

Rappel de cours

- La composante de la force d'un point M , $\vec{F}(M)$ sur l'axe \mathcal{O}_x est donnée par le produit scalaire $f(x) = \vec{F}(M) \cdot \vec{i}$.
- Le travail d'une force \vec{F} sur un segment \overrightarrow{AB} est donné par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot \vec{i} dx = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx$$

- On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point A et B .

$$\forall A, B, C, W_{A \rightarrow B} \vec{F} = W_{A \rightarrow C} \vec{F} + W_{C \rightarrow B} \vec{F}$$

- Dans le cas où le chemin est rectiligne, si une force est conservatrice alors l'énergie potentielle associée à la force \vec{F} est notée $E_p(x)$ est définie par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot \vec{i} dx = E_p(x_a) - E_p(x_b)$$

Exo 1

Q 1.1 a et b

Si la force $\vec{F}_{el}(x)$ est conservatrice alors on peut définir son énergie potentielle associée $E_{el}(x)$. La $\vec{F}_{el}(x)$ est conservatrice si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi sur l'axe \mathcal{O}_x , soit $\forall A, B, C, W_{A \rightarrow B} \vec{F} = W_{A \rightarrow C} \vec{F} + W_{C \rightarrow B} \vec{F}$. Le travail de la force $\vec{F}_{el}(x)$ entre les points A et B sur l'axe \mathcal{O}_x est donné par $W_{A \rightarrow B} \vec{F} = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx$ avec $f(x) = -\frac{A}{x^2}$ car la force $\vec{F}_{el}(x)$ est parallèle à l'axe \mathcal{O}_x .

$$W_{A \rightarrow B} \vec{F}_{el} = \int_{x_a}^{x_b} -\frac{A}{x^2} dx = \left[\frac{A}{x} \right]_{x_a}^{x_b} = \frac{A}{x_a} - \frac{A}{x_b}$$

Et,

$$W_{A \rightarrow C} \vec{F}_{el} + W_{C \rightarrow B} \vec{F}_{el} = \left(\frac{A}{x_a} - \frac{A}{x_c} \right) + \left(\frac{A}{x_c} - \frac{A}{x_b} \right) = \frac{A}{x_a} - \frac{A}{x_b} = W_{A \rightarrow B} \vec{F}_{el}$$

Donc la force \vec{F}_{el} est conservatrice et $E_p(x) = \frac{A}{x}$.

Pour l'origine de l'énergie potentielle associée à la force \vec{F}_{el} , je dirais à l'origine de l'axe \mathcal{O}_x car comme les deux ions ne peuvent pas s'interpénétrer alors l'abscisse du ion Na^+ ne peut pas être 0.

Q 1.2

On a:

$$\frac{dE_{rep}(x)}{dx} = -\vec{F}_{rep} \cdot \vec{i}$$

$$\frac{dE_{rep}(x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{8B}{x^8}\right)}{dx} = -\frac{8B}{x^9}$$

Donc $\vec{F}_{rep} \cdot \vec{i} = \frac{8B}{x^9} \cdot \vec{i}$. La force \vec{F}_{rep} est répulsive car elle a le même sens que \vec{i} .

Q 1.3 a

Rappel de cours:

- L'énergie mécanique d'un système $E_m = E_c + E_p$ avec E_c l'énergie cinétique qui dépend de la masse et de la norme de la vitesse du système physique étudié et de l'énergie potentielle E_p qui correspond aux forces exercées sur le système.

L'énergie mécanique est égale à $E_m = E_c + E_p$. Avec l'énergie cinétique du système $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$ et l'énergie potentielle qui correspond aux 2 forces qui s'exercent sur le système, \vec{F}_{el} , \vec{F}_{rep} , $E_p = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^8}$.

Q 1.3 b

Les forces qui s'exercent sur le système sont conservatrices donc l'énergie mécanique du système est conservée.

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^8}$$

Comme l'ion Na est lancé depuis l'infini vers l'ion Cl alors à $t = 0$, $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}3.84 \times 10^{-28}(-2 \times 10^6)^2 = 7.68 \times 10^{-16} J$.

Q 1.3 c

On a

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^8}$$

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E_m - \frac{A}{x} - \frac{B}{x^8})$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_m - \frac{A}{x} - \frac{B}{x^8})}$$

Non, on ne peut pas déterminer le sens du mouvement de l'ion Na . Pour cela il faut connaître les conditions initiales du système.

Q 1.3 d

Lorsque la force électromagnétique de cohésion devient négligeable devant la force de répulsion alors

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_m - \frac{B}{x^8})}$$

Cette équation n'est valide que si $\frac{2}{m}(E_m - \frac{B}{x^8}) > 0$ ou $E_m > \frac{B}{x^8}$, comme E_m est constant et positif, et que la fonction $\frac{B}{x^8}$ est continue, lorsque $x(t=0) > 0$ alors on a $x(t) > 0$.

L'abscisse minimum x_{min} est lorsque $E_m - \frac{B}{x^8} = 0$ ou $E_m = \frac{B}{x^8}$. Donc $x^8 = \frac{B}{E_m}$ ou $x = \sqrt[8]{\frac{B}{E_m}} = 9.90 \times 10^{-11} \approx 10^{-10}$.

Donc à la distance minimum les atomes distants de leurs rayon atomique respectif.

Q 1.3 e

??

Q 1.4 a

Lorsque le système des deux ions est à l'équilibre on a :

$$\|\overrightarrow{F_{el}}\| = \|\overrightarrow{F_{rep}}\|$$

.

$$\frac{A}{x^2} = \frac{8B}{x^9}$$

$$A = \frac{8B}{x^7}$$

$$x = \sqrt[7]{8\frac{B}{A}}$$

$$x = \sqrt[7]{8\frac{7.1 \times 10^{-96}}{2.3 \times 10^{-28}}} = 3.05 \times 10^{-10}m = 3.05\text{\AA}$$

Q 1.4 b

Voir courbes

Q 1.4 c

$$\frac{(7.1 \cdot 10^{-96})}{(3.05 \cdot 10^{-10})^8} - \frac{(2.3 \cdot 10^{-28})}{(3.05 \cdot 10^{-10})} = 6.5928716310^{19}$$

QED.