Math 101 : Calculus
Université Paris–Sud Orsay

Notes de cours

D. Le Peutrec

(d'après des notes de J.-C. Léger, F. Menous, C. Pallard et P. Kerdelhué,
et après la relecture précieuse de B. Héron)

20 septembre 2019

Table des matières

Chapitre 1

Rappels et compléments sur les fonctions réelles

1.1 Fonctions réelles d'une variable réelle

1.1.1 Définitions

Commençons par une définition informelle. Considérons deux ensembles D et A de nombres réels c'est-à-dire deux parties D et A de $\mathbb{R}$, l'ensemble de tous les nombres réels. Une **fonction** (ou **application**) f de D vers A, est un « objet mathématique » qui associe (c-à-d fait correspondre) à tout nombre de D un unique élément de A.

1. D est appelé **ensemble de départ**, **source** ou **domaine de définition** de la fonction f.
2. A est appelé **ensemble d'arrivée** ou **but** de la fonction f.
3. Si x est un élément de D, on note $f(x)$ l'élément de A associé à x par la fonction f. Cet élément $f(x)$ est appelé **image** de x par f.
4. On appelle **antécédent** par f d'un élément $y \in A$ tout élément $x \in D$ tel que $f(x) = y$.
5. On appelle **image de** f notée $\mathrm{Im}f$, l'ensemble des images par f des éléments de D, i.e. l'ensemble des éléments $f(x)$ avec x dans D ; c'est donc aussi l'ensemble des éléments de A qui admettent un antécédent par f. Ainsi on a :

$$\mathrm{Im}f \;=\; f(D) \;=\; \{f(x)\,;\; x \in D\} \;=\; \{y \in A \text{ tels que : } \exists\, x \in D\,,\; f(x) = y\}$$ [1].

Exemples et Remarques

1. La fonction f est « de variable réelle » car sa source D, le domaine où varie son argument, est une partie de $\mathbb{R}$. Elle est « à valeurs réelles » car son but A est une partie de $\mathbb{R}$.
2. Si on écrit : « Soit une fonction $f : D \to A$ », cela signifie : « Considérons une fonction f, dont l'ensemble de départ est D et l'ensemble d'arrivée est A », et, sauf précision supplémentaire, cette fonction n'a aucune propriété particulière hormis le fait d'être un objet qui satisfait à notre définition informelle.
3. Soulignons que si $f : D \to A$ est une fonction et si x est un nombre n'appartenant pas à D alors $f(x)$ n'est pas défini. Par exemple, si on écrit « Soit la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^2 - 1$ pour tout $x \in [0,1]$ », on considère un objet mathématique bien précis, qui est **la** fonction f dont l'ensemble de départ est l'intervalle $[0,1]$, l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$ tout entier et qui associe à chaque élément x de $[0,1]$ le nombre calculé par la formule $2x^2 - 1$. En particulier, $f(2)$ n'existe pas alors que le nombre $2 \times 2^2 - 1$ est bien défini.

1. le quantificateur logique « $\exists$ » signifie « il existe ».

4. Si $f : D \to A$ est une fonction et si D' est un sous-ensemble de D (i.e. si $D' \subset D$), on définit la **restriction** de f à D' par

$$f\big|_{D'} : \left\{ \begin{array}{ccc} D' & \to & A \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

On la note parfois encore f mais c'est un abus de notations.

5. L'ensemble de définition est souvent déduit de la formule de $f(x)$ lorsque celle-ci est donnée (en tenant compte que toute division par 0 est interdite, qu'une racine carrée doit avoir un argument positif ou nul, etc.).
Exemple : Donner le domaine de définition D_f de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Ceci sous-entend : « quel est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel on peut définir f par cette formule ? » On trouve :

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x \neq 0 \text{ et } 1 - x^2 \geq 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x \neq 0 \text{ et } |x| \leq 1\} = [-1, 0[\cup]0, 1]\,.$$

1.1.2 Graphes

Définition 1.1 *Soit $f : D \to A$ une fonction réelle de variable réelle. Son graphe est la partie G de l'ensemble-produit[2] $D \times A$ définie par*

$$G = \{(x, f(x))\,;\, x \in D\} = \{(x, y) \in D \times A\,;\, y = f(x)\}.$$

G est donc l'ensemble de **tous** *les couples possibles formés d'une valeur x prise dans D et de son image $f(x)$.*

G est une partie de l'ensemble $D \times A$ qui est lui-même une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. On représente graphiquement (une partie de) $\mathbb{R}^2$ sur une feuille quadrillée de la façon que vous connaissez bien : le couple de réels (x, y) est représenté par le point de coordonnées (x, y) relativement au quadrillage.

L'usage veut que l'axe des abscisses (coordonnée x) soit représenté horizontalement, orienté de la gauche vers la droite et que l'axe des ordonnées (coordonnée y) soit représenté verticalement, orienté du bas vers le haut. Certaines situations peuvent forcer à adopter d'autres conventions.

On peut maintenant préciser l'« objet mathématique[3] » dont nous parlions dans la définition informelle de fonction.

Définition 1.2 *Soient D et A deux parties de $\mathbb{R}$. Une fonction f de D vers A est une partie G de $D \times A$ ayant la propriété suivante :*

Pour tout $x \in D$, il existe un unique $y \in A$ tel que $(x, y) \in G$.

L'astuce réside en ceci, qu'étant donnée une telle partie G, pour chaque $x \in D$ on peut définir $f(x)$ comme étant l'unique $y \in A$ tel que $(x, y) \in G$. On a alors défini sans ambiguïté une fonction $f : D \to A$ et il s'avère a posteriori que G est le graphe de cette fonction.

Ce que dit en fait la définition, c'est qu'on se donne une fonction f en se donnant son graphe, mais l'usage montre qu'il est assez malcommode de travailler directement avec le graphe alors qu'au contraire la notation $f(x)$ est très parlante.

2. $D \times A$ est l'ensemble de tous les couples (x, y) formés d'une valeur x dans D et d'une valeur y dans A.
3. Quasiment tous les objets mathématiques peuvent être vus comme des ensembles, y compris les nombres...

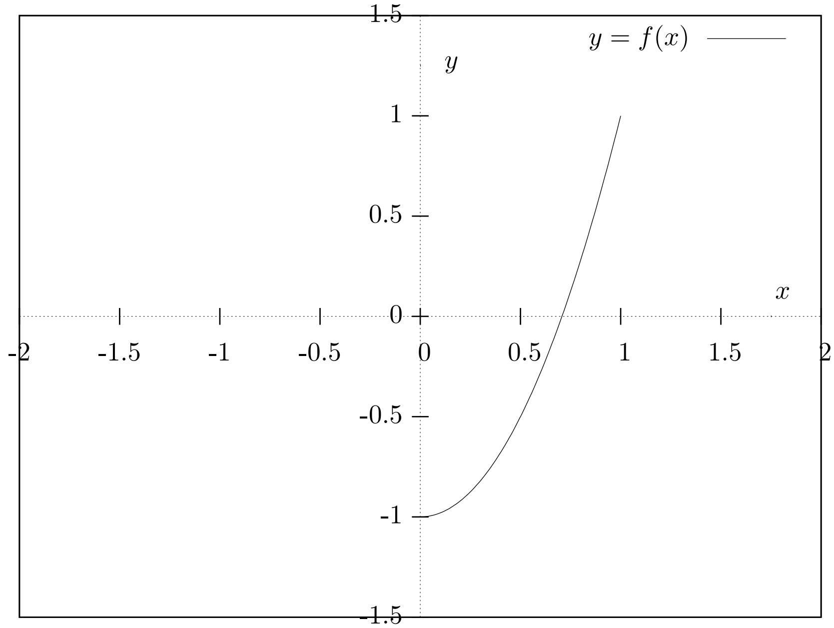


FIGURE 1.1 – Représentation du graphe de $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^2 - 1$

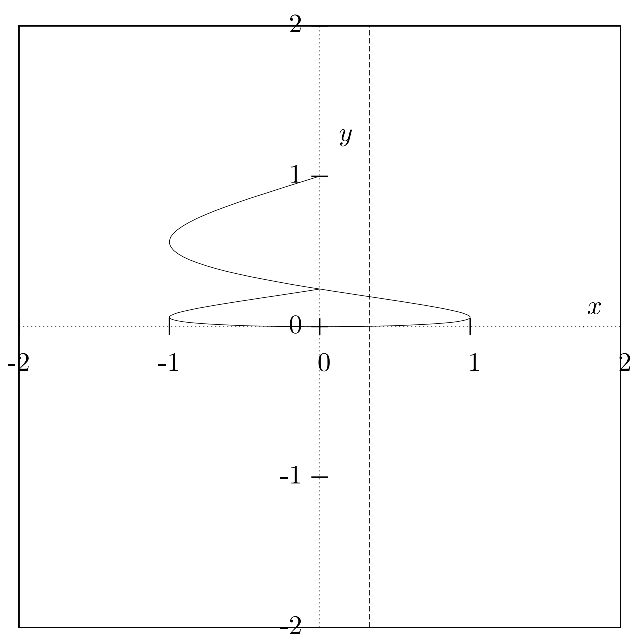


FIGURE 1.2 – Ceci n'est pas le graphe d'une fonction $y = f(x)$ au dessus de $[-1, 1]$ car certaines verticales coupent l'ensemble en deux points ou davantage

1.1.3 Fonctions croissantes et fonctions décroissantes

Définition 1.3 *Soit $D \subset \mathbb{R}$ et soit f une fonction à valeurs réelles définie sur D. On dit que :*

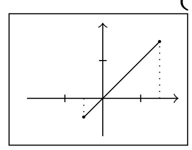
1. *f est* **croissante** *sur D si, pour tous x, y dans D on a : $x < y$ implique $f(x) \leq f(y)$,*
2. *f est* **décroissante** *sur D si, pour tous x, y dans D on a : $x < y$ implique $f(x) \geq f(y)$,*
3. *f est* **strictement croissante** *sur D si, pour tous x, y dans D on a :*
$$x < y \text{ implique } f(x) < f(y),$$
4. *f est* **strictement décroissante** *sur D si, pour tous x, y dans D on a :*
$$x < y \text{ implique } f(x) > f(y),$$
5. *f est* **monotone** *sur D si f est croissante sur D ou bien décroissante sur D,*
6. *f est* **strictement monotone** *sur D si f est strictement croissante sur D ou strictement décroissante sur D.*

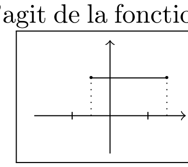
Exemples et Remarques

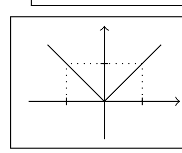
1. La fonction carré de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, n'est pas monotone. En effet, d'une part elle n'est pas décroissante car $f(1) = 1 < f(2) = 4$ et d'autre part elle n'est pas croissante car $f(-2) = 4 > f(1) = 1$.
2. La fonction carré restreinte à $\mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$, est croissante et même strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

1.1.4 Fonctions usuelles

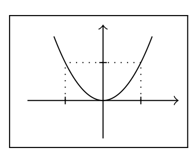
1. **Fonction** Id_A **:** si A est une partie de $\mathbb{R}$, il s'agit de la fonction $\mathrm{Id}_A : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$.

   Par exemple, $\mathrm{Id}_{[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]} : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ a pour graphe : 

2. **Fonction constante** c_A **:** si A est une partie de $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, il s'agit de la fonction constante égale à c sur A, $c_A : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & c \end{array} \right.$. Ici, le graphe de $1_{[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]}$: 

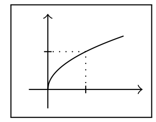
3. **Valeur absolue :** $|\cdot| : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} x & \text{si} & x \geq 0 \\ -x & \text{si} & x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$ 

4. **Fonctions polynomiales :** Ce sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N \quad \text{où} \quad (a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$$
ou encore $f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ pour une notation [4] plus compacte.

   Exemple : la fonction carré $(\cdot)^2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ 

4. « $\sum$ » est le symbole « somme ». Si $i \leq j$ sont deux entiers, il est défini par
$$\sum_{k=i}^{j} f(k) := f(i) + f(i+1) + \cdots + f(j)$$

5. **Fonction racine carrée**[5] **:** $\sqrt{\cdot} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \textbf{le} \text{ réel positif } y \text{ t.q. } y^2 = x \end{cases}$



Soulignons ici l'égalité suivante :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} \;=\; |x| \qquad \boxed{\neq\ x \text{ si } x < 0 \quad !!}$$

6. **Fonctions exponentielle et logarithme népérien**[6] **:**

i) La fonction exponentielle exp a pour domaine de définition $\mathbb{R}$ et vérifie :
— $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on note aussi e^x le nombre $\exp(x)$)
— $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) \underset{\text{déf}}{:=} e \simeq 2.72$
— exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$
— exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée exp, ce qui conduit en particulier à :

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\exp(x)-1}{x} \;=\; \lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} \;=\; \exp'(0) \;=\; \exp(0) \;=\; 1$$

— $\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
— $\exp(\alpha x) = (\exp(x))^\alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout rationnel α,

ii) La fonction logarithme ln a pour domaine de définition $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifie :
— $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$
— ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
— ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, ce qui conduit en particulier à :

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{y=1+x}{=} \lim_{y\to 1, y\neq 1} \frac{\ln(y)}{y-1} \;=\; \lim_{y\to 1, y\neq 1} \frac{\ln(y)-\ln(1)}{y-1} \;=\; \ln'(1) \;=\; \frac{1}{1} \;=\; 1$$

— $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ pour tous réels x, y strictement positifs,
— $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$ pour tout $x > 0$ et tout rationnel α,

iii) Les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproques[7] l'une de l'autre :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp(x)) \;=\; x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \exp(\ln x) \;=\; x$$

On a donc en particulier : $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ pour tout $x > 0$ et tout rationnel α.

iv) Voir le tracé de leurs graphes ci-dessous.

