

## Rappel de cours

### Travail

- La composante de la force d'un point  $M$ ,  $\vec{F}(M)$  sur l'axe  $\mathcal{O}_x$  est donnée par le produit scalaire  $f(x) = \vec{F}(M) \cdot \vec{i}$ .
- Le travail d'une force  $\vec{F}$  sur un segment  $\vec{AB}$  est donné par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx$$

- On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point  $A$  au point  $B$  ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point  $A$  et  $B$ .

$$\forall A, B, C, W_{A \rightarrow B} \vec{F} = W_{A \rightarrow C} \vec{F} + W_{C \rightarrow B} \vec{F}$$

- Dans le cas où le chemin est rectiligne, si une force est conservatrice alors l'énergie potentielle associée à la force  $\vec{F}$  est notée  $E_p(x)$  est définie par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{x} = E_p(x_b) - E_p(x_a)$$

- Le travail du poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  sur le segment  $\vec{AB}$  est  $W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mg(z_b - z_a) = -mgh$ .
- Le travail de la force de rappel élastique d'un ressort de raideur  $k$ ,  $\vec{F} = -k.x\vec{i}$  est  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -\frac{1}{2}k(x_a^2 - x_b^2)$ .

### Énergie

- L'énergie mécanique d'un système  $E_m = E_c + E_p$  avec  $E_c$  l'énergie cinétique qui dépend de la masse et de la norme de la vitesse du système physique étudié et de l'énergie potentielle  $E_p$  qui correspond aux forces exercées sur le système.
- L'énergie cinétique du système  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
- L'énergie potentielle qui correspond à l'ensemble des forces conservatives qui s'exercent sur le système,  $E_p(B) - E_p(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{conservatives})$
- $E_m(B) - E_m(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{non conservatives})$

### Puissance

- La puissance  $P$  représente l'énergie transférée uniformément (ie. le travail) pendant une unité de temps,  $P = \frac{W}{\Delta t}$ .
- $1 W = 1 J.s^{-1} = 1 N.m.s^{-1} = 1 kg.m^2.s^{-3}$

### Coordonnées polaires

Polaire vers cartésienne	Cartésienne vers polaire
$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$

- le vecteur dans le repère  $(\vec{i}, \vec{j})$  est  $\vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$  et  $\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$
- Le vecteur position d'un point est  $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{u}_\rho(t)$

- Le vecteur vitesse est  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$
- Le vecteur accélération est  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho}(t) - \rho\dot{\theta}^2(t))\vec{u}_\rho + (\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t))\vec{u}_\theta = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$

Posons  $\vec{u}_T = \vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_N = \vec{u}_\rho$ . Donc  $\vec{u}_T$  est un vecteur tangent à la trajectoire du point et  $\vec{u}_N$  est un vecteur normal à la trajectoire du point dirigé vers le centre du rayon de courbure.

Pour une trajectoire sur un cercle de rayon  $R$ . on a:

- $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_T = v\vec{u}_T$
- $\vec{a} = R\dot{\theta}^2\vec{u}_N + R\ddot{\theta}\vec{u}_T = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}\vec{u}_T$

Pour une trajectoire sur un cercle, on définit l'abscisse curviligne  $s(t) = R\theta(t)$ . On a

- $\vec{v} = \frac{ds}{dt}$
- $\vec{a} = \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{u}_N + \ddot{s}\vec{u}_T$
- La courbure d'une trajectoire autour d'un point  $A$  est  $\mathcal{C} = \frac{d\theta}{ds}$ .
- Le rayon de courbure d'une trajectoire autour d'un point  $A$  est  $\mathcal{C} = \frac{1}{C} = \frac{ds}{d\theta}$ .

## Exo I

### I.1.a

$$\begin{cases} x = 1 \cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm} \\ y = 1 \sin(30) = \frac{1}{2} \text{ cm} \end{cases}$$

### I.1.b

$$\begin{cases} x = 20 \cos(-30) = 20 \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ mm} \\ y = 20 \sin(-30) = -20 \frac{1}{2} = -10 \text{ mm} \end{cases}$$

### I.1.c

$$\begin{cases} x = 8 \cos(120) = -8 \frac{1}{2} = -4 \text{ mm} \\ y = 8 \sin(120) = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ mm} \end{cases}$$

