

Rappel de cours

k

Exercice 1

Exercice 1.1 pour A

On a

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 0 & 1 \\ 2 & i - \lambda & 2i \\ -1 & 0 & 0 - \lambda \end{pmatrix} = (i - \lambda)(\lambda^2 + 1)$$

Calculons $\det(A - \lambda I) = 0$, $(i - \lambda)(\lambda^2 + 1) = 0$, donc $sp(A) = \{i, -i\}$.

Exercice 1.2 pour A

Calculons

$$E_i(A) = \ker(A - iI) = \ker \begin{pmatrix} 0 - i & 0 & 1 \\ 2 & i - i & 2i \\ -1 & 0 & 0 - i \end{pmatrix}$$

Cherchons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2i \\ -1 & 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{cases} -i\lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 + 2i\lambda_3 & = 0 \\ -\lambda_1 + 0\lambda_2 - i\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Echelonnage

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0\lambda_2 + i\lambda_3 & = 0 (L_1 = L_1 * -i) \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 (L_2 = L_2 + 2iL_1) \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 (L_3 = L_3 + iL_1) \end{cases}$$

Donc, en fixant $\lambda_3 = c_3$ et $\lambda_2 = c_2$ on a $\lambda_1 = -ic_3$

$$\ker(A - iI) = \{(-i, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

et $\dim(E_i(A)) = \dim(\ker(A - iI)) = 2$.

Calculons

$$E_{-i}(A) = \ker(A + iI) = \ker \begin{pmatrix} 0 + i & 0 & 1 \\ 2 & i + i & 2i \\ -1 & 0 & 0 + i \end{pmatrix}$$

Cherchons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 2 & 2i & 2i \\ -1 & 0 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{cases} i\lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 + 2i\lambda_2 + 2i\lambda_3 & = 0 \\ -\lambda_1 + 0\lambda_2 + i\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Echelonnage

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 0\lambda_2 + i\lambda_3 & = 0 (L_1 = L_1 \cdot i) \\ 0\lambda_1 + 2i\lambda_2 + 4i\lambda_3 & = 0 (L_2 = L_2 + 2iL_1) \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 (L_3 = L_1 + iL_3) \end{cases}$$

Donc, en fixant $\lambda_3 = c_3$ on a $\lambda_1 = ic_3$ et $\lambda_2 = -2c_3$

$$\ker(A + iI) = \{(i, -2, 1)\}$$

et $\dim(E_{-i}(A)) = \dim(\ker(A + iI)) = 1$.

Exercice 1.3 pour A

Calculons $\dim(A)$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & i & 2i \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Echelonnage

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 2i \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Donc $\dim(A) = 3$ et $\dim(E_i(A)) + \dim(E_{-i}(A)) = 3$ donc diagonalisable.

On a

$$P = \begin{vmatrix} i & -i & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -i & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{vmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix}$$

Exercice 1.1 pour B

On a

$$\det(B - \lambda I) = \det \left(\begin{vmatrix} i - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} \right) = (i - \lambda)(\lambda^2 + 1)$$

Calculons $\det(B - \lambda I) = 0$, $(i - \lambda)(\lambda^2 + 1) = 0$, donc $sp(B) = \{i, -i\}$.

Exercice 1.2 pour B

Calculons

$$E_i(B) = \ker(B - iI) = \ker \left(\begin{vmatrix} i - i & 0 & 2 \\ 0 & 0 - i & 1 \\ 0 & -1 & 0 - i \end{vmatrix} \right)$$

Cherchons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 \\ 0\lambda_1 - i\lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Echelonnage

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3 & = 0(L_1 = L_3) \\ 0\lambda_1 - i\lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0(L_3 = L_1) \end{cases}, \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_3 & = -i\lambda_2 \end{cases}, \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - i(-i\lambda_2) & = 0 \\ \lambda_3 & = -i\lambda_2 \end{cases}$$

Donc, en fixant $\lambda_2 = c_2$ on a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = ic_2$

$$\ker(B - iI) = \{(0, 1, i)\}$$

et $\dim(E_i(B)) = \dim(\ker(B - iI)) = 1$.

Calculons

$$E_{-i}(B) = \ker(B + iI) = \ker \left(\begin{vmatrix} i+i & 0 & 2 \\ 0 & 0+i & 1 \\ 0 & -1 & 0+i \end{vmatrix} \right)$$

Cherchons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que

$$\begin{vmatrix} 2i & 0 & 2 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2i\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 \\ 0\lambda_1 + i\lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + i\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ i\lambda_2 & = \lambda_3 \\ \lambda_2 & = -i\lambda_3 \end{cases}$$

Donc, en fixant $\lambda_2 = c_2$ on a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = ic_2$

$$\ker(B - iI) = \{(0, 1, i)\}$$

et $\dim(E_{-i}(B)) = \dim(\ker(B + iI)) = 1$.