7. **Fonctions sinus, cosinus et tangente :**

Définition 1.4 (Fonction T-périodique) *Soit $f : D \to A$ une fonction de variable réelle et soit $T \neq 0$. On dit que f est T-périodique si pour tout x de D, on a $x + T \in D$ et $f(x+T) = f(x)$.*

Considérons, dans le plan muni de son repère orthonormé usuel, le cercle unité $\mathcal{C}$, i.e. le cercle de centre l'origine O et de rayon 1. On rappelle qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est donnée par :

$$\mathcal{C} \;=\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\quad x^2 + y^2 \;=\; 1\right\} .$$

Pour tout θ dans $\mathbb{R}$, soit A_θ le point de $\mathcal{C}$ tel que l'angle orienté $\widehat{IOA_\theta}$ soit θ (exprimé ici en radians), où I désigne le point du plan de coordonnées $(1,0)$. Le cosinus et le sinus de θ, notés $\cos\theta$ et $\sin\theta$, sont alors respectivement définis comme l'abscisse et l'ordonnée de A_θ,

5. Cette fonction – ainsi que les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \notin \mathbb{Z}$ – ne sera en fait définie rigoureusement qu'au chapitre 7 sur les fonctions réciproques

6. Ces fonctions ne seront aussi définies rigoureusement qu'au chapitre 7. Leurs propriétés seront donc admises pour le moment.

7. Cette notion sera définie dans la dernière partie de ce chapitre.

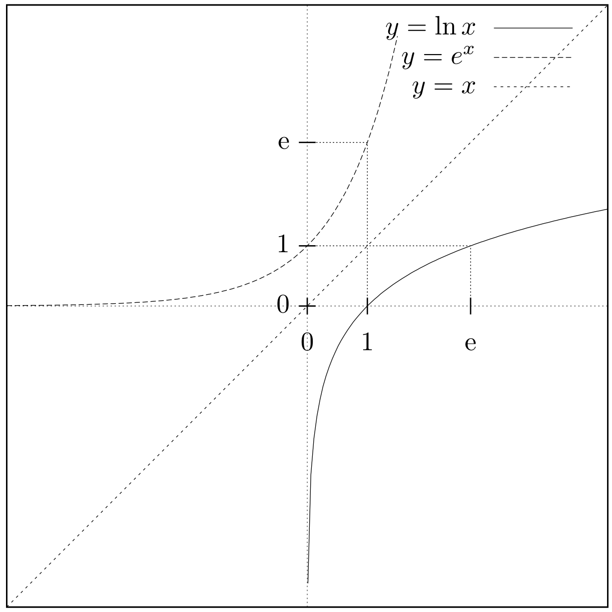


FIGURE 1.3 – Courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme

i.e. A_θ est le point du plan de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$. Tout cela est rendu plus lisible par la figure 1.4.
Les fonctions sinus et cosinus sont donc des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. Elles sont de plus 2π-périodiques car $A_{\theta+2\pi} = A_\theta$. Elles satisfont par ailleurs les propriétés suivantes :

i) la fonction cos est paire et la fonction sin est impaire, i.e.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(-x) \,=\, \cos x \quad \text{et} \quad \sin(-x) \,=\, -\sin x$$

ii) — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ [8] (donc $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$)
— Si $a^2 + b^2 = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près [9], tel que $\left\{\begin{array}{lcl} \cos\theta & = & a \\ \sin\theta & = & b \end{array}\right.$
— Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos x \,=\, \cos\theta \qquad \text{ssi} \qquad x \in \{\theta + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\theta + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\} \,=\, \{\pm\theta + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

et

$$\sin x = \sin\theta \qquad \text{ssi} \qquad x \in \{\theta + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \theta + 2k\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\}$$

iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x \pm \frac{\pi}{2}) \,=\, \mp \sin x\,, \quad \sin(x \pm \frac{\pi}{2}) \,=\, \pm \cos x\,, \quad \cos(x \pm \pi) \,=\, -\cos x\,, \quad \sin(x \pm \pi) \,=\, -\sin x$$ [10]

iv) — $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\pi = -1$
— $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$

8. C'est une conséquence immédiate du théorème de Pythagore !
9. Cela signifie que les autres θ' le vérifiant sont les $\theta' = \theta + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
10. Ici, l'égalité $\cos(x \pm \frac{\pi}{2}) \,=\, \mp \sin x$ par exemple, signifie, en regardant les signes + et − de « même hauteur », que l'on a à la fois les deux égalités $\cos(x + \frac{\pi}{2}) \,=\, -\sin x$ et $\cos(x - \frac{\pi}{2}) \,=\, +\sin x$. De même, $\sin(x \pm \frac{\pi}{2}) \,=\, \pm\cos x$ signifie que $\sin(x + \frac{\pi}{2}) \,=\, \cos x$ et $\sin(x - \frac{\pi}{2}) \,=\, -\cos x$.

v) Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ de dérivées respectives cos et $-\sin$. Cela conduit en particulier à :

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\sin x}{x} \;=\; \lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \;=\; \sin'(0) \;=\; \cos(0) \;=\; 1$$

vi) — Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x \pm y) \;=\; \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad \text{et} \quad \sin(x \pm y) \;=\; \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

— Cela implique :

$$\cos x \cos y \;=\; \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big)\;, \quad \sin x \sin y \;=\; \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$$

et

$$\sin x \cos y \;=\; \frac{1}{2}\big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\big)$$

— En particulier :

$$\cos(2x) \;=\; \cos^2 x - \sin^2 x \underset{(\cos^2 + \sin^2 = 1)}{=} \begin{cases} 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}, \qquad \sin(2x) \;=\; 2 \sin x \cos x$$

et

$$\cos^2 x \;=\; \frac{\cos(2x) + 1}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 x \;=\; \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

vii) Voir le tracé de leurs graphes à la figure 1.5.

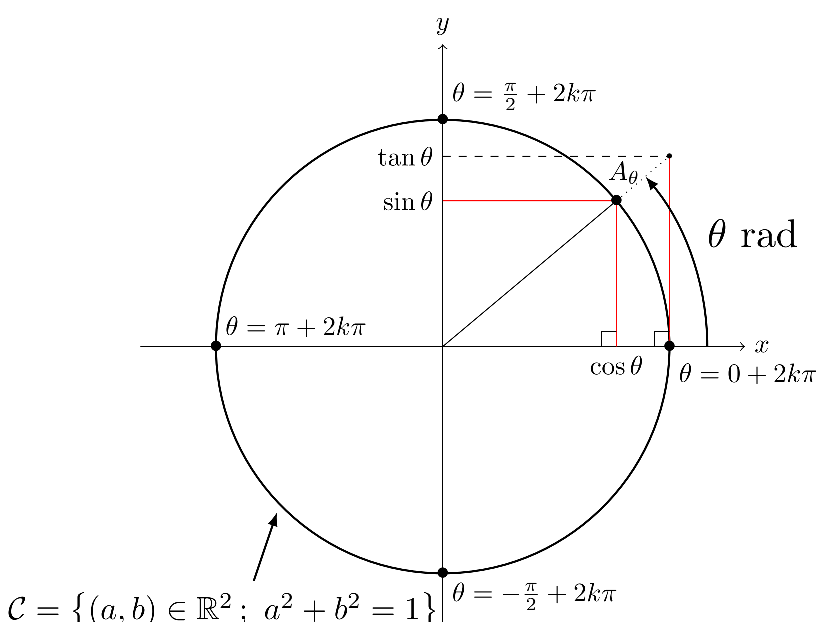


FIGURE 1.4 – Cercle unité et définition des fonctions sin et cos

La fonction tangente, notée tan, est définie par la formule

$$\tan x \;=\; \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

Sachant les propriétés des fonctions sinus et cosinus rappelées ci-dessus, elle vérifie donc les propriétés suivantes (on renvoie aussi à la figure 1.4 pour une interprétation géométrique) :

i) La fonction $\tan : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos x \neq 0$, i.e.

$$D_{\tan} \;=\; \Big\{ x \in \mathbb{R}\,;\; x \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\; k \in \mathbb{Z} \Big\} \;=\; \mathbb{R} \backslash \Big\{ \frac{\pi}{2} + k\pi\,;\; k \in \mathbb{Z} \Big\} \;=\; \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$$

ii) La fonction tan est impaire et π-périodique : pour tout $x \in D_{\tan}$ on a

$$-x \in D_{\tan} \quad \text{et} \quad \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

et

$$x + \pi \in D_{\tan} \quad \text{et} \quad \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

iii) $\tan 0 = 0$, $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

iv) Pour tout $x \in D_{\tan}$, on a

$$1 + \tan^2 x \;=\; \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \;=\; \frac{1}{\cos^2 x}$$

v) — Pour tous $x, y \in D_{\tan}$ tels que $x + y \in D_{\tan}$,

$$\tan(x+y) \;=\; \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

— En particulier, pour tout $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\tan(2x) \;=\; \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

— Et pour tout $x \in D_{\tan}$, on a

$$\cos(2x) \underset{(\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1)}{=} \frac{2}{1+\tan^2 x} - 1 \;=\; \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

et

$$\sin(2x) \underset{(\sin(2x) = 2\sin x \cos x)}{=} 2\tan x \cos^2 x \;=\; \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

vi) Voir le tracé de son graphe à la figure 1.5.

1.1.5 Composition de fonctions

Définition 1.5 *Soient A, B, C, D des parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \to B$, $g : C \to D$ deux fonctions. Si pour tout élément x de A, le nombre $f(x)$ (qui est élément de B) appartient à C (i.e. si $f(A) \subset C$), alors on peut calculer $g(f(x))$ pour tout $x \in A$. Dans ce cas on peut définir une nouvelle fonction, notée $g \circ f$, dont la source est A et le but est D, appelée composée de f par g, de la manière suivante :*

$$g \circ f \;:\; \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & D \\ x & \longmapsto & (g\circ f)(x) := g(f(x)) \end{array} \right. .$$

Exemples et Remarques

1. La fonction $g \circ f$ n'est définie que si $f(A) \subset C$ i.e. si $f(D_f) \subset D_g$!
2. Dès que l'on écrit une formule imbriquant des fonctions élémentaires, on réalise un certain nombre de compositions de fonctions.

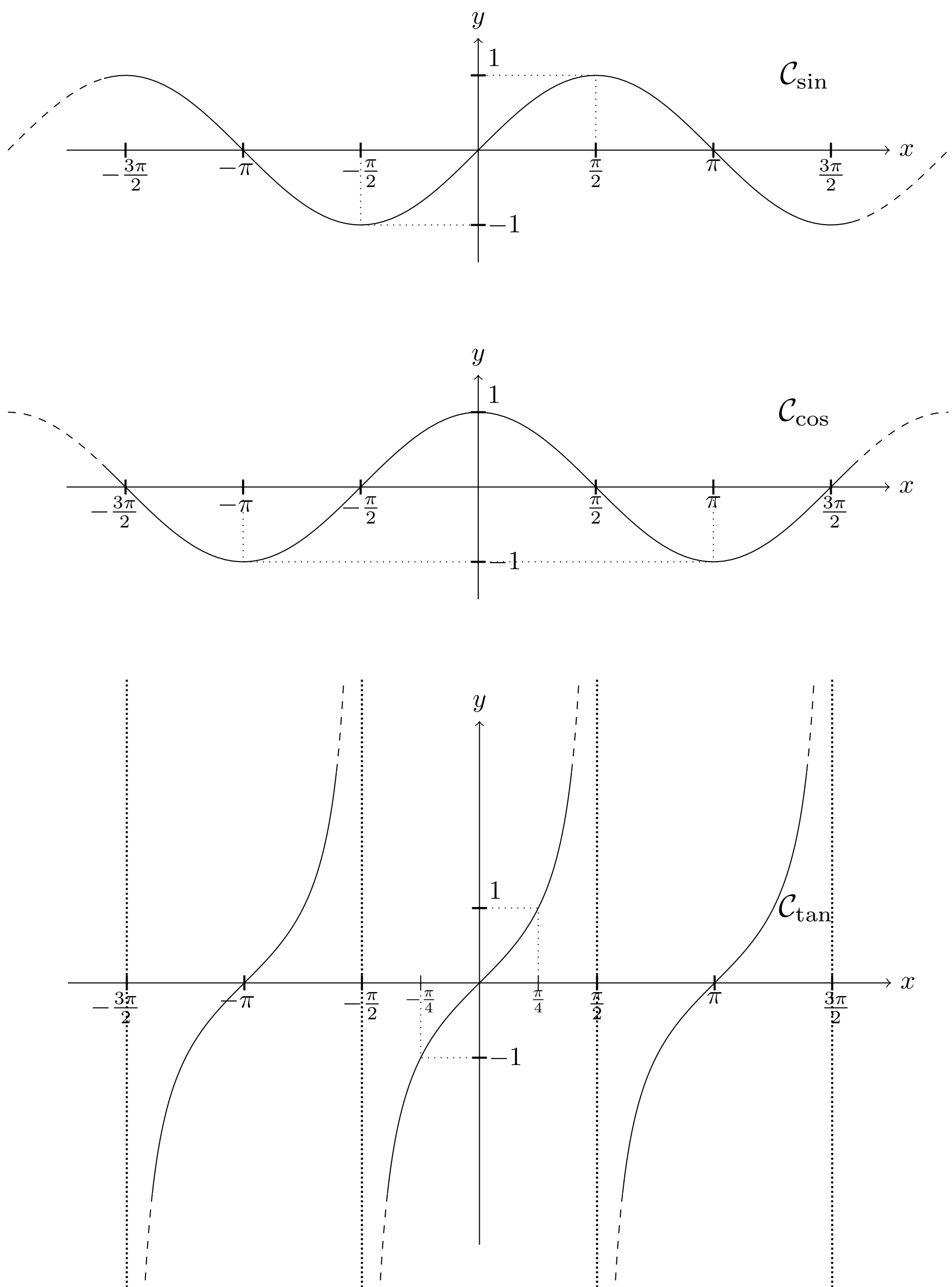


FIGURE 1.5 – Graphes des fonctions sin, cos et tan

3. **Exercice résolu en cours.** Donner D_f pour la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{-\ln(x^2-1)}$. Encore une fois, ceci sous-entend : « quel est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel on peut définir f par cette formule ? »
Pour que $f(x)$ soit défini, il faut (et il suffit) que

$$\left\{ \text{et} \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & x^2-1>0 \text{ (car le domaine de définition de ln est }]0,+\infty[) \\ \text{(b)} & -\ln(x^2-1) \geq 0 \text{ (car le domaine de définition de } \sqrt{\cdot} \text{ est } [0,+\infty[). \end{array} \right.$$

On a obtenu un système d'inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ qu'il faut résoudre. Ce système est équivalent à

$$\left\{ \text{et} \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & |x|>1 \\ \text{(b)} & x^2-1 \leq 1 \text{ (car } \ln X \leq 0 \text{ si et seulement si } X \leq 1) \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \text{et} \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & x>1 \text{ ou } x<-1 \\ \text{(b)} & -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{array} \right.$$

On a donc $D_f = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]$.