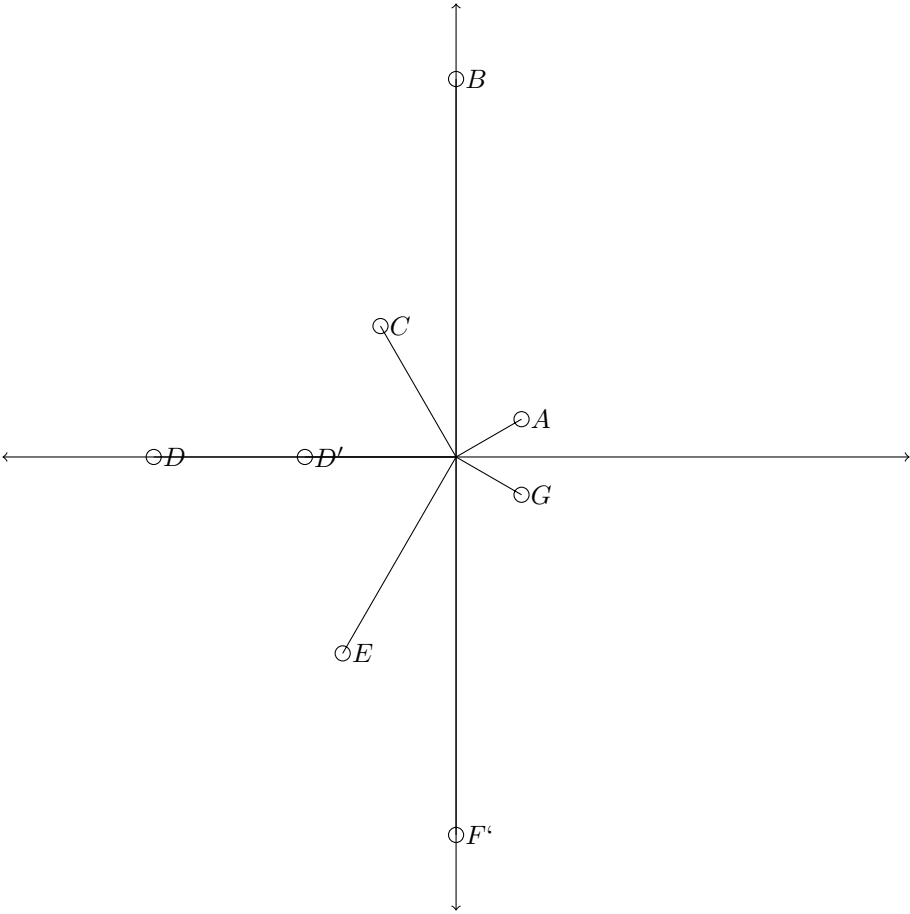
### I.1.d

$$\begin{cases} x = 3 \cos(120) = -3 \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \text{ cm} \\ y = 3 \sin(120) = -3 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm} \end{cases}$$

### I.2.a

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \text{ cm} \\ \theta = \arctan(\frac{5}{3}) = 90 - \arctan(\frac{3}{5}) = 90 - 31 = 59^\circ \end{cases}$$

