Rappel de cours

Definition 1. Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions réelles définies au voisinage de $+\infty$ avec $g(x)$ qui ne s'annule pas en $+\infty$. Lorsque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On écrit

$$f(x) = o_{x\to+\infty}(g(x))$$

Alors on dit que $f(x)$ est négligeable pas rapport à $g(x)$.

Theorem 1. Théorème des croissances comparées : Pour tous réel $\alpha, \beta, \gamma, \lambda > 0$

- Si $\alpha < \beta$ on a $x^\alpha = o_{x\to+\infty}(x^\beta)$
- on a $1 = o_{x\to+\infty}((\ln x)^\gamma)$
- on a $(\ln x)^\gamma = o_{x\to+\infty}(x^\beta)$
- on a $x^\beta = o_{x\to+\infty}(e^{\lambda x^\alpha})$

Theorem 2. On peut généraliser le théorème des croissances comparées aux suites (avec n un entier positif).

- on a $1 = o_{n\to+\infty}((\ln n)^\gamma)$
- on a $(\ln n)^\gamma = o_{n\to+\infty}(n^\beta)$
- on a $n^\beta = o_{n\to+\infty}(e^{\lambda n^\alpha})$
- on a $e^{\lambda n^\alpha} = o_{n\to+\infty}(n!)$

Exercice 1

a_n

Il y a 4 cas, selon la valeur de c :

- $|c| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} c^n = 0$
- $c = 1$, $\lim_{n\to+\infty} c^n = 1$
- $c \leq -1$, $\lim_{n\to+\infty} c^n$ n'existe pas
- $c > 1$, $\lim_{n\to+\infty} c^n = +\infty$

b_n

$$b_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n.n.n.n\ldots n.n}{1.2.3.4\ldots(n-1)n} = n.\frac{n}{2}.\frac{n}{3}.\frac{n}{4}\ldots\frac{n}{n-1}.1$$
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$$

car $n > 1, \frac{n}{2} > 1, \frac{n}{3} > 1, \ldots \frac{n-1}{n} > 1$.

c_n

$$c_n = \frac{n!}{2^n} = \frac{1.2.3.4\ldots n}{2.2.2.2\ldots 2} = \frac{1}{2}.1.\frac{3}{2}.\frac{4}{2}\ldots\frac{n}{2}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}.\frac{4}{2}\ldots\frac{n}{2} = +\infty$$

car $\frac{3}{2} > 1, \frac{4}{2} > 1, \ldots \frac{n}{2} > 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}.\frac{4}{2}\ldots\frac{n}{2} = +\infty$$

d_n

Il y a 3 cas, selon la valeur de c :

- $|c| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} c^n = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$
- $c = 1$, $\lim_{n\to+\infty} c^n = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$
- $|c| > 1$,
$$d_n = \frac{c^n}{n!} = \frac{c.c.c.c\ldots c}{1.2.3.4\ldots n} = c.\frac{c}{2}.\frac{c}{3}.\frac{c}{4}\ldots\frac{c}{c-1}.\frac{c}{c}.\frac{c}{c+1}\ldots\frac{c}{n}$$
  On a $c << n$, donc il y a plus de nombres < 0 que de nombres > 0.
$$\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$$

e_n

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-1^n}{n} = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} e_n = \sqrt{4 + \lim_{n\to+\infty}\frac{-1^n}{n}} = \sqrt{4} = 2$$

f_n

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n^2 + 5}{n^2+8} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}(-1)^n$$

car $5, 8 << n^2$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f_n$ n'existe pas.

g_n

$1 \leq \lim_{n\to+\infty} \cos n \leq 1$ et $1 \leq \lim_{n\to+\infty} \sin n \leq 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2 - n + \cos n}{n^2 - \sin n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2 - n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} 3 - \frac{1}{n}$$

car $\cos n << n^2$ et $\sin n << n^2$

$$\lim_{n\to+\infty} g_n = 3$$

h_n

$\lim_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \sin(2^{-n}) = \sin(0) = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} h_n = 0.0 = 0$$

i_n

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{4n+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{4n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

On a $3, 5 << n$ car 1 est négligeable devant $(\ln n)^\gamma$ et $(\ln n)^\gamma$ est négligeable devant n^β, donc 1 est négligeable devant n^β (Théorème des croissances comparées)

j_n

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 + 3 - 7}{e^n + n^8} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{e^n + n^8}$$

car $-4 << n$
n^β est négligeable devant $(e^{\lambda n^\alpha})$ (Théorème des croissances comparées). Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{e^n + n^8} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{e^n} = 0$$

k_n

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(k_n) = \lim_{n\to+\infty} \ln(n^{1/\ln(n)}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)}.\ln(n) = 1$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} k_n = e^1 = e$$

l_n

$$\lim_{n\to+\infty} e^{m_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(n)^{1/n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{n.\frac{1}{n}} = e$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} m_n = 1$$

m_n

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(m_n) = \lim_{n\to+\infty} \ln(n^{1/n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

car $(\ln n)^\gamma$ est négligeable devant n^β (Théorème des croissances comparées). Donc

$$\lim_{n\to+\infty} m_n = e^0 = 1$$

o_n

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2n}}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!}.n^n = +\infty$$

Voir b_n.

p_n

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^2+1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{\ln(n}{n} = 2.0 = 0$$

Car $1 << n$.

