Exercice 17

Une suite rélle u_n converge vers le réel l si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon \implies |u_n - l| < \epsilon \text{ [P1]}$$

Une suite rélle u_n diverge vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_A \implies U_A \geq A \text{ [P2]}$$

Une suite rélle u_n diverge vers $-\infty$ si

$$\forall B \in \mathbb{R} \exists N_B \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_B \implies U_B \leq B \text{ [P3]}$$

Exercice 17.1

Supposons que $l = 2$.
Prenons un $\epsilon > 0$, trouvons un N_ϵ tel que $|u_{N_\epsilon} - 2| < \epsilon$. Par exemple, $N_\epsilon = 4$, car $|u_4 - 2| = |2 - 2| = 0 < \epsilon$.
Maintenant, vérifions [P1] pour $l = 2$. $\forall \epsilon > 0, \forall n > 4, |u_n - 2| < \epsilon$, calculons $u_{n>4} = 2 = u_4$, la propriété [P1] est vérifée pour tous les $n > N_\epsilon$.

Exercice 17.2

- $a = 1$, $\lim_{n \to \infty} u_n = 1$
- $|a| < 1$, $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$
- $a \leq -1$, pas de limite
- $a \geq 1$, $\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty$

Pour le second cas, posons $l = 0$, trouvons un N_ϵ tel que $|u_{N_\epsilon} - 0| < \epsilon$. Par exemple, $N_\epsilon, |a^{N_\epsilon}| < \epsilon$. N_ϵ existe car $|a| < 1$. On a bien $|u_{N_\epsilon} - 0| = |a^{N_\epsilon}| < \epsilon$.
Maintenant, vérifions [P1] pour $l = 0$. $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, |u_{N_\epsilon} - 0| < \epsilon$. Calculons $u_{N_\epsilon+1} = a^{N_\epsilon+1} < a^{N_\epsilon}$, la propriété [P1] est vérifée pour tous les $n > N_\epsilon$.
Même raisonnement pour les autres cas.

Exercice 17.3

La suite diverge. Prenons un A, et calculons N_A tel que $u_{N_A} > A$. Calculons u_{N_A+1}.
$u_{N_A+1} = \frac{(N_A+1)^{N_A+1}}{(N_A+1)!} = \frac{(N_A+1).....(N_A+1).(N_A+1)}{N_A!(N_A+1)} = \frac{(N_A+1).....(N_A+1)}{N_A!}$, Les nombres au numérateur sont toujours plus grand que ceux du numérateur pour u_{N_A}, donc la suite $u_{N_A+1} > u_{N_A} > A$.
La propriété $[P2]$ est vérifiée.

La suite diverge. Prenons un A, et calculons N_A tel que $u_{N_A} > A$. Calculons u_{N_A+1}.
$u_{N_A+1} = \frac{(N_A+1)!}{2^{N_A+1}} = \frac{N_A!(N_A+1)}{2.2.2.....2} = U_{N_A}.\frac{(N_A+1)}{2}$. Donc la suite $u_{N_A+1} > u_{N_A} > A$.
La propriété $[P2]$ est vérifiée.

QED