

Rappel de cours

Definition 1. Bla bla

Exercice 1**Exercice 1.1**

Les 2 premières colonnes de la matrice $M = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ sont linéairement indépendantes. Il s'en suit que l'application linéaire de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^2 associée est surjective. C'est donc un sous-espace affine de \mathbb{R}^3 .

Calcul de $\text{Ker}(M)$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -9\lambda_2 + 15\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{2}{5}\lambda_2 \\ \lambda_3 = \frac{3}{5}\lambda_2 \end{cases}$$

Donc $\text{Ker}(M) = \{(-2, 5, 3)\}$ donc $\dim \text{Ker}(M) = 1$

Il faut trouver une solution particulière

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 6\lambda_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \\ -9\lambda_2 + 15\lambda_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \\ 3\lambda_3 = 1 + \frac{9}{5}\lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lambda_3 = 1 + \frac{9}{5}\lambda_2 \\ \lambda_1 = -\frac{2}{5}\lambda_2 \end{cases}$$

Une solution particulière est $\{0, 0, \frac{1}{3}\}$.

La nature est une droite affine.

L'équation paramétrique est donc

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{vmatrix} + (\mathbb{R} \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix})$$

Exercice 1.2

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $f(x, y, z) = M \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ et il y a une solution si $\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$

Exercice 1.3

Nommons $H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + 3z = 1\}$ et $H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 4y - 6z = 2\}$. Chaque équation du sous-système admet une solution (ie. F). Ceux sont donc des sous espaces affines. Il reste à montrer que ceux sont des plans. On peut dire que $F = H_1 \cup H_2$ car c'est la solution du système.

Exercice 2**Exercice 2.1**

Soit $M_1 = \begin{vmatrix} -1 & \lambda & -3 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix}$. Calculons $\text{Ker}(M_1)$.

$$\begin{cases} -x + \lambda y - 3z = 0 \\ x - 3y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + \lambda y - 3z = 0 \\ (\lambda - 3)y + (-3 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3z + 3y \\ 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda = 3$, on a $\text{Ker}(M_1) = \{(-3, 0, 1), (3, 1, 0)\}$, ce n'est pas une droite affine mais un plan affine car $\dim \text{Ker}(M_1) = 2$. Si $\lambda \neq 3$, on a $\text{Ker}(M_1) = \{(-\lambda - 3, -1, 1)\}$.

Soit $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & -2 \end{vmatrix}$. Calculons $\text{Ker}(M_2)$.

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ \lambda x - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -z \\ \lambda x = 2z \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$, $\text{Ker}(M_2) = \{(1, 0, 0)\}$. Si $\lambda \neq 0$, $\text{Ker}(M_2) = \{(\frac{2}{\lambda}, -1, 1)\}$

Exercice 2.2

Solution particulière de M_1 quand $\lambda \neq 3$

$$\begin{cases} -x + \lambda y - 3z = \lambda - 1 \\ x - 3y + \lambda z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + \lambda y - 3z = \lambda - 1 \\ (\lambda - 3)y + (\lambda - 3)z = (\lambda - 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - (\lambda + 3)z \\ y = 1 - z \end{cases}$$

Les points $A_1 = (1 - (\lambda + 3)z, 1 - z, z)$. Donc, on a la droite affine $(1 - (\lambda + 3)z, 1 - z, z) + \mathbb{R}(-\lambda - 3, -1, 1)$

Solution particulière de M_2 quand $\lambda = 0$

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

Les points $A_2 = (x, 2, 0)$. Donc, on a la droite affine $(x, 2, 0) + \mathbb{R}(1, 0, 0)$

Solution particulière de M_2 quand $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} y + z = -\lambda + 2 \\ \lambda x - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\lambda + 2 - z \\ x = \frac{2}{\lambda}z \end{cases}$$

Les points $A_2 = (\frac{2}{\lambda}z, -\lambda + 2 - z, z)$. Donc, on a la droite affine $(\frac{2}{\lambda}z, -\lambda + 2 - z, z) + \mathbb{R}(\frac{2}{\lambda}, -1, 1)$

Exercice 2.3

Pour M_1 on a $\lambda \neq 3$. Premier cas $\lambda = 0$, on a donc 2 coefficients directeur de droites affines $(-3, -1, 1)$ pour M_1 et $(-1, 0, 0)$ pour M_2 . Les 2 droites ne sont pas parallèles (car leurs coefficients directeurs ne peuvent pas être égaux), donc non confondues aussi. Elles sont donc sécantes.

Second cas $\lambda \neq 0$, on a donc 2 coefficients directeur de droites affines $(-\lambda - 3, -1, 1)$ pour M_1 et $(\frac{2}{\lambda}, -1, 1)$ pour M_2 . Pour que les droites soient parallèles il faut que $-\lambda - 3 = \frac{2}{\lambda}$. Donc trouver les solutions de l'équation $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, soit $\lambda = -2$ ou $\lambda = -1$. Pour que les droites soient confondues, il faut également que leurs points soient identiques, pour les valeurs de λ . Quand $\lambda = 1$, on a $A_1 = (-3z, 1 - z, z)$ et $A_2 = (2z, 1, z)$, il existe un point commun quand $z = 0$. C'est le point $A = (0, 1, 0)$. Quand $\lambda = 2$, on a $A_1 = (1 - 5z, -1, z)$ et $A_2 = (z, 0, z)$. Il n'existe pas de point commun (à cause de y).

Pour résumer:

- $\lambda = 0$, droites sécantes
- $\lambda = 1$, et point $(0, 1, 0)$, droites confondues
- $\lambda = 1$, et point non $(0, 1, 0)$, droites parallèles
- $\lambda = 2$, droites parallèles
- $\lambda \neq 3$, droites sécantes

Exercice 5

Exercice 5.1

Le plan passe par l'origine donc Quand $x = y = z = 0$, il faut que l'équation soit vraie. Donc le terme de gauche doit être 0. Il faut donc

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b = -c \end{cases}$$

Donc $x - y + z = 0$ est une équation du plan passant par l'origine et de vecteurs $(1, 2, 1)$ et $(0, 1, 1)$.

Exercice 5.2

Plan parallèle donc il doit vérifier l'équation $kx - ky + kz = b$. Il passe par le point $(0, 0, 1)$ donc $k = b$. Ce qui fait que un plan d'équation $kx - ky + kz = k$

Son équation paramétrique

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Exercice 5.3

Droite passant par le point $(1, 0, 0)$ et dirigée par le vecteur $(1, 0, 1)$. Équation paramétrique

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Donc son équation est

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 + 0t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Intersection est donc

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \\ kx - ky + kz = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Le point d'intersection est $(1, 0, 0)$.