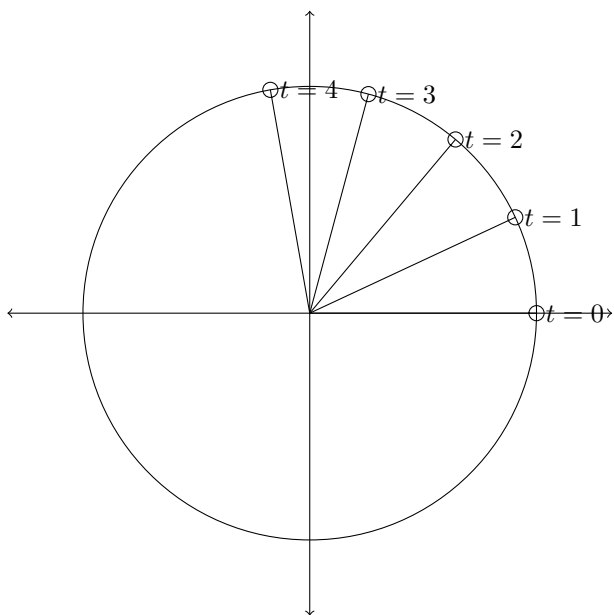
Exo II



Exo III

III.1

$$\rho(t) = \rho_0, \theta = \omega t$$



Dérivées de  $\rho$  et  $\theta$

$$\dot{\rho}(t) = 0, \dot{\theta}(t) = \omega$$

La vitesse en coordonnées polaires

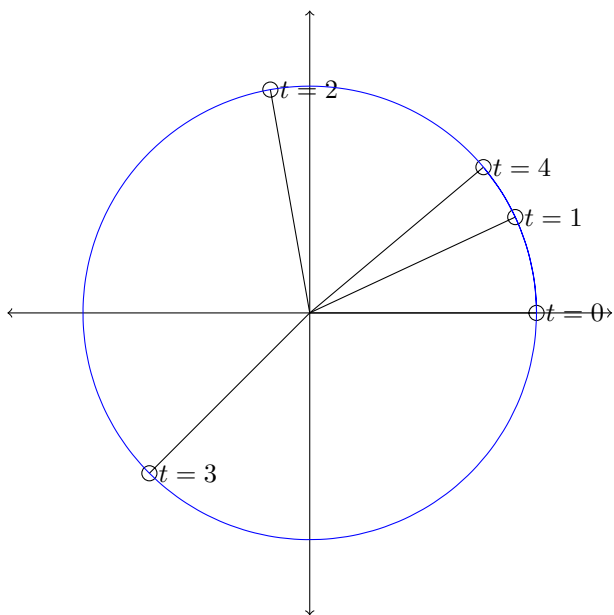
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = 0\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = 0\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta = 0(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \rho_0\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \rho_0\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

### III.2

$$\rho(t) = \rho_0, \theta = \alpha t^2$$



Dérivées de  $\rho$  et  $\theta$

$$\dot{\rho}(t) = 0, \dot{\theta}(t) = 2\alpha t$$

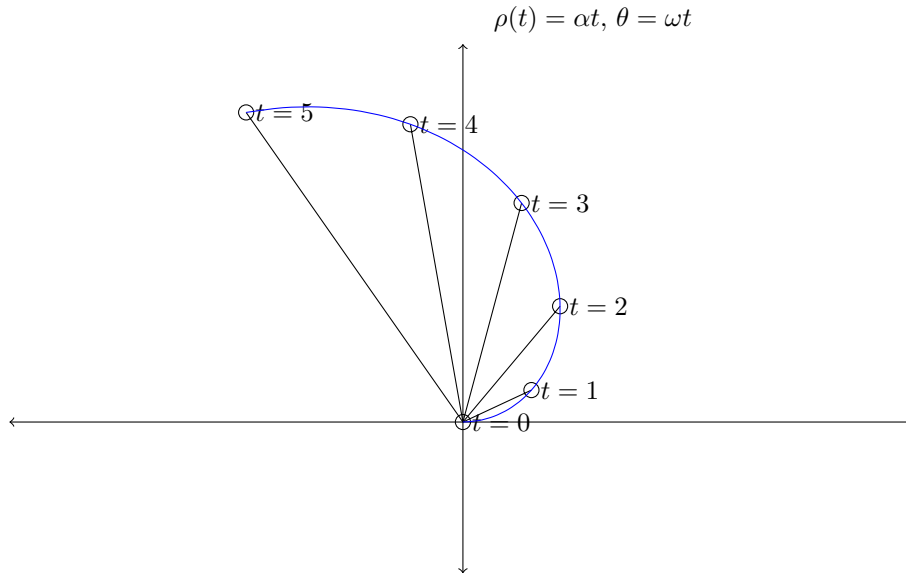
La vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = 0\vec{u}_\rho + \rho_0 2\alpha t \vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = 0\vec{u}_\rho + \rho_0 2\alpha t \vec{u}_\theta = 0(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + \rho_0 2\alpha t (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = \rho_0 2\alpha t (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$

### III.3



Dérivées de  $\rho$  et  $\theta$

$$\dot{\rho}(t) = \alpha, \dot{\theta}(t) = \omega$$

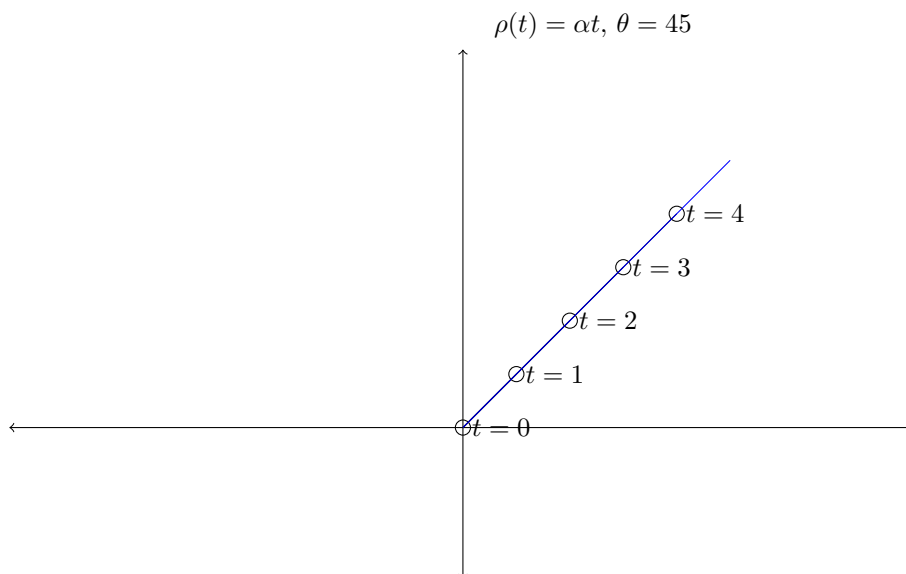
La vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho + \alpha t \omega \vec{u}_\theta$$

La vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}_\rho + \rho_0 \omega \vec{u}_\theta = \alpha(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + \alpha t \omega (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = (\alpha \cos \theta - \alpha t \omega \sin \theta) \vec{i} + ((\alpha \sin \theta + \alpha t \omega \cos \theta)) \vec{j}$$

### III.4



Dérivées de  $\rho$  et  $\theta$

$$\dot{\rho}(t) = \alpha, \dot{\theta}(t) = 0$$

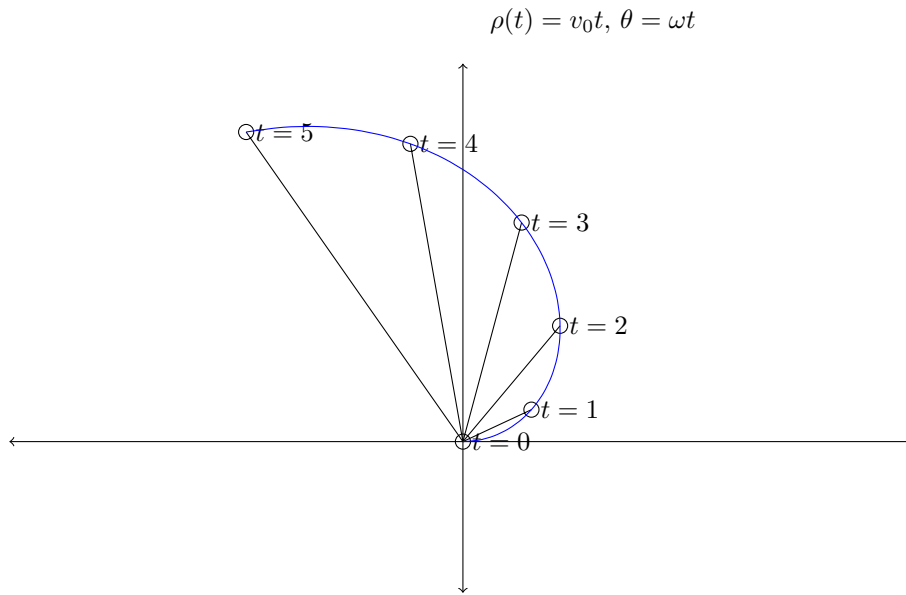
La vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho + \alpha \cdot 0 \cdot \vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho$$

La vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}_\rho = \alpha(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = \alpha\cos\theta\vec{i} + \alpha\sin\theta\vec{j}$$

### III.5



Dérivées de  $\rho$  et  $\theta$

$$\dot{\rho}(t) = v_0, \dot{\theta}(t) = \omega$$

La vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = v_0\vec{u}_\rho + \omega v_0 t \vec{u}_\theta$$

Avec  $v_0 = 1$  et  $\omega = 25$ , on a  $\theta(t) = \omega t$  donc  $t = \theta(t)/\omega$ . Donc

$\theta$	$t$	$\vec{v}(t)$
$90^\circ$	$90/25$	$\vec{v}(90/25) = \vec{u}_\rho + 25 \cdot 1 \cdot \frac{90}{25} \vec{u}_\theta = \vec{u}_\rho + 90\vec{u}_\theta$
$180^\circ$	$180/25$	$\vec{v}(180/25) = \vec{u}_\rho + 180\vec{u}_\theta$
$-90^\circ$	$0$	$\vec{v}(-90/25) = \vec{u}_\rho - 90\vec{u}_\theta$

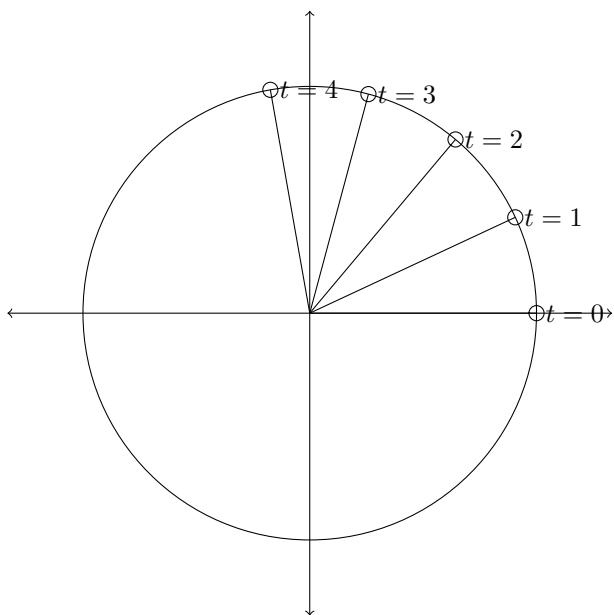
La vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}_\rho + \rho_0\omega\vec{u}_\theta = \alpha(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \alpha t\omega(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = (\alpha\cos\theta - \alpha t\omega\sin\theta)\vec{i} + ((\alpha\sin\theta + \alpha t\omega\cos\theta))\vec{j}$$

