

### Exo 1

Preuve par récurrence.

Proposition est vraie pour  $u_0 = 0 = 2^0 - 1$ .

Supposons que  $u_n = 2^n - 1$  pour  $n > 0$ , vérifions si  $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ .

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

$$u_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1$$

$$u_{n+1} = 2 * 2^n - 1$$

$$u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

La proposition est Vraie.

### Exo 2

Preuve par récurrence.

Proposition est vraie pour  $u_0 = 3 = 3^{2*0}$ .

Supposons que  $u_n = 3^{2^n}$  pour  $n > 0$ , vérifions si  $u_{n+1} = 3^{2^{n+1}}$ .

$$u_{n+1} = u_n^2$$

$$u_{n+1} = (3^{2^n})^2$$

$$u_{n+1} = 3^{4^n}$$

La proposition est Fausse.

### Exo 3

Prenons  $f(x) = x^2 + 1$ , et déterminons le signe de  $f(x) - x$  selon  $x$ .

$$f(x) - x = x^2 + 1 - x = x(x - 1) + 1$$

$$f(x) - x, \left\{ \begin{array}{ll} > 0 & x \in ]-\infty, 0[ \\ > 0 & x = 0 \\ > 0 & x \in ]0, 1[ \\ > 0 & x = 1 \\ > 0 & x \in ]1, +\infty \end{array} \right.$$

- La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car c'est un assemblage de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ ,
- La fonction  $f$  est stable sur  $\mathbb{R}$  car  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ .
- La fonction  $f$  est strictement croissante
- La fonction  $f$  admet un point fixe, donc la suite  $u_n = u_n^2 + 1$  est strictement croissante donc tend vers  $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

En passant à la limite dans l'inégalité  $u_n > u_0$ , on obtient  $l > u_0$ , et la suite  $u_n$  n'est pas constante, on en déduit que  $l = +\infty$  donc, la suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \{+\infty\}$ .

La proposition est Fausse.

#### Exo 4

Prenons  $f(x) = 1 + \arctan(\frac{x}{2})$ , et déterminons le signe de  $f(x) - x$  selon  $x$ .

$$g(x) = f(x) - x = 1 + \arctan(\frac{x}{2}) - x$$

La fonction  $g(x) = f(x) - x$  est strictement décroissante, positive  $\forall x \in ]-\infty, x_{pf}[$ , négative  $\forall x \in ]x_{pf}, +\infty[$ , donc elle s'annule pour un point  $x_{pf} \in ]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}[$ .

$$\begin{cases} f(x) > x & x \in ]-\infty, x_{pf}[ \\ = 0 & x_{pf} \in ]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}[ \\ f(x) < x & x \in ]x_{pf}, +\infty[ \end{cases}$$

- La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car c'est un assemblage de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ ,
- La fonction  $f$  est stable sur  $\mathbb{R}$  car  $f(\mathbb{R}) \subset ]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}[ \subset \mathbb{R}$ .
- La fonction  $f$  est strictement croissante
- La fonction  $f$  admet un point fixe  $x_{pf}$
- Cas  $u_0 = x_{pf}$ , la suite est constante.
- Cas  $u_0 \neq x_{pf}$ . Il faut calculer la dérivée de la fonction  $f$  pour savoir si le point fixe est répulsif ou attractif

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}}$$

On a:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} &\geq 0 \\ 1 + \frac{x^2}{4} &\geq 1 \\ 0 &< \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} \leq 1 \\ 0 &< \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc  $f'(x) \leq \frac{1}{2}$ , par le théorème de xx, le point fixe est attractif et la suite  $u_n$  est convergente.

La proposition est Vraie.

#### Exo 5

On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{3}} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} -(-x)^{\sqrt{3}} = 0$ , donc la fonction  $\phi(x)$  se prolonge en:

$$\tilde{\phi}(x), \begin{cases} x^{\sqrt{3}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -(-x)^{\sqrt{3}} & x < 0 \end{cases}$$

La fonction  $\tilde{\phi}(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Montrons que la fonction  $\tilde{\phi}(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

$$\tilde{\phi}'(x), \begin{cases} \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\sqrt{3}(-x)^{\sqrt{3}-1} & x < 0 \end{cases}$$

On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{3}(-x)^{\sqrt{3}-1} = 0$ , donc la fonction  $\tilde{\phi}'(x)$  est continue. La fonction  $\tilde{\phi}(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Montrons que la fonction  $\tilde{\phi}(x)$  est bijective. Les fonctions  $x^{\sqrt{3}}$ ,  $0$ ,  $-(-x)^{\sqrt{3}}$  sont bijectives sur les domaines respectifs  $x > 0$ ,  $x = 0$  et  $x < 0$ . Il faut maintenant montrer que les images des trois fonctions sont exclusives pour que la fonction  $\tilde{\phi}(x)$  soit bijective.  $x > 0, Im(\tilde{\phi}(x)) > 0$ ,  $x = 0, Im(\tilde{\phi}(x)) = 0$  et  $x < 0, Im(\tilde{\phi}(x)) < 0$ , donc la fonction  $\tilde{\phi}(x)$  est bijective.

