Exercice 5

Question 1

On a

$$E(X_1) = \int_a^1 tf(t)\,dt = \int_a^1 t\frac{1}{1-a}\,dt = \frac{1}{1-a}\frac{1-a^2}{2} = \frac{1+a}{2}$$

On a

$$E[X_1^2] = \int_a^1 t^2 f(t)\,dt = \int_a^1 t^2\frac{1}{1-a}\,dt = \frac{1}{1-a}\frac{1-a^3}{3} = \frac{1+a+a^2}{3}$$

Donc

$$V(X_1) = E[X_1^2](E[X_1])^2 = \frac{1+a+a^2}{3} - \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$$

Question 2

On a

$$E[X_1] = \frac{1+a}{2} \implies a = 2E[X_1] - 1$$

Donc on prend comme EMM de a

$$\tilde{a}_n = 2\bar{a}_n - 1$$

Mais $0 < a < 1$, il faut donc que son estimateur soit aussi $0 < \tilde{a}_n < 1$ Donc

$$0 < 2\bar{a}_n - 1 < 1 \implies 1 < 2\bar{a}_n < 2 \implies 1/2 < \bar{a}_n < 1$$

Donc l'EMM est défini uniquement si la moyenne de l'échantillon $\bar{a}_n$ est comprise entre 0.5 et 1.

Consistance. En appliquant le Lemme de l'application Continue (LAC). En prenant $h(x) = 2x - 1$, pour $1/2 < x < 1$. La fonction est continue. On a également, $\bar{a}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} E[X_1]$ selon la loi des grands nombres. Donc $\tilde{a}_n = h(\bar{a}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} h(E[X_1]) = a$. Donc consistance.

En appliquant le Théorème Central Limite (TCL) avec $\mu = a$ et $\sigma^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$ on a

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{a}_n - a)}{\sqrt{\sigma^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Question 3

On calcule

$$\mathcal{L}_a(x_i,\ldots,x_n) = \prod_1^n \frac{1}{1-a}1_{x_i\in[a,1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n}\prod_1^n 1_{x_i\in[a,1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n}1_{min(x_i)\le x_i\le 1}(x_i)$$

Ce qui donne la fonction suivante:

$$\mathcal{L}_a(x_i,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & a = 0 \\ \frac{1}{(1-a)^n} & 0 < a \le min(x_i) \\ 0 & min(x_i) < a < 1 \end{cases}$$

$\mathcal{L}_a(x_i,\ldots,x_n)$ est croissante sur $0 \le a \le min(x_i)$ et nulle quand $min(x_i) < a$ donc EMV est maximale lorsque $a = min(x_i)$ donc $\hat{a} = min(x_i)$.

$$P(Z_n \ge s) = P\left(\frac{n(\hat{a}-a)}{1-a} \ge s\right) = P\left(\hat{a} \ge \frac{s(1-a)+na}{n}\right)$$

.

$$P(\hat{a} \geq t) = P(\forall i \in [1, n] X_i \geq t) = P(X_1 \geq t)^n = \left(\int_t^1 \frac{1}{1-a} dy\right)^n = \left(\frac{1-t}{1-a}\right)^n$$

Donc

$$P(Z_n \geq s) = \left(\frac{1 - \frac{s(1-a)+na}{n}}{1-a}\right)^n = \left(\frac{\frac{n-s(1-a)-na}{n}}{1-a}\right)^n = \left(\frac{(n-s)(1-a)}{n(1-a)}\right)^n = \left(\frac{n-s}{n}\right)^n$$

On a

$$P(Z_n \geq s) \in [0, 1]$$
$$\left(\frac{n-s}{n}\right)^n \in [0, 1]$$

donc

$$s \in [0, n]$$

Convergence en loi: $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \to F_X(x)$. On a $P(Z_n \leq s) = 1 - P(Z_n \geq s) = 1 - \left(\frac{n-s}{n}\right)^n$

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{n-x}{n}\right)^n & 0 \leq x \leq n \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(x) = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{n-x}{n}\right)^n = 1 - e^{-x}$$

La variable aléatoire Z_n converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.
En prenant $g(x) = \frac{x(1-a)}{n} + a$, et on a :

$$\hat{a_n} = g(Z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{L} g(Z) = \frac{Z(1-a)}{n} + a$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \hat{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x}(1-a)}{n} + a = a$$

Donc $\hat{a}$ est consistant.

