Rappel de cours

Definition 1. Soit 2 variable aléatoire X et Y, on définit $F_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$ et on a :

- $F_X(x) = F_{XY}(x, \infty)$
- $F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$
- $F_{XY}(\infty, \infty) = 1$
- $F_{XY}(-\infty, y) = F_{XY}(x, -\infty) = 0$
- $\mathbb{P}(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1)$
- si X et Y sont indépendentes $F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$

Definition 2. Inégalité de Markow simplifiée. Soit Y une v.a. et g une fonction croissante et positive ou nulle sur l'ensemble des réels vérifiant $g(a) > 0$ alors

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(Y > a) \leq \frac{E[g(x)]}{g(a)}$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
E[g(Y)] = \int_{\mathbb{R}} g(y)f(y)dy &= \int_{-\infty}^{a} g(y)f(y)dy + \int_{a}^{\infty} g(y)f(y)dy \\
&\geq \int_{a}^{\infty} g(y)f(y)dy \text{ car g est positive ou nulle et g(a) ¿ 0} \\
&\geq g(a)\int_{a}^{\infty} f(y)dy \text{ car g est croissante} \\
&= g(a)\mathbb{P}(Y > a)
\end{aligned}$$

Exercice 1

Exercice 1.1

Il faut trouver un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avec Ω un univers, $\mathcal{F}$ un espace d'événements et P un espace de probabilité de $\mathcal{F} \to [0,1]$. Pour $i \in 1,2,3$, on a $P(X = i) = P(\{\omega \in \Omega \text{ tq } X^{-1}(i) = \omega\}) = 1/3$.

Prenons l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ avec $P(\{\omega \in \Omega \text{ tq } X^{-1}(i) = \omega\}) = 1/3$.

Exercice 1.2

L'ensemble des sous-parties de Ω est une tribu d'un espace de probabilité (Ω, F, P). On a $(X = i) = \{\omega \in \Omega \text{ tq } X^{-1}(i) = \omega\}$. L'ensemble Ω contient au moins 3 éléments, donc $card(\Omega) \geq 3$ car il faut au moins une valeur de Ω pour chaque valeur de X. Donc, on a $card(\mathcal{P}(\Omega)) \geq 3^2 = 8$.

Exercice 1.3

$F_X([-\infty, 1[) = 0, F_X([1,2[) = 1/3, F_X([2,3[) = 2/3, F_X([3,\infty[) = 3/3 = 1$

Exercice 1.4

Moyenne:

$$E[X] = 1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} = 2$$

Variance

$$V(X) = (1-2)^2\frac{1}{3} + (2-2)^2\frac{1}{3} + (3-2)^2\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$$

Exercice 1.5

$$f : a \to E[(X-a)^2] = (1-a)^2\frac{1}{3} + (2-a)^2\frac{1}{3} + (3-a)^2\frac{1}{3} = \frac{1}{3}((1-a)^2 + (2-a)^2 + (3-a)^2)$$

On remarque que pour $a = E[X]$ on a $f(E[X]) = V(X)$

Exercice 1.6

On a

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E[X])^2 \mathbb{P}(X = x_i)$$

et

$$E[(X-a)^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 \mathbb{P}(X = x_i)$$

donc quand $a = E[X]$ on a $V(X) = E[(X-a)^2]$. Calculons quand la dérivée de $E[(X-a)^2]$ est nulle

$$E'[(X-a)^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} -2(x_i - a)\mathbb{P}(X = x_i)$$

$$= -2(x_1\mathbb{P}(X = x_1) + x_2\mathbb{P}(X = x_2) + \ldots + x_n\mathbb{P}(X = x_n) - a(\mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_1) + \ldots + \mathbb{P}(X = x_n))) = -2(E[X] - a)$$

car par définition $\sum_1^n \mathbb{P}(X = x_n) = 1$. Donc dérivée nulle quand $a = E[X]$. La fonction décroit entre $-\infty$ et a et croit entre a et $+\infty$. Donc

$$\forall a \in \mathbb{R}, E[(Z-a)^2] \geq V(X)$$

Exercice 2

Exercice 2.1

Soit E l'ensemble sur lequel $\{X = \pi\mathbb{Z}\}$.

