Rappel de cours

Definition 1. Bla bla

Exercice 1

Exercice 1.a

Soit D une droite vectoriel, $D = \{M|\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ et D' une demi-droite fermée (ou ouverte) d'origine A', $D' = \{M'|\overrightarrow{A'M'} = \lambda'\overrightarrow{u}, \lambda' \in \mathbb{R}^+\}$.

Soit A le point de la droite D tel que $F(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$, et les 2 points M_1 et M_2 tel que le point A soit au milieu du segment M_1M_2. Donc $\overrightarrow{AM_1} = -\overrightarrow{AM_2}$. Si l'application linéaire F existe alors on a $F(\overrightarrow{AM_1}) = F(-\overrightarrow{AM_2}) = -F(\overrightarrow{AM_2})$.

Soit le point M_2' tel que $F(\overrightarrow{AM_2}) = \overrightarrow{A'M_2'}$. Il existe λ_2' tel que $\overrightarrow{A'M_2} = \lambda_2'\overrightarrow{u}, \lambda_2' \in \mathbb{R}^+$. Il n'existe pas de λ_1 positif tel que $\overrightarrow{A'M_1} = \lambda_1'\overrightarrow{u}$. Ceci contredit l'existence de l'application linéaire.

Exercice 1.b

Si l'application linéaire F existe alors $F(c\overrightarrow{O}) = cF(\overrightarrow{O})$, mais par définition de O on a $c\overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}$ donc

$$F(c\overrightarrow{O}) = F(\overrightarrow{O}) = cF(\overrightarrow{O})$$

Donc $F(\overrightarrow{O}) = \overrightarrow{O}$ car c est différent de 0. Ceci contredit l'hypothèse que l'image de l'application F est privée de l'origine O.

Exercice 1.c

Soit l'application $F : \mathbb{R}^2 \setminus O \to \mathbb{R}$ tel que $F(x, y) = x - y$. Montrons que l'application F est linéaire.

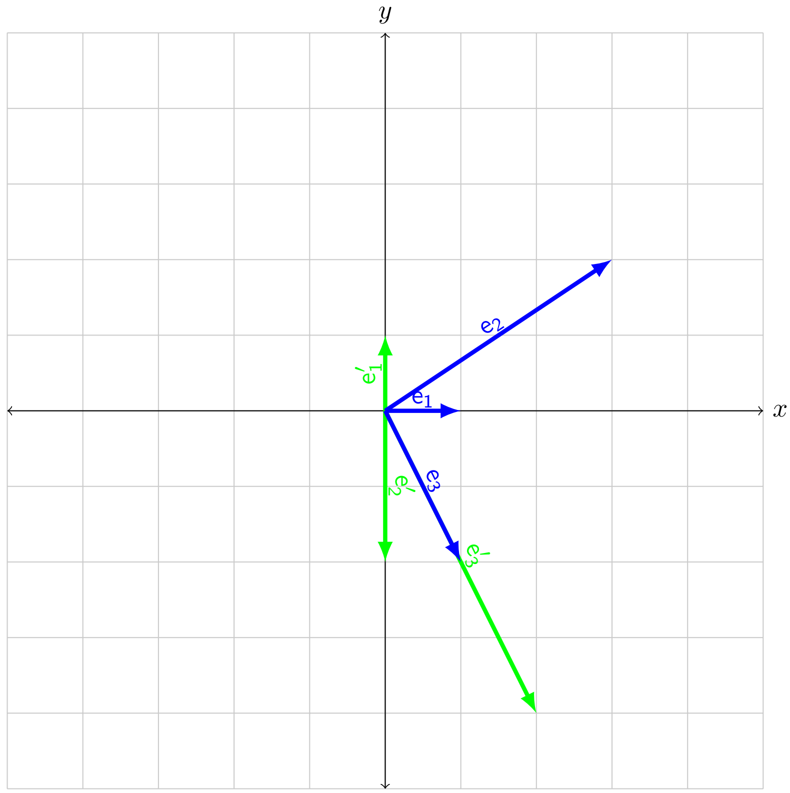
$$F(c(x, y)) = F((cx, cy)) = cx - cy = c(x - y) = cF((x, y))$$

et

$$F(A_1)+F(A_2) = F(x_1, y_1)+F(x_2, y_2) = x_1-y_1+x_2-y_2 = (x_1+x_2)-(y_1+y_2) = F((x_1+x_2, y_1+y_2)) = F(A_1+A_2)$$