Question 4

Vitesse de convergence de $\tilde{a}_n$. Il faut trouver le plus grand d qui verifie:

$$n^d(\tilde{a}_n - a) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0$$

$$\forall \epsilon, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n^d(\tilde{a}_n - a) \geq \epsilon) = 0$$

$$\forall \epsilon, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\tilde{a}_n \geq \frac{\epsilon}{n^d} + a) = 0$$

Maintenant calculons $\mathbb{P}(\tilde{a}_n \geq t)$.

$$\mathbb{P}(\tilde{a}_n \geq t) = \mathbb{P}(2\bar{a}_n - 1 \geq t) = \mathbb{P}\left(\bar{a}_n \geq \frac{t+1}{2}\right)$$

On a $F(x) = \frac{x}{1-a}$. Donc

$$\mathbb{P}(\bar{a}_n \geq s) = \frac{1-s}{1-a}$$

$$\mathbb{P}(\tilde{a}_n \geq t) = \frac{1-s}{1-a} = \frac{1 - \frac{t+1}{2}}{1-a} = \frac{1-t}{2(1-a)}$$

$$\mathbb{P}(\tilde{a}_n \geq \frac{\epsilon}{n^d} + a) = \frac{1 - \frac{\epsilon}{n^d} - a}{2(1-a)} = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2n^d(1-a)}$$

Cherchons une valeur de d qui tel que

$$\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2n^d(1-a)} = 0$$

$$\frac{\epsilon}{n^d(1-a)} = 1$$

$$n^d = \frac{\epsilon}{1-a}$$

$$d\ln(n) = \ln(\epsilon) - \ln(1-a)$$

$$d = \frac{\ln(\epsilon) - \ln(1-a)}{\ln(n)}$$

Donc la vitesse de convergence de $\tilde{a}_n$ est $\frac{\ln(\epsilon)-\ln(1-a)}{\ln(n)}$.

Vitesse de convergence de $\hat{a}_n$. Il faut trouver le plus grand d qui vérifie:

$$n^d(\hat{a}_n - a) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0$$

$$\forall\epsilon, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n^d(\hat{a}_n - a) \geq \epsilon) = 0$$

$$\forall\epsilon, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\hat{a}_n \geq \frac{\epsilon}{n^d} + a) = 0$$

Maintenant calculons $\mathbb{P}(\hat{a}_n \geq t)$ sachant que $\hat{a} = \frac{Z_n(1-a)+na}{n}$.

$$\mathbb{P}(\hat{a}_n \geq t) = \mathbb{P}(\frac{Z_n(1-a)+na}{n} \geq t) = \mathbb{P}\left(Z_n \geq \frac{n(t-a)}{1-a}\right) = \left(\frac{n - \frac{n(t-a)}{1-a}}{n}\right)^n = \left(\frac{1-t}{1-a}\right)^n$$

$$\forall\epsilon, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\hat{a}_n \geq \frac{\epsilon}{n^d} + a) = 0 \leftrightarrow \forall\epsilon, \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \frac{\epsilon}{n^d} - a}{1-a}\right)^n = 0 \leftrightarrow 0 < \frac{1 - \frac{\epsilon}{n^d} - a}{1-a} < 1 \leftrightarrow 0 < 1 - \frac{\epsilon}{n^d(1-a)} < 1$$

Donc

$$1 > \frac{\epsilon}{n^d(1-a)} > 0$$

$$0 > \ln(\epsilon) - \ln(1-a) - d\ln(n) > -\infty$$

$$\ln(\epsilon) - \ln(1-a) < d\ln(n) < +\infty$$

$$\frac{\ln(\epsilon) - \ln(1-a)}{\ln(n)} < d < +\infty$$

La plus petit valeur de d est $\frac{\ln(\epsilon)-\ln(1-a)}{\ln(n)}$ ce qui est la vitesse de convergence de $\hat{a}_n$.
La vitesse de convergence de $\tilde{a}_n$ et $\hat{a}_n$ sont identiques.