La proposition est Vraie.

## Exo 6

Prenons la valeur  $x = \frac{3\pi}{4}$ . On a :

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Donc  $\arcsin(\sin(x)) \neq x$ .

La proposition est Fausse.

## Exo 7

Rappel de cours:

- une fonction  $f$  est bijective, si elle est injective et surjective
- une fonction  $f$  est injective, si  $\forall (x_1, x_2) \in DxD, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$  ou  $\forall (x_1, x_2) \in DxD, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
- une fonction  $f$  est surjective, si  $\forall y \in A, \exists x \in D, f(x) = y$
- une fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$ , si la fonction  $f$  est dérivable sur  $D$  et sa dérivée  $f'(x)$  est continue sur  $D$ .

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1; 1[$ , donc  $\forall x_0 \in ] -1; 1[, f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . On a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}$$

Comme  $f$  est injective  $x \neq x_0 \implies f(x) \neq f(x_0)$ , donc  $f(x) - f(x_0) \neq 0$ .

$$\frac{1}{f'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$$

En prenant  $f(x_0) = y_0$  et  $f(x) = y$ , on a

$$\frac{1}{f'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$$

Comme la fonction  $f$  est continue, lorsque  $x \rightarrow x_0$ , on a  $f(x) \rightarrow f(x_0)$ , donc  $y \rightarrow y_0$ .

$$\frac{1}{f'(x_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = (f^{-1})'(y_0)$$

La dérivé de la fonction  $f^{-1}$  existe mais elle est continue que lorsque  $f'(x_0) \neq 0$ . Donc  $f^{i1}(x)$  n'est pas forcément de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Ou alors

Soit la fonction  $f(x) = x$ . La fonction est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1; 1[$  et est bijective. On a  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ . En effet, sa dérivée existe  $f^{-1}(x) = -\frac{1}{x^2}$ , mais sa dérivée n'est pas continue sur  $] -1; 1[$  (non définie en  $x = 0$ ).

La proposition est Fausse.

## Exo 8

Pour montrer la proposition, on va montrer que la fonction  $f(x) = 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \arctan(x)$  est constante sur  $\mathbb{R}$  (i.e. sa dérivée est égale à zéro sur  $\mathbb{R}$ ) et que  $f(0) = \frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1}{(\sqrt{1+x^2} - x)^2 + 1} + \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= 2 \cdot \frac{\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2 - 2x\sqrt{1+x^2} + x^2 + 1} + \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2 - x\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2 - x\sqrt{1+x^2})} + \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(1+x(x - \sqrt{1+x^2}))} + \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{(x - \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}(1+x(x - \sqrt{1+x^2}))(x + \sqrt{1+x^2})} + \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}((x + \sqrt{1+x^2}) - x)} + \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{-1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $f(x)$  est une fonction constante. Calculons un point au hasard  $f(0) = 2\arctan(\sqrt{1+0^2} - 0) + \arctan(0) = 2\arctan(1) + 0 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ .

La proposition est Vraie.

## Exo 9

Rappel de cours:

- une fonction  $f$  est impaire si  $\forall x, f(-x) = -f(x)$
- une fonction  $f$  est bijective, si elle est injective et surjective
- une fonction  $f$  est injective, si  $\forall (x_1, x_2) \in DxD, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$  ou  $\forall (x_1, x_2) \in DxD, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
- une fonction  $f$  est surjective, si  $\forall y \in A, \exists x \in D, f(x) = y$

La fonction  $f(x)$  est impaire donc  $f(-x) = -f(x)$ . La fonction  $f(x)$  est bijective donc la fonction  $f^{-1}(x)$  existe. on a  $f(f^{-1}(x)) = x$  donc  $-f(f^{-1}(x)) = -x$ , comme  $f$  est impaire  $f(-f^{-1}(x)) = -x$ .

Admettons que la fonction  $f^{-1}$  ne soit pas impaire donc  $f^{-1}(-x) \neq -f^{-1}(x)$ . Comme la fonction  $f$  est injective on a  $-x = f(-f^{-1}(x)) \neq f(f^{-1}(-x)) = -x$ . Contradiction, donc la fonction  $f^{-1}$  est impaire.

La proposition est Vraie.

## Exo 10

Rappel de cours:

- Intégrale de Riemann.  $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a + k \frac{b-a}{n}) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$

On a  $\frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{\pi k}{2n})$ .