Exercice 2

Exercice 2.a



$F(e_2) = F(-e_3 + 4e_1) = -F(e_3) + 4F(e_1) = -e'_3 + 4e'_1 = -(2,-4) + 4(0,1) = (-2,0) \neq e'_2 = (3,2)$, donc pas linéaire.

Exercice 2.b

$$\begin{cases} (1,0,0).\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} & = (0,0,0) \\ (0,1,0).\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} & = (0,0,1) \\ (0,0,1).\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} & = (1,0,0) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} m_{11} & = 0 \\ m_{21} & = 0 \\ m_{31} & = 0 \\ m_{12} & = 0 \\ m_{22} & = 0 \\ m_{32} & = 1 \\ m_{13} & = 1 \\ m_{23} & = 0 \\ m_{33} & = 0 \end{cases}$$

Solution unique.

$$(x,y,z).\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=(z,0,y)$$

Exercice 2.c

$$\begin{cases}(1,0,0).\begin{pmatrix}m_{11}&m_{21}&m_{31}&m_{41}\\m_{12}&m_{22}&m_{32}&m_{42}\\m_{13}&m_{23}&m_{33}&m_{43}\end{pmatrix}&=(1,0,0,0)(\text{ie } X^3)\\(0,1,0).\begin{pmatrix}m_{11}&m_{21}&m_{31}&m_{41}\\m_{12}&m_{22}&m_{32}&m_{42}\\m_{13}&m_{23}&m_{33}&m_{43}\end{pmatrix}&=(0,1,0,0)(\text{ie } X^2)\\(0,0,1).\begin{pmatrix}m_{11}&m_{21}&m_{31}&m_{41}\\m_{12}&m_{22}&m_{32}&m_{42}\\m_{13}&m_{23}&m_{33}&m_{43}\end{pmatrix}&=(0,0,1,0)(\text{ie } X)\\(1,1,1).\begin{pmatrix}m_{11}&m_{21}&m_{31}&m_{41}\\m_{12}&m_{22}&m_{32}&m_{42}\\m_{13}&m_{23}&m_{33}&m_{43}\end{pmatrix}&=(0,0,0,1)(\text{ie } 1)\end{cases}$$

donc

$$\begin{cases}m_{11}&=1\\m_{21}&=0\\m_{31}&=0\\m_{41}&=0\\m_{12}&=0\\m_{22}&=1\\m_{32}&=0\\m_{42}&=0\\m_{13}&=0\\m_{23}&=0\\m_{33}&=1\\m_{43}&=0\\m_{11}+m_{12}+m_{13}&=0\\m_{21}+m_{22}+m_{23}&=0\\m_{31}+m_{32}+m_{33}&=0\\m_{41}+m_{42}+m_{43}&=1\end{cases}$$

Pas de solution. QED

Exercice 2.d

$$\begin{cases}(1,0,0,0,1).\begin{pmatrix}m_{11}&m_{21}\\m_{12}&m_{22}\\m_{13}&m_{23}\\m_{14}&m_{24}\\m_{15}&m_{25}\end{pmatrix}&=(2,-1)\\(0,0,1,0,0).\begin{pmatrix}m_{11}&m_{21}\\m_{12}&m_{22}\\m_{13}&m_{23}\\m_{14}&m_{24}\\m_{15}&m_{25}\end{pmatrix}&=(3,0)\end{cases}$$

donc

$$\begin{cases}m_{11}+m_{15}&=2\\m_{21}+m_{25}&=-1\\m_{13}&=3\\m_{23}&=0\end{cases}$$

Il y a un infinité d'applications:

$$(X^3, X^2, X, 1).\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \\ 3 & 0 \\ m_{14} & m_{24} \\ 2-m_{11} & -1-m_{21} \end{pmatrix} = (m_{11}X^4+m_{12}X^3+3X^2+m_{14}X+2-m_{11}, m_{21}X^4+m_{22}X^3+m_{24}X-1-m_{21})$$

