

Rappel de cours

Definition 1. Bla bla

Exercice 1**Exercice 1.a**

Soit D une droite vectoriel, $D = \{M | \overrightarrow{OM} = \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ et D' une demi-droite fermée (ou ouverte) d'origine A' , $D' = \{M' | \overrightarrow{A'M'} = \lambda' \vec{u}, \lambda' \in \mathbb{R}^+\}$.

Soit A le point de la droite D tel que $\overrightarrow{F(\overrightarrow{OA})} = \overrightarrow{OA'}$, et les 2 points M_1 et M_2 tel que le point A soit au milieu du segment M_1M_2 . Donc $\overrightarrow{AM_1} = -\overrightarrow{AM_2}$. Si l'application linéaire F existe alors on a $F(\overrightarrow{AM_1}) = F(-\overrightarrow{AM_2}) = -F(\overrightarrow{AM_2})$.

Soit le point M'_2 tel que $F(\overrightarrow{AM_2}) = \overrightarrow{A'M'_2}$. Il existe λ'_2 tel que $\overrightarrow{A'M'_2} = \lambda'_2 \vec{u}$, $\lambda'_2 \in \mathbb{R}^+$. Il n'existe pas de λ_1 positif tel que $\overrightarrow{A'M_1} = \lambda'_1 \vec{u}$. Ceci contredit l'existence de l'application linéaire.

Exercice 1.b

Si l'application linéaire F existe alors $F(c\vec{O}) = cF(\vec{O})$, mais par définition de O on a $c\vec{O} = \vec{O}$ donc

$$F(c\vec{O}) = F(\vec{O}) = cF(\vec{O})$$

Donc $F(\vec{O}) = \vec{O}$ car c est différent de 0. Ceci contredit l'hypothèse que l'image de l'application F est privée de l'origine O .

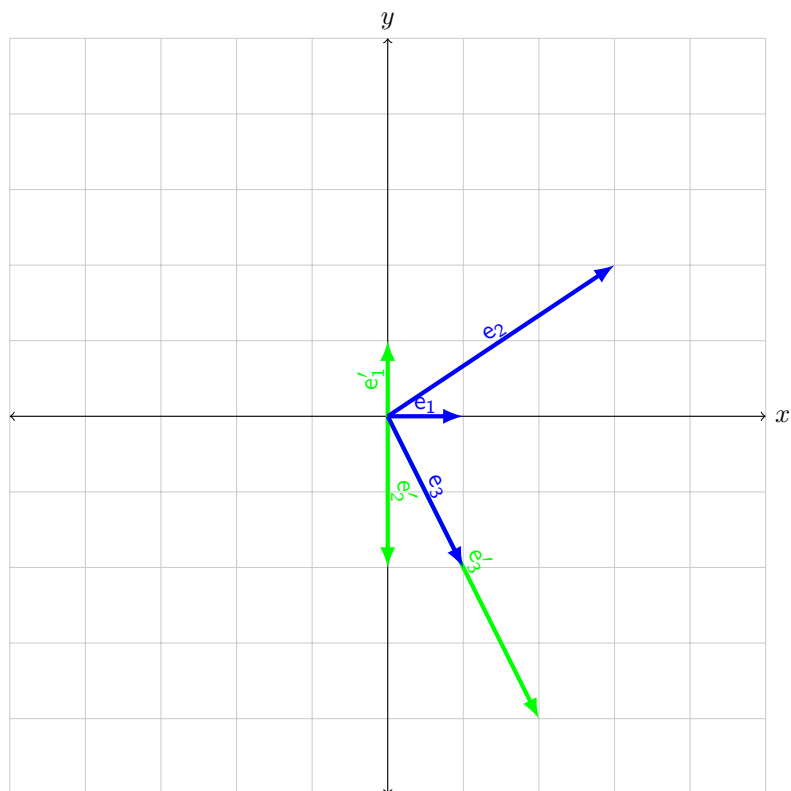
Exercice 1.c

Soit l'application $F : \mathbb{R}^2 \setminus O \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $F(x, y) = x - y$. Montrons que l'application F est linéaire.

$$F(c(x, y)) = F((cx, cy)) = cx - cy = c(x - y) = cF((x, y))$$

et

$$F(A_1) + F(A_2) = F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = F((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = F(A_1 + A_2)$$

Exercice 2**Exercice 2.a**

$F(e_3) = e'_3$ et les vecteurs e_3 et e'_3 sont colinéaires. mais pas les vecteurs e_1 et e'_1 donc, il n'existe pas d'application linéaire.

