Question 7

On prend la vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}/|AB|$ comme vecteur unité support de l'axe des abcisses et le point A comme origine du repère orthonormal. Dans ce repère les coordonneés des points A et B sont $(0,0)$ et $(r,0)$.

Question 8

Rappel de cours: Soit un point M de coordonnés (x_M, y_M). Dans le plan complexe, le point M correspond à l'équation $x_m + iy_m$.

- Le point symétrique par rapport à l'abcisse est M_1 avec les coordonnées $(x_{M1}, -y_{M1}) = (x_M, -y_M)$ soit $x_m - iy_m$. Dans le plan complexe, la transformation s d'un point M correspond au conjugué du point M.
- La rotation de centre C et d'angle θ d'un point M est égale à $C + e^{i\theta}(M - C)$
- La translation d'un point M par rapport à un vecteur $V = (V_x, V_y)$ est $M1 = (x_M + V_x) + i(y_M + V_y)$.

Soit M un point du plan complexe de coordonnée (x_M, y_M).

- L'expression complexe de $s(M)$ est le conjugué du point M. Donc, $s(M) = x_M - iy_M$.
- L'expression complexe de r_A^- correspond à la rotation $-\frac{\pi}{2}$ par rapport au point A du plan complexe. Donc, $r_A^-(M) = 0 + e^{-i\frac{\pi}{2}}(M - 0) = (cos(-\frac{\pi}{2}) + i.sin(-\frac{\pi}{2}))M = -i.M = y_M - ix_M$.
- L'expression complexe de r_B^+ correspond à la rotation $\frac{\pi}{2}$ par rapport au point B du plan complexe. Donc, $r_B^+(M) = r + e^{i\frac{\pi}{2}}(M - r) = r + (cos(\frac{\pi}{2}) + i.sin(\frac{\pi}{2}))(M - r) = r + i(M - r) = r - y_M + i(x_M - r)$.

Question 9

Soit M le point d'affixe $z = x_M + iy_M$.

- $M1 = s(M)$, et $z_1 = x_M - iy_M$.
- $M2 = r_A^-(M1)$, et $z_2 = -iM1 = -i(x_M - iy_M) = -y_M - ix_M$.
- $M3 = s(M2)$, et $z_3 == -y_M + ix_M$.
- $M4 = r_B^+(M3)$, et $z_4 = r - y_{M3} + i(x_{M3} - r) = r - x_M + i(-y_M - r)$.

Question 10

$\varphi(M) = r_B^+ \circ s \circ r_A^- \circ s(M)) = r_B^+(s(r_A^-(s(M)))) = M4 = (r - x_M) + i(-y_M - r)$.

Question 11

φ est une symétrie centrale si $\forall M, \exists C, t.q. C\, est\, au\, milieu\, du\, segment\, [M, \varphi(M)]$. Calculons les coordonnées du point C. $C = \frac{x_M + (-x_M + r)}{2} + i\frac{y_M + (-y_M - r)}{2} = \frac{r}{2} + i\frac{-r}{2}$.
Le point C est unique car les coordonnées du point C sont indépendantes du point de départ M. Donc, la transformation φ est une symétrie centrale.
À noter que le point C dépend uniquement des coordonnées des points A et B.

Question 12

Les coordonnées de A, B et C sont $0 + i0$, $r + i0$, $\frac{r}{2} + i\frac{-r}{2}$.

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{(0-r/2)+i(0+r/2)}{(r-r/2)+i(0+r/2)} = \frac{(-r/2+ir/2)}{r/2+ir/2} = \frac{(-r/2+ir/2)(r/2-ir/2)}{(r/2+ir/2)(r/2-ir/2)} = \frac{2ir^2/4}{2r^2/4} = i$$

$a - c$ correspond au vecteur $\overrightarrow{CA}$ et $b - c$ correspond au vecteur $\overrightarrow{CB}$, $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-r/2)^2 + (r/2)^2} = \sqrt{2}\frac{r}{2}$ et $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(r/2)^2 + (r/2)^2} = \sqrt{2}\frac{r}{2}$. Donc $AC = BC$.

L'angle orienté $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = arg(\frac{a-c}{b-c}) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$.

Question 13

Le point C est le centre de la symétrie centrale φ, par définition, c'est le milieu du segment $[M, \varphi(M)]$. Le point I est le centre du segment $[M, M4]$. Les points $\varphi(M)$ et $M4$ sont identiques, donc $I = C$. Les triangles CAB et IAB sont identiques. De la questions 12, on a montré que l'angle $\widehat{ACB} = \pi/2$. Donc le triangle IAC est rectangle en I. Comme $|AI| = |BI|$, le triangle est aussi isocèle.

Question 14

Des questions précédentes on a montré que la transformation φ est une symetrie centrale de centre $C = (r/2, r/2)$. Le centre de symétrie de la tranformation est le même quelque soit les points A et B. Il suffit ce calculer les coordonnées du triangles isocèle ACB, rectangle en C. Il y a 2 triangles possibles (un de chaque côté de la droite AB). Il faut prendre le triangle avec l'angle orienté $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ qui est négatif.

Soit, D, le centre du segment $[AB]$. Ses coordonnées sont $(\frac{1+2}{2}, \frac{1}{2})$. Le point C est la rotation de $\frac{\pi}{2}$ du point A par rapport à D. $C = D + e^{i\frac{\pi}{2}}(A - D) = (\frac{3}{2} + i\frac{1}{2}) + i(1 + i0 - (\frac{3}{2} + i\frac{1}{2})) = (\frac{3}{2} + i\frac{1}{2}) + i\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 2 + i0$. Les coordonnées du point C sont $(2, 0)$.

QED