Rappel de cours:

-

Exercice 5.1

5.1.1.a

La relation ϕ est linéaire de E si

- $\forall A, B \in E, \phi(A+B) = \phi(A) + \phi(B)$
- $\forall A \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \phi(\lambda A) = \lambda \phi(A)$

Posons $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ et $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

En utilisant deux fois la distibitibité par rapport à l'addition, on a:

$$\phi(A+B) = M_1.(A+B).M_2 = M_1.(A.M_2 + B.M_2) = M_1.A.M_2 + M_1.B.M_2 = \phi(A) + \phi(B)$$

On a $(\lambda A).B = \lambda(A.B) = A.(\lambda B)$ (voir cours).

$$\phi(\lambda A) = M_1.(\lambda A).M_2 = M_1.(\lambda(A.M_2)) = \lambda(M_1.A.M_2) = \lambda\phi(A)$$

Donc la relation $\phi(M)$ est linéaire.

5.1.1.b

La matrice A est un point fixe de la relation ϕ si $\phi(A) = A$, soit

$$\phi(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} .A. \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = A$$

$$\phi(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = A$$

5.1.2.a

$$\phi(P_1+P_2) = ((P_1+P_2)(1), (P_1+P_2)'(2)) = ((P_1(1)+P_2(1)), (P_1'+P_2')(2)) = (P_1(1)+P_2(1), P_1'(2)+P_2'(2))$$
$$= (P_1(1), P_1'(2)) + (P_2(1), P_2'(2)) = \phi(P_1) + \phi(P_2)$$

Et

$$\phi(\lambda P) = (\lambda P(1), (\lambda P(2))') = (\lambda P(1), \lambda P'(2)) = \lambda(P(1), P'(2)) = \lambda\phi(P)$$

La relation ϕ est linéaire.

5.1.2.b

$$\phi(t-1) = ((t-1)(1), (t-1)'(2)) = ((t-1)(1), (1)(2)) = (0,1)$$

$$\phi((t-2)^2) = ((t-2)^2(1), ((t-2)^2)'(2)) = ((t-2)^2(1), (t^2-4t+4)'(2)) = ((t-2)^2(1), (2t-4)(2)) = (1,0)$$

On cherche P, tel que $\phi(P) = (1,-1)$. Comme la relation ϕ est linéaire on a

$$(1,-1) = 1.(1,0) - 1.(0,1) = 1.\phi((t-2)^2) - 1.\phi(t-1) = \phi(1.(t-2)^2) + \phi(-(t-1)) = \phi((t-2)^2-(t-1)) = \phi(t^2-5t+5)$$

Donc $P = t^2 - 5t + 5$.

5.1.3.a

$$\phi(f_1+f_2) = \int_0^1 (f_1+f_2)e^t dt = \int_0^1 f_1 e^t + f_2 e^t dt = \int_0^1 f_1 e^t + \int_0^1 f_2 e^t dt = \phi(f_1) + \phi(f_2)$$

$$\phi(\lambda f) = \int_0^1 (\lambda f)e^t dt = \int_0^1 \lambda f e^t dt = \lambda \int_0^1 f e^t dt = \lambda \phi(f)$$

5.1.3.b

Une fonction f de $E \to F$ appartient au noyau de ϕ si $\phi(f) = 0_F$. Une fonction est dite affine si elle est de la forme $f(t) = at + b$. Donc on cherche une fonction $f = at + b$ tel que $\phi(f) = 0$.

$$\phi(at+b) = \int_0^1 (at+b)e^t dt = \int_0^1 ate^t + be^t dt = a\int_0^1 te^t dt + b\int_0^1 e^t dt = a + b(e-1) = 0$$

car $\int e^t dt = e^t$ et $\int te^t dt = (t-1)e^t$.

Il faut trouver a et b tel que $a + b(e-1) = 0$. Prenons par exemple, $b = 0$ donc $a = 0$, et $b = 1$ donc $a = 1 - e$.
Les 2 fonctions affines sont $f_0(t) = 0t + 0 = 0$ et $f_1(t) = (1-e)t + 1$.

Exercice 5.2

5.2.1

$$f(x,y,z,t) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - y + 3z - t \\ 2x + y + 3z + 4t \\ -x + 2y - 4z + 3t \end{vmatrix}$$

5.2.2.a

$Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^4, f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$\begin{cases} x - y + 3z - t & = 0 \quad l_1 \\ 2x + y + 3z + 4t & = 0 \quad l_2 \\ -x + 2y - 4z + 3t & = 0 \quad l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t & = 0 \quad l_1 \\ -y + 3z + 6t & = 0 \quad 2l_1 - l_2 \\ y - z + 2t & = 0 \quad l_1 + l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t & = 0 \quad l_1 \\ y - z + 2t & = 0 \quad l_1 + l_3 \\ 2z + 8t & = 0 \quad (2l_1 - l_2) + (l_1 + l_3) \end{cases}$$

On a 3 variables primaires (x,y,z) et une variable secondaire (t). Donc $Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, X = (7t, -6t, -4t, t)\}$.

5.2.2.b

$$\left\{\begin{array}{lll} x-y+3z-t & =x_b & l_1 \\ 2x+y+3z+4t & =y_b & l_2 \\ -x+2y-4z+3t & =z_b & l_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x-y+3z-t & =x_b \\ y-z+2t & =x_b+z_b \\ 2z+8t & =3x_b-y_b+z_b \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x_b= & x-y+3z-t \\ z_b= & y-z+2t-(x-y+3z-t)=-x+2y-4z+3t \\ y_b= & 3(x-y+3z-t)-(2z+8t)+(-x+2y-4z+3t)=2x-y+3z-8t \end{array}\right.$$

La fonction f est injective ssi $Ker(f)=0_{\mathbb{R}^3}\}$. On a $Ker(f)=\{X\in\mathbb{R}^3, X=(7t,-6t,-4t,t)\}\neq 0_{\mathbb{R}^3}$. La fonction n'est pas injective.

La fonction est surjective ssi $Im(f)=\mathbb{R}^3$. On a $Im(f)=B=(x_b,y_b,z_b)=\mathbb{R}^3$. Donc la fonction f est surjective.

5.2.3.a

On a $u_1=3e_1-e_3=3(1,0,0,0)-(0,0,1,0)=(3,0,-1,0)$ et $u_2=e_2-e_4=(0,1,0,0)-(0,0,0,1)=(0,1,0,-1)$.
Donc $f(u_1)=(3-0-3-0,6-0+3-0,-3+0+4+0)=(0,9,1)$ et $f(u_2)=(0-1+0--1,0-1+0--8,-0+2-0-3)=(0,7,-1)$.

QED