Rappel de cours

Travail

- La composante de la force d'un point M, $\overrightarrow{F}(M)$ sur l'axe $\mathcal{O}_x$ est donnée par le produit scalaire $f(x) = \overrightarrow{F}(M).\overrightarrow{i}$.
- Le travail d'une force $\overrightarrow{F}$ sur un segment $\overrightarrow{AB}$ est donné par :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB} = \int_{A\to B} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{i}\,dx = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx$$

- On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point A et B.

$$\forall A, B, C,\, W_{A\to B}\overrightarrow{F} = W_{A\to C}\overrightarrow{F} + W_{C\to B}\overrightarrow{F}$$

- Dans le cas où le chemin est rectiligne, si une force est conservatrice alors l'*énergie potentielle* associée à la force $\overrightarrow{F}$ est notée $E_p(x)$ est définie par :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) = \int_{A\to B} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{i}\,dx = E_p(x_b) - E_p(x_a)$$

.

- Le travail du poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ sur le segment $\overrightarrow{AB}$ est $W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) = -mg(z_b - z_a) = -mgh$.
- Le travail de la force de rappel élastique d'un ressort de raideur k, $\overrightarrow{F} = -k.x\overrightarrow{i}$ est $W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) = -\frac{1}{2}k(x_a^2 - x_b^2)$.

Énergie

- L'énergie mécanique d'un système $E_m = E_c + E_p$ avec E_c l'énergie cinétique qui dépend de la masse et de la norme de la vitesse du système physique étudié et de l'énergie potentielle E_p qui correspond aux forces exercées sur le système.
- L'énergie cinétique du système $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
- L'énergie potentielle qui correspond à l'ensemble des forces conservatives qui s'exercent sur le systéme, $E_p(B) - E_p(A) = W_{A\to B}(\overrightarrow{F}_{conservatives})$
- $E_m(B) - E_m(A) = W_{A\to B}(\overrightarrow{F}_{non\,conservatives})$

Puissance

- La puissance P représente l'énergie transférée uniformement (ie. le travail) pendant une unité de temps, $P = \frac{W}{\Delta t}$.
- $1\,W = 1\,J.s^{-1} = 1\,N.m.s^{-1} = 1\,kg.m^2.s^{-3}$

Exo 4.1.1

L'électron est soumis a la force gravitationnelle. Donc $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. On néglige l'énergie de la force gravitationnelle devant celle de l'énergie cimétique. On a $E_m = \frac{1}{2}mv^2 = 18\,keV$, donc $v = \sqrt{\frac{2*18\,keV}{m}}$ et $m = 9.10\,10^{-31}kg$, $18\,keV = 2.88\,10^{-12}$.

Exo 4.1.2

Il faut monter une masse de $m = 500 + 5 * 70 = 850\,kg$ à une vitesse de $v = 25/60 = 0.41\,m/s$. La puissance nécessaire est $P = m.g.v = 850 * 9.81 * 0.41 = 3418\,Watt$.

En l'abscence de frottements la puissance nécessaire pour lever la cabine d'ascenseur est égale à la puissance fournie par le moteur. Le puissance du poids est résistante, celle du moteur est motrice.
v On a $P = \frac{W}{\Delta_t}$, donc $W = P * \Delta_t = 3418 * 60 = 205kJ$.

Exo 4.1.3

Q1

TWh représente des $10^{12}Wh$.

Q2

On a $1W = 1J/s$. On produit $429.10^{12}Wh$ pour une année, donc on a produit $\frac{429.10^{12}}{24*365.25} = 48.10^{9}W$. Ce qui fait $48.10^{9} * (24 * 365.25 * 3600) = 1.510^{18}J$.

Q3

La puissance électrique moyenne d'un réacteur est de $\frac{48.10^{9}}{58} = 0.82MW$.

Exo 4.2

Q1

Le travail accompli par la force est $\overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB}$

Q2

On a $E_m = E_c + E_p$. L'énergie du système E_m est conservée . Donc $E_{c0} + E_p = E_{cf} + E_{p_f}$ avec $E_{p_f} = 0$ car aucune force ne s'exerce sur la masse. Donc l'accroissement de l'énergie cinétique est $E_{cf} - E_{c0} = E_p$.

Q3

La puissance moyenne développé est $P = \frac{\Delta_W}{\Delta_t} = \frac{E_p}{T} = \frac{\overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB}}{T}$.

Exo 4.2.3 - Traineau

Q1.a

3 forces s'exercent sur la masse m; la force de la pesanteur (verticale) $\overrightarrow{P}$, la force de réaction $\overrightarrow{R}$ (perpendiculaire au plan incliné) et la force de frottement statique $\overrightarrow{f}$ (parallèle au plan incliné). Comme la masse ne bouge pas, la somme des 3 forces est nulle.
On définit un repère orthonormé centré sur la masse m et parallèle au plan incliné. Dans ce repère, les 3 forces ont les coordonnées:

$$\begin{cases} P_x = -m.g.sin(\beta) & R_x = 0 & f_x = \|\overrightarrow{f}\| \\ P_y = -m.g.cos(\beta) & R_y = \|\overrightarrow{R}\| & f_y = 0 \end{cases}$$

Donc, on a $\|\overrightarrow{R}\| = m.g.cos(\beta)$ et $\|\overrightarrow{f}\| = m.g.cos(\beta)$.

