

Rappel de cours

Definition 1. Soit X une variable aléatoire de moyenne μ alors sa variance $\sigma^2(X) = E[(X - \mu)^2]$

Exercice 1

On a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi r^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2r^2}} dx$$

Démonstration variance

$$E((X-m)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi r^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2r^2}} dx$$

Changement de variable $u = \frac{x-m}{r}$, donc $dx = r du$

$$E((X-m)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi r^2}} e^{-\frac{u^2}{2}} r du = \frac{r^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = r^2$$

Donc la variance est bien r^2 dans la formule.

Démonstration de la moyenne

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi r^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2r^2}} dx$$

Changement de variable $u = \frac{x-m}{r}$, donc $dx = r du$ et $x = ur + m$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ur + m) \frac{1}{\sqrt{2\pi r^2}} e^{-\frac{u^2}{2}} r du = \frac{r}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Première intégrale $\int u e^{-\frac{u^2}{2}} r du$. Changement de variable $t = u^2/2$, $du = dt/x$.

$$\int u e^{-\frac{u^2}{2}} r du = \int e^t dt = [e^t] = [e^{u^2/2}]$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} r du = [e^{u^2/2}]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Seconde intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$

Donc $E(X) = m$.