Exercice 2.e

$$\left\{\begin{array}{ll} (0,0,2,1).\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} \end{pmatrix} & = (0,1,1) \\ (1,1,1,0).\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} \end{pmatrix} & = (0,2,2) \\ (2,2,0,1).\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} \end{pmatrix} & = (0,3,3) \end{array}\right.$$

donc

$$\left\{\begin{array}{lll} 2m_{13}+m_{14} & =0 & \to m_{14} = -2m_{13} \\ 2m_{23}+m_{24} & =1 & \to m_{24} = 1-2m_{13} \\ 2m_{33}+m_{34} & =1 & \to m_{34} = 1-2m_{33} \\ m_{11}+m_{12}+m_{13} & =0 & \\ m_{21}+m_{22}+m_{23} & =2 & \\ m_{31}+m_{32}+m_{33} & =2 & \\ 2m_{11}+2m_{12}+m_{14} & =0 & \to 2m_{11}+2m_{12}-2m_{13}=0 \\ 2m_{21}+2m_{22}+m_{24} & =3 & \to 2m_{21}+2m_{22}-2m_{23}=2 \\ 2m_{31}+2m_{32}+m_{34} & =3 & \to 2m_{31}+2m_{32}-2m_{33}=2 \end{array}\right.$$

Il y a un infinité d'applications:

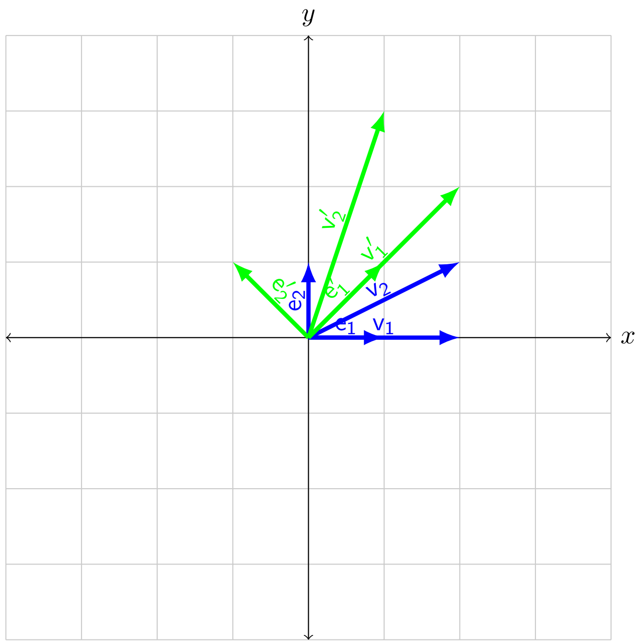
$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ -m_{11} & 3/2-m_{21} & 3/2-m_{31} \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.f

??