En prenant  $b = \pi$ ,  $a = 0$ ,  $x = k/n$ , on a  $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{\pi k}{2n}) = \int_0^\pi \sin(\frac{\pi}{2}x) dx$$

Intégrale par substitution:  $u = \frac{\pi}{2}x$ , donc  $\frac{du}{dx} = \frac{\pi}{2}$  et  $dx = \frac{2}{\pi} du$

$$\int \sin(\frac{\pi}{2}x) dx = \frac{2}{\pi} \int \sin(u) du = -\frac{2}{\pi} \cos(u) = -\frac{2}{\pi} \cos(\frac{\pi}{2}x)$$

$$\int_0^\pi \sin(\frac{\pi}{2}x) dx = [-\frac{2}{\pi} \cos(\frac{\pi}{2}x)]_0^\pi = -\frac{2}{\pi} + \frac{\cos(\frac{\pi^2}{2})}{n} \neq 1$$

La proposition est Fausse.

## Exo 11

On a

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2(1 + k^2/n^2)} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{1 + (k/n)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{1 + (k/n)^2}$$

En prenant:  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $x = k/n$  on a  $f(x) = \frac{nx}{1+x^2}$  donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \int_0^1 \frac{nx}{1+x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} = [\frac{\ln(x^2+1)}{2}]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(1)}{2}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} \neq \frac{\pi}{4}$$

La proposition est Fausse.

## Exo 12

On a

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2(1 + k^2/n^2)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + (k/n)^2} = \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + (k/n)^2}$$

En prenant:  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $x = k/n$  on a  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

La proposition est Vraie.

### Exo 13

Rappel de cours:

- Intégrale par partie.  $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)$

On prend

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2 & g'(x) &= e^x \\ f'(x) &= 2x-2 & g(x) &= e^x \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_0^1 (x-1)^2 e^x = [(x-1)^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 (2x-2)e^x = -1 - \int_0^1 (2x-2)e^x$$

On prend

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x-2 & g'(x) &= e^x \\ f'(x) &= 2 & g(x) &= e^x \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_0^1 (2x-2)e^x = [(2x-2)e(x)]_0^1 - \int_0^1 2e^x = [(2x-2)e(x)]_0^1 - 2[e^x]_0^1 = 2 - 2e + 2 = 4 - 2e.$$

$$\text{Enfin } \int_0^1 (x-1)^2 e^x = -1 - (4 - 2e) = 2e - 5$$

La proposition est Vraie.

### Exo 14

Soit  $f(x)$  une fonction croissante et  $F(x)$  une fonction tel que  $F'(x) = f(x)$ . On a

$$g(x) = \int_{x^3}^{x^3+1} f(t)dt = F(x^3+1) - F(x^3)$$

La valeur de la dérivée de la fonction  $g(x)$  donne le sens de la fonction  $g(x)$ .

$$g'(x) = (F(x^3+1) - F(x^3))' = F'(x^3+1) - F'(x^3) = f(x^3+1) - f(x^3)$$

La fonction  $f(x)$  est croissante donc  $\forall x_1, x_2, x_1 \geq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$  et  $x^3+1 > x^3$ . Donc  $g'(x)$  est toujours positive ou nulle. Par conséquent la fonction  $g(x)$  est croissante.

La proposition est Vraie.

### Exo 15

On a  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin'(t)dt$$

$$I = [\arcsin(t) + C]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$I = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(0)$$

$$I = \frac{\pi}{6} - 0$$

$$I = \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{3}$$

La proposition est Fausse.

## Exo 16

$$\int_{\exp(\exp(2))}^{\exp(\exp(1))} \frac{dx}{x(\ln x)(\ln(\ln x))}$$

On substitue  $u = \ln(\ln x)$ , donc  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x(\ln x)}$ , et  $dx = x(\ln x)du$

$$\int_{\exp(\exp(2))}^{\exp(\exp(1))} \frac{1}{x(\ln x)(\ln(\ln x))} dx$$

$$\int_{\exp(\exp(2))}^{\exp(\exp(1))} \frac{x(\ln x)}{x(\ln x)(\ln(\ln x))} du$$

$$\int_{\exp(\exp(2))}^{\exp(\exp(1))} \frac{1}{\ln(\ln x)} du$$

$$= \int_{\exp(\exp(2))}^{\exp(\exp(1))} \frac{1}{u} du$$

$$= [\ln(u)]_{\exp(\exp(2))}^{\exp(\exp(1))}$$

$$= [\ln(\ln(\ln x))]_{\exp(\exp(2))}^{\exp(\exp(1))}$$

$$= \ln(\ln(\ln \exp(\exp(1)))) - \ln(\ln(\ln \exp(\exp(2))))$$

$$= (\ln 1) - (\ln 2)$$

$$= -(\ln 2)$$

La proposition est Vraie.