Rappel de cours

Croissance comparée. On a $\forall n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{R}^{*+}, \forall x \to \infty$:

$$(\ln x)^{n_1} << x^{n_2} << e^{n_3 x}$$

Donc, pour tous réel $a, b > 0$, on a :

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$. Par exemple, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} x^b e^{-ax} = 0$. Par exemple, $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^a}{x^b} = 0$. Par exemple, $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} x^b |\ln(x)|^a x = 0$. Par exemple, $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

Quelques résultats connus, sur les séries de terme général:

- $\frac{c}{n^s}$ converge pour $s > 1$ et diverge pour $0 \leq s \leq 1$
- Si le terme général ne tend pas vers 0, la série diverge.
- Règle d'Alembert, soit la série de terme général u_n converge si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
- Si $u_n = u1_n + u2_n$ avec $u1_n$ et $u2_n$ convergent, alors u_n converge
- Si $u_n = u1_n + u2_n$ avec $u1_n$ ou $u2_n$ diverge, alors u_n diverge
- Si $u_n = u1_n + u2_n$ avec $u1_n$ et $u2_n$ divergent, alors u_n diverge que si $u1_n, u2_n \geq 0$

Donc, pour tous réel $a, b > 0$, on a :

- $\int_c^{+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b}$ diverge. Par exemple, $\int_c^{+\infty} \frac{e^x}{x}$ diverge.
- $\int_c^{+\infty} x^b e^{-ax}$ converge. Par exemple, $\int_c^{+\infty} xe^{-x}$ converge.
- $\int_c^{+\infty} \frac{\ln(x)^a}{x^b}$ converge. Par exemple, $\int_c^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ converge.
- $\int_c^{+\infty} f(x) = \int_c^d f(x) + \int_d^{+\infty} f(x)$.

Exercice 3

Exercice 3-e

On a

$$e_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1.2.3 \ldots (n-1).n}{1.2.3 \ldots (n-1).n} < \frac{1}{n}.\frac{2}{n}.1.1 \ldots 1 = \frac{2}{n^2}$$

On sait que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge ($\sum_0^\infty \frac{1}{n^2}$ converge). En appliquant le Théorème de Riemann, on déduit que la suite de terme général e_n converge.

Exercice 3-f

On a

$$f_n = \frac{1}{n^2 \ln n} < \frac{1}{n^3}$$

On sait que la série de terme général $\frac{1}{n^3}$ converge ($\sum_0^\infty \frac{1}{n^3}$ converge). En appliquant le Théorème de Riemann, on déduit que la suite de terme général f_n converge.

Exercice 3-g

On a

$$f_n = \frac{2^n + 3^n + n^4}{n5^n + 7n^7 + 2}$$

Exercice 3-h

On a

$$f_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n = \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

C'est une série géomeétrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme -1. Donc $\sum_0^\infty \frac{1}{2^n} = -\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = -2(1-\frac{1}{2^n})$. Donc la suite de terme général h_n converge.

Exercice 4

Exercice 4-i

On a

$$i_n = \left(\frac{3n+1}{n+5}\right)^n = \left(\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}\right)^n < 3^n =$$

C'est une série géomeétrique de raison 3 et de premier terme $\frac{1}{5}$. Donc $\sum_0^\infty 3^n = \frac{1}{5}\frac{1-3^n}{1-3} = -\frac{1}{5}\frac{1-3^n}{2}$. Donc la suite de terme général i_n diverge.

QED