Exercice 1

Rappel de cours:

- On appelle extraction toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
- On appelle suite extraite (ou sous-suite) d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. toute suite de la forme $(x_n)_{\varphi(n)\in\mathbb{N}}$ où φ est une extraction. Une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite obtenue partir de celle-ci en nen gardant que les lments $\varphi(n)$, mais en nombre infini.
- On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute limite finie d'une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit la fonction $f(n) = n*360$, la suite extraite $(cos_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante qui admet une valeur d'adhérence 1.

Donc la proposition est fausse.

Exercice 2

Soit les fonctions $f_1(n) = n * 360$ et $f_2(n) = 90 + n * 360$, les suites $(cos_{f_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(cos_{f_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les valeurs 1 et 0. La suite $(cos\, n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente car elle admet 2 valeurs d'adhérence distinctes.

Donc la proposition est fausse.

Exercice 3

Rappel de cours:
Deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si

1. l'une est croissante et l'autre décroissante,
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

   (a) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante ?

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

La suite S_n est croissante.

   (b) $(S_n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante ?

$$(S_{n+1} + \frac{1}{n+1}) - (S_n + \frac{1}{n})) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

La suite $(S_n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   (c) $\lim_{n\to\infty}((S_n + \frac{1}{n}) - S_n) = 0$?

$$\lim_{n\to\infty}((S_n + \frac{1}{n}) - S_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Donc la proposition est vraie.

Exercice 4

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in]-1,1[$$

alors $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \approx l$.
Soit $a = u_{N_0}$ alors $u_{N_0+1} \approx l.a, u_{N_0+2} \approx l^2.a, \ldots, u_{N_0+m} \approx l^m.a$.
Par consequent, la suite u_n converge vers 0 car $|l| < 1$.
Donc la proposition est vraie.

Exercice 5

la proposition est vraie. Voir définition du cours.

Exercice 6

A faire

Exercice 7

A faire

Exercice 8

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(1+x^2)}{lnx} = 2 \ \ ?$$

Application de la règle de l'Hospital car $\lim_{x\to+\infty} ln(1+x2) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} ln\, x = +\infty$.

On calcule les deux dérivés: $(ln(1+x^2))' = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}$ et $(ln\, x)' = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(1+x^2)}{lnx} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\frac{1}{x^2}+1} = 2$$

Donc la proposition est vraie.

Exercice 9

$$x \neq 0, \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} = 1 \ \ ?$$

Bizarre car

$$x \neq 0, \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Donc trivial. Il faut demander si il n'y a pas un typo.

Exercice 10

A faire
QED