### Exo IV

#### IV.1

$$\rho(t) = \rho_0, \theta(t) = \omega t$$



Dérivées de  $\rho$  et  $\theta$

$$\dot{\rho}(t) = 0, \dot{\theta}(t) = \omega$$

Dérivées de  $\dot{\rho}$  et  $\dot{\theta}$

$$\ddot{\rho}(t) = 0, \ddot{\theta}(t) = 0$$

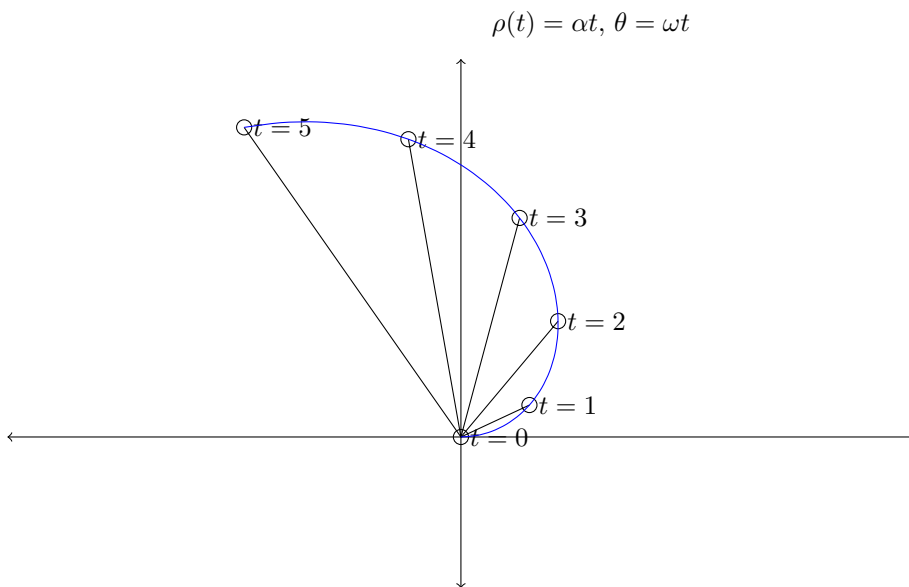
La vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = 0\vec{u}_\rho + \omega\vec{u}_\theta$$

L'accélération en coordonnées polaires

$$\vec{a} = (\ddot{\rho}(t) - \rho\dot{\theta}^2(t))\vec{u}_\rho + (\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t))\vec{u}_\theta = (0 - \rho_0\omega^2)\vec{u}_\rho + (\rho_0.0 + 2.0.\omega)\vec{u}_\theta = -\rho_0\omega^2\vec{u}_\rho$$

## IV.2



Dérivées de  $\rho$  et  $\theta$

$$\dot{\rho}(t) = \alpha, \dot{\theta}(t) = \omega$$

Dérivées de  $\dot{\rho}$  et  $\dot{\theta}$

$$\ddot{\rho}(t) = 0, \ddot{\theta}(t) = 0$$

La vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \alpha\vec{u}_\rho + \alpha t\omega\vec{u}_\theta$$

L'accélération en coordonnées polaires

$$\vec{a} = (\ddot{\rho}(t) - \rho\dot{\theta}^2(t))\vec{u}_\rho + (\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t))\vec{u}_\theta = (0 - \rho_0\omega^2)\vec{u}_\rho + (\rho_0.0 + 2.\alpha.\omega)\vec{u}_\theta = -\rho_0\omega^2\vec{u}_\rho + 22.\alpha.\omega\vec{u}_\theta$$

## Exo V

### V.1

$$\rho(t) = \rho_0, \theta(t) = \omega t$$

Voir courbe Exo III.3

Le point se déplace sur un cercle de rayon  $\rho_0$ . Donc la distance parcourue par le point par rapport à l'axe  $\mathcal{O}_x$  est  $s(t) = \rho_0\theta(t) = \rho_0\omega t$ .

Le repère intrinsèque est  $\Omega$  à l'intersection entre le cercle et l'axe  $\mathcal{O}_x$ . Le sens de déplacement est le sens anti-horaire (sens de déplacement du point).

$$\text{Le rayon de courbure } R = \frac{ds}{d\theta} = \frac{s(t)dt}{\theta(t)dt} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{\theta(t_2)-\theta(t_1)} = \frac{\rho_0\theta(t_2)-\rho_0\theta(t_1)}{\theta(t_2)-\theta(t_1)} = \rho_0.$$

La vitesse tangentielle pour une trajectoire sur un cercle de rayon  $R$  est  $R\dot{\theta}$ . Donc  $\vec{v} = \rho_0\omega$ .

