

Exercice 1

On a $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $\beta(t) = (a, z(t))$, $\alpha(0) = (0, 0)$ et $\alpha'(0) = (1, 0)$. Donc on a $\beta(0) = (a, 0)$ car $\alpha'(t)$ est orienté vers $\beta(t)$.

1.1 - Calculer $\alpha'(t)$

Comme $\alpha'(t)$ est sur la droite allant de $(x(t), y(t))$ vers $(a, z(t))$, on a $\frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{z(t)-y(t)}{a-x(t)}$ et $\alpha'(t) = (1, \frac{z(t)-y(t)}{a-x(t)})$.

1.2 - Calculer $\beta(t)$

Le point $\beta(t)$ est à l'intersection de la droite verticale passant par $(a, 0)$ et de la droite passant par le point $(x(t), y(t))$ et de coefficient directeur $\frac{dy(t)}{dx(t)}$. La droite s'écrit $y = \frac{dy(t)}{dx(t)}x + c$ avec $c = y(t) - \frac{dy(t)}{dx(t)}x(t)$

β se déplaçant sur la droite verticale $(a, 0)$ et est au point $(a, 0)$ à t_0 , on a $z(t) = y$ Donc $z(t) = y = \frac{dy(t)}{dx(t)}a + y(t) - \frac{dy(t)}{dx(t)}x(t) = \frac{dy(t)}{dx(t)}(a - x(t)) + y(t)$.

On a $\beta(t) = (a, \alpha'(t)(a - x(t)) + y(t))$

1.3 - Calculer $\beta'(t)$

β se déplaçant sur une droite verticale, on a:

$$\beta'(t) = (0, (\frac{dy(t)}{dx(t)}(a - x(t)) + y(t))') = (0, -\frac{dy(t)}{dx(t)} + (a - x(t))\alpha''(t) + \frac{dy(t)}{dx(t)} = (0, (a - x(t))\alpha''(t))$$

1.4 - relation entre $\beta'(t)$ et $\alpha'(t)$

La vitesse $\alpha'(t)$ est toujours proportionnelle à la vitesse $\|\beta'(t)\| = \frac{1}{k} \cdot \|\alpha'(t)\|$. Comme $k=1$ on a, $\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(t)\|$ La distance parcourue par β est également proportionnelle à la distance parcourue par α .

$$\sqrt{0^2 + ((a - x(t))\alpha''(t))^2} = (a - x(t))\alpha''(t) = (a - x(t))\frac{dy(t)}{d^2x(t)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{z(t) - y(t)}{a - x(t)}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\left(\frac{\frac{dy(t)}{dx(t)}(a - x(t)) + y(t) - y(t)}{a - x(t)}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\left(\frac{dy(t)}{dx(t)}\right)^2 + 1}$$

Il reste à résoudre l'équation différentielle:

$$(a - x(t))\frac{dy(t)}{d^2x(t)} = \sqrt{\left(\frac{dy(t)}{dx(t)}\right)^2 + 1}$$

Donc, renommage $y' = \frac{dy(t)}{dx(t)}$ et séparation des variables:

$$\frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = \frac{dx}{a - x(t)}$$

En intégrant on a:

$$\ln(y' + \sqrt{1 + y'^2}) = -\ln(a - x) + C$$

À l'instant $t = 0$, les conditions initiales sont $x = 0$ et $y' = 0$, ce qui donne pour la constante :

$$C = \ln(a)$$

Donc

$$\ln(y' + \sqrt{1 + y'^2}) = -\ln(a - x) + \ln(a) = \ln\left(\frac{a}{a - x}\right)$$

ou

$$y' + \sqrt{1 + y'^2} = \frac{a}{a - x}$$

En faisant l'égalité des opposés on a:

$$\begin{aligned} -\ln(y' + \sqrt{1 + y'^2}) &= \ln\left(\frac{1}{y' + \sqrt{1 + y'^2}}\right) = \ln\left(\frac{y' - \sqrt{1 + y'^2}}{(y' + \sqrt{1 + y'^2})(y' - \sqrt{1 + y'^2})}\right) = \ln\left(\frac{y' - \sqrt{1 + y'^2}}{y'^2 - (1 + y'^2)}\right) \\ &= \ln(-(y' - \sqrt{1 + y'^2})) = -\ln\left(\frac{a}{a - x}\right) = \ln\left(\frac{a - x}{a}\right) \end{aligned}$$

Ou

$$y' - \sqrt{1 + y'^2} = -\frac{a}{a - x}$$

En additionnant les deux on obtient

$$2y' = \frac{a}{a - x} + \frac{a - x}{a}$$

Enfin en intégrant:

$$y = \frac{x^2 - 2ax}{4a} + \frac{a}{2} \ln \frac{a}{a - x}.$$

Cette équation est équivalente à celle à montrer.