Exercice 2.b

$$\left\{ \begin{array}{l} (1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} = (0,0,0) \\ (0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} = (0,0,1) \\ (0,0,1) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} = (1,0,0) \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{11} = 0 \\ m_{21} = 0 \\ m_{31} = 0 \\ m_{12} = 0 \\ m_{22} = 0 \\ m_{32} = 1 \\ m_{13} = 1 \\ m_{23} = 0 \\ m_{33} = 0 \end{array} \right.$$

Solution unique.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x, y, z) = (z, 0, y)$$

Exercice 2.c

$$\left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 0) \text{ (ie } X^3) \\ (0, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \end{pmatrix} = (0, 1, 0, 0) \text{ (ie } X^2) \\ (0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \end{pmatrix} = (0, 0, 1, 0) \text{ (ie } X) \\ (1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 1) \text{ (ie } 1) \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_{11} & = 1 \\ m_{21} & = 0 \\ m_{31} & = 0 \\ m_{41} & = 0 \\ m_{12} & = 0 \\ m_{22} & = 1 \\ m_{32} & = 0 \\ m_{42} & = 0 \\ m_{13} & = 0 \\ m_{23} & = 0 \\ m_{33} & = 1 \\ m_{43} & = 0 \\ m_{11} + m_{12} + m_{13} & = 0 \\ m_{21} + m_{22} + m_{23} & = 0 \\ m_{31} + m_{32} + m_{33} & = 0 \\ m_{41} + m_{42} + m_{43} & = 1 \end{array} \right.$$

Pas de solution. QED

Exercice 2.d

$$\left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \\ m_{13} & m_{23} \\ m_{14} & m_{24} \\ m_{15} & m_{25} \end{pmatrix} = (2, -1) \\ (0, 0, 1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \\ m_{13} & m_{23} \\ m_{14} & m_{24} \\ m_{15} & m_{25} \end{pmatrix} = (3, 0) \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_{11} + m_{15} & = 2 \\ m_{21} + m_{25} & = -1 \\ m_{13} & = 3 \\ m_{23} & = 0 \end{array} \right.$$

Il y a un infinité d'applications:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \\ 3 & 0 \\ m_{14} & m_{24} \\ 2 - m_{11} & -1 - m_{21} \end{pmatrix}$$

Exercice 2.e

$$\left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 2, 1) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} \end{pmatrix} = (0, 1, 1) \\ (1, 1, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} \end{pmatrix} = (0, 2, 2) \\ (2, 2, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} \end{pmatrix} = (0, 3, 3) \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2m_{13} + m_{14} & = 0 \rightarrow m_{14} = -2m_{13} \\ 2m_{23} + m_{24} & = 1 \rightarrow m_{24} = 1 - 2m_{13} \\ 2m_{33} + m_{34} & = 1 \rightarrow m_{34} = 1 - 2m_{33} \\ m_{11} + m_{12} + m_{13} & = 0 \\ m_{21} + m_{22} + m_{23} & = 2 \\ m_{31} + m_{32} + m_{33} & = 2 \\ 2m_{11} + 2m_{12} + m_{14} & = 0 \rightarrow 2m_{11} + 2m_{12} - 2m_{13} = 0 \\ 2m_{21} + 2m_{22} + m_{24} & = 3 \rightarrow 2m_{21} + 2m_{22} - 2m_{23} = 2 \\ 2m_{31} + 2m_{32} + m_{34} & = 3 \rightarrow 2m_{31} + 2m_{32} - 2m_{33} = 2 \end{array} \right.$$

Il y a un infinité d'applications:

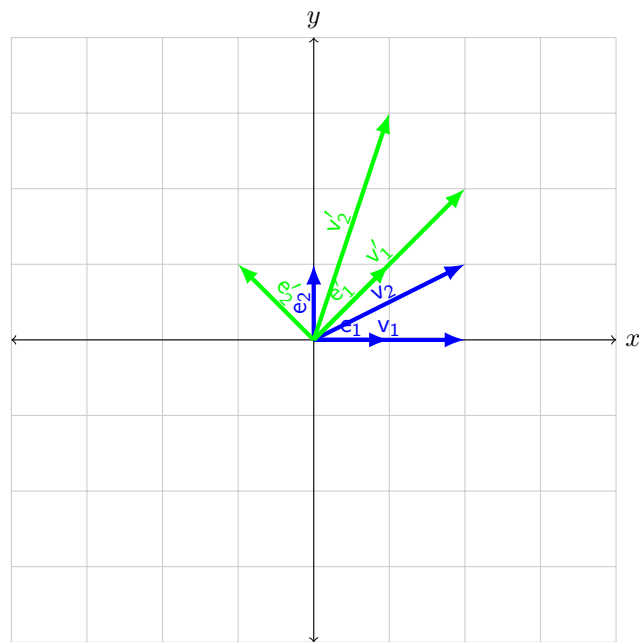
$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ -m_{11} & 3/2 - m_{21} & 3/2 - m_{31} \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.f

??

