Rappel de cours

Exercice 1

Exercice 1.1

On a

$$e^A = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k = A^0 + A^1 + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k$$

On a aussi

$$A^p = \begin{bmatrix} \lambda_1^p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^p \end{bmatrix}$$

Donc

$$e^A = \lim_{p\to\infty} A^0 + A^1 + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \ldots + \frac{1}{p!}A^p$$

$$= \lim_{p\to\infty} \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^2 \end{bmatrix} + \ldots + \frac{1}{p!}\begin{bmatrix} \lambda_1^p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^p \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{p\to\infty} \begin{bmatrix} 1+\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_1^2+\ldots+\frac{1}{p!}\lambda_1^p+\ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_2^2+\ldots+\frac{1}{p!}\lambda_2^p+\ldots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n+\frac{1}{2}\lambda_n^2+\ldots+\frac{1}{p!}\lambda_n^p+\ldots \end{bmatrix}$$

Le développement limité de $e^x = x^0 + x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{p!}x^p + \ldots$
Donc

$$e^A = \begin{bmatrix} e_1^\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e_2^\lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & e_n^\lambda \end{bmatrix}$$

Si la matrice A est diagonalisable alors $\exists P$ et $D, A = PDP^{-1}$. Donc on a $A^n = A.A.\ldots.A = PDP^{-1}.PDP^{-1}.\ldots.PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$. Donc

$$e^A = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} PD^kP^{-1} = P. \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} D^k.P^{-1} = P.e^D.P^{-1}$$

On peut sortir les 2 matrices P et P^{-1} de la somme car elles peuvent être vues comme des constantes dans la somme (indépendence par rapport a p).

Exercice 1.2

Si la matrice A est nilpotente d'ordre n, alors $\forall p \geq n, A^p = 0$ Donc

$$e^A = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=0\to n-1} \frac{1}{k!} A^k + \sum_{k=n\to p} \frac{1}{k!} A^k \right) = \sum_{k=0\to n-1} \frac{1}{k!} A^k$$

Soit un polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ de degrés n alors

$$P(A) = a_0A^0 + a_1A^1 + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n = \sum_{k=0\to n} a_kA^k$$

Définissons le polynome P tel que $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{1}{k!}$ donc

$$P(A) = \sum_{k=0\to n} a_k A^k = \sum_{k=0\to n} \frac{1}{k!} A^k = e^A$$

si la matrice A est nilpotente d'ordre $n+1$.

Exercice 1.3

On a $A = D + N$ avec D une matrice diagonale, N une matrice nilpotente et $DN = ND$. Donc

$$e^A = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} (D+N)^k$$

$$e^D e^N = \left(\lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} D^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0\to n-1} \frac{1}{l!} N^l \right)$$

Comme N est nilpotente de rang n on a

$$e^D e^N = \left(\lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} D^k \right) \cdot \left(\lim_{p\to\infty} \sum_{l=0}^{p} \frac{1}{l!} N^l \right) = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} D^k . \sum_{l=0}^{p} \frac{1}{l!} N^l \right)$$

Donc

$$= \lim_{p\to\infty} \left(D^0 \sum_{l=0}^{p} \frac{N^l}{l!} + D^1 \sum_{l=0}^{p} \frac{N^l}{l!} + \frac{1}{2} D^2 \sum_{l=0}^{p} \frac{N^l}{l!} \dots + \frac{1}{p!} D^p \sum_{l=0}^{p} \frac{N^l}{l!} \right)$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{l=0}^{p} D^0 \frac{N^l}{l!} + \sum_{l=0}^{p} D^1 \frac{N^l}{l!} + \sum_{l=0}^{p} \frac{1}{2} D^2 \frac{N^l}{l!} \dots + \sum_{l=0}^{p} \frac{1}{p!} D^p \frac{N^l}{l!} \right)$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{p} \frac{D^k}{k!} \frac{N^l}{l!} \right)$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{m=0}^{p} \sum_{k=0\to m} \frac{D^k}{k!} \frac{N^{m-k}}{(m-k)!} \right)$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{m=0}^{p} \frac{1}{m!} \sum_{k=0\to m} \frac{m!}{k!(m-k)!} D^k N^{m-k} \right)$$

Comme les matrices N et D commuttent,

$$= \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{m=0}^{p} \frac{1}{m!} (D+N)^m \right) = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{m=0}^{p} \frac{1}{m!} A^m \right) = e^A$$

On peux faire le même raisonnement en partant de $e^N e^D$
Pas besoin de D diagonale??

