Rappel de cours

Definition 1. Soit $\mathscr{E}$ un K-espace vectoriel. Une partie F de $\mathscr{E}$ est appele un sous-espace vectoriel si :

- $0_E \in F$,
- $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$,
- $\lambda.u \in F$ pour tout $\lambda \in K$ et tout $u \in F$.

Definition 2. Une famille $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de E est une famille libre ou linéairement indépendante si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, cest-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_p = 0$$

Definition 3. Soient $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E. La famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_p$. Ce qui peut s'écrire aussi :

$$\forall v \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p, v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

Definition 4. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, on définit le noyau de f comme étant le sous-espace vectoriel (sev) de E défini par

$$ker(f) := \{x \in E | f(x) = 0\}$$

On définit l'image de f comme étant le sev de F défini par

$$Im(f) = \{y \in F | \exists x \in E, f(x) = y\}$$

La dimension de $Im(f)$ s'appelle aussi le rang de f et se note $rg(f)$.

Definition 5. Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel de dimension n, et B, B' deux bases de $\mathscr{E}$. On appelle la *matrice de passage* de la base B vers la base B', notée $P_{b,B'}$, la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées du j-ième vecteur de la base B' par rapport la base B.
Dans le cas particulier où B est la base canonique de $\mathscr{E}$, alors la matrice de passe est formée des vecteurs de B'.

Definition 6. Soit

- $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, ume application linéaire
- B, B' deux bases de $\mathscr{E}$
- $P_{B,B'}$, la matrice de passage de B vers B'
- $A = Mat_B(f)$, la matrice de l'application f dans la base B
- $B = Mat_{B'}(f)$, la matrice de l'application f dans la base B'

Alors

$$B = P^{-1} A P$$

Exercice 1

Soit $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1+x_2-2x_3+4x_4 = 0\}$ et $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | 2x_1+3x_2+x_3+5x_4 = 0\}$.
Il faut calculer $U \cap V$.
Trouvons une base pour l'espace vectoriel U.

$$U = \begin{pmatrix} -x_2 + 2x_3 - 4x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = ((-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (-4, 0, 0, 1))$$

Trouvons une base pour l'espace vectoriel V.

$$U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1 - 3x_2 - 5x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = ((1, 0, -2, 0), (0, 1, -3, 0), (0, 0, -5, 1))$$

Pour qu'un vecteur v appartienne à $U \cap V$, il est nécessaire et suffisant d'avoir v comme une combinaison linéaire des 2 bases de U et V, donc

$$v = a_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{14}{5} \end{vmatrix}$$

D'où

$$v = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

On obtient le système d'équations

$$\begin{cases} a_1 = & b_2 \\ a_2 = & -\frac{1}{5}b_2 + \frac{3}{5}b_3 \\ a_3 = & b_3 \\ b_1 = & \frac{7}{5}b_2 + \frac{14}{5}b_3 \end{cases}$$

On peut maintenant calculer v

$$v = b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{5}b_2 + \frac{3}{5}b_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La base de $U \cap V$ est

$$((-1 - \frac{1}{5}.2, 1 - \frac{1}{5}.0, 0 - \frac{1}{5}.1, 0 - \frac{1}{5}.0), (\frac{3}{5}.2 - 4, \frac{3}{5}.0 + 0, \frac{3}{5}.1 + 0, \frac{3}{5}.0 + 1))$$

$$((-\frac{7}{5}, 1, -\frac{1}{5}, 0), (-\frac{14}{5}, 0, \frac{3}{5}, 1))$$

Exercice 2

Le rang est la dimension de l'image de f. Commencons par calculer l'image de f; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R}^3 | \exists x \in \mathbb{R}^3, f(x) = y\}$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 4x_2 + 3x_3, 3x_1 + x_2 + x_3, 5x_1 + 2x_2 + 3x_3) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$Imf = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})$$

Il faut vérifier si ces vecteurs sont libres ou pas? On écrit une relation de liaison entre les vecteurs.

$$a.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

On échelonne la matrice et on obtient

$$a.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Il y a une unique solution; $a, b, c = 0$. Donc Imf est linéairement indépendent et est une base. La dimension de $Imf = 3$, donc le rang de $f = 3$.

Exercice 3

Exercice 3.1 - $KerA$

Le noyau $KerA = \{X \in \mathbb{R}^3, A.X = 0\}$. Prenons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$A.X = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x + 2y + z & = 0 \\ 2x + 3y + z & = 0 \\ x + y & = 0 \end{cases}$$

Apres échelonnage, on a

$$\begin{cases} x + 2y + z & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases}$$

En prenant z comme paramètre secondaire on obtient:

$$KerA = \{\begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.z, z \in \mathbb{R}\} = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Exercice 3.1 - ImA

L'image de A est l'espace vectoriel engendré par la famille génératrice des colonnes de A.

$$ImA = Vect(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix})$$

Il faut maintenant trouver une base de ImA. Il faut vérifier si ces vecteurs sont libres ou pas? On écrit une relation de liaison entre les vecteurs.

$$a. \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + c. \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$$

Ceci est $KerA$, comme $KerA \neq \{0\}$, la famille n'est pas libre. Prenons les 2 premiers vecteurs comme base et vérifions si ils sont libres. Base de $ImA = vect(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix})$. Ils sont libres car linéairement indépendent. C'est une base de ImA.

Exercice 4

La proposition est fausse. Soit F_1, F_2, F_3 3 sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, $F_1 = ((0,x)), F_2 = ((x,0)), F_3 = (x,x)$. On a $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $F_1 \cap F_3 = \{0\}$. On a $(F_1 \cap F_2) + (F_1 \cap F_3) = \{0\} + \{0\} = \{0\}$. On a $(F_1 + F_2) \cap F_3 = F_3$.

Exercice 5

La matrice de passage $P_{B,B'}$ est

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\2 & -1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 6

$kerf \oplus Imf = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow kerf \cap Imf = \{0\}$. Trouvons un endomorphisme f tel que $kerf \cap Imf \neq \{0\}$

Prenons $f = \begin{vmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{vmatrix}$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Calculons $kerf$ et imf.

$$a. \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0$$

Donc $kerf = Vect((z,0))$

L'image de f est l'espace vectoriel engendré par la famille génératrice des colonnes de f.

$$ImA = Vect(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$$

Il faut maintenant trouver une base de Imf. $Vect((z,0))$ est une famille de f.

$$kerf + Imf = Vect((z,0)) \neq \mathbb{R}^2$$

de plus $kerf \cap Imf \neq \{0\}$

EN fait ceci est vrai lorsque f est un

Exercice 7

Les matrices A et B sont semblables si $\exists P, A = PBP^{-1}$. Prenons B égale à la matrice identité I_d. On a $PBP^{-1} = PI_dP^{-1} = PP^{-1} = I_d$. Prenons A une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ de rang 2 et différente de I_d. On a $\nexists P, A = PI_dP^{-1}$, donc la proposition est fausse.

Exercice 8

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \\ 0 & c & d & 0 \end{vmatrix} = -a. \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} + b. \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} = a.d. \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - b.c. \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

On a $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Donc

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \\ 0 & c & d & 0 \end{vmatrix} = a.d.(ad - bc) - b.c.(ad - bc) = (ad - bc)^2$$

QED