Exercice 3

Exercice 3.a

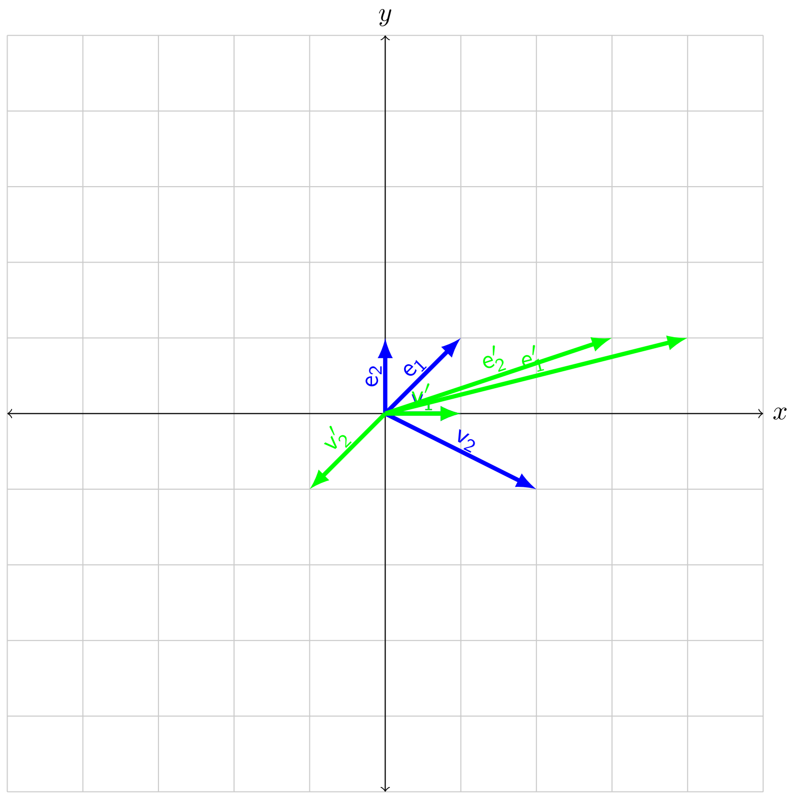


On a $F(v_1) = F(2e_1) = 2F(e_1) = (2, 2)$ et $F(v_2) = F(2e_1 + e_2) = 2F(e_1) + F(e_2) = (1, 3)$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

F est ????

Exercice 3.b

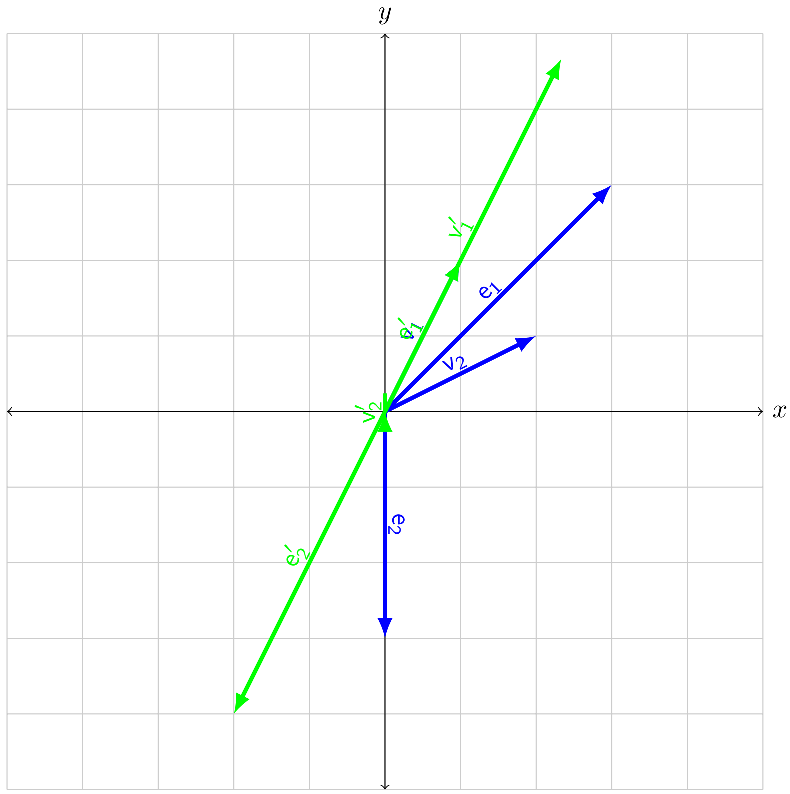


On a $F(v_1) = F(e_1 - e_2) = F(e_1) - F(e_2) = (1, 0)$ et $F(v_2) = F(2e_1 - 3e_2) = 2F(e_1) - 3F(e_2) = (-1, -1)$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

F est ??.

Exercice 3.c



On a $F(v_1) = F(1/3e_1 - e_2) = 1/3F(e_1) - F(e_2) = (7/3, 14/3)$ et $F(v_2) = F(2/3e_1 + 1/3e_2) = 2/3F(e_1) + 1/3F(e_2) = (0, 0)$

$$F = \begin{pmatrix} 7 & -2/3 \\ -2 & 4/3 \end{pmatrix}$$

F est projection sur la droite $y = 2x$ suivant le vecteur $(-2, -1)$.