L'accélération tangentielle pour un cercle de rayon  $R$  est  $R\ddot{\theta}$ . Donc l'accélération tangentielle est égale à 0.

L'accélération normale pour un cercle de rayon  $R$  est  $R\dot{\theta}^2$ . Donc l'accélération normale est égale à  $\rho_0\omega^2$ .

L'accélération en coordonnées polaires est  $\vec{a} = 0\vec{u}_T + \rho_0\omega^2\vec{u}_N$ .

### V.2

$$\rho(t) = \rho_0, \theta(t) = \alpha t^2$$

Voir courbe Exo III.4

Le point se déplace sur un cercle de rayon  $\rho_0$ . Donc la distance parcourue par le point par rapport à l'axe  $\mathcal{O}_x$  est  $s(t) = \rho_0\theta(t) = \rho_0\alpha t^2$ .

Le repère intrinsèque est  $\Omega$  à l'intersection entre le cercle et l'axe  $\mathcal{O}_x$ . Le sens de déplacement est le sens anti-horaire (sens de déplacement du point).

$$\text{Le rayon de courbure } R = \frac{ds}{d\theta} = \frac{s(t)dt}{\theta(t)dt} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{\theta(t_2)-\theta(t_1)} = \frac{\rho_0\theta(t_2)-\rho_0\theta(t_1)}{\theta(t_2)-\theta(t_1)} = \rho_0.$$

La vitesse tangentielle pour une trajectoire sur un cercle de rayon  $R$  est  $R\dot{\theta}$ . Donc  $\vec{v} = 2\rho_0\alpha t$ .

L'accélération tangentielle pour un cercle de rayon  $R$  est  $R\ddot{\theta}$ . Donc l'accélération tangentielle est égale à  $2\rho_0\alpha$ .

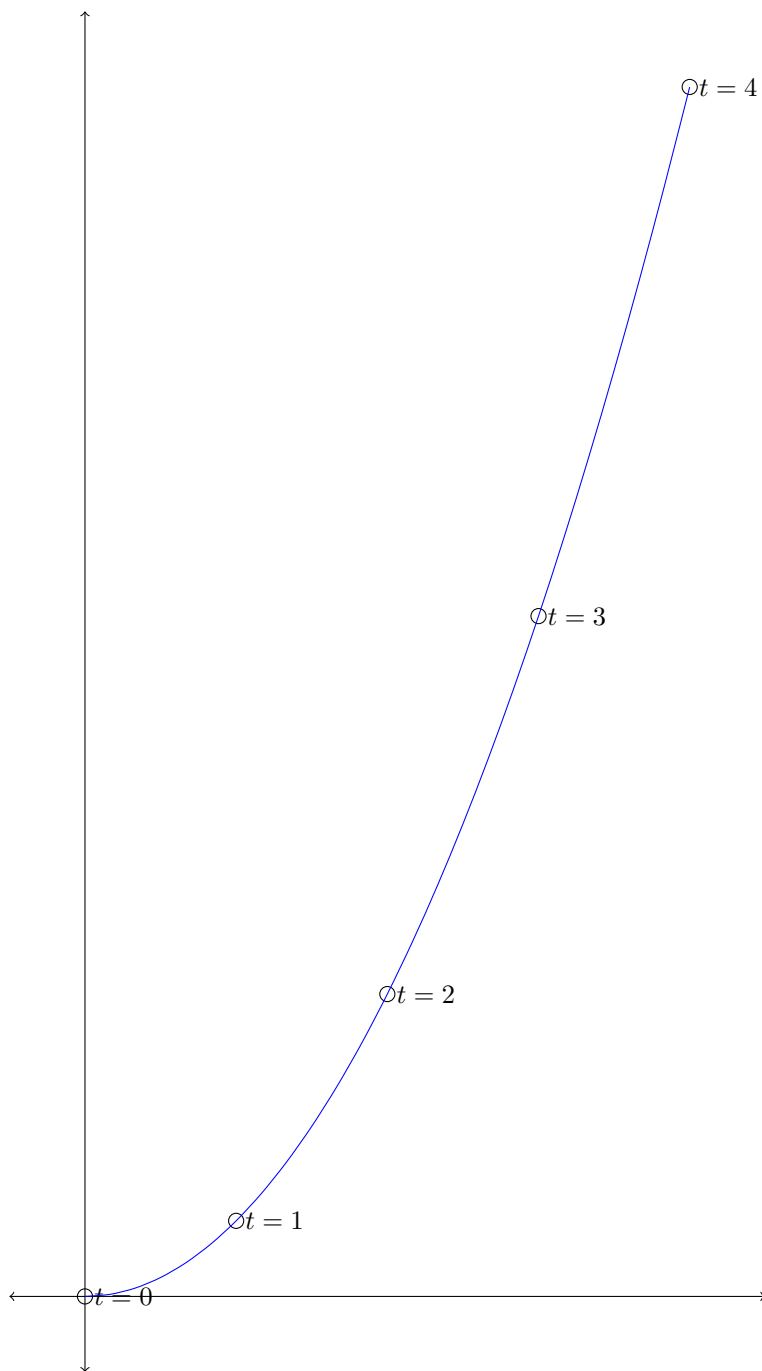
L'accélération normale pour un cercle de rayon  $R$  est  $R\dot{\theta}^2$ . Donc l'accélération normale est égale à  $4\rho_0\omega^2 t^2$ .