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{a}{4} \left(\left(\frac{a - x(t)}{a} \right)^2 - 1 - 2 \ln \left(\frac{a - t}{a} \right) \right) = \frac{a}{4} \left(\frac{a^2 - 2ax(t) + x^2(t)}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} - 2 \ln \left(\frac{a - t}{a} \right) \right) \\ &= \frac{-2ax(t) + x^2(t)}{4a} - \frac{a}{2} \ln \left(\frac{a - t}{a} \right) \end{aligned}$$

Exercice 2

Lorsque $k \neq 1$, il faut résoudre l'équation (voir question précédente).

$$(a - x(t)) \frac{dy(t)}{d^2x(t)} = \frac{1}{k} \sqrt{\left(\frac{dy(t)}{dx(t)} \right)^2 + 1}$$

Donc, on recommence renommage $y' = \frac{dy(t)}{dx(t)}$ et séparation des variables:

$$\frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{dx}{a - x(t)}$$

En intégrant on a:

$$\ln(y' + \sqrt{1 + y'^2}) = -\frac{1}{k} \ln(a - x) + C$$

À l'instant $t = 0$, les conditions initiales sont $x = 0$ et $y' = 0$, ce qui donne pour la constante :

$$C = \frac{1}{k} \ln(a)$$

Donc

$$\ln(y' + \sqrt{1 + y'^2}) = -\frac{1}{k} \ln(a - x) + \frac{1}{k} \ln(a) = \ln\left(\sqrt[k]{\frac{a}{a - x}}\right)$$

ou

$$y' + \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt[k]{\frac{a}{a-x}}$$

De la même façon que pour la question 1, on obtient

$$y' - \sqrt{1 + y'^2} = -\sqrt[k]{\frac{a-x}{a}}$$

En additionnant les 2, on a:

$$2y' = \sqrt[k]{\frac{a}{a-x}} - \sqrt[k]{\frac{a-x}{a}}$$

Enfin en intégrant:

$$y = \frac{k(a-x)}{2} \left(\frac{1}{k+1} \left(\frac{a-x}{a} \right)^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{1-k} \left(\frac{a-x}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) + C$$

Pour Pour $x = 0$; $y = 0$ on a

$$C = \frac{ka}{k^2 - 1}$$

Donc

$$y = \frac{k(a-x)}{2} \left(\frac{1}{k+1} \left(\frac{a-x}{a} \right)^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{1-k} \left(\frac{a-x}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) + \frac{ka}{k^2 - 1}$$

$$y = \frac{k(a-x)}{2(k+1)} \left(\frac{a-x}{a} \right)^{\frac{1}{k}} + \frac{k(a-x)}{2(1-k)} \left(\frac{a-x}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} + \frac{ka}{k^2 - 1}$$

$$y = \frac{ka(a-x)}{2a(k+1)} \left(\frac{a-x}{a} \right)^{\frac{1}{k}} + \frac{ka(a-x)}{2a(1-k)} \left(\frac{a-x}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} + \frac{ka}{k^2 - 1}$$

$$y = \frac{ka}{2(k+1)} \left(\frac{a-x}{a} \right)^{1+\frac{1}{k}} + \frac{ka}{2(1-k)} \left(\frac{a-x}{a} \right)^{1-\frac{1}{k}} + \frac{ka}{k^2 - 1}$$

Comme $a = 1$, on obtient la même équation que celle demandée:

$$y(t) = \frac{k}{k^2 - 1} + \frac{k(1-t)^{1+1/k}}{2(1+k)} + \frac{k(1-t)^{1-1/k}}{2(1-k)}$$

QED