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$$

q_n

$(\ln n)^\gamma$ est négligeable devant n^β donc

$$\lim_{n\to+\infty} n + 3\ln n = \lim_{n\to+\infty} n$$

Et

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n-1} = \lim_{n\to+\infty} e^n$$

n^β est négligeable devant $e^{\lambda n^\alpha}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} q_n = 0$$

Exercice 2

a_n

$$a_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$$

car $1 = o_{n\to+\infty} n$.

b_n

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n} = 0$$

car $1 = o_{n\to+\infty} n$.

c_n

$$a_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)} = \sqrt{\ln(n) - \ln(n)} = 0$$

car $1 = o_{n\to+\infty} n$.

d_n

$n+1$ n car $1 = o_{n\to+\infty} n$.

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{0} = 0$$

e_n

$$\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right) = \ln(\sin 0) = \ln(0)$$

car $1 = o_{n\to+\infty} n$. ??

f_n

Changement de variable $x = \frac{1}{n}$ et développement limité de $\cos x$.

$$1 - \cos x = 1 - (1 - \frac{x^2}{2!} + o(x) = \frac{x^2}{2!} + o(x) = 0$$

Premier terme non nul est 0.

g_n

??

h_n

??

Exercice 3

a_n

$$\lim_{n \to +\infty} n \sin(\frac{1}{n}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

Changement de variable $x = \frac{1}{n}$ et développement limité de $\sin x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x)}{x} = \lim_{x \to 0} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x) = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1$$

b_n

$$\lim_{n \to +\infty} n \sin(\frac{1}{n}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

Changement de variable $x = \frac{1}{n}$ et développement limité de $\sin x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x)}{x} = \lim_{x \to 0} 1 - \frac{x^2}{3!} + o(x)$$

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x)\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(b_n) = \lim_{x \to 0} \ln\left(\left(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x)\right)^{\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x)\right)$$

Développement limité de $\ln(1 - x)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}(-\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{2.(3!)^2} + o(x)) = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{6} - \frac{x^2}{2.(3!)^2} + o(x) = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = e^{-\frac{1}{6}}$$

c_n

$$(1+n)^{1/n} - n^{1/n} = (n(\frac{1}{n}+1))^{1/n} - n^{1/n} = n^{1/n}(\frac{1}{n}+1)^{1/n} - n^{1/n} = n^{1/n}((\frac{1}{n}+1)^{1/n} - 1)$$

Changement de variable $x = \frac{1}{n}$ et DL en 0 de $(1+x)^x = 1 + x^2 + O(x^3)$.

$$((x+1)^x - 1) = 1 + x^2 + O(x^3) - 1 = x^2 + O(x^3) = \frac{1}{n^2} + O(\frac{1}{n^3})$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} n^2.n^{1/n}.(\frac{1}{n^2} + O(\frac{1}{n^3})) \approx \lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = 1$$

d_n

DL en 0 de $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$.

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right) = \frac{1}{n^2+1} - \frac{(\frac{1}{n^2+1})^2}{2} + o(x^3) = \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{2(n^2+1)^2}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = \lim_{n\to+\infty} n\sqrt{\frac{1}{2(n^2+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2(\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{2(n^2+1)^2} + o(x^3))} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}} + o(x^3))} = 1$$

e_n

Calcul de $\ln((1+\sin(\frac{1}{n})^n)$

$$\ln((1+\sin(\frac{1}{n})^n) = n\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))$$

DL en 0 de $\sin x = x + o(x^3)$

$$\ln((1+\sin(\frac{1}{n})^n) = n\ln(1+\frac{1}{n})$$

DL en 0 de $\ln(1+x) = x + o(x^2)$

$$n\ln(1+\frac{1}{n}) = n\frac{1}{n} = 1$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} e_n = e^1 = e$$

f_n

On a $1 << n$ donc $\sqrt{n+1} \approx \sqrt{n}$ et $n+1 \approx n$.

$$\frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}} =\approx \frac{n^{\sqrt{n}}}{n^{\sqrt{n}}} = 1$$

QED