Exercice 1

Rappel de cours:

- On appelle extraction toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
- On appelle suite extraite (ou sous-suite) d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. toute suite de la forme $(x_n)_{\varphi(n)\in\mathbb{N}}$ où φ est une extraction. Une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite obtenue partir de celle-ci en nen gardant que les lments $\varphi(n)$, mais en nombre infini.
- On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute limite finie d'une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit la fonction $f(n) = 2\pi n$, la suite extraite $(cos_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante qui admet une valeur d'adhérence 1.

Donc la proposition est fausse.

Exercice 2

Soit les fonctions $f_1(n) = 2\pi n$ et $f_2(n) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, les suites $(cos_{f_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(cos_{f_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les valeurs 1 et 0. La suite $(cos\, n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente car elle admet 2 valeurs d'adhérence distinctes.

Donc la proposition est fausse.

Exercice 3

Rappel de cours:
Deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si

1. l'une est croissante et l'autre décroissante,
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

(a) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante ?

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

La suite S_n est croissante.

(b) $(S_n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante ?

$$(S_{n+1} + \frac{1}{n+1}) - (S_n + \frac{1}{n})) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

La suite $(S_n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(c) $\lim_{n\to\infty}((S_n + \frac{1}{n}) - S_n) = 0$?

$$\lim_{n\to\infty}((S_n + \frac{1}{n}) - S_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
Donc la proposition est vraie.

Exercice 4

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l\in]-1,1[$$

alors $\forall\epsilon>0,\exists N_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n>N_0,|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l|<\epsilon$.
Soit $a=u_{N_0}$ alors $u_{N_0+1}\approx l.a,u_{N_0+2}\approx l^2.a,\ldots,u_{N_0+m}\approx l^m.a$.
Par consequent, la suite u_n converge vers 0 car $|l|<1$.
Donc la proposition est vraie.

Exercice 5

Rappel de cours:

- La définition d'une suite de Cauchy: $\forall\epsilon\in\mathbb{R},\epsilon>0,\exists N_0\in\mathbb{N}\,t.q.\,\forall n,m>N_0,|U_n-U_m|<\epsilon$.
- Une suite est bornée si $\exists(m,M)\in\mathbb{R}^2,\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad m\leq u_n\leq M$.

1 Soit N_0, d'après le définition d'une suite de Cauchy, tous les points u_n pour $n>N_0$ sont à une distance ϵ de U_{N_0}. Donc, $\forall n>N_0,u_{N_0}-\epsilon<u_n<u_{N_0}+\epsilon$.

2 Prenons $V_{max}=max(u_0,u_1,\ldots,u_{N_0})$. La valeur V_{max} existe car la suite $u_0,\ldots u_{N_0}$ est finie.

3 Prenons $V_{min}=min(u_0,u_1,\ldots,u_{N_0})$. La valeur V_{min} existe car la suite $u_0,\ldots u_{N_0}$ est finie.

Soit $m_1=min(V_{min},u_{N_0}-\epsilon)$ et $m_2=max(V_{max},u_{N_0}+\epsilon)$, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $m_1\leq u_n\leq m_2$. Car par [1] et [3], $m_1\leq u_n$ et par [1] et [2], $u_n\leq m_2$.
Ce qui est la définition d'une suite bornée.

La proposition est vraie.

Exercice 6

Soit la fonction

$$f(x)=\begin{cases}x & x\leq 0\\ x+1-sin\,x & x>0\end{cases}$$

Calculons la limite de f en 0^-.

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=x=0$$

Calculons la limite de f en 0^+.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=sin\,x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=x+1-sin\,x=1$$

Les limites à droite et à gauche de f en 0 sont distinctes, donc la fonction f n'est pas continue en 0 et elle n'admet pas de limite en 0.

Donc la proposition est fausse.

Exercice 7

Rappel de cours:

$$\lim_{x\neq x_0, x\to x_0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\neq x_0, x\to x_0} g(f(x))=g(y_0)\ si\ \lim_{x\neq x_0, x\to x_0} f(x)=y_0$$

Prenons $g(x)=sin\ x$ et $f(x)=\frac{\pi.x}{|2x|}$.

$$\lim_{x\neq 0, x\to 0} f(x)=\lim_{x\neq 0, x\to 0}\frac{\pi.x}{|2x|}$$

- Lorsque $x>0$, $f(x)=\frac{\pi.x}{|2x|}=\frac{\pi}{2}$, donc $\lim_{x\neq 0, x\to 0^+} g(f(x))=g(\frac{\pi}{2})=sin(\frac{\pi}{2})=1$
- lorsque $x<0$, $f(x)=\frac{\pi.x}{|2x|}=\frac{-\pi}{2}$, donc $\lim_{x\neq 0, x\to 0^-} g(f(x))=g(\frac{-\pi}{2})=sin(\frac{-\pi}{2})=-1$.