4. On peut aussi utiliser des définitions par morceaux (i.e. définir une fonction par des formules différentes sur des parties de $\mathbb{R}$ disjointes). Déterminons par exemple le domaine de définition D_g de

$$g(t) = \left\{ \begin{array}{cl} \sqrt{-\ln(t^2-1)} & \text{si } t>0 \\ \tan t & \text{si } t \in]-\pi,0[\end{array} \right.$$

Pour que $g(t)$ soit défini, il faut (et il suffit) que

$$\left\{ \text{ou bien} \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & t>0 \text{ et } \sqrt{-\ln(t^2-1)} \text{ est bien défini} \\ \text{(b)} & t \in]-\pi,0[\text{ et } \tan t \text{ est bien défini} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \text{ou bien} \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & t>0 \text{ et } t \in \left[-\sqrt{2},-1\right[\cup \left]1,\sqrt{2}\right] \text{ (en utilisant l'exemple précédent)} \\ \text{(b)} & t \in]-\pi,0[\text{ et } t \neq -\dfrac{\pi}{2} \text{ (voir } D_{\tan}) \end{array} \right.$$

Finalement, le domaine D_g cherché est

$$D_g = \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right] .$$

1.1.6 Fonction injective, surjective, bijective. Fonction réciproque

Définition 1.6 *Soit $f : D \to A$ une fonction de variable réelle. On dit que f est* **injective** *(ou que c'est une injection) si tout élément de A a au plus un antécédent par f, ce qui équivaut à dire que deux éléments de D quelconques distincts ont des images par f distinctes, i.e.* [11]

$$\begin{array}{rcl} f \textit{ est injective} & \iff & \big(\forall (x,x') \in D \times D,\ f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'\big) \\ & \iff & \big(\forall (x,x') \in D \times D,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\big) \end{array}$$

Définition 1.7 *Soit $f : D \to A$ une fonction de variable réelle. On dit que f est* **surjective** *(ou que c'est une surjection) si tout élément de A admet (au moins) un antécédent par f i.e. :*

$$\begin{array}{rcl} f \textit{ est surjective} & \iff & \big(\forall y \in A,\ \exists x \in D \textit{ tel que } f(x)=y\big) \\ & \iff & Imf \ = \ f(D) \ = \ A \end{array}$$

11. les quantificateurs logiques « $\Leftrightarrow$ », « $\Rightarrow$ » et « $\forall$ » employés ci-dessous signifient respectivement « si et seulement si », « implique » et « pour tout ».

Exemples et Remarques

1. L'application carré $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est ni surjective, ni injective.
   — Elle n'est pas surjective car par exemple -1 (et en fait tout $y < 0$) n'a aucun antécédent par f puisqu'on a $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   — Elle n'est pas injective car par exemple $f(1) = f(-1)$ alors que $-1 \neq 1$.
2. Il faut faire très attention aux ensembles de départ et d'arrivée utilisés dans la définition de la fonction étudiée. Par exemple :
   — $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas surjective mais $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ l'est. Or il s'agit « presque » de la même fonction puisque $D_f = D_g = \mathbb{R}$ et $f(x) = g(x)$ pour tout réel x.
   — $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas injective mais sa restriction à $\mathbb{R}^-$, $f\big|_{\mathbb{R}^-} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ l'est (et sa restriction à $\mathbb{R}^+$ aussi d'ailleurs).
3. De façon générale, si $f : D \to A$ est une fonction donnée, alors $\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathrm{Im} f = f(D) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est surjective.
4. Toute fonction strictement monotone $f : D \to A$ est injective. En effet, si f est strictement croissante, on a $f(x) < f(y)$ si $x < y$ et on a $f(x) > f(y)$ si $x > y$ donc dans tous les cas on a $f(x) \neq f(y)$ si $x \neq y$. Le cas où f est strictement décroissante s'obtient en inversant les inégalités strictes.

Définition 1.8 *Soit $f : D \to A$ une fonction de variable réelle. On dit que f est* **bijective** *(ou que c'est une bijection) si elle est à la fois injective et surjective. Autrement dit, f est bijective ssi tout élément y de A admet un unique antécédent $x \in D$ par f :*

$$f \text{ est bijective} \iff \forall\, y \in A\,,\ \exists !\, x \in D \ \text{ tel que } \ f(x) = y$$ [12]

Si $f : D \to A$ est bijective, alors on peut définir une fonction de A dans D qui à tout $y \in A$ associe l'unique $x \in D$ tel que $f(x) = y$. Cette fonction est appelée **fonction réciproque** de f et on la note f^{-1}. C'est une bijection de A sur D. Elle est caractérisée par la proposition suivante :

Proposition 1.9 (Caractérisation de la fonction réciproque) *Soit $f : D \to A$ une fonction bijective. Alors sa fonction réciproque $f^{-1} : A \to D$ est caractérisée par*

$$\forall\, (x, y) \in D \times A\,, \qquad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Preuve. Cela découle de la définition de $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccl} A & \to & D \\ y & \mapsto & \textbf{le seul } x \in D \text{ tel que } f(x) = y \end{array} \right.$. ◇

Exemples et Remarques

1. De par cette caractérisation, $f^{-1} : A \to D$ est également bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
2. Si $f : D \to A$ est bijective, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_D$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_A$. Autrement dit, on a :
   $$\forall\, x \in D\,,\ \ f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, y \in A\,,\ \ f(f^{-1}(y)) = y\,.$$
3. En pratique, on peut trouver $f^{-1} : A \to D$ en résolvant l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in D$, pour chaque $y \in A$:
   — Comme $f : D \to A$ est bijective, l'équation $f(x) = y$ admet en effet pour unique solution $x = f^{-1}(y)$ pour chaque $y \in A$ [13].
   — Réciproquement, si l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \in D$ pour chaque $y \in A$, alors $f : D \to A$ est bijective (car tout $y \in A$ admet un unique antécédent dans D par f, à savoir l'unique solution de l'équation) et cette solution n'est donc autre que $x = f^{-1}(y)$.

12. le symbole « $\exists !$ » n'est pas un vrai quantificateur logique mais une abréviation de « il existe un unique… ».
13. de par la caractérisation de f^{-1} donnée à la proposition 1.9

4. Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont bijectives, alors $g \circ f : A \to C$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. En effet, on a :

$$\forall\,(x,y) \in A\times C\,, \quad g\circ f(x) = y \underset{(g \text{ bijective})}{\text{ssi}} f(x) = g^{-1}(y) \underset{(f \text{ bijective})}{\text{ssi}} x = f^{-1}(g^{-1}(y)) = f^{-1}\circ g^{-1}(y)$$

et, pour tout $y \in C$ l'équation $g \circ f(x) = y$ a une unique solution : $x = f^{-1} \circ g^{-1}(y) \in A$.

5. Si $f : D \to A$ est injective, alors $\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \text{Im}f \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est bijective (car injective et surjective). C'est en particulier le cas si f est strictement monotone sur D !
6. $\ln : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est bijective de bijection réciproque $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$.
7. $(\cdot)^2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+\,,\ x \mapsto x^2$ est bijective de bijection réciproque $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+\,,\ x \mapsto \sqrt{x}$.
8. $(\cdot)^2 : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+\,,\ x \mapsto x^2$ est bijective de bijection réciproque $-\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-\,,\ x \mapsto -\sqrt{x}$.
9. **Exercice.** Montrer que la fonction $f : D \to A$ est bijective ssi il existe une fonction $h : A \to D$ telle que $f \circ h = \text{Id}_A$ et $h \circ f = \text{Id}_D$ et qu'alors h est unique et vaut f^{-1}.
10. **Exercice résolu en cours.** Montrer que la fonction sinus hyperbolique définie par

$$\text{sh} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

est bijective et donner l'expression de f^{-1}.
Pour cela, on cherche donc à résoudre l'équation $\frac{e^x-e^{-x}}{2} = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ pour $y \in \mathbb{R}$. Comme on a

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \underset{(\times 2e^x \neq 0)}{\text{ssi}} e^{2x} - 1 = 2ye^x \quad \text{ssi} \quad (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0\,,$$

résoudre l'équation $\text{sh}\,x = y$ revient à résoudre l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$ d'inconnue $X = e^x \in \mathbb{R}^{+*}$. Le discriminant Δ de ce polynôme vaut $\Delta = 4y^2 + 4 > 0$ donc il admet deux racines réelles distinctes, à savoir

$$X_1 = \frac{2y - \sqrt{4y^2+4}}{2} = y - \sqrt{y^2+1} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2y + \sqrt{4y^2+4}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}\,.$$

Ainsi x est solution de $\frac{e^x+e^{-x}}{2} = y$ ssi $e^x \in \{X_1, X_2\}$. Or, on a $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y| \geq y$ pour tout y réel (par stricte croissance de $\sqrt{.}$), donc on a $X_1 < 0$ et $X_2 > 0$ et finalement on a $e^x \in \{X_1, X_2\}$ ssi $e^x = X_2$ d'où la conclusion :

$$\begin{array}{rl} x \text{ est solution de sh}\,x = y & \text{ssi} \quad e^x = X_2 = y + \sqrt{y^2+1} \\ & \text{ssi} \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})\,. \end{array}$$

La fonction $\text{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donc bijective, de bijection réciproque $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \end{array} \right.$.

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Premières définitions

Définition 2.1 *On appelle suite à valeurs réelles une application de $\mathbb{N}$, ou d'une partie de $\mathbb{N}$ de la forme $\{n \in \mathbb{N} \; ; \; n \geq N\}$, dans $\mathbb{R}$. On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq N}$ suivant le cas.*

Exemples et Remarques

1. Une suite réelle est donc une fonction
$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \text{ (ou bien } \{n \in \mathbb{N} \; ; \; n \geq N\}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n = u(n) \end{array} \right. .$$
Elle est généralement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou bien $(u_n)_{n\geq N}$) plutôt que u.
2. u_n est la valeur de la suite au point n, c'est donc un nombre qui dépend du paramètre n ; c'est l'analogue pour les suites (qui sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ ou $\{n \in \mathbb{N} \; ; \; n \geq N\}$) du $f(x)$ pour les fonctions.

Définition 2.2 *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite*

i) majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \leq M.$$
ii) minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \geq m.$$
iii) bornée s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \; |u_n| \leq C.$$

Remarque La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et on a la propriété suivante :

Proposition 2.3 *Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle majorée par M et minorée m. Dans ce cas on a :
$$\text{si } u_n \geq 0 \text{ alors } |u_n| = u_n \leq M \quad \text{et} \quad \text{si } u_n \leq 0 \text{ alors } |u_n| = -u_n \leq -m.$$
Ainsi on a : $|u_n| \leq C := \max\{-m, M\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Réciproquement, soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et C un réel tels que $|u_n| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a : $-C \leq u_n \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par C et minorée par $-C$. $\diamond$

Définition 2.4 *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :*

1. **croissante** *si pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2 := \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ on a : $\quad p < q$ implique $u_p \leq u_q$,*
2. **strictement croissante** *si pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ on a : $\quad p < q$ implique $u_p < u_q$,*
3. **décroissante** *si pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ on a : $\quad p < q$ implique $u_p \geq u_q$,*
4. **strictement décroissante** *si pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ on a : $\quad p < q$ implique $u_p > u_q$,*
5. **stationnaire** *s'il existe un rang N tel que $u_p = u_N$ pour tout entier $p \geq N$,*
6. **monotone** *si elle est croissante ou décroissante,*
7. **strictement monotone** *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Une récurrence immédiate montre :

Proposition 2.5 *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n \quad (\textit{resp. } u_{n+1} > u_n).$$

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n \quad (\textit{resp. } u_{n+1} < u_n).$$

2.2 Limite d'une suite réelle

Nous allons maintenant définir ce que signifie « u_n tend vers ℓ lorsque n tend vers l'infini » en formalisant l'énoncé « u_n est aussi proche que l'on veut de ℓ si n est assez grand »grâce à la définition suivante :

Définition 2.6 *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend (ou converge) vers le réel ℓ si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. De plus, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (ou qu'elle converge) si elle converge vers un certain réel ℓ et on dit qu'elle est divergente (ou qu'elle diverge) sinon.

