Maths 101 : Préparation du test 1

Anatole DEDECKER

29 septembre 2019

1 Vrai

Soient f et g définies par :

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x-1| \end{array} \right. \quad \text{et } g : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x+1| \end{array} \right.$$

f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, donc leur composée $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (g \circ f)(x) = ||x-1|+1| = |x-1|+1 \quad \text{car } |x-1|+1 \geq 0 \text{ toujours}$$

Si $x > 1$, on a :

$$(g \circ f)(x) = |x-1|+1 = x-1+1 = x$$

Si $x \leq 1$, on a :

$$(g \circ f)(x) = |x-1|+1 = 1-x+1 = 2-x$$

On a donc bien :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (g \circ f)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2-x & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{array} \right.$$

2 Vrai

Montrons que $f : x \mapsto \sqrt{(x^3-1)(x-1)}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et à valeurs réelles. Par stricte croissance de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} x^3 - 1 \geq 0 & \iff & x^3 \geq 1 \\ & \iff & x \geq \sqrt[3]{1} = 1 \\ & \iff & x - 1 \geq 0 \end{array}$$

On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sgn}(x^3-1) = \operatorname{sgn}(x-1)$, où $\operatorname{sgn}(x)$ est le signe de x.
Il vient finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^3-1)(x-1) \geq 0$$

La fonction racine carrée étant définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction f est bien une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3 Faux

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ peut s'écrire comme un quotient de nombres entiers. On a donc $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Q}$.
Or, on a $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \neq \sqrt{2}$.
Cette fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ n'est donc pas surjective. Elle ne peut donc être bijective.

4 Vrai

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par :

$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons d'abord que f est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $f(n) \in \mathbb{Z}$

— Si n est pair, $\exists k \in \mathbb{N}$ t.q $n = 2k$. On a alors :

$$f(n) = f(2k) = \frac{2k}{2} = k \in \mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z} \tag{4.1}$$

— Si n est imppair, $\exists k \in \mathbb{N}$ t.q $n = 2k+1$. On a alors :

$$f(n) = f(2k+1) = -\frac{2k+2}{2} = -(k+1) \in \mathbb{Z}_-^* \subset \mathbb{Z} \tag{4.2}$$

Donc f est bien définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
Montrons maintenant que f est bijective.
Cela revient à montrer que, $\forall y \in \mathbb{Z}$, l'équation $y = f(n)$, d'inconnue n, admet une unique solution. Résolvons donc cette équation.
D'après (4.1) et (4.2), on a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} y \in \mathbb{Z}_+ \iff n \text{ pair} \\ y \in \mathbb{Z}_-^* \iff n \text{ impair} \end{cases} \tag{4.3}$$

— Si $y \geq 0$, d'après (4.3), l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} y = f(n) \quad &\iff \quad y = \frac{n}{2} \\ &\iff \quad n = 2y \end{aligned}$$

Donc l'équation $y = f(n)$ admet bien une unique solution pour $y \in \mathbb{Z}_+$

— Si $y < 0$, d'après (4.3), l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} y = f(n) \quad &\iff \quad y = -\frac{n+1}{2} \\ &\iff \quad n = -2y - 1 \end{aligned}$$

Donc l'équation $y = f(n)$ admet bien une unique solution pour $y \in \mathbb{Z}_-^*$

On a donc bien que, $\forall y \in \mathbb{Z}$, l'équation $y = f(n)$, d'inconnue n, admet une unique solution.
f est donc bijective.

5 Faux

Soit $\left(u_n := \mathrm{e}^{n^3} - \mathrm{e}^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n &= \mathrm{e}^{n^3} - \mathrm{e}^n \\ &= \mathrm{e}^n \left(\frac{\mathrm{e}^{n^3}}{\mathrm{e}^n} - 1\right) \\ u_n &= \mathrm{e}^n \left(\mathrm{e}^{n^3-n} - 1\right) \end{aligned}$$

Donc, on trouve, par composition, différence et produit des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \left(\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n\right) \times \left(\lim_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{n^3-n} - 1\right)\right) = +\infty$$

D'où, par unicité de la limite, $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n^3} - \mathrm{e}^n \neq 0$.

