Feuille d'exercices 1

Rappels, distance et topologie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.1 – Centre et rayon des intervalles Soient b, c deux réels tels que $b < c$. Déterminer un réel a et un réel $r > 0$ tels que $]b; c[$ coïncide avec l'intervalle ouvert de centre a de rayon r.

Exercice 1.2 – Opérations et intervalles.

1. Déterminer l'intervalle $I = \{x \in \mathbb{R},$ tel que $\exists s \in [0; 1], \exists t \in [-1; 1]$ avec $x = s + t\}$. Même question en remplaçant $[-1; 1]$ par $]-1; 1[$.

2. Déterminer l'intervalle $J = \{x \in \mathbb{R},$ tel que $\exists s \in [-2; -1], \exists t \in [-4; -3]$ avec $x = st\}$. Même question en remplaçant $[-2; -1]$ par $]-2; 1[$.

Exercice 1.3 – Unions d'intervalles.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que $I \cap J \neq \emptyset$. Démontrer que $I \cup J$ est un intervalle.

Exercice 1.4 – Réels et décimaux. Soit $\underline{c} = (c_n)_{n \geq 1}$ une suite quelconque de *chiffres*, c'est à dire que pour tout $n \geq 1$ on a $c_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Pour tout $k \geq 1$ posons $d_k = \dfrac{c_1}{10} + \dfrac{c_2}{100} + \cdots + \dfrac{c_k}{10^k}$.

Soit $E(\underline{c}) = \{d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots\}$: c'est l'ensemble des valeurs de la suite $(d_k)_{k \geq 1}$. On pose $S(\underline{c}) = \sup(E(\underline{c}))$.

1. Si tous les chiffres c_n valent 0, que vaut $S(\underline{c})$? Si tous les chiffres c_n valent 9, que vaut $S(\underline{c})$?

2. Montrer que $S(\underline{c})$ est dans $[0, 1]$ et est la limite de la suite $(d_n)_{n \geq 1}$.

3. Réciproquement, pour tout nombre $x \in [0, 1]$, montrer qu'il existe au moins une suite de chiffres $(c_n)_{n \geq 1}$ telle que $S(\underline{c}) = x$. Donner un exemple de réel $x \in [0, 1]$ tel qu'il existe deux suites différentes $\underline{c}, \underline{c'}$ pour lesquelles on a $S(\underline{c}) = S(\underline{c'}) = x$.

Exercice 1.5 – Diamètres. Vérifier que les parties suivantes sont bornées puis calculer leur diamètre :

$$A = [0; 1] \ ; \ B =]-2; 3[\ ; \ C = \{4; 5; 6\} \ ; \ D = \{x \in]0; 1[, x \text{ est rationnel}\}.$$

Exercice 1.6 – Parties bornées de $\mathbb{R}$.

1. Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie bornée. Montrer que si $F \subset E$ alors F est bornée.

2. Montrer qu'une intersection quelconque de parties bornées est bornée.

3. Montrer qu'une union de deux parties bornées est bornée.

Exercice 1.7 – Parties finies.

1. Soit a un réel fixé. Montrer que $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ est ouvert. Qu'en déduire pour le singleton $\{a\}$?

2. Pour $n \geq 1$ un entier donné, soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Montrer que $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est fermé.

Exercice 1.8 – Ouverts ? fermés ?

1. Montrer que $[0; 1]$ n'est pas ouvert et que $]1; 2[$ n'est pas fermé. Montrer que $[-1; 0[$ n'est ni ouvert ni fermé.

2. Soit C l'ensemble des réels x tels que au moins l'un des chiffres du développement décimal de x est 5.

a. Démontrer que C n'est pas ouvert.

b. Soit $O = \{x \in C,\ x$ n'est pas décimal$\}$. Démontrer que O est ouvert.

Exercice 1.9 – Topologie et borne supérieure.

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée. Soit $M = \sup(E)$.

1. Si E est fermé montrer que $M \in E$.

2. Si E est ouvert montrer que $M \notin E$.

3. Reformuler les résultats obtenus en termes de majorants.

Exercice 1.10 – Description des ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $O \subset \mathbb{R}$ un ouvert.

1. Soit $x_0 \in O$ fixé. On considère $R^+(x_0) = \{r > 0, [x_0, x_0 + r[\subset O\}$ et $R^-(x_0) = \{r > 0,]x_0 - r; x_0] \subset O\}$.

a. Montrer que $R^+(x_0) \cap R^-(x_0) \neq \emptyset$.

b. Montrer que ou bien $R^+(x_0) =]0; +\infty[$, ou bien il existe un réel $r^+ > 0$ tel que $R^+(x_0) =]0; r^+]$.

c. Montrer qu'il existe un et un seul intervalle ouvert $O(x_0)$ tel que

(1) $O(x_0)$ est voisinage de x_0 ;

(2) $O(x_0)$ est contenu dans O ;

(3) Pour tout intervalle ouvert U tel que $\{x_0\} \subset U \subset O$ on a $U \subset O(x_0)$.

2. Montrer qu'il existe une famille dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints dont la réunion est O (on pourra considérer la famille formée de tous les intervalles ouverts $O(r)$, où r est un nombre rationnel contenu dans O).