Exercice 1.4

D'après le Théorème de la décomposition de Dunford, toute matrice M peut de décomposer en une somme de deux matrices D et N tel que D soit diagonalisable, N soit nilpotente et les 2 matrices commuttent ($ND = ND$). Donc pour calculer, on trouver les matrices A et B et $e^M = e^{A+B} = e^A e^B$. Comme A est diagonalisable on a $A = PDP^{-1}$. Donc $e^A = Pe^D P^{-1}$. La matrice D est diagonale donc le calcul de e^D est trivial (question 1). COmme B est nilpotente de rang n, on peut faire le calcul de e^B car on a une borne n.

Exercice 2

Exercice 2.1

Exercice 12.1.

Soit a et b deux points de F on a $a = u + k_a\overrightarrow{F}$ et $b = u + k_b\overrightarrow{F}$. La droite $dr(ab) = a + kvect(\overrightarrow{ab})$. on a $vect(\overrightarrow{ab}) = b - a = u + k_b\overrightarrow{F} - (u + k_a\overrightarrow{F}) = (k_b - k_a)\overrightarrow{F}$. Donc la droite $dr(ab) = u + k_a\overrightarrow{F} + k((k_b - k_a)\overrightarrow{F})$ appartient à F.

Soit une droite $dr(ab)$ passant par 2 points distincts a et b de F et contenu dans F, on a pour chaque point c de la droite $c = a + kvect(\overrightarrow{ab})\ inF$. Comme entre deux points quelconque de F il passe une droite on a F, tous les points de F peuvent s'écrire $a + kvect(\overrightarrow{ab})$ Donc F est un sous espace affine.

Exercice 12.2.

Le sous-espace affine engrendré par deux espaces affines est le plus petit espace affine contenant les 2 espaces affines. Comme les 2 droites affines ne sont pas coplanaires donc leur sous-espace affine engendré n'est pas inclus dans un plan affine. La dimension d'un plan affine est 2. Le plus petit espace affine de dimension ¿ 2 est un hyper-plan. Donc le sous espace engrendré par deux droites non coplanaires est un hyper-plan.

Exercice 12.3.

Montrons que si F_1 et F_2 sont deux sous espace affines de E alors $F_1 \subset F2 \implies F_1 \cup F_2$ est un sous-espace affine. On a $F_1 \subset F2 \implies F_1 \cup F_2 = F_2$ et F_2 est un sous espace affine par hypothèse donc $F_1 \cup F_2$ l'est également. Même raisonnement pour $F_2 \subset F1 \implies F_1 \cup F_2$ est un sous-espace affine.

Montrons que si F_1 et F_2 sont deux sous espace affines de E alors si $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace affine alors $F_1 \subset F2$ ou $F_2 \subset F1$. Preuve par l'absurde. Il existe P tel que $P \in F_1 - F_2$ et Q tel que $Q \in F_2 - F_1$. On a $P \in F_1 \in F_1 \cup F_2$ et $Q \in F_2 \in F_1 \cup F_2$. Donc $P - Q \in F_1 \cup F_2$. On peut écrire $P = Q + (P - Q)$ donc $(P - Q) \not\subset F_2$ car sinon P serait dans F_2 et contredirait l'hypothèse $P \in F_1 - F_2$. De même, $Q = P + (Q - P)$ donc $(Q - P) \not\subset F_1$ car sinon Q serait dans F_1 et contredirait l'hypothèse $Q \in F_2 - F_1$. Par conséquent $P - Q \not\subset F_1 \cup F_2$ ce qui contredit notre hypothèse de départ.

Exercice 13.1

Soit a et b deux points de T on a $vect(\overrightarrow{ab}) = b - a = u_1 + k_b\overrightarrow{T} - (u_1 + k_a\overrightarrow{T}) = (k_b - k_a)\overrightarrow{T}$ donc $vect(\overrightarrow{ab}) \in \overrightarrow{T}$

Soit $v \in \overrightarrow{V}$, on a $v_1 + kv \in V \subset T$ et par définition $v_1 \in V \subset T$. Donc $(v_1 + v) - v_1 = v \in \overrightarrow{T}$. Même raisonnement pour $w \in \overrightarrow{W}$, donc $w \in \overrightarrow{T}$.