6 Vrai

Soit $\left(u_n := \frac{3\ln^2(n)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + (1+\ln(n))^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On veut montrer que (u_n) converge, et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$. On remarque qu'à partir du rang $n = 2$, (u_n) est à termes non nuls. On s'intéresse donc au comportement en l'infini de la suite $\left(v_n := \frac{1}{u_n}\right)_{n\geq 2}$.
On a $\forall n \in [\![2; +\infty]\!]$:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + (1+\ln(n))^2}{3\ln^2(n)} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + 1 + 2\ln(n) + \ln^2(n)}{\ln^2(n)} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\ln^2(n)} + \frac{1}{\ln^2(n)} + \frac{2}{\ln(n)} + 1\right) \end{aligned}$$

Or, on a $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = \lim_{n\to+\infty} \ln^2(n) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = 0$.
D'où, par somme et produit des limites, (v_n) converge, et :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{3}$$

Or, par définition de (v_n), on a $\forall n \in [\![2; +\infty]\!]$:

$$u_n = \frac{1}{v_n}$$

D'où, par composition des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} v_n} = 3$$

L'affirmation est donc vraie.

7 Faux

Soit $\left(u_n := \frac{n^2+n\ln(n)}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrons d'abord que (u_n) tend vers 0.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n^2+n\ln(n)}{n^3} \\ &= \frac{n^2}{n^3}+\frac{n\ln(n)}{n^3} \\ &= \frac{1}{n}+\frac{\ln(n)}{n^2} \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} = 0$. D'où, par somme des limites, (u_n) converge, et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} = 0$$

On a donc, par définition de la convergence d'une suite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ t.q } \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n| < \varepsilon$$

En particulier, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il vient :

$$\exists N_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}^* \text{ t.q } \forall n \geq N_{\frac{1}{2}}, |u_n| < \frac{1}{2} \tag{7.1}$$

Prouvons alors, par l'absurde, que l'affirmation 7 est fausse.
Supposons qu'elle soit vraie, c'est à dire :

$$\exists M \in \mathbb{N}^* \text{ t.q } \forall n \geq M, u_n > \frac{1}{2} \tag{7.2}$$

On pose $N = \max(N_{\frac{1}{2}}, M)$. D'après (7.1) et (7.2), on a $\forall n \geq N$:

$$\begin{cases} |u_n| < \frac{1}{2} \\ u_n > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ce qui est impossible. L'affirmation est donc fausse.

8 Faux

Soit $\left(u_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrons que $lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$.
On s'intéressera à la suite $(v_n := \ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, bien définie car $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_n &= \ln(u_n)) \\ &= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \\ &= n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(1)}{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

On pose $h = \frac{1}{n}$. On remarque que $\lim_{n\to+\infty} h = 0$.
De plus, par dérivabilité de ln en 1, et par définition de la dérivée, on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - ln(1)}{h} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Par composition des limites, il vient que (v_n) converge, et :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - ln(1)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - ln(1)}{h} = 1$$

Or, on a par définition, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \exp(\ln(u_n)) = \exp(v_n)$$

D'où, par composition des limites, (u_n) converge, et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \exp\left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right) = \exp(1) = \mathrm{e}$$

D'où, par unicité de la limite, $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq 1$.

9 Vrai

Soit $\left(u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \\ u_{n+1} - u_n &> 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est croissante.

10 Vrai

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante. Posons : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} := \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
On veut montrer que (v_n) est croissante, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} \geq v_n$$

— Montrons dans un premier temps que (v_n) est majorée par (u_n).
Soit n un entier naturel non nul fixé. Par croissance de (u_n), on a :

$$\forall k \in [\![1;n]\!] \quad u_k \leq u_n$$

En sommant sur $[\![1;n]\!]$, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} u_k &\leq \sum_{k=1}^{n} u_n \\ \sum_{k=1}^{n} u_k &\leq n u_n \\ v_n &\leq u_n \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq u_n \tag{10.1}$$

— Montrons alors la croissance de v_n. On remarque dans un premier temps la relation de récurrence suivante pour (v_n) :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} &= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} u_k}{n+1} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}}{n+1} \\ v_{n+1} &= \frac{nv_n + u_{n+1}}{n+1} \end{aligned} \tag{10.2}$$

En combinant (10.1) avec la croissance de (u_n), on trouve $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_n &\leq u_{n+1} \\ nv_n + v_n &\leq nv_n + u_{n+1} \\ \frac{(n+1)v_n}{n+1} &\leq \frac{nv_n + u_{n+1}}{n+1} \\ v_n &\leq v_{n+1} \end{aligned}$$

Ce qui prouve la croissance de (v_n).

