Rappel de cours

Definition 1. Soit $u \to ||u||$ une norme $\mathbb{R}^m$. La distance sur $\mathbb{R}^m$ est la fonction $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ définie par $d(v, w) = ||w - v||$. En particulier, on notera d_1; d_∞; d_2 les distances associes $||.||_1$; $k.k1$; $k.k2$. Donc :

- $d_1((x_1, \ldots .x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = |y1 - x1| + \ldots + |y_m - x_m|$
- $d_\infty((x_1, \ldots .x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = max(|y1 - x1|, \ldots, |y_m - x_m|)$
- $d_2((x_1, \ldots .x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = \sqrt{(y1 - x1)^2 + \ldots + (y_m - x_m)^2}$

Definition 2.

Exercice 3.3

Exercice 3.3.1

La fonction $f(x)$ est un assemblage de fonctions continues sur le domaine $\mathbb{R} \setminus (0,0)$. Pour que la fonction soit bonée, il faut trouver une valeur $M_1, \forall(x,y) \in \mathbb{R} \setminus (0,0), f(x,y) \leq M_1$ (majorant) et une valeur $M_2, \forall(x,y) \in \mathbb{R} \setminus (0,0), f(x,y) \geq M_2$ (minorant). Il n'existe pas de méthode, il faut essayer des valeurs. Déjà on voit que suivant les valeurs de x et y, la fonction peut être positive ($xy > 0$) ou négative ($xy < 0$, donc les bornes ne sont pas 0 et $M_1 < 0$ et $M_2 > 0$ si elles existent. Il faut ensuite essayer des combinaisons possibles comme $x = y$, $x >> y$, $x << y$, (x,y) proche des points de non continuité (ici (0,0)).

$x = y, f(x,y) = 1$, $x >> y, f(x,y) = 0$, $x << y, f(x,y) = 0$, $(x,y) \approx (0,0), f(x,y)$ indéfinie. Donc essayons $M_1 = 1$.

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} \leq 1$$

$$0 \leq x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

Ceci est vrai $\forall(x,y) \in \mathbb{R}$, donc $M_1 = 1$ est un majorant. De même $M_2 = -1$ est un minorant. Donc $\forall(x,y) \in \mathbb{R} \setminus (0,0), -1 \leq f(x,y) \leq 1$.

Exercice 3.3.2.a

Prenons $\epsilon = 0.5$, et $(x,y)\alpha - proche(0,0)$ avec $x = y$. On a $f(x,y) = 1$. On a trouve un point $\alpha - proche$ de $(0,0)$ tel que $f(x,y) > \epsilon$ donc la fonction n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 3.3.2.b

$g(x,y) = xf(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ continue en $(0,0)$? Pour un ϵ donné, on cherche un α tel que si $|\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}| < \alpha$ alors $|f(x,y) - 0| < \epsilon$ (on prends 0 car on suppose que la continuité en $(0,0)$ est 0). On a $\sqrt{x^2+y^2} < \alpha$, donc $|y| < y^2 < \alpha^2$. Et on a $|\frac{2x^2}{x^2+y^2}| < 2$. Prenons $\alpha < \sqrt{\epsilon/2}$. Donc

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|y\frac{2x^2}{x^2+y^2}\right|$$

$$< \alpha^2.2 = \epsilon$$

Exercice 3.4

Calculons $|f(A) - f(B)|$.

$$|f(A) - f(B)| = |f(x_a, y_a) - f(x_b, y_b)| = |a(x_a - x_b) + b(y_a - y_b)|$$

On a $\|A - B\|_\infty = \max(|(x_a - x_b)|, |(y_a - y_b)|)$. Prenons $K = 2|\max(a,b)|$ montrons que

$$|a(x_a - x_b) + b(y_a - y_b)| < |\max(a,b)(x_a - x_b) + \max(a,b)(y_a - y_b)| = |\max(a,b)|.|(x_a - x_b) + (y_a, y_b)|$$

$$< |\max(a,b)|.|2\max((x_a - x_b), (y_a, y_b))| = |2\max(a,b)|.\max(|(x_a - x_b)|, |(y_a, y_b)|) = |2\max(a,b)|\|A - B\|_\infty$$