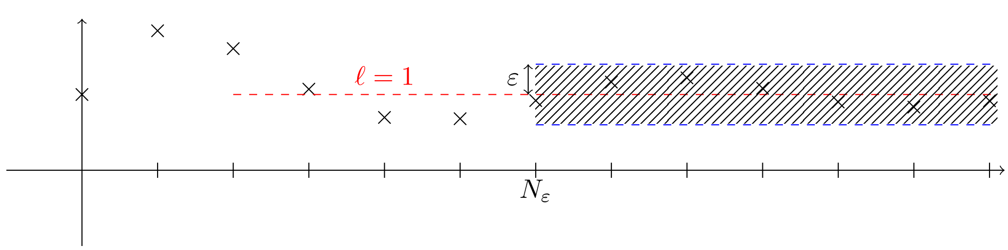


FIGURE 2.1 – Définition de la limite d'une suite : pour tout choix de $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_ε à partir duquel tous les termes de la suite sont dans la zone hachurée

Exemples et Remarques

1. Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ signifie la chose suivante : pour tout écart $\varepsilon > 0$ donné aussi petit soit-il, il existe un rang N_ε (l'indice ε souligne que ce rang dépend a priori de ε) tel que pour tout entier $n \geq N_\varepsilon$ la distance $|u_n - \ell|$ entre ℓ et u_n est majorée par ε.

2. Vérifier qu'il aurait été équivalent de requérir dans la définition :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

3. Par définition, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ ssi $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. La notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et que sa limite est ℓ. Il ne faut donc pas l'utiliser avant d'avoir prouvé que la suite (u_n) admet une limite. Par ailleurs, on verra au paragraphe suivant que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, alors celle-ci est unique (i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas admettre deux limites différentes), ce qui autorise bien à parler de **sa** limite.
5. Une suite stationnaire est convergente et converge vers sa valeur stationnaire. Considérons en effet une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = u_N$ pour tout entier $n \geq N$. Alors, quelle que soit la valeur $\varepsilon > 0$ fixée, on a $|u_n - u_N| = 0 < \varepsilon$ dès que $n \geq N$. Par définition, cela signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_N$.
6. Dans l'exemple précédent, l'entier N_ε peut être choisi égal à N quelle que soit la valeur de $\varepsilon > 0$ et dans ce cas il ne dépend pas de ε. C'est le seul cas où cela se produit.
7. Montrons que la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Considérons pour cela $\varepsilon > 0$ quelconque et montrons qu'il existe un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\frac{1}{n}| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N_\varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $|\frac{1}{n}| \leq \varepsilon$ ssi $\frac{1}{\varepsilon} \leq n$. Il suffit de choisir pour N_ε n'importe quel entier supérieur ou égal à $\frac{1}{\varepsilon}$ pour conclure. En effet, pour un tel entier, on a : $n \geq N_\varepsilon$ implique $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ et donc $|\frac{1}{n}| \leq \varepsilon$. Remarquons enfin que le plus petit N_ε qui convient ici est donné par $\frac{1}{\varepsilon}$ si ce réel est entier et par sa partie entière plus un sinon.
8. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. En effet, quel que soit le réel ℓ il est impossible d'avoir $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang car pour n pair l'inégalité $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}$ exige qu'on ait : $\frac{1}{2} \leq \ell \leq \frac{3}{2}$ tandis que pour n impair la même inégalité exige qu'on ait $-\frac{3}{2} \leq \ell \leq -\frac{1}{2}$ qui est incompatible avec l'autre encadrement de ℓ.

On définit similairement le fait qu'une suite tende vers $+\infty$ ou $-\infty$:

Définition 2.7 *1. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend (ou diverge) vers $+\infty$ si :*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_A \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_A \Rightarrow u_n \geq A.$$

On note cela $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *ou bien* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

2. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend (ou diverge) vers $-\infty$ si :

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists N_B \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_B \Rightarrow u_n \leq B.$$

On note cela $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *ou bien* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$

Exemples et Remarques

1. Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ signifie que pour toute valeur donnée A aussi grande soit-elle, il existe un rang N_A à partir duquel toutes les valeurs u_n sont supérieures à A. Il est donc permis si on le souhaite de remplacer « $\forall A \in \mathbb{R}$ » par exemple par « $\forall A > 0$ » ou bien par « $\forall A \geq \pi$ » dans la définition ci-dessus.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si et seulement si $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. La suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. En effet, pour $A \in \mathbb{R}^+$ donné, on a : $\sqrt{n} \geq A$ ssi $n \geq A^2$. Donc, pour tout $A \in \mathbb{R}^+$ fixé, on a $\sqrt{n} \geq A$ pour tout entier n supérieur à N_A où N_A désigne la partie entière de $A^2 + 1$.

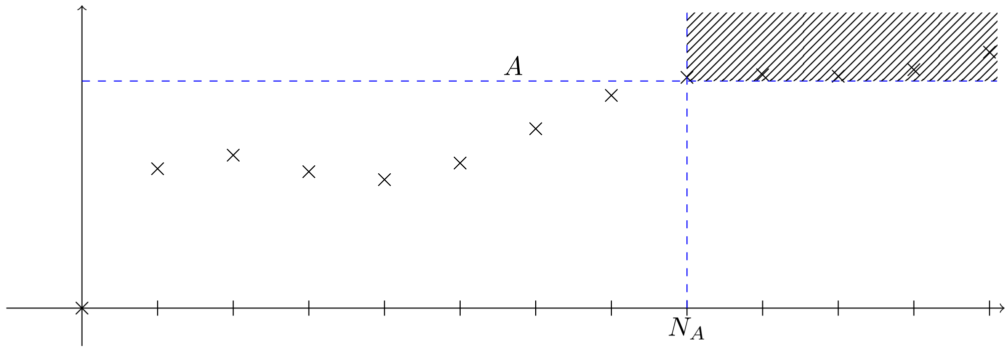


FIGURE 2.2 – Définition d'une limite infinie : pour tout choix de $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang N_A à partir duquel tous les termes de la suite sont dans la zone hachurée

2.3 Premières propriétés des limites

2.3.1 Unicité

Proposition 2.8 (Unicité de la limite) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et deux réels ℓ et ℓ'. On suppose que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell'.$$

Alors, on a $\ell = \ell'$, autrement dit, si une suite converge elle a une limite unique.

Preuve. (Par l'absurde.) Supposons que l'on ait $\ell \neq \ell'$. Quitte à échanger les lettres ℓ et ℓ', on va supposer que $\ell < \ell'$. Considérons $\varepsilon := \frac{\ell'-\ell}{3} > 0$. Par définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \frac{\ell'-\ell}{3}$ pour $n \geq N_1$. De même, par définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell'$ il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \frac{\ell'-\ell}{3}$ pour $n \geq N_2$. Mais alors, pour tout entier $n \geq N_3 := \max\{N_1, N_2\}$, on a :

$$\ell - \frac{\ell'-\ell}{3} < u_n < \ell + \frac{\ell'-\ell}{3} = \frac{\ell'+2\ell}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2\ell'+\ell}{3} = \ell' - \frac{\ell'-\ell}{3} < u_n < \ell' + \frac{\ell'-\ell}{2}$$

d'où $u_n < \frac{\ell'+2\ell}{3} < \frac{2\ell'+\ell}{3} < u_n$ ce qui est une contradiction. On a donc nécessairement $\ell = \ell'$. $\diamond$

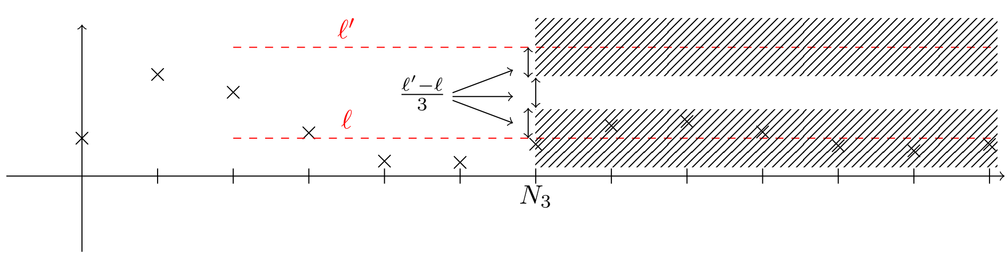


FIGURE 2.3 – Unicité de la limite : il est impossible qu'à partir d'un certain rang N_3, tous les termes de la suite soient à la fois dans les deux zones hachurées !

Proposition 2.9 *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite admettant une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_n - \ell| \leq 1$ pour tout $n \geq N$. L'inégalité triangulaire conduit alors, pour tout $n \geq N$, à

$$|u_n| \ = \ |u_n - \ell + \ell| \ \leq \ |u_n - \ell| + |\ell| \ \leq \ 1 + |\ell|.$$

Comme par ailleurs on a $|u_n| \leq \max\{|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|\}$ pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq C := \max\{|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|\}.$$

$\diamond$

Remarque La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, bornée mais non convergente.

Proposition 2.10 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq \frac{\ell}{2}$ (et en particulier on a $u_n > 0$) pour tout entier $n \geq N$.*

Preuve. En utilisant la définition d'une limite avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ on obtient l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leq \frac{\ell}{2}$, i.e. tel que $u_n \in [\frac{\ell}{2}, 3\frac{\ell}{2}]$, pour tout entier $n \geq N$. $\diamond$

2.3.2 Théorème des gendarmes

Théorème 2.11 (dit « des gendarmes ») *i) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

On a alors :

1. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*
3. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.*

ii) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ, i.e. on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Preuve. Démontrons pour commencer la partie i) de l'énoncé.

1. Pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq A$ et donc $v_n \geq u_n \geq A$, pour tout $n \geq N$.
2. Pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \leq A$ et donc $u_n \leq v_n \leq A$, pour tout $n \geq N$.
3. Supposons qu'on ait $\ell' < \ell$. Alors, comme dans la preuve de l'unicité d'une limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \frac{\ell-\ell'}{2}$ pour $n \geq N_1$ et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - \ell'| < \frac{\ell-\ell'}{2}$ pour $n \geq N_2$. Donc, pour tout entier $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, on a

$$u_n > \ell - \frac{\ell - \ell'}{2} = \frac{\ell + \ell'}{2} \quad \text{et} \quad v_n < \ell' + \frac{\ell - \ell'}{2} = \frac{\ell + \ell'}{2}$$

en contradiction avec l'hypothèse : $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclusion : $\ell \leq \ell'$.

Démontrons maintenant le point ii). Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe deux entiers naturels N_1 et N_2 tels que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout entier $n \geq N_1$ et $|w_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout entier $n \geq N_2$. Par conséquent, pour tout entier $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, on a

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon \quad \text{et donc} \quad -\varepsilon < v_n - \ell < \varepsilon \quad \text{c-à-d} \quad |v_n - \ell| < \varepsilon.$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. $\diamond$

Exemples et Remarques

1. Attention, le point *i)* 3 de ce théorème ne s'étend pas aux inégalités strictes, comme le montre l'exemple $u_n = 0$ et $v_n = 1/n$: bien qu'on ait $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux suites convergent vers 0.
2. Ce théorème fournit une **méthode** fondamentale pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$: d'après le point *ii)* il suffit de trouver une majoration du type
$$\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon_n,$$
où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite 0. En général on peut prendre cette suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans une liste de suites de référence : par exemple $\varepsilon_n = Cn^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$ et $C > 0$.
3. Montrons par exemple : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2+n+2} = 1$. Pour cela, on écrit :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{n^2+1}{n^2+n+2} - 1\right| = \left|\frac{-n-1}{n^2+n+2}\right| = \frac{n+1}{n^2+n+2} \underset{n^2+n+2\geq n^2+n}{\leq} \frac{n+1}{n^2+n} = \frac{1}{n},$$
d'où la conclusion puisque $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Corollaire 2.12

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, on a $u_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, on a $u_n \geq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve.

1. Soit $N \in \mathbb{N}$ un entier quelconque. On a $u_n \geq u_N$ pour tout entier $n \geq N$ donc d'après le point *i)* 3. du théorème 2.11, on a $\ell \geq u_N$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}$ un entier quelconque. On a $u_n \leq u_N$ pour tout entier $n \geq N$ donc d'après le point *i)* 3. du théorème 2.11, on a $\ell \leq u_N$.

$\diamond$

2.3.3 Opérations sur les limites

On connaît un certain nombre de limites de suites « simples » : suites polynomiales, exponentielles, etc. Or, les suites que nous étudions sont généralement obtenues grâce à des sommes, produits, quotients, etc. de ces suites simples ; on va pouvoir calculer leurs limites au moyens de « règles opératoires » grâce aux propositions suivantes :

Somme

Proposition 2.13 (Cas fini) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles qui convergent respectivement vers deux réels ℓ et ℓ'. Alors la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition d'une limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N_1$ et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N_2$. En utilisant l'inégalité triangulaire on obtient que, quel que soit $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, on a :
$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Ceci montre que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$. $\diamond$

Proposition 2.14 (Cas non fini) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $-\infty$, alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.*
3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*
4. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.*

Preuve. Les deux premiers cas découlent des deux derniers et ceux-ci sont très similaires donc on ne va traiter que le cas 3. Soit $A\in\mathbb{R}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant minorée, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $v_n\geq c$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe par ailleurs $N\in\mathbb{N}$ tel que $u_n\geq A-c$ pour tout $n\geq N$. Ainsi, pour tout entier $n\geq N$, on a $u_n+v_n\geq A-c+c=A$. On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$. ◇

Exemples et Remarques

1. À titre d'exercice, le lecteur prouvera que les deux derniers points impliquent bien les deux premiers et il démontrera le point 4 en imitant la preuve du point 3.
2. Dans le cas où une suite tend vers $+\infty$ et une autre vers $-\infty$, on ne peut rien dire a priori de leur somme : par exemple $(2n)+(-n)$ tend vers $+\infty$, $(n)+(-2n)$ tend vers $-\infty$, $(n)+(-n)$ tend vers 0 et $(n+(-1)^n)+(-n)$ n'a pas de limite.

