f'(\theta) = 0$ et $f(\theta) = C^{ste}$.

L'énergie potentielle dérivée est donc $E_p = -2\rho\sin\theta + C^{ste}$.

Exo VII - Travail

VII.1

$$F_\rho = A\rho\sin\theta,\ F_\theta = A\rho\cos\theta$$

On a

$$W_{O\to A}(\vec{F}) = \int_{O\to A} \vec{F}.\vec{dl}$$

. et

$$\vec{dl} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta$$

On effectue le produit scalaire

$$\vec{F}.\vec{dl} = (A\rho\sin\theta\vec{u}_\rho + A\rho\cos\theta\vec{u}_\theta).(d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta) = (A\rho\sin\theta)(d\rho) + (A\rho\cos\theta)(\rho d\theta)$$

Donc

$$W_{O\to A}(\vec{F}) = \int_{O\to A} A\rho\sin\theta d\rho + A\rho^2\cos\theta d\theta = \int_{O\to A} A\rho\sin\theta d\rho + \int_{O\to A} A\rho^2\cos\theta d\theta$$

Quand on se déplace de l'origine 0 au point A $(R_0, \theta = 0)$ en ligne droite, θ est constant. Donc le travail de cette force est

$$W_{O\to A}(\vec{F}) = \left[\frac{1}{2}A\rho^2\sin\theta\right]_O^A = \frac{1}{2}AR_0^2\sin(0) - \frac{1}{2}A0^2\sin(0) = 0$$

Quand on se déplace du point A $(R_0, \theta = 0)$ au point B $(R_0, \theta = \pi/2)$ en se déplacant sur le cercle de rayon R_0, on a ρ qui est constant.Donc le travail de cette force est

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = A\rho^2\left[\sin\theta\right]_{(R_0,\theta=0)}^{(R_0,\theta=\pi/2)} = AR_0^2\sin(\frac{\pi}{2}) - AR_0^2\sin(0) = AR_0^2$$

Quand on se déplace de l'origine au point B $(R_0, \theta = \pi/2)$ en ligne droite, on a θ qui est constant. Donc le travail de cette force est

$$W_{O\to B}(\vec{F}) = \left[\frac{1}{2}A\rho^2\sin\theta\right]_O^B = \frac{1}{2}AR_0^2\sin(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}A0^2\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}AR_0^2$$

On a

$$W_{O\to B} = \frac{1}{2}AR_0^2 \neq 0 + AR_0^2 = W_{O\to A} + W_{A\to B}$$

La force F n'est pas conservative. Il au 2 fois plus de travail en passant pas le point A pour aller de l'origine au point B.

VII.2

$$F_\rho = A\rho\cos\theta,\ F_\theta = -A\rho\sin\theta$$

On a

$$W_{O\to A}(\vec{F}) = \int_{O\to A} \vec{F}.d\vec{l}$$

. et

$$d\vec{l} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta$$

On effectue le produit scalaire

$$\vec{F}.d\vec{l} = (A\rho\cos\theta\vec{u}_\rho - A\rho\sin\theta\vec{u}_\theta).(d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta) = (A\rho\cos\theta)(d\rho) + (-A\rho\sin\theta)(\rho d\theta)$$

Donc

$$W_{O\to A}(\vec{F}) = \int_{O\to A} A\rho\cos\theta d\rho - A\rho^2\sin\theta d\theta = \int_{O\to A} A\rho\cos`\theta d\rho - \int_{O\to A} A\rho^2\sin\theta d\theta$$

Quand on se déplace de l'origine 0 au point A $(R_0, \theta = 0)$ en ligne droite, θ est constant. Donc le travail de cette force est

$$W_{O\to A}(\vec{F}) = \left[\frac{1}{2}A\rho^2\cos\theta\right]_O^A = \frac{1}{2}AR_0^2\cos(0) - \frac{1}{2}A0^2\cos(0) = \frac{1}{2}AR_0^2$$

Quand on se déplace du point A $(R_0, \theta = 0)$ au point B $(R_0, \theta = \pi/2)$ en se déplacant sur le cercle de rayon R_0, on a ρ qui est constant. Donc le travail de cette force est

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = A\rho^2\left[\cos\theta\right]_{(R_0,\theta=0)}^{(R_0,\theta=\pi/2)} = AR_0^2\cos(\frac{\pi}{2}) - AR_0^2\cos(0) = -AR_0^2$$

Quand on se déplace de l'origine au point B $(R_0, \theta = \pi/2)$ en ligne droite, on a θ qui est constant. Donc le travail de cette force est

$$W_{O\to B}(\vec{F}) = \left[\frac{1}{2}A\rho^2\cos\theta\right]_O^B = \frac{1}{2}AR_0^2\cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}A0^2\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

On a

$$W_{O\to B} = 0 \neq \frac{1}{2}AR_0^2 - AR_0^2 = W_{O\to A} + W_{A\to B}$$

La force F n'est pas conservative.