On peut conclure que $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} + vect(\overrightarrow{ab}) \subset \overrightarrow{T}$

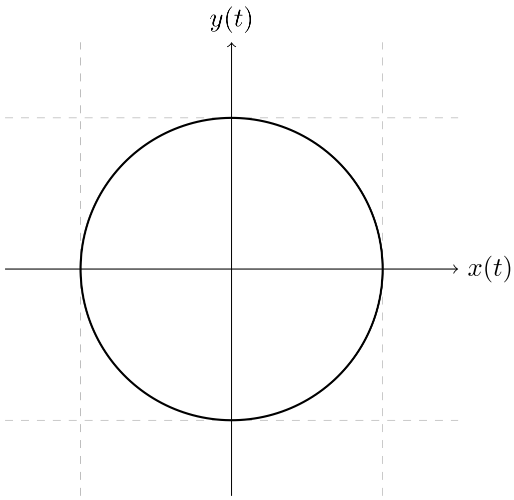
On a soit $V \subset W$ ou $W \subset V$ (voir question précédente). Prenons le cas $W \subset V$, donc $V = v_1 + \overrightarrow{V} \subset v_1 + (\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} + vect(\overrightarrow{ab}))$ et $W = v_1 + \overrightarrow{V} \subset v_1 + (\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} + vect(\overrightarrow{ab}))$ Donc $T = V \cup W \subset v_1 + (\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} + vect(\overrightarrow{ab}))$ et par conséquent $\overrightarrow{T} \subset \overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} + \overrightarrow{ab}$.

On peut conclure que $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} + vect(\overrightarrow{ab})$

Exercice 3

Exercice 3.1

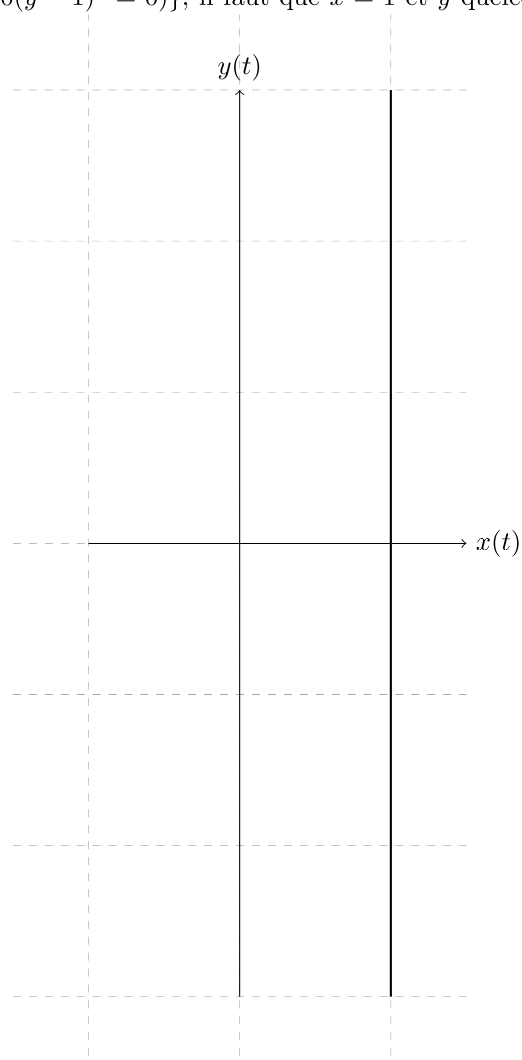
$E = \{(x^2 + y^2 = 1)\}$. C'est l'équation paramétrique du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.



Pas un espace affine (ni une droite, ni un point ni un plan)

Exercice 3.2

$E = \{((x-1)^2 + 0(y-1)^2 = 0)\}$, il faut que $x = 1$ et y quelconque donc E est la droite verticale passant

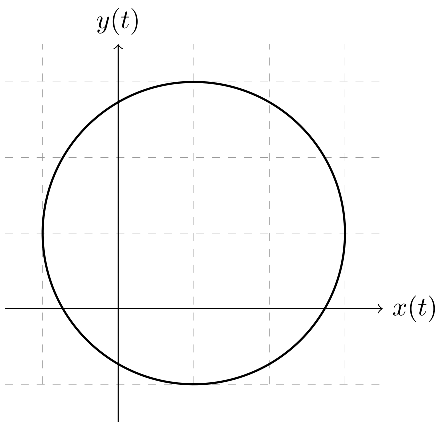


par le point $(1, 0)$.