Exercice 6

Question 1

Question 1-a

La fonction $x^{2k}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$ est paire donc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} x^{2k}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx$$

En prenant $k=1$ on a $\mathbb{E}(U^2)=\frac{(2k)!}{2^k k!}=\frac{2!}{2.1!}=1$ et

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} x^{2}e^{-\frac{x^2}{2\theta}} = \frac{1}{2}E(U^2)=\frac{1}{2}$$

En prenant $k=2$ on a $\mathbb{E}(U^4)=\frac{(2k)!}{2^k k!}=\frac{4!}{4.2!}=3$ et

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} x^{4}e^{-\frac{x^2}{2\theta}} = \frac{1}{2}E(U^4)=\frac{3}{2}$$

Question 1-b

Soit une variable aléatoire $Y=X_i^2$, l'événement $A=(Y\leq y)$ est équivalent à l'événement $B=(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})$. lorsque $y<0$, on a $P(Y\leq y)=0$. Lorsque $y\geq 0$,

$$F_Y(y)=P((Y\leq y))=P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})=F_x(\sqrt{y})-F_x(-\sqrt{y})$$

et

$$f_y(y)=\frac{\partial}{\partial y}F_Y(y)=\frac{\partial}{\partial y}F_X(\sqrt{y})-\frac{\partial}{\partial y}F_X(-\sqrt{y})=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_x(\sqrt{y})+f_x(-\sqrt{y})]$$

Dans notre cas, $f_X(x)$ est défini pour $x\geq 0$, donc $f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_x(\sqrt{y})$. Ce qui fait :

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{\sqrt{y}}{\theta}exp\left(-\frac{\sqrt{y}^2}{2\theta}\right)\right]=\frac{1}{2\theta}exp\left(-\frac{y}{2\theta}\right)$$

qui est une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\theta}$.

Question 1-c

Calcul de $E(X_1)$

$$E(X_1)=\int_0^{+\infty} xf_x(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$$

car $f_X(x)=0$ lorsque $x<0$.

$$E(X_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right)dx$$

Par substitution prenant $u=\frac{x}{\sqrt{\theta}}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{\theta}}$ et $\partial x=\sqrt{\theta}\partial u$, on obtient :

$$E(X_1)=\int_{-\infty}^{\infty}u^2exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\sqrt{\theta}du=\sqrt{\theta}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du$$

D'après la question 1-a, pour $k=1$, on a :

$$E(X_1)=\sqrt{2\pi\theta}\frac{(2k)!}{2^k k!}=\frac{\sqrt{2\pi\theta}}{2}=\sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}$$

Calcul de $E(X_1^2)$

$$E(X_1^2) = \frac{1}{\frac{1}{2\theta}} = 2\theta$$

car $E(X_1^2)$ est une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\theta}$.

Calcul de $E(X_1^3)$

$$E(X_1^3) = \int_0^{+\infty} x^3 f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)dx$$

car $f_X(x) = 0$ lorsque $x < 0$.

$$E(X_1^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{\theta} exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx$$

Par substitution prenant $u = \frac{x}{\sqrt{\theta}}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ et $\partial x = \sqrt{\theta}\partial u$, on obtient :

$$E(X_1^3) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 u^4 exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\sqrt{\theta}du = \sqrt{\theta}\theta^2\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u^4 exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du$$

D'après la question 1-a, pour $k = 2$, on a :

$$E(X_1^3) = \sqrt{2\pi\theta}\theta^2\frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{3\sqrt{2\pi\theta}\theta^2}{2}$$

Calcul de $E(X_1^4)$.

$$E(X_1^4) = \int_0^{+\infty} x^4 f_x(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^5}{\theta} exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right)dx$$

Par substitution $u = x^2$, $\partial x = \frac{1}{2x}\partial u$, donc $u^2 = x^4$

$$= \frac{1}{2\theta}\int u^2 e^{-\frac{u}{2\theta}}du$$

Par substitution $v = -\frac{u}{2\theta}$, $\partial u = -2\theta\partial v$.

$$= \frac{1}{2\theta}\int 4\theta^2 v^2 e^{-\frac{-2\theta v}{2\theta}} - 2\theta dv = -4\theta^2\int v^2 e^v dv$$

Par partie $f = v^2$, $g' = e^v$, donc $f' = 2v$ et $g = e^v$.

$$= -4\theta^2\left(v^2e^v - \int 2ve^v dv\right)$$

Par partie, $f = v$, $g' = e^v$, donc $f' = 1$ et $g = e^v$.