Si $\omega \in E$, on a $\lim_{n\to\infty} cos(\omega)^{2n} + cos(2\omega)^{2n} = \cos(\pi\mathbb{Z})^{2n} + \cos(\pi\mathbb{Z})^{2n} = 2$.

Si $\omega \notin E$, on a $\lim_{n\to\infty} cos(\omega)^{2n} + cos(2\omega)^{2n} = [0,1[^{2n} + [0,1[]^{2n} = 0$.

Donc $\lim_{n\to\infty} cos(\omega)^{2n} + cos(2\omega)^{2n} = 2.1_E$.

Donc

$$\lim_{n\to\infty} E[cos(X)^{2n} + cos(2X)^{2n}] = E[2.1_E] = 2E[1_E] = 0$$

Exercice 2.2

Soit E l'ensemble sur lequel $\{X = \pi\mathbb{Z}\}$. Si $\omega \in E$, on a $\lim_{n\to\infty} cos(\omega)^{2n} + cos(2\omega)^{2n} = \cos(\pi\mathbb{Z})^{2n} + \cos(\pi\mathbb{Z})^{2n} = 2$.

Si $\omega \notin E$, on a $\lim_{n\to\infty} E[cos(\omega)^{2n} + cos(2\omega)^{2n}] = E[[0,1[^{2n} + [0,1[]^{2n}] = 0$

Donc $\lim_{n\to\infty} cos(X)^{2n} + cos(2X)^{2n} = 2.1_E$ Donc Donc

$$\lim_{n\to\infty} E[cos(X)^{2n} + cos(2X)^{2n}] = E[2.1_E] = 2E[1_E] = 2p_1$$

Exercice 3

Exercice 3.1

On a

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} \ldots + \frac{x_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i.\frac{1}{n} = \sum_{0}^{n} x_i.\mathbb{P}(X = x_i) = E[X]$$

Géometrique. Surement avec $ln(X)$.??

On a

$$E[\frac{1}{X}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} = \frac{1}{n}(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_n})$$

donc

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{E[\frac{1}{X}]}$$

Exercice 4

Exercice 4.1

La fonction de réparition $F_X(x) = \int_{\mathbb{R}} fx(x)$. On a

$$f_x(x) = \begin{cases} x < 0 & 0 + 0 = 0 \\ 0 \le x \le 2 & 1/6 + 0 = 1/6 \\ 2 \le x \le 4 & 0 + 1/3 = 1/3 \\ x > 4 & 0 + 0 \end{cases}$$

Donc

$$F_X(x) = \begin{cases} x < 0 & 0 \\ 0 \le x < 2 & \int_0^x 1/6 = 1/6x \\ 2 \le x \le 4 & \int_0^2 1/6 + \int_2^x 1/3 = 1/3 + 1/3x - 2/3 = 1/3x - 1/3 \\ x > 4 & \int_0^2 1/6 + \int_2^4 1/3 = 1/3 + 4/3 - 2/3 = 1 \end{cases}$$

Exercice 4.2

$$\mathbb{P}(X \in [1,3]) = \mathbb{P}(1 < x < 3) = F_X(3) - F_X(1) = 3/3 - 1/3 - 1/6 = 3/6 = 1/2$$

Exercice 4.3

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x) = \int_0^2 \frac{x}{6} + \int_2^4 \frac{x}{3} = \left[\frac{x^2}{12}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{6}\right]_2^4 = 4/12 - 0 + 16/6 - 4/6 = 1/3 + 2 = 7/3$$

Exercice 4.4

Posons $Z = \frac{1}{X}$, donc $X = \frac{1}{Z}$.

$$f_z(z) = \frac{1}{6}1_{[1/2,\infty]}(1/z) + \frac{1}{3}1_{[1/4,1/2]}(1/z) = 6.1_{[1/2,\infty]}(z) + 3.1_{[1/4,1/2]}(z)$$

Exercice 5

Exercice 5.1

On a par définition $F_{XY}(\infty,\infty) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = 1$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} C\sin(x+y)1_{[0,\pi/2]^2}dxdy = C\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)dxdy$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)dx = [-\cos(x+y)]_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2+y) + \cos(y) = \sin(y) + \cos(y)$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin(y)+\cos(y)dy = [-\cos(y)+\sin(y)]_0^{\pi/2} = -\cos(\pi) + \sin(\pi/2) + \cos(\pi/2) - \sin(0) = 2$$

$$F_{XY} = 2C = 1$$

Donc $C = 1/2$.

