Exercice 1

Rappel de cours:

- On appelle extraction toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
- On appelle suite extraite (ou sous-suite) d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. toute suite de la forme $(x_n)_{\varphi(n)\in\mathbb{N}}$ où φ est une extraction. Une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite obtenue partir de celle-ci en nen gardant que les lments $\varphi(n)$, mais en nombre infini.
- On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute limite finie d'une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit la fonction $f(n) = n*360$, la suite extraite $(cos_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante qui admet une valeur d'adhérence 1.

Donc la proposition est fausse.

Exercice 2

Soit les fonctions $f_1(n) = n*360$ et $f_2(n) = 90+n*360$, les suites $(cos_{f_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(cos_{f_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les valeurs 1 et 0. La suite $(cos\, n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente car elle admet 2 valeurs d'adhérence distinctes.

Donc la proposition est fausse.

Exercice 3

Rappel de cours:
Deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si

1. l'une est croissante et l'autre décroissante,
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

(a) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante ?

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

La suite S_n est croissante.

(b) $(S_n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante ?

$$(S_{n+1} + \frac{1}{n+1}) - (S_n + \frac{1}{n})) = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

La suite $(S_n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(c) $\lim_{n\to\infty}((S_n + \frac{1}{n}) - S_n) = 0$?

$$\lim_{n\to\infty}((S_n + \frac{1}{n}) - S_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Donc la proposition est vraie.

Exercice 4

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in]-1,1[$$

alors $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \approx l$.
Soit $a = u_{N_0}$ alors $u_{N_0+1} \approx l.a, u_{N_0+2} \approx l^2.a, \ldots, u_{N_0+m} \approx l^m.a$.
Par consequent, la suite u_n converge vers 0 car $|l| < 1$.
Donc la proposition est vraie.

Exercice 5

la proposition est vraie. Voir définition du cours.

Exercice 6

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x + 1 - sin\ x & x > 0 \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue en 0 ($f(0^-) = 0$ et $f(0^+) = 1$) donc elle n'admet pas de limite en 0.

Donc la proposition est fausse.

Exercice 7

Rappel de cours:

$$\lim_{x \neq x_0, x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \neq x_0, x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)\ si \lim_{x \neq x_0, x \to x_0} f(x) = y_0$$

Prenons $g(x) = sin\ x$ et $f(x) = \frac{\pi.x}{|2x|}$.

$$\lim_{x \neq 0, x \to 0} f(x) = \lim_{x \neq 0, x \to 0} \frac{\pi.x}{|2x|}$$

- Lorsque $x > 0$, $\frac{\pi.x}{|2x|} = \frac{\pi}{2}$, donc $\lim_{x \neq 0, x \to 0} g(f(x)) = g(\frac{\pi}{2}) = 1$
- lorsque $x < 0$, $\frac{\pi.x}{|2x|} = \frac{-\pi}{2}$, donc $\lim_{x \neq 0, x \to 0} g(f(x)) = g(\frac{-\pi}{2}) = 1$.

Donc la proposition est vraie.

Exercice 8

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(1 + x^2)}{lnx} = 2\ \ ?$$

Application de la règle de l'Hospital car $\lim_{x \to +\infty} ln(1 + x2) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} ln\, x = +\infty$.

On calcule les deux dérivés: $(ln(1 + x^2))' = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}$ et $(ln\, x)' = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(1 + x^2)}{lnx} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{1 + x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\frac{1}{x^2} + 1} = 2$$

Donc la proposition est vraie.

Exercice 9

$$\lim_{x \neq 0, x \to 0} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} = 1 \ \ ?$$

$$\lim_{x \neq 0, x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

et

$$\lim_{x \neq 0, x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} = 0$$

Limite indéterminée.
[1] $x > 0$ alors $x = \sqrt{x^2}$.

$$\lim_{x \neq 0, x \to 0^+} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} = \lim_{x \neq 0, x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+x^{-2}}}$$

$$= \lim_{x \neq 0, x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

[12] $x < 0$ alors $x = -\sqrt{x^2}$.

$$\lim_{x \neq 0, x \to 0^-} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} = \lim_{x \neq 0, x \to 0^-} \frac{1}{-\sqrt{x^2}\sqrt{1+x^{-2}}}$$

$$= \lim_{x \neq 0, x \to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$$

Donc la proposition est fausse.

