Rappel de cours

Definition 1. Une suite de réels est dite *Suite de Cauchy* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } m \geq N) \implies |u_n - u_m| \leq \epsilon$$

Definition 2. Une fonction croissante $f(x)$ admet un point de discontinuité en x_0 si

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) - \lim_{x \to x_{0-}} f(x) > 0$$

Definition 3. Une fonction $f(x)$ définit sur une partie X de $\mathbb{R}$ est dite Lipschitzienne de rappoprt k si

$$\forall x_1, x_2 \in X, |f(x_2) - f(x_1)| < k.|x_2 - x_1|$$

Definition 4. Une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle I est continue en un point a si

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \eta \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

Definition 5. Une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle I est uniformément continue en un point a si

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \eta \in \mathbb{R}^+, \forall x_1, x_2 \in I, |x_2 - x_1| \leq \eta \implies |f(x_2) - f(x_1)| \leq \epsilon$$

Definition 6. Convergence simple de la série de fonction $f_n(x)$ vers la fonction $f(x)$.

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \geq 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Definition 7. Convergence uniforme de la série de fonction $f_n(x)$ vers la fonction $f(x)$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall x \geq 0, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Exercice 1.1

Exercice 1.1.1

On a $m > 0$ et $n > 0$ donc $\frac{m.n}{(n+m)^2} > 0$, donc 0 est un minorant.

$$\frac{m.n}{(n+m)^2} = \frac{1}{\frac{m}{n} + 2 + \frac{n}{m}}$$

Il faut montrer que

$$\begin{aligned}
&\tfrac{m}{n} + \tfrac{n}{m} \geq 2\\
&\tfrac{m^2+n^2}{m.n} \geq 2\\
&m^2 + n^2 - 2m.n \geq 0\\
&(m-n)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Donc 1/4 est un majorant.

On a 1/4 est la borne supérieure de A si il n'existe aucun majorant inférieur à 1/4. On a $1/4 \in A$ pour $m = n = 1$. Donc il n'existe pas de plus petit majorant.

On a 0 est la borne inférieure de A si il n'existe aucun minorant supérieur à 0. Quand $n = 1$, on a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{(m+1)^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0$$

Donc il n'exise pas de minorant supérieur à 0.

Exercice 1.1.2

Montrons que 2 est un majorant et 0 un minorant.

On a $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > 0$ car $n, m \in \mathbb{N}^*$. DOnc 0 est un minorant.

On a $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{m+n}{n.m}$, montrons que

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{n} \leq 2\\
&\tfrac{m+n}{n.m} \leq 2\\
&m + n \leq 2m.n\\
&m + n - 2m.n \leq 0\\
&m(1-n) + n(1-m) \leq 0
\end{aligned}$$

Vrai car $(1-n) \leq 0$, $(1-m) \leq 0$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$. Donc 2 est un majorant.

On a 2 est la borne supérieure de A si il n'existe aucun majorant inférieur à 2. On a $2 \in A$ pour $m = n = 1$. Donc il n'existe pas de plus petit majorant.

On a 0 est la borne inférieure de A si il n'existe aucun minorant supérieur à 0. On a

$$\lim_{m\to\infty, n\to\infty,} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \lim_{m\to\infty, n\to\infty,} \frac{1}{m} + \lim_{m\to\infty, n\to\infty,} \frac{1}{n} = 0$$

Donc il n'exise pas de minorant supérieur à 0.

Exercice 1.1.3

La fonction $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ est strictement croissante pour $x \leq -3$ ($f'(x) = \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$). Donc $f(-3) = 2$ est la borne supérieure de A. On a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+1/x}{1+2/x} = 1$$

Donc 1 est la borne inférieure. Oui la borne supérieure est atteinte pour $x = -3$ mais pas la borne inférieure car c'est une limite.

Maintenant si on prend $x \leq 3$ c'est autre chose car $\sup(A) = \infty$ et $\inf(A) = -\infty$ quand $x \to -2$.

Exercice 1.1.4

Comme l'ensemble A est borné alors il existe $\sup(A)$ et $\inf(A)$. Divisons en 3 cas; $x < y$, $x = y$, et $x > y$.

Pour le cas $x = y$ on a $0 \in A$. Pas très intéressant car $|x - y| \geq 0$. Donc, 0 n'est pas un majorant.