Produit

Proposition 2.15 (Cas fini) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.*

1. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la suite $(u_n\,v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*
2. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell\in\mathbb{R}$ et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell'\in\mathbb{R}$, alors la suite $(u_n\,v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell\,\ell'$.*

Preuve.

1. Soit $\varepsilon>0$ fixé et soit $M>0$ un majorant de $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n|\leq\frac{\varepsilon}{M}$ pour tout $n\geq N$. Mais alors on a $|u_n\,v_n|\leq\frac{\varepsilon}{M}M=\varepsilon$ pour tout $n\geq N$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_nv_n=0$.
2. Puisqu'on a l'égalité : $u_n\,v_n-\ell\,\ell'=(u_n-\ell)v_n+\ell(v_n-\ell')$, il suffit de montrer que chacune des deux suites $((u_n-\ell)v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\ell(v_n-\ell'))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. C'est bien le cas de $((u_n-\ell)v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vu que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-\ell)=0$ et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car convergente) ; c'est aussi le cas de $(\ell(v_n-\ell'))_{n\in\mathbb{N}}$ vu que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-\ell')=0$ et que la suite $(\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc bornée.

◇

Proposition 2.16 (Cas non fini) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, alors la suite $(u_n\,v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par une constante strictement positive, alors la suite $(u_n\,v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*

Preuve. Il suffit de prouver le cas 2. Soit $A>0$ fixé. Par hypothèse, il existe $c>0$ tel que $v_n\geq c$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $u_n>\frac{A}{c}>0$ pour tout $n\geq N$. On a donc $u_n\,v_n\geq c\frac{A}{c}=A$ pour tout $n\geq N$, d'où on déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_nv_n=+\infty$. ◇

Exemples et Remarques

1. En passant à l'opposé, on obtient que si d'une part (u_n) tend vers $-\infty$ et si d'autre part (v_n) tend vers $-\infty$ ou bien (v_n) est majorée par une constante strictement négative, alors $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$.
2. On ne peut pas conclure sans étude plus poussée dans le cas du produit de deux suites dont l'une tendant vers 0 et l'autre vers $+\infty$: observer par exemple que $(n^2)\cdot(\frac{1}{n})$ tend vers $+\infty$, que $(n)\cdot(\frac{1}{n^2})$ tend vers 0, que $(n)\cdot(\frac{1}{n})$ tend vers 1 et que $(n)\cdot(\frac{(-1)^n}{n})$ n'a pas de limite.

Quotient

Proposition 2.17 (Cas fini) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.*

1. *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, alors la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\geq N}$ est bien définie pour N assez grand et elle tend vers $\frac{1}{\ell}$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell' \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq N}$ est bien définie pour N assez grand et elle tend vers $\frac{\ell}{\ell'}$.*

Preuve.

1. L'inégalité triangulaire permet d'écrire : $\big||v_n| - |\ell|\big| \leq |v_n - \ell|$. On en déduit que la suite $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$ qui est > 0. Il existe donc un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|v_n| \geq \frac{|\ell|}{2} > 0$ et donc $v_n \neq 0$. Par conséquent, la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\geq N}$ est bien définie si $N \geq n_0$. Considérons maintenant un réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition de la limite, il existe un entier $N_1 \geq N$ tel qu'on ait $|v_n - \ell| \leq \varepsilon_1 := |\ell|^2\frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N_1$. Alors, pour tout entier $n \geq N_1$, on a :
$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell}\right| \;=\; \frac{|v_n - \ell|}{|\ell||v_n|} \;\leq\; \frac{|\ell|^2}{|\ell|\frac{|\ell|}{2}}\frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.$$
On en déduit : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{v_n} = \frac{1}{\ell}\cdot$
2. C'est immédiat par le point précédent et produit de limites.

$\diamond$

Proposition 2.18 (Cas non fini) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.*

1. *Si $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\geq N}$ est définie pour N assez grand et tend vers 0.*
2. *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs > 0 et tend vers 0, alors $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*
3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et de plus strictement positive à partir d'un certain rang N, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq N}$ est bien définie et tend vers $+\infty$.*
4. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq N}$ est bien définie pour N assez grand et elle tend vers 0.*
5. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par une constante > 0 à partir d'un certain rang et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs > 0 et tend vers 0, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*

Preuve.

1. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Vu que $(|v_n|)$ tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n| \geq \frac{1}{\varepsilon}$ (et donc $v_n \neq 0$) pour tout $n \geq N$. La suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\geq N}$ est donc bien définie et on a $\left|\frac{1}{v_n}\right| = \frac{1}{|v_n|} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, d'où la limite annoncée.
2. Soit $A > 0$ quelconque. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 < v_n \leq \frac{1}{A}$ pour tout $n \geq N$. On a donc $\frac{1}{v_n} \geq A$ pour tout $n \geq N$. On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{v_n} = +\infty$.

3. (idem pour les points 4 et 5) Il suffit de considérer le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ comme étant le produit $u_n \frac{1}{v_n}$ et d'utiliser les points 1 et 2 couplés avec les résultats sur les produits de suites.

◇

Exemples et Remarques

1. Comme pour les produits de suites, on peut obtenir certains énoncés en passant à l'opposé.
2. Les exemples cités dans la seconde remarque après la proposition 2.16 montrent aussi que le quotient de deux suites tendant toutes deux vers 0 ou $+\infty$ requiert une étude spécifique.

Croissances comparées

Proposition 2.19 *Soient $a > 1$, $b > 0$ et $c > 0$. Alors :*

$$n^n \gg n! \gg a^n \gg n^b \gg (\ln n)^c$$

où $u_n \gg v_n$ signifie $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 0$.

Preuve.

1. Montrons : $n^n \gg n!$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}$ car $\frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$ sont tous inférieurs à 1 ; on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ avec le théorème des gendarmes.
2. Montrons : $n! \gg a^n$. Soit N la partie entière de a et soit $C = \dfrac{a^N}{N!}\cdot$ Alors, pour tout entier $n > N$, on a
$$\frac{a^n}{n!} \;=\; \frac{a}{1}\cdots\frac{a}{N}\cdot\frac{a}{N+1}\cdots\frac{a}{n-1}\cdot\frac{a}{n} \;=\; C\frac{a}{N+1}\cdots\frac{a}{n-1}\cdot\frac{a}{n} \leq \frac{Ca}{n}$$
car $\frac{a}{N+1}, \ldots, \frac{a}{n-1}$ sont inférieurs à 1. On a donc $0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{C\,a}{n}$ pour tout entier $n > N$; on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ avec le théorème des gendarmes.
3. Les deux autres résultats sont des conséquences de la définition des fonctions exp et ln que nous verrons au chapitre 7 sur les fonctions réciproques (c.f. en particulier les paragraphes 7.4.2 et 7.4.3).

◇

2.4 Propriété de la borne supérieure

2.4.1 Borne supérieure

Avant d'énoncer cette propriété fondamentale de l'ensemble $\mathbb{R}$, commençons par les définitions suivantes de majorant, minorant, maximum et minimum.

Définition 2.20 *Soit A un ensemble non vide inclus dans $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que $M \in \mathbb{R}$ majore A (ou que M est un majorant de A) si*
$$\forall x \in A, \quad x \leq M\,.$$
L'ensemble A est dit majoré s'il admet (au moins) un majorant $M \in \mathbb{R}$.
2. *On dit que $m \in \mathbb{R}$ minore A (ou que m est un minorant de A) si*
$$\forall x \in A, \quad x \geq m\,.$$
L'ensemble A est dit minoré s'il admet (au moins) un minorant $m \in \mathbb{R}$.

3. *L'ensemble A est dit borné s'il est majoré et minoré.*
4. *Si $M \in A$ et si M majore A, on dit que M est le plus grand élément (ou maximum) de A. Si un tel élément M existe, il est unique et on le note $M = \max A$.*
5. *Si $m \in A$ et si m minore A, on dit que m est le plus petit élément (ou minimum) de A. Si un tel élément m existe, il est unique et on le note $m = \min A$.*

Exemples et Remarques

1. Si $M \in \mathbb{R}$ majore A, alors tout $M' \in [M, +\infty[$ majore aussi A.
2. La vérification de l'unicité annoncée dans les points 4 et 5 de la définition est facile. Faisons-la seulement dans le cas où chacun des nombres M et M' est un plus grand élément de A. D'après les points 1 et 4, on a alors $M \geq M'$ puisqu'on a $M' \in A$ et que M majore A. De même on a $M' \geq M$ puisqu'on a $M \in A$ et que M' majore A. On en déduit : $M = M'$.
3. Il est équivalent de dire que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ou de dire que l'ensemble $\{u_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ (qui est l'ensemble des valeurs prises par la suite) est majoré. Il en est de même pour le cas minoré et le cas borné.
4. Les parties finies non vides de $\mathbb{R}$ et les parties non vides et majorées de $\mathbb{Z}$ admettent un plus grand élément.
5. Considérons $A = \mathbb{R}^+$. Il est clair que $\min A = 0$. Par ailleurs, A n'admet pas de maximum car A n'a pas de majorant. En effet, il existerait sinon $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $M \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ d'où une contradiction en prenant pour x le réel $M + 1$.
6. Considérons maintenant l'ensemble $A =]0, 1]$. Il est clair que $\max A = 1$ et que 0 minore A. Par contre, A n'admet pas de minimum. En effet, il existerait sinon un réel $a \in]0, 1]$ tel que $a \leq x$ pour tout $x \in]0, 1]$ et donc tel que $0 < a \leq \frac{a}{2}$ car $\frac{a}{2} \in]0, 1]$, d'où une contradiction. Le nombre 0 est le plus grand des minorants de A mais il n'appartient pas à A. Cette situation est formalisée par la définition suivante.

Définition 2.21 *Soit A un ensemble non vide inclus dans $\mathbb{R}$.*

1. *Si $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A et si tout majorant de A est supérieur ou égal à M, on dit que M est la borne supérieure (ou le suprémum) de A. Si un tel élément M existe, il est unique et on le note $M = \sup A$.*
2. *Si $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de A et si tout minorant de A est inférieur ou égal à m, on dit que m est la borne inférieure (ou l'infimum) de A. Si un tel élément m existe, il est unique et on le note $m = \inf A$.*

Exemples et Remarques

1. $M \in \mathbb{R}$ est le suprémum de A si M est le minimum de l'ensemble des majorants de A. Autrement dit, $M \in \mathbb{R}$ est le suprémum de A si l'ensemble des majorants de A est l'ensemble $[M, +\infty[$. De même, $m \in \mathbb{R}$ est l'infimum de A si l'ensemble des minorants de A est l'ensemble $]-\infty, m]$.
2. L'unicité du supremum (s'il existe !) est immédiate car l'ensemble des majorants de A ne peut avoir qu'un seul minimum.
3. Si A admet un maximum M, i.e. si $M = \max A$, alors on a $M = \sup A$ puisque M majore A et que tout $y \in \mathbb{R}$ qui majore A vérifie en particulier $y \geq M$ vu que $M \in A$. Inversement, si A admet un supremum M qui appartient à A, alors on a $M = \max A$ puisque M majore A et appartient à A. On dit dans ce cas que la borne supérieure de A est atteinte.
4. L'ensemble $A = \mathbb{R}^+$ vérifie $\inf A = \min A = 0$ mais il n'a pas de supremum car il n'a pas de majorant.
5. L'ensemble $A =]0, 1]$ vérifie $\sup A = \max A = 1$ et $\inf A = 0$ mais A n'a pas de minimum.

6. Si $M \in \mathbb{R}$ est le supremum d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, alors par définition de M tout majorant y de A vérifie $y \geq M$. Réciproquement, si $y \in \mathbb{R}$ vérifie $y \geq M$ on a $y \geq x$ pour tout $x \in A$ puisque M est un majorant de A. On a donc l'équivalence

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \big(y \;\geq\; \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in A,\; y \;\geq\; x\big)\,, \tag{2.1}$$

ou encore par passage aux implications contraposées,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \big(y \;<\; \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in A \;\text{ tel que }\; y \;<\; x\big)\,. \tag{2.2}$$

Ces considérations permettent de caractériser la borne supérieure à l'aide de suites. On a :

Proposition 2.22 *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et soit M un réel. On a*

$$M = \sup(A) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} i)\; M \textit{ est un majorant de } A, \\ ii)\; \textit{il existe une suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ d'éléments de } A \textit{ qui tend vers } M. \end{array} \right.$$

Preuve. Supposons d'abord que M soit la borne supérieure de A. En utilisant pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ la relation (2.2) avec $y = M - \frac{1}{n}$ qui est strictement inférieur à M, on obtient l'existence de $x_n \in A$ tel que $x_n > M - \frac{1}{n}$. Mais alors on a $x_n \in]M - \frac{1}{n}, M]$ (car M majore A et en particulier on a $x_n \leq M$). La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A et elle converge vers M en vertu du théorème des gendarmes.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A qui converge vers un majorant M de A et considérons un majorant quelconque y de A. Nous devons montrer que $y \geq M$ pour conclure. Or, pour tout n on a $x_n \in A$ et donc $x_n \leq y$. Mais alors en passant à la limite dans cette inégalité quand n tend vers l'infini on obtient $M \leq y$. On en déduit : $M = \sup A$. ⋄

Proposition 2.23 *Soit a un réel. Quel que soit le réel $b < a$, le réel a est la borne supérieure des intervalles $]-\infty, a[$, $]-\infty, a]$, $[b, a]$, $[b, a[$ et $]b, a[$.*

Preuve. Dans les deuxième, troisième et cinquième cas, a est clairement le plus grand élément de l'intervalle. Dans les trois autres cas, a est un majorant de l'intervalle et la suite $(a - \frac{1}{n+1})_{n\geq N}$ tend vers a et prend ses valeurs dans l'intervalle considéré si N est choisi assez grand. ⋄

Nous admettrons la propriété fondamentale suivante de $\mathbb{R}$, dite de la borne supérieure, issue de la construction même des nombres réels [1] que nous n'aborderons pas dans ce cours.

