Premier Partiel de Mathématiques

9 octobre 2017 — durée : 2 h

– Barème indicatif–

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème. Le barème (indicatif) de l'épreuve est

$$24 \;=\; 6 \text{ (Exercice)} \;+\; 8 \text{ (Problème Partie 1)} \;+\; 10 \text{ (Problème Partie 2)}\,.$$

La qualité de la rédaction interviendra pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice —Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent (en justifiant vos calculs). Justifier pourquoi elles n'existent pas sinon.

$$\text{a)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n+\sin(e^n)}{n} \qquad \text{b)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n} \qquad \text{c)}\ \lim_{n\to+\infty} (-1)^n$$

Problème —

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par
$$f_n(x) \;=\; x^n \ln x\,.$$
   a) Pour quels $x \in \mathbb{R}^{+*}$ a-t-on respectivement $f_n(x) > 0$, $f_n(x) = 0$, $f_n(x) < 0$?
   b) Démontrer, en utilisant uniquement le signe de $\ln x$ pour $x > 0$ et la propriété
$$\forall\, a > 0\,,\ \forall\, b > 0\,, \quad \ln(ab) \;=\; \ln a + \ln b\,,$$
   que la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   c) En déduire, sans utiliser de fonction dérivée, que la restriction de f_n à $[1, +\infty[$ est strictement croissante.
   d) En déduire que la restriction de f_n à $[1, +\infty[$ est injective puis que f_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f_n([1, +\infty[)$.

2. **On admet maintenant que** $f_n([1, +\infty[) = \mathbb{R}^+$ et on s'intéresse, pour $n \in \mathbb{N}^*$, à l'équation
$$(E_n) \qquad x^n \ln x \;=\; 1$$
   d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ et que $x_n \in [1, +\infty[$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n)$.
   c) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   d) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (i.e. a une limite réelle).
   e) Déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Premier Partiel de Mathématiques

Correction

Correction Ex.– a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(e^n) \in [-1,1]$ donc

$$1 \underset{n\to+\infty}{\longleftarrow} 1-\frac{1}{n} \;=\; \frac{n-1}{n} \;\leq\; \frac{n+\sin(e^n)}{n} \;\leq\; \frac{n+1}{n} \;=\; 1+\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+\sin(e^n)}{n} = 1$ par le théorème des gendarmes.
b) Puisque $|-\frac{2}{3}| < 1$, on a $(-\frac{2}{3})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n} \;=\; \frac{3^n\big(1-(-\frac{2}{3})^n\big)}{3^n\big(1+(-\frac{2}{3})^n\big)} \;=\; \frac{1-(-\frac{2}{3})^n}{1+(-\frac{2}{3})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\,.$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$ donc la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins deux valeurs d'adhérence, -1 et 1 (ce sont d'ailleurs les seules), donc ne converge pas.

Correction Pb.–

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$f_n(x) \;=\; x^n \ln x\,.$$

   a) Comme $x^n > 0$ pour tout $x > 0$, le signe de $f_n(x)$ est celui de $\ln x$ et donc : $f_n(x) > 0$ lorsque $x > 1$, $f_n(x) = 0$ lorsque $x = 1$ et $f_n(x) < 0$ lorsque $x \in]0,1[$.

   b) Il s'agit de montrer que $0 < x < y$ implique $\ln x < \ln y$, ce qui découle de :

$$\ln y \;=\; \ln(x\frac{y}{x}) \;=\; \ln x + \ln(\frac{y}{x}) \underset{\frac{y}{x}>1}{>} \ln x\,.$$

   c) Par suite, si $1 \leq x < y$, on a

$$f_n(x) \;=\; x^n \ln x \underset{x^n>0}{<} x^n \ln y \underset{\ln y>0}{\leq} y^n \ln y \;=\; f_n(y)$$

   d'où la stricte croissance de f_n sur $[1,+\infty[$.

   d) La restriction de f_n à $[1,+\infty[$ est strictement croissante donc injective. Son image est de plus $f_n([1,+\infty[)$ par définition. Ainsi $f_n\big|_{[1,+\infty[} : [1,+\infty[\to f_n([1,+\infty[)$ est bijective étant à la fois injective et surjective.

2. **On admet maintenant que** $f_n([1,+\infty[) = \mathbb{R}^+$ et on s'intéresse, pour $n \in \mathbb{N}^*$, à l'équation

$$(E_n) \qquad x^n \ln x \;=\; 1$$

   d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

   a) D'après la question précédente, (E_n) admet une unique solution x_n dans $[1,+\infty[$ (puisque $f_n : [1,+\infty[\to f_n([1,+\infty[) = \mathbb{R}^+$ est bijective). De plus, $x \in]0,1[$ implique $f_n(x) < 0$ donc $f_n(x) \neq 1$ et $x_n \in [1,+\infty[$ est donc l'unique solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{R}^{+*}$.

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leq x_{n+1}$ donc, puisque $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n \ln x_{n+1} \geq 0$:

$$f_n(x_{n+1}) \;\leq\; x_{n+1} f_n(x_{n+1}) \;=\; x_{n+1}^{n+1} \ln x_{n+1} \;=\; 1 \;=\; f_n(x_n)\,.$$

c) La fonction f_n étant strictement croissante sur $[1, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} \leq x_n$ (puisque $x_{n+1} > x_n$ impliquerait $f_n(x_{n+1}) > f_n(x_n)$), ce qui signifie que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est par conséquent décroissante et minorée par 1. D'après le cours, elle admet donc une limite $\ell \in [1, +\infty[$. Notons de plus que l'on a par décroissance de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \geq \ell$.

e) La fonction f_n étant croissante sur $[1, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on déduit donc de $x_n \geq \ell \geq 1$ que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \;=\; f_n(x_n) \;\geq\; f_n(\ell) \;=\; \ell^n \ln \ell\,.$$

On a donc nécessairement $\ell = 1$ puisque $\ell > 1$ impliquerait $\ell^n \ln \ell \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, d'où une contradiction avec $\ell^n \ln \ell \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.