

Rappel de cours:

•

Exercice 4.1

4.1.1

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

4.1.2

On a

$$C_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, C_2 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, C_3 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, C_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix},$$

La première ligne peut être formée en soustrayant la ligne l_2 et la ligne l_3 . Donc, le rang de (l_1, l_2, l_3) est égal au rang de (l_2, l_3) . Les lignes l_2, l_3 sont indépendante (non proportionnelle). Donc, le rang de (S) est 2.

Trouver une relation de dépendance entre C_1, C_2 et C_3 :

$$aC_1 + bC_2 + cC_3 = 0$$

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 & l_1 \\ 2a + b + c = 0 & l_2 \\ a + 2b - c = 0 & l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 & l_1 \\ -3b + 3c = 0 & 2l_1 - l_2 \\ -3b + 3c = 0 & l_1 - l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -c \\ b = c \end{cases}$$

Une relation de dépendance entre C_1, C_2 et C_3 est: $-C_1 + C_2 + C_3 = 0$.

Trouver une relation de dépendance entre C_1, C_2 et C_4 :

$$aC_1 + bC_2 + dC_4 = 0$$

$$\begin{cases} a - b = 0 & l_1 \\ 2a + b + 3d = 0 & l_2 \\ a + 2b + 3d = 0 & l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = 0 & l_1 \\ -3b - 3d = 0 & 2l_1 - l_2 \\ -3b - 3d = 0 & l_1 - l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -d \\ b = -d \end{cases}$$

Une relation de dépendance entre C_1, C_2 et C_4 est: $-C_1 - C_2 + C_4 = 0$.

Trouver une base (v_3, v_4) de E .

On a $C_3 = C_2 - C_1$ et $C_4 = C_1 + C_2$. Donc, $(x, y, z, t) = (x, y, y - x, x + y) = (0, y, y, y) + (x, 0, -x, x) = x(1, 0, -1, 1) + y(0, 1, 1, 1)$. En prenant $v_3 = (1, 0, -1, 1)$ et $v_4 = (0, 1, 1, 1)$ on a bien $E = Vect(v_3, v_4)$ et

$$av_3 + bv_4 = a(1, 0, -1, 1) + b(0, 1, 1, 1) = (a, 0, -a, a) + (0, b, b, b) = (a, b, b - a, a + b) = (0, 0, 0, 0)$$

Donc $a = b = 0$, $Vect(v_3, v_4)$ est libre.

Par conséquent $Vect(v_3, v_4)$ est une base de E .

Exercice 4.2

4.2.1

S est un plan vectoriel $Vect(v_1, v_2) = Vect((a, b), (-b, a))$ est une base de \mathbb{R}^2 .

$$\forall p = (x, y), \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = p$$

$$\begin{cases} \lambda_1 a - \lambda_2 b &= x & l_1 \\ \lambda_1 b + \lambda_2 a &= y & l_2 \end{cases}$$

$$al_1 + bl_2, \lambda_1 a^2 - \lambda_2 ab + \lambda_1 b^2 + \lambda_2 ba = ax + by$$

$$\lambda_1 = \frac{ax + by}{a^2 + b^2}$$

$$bl_1 - al_2, \lambda_1 ab - \lambda_2^2 b - \lambda_1 ab - \lambda_2 a^2 = bx - ay$$

$$\lambda_2 = \frac{ay - bx}{a^2 + b^2}$$

Donc $Vect(v_1, v_2)$ est génératrice.

Quand $x = y = 0$ on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc $Vect(v_1, v_2)$ est libre.

Donc $Vect(v_1, v_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 .

T est un plan vectoriel $Vect(v_3, v_4) = Vect((c, d), (d, -c))$ est une base de \mathbb{R}^2 .

$$\forall p = (x, y), \lambda_1 v_3 + \lambda_2 v_4 = p$$

$$\begin{cases} \lambda_1 c + \lambda_2 d &= x & l_1 \\ \lambda_1 d - \lambda_2 c &= y & l_2 \end{cases}$$

$$cl_1 + dl_2, \lambda_1 c^2 - \lambda_2 cd + \lambda_1 d^2 - \lambda_2 cd = cx + dy$$

$$\lambda_1 = \frac{cx + dy}{c^2 + d^2}$$

$$dl_1 - cl_2, \lambda_1 cd + \lambda_2 d^2 - \lambda_1 dc + \lambda_2 c^2 = dx - cy$$

$$\lambda_2 = \frac{dx - cy}{c^2 + d^2}$$

Donc $Vect(v_3, v_4)$ est génératrice.

Quand $x = y = 0$ on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc $Vect(v_3, v_4)$ est libre.

Donc $Vect(v_3, v_4)$ est une base de \mathbb{R}^2 .

Exercice 4.5**4.5.1**

$$A^2 = A.A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3A - I_2$$

$$A^3 = A.A^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 8A - 3I_2$$

Supposons que A^n est de la forme $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a+b \end{vmatrix}$.

Vrai pour $n = 0$.

$$A^{n+1} = A.A^n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ b & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a+2b \\ a+2b & 2a+3b \end{vmatrix}$$

Vrai pour $n + 1$ si vrai pour n , donc vérifié pour tout n .

On a donc

$$A^n = \begin{vmatrix} A_{\{1,1\}}^n & A_{\{1,2\}}^n \\ A_{\{1,2\}}^n & A_{\{1,1\}}^n + A_{\{1,2\}}^n \end{vmatrix} = kA + jI^2 = k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + j \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+j & k \\ k & 2k+j \end{vmatrix}$$

On a $k = A_{\{1,2\}}^n$, et $j = A_{\{1,1\}}^n - A_{\{1,2\}}^n$.