Théorème 2.24 *L'ensemble $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure : tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré possède un supremum. De même, tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et minoré possède un infimum.*

Signalons que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure, i.e. il n'est pas vrai que tout ensemble non vide et majoré $A \subset \mathbb{Q}$ possède un supremum dans $\mathbb{Q}$. Pour le prouver, montrons que l'ensemble (non vide !)

$$A \;=\; \{\, q \in \mathbb{Q} \quad \text{tels que} \quad q^2 \;\leq\; 2\}$$

est majoré mais ne possède pas de supremum dans $\mathbb{Q}$.

— D'abord, on a : $1 \in A$ et $A \cap [2, +\infty[= \emptyset$. L'ensemble A est non vide et majoré par 2.

— Montrons maintenant que l'ensemble A n'admet pas de plus grand élément. On observe d'abord que tout élément $q \in A$ vérifie $q^2 < 2$ puisque 2 n'admet pas de racine carrée rationnelle. De plus, si $q \in A$ alors on a $q + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$(q \;+\; \tfrac{1}{n})^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q^2 \quad \text{avec } q^2 <\; 2\,,$$

d'où l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(q + \frac{1}{n_0})^2 < 2$. En posant $q' = q + \frac{1}{n_0}$ on définit un élément $q' \in A$ tel que $q < q'$. Par conséquent, aucun $q \in A$ n'est un majorant de A.

1. que seuls ceux qui aiment apprendre par eux-mêmes liront !

— Enfin, montrons que l'ensemble A n'admet pas de supremum dans $\mathbb{Q}$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un plus petit nombre rationnel y qui majore A. On a alors $y \in \mathbb{Q}$ et $y^2 > 2$ car on vient de voir que y qui majore A ne peut pas appartenir à A. On a aussi $y > 1$ car $1 \in A$. De plus on a $q - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$(y - \tfrac{1}{n})^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y^2 \quad \text{avec } y^2 > 2\,.$$

Il existe donc un entier $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(y - \frac{1}{n_1})^2 > 2$. Le rationnel $y' = y - \frac{1}{n_1}$ est positif (car $y > 1 \geq \frac{1}{n_1}$) et vérifie $(y')^2 > 2$. Par ailleurs, si $q \in A$ on a $q^2 < 2 < (y')^2$ et comme y' est positif on en déduit : $q \leq |q| < y'$. Ainsi y' majore A. Mais on a $y' < y$ en contradiction avec l'hypothèse faite sur y. Ceci achève la démonstration.

La construction des nombres réels (à partir des nombres rationnels) vise notamment à pallier cette faiblesse de $\mathbb{Q}$. Le supremum de l'ensemble A vu comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est le réel irrationnel $\sqrt{2}$ (qui n'est rigoureusement défini qu'une fois faite la construction de $\mathbb{R}$!).

2.4.2 Application aux suites

Grâce à la propriété de la borne supérieure, nous allons pouvoir montrer l'existence de limites même dans des cas où nous ne saurons pas les expliciter.

Théorème 2.25 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. On a l'alternative :*
- *ou bien la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un réel M et alors elle converge vers un réel $\ell \leq M$,*
- *ou bien la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée et alors $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Preuve. Soit $A = \{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des valeurs prises par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A n'est pas vide. Si A n'est pas majoré, i.e. si aucun $M \in \mathbb{R}$ ne majore A, il vient :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists a \in A \quad \text{tel que} \quad a > M\,.$$

Cela signifie que pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n_M \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_M} > M$, d'où l'on déduit, par croissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qu'on a $a_n > M$ pour tout $n \geq n_M$. Donc si A n'est pas majoré on a : $a_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Maintenant, si A est majoré, alors d'après le théorème 2.24, il admet un supremum $\ell \in \mathbb{R}$ et par la caractérisation (2.2), on a :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists a \in A \quad \text{tel que} \quad \ell - \varepsilon < a \qquad (\text{car } \ell - \varepsilon < \ell = \sup A)\,.$$

Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$. Puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que ℓ est un majorant de A, l'entier n_ε vérifie donc : $\ell - \varepsilon < a_n \leq \ell$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. Ainsi, on a $|a_n - \ell| = \ell - a_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. On en déduit : $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. ◇

Remarque 2.26 *On a bien sûr un résultat analogue pour la décroissance : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante, ou bien elle est minorée par un réel m et alors elle converge vers un réel $\ell \geq m$, ou bien elle n'est pas minorée et alors elle tend vers $-\infty$.*

Définition 2.27 *Deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites* **adjacentes** *si*
1. *l'une est croissante et l'autre décroissante,*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Remarque Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, alors on a $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers 0 donc elle est majorée par 0.

Théorème 2.28 *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes vérifiant $a_n \le b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors ces deux suites convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad a_n \ \le\ \ell\ \le\ b_n\,.$$

Preuve. Les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituent un ensemble non vide de $\mathbb{R}$ majoré par b_0. En effet, comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et comme on a $a_n \le b_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, il vient $a_n \le b_n \le b_0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. De même, les termes de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituent un ensemble non vide de $\mathbb{R}$ minoré par a_0. D'après le théorème 2.25, il existe donc des réels ℓ et ℓ' tels que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ'. L'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$ implique l'égalité $\ell' - \ell = 0$. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc vers la même limite $\ell = \ell'$. Enfin, par croissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ on a $a_n \le \ell$ pour tout n et par décroissance de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, on a aussi $\ell \le b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ◇

Une façon équivalente d'énoncer le résultat précédent est la suivante :

Théorème 2.29 (des segments emboîtés) *Soit $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments telle que :*

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$,

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Alors il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \ x \in [a_n, b_n] \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}\} \ =\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \ =\ \{\ell\}.$$

Preuve. On remarque que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite ℓ et on a $a_n \le \ell \le b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit : $\ell \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$.
Si x appartient à $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ i.e. si on a $a_n \le x \le b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le théorème des gendarmes implique $\ell \le x \le \ell$ c'est-à-dire $x = \ell$. L'ensemble $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ est donc égal au singleton $\{\ell\}$. ◇

2.5 Suites extraites et valeurs d'adhérence

Considérons par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}\cdot$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas mais son comportement à l'infini est mieux décrit par :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1.$$

La description de ce phénomène est l'objet de ce paragraphe.

Définition 2.30

1. *On appelle extraction toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.*
2. *On appelle suite extraite (ou sous-suite) d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $\big(x_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une extraction.*
3. *On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute limite finie d'une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exemples et Remarques

1. Une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite obtenue à partir de celle-ci en n'en gardant que certains éléments, mais en nombre infini.
2. Remarquons que toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifie la relation $\varphi(n) \ge n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, si l'on avait $\varphi(n) < n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors par stricte croissance de φ les $n+1$ entiers positifs $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ seraient tous distincts et strictement inférieurs à n, ce qui est impossible.

3. Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. La suite extraite $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1 et la suite $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à -1. Le lecteur pourra démontrer en exercice que 1 et -1 sont les deux seules valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ ou diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$, il en est alors de même pour toute suite extraite. Montrons-le par exemple dans le premier cas. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction. Par définition de la limite, quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_0 vérifiant $|x_n - x| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Par stricte croissance de φ, on a aussi $|x_{\varphi(n)} - x| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ (car $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). La suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers x. On a montré en particulier :

   Proposition 2.31 *Une suite convergente admet une unique valeur d'adhérence, sa limite.*
5. Revenons à l'exemple de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Les suites extraites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers 1 et -1, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente puisqu'elle a au moins deux valeurs d'adhérence distinctes. Noter que cette démonstration que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente est beaucoup plus brève que celle donnée en début de chapitre.

Théorème 2.32 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) *Soient $a \leq b$ deux réels et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ (i.e. telle que $x_n \in [a,b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet alors au moins une valeur d'adhérence dans $[a,b]$, i.e. il existe $x \in [a,b]$ et une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tels que*

$$x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x\,.$$

Remarque 2.33 *Le théorème précédent peut s'énoncer plus brièvement (mais un peu moins précisément puisque les bornes de la suite n'y sont pas spécifiées) :*

« toute suite réelle bornée admet (au moins) une valeur d'adhérence ».

Preuve. On va extraire une telle suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ en procédant par dichotomie c'est-à-dire plus précisément en construisant une suite d'intervalles emboîtés $[a_n, b_n]$ tels que pour chaque n l'intervalle $[a_n, b_n]$ contienne les termes x_k pour une infinité de valeurs de l'indice k et tels que pour chaque n l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ soit l'une des moitiés de $[a_n, b_n]$.

Soit $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Comme l'intervalle $[a_0, b_0]$ contient tous les x_n, ou bien il y a une infinité d'entiers n dans $\mathbb{N}$ tels que x_n soit dans $[a_0, c_0]$ ou bien il y a une infinité d'entiers n tels que x_n soit dans $[c_0, b_0]$. On procède comme suit :

— s'il y a une infinité d'entiers n tels que x_n appartienne à $[a_0, c_0]$, on définit $\varphi(0)$ comme le plus petit entier naturel m tel que $x_m \in [a_0, c_0]$, puis on pose $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$ et $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$,

— sinon, s'il y a une infinité d'entiers n tels que x_n appartienne à $[c_0, b_0]$ et on définit alors $\varphi(0)$ comme le plus petit entier naturel m tel que $x_m \in [c_0, b_0]$, puis on pose $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$ et $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Dans les deux cas on a : $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$.

Maintenant, comme l'intervalle $[a_1, b_1]$ contient x_n pour une infinité de valeurs de n, il en est de même pour au moins un des deux intervalles $[a_1, c_1]$ ou $[c_1, b_1]$. On procède comme précédemment :

— s'il y a une infinité d'entiers n tels que x_n appartienne à $[a_1, c_1]$, on définit $\varphi(1)$ comme le plus petit entier naturel m strictement supérieur à $\varphi(0)$ tel que $x_m \in [a_1, c_1]$, puis on pose $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$ et $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$;

— sinon, il y a une infinité d'entiers n tels que x_n appartienne à $[c_1, b_1]$ et alors on définit $\varphi(1)$ comme le plus petit entier naturel m strictement supérieur à $\varphi(0)$ tel que $x_m \in [c_1, b_1]$, puis on pose $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$ et $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$. Dans les deux cas on a : $a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1$.

En réitérant ce procédé, on construit par récurrence :

— deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît, $a_n \leq b_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ et $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ (ce sont donc deux suites adjacentes),

— une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $x_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après le théorème des suites adjacentes, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel $x \in [a, b]$ et, d'après le théorème des gendarmes, la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers x, ce qui prouve le théorème 2.32. ◇

On a vu qu'une suite réelle convergente est bornée et admet une unique valeur d'adhérence. La réciproque est vraie :

Théorème 2.34 *Une suite réelle converge si et seulement si elle est bornée et admet une unique valeur d'adhérence.*

Preuve. c.f. TD ◇

2.6 Suites de Cauchy

On termine ce chapitre consacré aux suites par la notion de suite de Cauchy et la seconde propriété fondamentale de $\mathbb{R}$: sa complétude.

Définition 2.35 *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq N \text{ et } q \geq N) \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

Remarque Noter la similitude avec la définition d'une limite :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ si l'écart entre u_n et ℓ est arbitrairement petit dès que n est suffisamment grand,
2. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si l'écart entre deux (quelconques) de ses termes u_p et u_q est arbitrairement petit dès que p et q sont suffisamment grands.

Proposition 2.36 *1. Toute suite convergente est de Cauchy.*

2. Toute suite de Cauchy qui admet (au moins) une valeur d'adhérence converge vers celle-ci (ell n'a donc pas d'autre valeur d'adhérence).

3. Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite admettant une limite ℓ et soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$ pour tou $n \geq N$. Ainsi, si $p \geq N$ et $q \geq N$ on a :
$$|u_p - u_q| = |(u_p - \ell) - (u_q - \ell)| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
2. Nous devons montrer que si la suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence ℓ, alors elle converge vers ℓ. Considérons un réel $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$|u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tous } p \geq N_1 \text{ et } q \geq N_1\,.$$
Puisque ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, celle-ci admet une suite extraite qui converge vers ℓ ; il existe donc (au moins) un entier $N_2 \geq N_1$ tel que $|u_{N_2} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. De l'inégalité triangulaire et de la relation $N_2 \geq N_1$, on déduit que pour tout $n \geq N_1$ on a :
$$|u_n - \ell| \ = \ |u_n - u_{N_2} + u_{N_2} - \ell| \ \leq \ |u_n - u_{N_2}| + |u_{N_2} - \ell| \ < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon.$$
On en conclut : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ quelconque (par exemple $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = 2018$). Il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$|u_p - u_q| \leq \varepsilon \quad \text{pour tous } p \geq N \text{ et } q \geq N\,.$$

Cela entraîne que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\max\{|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N|+\varepsilon\}$ et donc bornée. En effet, on a $|u_n| \leq \max\{|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|\}$ si $0 \leq n \leq N-1$ tandis que pour $n \geq N$, l'inégalité triangulaire implique

$$|u_n| \;=\; |u_n - u_N + u_N| \;\leq\; |u_n - u_N| + |u_N| \;\leq\; \varepsilon + |u_N|.$$

$\diamond$

Définition 2.37 *Un ensemble non vide $A \subset \mathbb{R}$ est dit complet si toute suite de Cauchy à valeurs dans A admet une limite appartenant à A.*

Exemples et Remarques

1. Autrement dit, A est complet si pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont dans A, il existe $x \in A$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
2. Comme toute suite convergente est de Cauchy d'après le point 1 de la proposition 2.36, les espaces complets ont la propriété très pratique suivante : les suites à valeurs dans ces espaces sont convergentes si et seulement si elles sont de Cauchy. On peut donc les caractériser sans se référer à leur limite.
3. Le fait que, dans la définition de la complétude, la limite appartienne à A est essentiel. Par exemple, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet bien que toute suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$ ait une limite dans $\mathbb{R}$ (puisque $\mathbb{R}$ est complet, voir ci-dessous). Pour le voir, il suffit de considérer la suite de nombres décimaux $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où u_n désigne la valeur approchée par défaut de l'irrationnel $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près : cette suite est à valeurs décimales donc rationnelles, elle converge vers $\sqrt{2}$ donc elle est de Cauchy, mais sa limite $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.
4. L'exemple précédent est un fait général : tout nombre réel x est la limite d'une suite à valeurs rationnelles. Cela découle de la **densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$** qui s'énonce comme suit [2] :

   Théorème 2.38 *Soient deux réels $x < y$. Il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.*
5. À titre d'exercice, le lecteur pourra démontrer que toute partie de $\mathbb{Z}$ est complète.

