Exo 1

Rappel de cours:

- Une fonction dérivable est continue, par contre le réciproque n'est pas vraie
- Une fonction est dérivable sur un intervalle si elle est dérivable en tout point de cette intervalle
- Une fonction est dérivable en un point a si $\exists l, \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ ou $\exists l, \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- une fonction est dérivable sur un intervalle donn si elle est un assemblage de fonctions connues et drivables sur cette intervalle.

La fonction $f(x) = |x-\pi|sin(x)$ est égale à

$$f(x) = \begin{cases} (x-\pi)sin(x) & x \geq \pi \\ (\pi - x)sin(x) & x < \pi \end{cases}$$

Les deux parties sont un assemblage fonctions dérivables sur leur intervalle. Il reste à démontrer si la fonction est dérivable en π.

$$\exists l, \lim_{x\to\pi} \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = l$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to\pi^+} \frac{(x-\pi)sin(x)-(\pi-\pi)sin(\pi)}{x-\pi} \\ \lim_{x\to\pi^-} \frac{(\pi-x)sin(x)-(\pi-\pi)sin(\pi)}{x-\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to\pi^+} \frac{(x-\pi)sin(x)}{x-\pi} \\ \lim_{x\to\pi^-} \frac{-(x-\pi)sin(x)}{x-\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to\pi^+} sin(x) \\ \lim_{x\to\pi^-} -sin(x) \end{cases}$$

La fonction sinus est impaire, $sin(-x) = -sin(x)$. Donc

$$\begin{cases} \lim_{x\to\pi^+} sin(x) \\ \lim_{x\to\pi^-} sin(-x) \end{cases}$$

on a $\lim_{x\to\pi^-} sin(-x) = \lim_{x\to\pi^+} sin(x)$. La valeur l existe donc la fonction f est dérivable.

La proposition est Vraie.

Exo 2

Comme f est dérivable, on peut écrire son développement limité d'ordre 1 en 0; $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\epsilon(h)$.

En remplaçant h par $3h$ on a $f(x+3h) = f(x) + 3hf'(x) + 3h\epsilon(3h)$.
En soustrayant les 2 formules on a $f(x+3h) - f(x+h) = 2hf'(x) + 3h\epsilon(3h) - h\epsilon(h)$, soit $\frac{f(x+3h)-f(x+h)}{h} = 2f'(x) + 3h\epsilon(3h) - h\epsilon(h)$.
On a $\epsilon(3h) = \epsilon(h)$ par définition.

$$\frac{f(x+3h)-f(x+h)}{h} = 2f'(x) + 2\epsilon(h)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+3h)-f(x+h)}{h} = 2f'(x)$$

La proposition est Vraie.

Exo 3

Comme f est dérivable, on peut écrire son développement limité d'ordre 1 en x_0 est $f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\epsilon(x-x_0)$.
Donc lorsque $x_0 = 0$; $f(x) - f(0) = f'(0)(x-0) + (x-0)\epsilon(x-0)$

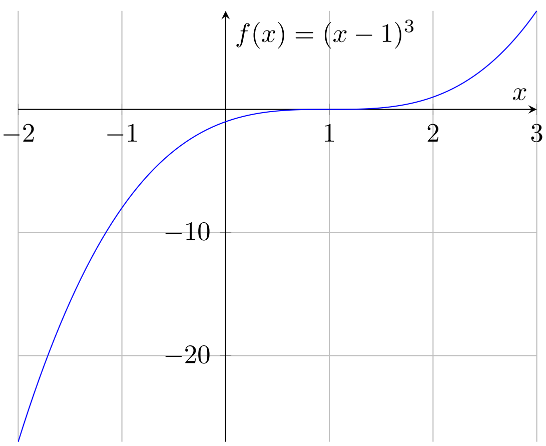
On prend $f(x) = e^{sin(2x)}$. On a $f(0) = e^{sin(2.0)} = 1$, $f'(x) = 2cos(2x)e^{sin(2x)}$, donc $f'(0) = 2$. Donc $f(x) = 1 + 2x + x\epsilon(x) \neq 1 + 3x + x\epsilon(x)$.

La proposition est Fausse.

Exo 4

Soit $f(x) = (x-1)^3$, le fonction est dérivable $f'(x) = 3(x-1)^2$ et $f'(1) = 0$. Le point 1 n'est pas un extremum de la fonction sur l'intervalle $[-2, 3]$. En effet, $f(-2) = -27 < f(1) = 0$ donc 1 n'est pas un minimum local et $f(3) = 8 > f(1) = 0$ donc 1 n'est pas un maximum local.

La proposition est Fausse.



Exo 5

Soit $f(x) = |x|$, la fonction est définie et continue en 0 mais pas dérivable en 0. En effet, si $f(x)$ est dérivable en a alors, $\exists l, \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1 \end{cases}$$

La proposition est Fausse.

