Rappel de cours

Une matrice $n \times n$ A est diagonalisable ($A = PDP^{-1}0$ si:

- Elle a n vecteurs propres linéairement indépendants, condition pour avoir une matrice P formée des vecteurs propores en colonne qui est inversible.
- Elle a n valeurs propres distinctes, car n valeurs propres génèrent n vecteurs propres linéairement indépendants
- $\sum dim\ E_{sp_n}(A) = n$
- pour chaque valeur propre sp, on a $dim\ E_{sp}(A) = multiplicite\ sp$. La multiplicité de sp le nombre de racine de sp.
- si $\chi_A(X) = P(X)$ et $P(X)$ est un polynome scindé (ie $P(X) = C(X - A_1)(X - A_2)\ldots(X - A_{m-1})(X - A_m)$).
- si $\chi_A(X) = P(X)$ et $P(A) = 0$.

Exercice 2

Exercice 2.1

On a $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-2)^2$ avec $A^2 - A + I_4 = 0$. La matrice A est diagonalisable ssi on a $\chi_A(A) = 0$.

$$\chi_A(A) = (A-1)^2(A-2)^2 = ((A-1)(A-2))^2 = (A^2 - 3A - 2I_4)^2 = 0$$

Donc la matrice A est diagonalisable.
Les valeurs propres $Sp(A) = \{1, 2\}$. Comme la matrice A est diagonalisable on a $dim\ E_1(A) + dim\ E_2(A) = 4$ et la multiplicité de chaque valeur propre est 2.(ie $(X-1)^2 = 0$ génère une racie double 1). Donc $dim\ E_1(A) = 2$.

Exercice 2.2

On a $\chi_B(X) = (X-1)^2(X-2)^2$ avec $B^2 - B + I_2 \neq 0$. La matrice A est diagonalisable ssi on a $\chi_B(B) = 0$.

$$\chi_B(B) = (B-1)^2(B-2)^2 = ((B-1)(B-2))^2 = (B^2 - 3B - 2I_2)^2 \neq 0$$

Donc la matrice B n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.3

On a une matrice C symétrique (ie $C^T = C$) et $\chi_C(X) = (X-1)^2(X-2)^2 = \det(XI - C)$. Comme la matrice C est symétrique, elle est diagonalisable. Comme elle est diagonalisable on a $\chi_C(C) = 0$

$$\chi_C(C) = (C-1)^2(C-2)^2 = ((C-1)(C-2))^2 = (C^2 - 3C - 2I_4)^2 = 0$$

Donc $C^2 - 3C - 2I_4 = 0$.

Exercice supplḿentaire

Question 1

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda I_3\right) = -\lambda(\lambda^2 + 3)$$

Pas de solution dans $\mathbb{R}$, donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{C}$, calcul des valeurs propres, $sp = \{0, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$. donc $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}i & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}i \end{pmatrix}$.

Calcul des vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

donc $E_0() = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3}i & 1 & -1 \\ -1 & -\sqrt{3}i & -1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{3}i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

donc $E_{\sqrt{3}i}() = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3}i \\ -1 + \sqrt{3}i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}i & 1 & -1 \\ -1 & \sqrt{3}i & -1 \\ 1 & 1 & \sqrt{3}i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

donc $E_{-\sqrt{3}i}() = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3}i \\ -1-\sqrt{3}i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Donc

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1+\sqrt{3}i & 1-\sqrt{3}i \\ 1 & -1+\sqrt{3}i & -1-\sqrt{3}i \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Question 2.1

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 3B$$

Admettons que B soit diagonalisable alors $B = PDP^{-1}$. Ce qui fait

$$(PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = 3(PDP^{-1}) = P3DP^{-1}$$

$$D^2 = 3D$$

$$D^2 - 3D = D(D - 3I_3) = 0$$

Donc $D = 0$, pas possible car $B \neq 0_3$ ou $D = 3I_3$. Et D est diagonale, donc B est diagonalisable???? Normalement, il faut aussi démontrer que P existe et est inversible.

Question 2.2

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda I_3 \right) = \lambda^3(3-\lambda)$$

Donc $sp(B) = \{0, 3\}$.
Calcul des vecteurs propres associés à 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

donc $E_0(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

On a $dim\ E_0(B) = 2$, $dim\ dim\ E_3(B) \geq 1$ (par définition) donc $dim\ E_0(B) + dim\ E_3(B) \geq dim\ \mathbf{M}_3$. Donc B est diagonalisable.

QED