Donc la proposition est fausse.

Exercice 8

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(1+x^2)}{lnx}=2\ \ ?$$

Application de la règle de l'Hospital car $\lim_{x\to+\infty} ln(1+x2)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} ln\, x=+\infty$.

On calcule les deux dérivés: $(ln(1+x^2))'=\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}$ et $(ln\, x)'=\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(1+x^2)}{lnx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{1}{x^2}+1}=2$$

Donc la proposition est vraie.

Exercice 9

$$\lim_{x\neq 0, x\to 0}\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}}=1\ \ ?$$

$$\lim_{x\neq 0, x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

et

$$\lim_{x\neq 0, x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}}=0$$

Limite indéterminée.
[1] $x>0$ alors $x=\sqrt{x^2}$.

$$\lim_{x\neq 0, x\to 0^+}\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}}=\lim_{x\neq 0, x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+x^{-2}}}$$

$$=\lim_{x\neq 0, x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=1$$

[12] $x<0$ alors $x=-\sqrt{x^2}$.

$$\lim_{x\neq 0, x\to 0^-}\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}}=\lim_{x\neq 0, x\to 0^-}\frac{1}{-\sqrt{x^2}\sqrt{1+x^{-2}}}$$

$$=\lim_{x\neq 0, x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}=-1$$

Donc la proposition est fausse.

Exercice 10

Rappel de cours:
Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ (donc y compris en x_0). On dit que f est continue en x_0 si $x \neq x_0$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$(H \circ f)(x) = \begin{cases} 1 + 1 - \frac{1}{2}cos^2 x & 1 - \frac{1}{2}cos^2 x \geq 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2}cos^2 x < 0 \end{cases}$$

Les fonctions 0 et $2 - \frac{1}{2}cos^2 x$ sont continues car elles sont une combinaison de fonctions continues. Il faut vérifier la continuité de la fonction $(H \circ f)(x)$ en $1 - \frac{1}{2}cos^2 x = 0$.

$$1 - \frac{1}{2}cos^2 x < 0$$

$$\frac{1}{2}cos^2 x > 1$$

$$cos^2 x > 2$$

$$|cos\, x| > \sqrt{2}$$

Il n'existe pas de x tel que $|cos\, x| > \sqrt{2}$. Donc $(H \circ f)(x) = 2 - \frac{1}{2}cos^2 x$.

Donc la proposition est vraie.

Exercice 11

Montrons un contre-exemple. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

La fonction $f(x)$ est croissante?
cas $x \geq 0$:

$$\forall x_1,\, x_2,\, tq.\, x_1 > x_2,\, f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1 > 0$$

cas $x < 0$:

$$\forall x_1,\, x_2,\, tq.\, x_1 > x_2,\, f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1 > 0$$

f n'est pas continue en 0?

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x - 1 = -1$$

Les limites à droite et à gauche de f en 0 sont distinctes, donc la fonction f n'est pas continue en 0.

Donc la proposition est fausse.

Exercice 12

La fonction se prolonge par continuité si $\exists l \in \mathbb{R}, \lim_{x \neq 0, x \to 0} g(x) = l$.

$$\lim_{x \neq 0, x \to 0} (e^{sin\ x} - 1) = 0$$

$$\lim_{x \neq 0, x \to 0} cos\ \frac{1}{x} \in [-1; 1]$$

$$\lim_{x \neq 0, x \to 0} ln(3 + cos\ \frac{1}{x}) \in [ln\ 2; ln\ 4]$$

Donc

$$\lim_{x \neq 0, x \to 0} g(x) = 0$$

Le prolongement par continuité de la fonction $g(x)$ est:

$$p(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Donc la proposition est vraie.

