Module Math 201 : Séries et Intégrales

Feuille d'exercices numéro 1

Croissances comparées et développements asymptotiques

Exercice 1 - Déterminer les limites des suites ci-dessous (on désigne par c un réel fixé ; si nécessaire on distinguera selon les valeurs de c).

$$a_n = c^n, \quad b_n = \frac{n^n}{n!}, \quad c_n = \frac{n!}{2^n}, \quad d_n = \frac{c^n}{n!}, \quad e_n = \sqrt{4 + \frac{(-1)^n}{n}}, \quad f_n = \frac{(-1)^n n^2 + 5}{n^2 + 8},$$

$$g_n = \frac{3n^2 - n + \cos n}{n^2 - \sin n}, \quad h_n = \sin(2^{-n})2^{-n}, \quad i_n = \frac{2n+3}{4n+5}, \quad j_n = \frac{2n^2 + 3 - 7}{e^n - n^8},$$

$$k_n = n^{1/\ln(n)}, \quad \ell_n = \ln(n)^{1/n}, \quad m_n = n^{1/n}, \quad o_n = \frac{n^n}{(n!)^{1/2}}, \quad p_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1}, \quad q_n = (n + 3\ln n)e^{-(n+1)}.$$

Exercice 2 - Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

$$a_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}, \quad b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}, \quad c_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}, \quad d_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right),$$

$$e_n = \ln\left(\sin\frac{1}{n}\right), \quad f_n = 1 - \cos\frac{1}{n}, \quad g_n = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}, \quad h_n = (n+1)^{1/(n+1)} - n^{1/n}.$$

Exercice 3 - Déterminer les limites des suites ci-dessous :

$$a_n = n\sin\frac{1}{n}, \quad b_n = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad c_n = n^2\Big((n+1)^{1/n} - n^{1/n}\Big), \quad d_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)},$$

$$e_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n, \quad f_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}.$$

Exercice 4 - Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin(x)\ln(1+x^2), \quad g(x) = \frac{1 - \cos(x)}{e^{x^2} - 1}, \quad h(x) = (1+x)^{1/3} - \arctan(x)\sqrt{1+x}.$$

Exercice 5 - Déterminer la limite quand x tend vers 0 de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x - \sin(x)}{x^3}, \quad g(x) = \frac{(1 - \cos(x))(2x + \sin(x))}{x^4 + \tan(x^3)}, \quad h(x) = \frac{\arcsin(x) - x}{x^3}.$$

Exercice 6 - Déterminer un équivalent simple, quand x tend vers 0, de chacune des fonctions suivantes (pour la première, a désigne un réel fixé : déterminer l'intervalle auquel il doit appartenir pour que la fonction soit bien définie quand x tend vers 0) :

$$f(x) = \frac{\arctan(x^a)}{1 + x^a}, \quad g(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}, \quad h(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad i(x) = (x^3 + x^2)^{1/3} - \sqrt{x^2 + 5x}.$$

Exercice 7 - Reprendre l'exercice précédent lorsque x tend vers $+\infty$.