Pour le cas $x > y$ on a $|x - y| = x - y$. La plus grande valeur possible est quand $x = \sup(A)$ et $y = \inf(A)$ (ie. plus grand écart possible) donc $|\sup(A) - inf(A)|$.
Pour le cas $x < y$ on a $|x - y| = y - x$. La plus grande valeur possible est quand $x = \inf(A)$ et $y = \sup(A)$ (ie. plus grand écart possible) donc $|\sup(A) - inf(A)|$.

Exercice 1.1.5

$\sup(|f(x)|) = 2$ car

$$\begin{array}{ll}]-\infty,-1[& |f(x)| = 0 \\ [-1,0[& |f(x)| = 1 \\ [0,1] & |f(x)| = 1 \\ ]1,2] & |f(x)| = 2 \\ ]2,\infty[& |f(x)| = 0 \end{array}$$

Exercice 1.2

Exercice 1.2.1

On voit bien que cela diverge, car $1/n$ diverge. Donc il faut trouver un contre-exemple pour n et m. Prenons pour commencer $m = n + 1$ on a $|u_m - u_n| = \frac{1}{n+1}$, pour un ϵ donné on peut uoujors trouver un n tel que $1/n < \epsilon$. donc pas bon contre-exemple. Il faut éliminer les n pour trouver une constante.

Prenons $m = 2n$, $|u_m - u_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Là, c'est mieux. On a, pour $m = 2n$, $|u_m - u_n| > \frac{1}{2}$ donc la suite n'est pas de Cauchy (car si on prend $\epsilon = 1/3$, la propriété n'est pas vérifée pour $m = 2n$).

La suite n'est pas de Cauchy et elle est croissante donc elle diverge. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 1.2.2

$$\begin{array}{lll} u_2 & \frac{u_0+u_1}{2} & \\ u_3 & \frac{u_1+u_2}{2} & = \frac{u0+3u_1}{4} \\ u_4 & \frac{u_2+u_3}{2} & = \frac{3u0+5u_1}{8} \\ u_5 & \frac{u_3+u_4}{2} & = \frac{5u0+7u_1}{16} \end{array}$$

Calculons $|u_{n+1} - u_n|$

$$|\frac{u_{n-1} + u_n}{2} - \frac{u_{n-2} + u_{n-1}}{2}| = |\frac{u_n - u_{n-2}}{2}| = |\frac{\frac{u_{n-2}+u_{n-1}}{2} - u_{n-2}}{2}| = |\frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{2^2}|$$

Si n est pair alors

$$|u_{n+1} - u_n| = |\frac{u_1 - u_0}{2^n}| = \frac{|u_1 - u_0|}{2^n}$$

si n est impair alors

$$|u_{n+1} - u_n| = |\frac{u_2 - u_1}{2^(n-1)}| = |\frac{\frac{u_0+u_1}{2} - u_1}{2^(n-1)}| = |\frac{u_0 - u_1}{2^n}| = \frac{|u_0 - u_1|}{2^n}$$

Exercice 1.2.3

Preuve par récurrence. Quand $p = n + 2$ on a $u_p = \frac{u_n+u_{n+1}}{2}$ donc u_p est la moyenne entre u_n et u_{n+1} donc c'est compris entre u_n et u_{n+1}. Si $p > n + 2$ alors u_p compris entre u_n et u_{n+1} alors u_{p+1} est compris entre u_n et u_{n+1}. $u_{p+1} = \frac{u_{p-1}+u_p}{2}$, c'est la moyenne entre u_{p-1} et u_p mais u_p u_{p-1} compris entre u_n et u_{n+1} donc leur moyenne est aussi comptris entre u_n et u_{n+1}.

Exercice 1.2.4

Prenons N tel que $\frac{|u_0-u_1|}{2^N} < \epsilon$, montrons que $\forall m, n > N, |u_n - u_m| \leq \epsilon$. On sait que $|u_{N+1} - u_N| \leq \epsilon$ et que u_m et u_n sont compris entre u_N et u_{N+1} donc $|u_n - u_m| \leq \epsilon$. Donc la suite est de Cauchy, donc elle converge.

Exercice 1.3

Exercice 1.3.1

Faux pour une limite finie. La fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$ mais n'admet pas de limite finie à gauche et à droite en $x = 0$.

