Rappel de cours

k

Exercice 1

Exercice 1.1 pour A

On a

$$\det(A-\lambda I)=\det\left(\begin{vmatrix}0-\lambda & 0 & 1\\ 2 & i-\lambda & 2i\\ -1 & 0 & 0-\lambda\end{vmatrix}\right)=(i-\lambda)(\lambda^2+1)$$

Calculons $\det(A-\lambda I)=0$, $(i-\lambda)(\lambda^2+1)=0$, donc $sp(A)=\{i,-i\}$.

Exercice 1.2 pour A

Calculons

$$E_i(A)=ker(A-iI)=ker\left(\begin{vmatrix}0-i & 0 & 1\\ 2 & i-i & 2i\\ -1 & 0 & 0-i\end{vmatrix}\right)$$

Cherchons $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tel que

$$\begin{vmatrix}-i & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2i\\ -1 & 0 & -i\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{cases}-i\lambda_1+0\lambda_2+\lambda_3 & =0\\ 2\lambda_1+0\lambda_2+2i\lambda_3 & =0\\ -\lambda_1+0\lambda_2-i\lambda_3 & =0\end{cases}$$

Echelonnage

$$\begin{cases}\lambda_1+0\lambda_2+i\lambda_3 & =0(L_1=L_1*-i)\\ 0\lambda_1+0\lambda_2+0\lambda_3 & =0(L_2=L_2+2iL_2)\\ 0\lambda_1+0\lambda_2+0\lambda_3 & =0(L_3=L_3+iL_1)\end{cases}$$

Donc, en fixant $\lambda_3=c_3$ et $\lambda_2=c_2$ on a $\lambda_1=-ic_3$

$$ker(A-iI)=\{(-i,0,1),(0,1,0)\}$$

et $\dim(E_i(A)=\dim(ker(A-iI))=2$.

Calculons

$$E_{-i}(A)=ker(A+iI)=ker\left(\begin{vmatrix}0+i & 0 & 1\\ 2 & i+i & 2i\\ -1 & 0 & 0+i\end{vmatrix}\right)$$

Cherchons $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tel que

$$\begin{vmatrix}i & 0 & 1\\ 2 & 2i & 2i\\ -1 & 0 & i\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{cases}i\lambda_1+0\lambda_2+\lambda_3 & =0\\ 2\lambda_1+2i\lambda_2+2i\lambda_3 & =0\\ -\lambda_1+0\lambda_2+i\lambda_3 & =0\end{cases}$$

Echelonnage

$$\begin{cases}-\lambda_1+0\lambda_2+i\lambda_3 & =0(L_1=L_1.i)\\ 0\lambda_1+2i\lambda_2+4i\lambda_3 & =0(L_2=L_2+2iL_1)\\ 0\lambda_1+0\lambda_2+0\lambda_3 & =0(L_3=L_1+iL_3)\end{cases}$$

Donc, en fixant $\lambda_3=c_3$ on a $\lambda_1=ic_3$ et $\lambda_2=-2c_3$

$$ker(A+iI)=\{(i,-2,1)\}$$

et $\dim(E_{-i}(A))=\dim(ker(A+iI))=1$.

0

Exercice 1.3 pour A

Calculons $dim(A)$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & i & 2i \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Echelonnage

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 2i \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Donc $dim(A) = 3$ et $dim(E_i(A)) + dim(E_{-i}(A)) = 3$ donc diagonisable.

On a

$$P = \begin{vmatrix} i & -i & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -i & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{vmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix}$$

Exercice 1.1 pour B

On a

$$\det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{vmatrix} i-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} \right) = (i-\lambda)(\lambda^2+1)$$

Calculons $\det(A - \lambda I) = 0$, $(i-\lambda)(\lambda^2+1) = 0$, donc $sp(A) = \{i, -i\}$.

Exercice 1.2 pour B

Calculons

$$E_i(B) = ker(B - iI) = ker \left(\begin{vmatrix} i-i & 0 & 2 \\ 0 & 0-i & 1 \\ 0 & -1 & 0-i \end{vmatrix} \right)$$

Cherchons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 \\ 0\lambda_1 - i\lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Echelonnage

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3 & = 0 (L_1 = L_3) \\ 0\lambda_1 - i\lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 (L_3 = L_1) \end{cases}, \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_3 & = -i\lambda_2 \end{cases}, \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - i(-i\lambda_2) & = 0 \\ \lambda_3 & = -i\lambda_2 \end{cases}$$

Donc, en fixant $\lambda_2 = c_2$ on a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = ic_2$

$$ker(B - iI) = \{(0, 1, i)\}$$

et $\dim(E_i(B)) = \dim(ker(B - iI)) = 1$.

Calculons

$$E_{-i}(B) = ker(B + iI) = ker\left(\begin{vmatrix} i+i & 0 & 2 \\ 0 & 0+i & 1 \\ 0 & -1 & 0+i \end{vmatrix}\right)$$

Cherchons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que

$$\begin{vmatrix} 2i & 0 & 2 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2i\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 \\ 0\lambda_1 + i\lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + i\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ i\lambda_2 & = \lambda_3 \\ \lambda_2 & = -i\lambda_3 \end{cases}$$

Donc, en fixant $\lambda_2 = c_2$ on a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = ic_2$

$$ker(B - iI) = \{(0, 1, i)\}$$

et $\dim(E_{-i}(B)) = \dim(ker(B + iI)) = 1$.

Exercice 1.3 pour B

Calculons $dim(B)$.

$$\begin{vmatrix} -i & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Echelonnage

$$\begin{vmatrix} -i & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Donc $dim(B) = 3$ et $dim(E_i(B)) + dim(E_{-i}(B)) = 2$ donc pas diagonisable.

Exercice 2

Si k est une valeur propre d'un endomorphisme $f : E \to E$ alors $\exists v \in E, v \neq 0_E, f(v) = k.v$. L'endomorphisme f est surjective donc $im(f) = E$, et $dim(im(f)) = dim(E)$. Supposons que 0 soit une valeur propre de f, $\exists v \in E, v \neq 0_E, f(v) = 0.v = 0_E$. Donc $v \in ker(f)$. Mais on a $dim(ker\ f) + dim(im\ f) = dim(E)$

Exercice 3

Exercice 3.1

Non, la matrice nulle est diagonale mais n'est pas inversible car son déterminant est nul.

Exercice 3.2

QED