

**Exercice 5****Question 1**

On a

$$E(X_1) = \int_a^1 t f(t) dt = \int_a^1 t \frac{1}{1-a} dt = \frac{1}{1-a} \frac{1-a^2}{2} = \frac{1+a}{2}$$

On a

$$E[X_1^2] = \int_a^1 t^2 f(t) dt = \int_a^1 t^2 \frac{1}{1-a} dt = \frac{1}{1-a} \frac{1-a^3}{3} = \frac{1+a+a^2}{3}$$

Donc

$$V(X_1) = E[X_1^2] - (E[X_1])^2 = \frac{1+a+a^2}{3} - \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$$

**Question 2**

On a

$$E[X_1] = \frac{1+a}{2} \implies a = 2E[X_1] - 1$$

Donc on prend comme EMM de  $a$

$$\tilde{a}_n = 2\bar{a}_n - 1$$

Mais  $0 < a < 1$ , il faut donc que son estimateur soit aussi  $0 < \tilde{a}_n < 1$  Donc

$$0 < 2\bar{a}_n - 1 < 1 \implies 1 < 2\bar{a}_n < 2 \implies 1/2 < \bar{a}_n < 1$$

Donc l'EMM est défini uniquement si la moyenne de l'échantillon  $\bar{a}_n$  est comprise entre 0.5 et 1.

Consistance. En appliquant le Lemme de l'application Continue (LAC). En prenant  $h(x) = 2x - 1$ , pour  $1/2 < x < 1$ . La fonction est continue. On a également,  $\bar{a}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} E[X_1]$  selon la loi des grands nombres.

Donc  $\tilde{a}_n = h(\bar{a}_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} h(E[X_1]) = a$ . Donc consistance.

En appliquant le Théorème Central Limite (TCL) avec  $\mu = a$  et  $\sigma^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$  on a

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{a}_n - a)}{\sqrt{\sigma^2}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

**Question 3**

On calcule

$$\mathcal{L}_a(x_i, \dots, x_n) = \prod_1^n \frac{1}{1-a} 1_{x_i \in [a, 1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n} \prod_1^n 1_{x_i \in [a, 1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n} 1_{\min(x_i) \leq x_i \leq 1}(x_i)$$

Ce qui donne la fonction suivante:

$$\mathcal{L}_a(x_i, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & a = 0 \\ \frac{1}{(1-a)^n} & 0 < a \leq \min(x_i) \\ 0 & \min(x_i) < a < 1 \end{cases}$$

$\mathcal{L}_a(x_i, \dots, x_n)$  est croissante sur  $0 \leq a \leq \min(x_i)$  et nulle quand  $\min(x_i) < a$  donc EMV est maximale lorsque  $a = \min(x_i)$  donc  $\hat{a} = \min(x_i)$ .

$$P(Z_n \geq s) = P\left(\frac{n(\hat{a} - a)}{1-a} \geq s\right) = P\left(\hat{a} \geq \frac{s(1-a) + na}{n}\right)$$

$$P(\hat{a} \geq t) = P(\forall i \in [1, n] X_i \geq t) = P(X_1 \geq t)^n = \left( \int_t^1 \frac{1}{1-a} dy \right)^n = \left( \frac{1-t}{1-a} \right)^n$$

Donc

$$P(Z_n \geq s) = \left( \frac{1 - \frac{s(1-a)+na}{n}}{1-a} \right)^n = \left( \frac{\frac{n-s(1-a)-na}{n}}{1-a} \right)^n = \left( \frac{(n-s)(1-a)}{n(1-a)} \right)^n = \left( \frac{n-s}{n} \right)^n$$

Convergence en loi:  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - P(Z_n \geq x) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \geq x) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-x}{n} \right)^n$$

On a  $n-s < n$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-x}{n} \right)^n \rightarrow 0$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) \rightarrow 1$ . Ce n'est pas une convergence en loi mais une convergence en probabilité. ????

### Question 4

Vitesse de convergence de  $\tilde{a}_n$ . Il faut trouver le plus grand  $d$  qui vérifie:

$$n^d(\tilde{a}_n - a) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} 0$$

$$\forall \epsilon, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n^d(\tilde{a}_n - a) \geq \epsilon) = 0$$

$$\forall \epsilon, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}((2\tilde{a}_n) \geq \frac{\epsilon}{n^d} + a + 1) = 0$$

Je ne comprends rien.

### Exercice 6

#### Question 1

##### Question 1-a

en prenant  $k = 1$  on a

$$\mathbb{E}(U^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{2!}{2 \cdot 1!} = \frac{1}{2}$$

en prenant  $k = 2$  on a

$$\mathbb{E}(U^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{4!}{4 \cdot 2!} = \frac{3}{2}$$

##### Question 1-b

Soit une variable aléatoire  $Y = X_i^2$ , l'événement  $A = (Y \leq y)$  est équivalent à l'événement  $B = (-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$ . lorsque  $y < 0$ , on a  $P(Y \leq y) = 0$ . Lorsque  $y \geq 0$ ,

$$F_Y(y) = P((Y \leq y)) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

et

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_X(\sqrt{y}) - \frac{\partial}{\partial y} F_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]$$

Dans notre cas,  $f_X(x)$  est défini pour  $x \geq 0$ , donc  $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})$ . Ce qui fait :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[ \frac{\sqrt{y}}{\theta} \exp\left(-\frac{\sqrt{y}^2}{2\theta}\right) \right] = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{y}{2\theta}\right)$$

qui est une loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2\theta}$ .