4.5.2

Famille libre si $\lambda_1 A + \lambda_2 I^2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$$\lambda_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. La famille (A, I^2) est libre.

4.5.3.a

On a montré que $A^{n+1} = A_{\{1,2\}}^{n+1}A + (A_{\{1,1\}}^{n+1} - A_{\{1,2\}}^{n+1})I_2$ et on pose $A^{n+1} = a^{n+1}A + b^{n+1}I_2$.

De même, $A^n = A_{\{1,2\}}^nA + (A_{\{1,1\}}^n - A_{\{1,2\}}^n)I_2$ et $A^n = a^nA + b^nI_2$. Donc $a^n = A_{\{1,2\}}^n$, et $b^n = A_{\{1,1\}}^n - A_{\{1,2\}}^n$.

$$A^{n+1} = A.A^n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{\{1,1\}}^n & A_{\{1,2\}}^n \\ A_{\{1,2\}}^n & A_{\{1,1\}}^n + A_{\{1,2\}}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{\{1,1\}}^n + A_{\{1,2\}}^n & A_{\{1,1\}}^n + 2A_{\{1,2\}}^n \\ A_{\{1,1\}}^n + 2A_{\{1,2\}}^n & 2A_{\{1,1\}}^n + 3A_{\{1,2\}}^n \end{vmatrix}$$

Donc

$$A^{n+1} = (A_{\{1,1\}}^n + 2A_{\{1,2\}}^n).A + (A_{\{1,1\}}^n + A_{\{1,2\}}^n - (A_{\{1,1\}}^n + 2A_{\{1,2\}}^n))I_2$$

$$\begin{cases} a^{n+1} = A_{\{1,1\}}^n + 2A_{\{1,2\}}^n \\ b^{n+1} = -A_{\{1,2\}}^n \\ a^n = A_{\{1,2\}}^n \\ b^n = A_{\{1,1\}}^n - A_{\{1,2\}}^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^{n+1} = A_{\{1,1\}}^n + 2A_{\{1,2\}}^n \\ b^{n+1} = -A_{\{1,2\}}^n \\ A_{\{1,1\}}^n = a^n + b^n \\ A_{\{1,2\}}^n = a^n \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} a^{n+1} = 3a^n + b^n \\ b^{n+1} = -a^n \end{cases}$$

On a $a_0 = 0, b_0 = 1$ et $a_1 = 1, b_1 = 0$.

4.5.3.b

On a $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. On cherche B tel que $X_{n+1} = BX_n = B \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 3a_n + b_n \\ -a_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Donc

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.5.3.c

On a

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = k.B + j.I_2 = k \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k + j & k \\ -k & j \end{pmatrix}$$

Ceci fait $k = 3$ et $j = -1$, donc $B^2 = 3B - I_2$.

Exercice 4.6

Exercice 4.6.1

$$S(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, S(a, -b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$S(a, b).S(a, -b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab - ab \\ ab - ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = S(a^2 + b^2, 0)$$

$$S(a_1, b_1).S(a_2, b_2) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_2a_1 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \end{pmatrix} = S(a_1a_2 - b_1b_2, a_2b_1 + a_1b_2)$$

$$T(a_1, b_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{pmatrix}, T(a_2, b_2) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{pmatrix}$$

$$T(a_1, b_1).T(a_2, b_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1a_2 - a_1b_2 & a_1a_2 + b_1b_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 & a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix} = S(b_1a_2 - a_1b_2, a_1a_2 + b_1b_2)$$

$$S(a_1, b_1).T(a_2, b_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ a_1b_2 + b_1a_1 & b_1b_2 - a_1a_2 \end{pmatrix} = T(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$$

$$T(a_1, b_1).S(a_2, b_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2b_1 & b_2a_1 - a_2b_1 \\ b_2a_1 - a_2b_1 & b_2b_1 + a_2a_1 \end{pmatrix} = T(bc - ad, bd + ac)$$

Exercice 4.6.2

Prenons $c_1 = a_1 + ib_1 = S(a_1, b_1)$ et $c_2 = a_2 + ib_2 = S(a_2, b_2)$.

$$c_1 + c_2 = S(a_1, b_1) + S(a_2, b_2) = \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{vmatrix} = \\ S(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$c_1 \cdot c_2 = S(a_1, b_1) \cdot S(a_2, b_2) = S(a_1 a_2 - b_1 b_2, a_2 b_1 + a_1 b_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)$$

$S(a, b) \cdot s(a - b)$ correspond à la multiplication d'un nombre complexe et de son conjugué.

Exercice 4.6.3.a

$$\sigma(M) = \Sigma X_M = T(1, 0) X_M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_M \\ y_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_M \\ -y_M \end{vmatrix}$$

La transformation $\sigma(M)$ correspond à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice 4.6.3.b

$$\sigma'(M) = \Sigma' X_M = T(0, 1) X_M = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_M \\ y_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_M \\ x_M \end{vmatrix}$$

La transformation $\sigma'(M)$ correspond à la symétrie par rapport à la diagonale $y = x$.

Exercice 4.6.3.c

$$r(M) = R \cdot X_M = S(0, 1) X_M = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_M \\ y_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y_M \\ x_M \end{vmatrix}$$

La transformation $r(M)$ correspond à la rotation de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'origine.

QED