Rappel de cours

Definition 1. Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes ssi:

- $(u_n)_{n\geq 0}$ est croisssante et $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
- $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n)_{n\geq 0} = 0$

Exercice 1

Montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}+\frac{1}{(n+1)^3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}=\frac{1}{(n+1)^3}$$

$\forall n, u_{n+1}-u_n>0$ donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croisssante.

Montrons que $(v_n)_{n\geq 1}$ est dćroissante.

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}-(u_n+\frac{1}{n^2})=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}-\frac{1}{n^2}=\frac{n+2}{(n+1)^3}-\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{-3n^2-n-1}{n^2(n+1)^3}$$

$\forall n, v_{n+1}-v_n<0$ donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroisssante.

Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1, u_n\leq v_n$

$$u_n\leq v_n, u_n\leq u_n+\frac{1}{n^2}$$

Vrai car $\frac{1}{n^2}$ est positif pour $n\geq 1$.

Montrons que $\lim_{n\to\infty}(v_n-u_n)_{n\geq 0}=0$

$$\lim_{n\to\infty}(v_n-u_n)_{n\geq 1}=\lim_{n\to\infty}(u_n+\frac{1}{n^2}-u_n)_{n\geq 1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

Vrai

Donc les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 2

Montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}$$

$\forall n, u_{n+1}-u_n>0$ donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croisssante.

Montrons que $(v_n)_{n\geq 1}$ est dćroissante.

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}-(u_n+\frac{1}{n!})=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}=\frac{2}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}$$

$$\frac{1-n}{(n+1)!}$$

$\forall n, v_{n+1}-v_n\leq 0$ donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroisssante.

Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1, u_n\leq v_n$

$$u_n\leq v_n, u_n\leq u_n+\frac{1}{n!}$$

Vrai car $\frac{1}{n!}$ est positif pour $n \geq 1$.

Montrons que $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n)_{n\geq 0} = 0$

$$\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n)_{n\geq 1} = \lim_{n\to\infty}(u_n + \frac{1}{n!} - u_n)_{n\geq 1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0$$

Vrai

Donc les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 3

3.1

$\forall n \geq 1, u_n > 0$ car u_n est une somme de nombres tous positifs.
Supposons $0 \leq 1 - u_n$, montrons que $0 \leq 1 - u_{n+1}$.

$$1-u_{n+1} = 1-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k+(n+1)} = 1-(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)}) = 1-(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2(n+1)}) = 1-u_n+\frac{1}{n+1}$$

3.2

Montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k+n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n} = \frac{1}{n+1+n}$$

$\forall n, u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croisssante.

3.3

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(2n)-\ln(n) = \ln(\frac{2n}{n}) = \ln(2)$$

QED