Rappel de cours:

-

Exercice 3.3

Exercice 3.3.1

Prenons x_1 comme inconnue sedondaire du système d'équations. Donc, $(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 2, -1)$ et

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = 2x_1 \\ x_3 = -x_1 \end{cases}$$

Le système d'équations est:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & & = 0 \\ -x_1 & & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

Exercice 3.3.2

Le (v, w) est libre si $\lambda_1 v + \lambda_2 w = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc $\lambda_1(1, 2, -3) + \lambda_2(1, -1, 1) = 0$.
Le système d'équations est:

$$\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & = 0 \\ 2\lambda_1 & -\lambda_2 & = 0 \\ -3\lambda_1 & +\lambda_2 & = 0 \end{cases}$$

De $L1$, on a $\lambda_1 = -\lambda_2$, on remplace dans $L2$, $2\lambda_1 + \lambda_1 = 0$, $3\lambda_1 = 0$. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La famille est libre.

Le système d'équations de $Vect(v, w)$ est

$$\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & = x_1 \\ 2\lambda_1 & -\lambda_2 & = x_2 \\ -3\lambda_1 & +\lambda_2 & = x_3 \end{cases}$$

$L1 + L2 + L3$, $\lambda_2 = x_1 + x_2 + x_3$, en remplacant dans $L1$, on a $\lambda_1 = -x_2 - x_3$. Donc

$$\begin{cases} x_1 & = x_1 \\ 2(-x_2 - x_3) - (x_1 + x_2 + x_3) & = x_2 \\ -3(-x_2 - x_3) + (x_1 + x_2 + x_3) & = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 - 3x_3 & = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = 0 \end{cases}$$

Les équations cartésienne de $Vect(v, w)$ est $x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$' L'espace vectoriel est un plan.

Exercice 3.4

$$\begin{cases} a + b + 2c & = x \\ -2a + b - c + 3d & = y \\ a + 2b + 3c + d & = z \\ -2a + 2b + 4d & = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + 2c & = x \\ 3b + 3c + 3d & = 2x + y \\ b + c + d & = z - x \\ 4b + +4c + 4d & = 2x + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+2c & = x \\ b+c+d & = z-x \\ 0 & = 3(z-x)-(2x+y) = 3z-5x-y \\ 0 & = 4(z-x)-(2x+t) = 4z-6x-t \end{cases}$$

Trouver a, b, c, d tel que $a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{u_3} + d\vec{u_4} = \vec{0}$. Donc $x = y = z = t = 0$.

$$\begin{cases} a+b+2c & = 0 \\ b+c+d & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

Variables primaires a, b. Variables secondaires c, d. Donc

$$\begin{cases} a & = c+d-2c = d-c \\ b & = -(c+d) \end{cases}$$

Donc $(d-c)\vec{u_1} - (c+d)\vec{u_2} + c\vec{u_3} + d\vec{u_4} = \vec{0}$
QED