

Révision

Definition 1. Un n -espace *Euclidien* \mathbb{R}^n est un ensemble de n réels (appelé n -tuple).

$$\mathbb{R}^n = \{(p_1, \dots, p_n), p_i \text{ est un réel pour } i = 1, \dots, n\}$$

Si $p = (p_1, \dots, p_n)$ et $q = (q_1, \dots, q_n)$, on définit $p + q = (p_1 + q_1, \dots, p_n + q_n)$ et $\lambda p = (\lambda p_1, \dots, \lambda p_n)$.

Definition 2. On définit le produit scalaire \cdot dans \mathbb{R} comme

$$p \cdot q = \sum_{i=1}^n p_i q_i$$

La norme d'un vecteur comme

$$\|p\| = \sqrt{p \cdot p}$$

La distance entre 2 points:

$$\text{distance}(p, q) = \|p - q\|$$

Definition 3. On définit le produit scalaire \cdot dans \mathbb{C} comme

$$p \cdot q = \sum_{i=1}^n p_i \bar{q}_i$$

Definition 4. On a les propriétés suivantes: $p \cdot q = q \cdot p$, $(p + r) \cdot q = p \cdot q + r \cdot q$, $(\lambda p) \cdot q = \lambda(p \cdot q) = p \cdot (\lambda q)$ et $\|\lambda p\| = |\lambda| \|p\|$.

Les inégalités suivantes: $|p \cdot q| \leq \|p\| \|q\|$ (Cauchy-Schwarz) et $\|p + q\| \leq \|p\| + \|q\|$ (triangulaire).

Definition 5. On définit un angle entre 2 vecteurs comme:

$$\cos \theta = \frac{p \cdot q}{\|p\| \|q\|}$$

Definition 6. On définit une application linéaire A (linear map) de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme:

$$A(\lambda_1 p + \lambda_2 q) = \lambda_1 A p + \lambda_2 A q$$

Definition 7. On définit une application linéaire J (complex) de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ comme:

$$J(p, q) = (-q, p)$$

L'application J a les propriétés suivantes: $J^2 = -1$, $(Jp) \cdot (Jq) = p \cdot q$ et $(Jp) \cdot p = 0$.

Definition 8. On définit une courbe paramétrée $\alpha(t) :]t_1, t_2[\rightarrow \mathbb{R}^n$ comme:

$$\alpha(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t))$$

avec chaque $a_i(t)$ une fonction de $]t_1, t_2[\rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple de courbes paramétrées,

- la droite passant par 2 points p et q , $\beta(t) = p + t(q - p) = (1 - t)p + tq$
- le cercle de centre $p = (p_1, p_2)$ et de rayon r , $\theta(t) = (p_1 + r \cos(t), p_2 + r \sin(t))$ avec $0 \leq t < 2\pi$.

Definition 9. Si $\alpha(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t))$ est une courbe paramétrée, on définit la vitesse (vélocité) de α comme:

$$\alpha'(t) = (a'_1(t), a'_2(t), \dots, a'_n(t))$$

Definition 10. Une courbe $\alpha(t) :]t_1, t_2[\rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite régulière si chaque $a_i(t)$ est dérivable et que la vitesse en tout point n'est pas nulle. Si $\forall t \in]t_1, t_2[, \|\alpha'(t)\| = 1$ alors α est dite *vitesse unité*

Definition 11. Soit 2 courbes paramétrables différentiables $\alpha(t) = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\beta(t) = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, on dit que:

- β est une *reparamétrage positif* de α si il existe une fonction dérivable $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ tel que $\forall t \in]c, d[, h'(t) > 0$ et $\beta(t) = (\alpha \circ h)(t)$.
- β est une *reparamétrage négatif* de α si il existe une fonction dérivable $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ tel que $\forall t \in]c, d[, h'(t) < 0$ et $\beta(t) = (\alpha \circ h)(t)$.
- β est une *reparamétrage* de α si β est soit un reparamétrage positif, soit un reparamétrage négatif de α .

Definition 12. Quelques propriétés $\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t)$, $\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\|h'(t)$

Definition 13. On définit la *longueur* d'une courbe paramétrée α sur l'intervalle $[a, b]$ comme:

$$length[\alpha] = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Definition 14. Si β est un reparamétrage de α alors

$$length[\beta] \text{ sur } [c, d] = length[\alpha] \text{ sur } [h(c), h(d)]$$

Definition 15. Prenons un chiffre c avec $a < c < b$. La *fonction de longueur d'arc* s_α de la courbe paramétrée $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ à partir de c comme:

$$s_\alpha(t) = length[c, t][\alpha] = \int_c^t \|\alpha'(u)\| du$$

pour $a \leq t < b$.

Definition 16. Soit $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, on définit la courbure $k2[\alpha]$ et α par:

$$k2[\alpha](t) = \frac{\alpha''(t) \cdot J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

pour $a \leq t < b$.