**Question 1-c**Calcul de  $E(X_1)$ 

$$E(X_1) = \int_0^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

car  $f_X(x) = 0$  lorsque  $x < 0$ .

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx$$

Par substitution prenant  $u = \frac{x}{\sqrt{\theta}}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$  et  $\partial x = \sqrt{\theta} \partial u$ , on obtient :

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \sqrt{\theta} du = \sqrt{\theta} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

D'après la question 1-a, pour  $k = 1$ , on a :

$$E(X_1) = \sqrt{2\pi\theta} \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{\sqrt{2\pi\theta}}{2} = \sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}$$

Calcul de  $E(X_1^2)$ 

$$E(X_1^2) = \frac{1}{\frac{1}{2\theta}} = 2\theta$$

car  $E(X_1^2)$  est une loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2\theta}$ .Calcul de  $E(X_1^3)$ 

$$E(X_1^3) = \int_0^{+\infty} x^3 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x) dx$$

car  $f_X(x) = 0$  lorsque  $x < 0$ .

$$E(X_1^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx$$

Par substitution prenant  $u = \frac{x}{\sqrt{\theta}}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$  et  $\partial x = \sqrt{\theta} \partial u$ , on obtient :

$$E(X_1^3) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 u^4 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \sqrt{\theta} du = \sqrt{\theta} \theta^2 \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^4 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

D'après la question 1-a, pour  $k = 2$ , on a :

$$E(X_1^3) = \sqrt{2\pi\theta} \theta^2 \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{3\sqrt{2\pi\theta} \theta^2}{2}$$

Calcul de  $E(X_1^4)$ .

$$E(X_1^4) = \int_0^{+\infty} x^4 f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^5}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx = 8\theta^2$$

Par utilisation d'un solveur internet, mais faisable à la main.

**Question 2****Question 2-a**

On calcule

$$\mathcal{L}_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_1^n \frac{x_i^2}{\theta} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\theta}\right) 1_{x_i \in [0, +\infty]}(x_i) = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{\theta^n} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2\theta}\right) \prod_1^n 1_{x_i \in [0, +\infty]}(x_i)$$

On calcule  $\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}_\theta(x_i, \dots, x_n)$  et on cherche les points où la dérivée s'annule.  
En utilisant un solveur internet on a

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}_\theta(x_i, \dots, x_n) = \frac{x_1 x_2 \dots x_n \theta^{-n-2} \cdot (2n\theta - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)) e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2\theta}}}{2}$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}_\theta(x_i, \dots, x_n) = 0$$

quand  $\hat{\theta}_n = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}{2n}$ .

Ou plus simple (en passant par le log car  $\mathcal{L}_\theta(x_i, \dots, x_n) \neq 0$ )

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(\mathcal{L}_\theta(x_i, \dots, x_n)) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \ln(x_1 x_2 \dots x_n) - \ln(\theta^n) - \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2\theta} \right) = -\frac{n}{\theta} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2\theta^2}$$

Et

$$-\frac{n}{\theta} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2\theta^2} = \frac{-2n\theta + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2\theta^2} = 0$$

quand  $\hat{\theta}_n = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2n}$ .

## Question 2-b

Le biais de  $\hat{\theta}$  est :

$$b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta = E\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2n}\right) - \theta = \frac{1}{2n}(E(x_1^2) + E(x_2^2) + \dots + E(x_n^2)) - \theta$$

Même loi, donc tous les  $E(x_i^2)$  sont identiques.

$$= \frac{1}{2n}(2\theta + 2\theta + \dots + 2\theta) - \theta = \frac{2n\theta}{2n} - \theta = 0$$

Le risque quadratique de  $\hat{\theta}$  est :

$$r(\hat{\theta}) = E((\hat{\theta} - \theta)^2) = b(\hat{\theta}) + V(\hat{\theta}) = 0 + V(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - (E(\hat{\theta}))^2$$

## Question 2-c

## Question 2-d

## Question 3

## Question 3-a

## Question 3-b

## Question 4

## Question 4-a

$$\begin{aligned} E(\bar{U}^2) &= E\left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i\right)^2\right) = \frac{1}{n^2} E\left(\left(\sum_{i=1}^n U_i\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^n U_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} U_i U_j\right) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n E(U_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(U_i U_j)\right) \end{aligned}$$

Comme les  $U_i$  suivent la même loi, elles ont la même espérance, de plus elles sont indépendantes donc  $E(U_i U_j) = E(U_i)E(U_j)$ . Donc

$$E(\bar{U}^2) = \frac{1}{n^2} \left( nE(U_1^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E(U_1))^2 \right)$$

On a aussi  $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$ . Donc

$$\begin{aligned} E(\bar{U}^2) &= \frac{1}{n^2} \left( n(V(U_1) + (E(U_1))^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E(U_1))^2 \right) = \frac{1}{n^2} \left( n(V(U_1) + (E(U_1))^2) + 2 \frac{n(n-1)}{2} (E(U_1))^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^2} (nV(U_1) + n(E(U_1))^2 + n(n-1)(E(U_1))^2) = \frac{1}{n^2} (nV(U_1) + n^2(E(U_1))^2) = (E(U_1))^2 + \frac{V(U_1)}{n} \end{aligned}$$

La seconde partie, on admet.

### Question 4-b