11 Vrai

On note $E := \{2 - 2^{-n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrons que $\sup(E) = 2$.
Premièrement, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} 2^{-n} = \frac{1}{2^n} &> 0 \\ 2 - 2^{-n} &< 2 \end{aligned}$$

2 est donc un majorant de E. De plus, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} 2 - 2^{-n} = 2$$

2 est un majorant de E, ainsi que la limite de la suite $(2 - 2^{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans E.
On a donc bien $\sup(E) = 2$.

12 Faux

Soit $(u_n := (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Montrons que (u_n) est un contre-exemple à l'affirmation 12.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = -1$$

On a donc bien $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = -1$ Cependant, (u_n) n'est pas convergente. L'affirmation est donc fausse.

13 Vrai

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels non nuls telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$. Montrons que (u_n) converge.
On a, par définition de la convergence d'une suite :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ t.q } \forall n \geq N_\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

En particulier, en posant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on trouve :

$$\exists N_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}^* \text{ t.q } \forall n \geq N_{\frac{1}{2}}, 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \tag{13.1}$$

On remarque notamment qu'à partir du rang $N_{\frac{1}{2}}$, la suite quotient $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est à termes positifs, ce qui implique que (u_n) est de signe constant à partir du rang $N_{\frac{1}{2}}$.
(13.1) s'écrit alors $\forall n \geq N_{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{gathered} 0 < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1 \\ 0 < \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1 \\ 0 < |u_{n+1}| < |u_n| \end{gathered}$$

À partir du rang $N_{\frac{1}{2}}$, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente.
Or, (u_n) est non nulle et de signe constant à partir du rang $N_{\frac{1}{2}}$. Donc la convergence de $(|u_n|)$ implique la convergence de (u_n).
L'affirmation est donc vraie.

14 Faux

On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

La suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weirstrass, elle admet donc au moins une valeur d'adhérence dans $[-1;1]$. Par définition, cela signifie que $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite qui converge vers cette valeur d'adhérence.
L'affirmation est donc fausse.

15 Vrai

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Par définition :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ t.q } \forall (p,q) \in [\![N_\varepsilon; +\infty[\![^2, |u_p - u_q| < \varepsilon$$

Où on peut, quitte à ajouter 2, prendre $N_\varepsilon > 1$.
En particulier, en posant $\varepsilon = 1$, puis $q = N_1$ on trouve :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ t.q } \forall p \geq N_1, |u_p - u_{N_1}| < 1$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on a alors $\forall n \geq N_1$:

$$\begin{aligned} |u_n - u_{N_1} + u_{N_1}| &\leq |u_n - u_{N_1}| + |u_{N_1}| < |u_{N_1}| + 1 \\ |u_n| &< |u_{N_1}| + 1 \end{aligned} \tag{15.1}$$

De plus, l'ensemble $\{|u_n|, n \in [\![0; N_1 - 1]\!]\}$ étant non-vide (u_0 lui appartient car $N_\varepsilon > 1$) et de cardinal N_1 fini, il admet un maximum, et on a $\forall n \in [\![0; N_1 - 1]\!]$:

$$|u_n| \leq \max\left(\{|u_n|, n \in [\![0; N_1 - 1]\!]\}\right) \tag{15.2}$$

En combinant (15.1) et (15.2), il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \max\left(\{|u_n|, n \in [\![0; N_1 - 1]\!]\} \cup \{|u_{N_1}| + 1\}\right)$$

$(|u_n|)$ est majorée, donc (u_n) est bornée.