Definition 17. Le reparamétrage par longueur d'arc de la courbe paramétrée α , (ou reparametrage selon le vecteur vitesse unité) est :

$$s_\alpha(t) = length[0, t][\alpha] = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du$$

Exercice 1

Calculer la fonction longueur d'arc de $\alpha : t \rightarrow a(c \cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$. On a $\alpha' = (t \cos t, t \sin t)$ et $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = t$. Donc

$$s_\alpha(t) = \int_c^t \|\alpha'(u)\| du = \int_c^t u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_c^t = \frac{t^2}{2} - \frac{c^2}{2}$$

Exercice 2

Montrer que la courbure de la courbe paramétrée d'un cercle de centre $p = (p_1, p_2)$ et de rayon r est égale à $\frac{1}{r}$.

$$\beta(t) = (p_1 + r \cos t, p_2 + r \sin t)$$

$$\beta'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$$

$$\beta''(t) = (-r \cos t, -r \sin t)$$

et

$$\begin{aligned} J\beta'(t) &= (-r \cos t, -r \sin t) \\ \beta''(t) \cdot J\beta'(t) &= (-r \cos t)(-r \cos t) + (-r \sin t)(-r \sin t) = r^2 \\ \|\beta'(t)\| &= \sqrt{(-r \sin t)(-r \sin t) + (r \cos t)(r \cos t)} = r \end{aligned}$$

Donc

$$s_\beta(t) = \frac{\beta''(t) \cdot J\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

Exercice 3

Le reparamétrage par longueur d'arc de la courbe paramétrée $\alpha : t \rightarrow (t^2, t^3)$, (ou reparametrage selon le vecteur vitesse unité) est :

$$s_\alpha(t) = \text{length}[0, t][\alpha] = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du$$

Donc $\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$ et $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = t\sqrt{4 + 9t^2}$ On a

$$s_\alpha(t) = \text{length}[0, t][\alpha] = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t u\sqrt{4 + 9u^2} du = \left[\frac{(9u^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}{27} \right]_0^t = \frac{(9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}{27} - \frac{8}{27}$$

Exercice 6

En partant de l'équation [1] $e^{i\theta_0} = \cos \theta_0 + i \sin \theta_0$, Essayons de contruire deux fonctions $h(t)$ et $\theta(t)$ tel que $h(t) = e^{i\theta(t)}$. Prenons

$$f(t) = \frac{\alpha'(t) \cdot \beta'(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|} \quad g(t) = \frac{\alpha'(t) \cdot J\beta'(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|}$$

Calculons

$$\begin{aligned} f^2(t) + g^2(t) &= \left(\frac{\alpha'(t) \cdot \beta'(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|} \right)^2 + \left(\frac{\alpha'(t) \cdot J\beta'(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|} \right)^2 = \frac{(\alpha'(t) \cdot \beta'(t))^2 + (\alpha'(t) \cdot J\beta'(t))^2}{(\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|)^2} \\ &= \frac{(\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|)^2}{(\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|)^2} = 1 \end{aligned}$$

Construisons la fonction $h(t) = f(t) + ig(t)$, on a

$$h(t)\overline{h(t)} = (f(t) + ig(t))(f(t) - ig(t)) = f^2(t) + if(t)g(t) - if(t)g(t) + g^2(t) = f^2(t) + g^2(t) = 1$$

Définissons

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t h'(s)\overline{h(s)} ds$$

Calculons

$$\frac{d}{dt} h(t)e^{-i\theta(t)} = h'(t)e^{-i\theta(t)} - ih(t)\theta'(t)e^{-i\theta(t)} = e^{-i\theta(t)}(h(t)' - ih(t)\theta'(t))$$

Mais $\theta'(t) = ih'(t)h(t)$ Donc

$$\frac{d}{dt} h(t)e^{-i\theta(t)} = e^{-i\theta(t)}(h' - ih(t)h'(t)\overline{h(t)})$$

Comme $h(t)\overline{h(t)} = 1$, on a $\frac{d}{dt} h(t)e^{-i\theta(t)} = 0$ donc $h(t)e^{-i\theta(t)}$ est égale à une constante c . Calculons

$$h(t_0)e^{-i\theta(t_0)} = (f(t_0) + ig(t_0))e^{-i\theta(t_0)} = e^{i\theta(t_0)}e^{-i\theta(t_0)} = 1$$

car [1].

Par conséquent

$$h(t)e^{-i\theta(t)} = c = 1$$

et

$$h(t) = e^{i\theta(t)} = \cos \theta(t) + i \sin \theta(t) = f(t) + ig(t)$$

Ce qui fait que

$$\cos(t) = \frac{\alpha'(t) \cdot \beta'(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|} \quad \sin(t) = \frac{\alpha'(t) \cdot J\beta'(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|}$$

Exercice 5

On a $\alpha(t) = p(t) + iq(t)$, donc $\alpha'(t) = p'(t) + iq'(t)$ et $\alpha''(t) = p''(t) + iq''(t)$,

Calculons

$$J\alpha'(t) = i\alpha'(t)$$

Pour rappel dans \mathbb{C} , $a \cdot b = a\bar{b}$, avec \bar{b} le conjugué du nombre complexe b .

$$\alpha''(t) \cdot J\alpha'(t) = \alpha''(t) \overline{J\alpha'(t)} = \alpha''(t) \overline{i\alpha'(t)} = \alpha''(t) \bar{i} \bar{\alpha}'(t) = -i\alpha''(t) \bar{\alpha}'(t)$$

et

$$k2[\alpha](t) = \frac{\alpha''(t) \cdot J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{-i\alpha''(t) \overline{\alpha'(t)}}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Bizarre j'ai un " " en trop.

QED