Mais Vrai pour une limite infinie car les valeurs a et b étant donné (ie. pas égale à l'infini), il existe toujours une limite à gauche et à droite pour une valeur de l'intervalle $[a, b]$. En effet, si on prend une valeur x dans $]a, b[$, on construit l'ensemble $\{f(y), y \in]a, x[\}$. Cet ensemble est majorée par $f(x)$ car la fonction f est croissante. Donc il existe une borne supérieure $f(x_-) \leq f(x)$. Par la définition d'une borne supérieure, on a $\forall \epsilon > 0, \exists y < x, f(x_-) - \epsilon < f(y) \leq f(x_-)$. Comme la fonction f est croissante, ceci montre que $\lim_{x \to x^-} f(x) = f(x_-)$. Donc la limite à gauche existe. On fait de même pour la limite à droite avec $y \in]x, b[$ et la borne inférieure $f(x_+)$.

Il faut qu'il apprenne à poser des questions.

Exercice 1.3.2

Une fonction croissante $f(x)$ admet un point de discontinuité en x_0 si

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) - \lim_{x \to x_{0-}} f(x) > 0$$

C'est á dire que la limite à gauche et à droite au point x sont différentes. La réponse est vraie car tu peux faire définir une injection des points de discontinuité vers les rationels. Coome l'ensemble des rationnels est dénombrable alors il existe un nombre fini de discontinuité.

Exercice 1.3.3

Supposons que la fonction f est k-lipschitzienne donc

$$\forall x_1, x_2 \in X, |f(x_2) - f(x_1)| < k.|x_2 - x_1|$$

Il faut montrer sa continuité.

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \eta \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

On part de

$$\forall x_1 \in R, |f(x) - f(a)| < k.|x - a|$$

Prenons $\eta = \frac{\epsilon}{k}$, il faut montrer

$$\forall x, |x - a| < \frac{\epsilon}{k} \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Mais f est k-lipschitzienne donc

$$\forall x, |x - a| < \frac{\epsilon}{k} \implies |f(x) - f(a)| < k.|x - a| < k.\frac{\epsilon}{k} = \epsilon$$

Vrai.

Il faut montrer sa continuité uniforme.

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \eta \in \mathbb{R}^+, \forall x_1, x_2 \in I, |x_2 - x_1| \leq \eta \implies |f(x_2) - f(x_1)| \leq \epsilon$$

Prenons $\eta = \frac{\epsilon}{k}$, il faut montrer:

$$\forall x_1, x_2 \in I, |x_2 - x_1| \leq \frac{\epsilon}{k} \implies |f(x_2) - f(x_1)| \leq \epsilon$$

Mais f est k-lipschitzienne donc

$$\forall x_1, x_2 \in I, |x_2 - x_1| \leq \frac{\epsilon}{k} \implies |f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1| < k\frac{\epsilon}{k} = \epsilon$$

Vrai aussi.

Exercice 1.3.4

Faux. La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas k-lipschitzienne.

1- $f(x)$ est uniformément continue? Il faut montrer que

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \eta \in \mathbb{R}^+, \forall x_1, x_2 \in I, |x_2 - x_1| \leq \eta \implies |f(x_2) - f(x_1)| \leq \epsilon$$

Prenons $\eta \leq \epsilon^2$.

$$\forall x_1, x_2 \in I, |x_2 - x_1| \leq \epsilon^2 \implies |\sqrt{(}x_2) - \sqrt{(}x_1)| \leq \epsilon$$

Pour $x_1 \leq x_2$, on a $\sqrt{(}x_2) - \sqrt{(}x_1) \leq \sqrt{x_2 - x_1}$. Donc

$$\forall x_1, x_2 \in I, |x_2 - x_1| \leq \epsilon^2 \implies |\sqrt{(}x_2) - \sqrt{(}x_1)| \leq \sqrt{x_2 - x_1} < \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$$

