Exo 3.1.5

Q1

Identification du système : Le système étudié est l'anneau de masse m qui est accroché aux 2 ressorts.

Bilan des forces : Au repos, l'anneau est soumis à deux forces (la force de gravité est annulée par l'absence de frottement):

- la force de rappel du ressort du premier ressort qui est proportionnelle à l'allongement du ressort $F_{r_1} = -k_1.(l_1^e - l_1^o)\overrightarrow{i}$, avec l_1^e la longueur du ressort à l'équilibre.
- la force de rappel du ressort du second ressort qui est proportionnelle à l'allongement du ressort $F_{r_2} = k_2.(l_2^e - l_2^o)\overrightarrow{i}$, avec l_2^e la longueur du ressort à l'équilibre.

Composantes dans un repère cartésien : Le mouvement est rectiligne. Il a lieu le long de l'axe O_x. L'origine est pris à la position d'équilibre. Il existe une relation entre la position d'équilibre et la longueur totale; $l_1 + l_2 = l_1^e + l_2^e$

PFD : La résulante des forces est égale à zéro car le système est à l'équilibre. Donc $-k_1.(l_1^e - l_1^o)\overrightarrow{i} + k_2.(l_2^e - l_2^o)\overrightarrow{i} = \overrightarrow{0}$.

Solution (a)

On a le système suivant à résoudre:

$$\begin{cases} k_1.(l_1^e - l_1^o)\overrightarrow{i} = k_2.(l_2^e - l_2^o)\overrightarrow{i} \\ l = l_1^e + l_2^e \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1.l_1^e - k_1.l_1^o = k_2.l_2^e - k_2.l_2^o \\ l_1^e = l - l_2^e \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1.(l - l_2^e) - k_1.l_1^o = k_2.l_2^e - k_2.l_2^o \\ l_1^e = l - l_2^e \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1.l - k_1.l_2^e - k_1.l_1^o = k_2.l_2^e - k_2.l_2^o \\ l_1^e = l - l_2^e \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_2.l_2^e + k_1.l_2^e = k_1.l - k_1.l_1^o + k_2.l_2^o \\ l_1^e = l - l_2^e \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_2^e(k_1 + k_2) = k_1.l - k_1.l_1^o + k_2.l_2^o \\ l_1^e = l - l_2^e \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_2^e = \frac{k_1.l - k_1.l_1^o + k_2.l_2^o}{k_2 + k_1} \\ l_1^e = l - l_2^e \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_1^e = \frac{k_2.l - k_2.l_2^o + k_1.l_1^o}{k_2 + k_1} \\ l_2^e = \frac{k_1.l - k_1.l_1^o + k_2.l_2^o}{k_2 + k_1} \end{cases}$$

Q2

Identification du système : Le système étudié est l'anneau de masse m qui est accroché aux 2 ressorts.

Bilan des forces : L'anneau est soumis à deux forces :

- la force de rappel du ressort du premier ressort qui est proportionnelle à l'allongement du ressort $F_{r_1}(t) = -k_1.x(t)\overrightarrow{i}$.
- la force de rappel du ressort du second ressort qui est proportionnelle à l'allongement du ressort $F_{r_2}(t) = -k_2.x(t)\overrightarrow{i}$.

Composantes dans un repère cartésien : Le mouvement est rectiligne. Il a lieu le long de l'axe O_x. L'origine est pris à la position d'équilibre. $x(t) = (\overrightarrow{OM}(t)) - \overrightarrow{OM_e})$.

PFD : La résulante des forces est égale à $m.a(t) = m.\frac{d^2x(t)}{d^2t}$.

Solution (a)

$$m.\frac{d^2x(t)}{d^2t} = -k_1.x(t) - k_2.x(t)$$
$$\frac{d^2x(t)}{d^2t} = -\frac{k_1+k_2}{m}.x(t)$$

(b)La solution de cette équation différentielle est $x(t) = C_1.cos(at) + C_2.sin(at)$ avec $a = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$.

(c) Les conditions initiales sont à $t = 0, x(0) = (M_0 - M_e), v(0) = 0$. Donc,

$$x(0) = C_1.cos(a.0) + C_2.sin(a.0) = M_0 - M_e$$
$$x(0) = C_1 = M_0 - M_e$$

et

$$v(0) = x'(0) = -C_1.sin(a.0) + C_2.cos(a.0) = 0$$
$$v(0) = C_2 = 0$$

Donc la solution de l'équation est :

$$x(t) = (M_0 - M_e).sin(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}.t)$$

L'amplitude est $2|M_0 - M_e|$ car le sinus est compris entre -1 et 1.
La période est $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}}$.