Exercice 10

Rappel de cours:
Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ (donc y compris en x_0). On dit que f est continue en x_0 si $x \neq x_0$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$(H \circ f)(x) = \begin{cases} 1 + 1 - \frac{1}{2}cos^2 x & 1 - \frac{1}{2}cos^2 x \geq 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2}cos^2 x < 0 \end{cases}$$

Les fonctions 0 et $2 - \frac{1}{2}cos^2 x$ sont continues car elles sont une combinaison de fonctions continues. Il faut vérifier la continuité de la fonction $(H \circ f)(x)$ en $1 - \frac{1}{2}cos^2 x = 0$.

$$1 - \frac{1}{2}cos^2 x < 0$$

$$\frac{1}{2}cos^2 x > 1$$

$$cos^2 x > 2$$

$$|cos\, x| > \sqrt{2}$$

Il n'existe pas de x tel que $|cos\, x| > \sqrt{2}$. Donc $(H \circ f)(x) = 2 - \frac{1}{2}cos^2 x$.
Donc la proposition est vraie.

Exercice 11

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

La fonction $f(x)$ est croissante et n'est pas continue en 0.
Donc la proposition est fausse.

Exercice 12

La fonction se prolonge par continuité si $\exists l \in \mathbb{R}, \lim_{x\neq 0, x\to 0} g(x) = l$.

$$\lim_{x\neq 0, x\to 0} (e^{sin\ x} - 1) = 0$$

$$\lim_{x\neq 0, x\to 0} cos\ \frac{1}{x} \in [-1;1]$$

$$\lim_{x\neq 0, x\to 0} ln(3 + cos\ \frac{1}{x}) \in [ln\ 2; ln\ 4]$$

Donc

$$\lim_{x\neq 0, x\to 0} g(x) = 0$$

Le prolongement par continuité de la fonction $g(x)$ est:

$$p(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Donc la proposition est vraie.

Exercice 13

f est une fonction f continue alors

$$\forall x_0 \in [2,3], \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0\ tel\ que\ (\forall x \in [2,3] \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon) \quad [1]$$

f a pour limite ∞ en $x_0 = \frac{5}{2}$ alors

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0,\ tel\ que\ (]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\backslash\{x_0\} \subset [2,3]\ et\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\backslash\{x_0\},\ f(x) > A)$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0,\ tel\ que\ (\forall x \in [2,3] \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\backslash\{x_0\},\ f(x) > A) \quad [2]$$

Deux cas possibles,

- la fonction f est définie en x_0, alors $f(x_0) = \infty$ et la proposition [1] est fausse.
- la fonction f n'est pas définie en x_0, alors il faut trouver un prolongement par continuité de la fonction f en x_0. Il n'existe pas de valeur $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\neq x_0, x\to x_0} f(x) = l$ car $\lim_{x\neq x_0, x\to x_0} f(x) = \infty$. Donc, la fonction f n'est pas prolongeable en x_0.

Donc la proposition est fausse.

Exercice 14

A faire Preuve par l'absurde. Il faut admettre qu'une telle fonction existe pour montrer une contradiction. Donc elle n'existe pas.

Donc la proposition est fausse.

Exercice 15

Admettons que la fonction n'est pas constante alors $\exists x_0, \exists \eta > 0\ t.q.\ f(x_0 - \eta) = Z_1\ et\ f(x_0 + \eta) = Z_2$ et $Z_1 \neq Z_2$.

$\forall x \in]x_0 - \eta; x_0 + \eta[, \epsilon = 0.1, |f(x) - f(x_0)| \not< \epsilon$ ce qui contredit l'hypothèse de la fonction continue.

Donc la proposition est vraie.

Exercice 16

A faire Quand $c_n \leq \sqrt{2}$, on fait décroitre bn, quand $c_n > \sqrt{2}$, on fait croitre a_n, donc les deux suites convergent vers $\sqrt{2}$.

Donc la proposition est vraie.

QED