Exercice 13

f est une fonction f continue alors

$$\forall x_0 \in [2,3], \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \; tel\ que\ (\forall x \in [2,3] \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon) \quad [1]$$

f a pour limite ∞ en $x_0 = \frac{5}{2}$ alors

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \; tel\ que\ (]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\backslash\{x_0\} \subset [2,3] \; et \; \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\backslash\{x_0\}, \; f(x) > A)$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \; tel\ que\ (\forall x \in [2,3] \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\backslash\{x_0\}, \; f(x) > A) \quad [2]$$

Deux cas possibles,

- la fonction f est définie en x_0, alors $f(x_0) = \infty$ et la proposition [1] est fausse.
- la fonction f n'est pas définie en x_0, alors il faut trouver un prolongement par continuité de la fonction f en x_0. Il n'existe pas de valeur $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \neq x_0, x \to x_0} f(x) = l$ car $\lim_{x \neq x_0, x \to x_0} f(x) = \infty$. Donc, la fonction f n'est pas prolongeable en x_0.

Donc la proposition est fausse.

Exercice 14

Cherchons un exemple.
Soit la fonction $f(x) = x * sin(x)$.
La fonction $f(x)$ est continue car, elle est la composition de 3 fonctions continues. La fonction $f(x)$ est définie sur $[1, \infty[$.

- Lorsque $x \,\%\, 2\pi < \pi$, on a $0 \leq sin(x) \leq 1$, donc, $x * sin(x) \subset \; [0, +\infty[$
- Lorsque $x \,\%\, 2\pi \geq \pi$, on a $-1 \leq sin(x) \leq 0$, donc, $x * sin(x) \subset]-\infty, 0]$

Donc, $f(x) : [1, \infty[\to \mathbb{R}$.
Donc la proposition est vraie.

Exercice 15

Admettons que la fonction n'est pas constante alors $\exists x_0, \exists \eta > 0 \; t.q. \; f(x_0 - \eta) = Z_1 \; et \; f(x_0 + \eta) = Z_2$ et $Z_1 \neq Z_2$. Donc $|f(x_0 - \eta) - f(x_0 + \eta)| \geq 1$.

Le théorème des valeurs intermdiaires indique que si une fonction continue sur un intervalle prend deux valeurs distinctes m et n, alors elle prend toutes les valeurs intermdiaires entre m et n.
Prenons $\epsilon = 0.5$, $\forall x \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta], |f(x) - f(x_0)| \not< \epsilon$ car $|f(x_0 - \eta) - f(x_0 + \eta)| \geq 1$. Ceci contredit l'hypothèse de la fonction continue.

Donc la proposition est vraie.

Exercice 16

On construit les trois suites a_n et b_n de la manière suivante:

- $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$
- Si $f(c_n) > 0$, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$
- Si $f(c_n) < 0$, $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$

Avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$.

Comme $a_0 < b_0$, on a toujours la relation $a_n < \frac{a_n+b_n}{2} < b_n$, Donc, $a_n \leq c_n \geq b_n$.
On a $a_0 < \sqrt{2}$ et $b_0 > \sqrt{2}$.

La suite a_n croit car

- lorsque $f(c_n) \geq 0$, on a $c_n \geq \sqrt{2}$, et $a_{n+1} = a_n$. Donc $a_{n+1} \geq a_n$ et $a_{n+1} \leq \sqrt{2}$
- lorsque $f(c_n) < 0$, on a $x < \sqrt{2}$, et $a_{n+1} = c_n$ et $a_n < c_n$ par définition. Donc $a_{n+1} \geq a_n$ et $a_{n+1} \leq \sqrt{2}$.

La suite b_n décroit car

- lorsque $f(c_n) \geq 0$, on a $c_n \geq \sqrt{2}$, et $b_{n+1} = c_n$ et $c_n < b_n$ par définition. Donc $b_{n+1} \leq b_n$ et $b_{n+1} \geq \sqrt{2}$.
- lorsque $f(c_n) < 0$, on a $x < \sqrt{2}$, et $b_{n+1} = b_n$. Donc $b_{n+1} \leq b_n$ et $b_{n+1} \geq \sqrt{2}$.

On a aussi $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{a+b}{2^n} \to 0$. Donc les deux suites sont adjacentes. Le théorème des suites adjacentes, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel $x \in [a; b]$. Et , $a_n \leq \sqrt{2} \leq b_n$. Donc, a_n et b_n convergent vers $\sqrt{2}$.

Donc la proposition est vraie.
QED