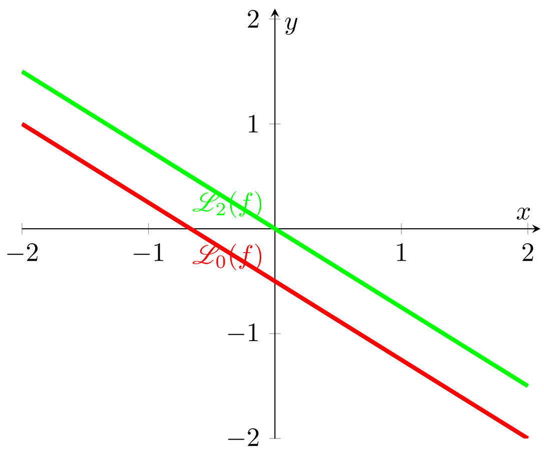
On a $\|A - B\|_2 = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$. Dans $\mathbb{R}^2$, on a $\|.\|_\infty < \|.\|_2$ on a donc,

$$|a(x_a - x_b) + b(y_a - y_b)| < |2\max(a,b)|\|A - B\|_\infty < |2\max(a,b)|\|A - B\|_2$$

Exercice 3.5

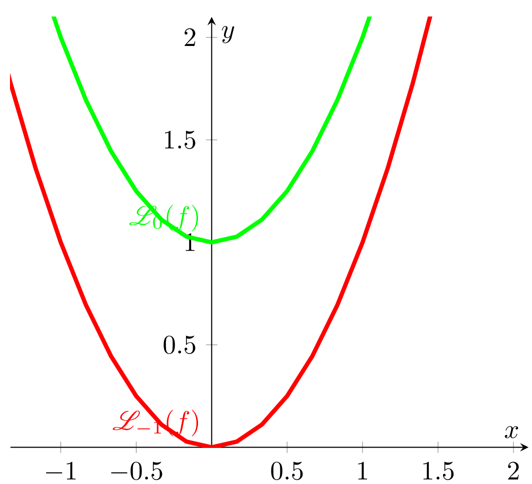
Exercice 3.5.1

On a $\mathscr{L}_0(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}$, donc cela représente la droite $y = \frac{-3x-2}{4}$.
On a $\mathscr{L}_2(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2\}$, donc cela représente la droite $y = -\frac{3}{4}x$.



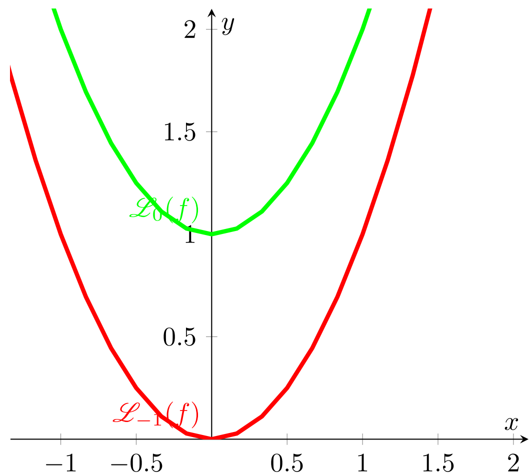
Exercice 3.5.2

On a $\mathscr{L}_{-1}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = -1\}$, donc cela représente $y = x^2$.
On a $\mathscr{L}_0(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}$, donc cela représente $y = x^2 + 1$.



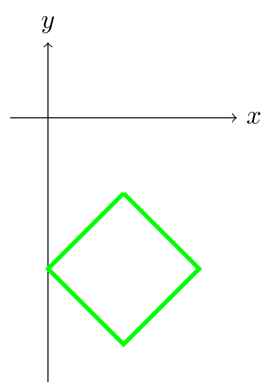
Exercice 3.5.2

On a $\mathscr{L}_{-1}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = -1\}$, donc cela représente $y = x^2$.
On a $\mathscr{L}_0(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}$, donc cela représente $y = x^2 + 1$.



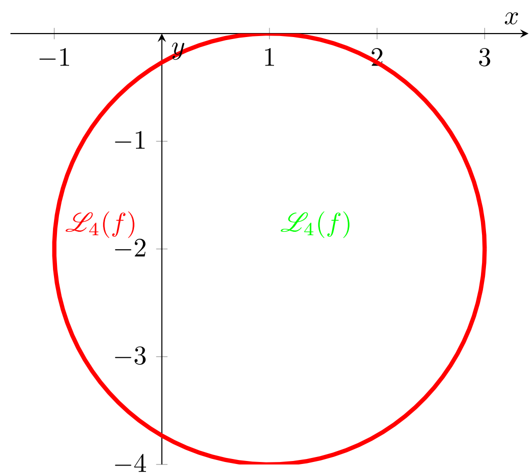
Exercice 3.5.3

On a $\mathscr{L}_4(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = |x-1| + |y+2| = 1\}$, cela représente 4 droites
On a $\mathscr{L}_{-5}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = |x-1| + |y+2| = -5\}$, ensemble vide, addition de 2 nombres positifs ne peut pas être négatif.



