Rappel de cours

Exercice 1

Exercice 1.1

Calculons $\det(A - \lambda.I)$

$$\det\left(\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & -2-\lambda & 3 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}\right)$$

$= (-2-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda) - 0*1) - (-1)((1-\lambda)*3 - 0*a) = -(4-\lambda^2)(1-\lambda) + 3(1-\lambda) = (1-\lambda)(-1+\lambda^2)$

donc

$$Sp(A) = \{1, -1\}$$

Exercice 1.2

Déterminons les vecteurs propres de A.
Calculons

$$E_1(A) = ker(A - I) = ker\left(\begin{vmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ a & -2-1 & 3 \\ 1 & -1 & 2-1 \end{vmatrix}\right)$$

Cherchons x, y, z tel que

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0x + 0y + 0z & = 0 \\ ax - 3y + 3z & = 0 \\ x - y + z & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z & = y \\ ax - 3x - 3z + 3z & = 0 \\ 0x + 0y + 0z & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z & = y \\ x(a-3) & = 0 \\ 0x + 0y + 0z & = 0 \end{cases}$$

En fixant $x = c_1$ et $z = c_2$, on a

$$E_1(A) = \begin{cases} \{(1,1,0),(0,1,1)\} & a = 3 \\ \{0,1,1) & a \neq 3 \end{cases}$$

On a $dim\ E_1(A) = 2$ lorsque $a = 3$ et $dim\ E_1(A) = 1$ lorsque $a \neq 3$.

Calculons

$$E_{-1}(A) = ker(A + I) = ker\left(\begin{vmatrix} 1+1 & 0 & 0 \\ a & -2+1 & 3 \\ 1 & -1 & 2+1 \end{vmatrix}\right)$$

Cherchons x, y, z tel que

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 0y + 0z & = 0 \\ ax - y + 3z & = 0 \\ x - y + 3z & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= 0 \\ 3z &= y \end{cases}$$

En fixant $x = 0$ et $z = c_2$, on a

$$E_{-1}(A) = \{(0, 3, 1)\}$$

On a $dim\ E_{-1}(A) = 1$.

Pour que A soit diagonalisable il faut que $dim\ A = dim\ E_1 + dim\ E_{-1}$, donc on a $a = 3$.
La matrice

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

QED

Exercice 2

Exercice 2.1

Calculons $\det(A - \lambda.I)$

$$\det\left(\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix}\right)$$

$$= (-\lambda)((2-\lambda)(-\lambda) - 0 * 0) - (1)((2-\lambda)(-1) - 0 * 0) = (2-\lambda)(\lambda^2 + 1)$$

donc

$$Sp(A) = \{2\}\ dans\ \mathbb{R}, et\ Sp(A) = \{2, i, -i\}\ dans\ \mathbb{C},$$

Exercice 2.2

Déterminons les vecteurs propres de A dans $\mathbb{R}$.
Calculons

$$E_2(A) = ker(A - 2I) = ker\left(\begin{vmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0-2 & -1 \\ 0 & 1 & 0-2 \end{vmatrix}\right)$$

Cherchons x, y, z tel que

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0x + 0y + 0z &= 0 \\ 0x - 2y - z &= 0 \\ 0x + y - 2z &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0x + 0y + 0z &= 0 \\ z &= 2y \\ -3y &= 0 \end{cases}$$

En fixant $x = c_1$ on a

$$E_2(A) = ker(A - 2I) = \{(1, 0, 0)\}$$

Donc dans $\mathbb{R}$, $dim\ Sp(A) = 1$, et $dim\ A = 3$ donc la matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.2

Déterminons les vecteurs propres de A dans $\mathbb{C}$.
De l'exerce précédent, on a $E_2(A) = ker(A-2I) = \{(1,0,0\}$.
Calculons

$$E_i(A) = ker(A-i.I) = ker\left(\begin{vmatrix} 2-i & 0 & 0 \\ 0 & 0-i & 1 \\ 0 & -1 & 0-i \end{vmatrix}\right)$$

Cherchons x, y, z tel que

$$\begin{vmatrix} 2-i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (2-i)x + 0y + 0z & = 0 \\ 0x - iy - z & = 0 \\ 0x + y - iz & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = 0 \\ z & = -iy \\ z & = \frac{y}{i} = -iy \end{cases}$$

En fixant $x = 0$ et $y = c_1$ on a

$$E_i(A) = ker(A-2I) = \{(0,1,-i)\}$$

Calculons

$$E_{-i}(A) = ker(A+i.I) = ker\left(\begin{vmatrix} 2+i & 0 & 0 \\ 0 & 0+i & 1 \\ 0 & -1 & 0+i \end{vmatrix}\right)$$