Exercice 3

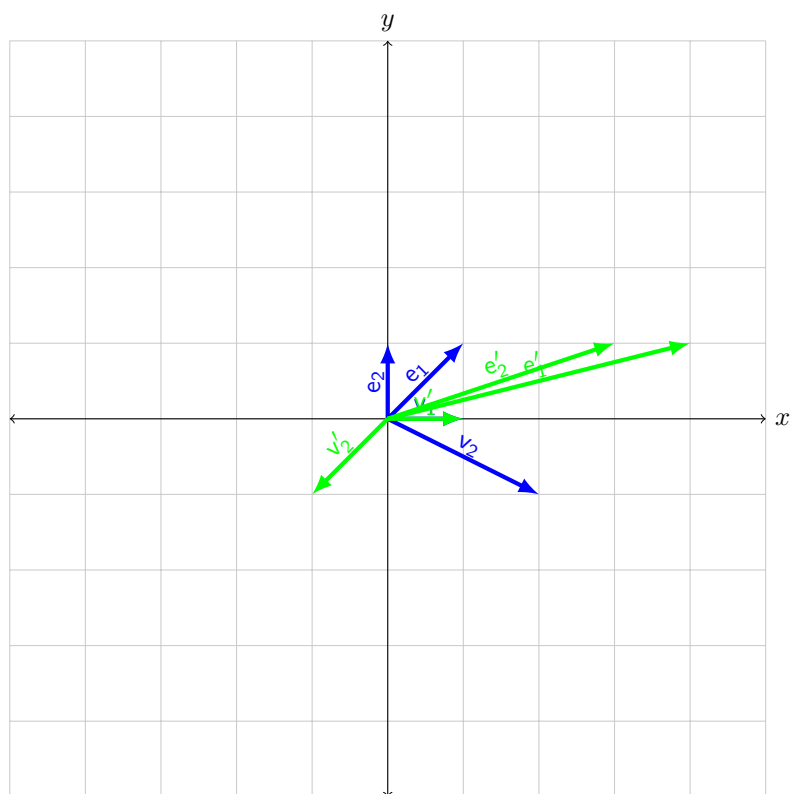
Exercice 3.a



On a $F(v_1) = F(2e_1) = 2F(e_1) = (2, 2)$ et $F(v_2) = F(2e_1 + e_2) = 2F(e_1) + F(e_2) = (1, 3)$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

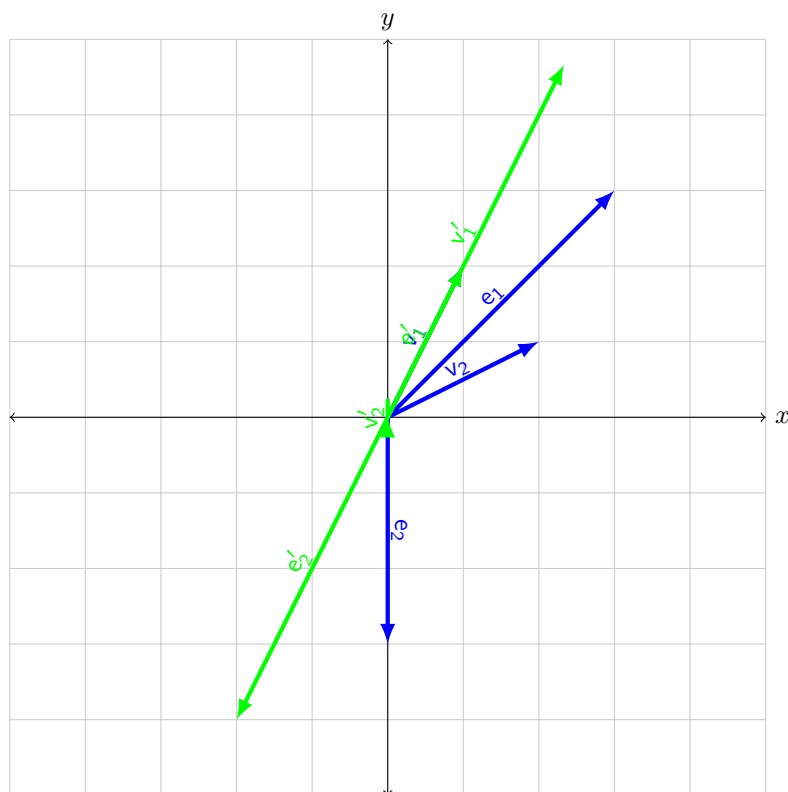
F est ????

Exercice 3.b

On a $F(v_1) = F(e_1 - e_2) = F(e_1) - F(e_2) = (1, 0)$ et $F(v_2) = F(2e_1 - 3e_2) = 2F(e_1) - 3F(e_2) = (-1, -1)$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

F est ??.

Exercice 3.c

On a $F(v_1) = F(1/3e_1 - e_2) = 1/3F(e_1) - F(e_2) = (7/3, 14/3)$ et $F(v_2) = F(2/3e_1 + 1/3e_2) = 2/3F(e_1) + 1/3F(e_2) = (0, 0)$

$$F = \begin{pmatrix} 7 & -2/3 \\ -2 & 4/3 \end{pmatrix}$$

F est projection sur la droite $y = 2x$ suivant le vecteur $(-2, -1)$.