Terminons ce chapitre en énonçant une autre propriété fondamentale de $\mathbb{R}$: sa complétude.

Théorème 2.39 $\mathbb{R}$ *est complet.*

Preuve. Il s'agit de montrer que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ converge vers un certain réel. D'après le point 2 de la proposition 2.36, il suffit de montrer qu'une telle suite admet au moins une valeur d'adhérence. Or cette suite est bornée d'après le point 3 de la même proposition, elle admet donc bien une valeur d'adhérence d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. $\diamond$

2. À titre d'exercice, déduire du théorème 2.38 que tout réel est la limite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

Chapitre 3

Limite d'une fonction réelle

3.1 Limite finie d'une fonction en un point x_0 de $\mathbb{R}$

3.1.1 Voisinage

Définition 3.1 *Un ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage (dans $\mathbb{R}$) d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ si V contient un intervalle du type $]x_0 - h, x_0 + h[$.*

Exemples et Remarques

1. Un intervalle ouvert est un voisinage dans $\mathbb{R}$ de chacun de ses points.
2. $]0, 1]$ est un voisinage dans $\mathbb{R}$ de tout $x_0 \in]0, 1[$ mais pas de $x_0 = 1$.
3. $\mathbb{R}^*$ est un voisinage dans $\mathbb{R}$ de x_0 si $x_0 \neq 0$ mais ce n'est pas un voisinage de 0.
4. L'intersection de deux voisinages dans $\mathbb{R}$ d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est un voisinage dans $\mathbb{R}$ de x_0.

Définition 3.2 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de variable réelle (avec $D \subset \mathbb{R}$). On dit que*

1. *f est définie au voisinage de x_0 si D est un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, il existe $h > 0$ tel que $f(x)$ soit défini pour tout x dans l'intervalle $]x_0 - h, x_0 + h[$.*
2. *f est définie au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0 s'il existe $h > 0$ tel que D contienne l'ensemble $]x_0 - h, x_0[\cup]x_0, x_0 + h[$. Dans ce cas, $D \cup \{x_0\}$ est un voisinage de x_0.*

Exemples et Remarques

1. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est définie au voisinage de 0, sauf en 0 et elle est définie au voisinage de tout $x_0 \neq 0$.
2. Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \sqrt{x}$. La fonction g est définie au voisinage de tout $x_0 > 0$. Elle n'est pas définie au voisinage de 0 (mais on dira qu'elle est définie dans un voisinage à droite de 0, cf. 3.2.6.).
3. Nous utiliserons parfois la tournure de phrase suivante : « pour tout x assez voisin (ou assez proche) de x_0, $f(x) = g(x)$ ». Cela signifie qu'il existe un certain voisinage de x_0, que l'on ne juge pas utile de nommer, tel que pour tout x dans ce voisinage l'égalité $f(x) = g(x)$ a lieu (en particulier cela sous-entend que f et g sont définies au voisinage de x_0).

3.1.2 Définition

Définition 3.3 *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 par valeurs différentes de x_0 (ce qu'on abrège en « $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0, $x \neq x_0$ ») si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ t.q. \left(\ ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus \{x_0\} \subset D \quad et \quad \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus \{x_0\},\ |f(x) - \ell| < \varepsilon \ \right).$$

On note cela « $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$ » ou bien « $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = \ell$ » ou encore « $f(x) \underset{x\to x_0, x\neq x_0}{\longrightarrow} \ell$ ».

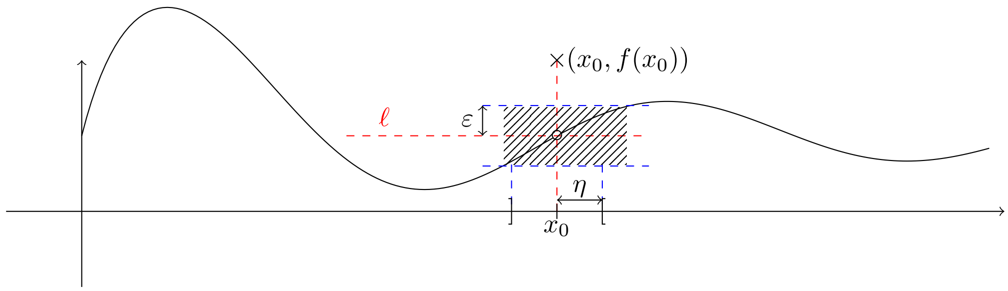


FIGURE 3.1 – Définition d'une limite : pour tout choix de $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que, à l'exception peut-être du point $(x_0, f(x_0))$, le graphe de f au dessus de l'intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ soit contenu dans la zone hachurée (i.e. $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ si $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus \{x_0\}$)

Exemples et Remarques

1. Même si f est définie en x_0, le fait que f admette une limite ℓ lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$ ne dépend pas de la valeur $f(x_0)$. Cela dépend seulement du comportement de $f(x)$ lorsque x est proche de x_0 mais distinct de x_0.
2. Dire que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$ signifie la chose suivante : pour toute déviation $\varepsilon > 0$ donnée aussi petite soit-elle, il existe un écart $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \neq x_0$ dont la distance $|x - x_0|$ au nombre x_0 est majorée par η on a :
   a) x appartient au domaine de définition D de f (remarque : ceci est vrai pour toute valeur $\eta > 0$ assez petite parce que f est définie dans un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0 ; le fait que f ait ou non une limite en x_0 n'intervient pas ici),
   b) la distance $|f(x) - \ell|$ entre $f(x)$ et ℓ est majorée par ε.

   Le point a) sert uniquement à assurer que $f(x)$ soit bien défini pour $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus \{x_0\}$. On pourrait écrire plus brièvement la définition précédente ainsi :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \quad \text{t.q.} \quad \Big(\forall x \in (]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus \{x_0\}) \cap D, \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon\Big).$$
3. Par définition,
   $$f(x) \text{ tend vers } \ell \text{ lorsque } x \to x_0,\ x \neq x_0 \ \text{ ssi } \ f(x) - \ell \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } x \to x_0,\ x \neq x_0.$$
   Par ailleurs [1],
   $$f(x) \text{ tend vers } \ell \text{ lorsque } x \to x_0,\ x \neq x_0 \ \text{ ssi } \ f(x_0 + h) \text{ tend vers } \ell \text{ lorsque } h \to 0,\ h \neq 0.$$
4. On peut aussi caractériser le fait que $f(x)$ tende vers ℓ quand $x \to x_0$, $x \neq x_0$ en termes de voisinages [2] :
   $$\text{pour tout voisinage } V \text{ de } \ell, \text{ il existe un voisinage } U \text{ de } x_0 \text{ tel que}$$
   $$U \setminus \{x_0\} \subset D \quad \text{et} \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\},\ f(x) \in V.$$
5. Comme pour les suites, nous verrons plus loin que si elle existe la limite d'une fonction en un point x_0 est unique.
6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 1$ si $x = 0$. On a
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0.$$

1. Pour cela on considère la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ définie dans un voisinage de 0, sauf peut-être en 0.
2. On laisse le lecteur vérifier en exercice que cette définition coïncide bien avec la définition donnée ci-dessus.

Fonctions de référence

Les fonctions suivantes sont des exemples fondamentaux de fonctions de limite nulle en 0. Leur étude sera faite au chapitre 7.

1. Soit $\alpha > 0$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = |x|^\alpha$ a pour limite 0 en 0.
2. La fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \ln |x|$ a pour limite 0 en 0.
3. Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. La fonction $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^\alpha \left| \ln |x| \right|^\beta$ a pour limite 0 en 0.

3.1.3 Caractérisation séquentielle

Proposition 3.4 *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0. On a l'équivalence : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour* **toute** *suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $D \setminus \{x_0\}$ convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Preuve. Supposons qu'on a $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \ell$ et considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $D \setminus \{x_0\}$ qui tend vers x_0. Fixons $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite d'une fonction en x_0, il existe $\delta > 0$ tel qu'on ait $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\} \subset D$ et $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}$. Par définition de la convergence d'une suite vers x_0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $|u_n - x_0| < \delta$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, comme $u_n \in D \setminus \{x_0\}$ et $u_n \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on a $|f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$. Conclusion : si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \ell$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$ pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $D \setminus \{x_0\}$ qui tend vers x_0.
Montrons l'implication réciproque par contraposition, i.e. montrons que si f ne tend pas vers ℓ en x_0, alors il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $D \setminus \{x_0\}$ tendant vers x_0 telle que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ. Or, supposer que f ne tend pas vers ℓ en x_0 revient à supposer que :

$$\text{il existe } \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que, pour tout } \delta > 0, \text{ il existe } x \text{ distinct de } x_0 \text{ dans }]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D \text{ vérifiant } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0\,.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, en prenant $\delta = \frac{1}{n+1}$ ci-dessus et en appelant u_n le x correspondant à δ, on obtient l'existence de $u_n \in]x_0 - \frac{1}{n+1}, x_0 + \frac{1}{n+1}[\cap D \setminus \{x_0\}$ tel que $|f(u_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $D \setminus \{x_0\}$ tendant vers x_0 telle que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers ℓ. $\diamond$

Exemple La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0. D'après la proposition précédente, il suffit pour le démontrer de trouver deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, convergeant vers 0 et telles que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(u'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers deux limites différentes On obtient deux telles suites en posant $u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $u'_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ car en ces points la fonction f vaut respectivement 1 et -1 (c.f. figure suivante).

3.1.4 DL à l'ordre 0

Proposition 3.5 *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0. Alors on a $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$ si et seulement si il existe une fonction ϵ, définie au voisinage de 0 et vérifiant $\lim_{h \to 0, h \neq 0} \epsilon(h) = 0 = \epsilon(0)$ telle que :*

$$\textit{pour tout } x \textit{ assez voisin de } x_0, \textit{ distinct de } x_0, \textit{ on a } \; f(x) = \ell + \epsilon(x - x_0).$$

Le fait d'écrire, pour x voisin de x_0, que $f(x) = \ell + \epsilon(x - x_0)$ s'appelle effectuer un développement limité (en abrégé « un DL ») de f à l'ordre 0 en x_0. Nous verrons, au second semestre, ce qu'est un DL de f en x_0 à un certain ordre $n \in \mathbb{N}$.

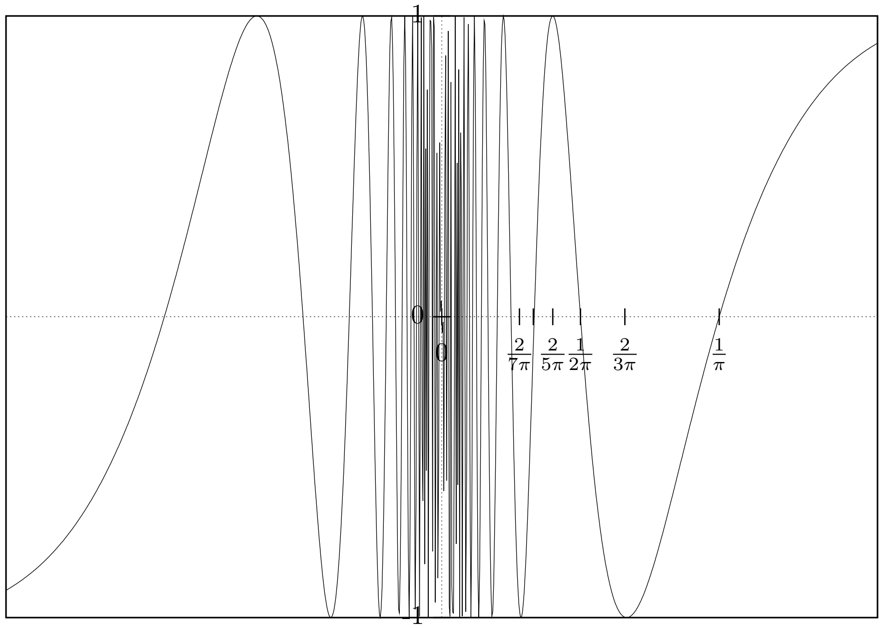


FIGURE 3.2 – Une partie du graphe de $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

3.2 Propriétés

3.2.1 Unicité

Proposition 3.6 *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0. Si $f(x) \underset{x \neq x_0, x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x \neq x_0, x \to x_0}{\longrightarrow} \ell'$, alors on a $\ell = \ell'$.*

Preuve. (Par l'absurde.) Supposons que $\ell \neq \ell'$ et, quitte à échanger ℓ et ℓ', supposons plus précisément qu'on a $\ell < \ell'$. Comme $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$, il existe de $\eta_1 > 0$ tel que $]x_0 - \eta_1, x_0 + \eta_1[\setminus\{x_0\} \subset D$ et $|f(x) - \ell| < \frac{\ell' - \ell}{3}$ pour tout $x \in]x_0 - \eta_1, x_0 + \eta_1[\setminus\{x_0\}$. De même, comme $f(x) \to \ell'$ lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$, il existe aussi $\eta_2 > 0$ tel que $]x_0 - \eta_2, x_0 + \eta_2[\setminus\{x_0\} \subset D$ et $|f(x) - \ell'| < \frac{\ell' - \ell}{3}$ pour tout $x \in]x_0 - \eta_2, x_0 + \eta_2[\setminus\{x_0\}$. Cela conduit à une contradiction puisque, pour $\eta_3 := \min\{\eta_1, \eta_2\} > 0$ et tout $x \in]x_0 - \eta_3, x_0 + \eta_3[\setminus\{x_0\}$, on a

$$f(x) < \ell + \frac{\ell' - \ell}{3} = \frac{\ell' + 2\ell}{3} < \frac{2\ell' + \ell}{3} \quad \text{et} \quad f(x) > \ell' - \frac{\ell' - \ell}{3} = \frac{2\ell' + \ell}{3}.$$

$\diamond$

3.2.2 Théorème des gendarmes

Théorème 3.7 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soient f, g, et h trois fonctions à valeurs réelles définies sur un voisinage U de x_0, sauf peut-être en x_0, qui vérifient :*

$$\textit{pour tout } x \in U \setminus \{x_0\}, \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

1. *Si f, g, h ont pour limites respectives[3] ℓ, m, n en x_0, on a $\ell \leq m \leq n$.*
2. *Si les deux fonctions f et h admettent la limite ℓ en x_0, g admet aussi la limite ℓ en x_0.*

3. Chaque fois qu'on parle de la limite d'une fonction f en un point x_0, il est sous-entendu que l'on parle de la limite de $f(x)$ lorsque $x \to x_0, x \neq x_0$. On ne le répète pas pour ne pas alourdir exagérément les énoncés.

