Exercice 3

Exercice 3.1

Posons $u_n(x) = \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n$ et calculons

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n+1}})x^{n+1}}{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|$$

On en déduit que la série est convergente pour $|x| < 1$, donc son rayon de convergence vaut 1.

Exercice 3.2

Le rayon de convergence est égale à 1, donc la série entière convergence sur le domaine $]-1,1[$. Il faut maintenant vérifier que la série entière converge pour $x = -1$. La série entière sécrit donc $S(-1) = \sum_{n\geq 0}\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})(-1)^n$.
C'est une série alternée qui vérifie le critère CSSA car quand n tend vers l'infini, la fonction $sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$ est positive et décroissante. Donc la série entière $S(-1)$ converge. Par conséquent, la série entière $S(x)$ converge sur $[-1]\cup]-1,1[=[-1,1[$.

Exercice 3.3

Une série entière $S(x)$ convergence normalement sur $[-1,1[$, ssi il existe une suite de réels positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in N, \forall x \in [-1,1[$, on a $|u_n(x)| \leq a_n$ et que la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Sur le domaine $[-1,1[$, on a $\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n < \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Il faut maintenant vérifier que la suite numérique $\sum_{n\geq 0}\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$ converge. En prenant le développement limité de $\sin(x)$ en 0 on a, $\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{\sqrt{n}} + O_2(x)$. Mais $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ et la série $\frac{1}{n}$ diverge. Donc la série entière $S(x)$ ne converge pas normalement sur $[-1,1[$.

Exercice 3.4

La série $S(x)$ converge uniformément sur $[-1,a]$ avec $a \in [0,1[$ vers une fonction $s(x)$ ssi $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > n_\epsilon \implies \forall x \in [-1,a], |u_n(x) - s(x)| \leq \epsilon)$.

D'après le théorème du reste , la série $S(x)$ converge uniformément sur $[-1,a]$ avec $a \in [0,1[$ si

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-1,a]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)\right| = 0$$

On divise en 2 parties:

- convergence uniforme de $S(x)$ sur le domaine $[-1,0]$. Prenons $s(x) = 0$, $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > n_\epsilon \implies \forall x \in [-1,0], |u_n(x) - 0| \leq \epsilon)$. On a $|u_n(x)| \leq |\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})|$, donc cherchons n_ϵ tel que $\forall \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (n > n_\epsilon \implies \forall x \in [-1,0], |\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})| \leq \epsilon)$, en prenant $n_\epsilon > \frac{1}{\arcsin^2(\epsilon)}$, la propriété est vérifiée.
- convergence uniforme de $S(x)$ sur le domaine $[0,a]$ pour $a \in [0,1[$. On a sur $[0,a]$, $|u_x(x)| \leq x^n \leq a^n$, donc $\sup_{x\in[0,a]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)\right| \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$ et $\lim n \to \infty \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0$ pour $a \in [0.1[$. La série converge uniformément sur $[0,a]$ avec $a \in [0,1[$.

Donc la séire $S(x)$ converge uniformément.
QED