Exercice 5.2

On a $F_X(x) = F_{XY}(x,\infty) = \int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy$

$$\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx = 1/2\int_0^x \sin(x+y)dx = 1/2[-\cos(x+y)]_0^x = 1/2(-\cos(x+y)+\cos(y))$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy = 1/2\int_0^{\pi/2} -\cos(x+y)+\cos(y)dy = 1/2[-\sin(x+y)+\sin(y)]_0^{\pi/2}$$

$$= 1/2(-\sin(x+\pi/2)+\sin(\pi/2)+\sin(x) - sin(0)) = 1/2(1+\sin(x)-\cos(x))$$

On a $F_Y(x) = F_{XY}(\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = 1/2\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)dx = 1/2[-\cos(x+y)]_0^{\pi/2} = 1/2(-\cos(\pi/2+y)+\cos(y))$$

$$\int_{-\infty}^{y}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = 1/2\int_0^y -\cos(\pi/2+y)+\cos(y)dy = 1/2[-\sin(\pi/2+y)+\sin(y)]_0^y$$

$$= 1/2(-\sin(\pi/2+y) + sin(y) + \sin(\pi/2) - \sin(0)) = 1/2(1+\sin(y)-\cos(y))$$

Exercice 5.3

on a la fonction de distribotion de la loi

$$f(x) = F'_X(x)) = 1/2(\cos(x) + sin(x))$$

Soit $Z = \pi/2 - X$, donc $X = \pi/2 - Z$

$$f(z) = 1/2(\sin(\pi/2 - z) - \cos(\pi/2 - z)) = 1/2(\cos(z) + \sin(z)) = f(x)$$

X et $\pi/2 - X$ ont la même loi de distribution sur le mm̂e espace $[0, \pi/2]$, donc c'est la même loi.

Exercice 5.4

La loi de distribution f_x est centrée en $\pi/4$ (voir question précédente). avec le max a $\pi/4$. Donc la densité est paire. Par conséquent on a $E[X] =$.

Exercice 5.5

On fait un preier changement de variable $Z = X - \pi/4$ donc $X = Z - \pi/4$ avec $Z \in [-\pi/4, \pi/4]$ $f(z) = sin(z - \pi/4) + cos(z - \pi/4)$

Exercice 6

Exercice 6.1

On a $E[g(x)] = \int_{\mathbb{R}} g(x).f_x(x)dx$ donc

$$E[e^{tX}] = \int_{\mathbb{R}} e^t x.e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2+tx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-1/2(x-t)^2+t^2/2}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t^2/2}. \int_{\mathbb{R}} e^{-1/2(x-t)^2} dx$$

Calculons l'intégrale avec un chagement de variable $u = \frac{1}{sqrt2(x-t)}$, donc $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $dx = \sqrt{2}du$.

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-1/2(x-t)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \sqrt{2}du = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{2}\sqrt{\pi}$$

Par l'intégrale de Gauss. Donc

$$E[e^{tX}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t^2/2}. \int_{\mathbb{R}} e^{-1/2(x-t)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t^2/2}.\sqrt{2}\sqrt{\pi} = e^{t^2/2}$$

Exercice 6.2

L'inégalité simplifié donne $\forall a > 0, \mathbb{P}(Y > a) \leq \frac{E[g(y)]}{g(a)}$. Donc

$$\mathbb{P}(Y > a) \leq \frac{E[e^{tX}]}{e^{ta}} = \frac{e^{t^2/2}}{e^{ta}} = e^{t^2/2-ta}$$