L'accélération en coordonnées polaires est  $\vec{a} = 2\rho_0\alpha\vec{u}_T + 4\rho_0\omega^2 t^2\vec{u}_N$ .



### V.3

$$y = \frac{1}{2}\alpha x^2, \quad x = v_0 t$$



Le déplacement du point sur la trajectoire est  $x\vec{i} + y\vec{j}$  dans le repère cartésien. Donc  $v_0 t\vec{i} + \frac{1}{2}\alpha x^2\vec{j} = v_0 t\vec{i} + \frac{1}{2}\alpha v_0^2 t^2\vec{j}$ . La vitesse

$$\vec{v}(t) = \frac{v_0 t\vec{i} + \frac{1}{2}\alpha v_0^2 t^2\vec{j}}{dt} = v_0\vec{i} + \alpha v_0^2 t\vec{j}$$

On a  $\vec{v}(0) = v_0\vec{i}$ .

On a  $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{v_0\vec{i} + \alpha v_0^2 t \vec{j}}{dt} = 0\vec{i} + \alpha v_0^2 \vec{j} = \alpha v_0^2 \vec{j}$ .

On a  $\vec{a}(0) = \alpha v_0^2 \vec{j}$ .

On a  $\vec{a} = v\vec{u}_T + \frac{v^2(0)}{R}\vec{u}_N$ . En  $x = 0$ , on a  $\vec{a} = \alpha v_0^2 \vec{j}$  et  $\vec{u}_N = \vec{j}$ . Donc, le rayon de courbure de la parabole en  $x = 0$  est  $\frac{v^2(0)}{R} = \alpha v_0^2$ . Ce qui fait  $R = \frac{1}{\alpha}$ .

Le rayon de courbure en  $x = 0$  ne dépend pas de  $v_0$  car la vitesse  $\vec{v}(0)$  est normale à l'accélération  $\vec{a}(0)$ .

## Exo VI

### VI.1

$$F_x = -2x, F_y = 2y$$

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_x}{dy} = \frac{d(-2x)}{dy} = 0 \\ \frac{dF_y}{dx} = \frac{d(2y)}{dx} = 0 \end{cases}$$

La force est conservative. Calcul de l'énergie potentielle  $E_p$  dérivée de la force. Il faut trouver  $E_p(x, y)$  tel que :

$$\begin{cases} F_x = -2x = -\frac{dE_p(x, y)}{dx} \\ F_y = 2y = -\frac{dE_p(x, y)}{dy} \end{cases}$$

Intégration de la première équation:  $E_p(x, y) = \int -F_x dx = \int 2x dx = x^2 + f(y)$ .  
Identification de la fonction  $f(y)$ .

$$2y = -\frac{dE_p(x, y)}{dy} = -\frac{d(x^2 + f(y))}{dy} = -f'(y)$$

Donc  $f(y) = -y^2$ .

L'énergie potentielle dérivée est donc  $E_p = x^2 - y^2$ .

### VI.2

$$F_x = -2y, F_y = -2x$$

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_x}{dy} = \frac{d(-2y)}{dy} = -2 \\ \frac{dF_y}{dx} = \frac{d(-2x)}{dx} = -2 \end{cases}$$

La force est conservative. Calcul de l'énergie potentielle  $E_p$  dérivée de la force. Il faut trouver  $E_p(x, y)$  tel que :

$$\begin{cases} F_x = -2y = -\frac{dE_p(x, y)}{dx} \\ F_y = -2x = -\frac{dE_p(x, y)}{dy} \end{cases}$$

Intégration de la première équation:  $E_p(x, y) = \int -F_x dx = \int 2y dx = 2yx + f(y)$ .  
Identification de la fonction  $f(y)$ .

$$2x = \frac{dE_p(x, y)}{dy} = \frac{d(2yx + f(y))}{dy} = 2x + f'(y)$$

Donc  $f'(y) = 0$  et  $f(y) = C^{ste}$ .