Exercice 3.5.4

On a $\mathscr{L}_4(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4\}$, donc cela représente le cercle de centre $(1,-2)$ et de rayon 2.
On a $\mathscr{L}_0(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0\}$, donc cela représente le point $(1,-2)$ (cercle de centre $(1,-2)$ et de rayon 0).
On a $\mathscr{L}_{-3}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x-1)^2 + (y+2)^2 = -3\}$, ensemble vide, addition de 2 nombres positifs ne peut pas être négatif.



Exercice 3.6

Exercice 3.6.1

- f continue $\implies$ F continue, vrai car F est un assemblage de fonctions continues (y, $+$, $f(x)$).
- F continue $\implies$ f continue, vrai car F est continue donc $\forall \epsilon, \exists \alpha, \|(x,y),(x_0,y_0)\| \leq \alpha \implies |F(x,y) - F(x_0,y_0)| \leq \epsilon$, donc $|(y-y_0)+(f(x)-f(x_0)| \leq \epsilon$ et les fonctions y et $+$ sont aussi continues, donc α_y et α_+ existent. En prenant $\alpha_f = \alpha - (\alpha_y + \alpha_+)$, on devrait montrer la continuité de $f(x)$. Mais pas sûr.

Exercice 3.6.2

On a $\mathscr{L}_1(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = y - \sin(x) = 1\}$, donc cela représente la fonction $y = g(x) = 1 - \sin(x)$.

Exercice 3.7

Exercice 3.7.1

On a $\mathscr{L}_c(f) = \mathscr{L}_c(g)$, donc $\forall c \in \mathbb{R}, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) = c\}$. Supposons que $f(x_0,y_0) \neq g(x_0,y_0)$ pour un certain (x_0,y_0) et prenons $c = f(x_0,y_0)$. On a $(x_0,y_0) \in \mathscr{L}_c(f)$ et $(x_0,y_0) \in \mathscr{L}_c(g)$ par définition. Ceci contredit l'hypothèse $f(x_0,y_0) \neq g(x_0,y_0)$ donc $f = g$.

Exercice 3.7.2

$f(x,y) = \pi$ et $g(x,y) = \sqrt{2}$, comme π et $\sqrt{2}$ sont irrationnelles, $\nexists c \in \mathbb{Q}, f(x,y) = \pi = c$ donc $\mathscr{L}_c(f) = \mathscr{L}_c(g) = \emptyset$ et $f(0,0) \neq g(0,0)$.

Exercice 3.7.3

On a $\mathscr{L}_c(f) = \mathscr{L}_c(g)$, donc $\forall c \in \mathbb{Q}, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) = c\}$. Supposons que $f(x_0,y_0) \neq g(x_0,y_0)$ pour un certain (x_0,y_0) et prenons $c = f(x_0,y_0)$. deux cas possibles

- $c \in \mathbb{Q}$, on a $(x_0,y_0) \in \mathscr{L}_c(f)$ et $(x_0,y_0) \in \mathscr{L}_c(g)$ par définition. Ceci contredit l'hypothèse $f(x_0,y_0) \neq g(x_0,y_0)$
- $c \notin \mathbb{Q}$, la fonction f n'est pas constante donc $\exists (x_1,y_1) \neq (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2, f(x_0,y_0) \neq f(x_1,y_1)$ prenons (x_1,y_1) et (x_2,y_2) tel que $c_1 = f(x_1,y_1) < c_0 < c_2 = f(x_2,y_2)$. (x_1,y_1), (x_2,y_2) existe car f est continue et il est toujours possible d'encadrer un nombre irrationnel par 2 nombres rationnels. Par définition $g(x_1,y_1) = c_1$ et $g(x_2,y_2) = c_2$. Donc $g(x_1,y_1) < c_0 < c_2 = g(x_2,y_2)$ donc $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0)$ ce qui contredit l'hypothèse.

QED