Exo 6

La fonction $tan^3(x)$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ car c'est un asssemblage de fonctions dérivable sur cette intervalle.

$$(tan^3(x))' = 3(tan(x))'tan^2(x) = 3(1 + tan^2(x))tan^2(x) = 3(tan^2(x) + tan^4(x))$$

La proposition est Fausse.

Exo 7

Calculons la dériv'ee de $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g(x) = \sqrt{1+x^2} & g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$$

$h'(x) = \frac{1.\sqrt{1+x^2} - x.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

La fonction h n'a pas de maximum ou minimum si sa dérivée ne peux pas être nulle; $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \neq 0$.

$$\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$1 = 0$$

OU La fonction $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est strictement croissante. Donc le maximum de $h(x)$, si il existe, est la limite quand $X \to +\infty$ et le minimum de $h(x)$, si il existe, est la limite quand $X \to -\infty$. Remarquons que, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 1 + x^2$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < \sqrt{1+x^2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1$.

Lorsque $x \to +\infty$, $h(x)$ s'approche arbitrairement près de la valeur 1 mais sans jamais atteindre cette valeur. Donc, $f(x)$ n'admet pas de maximum.

Lorsque $x \to -\infty$, $h(x)$ s'approche arbitrairement près de la valeur -1 mais sans jamais atteindre cette valeur. Donc, $f(x)$ n'admet pas de minimum.

La proposition est Vraie.

Exo 8

On a $\lim_{x\to+\infty} x + 2sin(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x + 2sin(x) = -\infty$. Donc la fonction n'a pas de minima ou de maxima sur $\mathbb{R}$.

La proposition est Fausse.

Maintenant si la question est : est-ce que la fonction $f : x + 2sin(x)$ admet une infinité de maxima et minima *locaux* sur $\mathbb{R}$, alors: $f'(x) = 1 + 2cos(x)$ et $f'(x) = 0$ lorsque $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$.
Pour que les points soit des maximas ou des minimas il faut que $\lim_{x\to\frac{2\pi}{3})+} f'(x) = -\lim_{x\to\frac{2\pi}{3})-} f'(x)$. (ie changement du signe de la dérivée).

$$\lim_{x\to(\frac{2\pi}{3})+} f'(x) = \lim_{x\to(\frac{2\pi}{3})+} 1 + 2cos(x) = 0^-$$

$$\lim_{x\to(\frac{2\pi}{3})-} f'(x) = \lim_{x\to(\frac{2\pi}{3})-} 1 + 2cos(x) = 0^+$$

Donc $x = \frac{2\pi}{3}$ est un minima, de même pour $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

$$\lim_{x\to(\frac{4\pi}{3})+} f'(x) = \lim_{x\to(\frac{4\pi}{3})+} 1 + 2cos(x) = 0^+$$

$$\lim_{x\to(\frac{4\pi}{3})-} f'(x) == \lim_{x\to(\frac{4\pi}{3})-} 1 + 2cos(x) = 0^-$$

Donc $x = \frac{4\pi}{3}$ est un maxima, de même pour $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$.

Donc il existe une infinité de maxima et minima locaux sur $\mathbb{R}$.
La proposition est Vraie.

Exo 9

Une fonction est born'ee sur un intervalle $[a, b]$ si il existe deux valeurs m et M tel que $\forall x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Si on peut identifier une fonction qui tend vers la valeur M sans jamais l'atteindre entre $[a, b]$ alors la proposition est fausse.

Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \begin{cases} M * x & x \in [0, 1[\\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

La fonction est bornée car $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) < M$ et la fonction n'admet pas de maximum sur $[0, 1[$ car f tend vers la valeur M sans jamais l'atteindre.

La proposition est Fausse.

Exo 10

Preuve par l'absurde.

Admettons que la fonction f n'a pas de valeur maximale sur l'intervalle $[0, 1]$, donc $\exists c \in [0, 1], f(c) = +\infty$ [1].

La fonction f est continue sur l'intervalle $[0, 1]$, donc $\forall x_0 \in [0, 1], \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ *tel que* $(\forall x \in [0, 1] \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$ [2].

Au point c, la proposition [2] est fausse, la fonction f admet une valeur maximale sur l'intervalle $[0, 1]$.

On peut également utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.

La proposition est Vraie.

Exo 11

Preuve par l'absurde.

Soit une fonction f périodique de période p et continue.

Admettons que la fonction f n'a pas de valeur maximale sur l'intervalle $[0, p]$, donc $\exists c \in [0, p], f(c) = +\infty$ [1].

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc également sur l'intervalle $[0, p]$, donc $\forall x_0 \in [0, p], \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ *tel que* $(\forall x \in [0, p] \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$ [2].