Exercice 1.11 – Exemples de suite de Cauchy de $\mathbb{R}$

1. Pour tout entier naturel n on pose $x_n = \dfrac{\cos(0)}{10^0} + \dfrac{\cos(1)}{10^1} + \dfrac{\cos(2)}{10^2} + \cdots + \dfrac{\cos(n)}{10^n}$. Montrer que $\big(x_n\big)_n$ est de Cauchy.

2. Soit $f : [0; +\infty[$ une fonction dérivable telle que $f'(x)$ est décroissante et $\lim_{x\to\infty} x f'(x) = 0$. Montrer que la suite $\big(f(n)\big)_n$ est de Cauchy.

Exercice 1.12 – Comment transformer une suite bornée en suite convergente !

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique réelle *bornée*. Pour tout entier $n \geq 0$ on pose $s_n := \sup\{x_k, k \geq n\}$.

1. Exemples : pour chacune des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ ci-dessous expliciter la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ associée :

$$x_n = \frac{1}{2^n}\ ;\ x_n = (-1)^n\ ;\ x_n = -\frac{1}{2^n}\ ;\ x_n = \frac{1}{1 + (n-4)^2}\ ;\ x_n = \frac{(-1)^n}{2^n}\ .$$

On revient à l'étude générale.

2. Montrer que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée.

3. Montrer alors qu'il existe un réel L avec la propriété suivante :
pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $I(\varepsilon)$ des $k \in \mathbb{N}$ tels que $x_k \in]L - \varepsilon; L + \varepsilon[$ est infini, et de plus l'ensemble $J(\varepsilon)$ des $\ell \in \mathbb{N}$ tels que $x_\ell \in]L + \varepsilon; +\infty[$ est fini.

4. Montrer que si la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers un réel ℓ alors on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \ell$.

5. Dans cette dernière question on suppose que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.

a. Vérifier que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

b. Montrer que $d(x_n, s_n) \to 0$ puis que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

Exercice 1.13 – Soit $I \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de tous les nombres irrationnels. Montrer que I est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.14 – Fonction Lipschitzienne.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Démontrer que f est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.15 – Fonction continue mais pas Lipschitzienne.

Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Montrer que f est continue sur $[0; 1]$. Montrer que f Lipschitzienne sur $[\varepsilon; 1]$ pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$. Montrer que f n'est pas Lipschitzienne sur $[0; 1]$.

Exercice 1.16 – La meilleure constante de Lipschitz.

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable, et telle que $\sup_{x\in[a;b]} |f'(x)| = 1$.

1. Montrer que f est 1-Lipschitzienne sur $[a;b]$.

2. Montrer que f n'est pas $0,99$-Lipschitzienne sur $[a;b]$.

Exercice 1.17 – Opérations sur les fonctions Lipschitziennes. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f est K-Lipschitzienne et que g est L-Lipschitzienne.

1. Montrer que $f + g$ est Lipschitzienne : avec quel constante de Lipschitz ?

2. Montrer que $f \circ g$ est Lipschitzienne : avec quel constante de Lipschitz ?

3. Donner un exemple où $K = L = 1$ mais $f \times g$ n'est pas Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Montrer cependant que pour tout $M \geq 0$ la fonction produit $f \times g$ est Lipschitzienne sur $[-M;M]$, et en donner une constante de Lipschitz.

Exercice 1.18 – Fonction Lipschitzienne sur une partie dense. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que f vérifie la propriété suivante :

pour deux rationnels quelconques $r, s \in [0;1]$ on a $|f(r) - f(s)| \leq K|r - s|$.

Montrer qu'alors f est K-Lipschitzienne sur $[0;1]$.

Exercice 1.19 – Une seule exponentielle continue !

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour x, y quelconques on a $f(x + y) = f(x)f(y)$.

1. Montrer que $f(0)^2 = f(0)$. Si $f(0) = 0$ déterminer la fonction f. *Dans la suite on suppose* $f(0) \neq 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel > 0 et soit $x \in \mathbb{R}$ un réel. Montrer que $f(nx) = [f(x)]^n$, que $f(x) > 0$, puis que $f(\frac{x}{n}) = \sqrt[n]{f(x)}$. Exprimer aussi $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Enfin pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ montrer que $f(rx) = [f(x)]^r$.

3. Montrer qu'il existe un réel K tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \exp(Kx)$ (on pourra poser $K = \ln\big(f(1)\big)$ et considérer la fonction $g(x) = \frac{f(x)}{\exp(Kx)}$).

Exercice 1.20 – Parties définies par des inégalités continues.

Parmi les parties suivantes déterminer celles qui sont ouvertes et celles qui sont fermées :

$$\{x \in \mathbb{R}, -2 < x^3 + x + 1 < 1 \text{ ou } 2\cos(x) > -1\} \ , \ \{x \in \mathbb{R}, \sin(x) \leq \frac{1}{3} \text{ et } \sqrt{1 + x^2} \geq 2\} \ ,$$

$$\{x \in \mathbb{R}, 2 \leq \mathrm{e}^x \leq 3 \text{ ou } \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \geq \frac{1}{2}\} \ , \ \{x \in \mathbb{R}, 2 < x^2 \ln(2 + x^2) < 3 \text{ et } -2 < \sqrt[3]{x} < 1\}.$$