Cherchons x, y, z tel que

$$\begin{vmatrix} 2+i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (2+i)x + 0y + 0z & = 0 \\ 0x + iy - z & = 0 \\ 0x + y + iz & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = 0 \\ z & = iy \\ z & = -\frac{y}{i} = iy \end{cases}$$

En fixant $x = 0$ et $z = c_1$ on a

$$E_{-i}(A) = ker(A-2I) = \{(0,1,i)\}$$

$$Sp(A) = \{(1,0,0),(0,1,-i),(0,1,i)\}$$

Donc dans $\mathbb{C}$, $dim\ Sp(A) = 3$, et $dim\ A = 3$ donc la matrice est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Si les valeurs propres de A, $Sp(A) = \{1,2\}$, on a $(A-I) = 0$ et $(A-2I) = 0$. On a

$$A^2 = 3A - 2I, A^2 - 3A + 2I = 0, (A-I)(A-2I) = 0$$

Ce qui est vrai.

Exercice 4

Exercice 4.1

u est un vecteur propre associé à la valeur λ de B, donc $B.u = \lambda.u$ et $B = Q^{-1}.A.Q$. On cherche λ_1 tel que $A.(Q.u) = \lambda_1.Q.u$.

Donc

$$B.u = \lambda.u$$

$$Q^{-1}.A.Q.u = \lambda.u$$

$$Q.Q^{-1}.A.Q.u = Q.\lambda.u$$

$$A.(Q.u) = \lambda.Q.u$$

Donc, en prenant $\lambda_1 = \lambda$, on a $Q.u$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On peut en déduire que $dim\ E_\lambda(A) = dim\ E_\lambda(B)$ car pour tous les élément de $u \in E_\lambda(B)$ on peut associer un élement $Q.u \in E_\lambda(A)$.

Exercice 4.2

Calculons les valeurs propres de A et B.
Calculons $\det(A - \lambda_a.I)$

$$\det\left(\begin{vmatrix} -1-\lambda_a & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda_a & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda_a \end{vmatrix}\right)$$

$$= (-1-\lambda_a)(3-\lambda_a)(-1-\lambda_a) = -(1+\lambda_a)^2(3-\lambda_a)$$

donc

$$Sp(A) = \{-1, 3\}$$

Calculons $\det(B - \lambda_b.I)$

$$\det\left(\begin{vmatrix} -1-\lambda_b & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda_b & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda_b \end{vmatrix}\right)$$

$$= (-1-\lambda_b)(3-\lambda_b)(-1-\lambda_b) = -(1+\lambda_b)^2(3-\lambda_b)$$

donc

$$Sp(B) = \{-1, 3\}$$

Calculons les vecteurs propres associés à 1, $E_{-1}(A)$ et $E_{-1}(B)$

$$E_{-1}(A) = ker(A + i.I) = ker\left(\begin{vmatrix} -1+1 & 0 & 1 \\ 0 & 3+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1+1 \end{vmatrix}\right)$$

Cherchons x, y, z tel que

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0x + 0y + z & = 0 \\ 0x + 4y + 0z & = 0 \\ 0x - y + 0z & = 0 \end{cases}$$

En fixant $x = c_1$, $y = z = 0$ on a $E_{-1}(A) = \{(1, 0, 0)\}$

$$E_{-1}(B) = ker(B + i.I) = ker\left(\begin{vmatrix} -1+1 & 1 & 0 \\ 0 & 3+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1+1 \end{vmatrix}\right)$$

Cherchons x, y, z tel que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0x + y + 0z & = 0 \\ 0x + 4y + 0z & = 0 \\ 0x - y + 0z & = 0 \end{cases}$$

En fixant $x = c_1$, $z = c_2$, $y = 0$ on a $E_{-1}(B) = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$
Les matrices A et B ne sont pas semblables car $dim\ E_{-1}(A) \neq dim\ E_{-1}(B)$.

Exercice 5

Comme la matrice A est diagonalisable, il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D tel que $A = P.D.P^{-1}$ Donc

$$A^3+4A-16I_n = (P.D.P^{-1})^3+4(P.D.P^{-1})-16I_n = P.D^3.P^{-1}+P.4D.P^{-1}-16P.I_n.P^{-1} = P.(D^3+4D-16I_n).P^{-1} = 0_n$$

La matrice P est inversible donc $P \neq 0_n$. donc on cherche une matrice diagonale D tel que

$$D^3 + 4D - 16I_n = (D - 2I_n)(D^2 + 2D + 8) = 0_n$$

Cette équation a une seule solution dans $\mathbb{R}$, $D = 2I_n$.
Donc $A = \{P.D.P^{-1}, P\ inversible\} = \{P.(2I_n).P^{-1}, P\ inversible\} = \{2P.I_n.P^{-1}, P\ inversible\} = \{2I_n\}$.