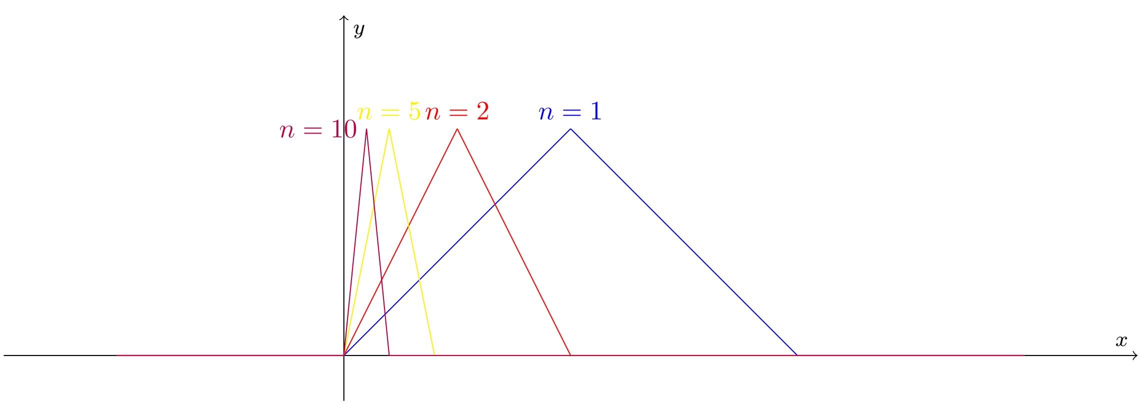
Donc $\sqrt{x}$ est uniformément continue.

2- $f(x)$ n'est pas k-lipschitzienne? Preuve par l'absurde. Supposons que $f(x)$ est k-lipschitzienne alors

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, |\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| \leq k.|x_2 - x_1|$$

si $k = 0$, absurde car $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$. si $k > 0$, prenons $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{1}{4k^2}$. Donc $|\sqrt{\frac{1}{4k^2}} - \sqrt{0}| = \frac{1}{2k}$ et $k|\frac{1}{4k^2} - 0| = \frac{1}{4k}$. d'oú, $\frac{1}{2k} < \frac{1}{4k}$ ce qui est absurde aussi. donc $\sqrt{x}$ n'est pas k-lipschitzienne.

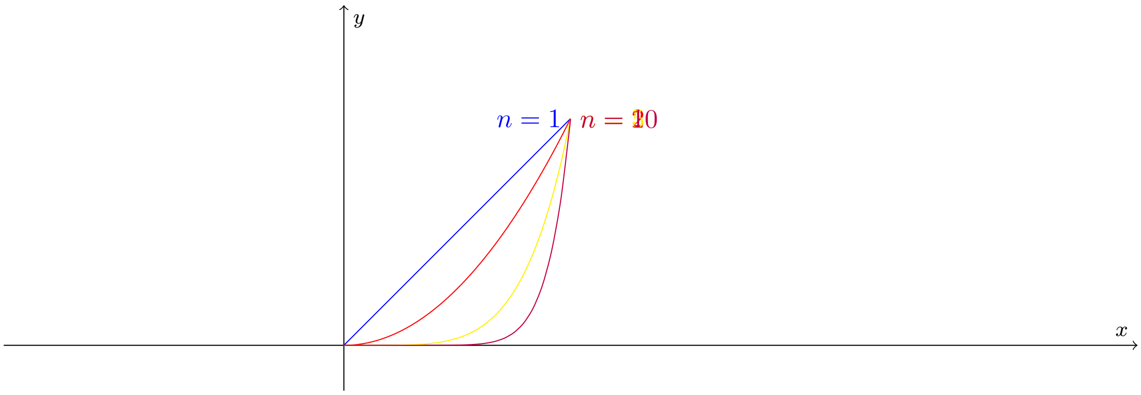
Exercice 1.4.1.1



Convergence simple. Pour un x donné, prenons $\epsilon > 0$ et $n_0 > 2/x$. Dans ce cas, $\forall n \geq n_0, f_n(x) = 0$ donc la série de fonction converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$.