$$= -4\theta^2\left(v^2e^v - 2ve^v + 2\int e^v dv\right) = -4\theta^2\left(v^2e^v - 2ve^v + 2e^v\right) = -4\theta^2\left(-\frac{u^2}{4\theta^2}e^{-\frac{u}{2\theta}} + 2\frac{u}{2\theta}e^{-\frac{u}{2\theta}} + 2e^{-\frac{u}{2\theta}}\right)$$

$$= -4\theta^2\left(-\frac{x^4}{4\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta}} + 2\frac{x^2}{2\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}} + 2e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\right) = -(x^4 + 4\theta x^2 + 8c^2)e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$$

Donc

$$E(X_1^4) = \int_0^{+\infty} x^4 f_x(x)dx = \left[-(x^4 + 4\theta x^2 + 8c^2)e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\right]_0^{+\infty} = 8\theta^2$$

Facile, non?

Question 2

Question 2-a

On calcule

$$\mathcal{L}_\theta(x_i,\ldots,x_n)=\prod_1^n \frac{x^2}{\theta}exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right)1_{x_i\in[0,+\infty]}(x_i)=\frac{x_1x_2\ldots x_n}{\theta^n}exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2\theta}\right)\prod_1^n 1_{x_i\in[0,+\infty]}(x_i)$$

On calcule $\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L}_\theta(x_i,\ldots,x_n)$ et on cherche les points oú la dérivée s'annule.
En utilisant un solveur internet on a

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L}_\theta(x_i,\ldots,x_n)=\frac{x_1x_2\ldots x_n\theta^{-n-2}.(2n\theta-(x_1+x_2+\ldots+x_n))e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2\theta}}}{2}$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L}_\theta(x_i,\ldots,x_n)=0$$

quand $\hat{\theta_n}=\frac{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}{2n}$.

Ou plus simple (en passant par le log car $\mathcal{L}_\theta(x_i,\ldots,x_n)\neq 0$)

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(\mathcal{L}_\theta(x_i,\ldots,x_n))=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(ln(x_1x_2\ldots x_n)-ln(\theta^n)-\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2\theta}\right)=-\frac{n}{\theta}+\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2\theta^2}$$

Et

$$-\frac{n}{\theta}+\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2\theta^2}=\frac{-2n\theta+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2\theta^2}=0$$

quand $\hat{\theta_n}=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2n}=\frac{1}{2n}\sum_1^n x_i$.

Question 2-b

Le biais de $\hat{\theta}$ est :

$$b(\hat{\theta})=E(\hat{\theta})-\theta=E\left(\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2n}\right)-\theta=\frac{1}{2n}(E(x_1^2)+E(x_2^2)+\ldots+E(x_n^2))-\theta$$

Même loi, donc tous les $E(x_i^2)$ sont identiques.

$$=\frac{1}{2n}(2\theta+2\theta+\ldots+2\theta)-\theta=\frac{2n\theta}{2n}-\theta=0$$

Le risque quadratique de $\hat{\theta}$ est :

$$r(\hat{\theta})=E((\hat{\theta}-\theta)^2)=b(\hat{\theta})+V(\hat{\theta})=0+V(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}^2)-(E(\hat{\theta}))^2$$

Question 2-c

Question 2-d

Question 3

Question 3-a

Question 3-b

Question 4

Question 4-a

$$E(\bar{U}^2)=E\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i\right)^2\right)=\frac{1}{n^2}E\left(\left(\sum_{i=1}^n U_i\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} E \left(\sum_{i=1}^{n} U_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} U_i U_j \right) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n} E(U_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(U_i U_j) \right)$$

Comme les U_i suivent la même loi, elles ont la même esperance, de plus elles sont independantes donc $E(U_i U_j) = E(U_i)E(U_j)$. Donc

$$E(\bar{U}^2) = \frac{1}{n^2} \left(nE(U_1^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E(U_1))^2 \right)$$

On a aussi $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$. Donc

$$E(\bar{U}^2) = \frac{1}{n^2} \left(n(V(U_1) + (E(U_1))^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E(U_1))^2 \right) = \frac{1}{n^2} \left(n \left(V(U_1) + (E(U_1))^2 \right) + 2 \frac{n(n-1)}{2} (E(U_1))^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(nV(U_1) + n(E(U_1))^2 + n(n-1)(E(U_1))^2 \right) = \frac{1}{n^2} \left(nV(U_1) + n^2 (E(U_1))^2 \right) = (E(U_1))^2 + \frac{V(U_1)}{n}$$

La seconde partie, on admet.

Question 4-b