L'énergie potentielle dérivée est donc  $E_p = 2yx + C^{ste}$ .

### VI.3

$$F_\rho = \sin \theta, F_\theta = \cos \theta$$

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_\rho}{d\theta} = \frac{d(\sin \theta)}{d\theta} = \cos \theta \\ \frac{d(\rho F_\theta)}{d\rho} = \frac{d(\rho \cos \theta)}{d\rho} = \cos \theta \end{cases}$$

La force est conservative. Calcul de l'énergie potentielle  $E_p$  dérivée de la force. Il faut trouver  $E_p(\rho, \theta)$  tel que :

$$\begin{cases} F_\rho = \sin \theta = -\frac{dE_p(\rho, \theta)}{d\rho} \\ \rho F_\theta = \rho \cos \theta = -\frac{dE_p(\rho, \theta)}{d\theta} \end{cases}$$

Intégration de la première équation:  $E_p(\rho, \theta) = -\int F_\rho d\rho = -\int \sin \theta d\rho = -\rho \sin \theta + f(\theta)$ .  
Identification de la fonction  $f(\theta)$ .

$$\rho \cos \theta = -\frac{dE_p(\rho, \theta)}{d\theta} = -\frac{d(-\rho \sin \theta + f(\theta))}{d\theta} = \rho \cos \theta + f'(\theta)$$

Donc  $f'(\theta) = 0$  et  $f(\theta) = C^{ste}$ .

L'énergie potentielle dérivée est donc  $E_p = \rho \cos \theta + C^{ste}$ .

### VI.4

$$F_\rho = \sin \theta, F_\theta = -\cos \theta$$

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_\rho}{d\theta} = \frac{d(\sin \theta)}{d\theta} = \cos \theta \\ \frac{d(\rho F_\theta)}{d\rho} = \frac{d(-\rho \cos \theta)}{d\rho} = -\cos \theta \end{cases}$$

La force n'est pas conservative. Donc pas une énergie potentielle.

### VI.5

$$F_\rho = \rho \sin \theta, F_\theta = \rho \cos \theta$$

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_\rho}{d\theta} = \frac{d(\rho \sin \theta)}{d\theta} = \rho \cos \theta \\ \frac{d(\rho F_\theta)}{d\rho} = \frac{d(\rho^2 \cos \theta)}{d\rho} = 2\rho \cos \theta \end{cases}$$

La force n'est pas conservative. Donc pas une énergie potentielle.

### VI.6

$$F_\rho = 2\rho \sin \theta, F_\theta = -\rho \cos \theta$$

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_\rho}{d\theta} = \frac{d(2\rho \sin \theta)}{d\theta} = 2\rho \cos \theta \\ \frac{d(\rho F_\theta)}{d\rho} = \frac{d(-\rho^2 \cos \theta)}{d\rho} = -2\rho \cos \theta \end{cases}$$

La force n'est pas conservative. Donc pas une énergie potentielle.

## VI.7

$$F_\rho = 2\rho \sin \theta, F_\theta = \rho \cos \theta$$

Dans un premier temps, on vérifie que la force est conservative en appliquant le critère de Schwarz dans le plan:

$$\begin{cases} \frac{dF_\rho}{d\theta} = \frac{d(2\rho \sin \theta)}{d\theta} = 2\rho \cos \theta \\ \frac{d(\rho F_\theta)}{d\rho} = \frac{d(\rho^2 \cos \theta)}{d\rho} = 2\rho \cos \theta \end{cases}$$

La force est conservative. Calcul de l'énergie potentielle  $E_p$  dérivée de la force. Il faut trouver  $E_p(x, y)$  tel que :

$$\begin{cases} F_\rho = 2\rho \sin \theta = -\frac{dE_p(\rho, \theta)}{d\rho} \\ \rho F_\theta = \rho \cos \theta = -\frac{dE_p(\rho, \theta)}{d\theta} \end{cases}$$

Intégration de la première équation:  $E_p(\rho, \theta) = -\int F_\rho d\rho = -\int 2\rho \sin \theta d\rho = \rho \cos \theta + f(\theta)$ .  
Identification de la fonction  $f(\theta)$ .

$$\rho \cos \theta = -\frac{dE_p(\rho, \theta)}{d\theta} = -\frac{d(-\rho \sin \theta + f(\theta))}{d\theta} = \rho \cos \theta + f'(\theta)$$

Donc  $f'(\theta) = 0$  et  $f(\theta) = C^{ste}$ .

L'énergie potentielle dérivée est donc  $E_p = \rho \cos \theta + C^{ste}$ .