Au point c, la proposition [2] est fausse, la fonction f admet une valeur maximale sur l'intervalle $[0, p]$. Comme la fonction est périodique, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x\%p)$, et $x\%p \in [0, p]$, donc la valeur maximale sur l'intervalle $[0, p]$ est également la valeur maximale de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

On peut également utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.

La proposition est Vraie.

Exo 12

Montrons:

$$\forall x, y \in [-1, 1], |x^{2013} - y^{2013}| \leq 2013|x - y|$$

$|x-y| \geq 0$, donc

$$\forall x, y \in [-1,1], \frac{|x^{2013} - y^{2013}|}{|x-y|} \leq 2013$$

$$\forall x, y \in [-1,1], \left| \frac{x^{2013} - y^{2013}}{x-y} \right| \leq 2013$$

$$\forall x, y \in [-1,1], |\sum_{k=0}^{2012} x^k.y^{2012-k}| \leq 2013$$

On a $x, y \in [-1,1]$, donc $x^m, y^m \in [-1,1]$ et $x^m.y^m \in [-1,1]$. Donc $\sum_{k=0}^{2012} x^k.y^{2012-k} \in [-2013, 2013]$ et $|\sum_{k=0}^{2012} x^k.y^{2012-k}| \leq 2013$.

Ou alors
Rappel de cours: *Théorème des accroissements finis*

Soit $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et drivable sur $]a;b[$. Il existe (au moins) un point $c \in]a;b[$ tel que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Soit $f : [-1;1] \mapsto \mathbb{R}\, x^{2013}$, est unr fonction continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. $f'(x) = 2013x^{2012}$. Donc, par le théorème des accroissements finis, $\exists c \in [-1;1]\, tel\, que\, f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On a $-1 \leq c \leq 1$, donc $c < |1|$ et $c^{2012} < |1|$. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = 2013c^{2012} \leq |2013|$.

La proposition est Vraie.

Exo 13

Partie 1: $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$?

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\frac{1}{2} < (n+1) - \sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

$$-\frac{1}{2} < n - \sqrt{n(n+1)}$$

$$-\frac{1}{2} < n - \sqrt{n(n+1)}.\frac{n+\sqrt{n(n+1)}}{n+\sqrt{n(n+1)}}$$

$$-\frac{1}{2} < \frac{-n}{n+\sqrt{n(n+1)}}$$

On a $n > 0$ et $n(n+1) > n^2$, donc $\sqrt{n(n+1)} > n$, $n + \sqrt{n(n+1)} > 2n$ et $\frac{1}{n+\sqrt{n(n+1)}} < \frac{1}{2n}$. Donc, $\frac{-n}{n+\sqrt{n(n+1)}} > \frac{-n}{2n} = \frac{-1}{2}$.

Partie 2:$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$?

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n+1}\sqrt{n} - n < \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{(n+1)n} - n < \frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{2} < n - \sqrt{n(n+1)}$$

Vrai car partie 1 est vraie.

La proposition est Vraie.

Exo 14

Prenons la valeur $x = -\frac{\pi}{2}$, on a $cos(-\frac{\pi}{2}) - 1 = -1 \nleq -\frac{\pi}{2}$.

La proposition est Fausse.

Exo 15

La fonction ln est strictement croissante, donc $\frac{ln\,a}{ln\,b} < 1$ car $a < b$. Pour que l'égalité soit vraie, il faut que $\frac{a-b}{c.ln(c)} < 0$ car $e^{\frac{a-b}{c.ln(c)}} < 1$.
On a $a - b < 0$ car $a < b$, donc il faut que $c.ln(c)$ soit positif. Ceci est vrai lorsque $c > 1$.

La proposition est Vraie.

Exo 16

Rappel de cours:
La fonction f est de classe $\mathbb{C}^1$ sur l'intervalle I si la fonction est dérivable sur I et que sa dérivé est continue sur I.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \begin{cases} x^2 sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un assemblage de fonctions dérivables. Calculons la dérivée de f.

$$\begin{array}{ll} h(x) = x^2 & h'(x) = 2x \\ g(x) = sin(\frac{1}{x}) & g'(x) = -\frac{1}{x^2}cos(\frac{1}{x}) \end{array}$$

Donc,

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \begin{cases} (x^2)(-\frac{1}{x^2}cos(\frac{1}{x})) + 2x.sin(\frac{1}{x}) = 2x.sin(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Il faut maintenant vérifier que la dérivée $f'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x \neq 0$, la fonction est continue car c'est un assemblage de fonctions continues, pour $x = 0$, la fonction est également continue. Il reste à vérifier que la fonction est continue en 0; $\lim_{x \to 0} 2x.sin(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x}) = 0$?

La fonction $cos(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0.

La proposition est Fausse.