Q1.b

Le coefficient de frottement statique k_s peut être déterminé pour l'angle minimum du plan incliné β_{min} faisant boug'e la masse m.

$$k_s = \frac{\overrightarrow{f_{max}}}{\overrightarrow{R}}$$

$$k_s = \frac{-m.g.sin(\beta_{min})}{-m.g.cos(\beta_{min})}$$

$$k_s = \tan(\beta_{min})$$

Q1.c

Ne marche pas pour $\beta = 60°$. Mais $\tan(6°) = 0.1$.

Q2.a

Le travail $W_{C\to D} = W_{C\to D}(\overrightarrow{f\prime}) + W_{C\to D}(\overrightarrow{R}) + W_{C\to D}(\overrightarrow{P})$. On a

$$\begin{cases} W_{C\to D}(\overrightarrow{R}) = 0 & La\, force\, \overrightarrow{R}\, est\, toujours\, perpendiculaire\, au\, deplacement. \\ W_{C\to D}(\overrightarrow{f'}) = \overrightarrow{f'}.l = -k_d.m.g.\cos(\beta).l \\ W_{C\to D}(\overrightarrow{P}) = -m.g.h = m.g.l.\sin(\beta) \end{cases}$$

Donc, $W_{C\to D} = m.g.l.(sin(\beta) - k_d.cos(\beta))$.

Q2.b

Le travail $W_{D\to E} = W_{D\to E}(\overrightarrow{f'}) + W_{D\to E}(\overrightarrow{R}) + W_{D\to E}(\overrightarrow{P})$. On a

$$\begin{cases} W_{D\to E}(\overrightarrow{R}) = 0 & La\, force\, \overrightarrow{R}\, est\, toujours\, perpendiculaire\, au\, deplacement. \\ W_{D\to E}(\overrightarrow{f'}) = \overrightarrow{f'}.l = -k_d.m.g.l' \\ W_{D\to E}(\overrightarrow{P}) = -m.g.h = 0 \end{cases}$$

Donc, $W_{C\to D} = -k_d.m.g.l'$.

Q2.c

Les forces étant toutes conservatives on a $E_m = W_{C\to D} + W_{D\to E} = 0$

$$m.g.l.(sin(\beta) - k_d.cos(\beta)) - k_d.m.g.l' = 0$$

$$l.(sin(\beta) - k_d.cos(\beta)) - k_d.l' = 0$$

$$(sin(\beta) - k_d.cos(\beta)) - k_d\frac{l'}{l} = 0$$

$$sin(\beta) - k_d.cos(\beta) - k_d.r = 0$$

$$sin(\beta) - k_d(r + cos(\beta)) = 0$$

$$k_d = \frac{sin(\beta)}{r + cos(\beta)}$$

Q2.d

On a
$$l' = \frac{l.(\sin(\beta) - k_d.\cos(\beta))}{k_d}$$

Donc $l' = 5\frac{\sin(6°)-0.05\cos(6°)}{0.05} = 5.48m$.

Exo 4.3.1

Q1

On a $F_g = G\frac{M_t.m}{(R_t+h)^2}$ avec $G = 6.674\,10^{-11}m^3.kg^{-1}.s^{-2}$, R_t le rayon de la terre et M_t la masse de la terre.

Q2

Le développement limité de $f(x)$ au point x_0 est $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + o(x - x_0)$. On a $f'(x) = n.(1+x)^{n-1}$. Donc,
$$f(x) = (1 + x_0)^n + n(1 + x_0)^{n-1}.(x - x_0) + o(x - x_0)$$

En prenant $x_0 = 0$, cela fait $f(x) = 1 + n.x^{n-1} + o(x)$.

Q3

On a $F_g = mg = G\frac{M_t.m}{(R_t+h)^2}$. Donc à petite altitude,
$$g = G\frac{M_t}{R_t^2(1+\frac{h}{R_t})^2} = G\frac{M_t}{R_t(1+2\frac{h}{R_t})} = G\frac{M_t}{R_t^2}$$
$$g = 9.82$$
avec $R_t = 6370\,km$ et $M_t = 5.972\,10^{24}\,kg$.

Q4

On a $\int\frac{K}{x^2} = K\int\frac{1}{x^2} = \frac{-K}{x} + C$

Q5

On a
$$W_{0\to h} = \int_0^h f(x)dx = \int_0^h G\frac{M_t.m}{(R_t+x)^2}dx$$

Changement de variable $X = R_t + x$ donc $dX = dx$.
$$W_{0\to h} = \int_{R_t}^{R_t+h} G\frac{M_t.m}{X^2}dX = [-G\frac{M_t.m}{X} + C]_{R_t}^{R_t+h}$$
$$W_{0\to h} = -G\frac{M_t.m}{R_t+h} + G\frac{M_t.m}{R_t} = -G.M_t.m(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_t+h})$$
$$W_{0\to h} = -G.M_t.m(\frac{R_t+h-R_t}{R_t(R_t+h)}) = -G.M_t.m(\frac{h}{R_t(R_t+h)})$$

Lorsque h est petit devant R_t on a:
$$W_{0\to h} = -G.M_t.m(\frac{h}{R_t^2}) = -m.g.h$$

Exo 4.3.2

Q1

$$\int ax^2 + bx + c = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + d$$

Q2

On a $\overrightarrow{F} = -k.x.\overrightarrow{i}$, donc

$$E_p(x) = W_{0\to x}F(x) = \int_0^x F(x) = \int_0^x -k.x = [\frac{-k}{2}x^2]_0^x = -\frac{1}{2}k.x^2$$

Q3

L'énergie potentielle gravitationnelle est $E_p(x) = mgx$.
La forme de l'energie potentielle totale est $E_p = mgx - -\frac{1}{2}k.x^2$.