Espace affine $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + (\mathbb{R}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})$.

Exercice 3.3

$E = \{((x-1)^2 + (y-1)^2 = 4)\}$, C'est l'équation paramétrique du cercle de centre $(1, 1)$ et de rayon 2.



Pas un espace affine (ni une droite, ni un point ni un plan)

Exercice 3.4

$E = \{((x-2)^2 + (y-2)^2 = -1)\}$, pas de solution $E = \emptyset$.

Pas un espace affine (ni une droite, ni un point ni un plan)

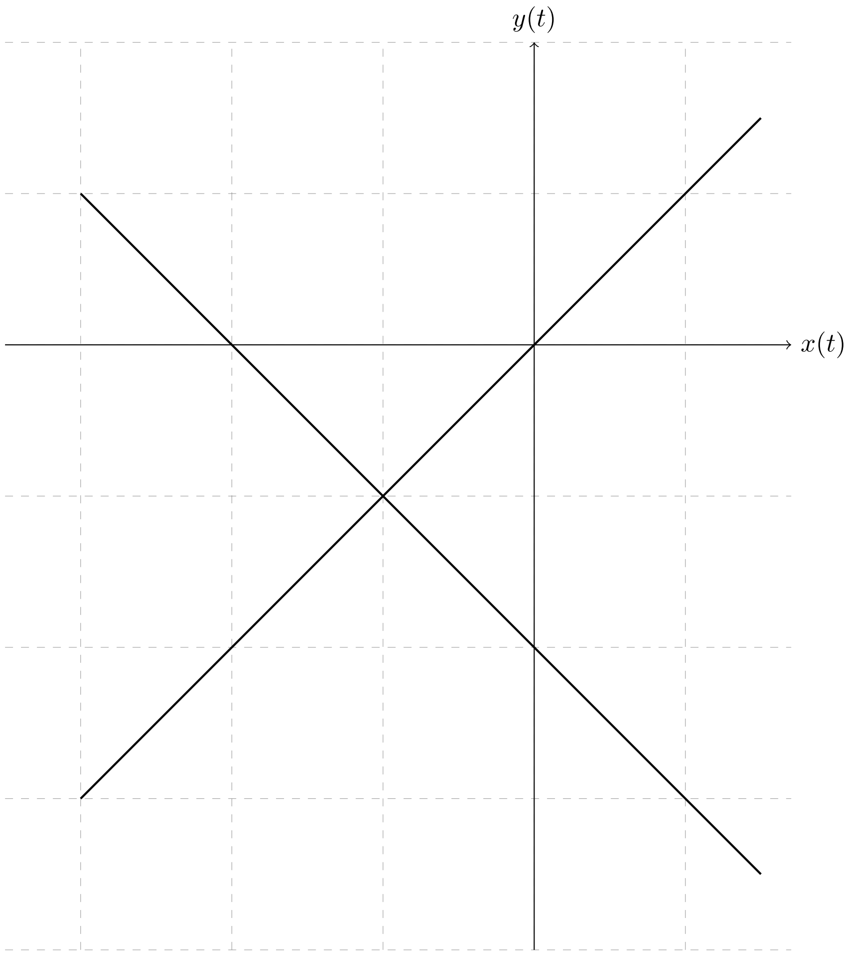
Exercice 3.5

$E = \{((x+1)^2 + (y-1)^2 = 0)\}$, solution est un seul point $(-1, 1)$.

Espace affine $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} + (\mathbb{R}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix})$.

Exercice 3.6

$E = \{(x+1)^2 - (y+1)^2 = 0)\} = \{(x+1)^2 = (y+1)^2\} = \{|x+1| = |y+1|\}$. Première solution $x = y$, seconde solution $y = -2 - x$. Donc 2 droites.



Union de 2 sous-espaces affines:

- $\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} + (\mathbb{R}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix})$.
- $\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} + (\mathbb{R}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix})$

Ce n'est pas un sous espace affine. Car la relation de Chasles n'est pas respect'e si on prend le premier vecteur sur la première droite et le second sur la seconde.