Exercice 1.3 pour B

Calculons $\dim(B)$.

$$\begin{vmatrix} -i & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Echelonnage

$$\begin{vmatrix} -i & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Donc $\dim(B) = 3$ et $\dim(E_i(B)) + \dim(E_{-i}(B)) = 2$ donc pas diagonalisable.

Exercice 2

Si k est une valeur propre d'un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ alors $\exists v \in E, v \neq 0_E, f(v) = k.v$. L'endomorphisme f est surjective donc $\text{im}(f) = E$, et $\dim(\text{im } f) = \dim(E)$ [1]. Preuve par l'absurde. Supposons que 0 soit une valeur propre de f , $\exists v \in E, v \neq 0_E, f(v) = 0.v = 0_E$. Donc $v \in \ker(f)$. On a $\dim(\ker f) + \dim(\text{im } f) = \dim(E)$, donc par [1], on a $\dim(\ker f) = 0$ ce qui contredit l'existence de v .

Exercice 3

Exercice 3.1

Non, la matrice nulle est diagonale mais n'est pas inversible car son déterminant est nul.

Exercice 3.2

On a $\text{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \det(A - \lambda.Id_n) = 0\}$ et la matrice A est inversible si son déterminant est non nul. Le déterminant d'une matrice diagonale est égal à $\prod_{i=1}^n a_{ii}$. La matrice $A - \lambda.Id_n$ est diagonale donc pour avoir son déterminant égale à nul il faut que $\prod_{i=1}^n a_{ii} - \lambda$, donc $\text{Sp}(A) = \{a_{ii}\}$. D'un autre coté, pour que A soit inversible on a $\prod_{i=1}^n a_{ii} \neq 0$ (ie. $\forall i, a_{ii} \neq 0$). Donc, il faut que $0 \notin \text{Sp}(A)$.

Exercice 3.3

Si la matrice A est diagonalisable alors il existe une matrice P tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Donc d'après l'exercice précédent, il faut que

Exercice 4**Exercice 4.1**

La base \mathcal{B} a $n+1$ vecteurs indépendents, dont sa dimension est $n+1$.

Exercice 4.2

Soit 2 polynomes $P_a = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $P_b = \sum_{i=0}^n b_i X^i$, on a $P_a + P_b = \sum_{i=0}^n a_i X^i + \sum_{i=0}^n b_i X^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i$. On a $c.P_a = c \cdot \sum_{i=0}^n a_i X^i = \sum_{i=0}^n c.a_i X^i$. On a $f(P) = X \cdot \frac{d}{dX} P = X \cdot \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$
On doit montrer que

- $f(P_a + P_b) = f(P_a) + f(P_b)$?, $f(P_a + P_b) = X \cdot \sum_{i=1}^n i(a_i + b_i) X^{i-1} = X \cdot (\sum_{i=1}^n i.a_i X^{i-1} + \sum_{i=1}^n i.b_i X^{i-1}) = X \cdot (\sum_{i=1}^n i.a_i X^{i-1}) + X \cdot (\sum_{i=1}^n i.b_i X^{i-1}) = f(P_a) + f(P_b)$
- $f(c.P_a) = c.f(P_a)$?, $f(c.P_a) = X \cdot \sum_{i=1}^n i(c.a_i) X^{i-1} = c \cdot X \cdot \sum_{i=1}^n i(a_i) X^{i-1} = c.f(P_a)$

Donc, f est une application linéaire.

Exercice 4.3

On a $f(P) = X \cdot \sum_{i=1}^n i.a_i \cdot X^{i-1} = \sum_{i=1}^n i.a_i \cdot X^i$, donc

$$f(P) = [f]_{\mathcal{B}} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1).a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n.a_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{vmatrix}$$

La matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est une matrice diagonale dont f est diagonalisable.

Exercice 4.4

On a $Sp(f) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \det([f]_{\mathcal{B}} - \lambda Id_n) = 0\}$. Donc

$$[f]_{\mathcal{B}} - \lambda Id_n = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 - \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_2 - \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1).a_{n-1} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n.a_n - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\det([f]_{\mathcal{B}} - \lambda Id_n) = \prod_{i=0}^n i.a_i \cdot X^i - \lambda = \prod_{i=0}^n (i.a_i \cdot X^i) - (n+1)\lambda$$

Mais $\prod_{i=0}^n (i.a_i \cdot X^i) = 0$, donc $Sp(f) = \emptyset$.

QED