Rappel de cours

-

Exercice 1.1

$$\begin{cases} x & +y & -z & -t & =0 \\ x & -y & +z & -t & =0 \\ x & & & -t & =0 \\ & y & -z & & =0 \end{cases}$$

C'est un système d'équations homogène de rang 4, à 4 inconnues. Aucune ligne nulle. Les inconnues principales sont x et y. Les inconnues secondaires sont z et t.

Exercice 1.2

$$(S_0)\begin{cases} x & -3y & & =a_1 & [1] \\ & 3y & -6z & =a_2 & [2] \\ x & & -6z & =a_3 & [3] \end{cases}$$

Calculer [1]+[2], $x-6z=a_1+a_2$, qui est égale à l'équation [3]. Donc $a_1+a_2=a_3$.
Ou calculer [1]-[3], $-3y+6z=a_1-a_3$, qui est égale à la négation de l'équation [2]. Donc $a_2=a_3-a_1$.

$$(S_0)\begin{cases} x & -3y & & =1 & [1] \\ & 3y & -6z & =1 & [2] \\ x & & -6z & =2 & [3] \end{cases}$$

Lorsque $(a_1,a_2,a_3)=(1,1,2)$, le systm̀e est compatible car $2=1+1$. La solution du système est $(x,y,z)=(a,\frac{a-1}{3},\frac{a-2}{6})$.

Lorsque $(a_1,a_2,a_3)=(0,0,0)$, le systm̀e est compatible. La solution du système est $(x,y,z)=(a,\frac{a}{3},\frac{a}{6})$.

Exercice 1.3.a

La famille $((1,2,3,0),(3,1,2,0),(2,3,1,0),(3,2,1,0))$ engendre $\mathbb{R}^4$ si

$$\forall a\in\mathbb{R}^4, \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4, \begin{cases} 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & =a_1 \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & =a_2 \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & =a_3 \\ 0\lambda_1 & +0\lambda_2 & +0\lambda_3 & +0\lambda_4 & =a_4 \end{cases}$$

Le vecteur $(a_1,a_2,a_3,1)\in\mathbb{R}^4$ mais ne peux pas être généŕe par la famille. Donc, cette famille n'engendre pas l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

Exercice 1.3.b

La famille $((1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1))$ est libre si

$$\begin{cases} 1\lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & =0 \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +2\lambda_3 & =0 \\ 2\lambda_1 & +1\lambda_2 & +3\lambda_3 & =0 \\ 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +1\lambda_3 & =0 \end{cases} \implies \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

$$L_2\leftarrow L_2-L_1:\ \lambda_2-\lambda_3=0$$

$$L_3\leftarrow L_3-2L_1:\ -3\lambda_2-3\lambda_3=0$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 :\ -\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + L_1 :\ -6\lambda_3 = 0$$

Donc $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille est libre.

Exercice 1.4

La famille s'écrit $\mathcal{F} = ((1,1,0),(0,1,1),(0,1,-1))$.

La famille engendre-t-elle $\mathcal{P}_2$? bd

$$\forall a \in \mathcal{P}^2, \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & & = a_1 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = a_2 \\ & \lambda_2 & -\lambda_3 & = a_3 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 :\ -2\lambda_3 = a_3 - a_2$$

$$L_2 :\ 2\lambda_2 = a_2 + a_3$$

$$L_1 :\ 2\lambda_1 = 2a_1 - a_2 - a_3$$

Donc $\lambda_1 = \frac{2a_1-a_2-a_3}{2}$, $\lambda_1 = \frac{a_2+a_3}{2}$, $\lambda_1 = \frac{a_3-a_2}{2}$. La famille $\mathcal{F}$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$.

La famille est-elle libre?

$$\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & & = 0 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 :\ -2\lambda_3 = 0$$

Donc $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 1.5

La famille $\mathcal{F} = (x \to \sin(x), x \to f(x))$.

$$\forall g : x \to g(x), \exists\lambda_1 \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda_1(x \to \sin(x)) & = x \to g(x) \\ \lambda_1(x \to f(x)) & = x \to g(x) \end{cases}$$

Non. Il n'existe pas de λ_1 qui engendre la fonction $x \to \cos(x)$ car $sin(x) \neq \frac{\cos(x)}{\lambda_1}$.