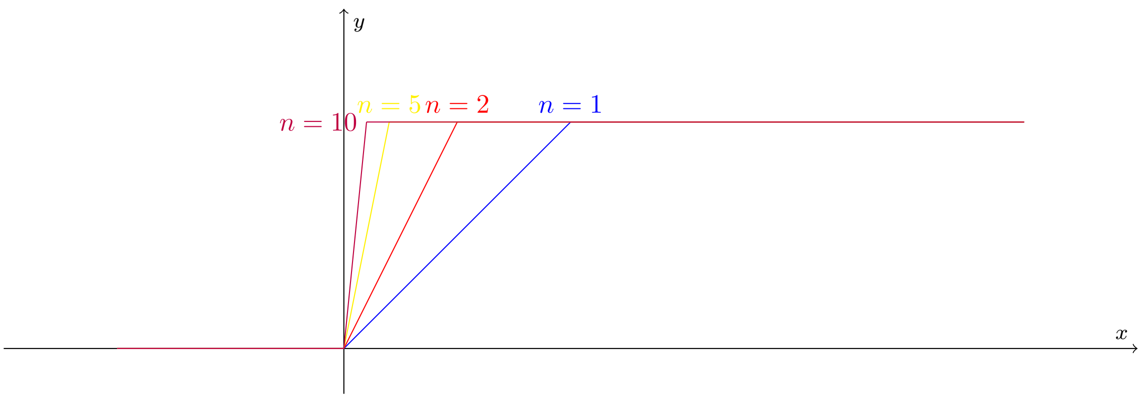
Convergence uniforme. Il n'existe pas de n_0 tel que pour tout x la fonction $f_n(x)$ converge. En effet, pour un $n \geq n_0$ donné, on a pour $0 \geq x \geq 1/n$ la fonction qui varie entre $0 < f_n(x) \leq 1$ et pour $1/n < x \leq 2/n$ la fonction qui varie entre $1 \geq f_n(x) \geq 0$. Donc pour un ϵ donné, on ne peut pas définir un n qui satisfasse la définition d'une suite convergente uniformément.

Exercice 1.4.1.2



Convergence simple. Pour un x et un $\epsilon > 0$ donnés, prenons n_0 tel que $x^{n_0} > \epsilon$. Dans ce cas, $\forall n \geq n_0, f_n(x) = 0$ donc la série de fonction converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$.

Exercice 1.4.1.3



Convergence simple. Pour un x donné, prenons $\epsilon > 0$ et $n_0 > 1/x$. Dans ce cas, $\forall n \geq n_0, f_n(x) = 1$ donc la série de fonction converge simplement vers la fonction $f(x) = 1$.

Convergence uniforme. Il n'existe pas de n_0 tel que pour tout x la fonction $f_n(x)$ converge. En effet, pour un $n \geq n_0$ donné, on a pour $0 \geq x \geq 1/n$ la fonction qui varie entre $0 \geq f_n(x) \geq 1$. Donc pour un ϵ donné, on ne peut pas définir un n qui satisfasse la définition d'une suite convergente uniformément.

Exercice 1.4.2.1

$$f_n(x) = 1_{[-n,n]} = \begin{cases} 1 & x \in [-n, n] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Quand $n \to \infty$, on a $f_n(x) = 1$ car x ne peut pas être en dehors de l'ensemble $[-\infty, \infty]$

Exercice 1.4.2.4

$$k_n(x) = 1_{[-1/n,1/n]} = \begin{cases} 1 & x \in [-1/n, 1/n] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Quand $n \to \infty$, on a $k_n(x) = 0$ car l'ensemble $[-1/\infty, 1/\infty]$ se rapproche de $\emptyset$.

Exercice 1.4.3

$f_n(x) = \frac{n\sin(x)}{1+n}$. On a $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+n} = 1$. Donc quand $n \to \infty$, la fonction f_n converge simplement vers la fonction $\sin(x)$. Pour un ϵ et un x donné, cherchons n_0 tel que $|f_{n_0} - sin(x)| < \epsilon$.

$$|f_{n_0}(0) - \sin(x)| = \left|\frac{n_0}{1+n_0}\sin(x) - \sin(x)\right| = \left|\frac{-\sin(x)}{1+n_0}\right| < \frac{1}{1+n_0}$$

Prenons, il faut que $\frac{1}{1+n_0} < \epsilon$ donc $n_0 > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$
Comme n_0 ne dépend pas de x la fonction converge uniforménent.

Exercice 1.4.4

$f_n(x) = x(1-e^{-nx})$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim_{n\to\infty} e^{-nx} = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} 1 - e^{-nx} = 1$. Vérifions que $f_n(x)$ converge vers $f(x) = x$. $|f_{n_0}(x) - x| < \epsilon$

$$|f_{n_0}(x) - x| = \left|x(1 - e^{-n_0 x} - x\right| = \left|xe^{-n_0 x}\right|$$

Pour un x et un ϵ donné, prenons un n_0 tel que $|xe^{-n_0 x}| < \epsilon$.

Pour la convergence uniforme, en utilisant les puissances comparées, on a $\lim_{n\to infy} |xe^{-n_0 x}| = 0$ pour tout x.