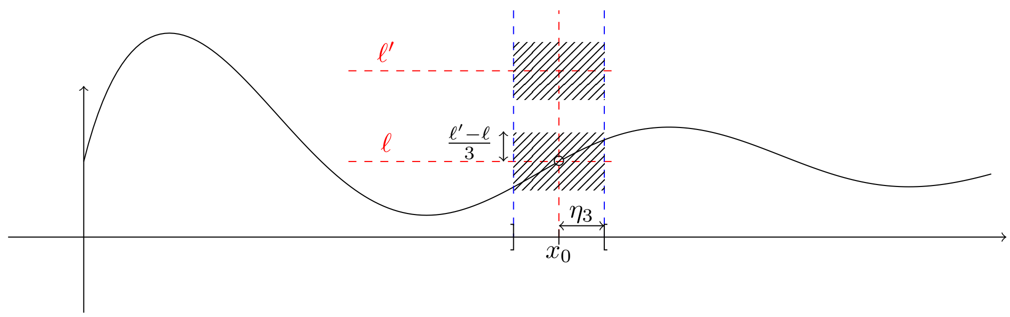


FIGURE 3.3 – Unicité de la limite : au dessus de $]x_0 - \eta_3, x_0 + \eta_3[\setminus\{x_0\}$, le graphe de f ne peut pas être entièrement compris que dans les deux zones hachurées à la fois !

Exemples et Remarques

1. Nous laissons en exercice la démonstration du théorème 3.7, car il suffit d'adapter celle du théorème analogue pour les suites.
2. Comme pour les suites, ce résultat fournit une méthode fondamentale pour montrer que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to x_0, x \neq x_0$: il suffit de trouver une majoration du type
$$\forall h \neq 0, h \text{ assez proche de } 0, \quad |f(x_0+h) - \ell| \leq \epsilon(h),$$
où ϵ est une fonction de limite 0 en 0. On peut en général prendre une telle fonction ϵ dans une liste de fonctions de référence comme par exemple $\epsilon(h) = C|h|^\alpha$ avec $\alpha > 0$ et $C > 0$.
3. Illustration : montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2x + 3$ a pour limite $f(1) = 6$ en $x_0 = 1$. On a
$$\begin{aligned} f(1+h) - f(1) &= (1+h)^2 + 2(1+h) - 1^2 - 2 \\ &= h(2+h) + 2h = h(4+h). \end{aligned}$$
L'étude se fait pour h voisin de 0, on peut donc se limiter à considérer h tel que $|h| \leq 1$. Pour ces h, on a
$$|f(1+h) - f(1)| \leq 5|h|.$$
Comme l'expression à droite de cette inégalité définit une fonction $\epsilon(h)$ de limite 0 en 0, on a donc démontré que
$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1).$$

3.2.3 Deux résultats utiles

f bornée localement

Proposition 3.8 *Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 alors f est bornée sur un certain voisinage*[4] *de x_0 (x_0 exclu).*

Preuve. Il suffit pour cela d'appliquer la définition d'une limite en prenant $\varepsilon = 1$:

il existe $\eta > 0$ tel que $\quad]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus\{x_0\} \subset D_f \quad$ et $\quad f(]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus\{x_0\}) \subset]\ell - 1, \ell + 1[$

donc $f(]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus\{x_0\})$ est bien borné. $\diamond$

4. Cela signifie, en notant $U \setminus \{x_0\}$ ce voisinage privé de x_0, que l'ensemble $f(U \setminus \{x_0\})$ est borné.

Positivité sur un voisinage

Proposition 3.9 *Si f admet une limite $\ell > 0$ en x_0 alors on a $f(x) > \frac{1}{2}\ell > 0$ pour tout $x \neq x_0$ dans un certain voisinage de x_0.*

Preuve. Il suffit pour cela d'appliquer la définition d'une limite en prenant $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$:

$$\text{il existe } \eta > 0 \text{ tel que} \quad]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus\{x_0\} \subset D_f \quad \text{et} \quad f(]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus\{x_0\}) \subset]\frac{\ell}{2}, 3\frac{\ell}{2}[.$$

◇

3.2.4 Opérations sur les limites

Dans tous les énoncés suivants (dont les démonstrations sont similaires à celles des énoncés analogues pour les suites et sont laissées au lecteur en exercice) f et g sont des fonctions définies au voisinage du point x_0, sauf peut-être en x_0.

Somme

Si

$$f(x) \underset{x\neq x_0, x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to x_0, x\neq x_0}{\longrightarrow} m,$$

alors

$$(f+g)(x) \underset{x\to x_0, x\neq x_0}{\longrightarrow} \ell + m.$$

Produit

Si

$$f(x) \underset{x\to x_0, x\neq x_0}{\longrightarrow} \ell \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to x_0, x\neq x_0}{\longrightarrow} m,$$

alors

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \underset{x\to x_0, x\neq x_0}{\longrightarrow} \ell\, m.$$

Quotient

Si

$$f(x) \underset{x\to x_0, x\neq x_0}{\longrightarrow} \ell \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to x_0, x\neq x_0}{\longrightarrow} m,$$

et si de plus $m \neq 0$, alors

$$(f/g)(x) \underset{x\to x_0, x\neq x_0}{\longrightarrow} \ell/m.$$

Remarque Dans les énoncés précédents concernant la somme et le produit de limites, il est clair que si f et g sont respectivement définies sur $D_1 \setminus \{x_0\}$ et sur $D_2 \setminus \{x_0\}$ avec D_1, D_2 voisinages de x_0, alors $f+g$ et fg sont définies au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0 car définies sur $(D_1 \cap D_2) \setminus \{x_0\}$ ($D_1 \cap D_2$ est un voisinage de x_0 !). Par contre, dans le dernier cas, f/g n'est pas nécessairement définie sur tout $(D_1 \cap D_2) \setminus \{x_0\}$ puisque g peut s'y annuler. Néanmoins, en vertu de la proposition 3.9 appliquée à $|g|$, il existe un certain voisinage $D_3 \subset D_2$ de x_0 tel que g ne s'annule pas sur D_3 et de ce fait f/g est bien définie sur $(D_1 \cap D_3) \setminus \{x_0\}$.

3.2.5 Composition

Continuité en x_0

Définition 3.10 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage de x_0. On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = f(x_0)$.*

$\boxed{\textbf{Composition}}$

Proposition 3.11 *Soient f, g deux fonctions réelles d'une variable réelle et x_0, y_0 deux réels. Si i) f est définie sur un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0 et vérifie $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = y_0$,*
ii) g est définie sur un voisinage de y_0 et continue en y_0,
alors la fonction $g \circ f$ est définie sur un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0, et on a

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} (g \circ f)(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} g(f(x)) = g(y_0).$$

Preuve. Vérifions d'abord que $g \circ f$ est bien définie au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0. Comme g est définie sur un voisinage de y_0, alors il existe $\eta_{y_0} > 0$ tel que

$$]y_0 - \eta_{y_0}, y_0 + \eta_{y_0}[\ \subset\ D_g.$$

De plus, comme f a pour limite y_0 en x_0, il existe $\eta_{x_0} > 0$ tel que

$$]x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0}[\setminus\{x_0\}\ \subset\ D_f \quad \text{et} \quad f(]x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0}[\setminus\{x_0\})\ \subset\ ]y_0 - \eta_{y_0}, y_0 + \eta_{y_0}[.$$

On en déduit que $g \circ f(x) := g(f(x))$ est bien défini pour tout $x \in]x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0}[\setminus\{x_0\}$ car $f(x)$ appartient alors à D_g. Ainsi, $g \circ f$ est définie au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0.
Le même type de raisonnement nous donne la limite annoncée. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme g est continue en y_0, il existe $\eta_1 \in]0, \eta_{y_0}[$ tel que

$$g(]y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_1[)\ \subset\ ]g(y_0) - \varepsilon, g(y_0) + \varepsilon[.$$

Par ailleurs, comme la limite de f en x_0 est y_0, il existe $\eta_2 \in]0, \eta_{x_0}[$ tel que

$$f(]x_0 - \eta_2, x_0 + \eta_2[\setminus\{x_0\})\ \subset\ ]y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_1[.$$

On en déduit en particulier :

$$\forall x \in]x_0 - \eta_2, x_0 + \eta_2[\setminus\{x_0\},\ f(x) \in]y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_1[\quad \text{et donc} \quad g(f(x)) \in]g(y_0) - \varepsilon, g(y_0) + \varepsilon[,$$

et cela montre que $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} (g \circ f)(x) = g(y_0)$. $\diamond$

Remarque La proposition 3.11 basée sur la continuité, est le résultat concernant la composition des fonctions que l'on trouve habituellement dans les livres. La proposition 3.13 ci-dessous est une variante qui d'une certaine façon est plus naturelle dans le cadre de ce chapitre.

Définition 3.12 *Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0 et soit y_0 un réel. On dit que $f(x)$ tend vers y_0 et $f(x) \neq y_0$ lorsque x tend vers x_0, $x \neq x_0$, si*

i) $f(x)$ tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0 par valeurs distinctes de x_0,

ii) $f(x) \neq y_0$ pour tout x suffisamment proche de x_0 mais distinct de x_0.

On a alors la proposition :

Proposition 3.13 *Soient f, g deux fonctions réelles d'une variable réelle et x_0, y_0, z_0 trois réels.*

1. *Si $f(x) \to y_0$ et $f(x) \neq y_0$ lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$,*
2. *et si $g(y) \to z_0$ lorsque $y \to y_0$, $y \neq y_0$,*

alors $g(f(x)) \to z_0$ lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$.

Cela revient, dans la pratique courante, à effectuer un **changement de variable**, $y = f(x)$.

Exercice résolu en cours. On rappelle que $\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. En utilisant les formules trigonométriques d'angle double et les règles opératoires sur les limites, en déduire :

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

3.2.6 Limites à droite et à gauche en x_0

On s'intéresser ici à la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 par valeurs strictement inférieures (resp. supérieures) à x_0, encore appelée limite de f à gauche (resp. à droite) de x_0.

Exemples et Remarques

1. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{x}{|x|}$ n'a pas de limite en 0 mais possède une certaine régularité séparément à droite et à gauche de 0.
2. $g :]-3, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \sqrt{3+x}$ n'est définie qu'à droite de -3 mais $g(x)$ a un comportement régulier lorsque x s'approche de -3 par la droite.

Définition 3.14 *Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $D \cup \{x_0\}$ est un voisinage* **à droite** *de x_0, i.e. si $D \cup \{x_0\}$ contient un intervalle du type $[x_0, x_0 + h[$ pour un certain $h > 0$, on dit que f admet pour limite ℓ à droite en x_0 si*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \quad \textit{tel que} \qquad \Big( ]x_0, x_0+\eta[\subset D \quad \textit{et} \quad \forall x \in]x_0, x_0+\eta[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon \Big).$$
On note ceci « $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$ » ou bien « $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ » ou encore « $f(x) \underset{x \to x_0, x > x_0}{\longrightarrow} \ell$ ».
2. *On définit de même la limite à gauche et on utilise les notations « $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ » ou « $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ » ou encore « $f(x) \underset{x \to x_0, x < x_0}{\longrightarrow} \ell$ ».*

Exemples et Remarques

1. On a encore unicité de la limite, sous réserve d'existence.
2. Concernant les opérations et les limites à droite ou à gauche, tous les résultats sur les limites vus précédemment restent valables en remplaçant $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}}$ par $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}}$ ou par $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}$.
3. On a encore une caractérisation séquentielle : $f(x) \underset{x \to x_0, x > x_0}{\longrightarrow} \ell$ ssi, quelle que soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $D \cap]x_0, +\infty[$ et tendant vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ.
4. La caractérisation précédente reste valable en se restreignant aux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissantes (ou même strictement décroissantes).
5. Pour l'étude d'une fonction définie par une alternative le résultat [5] suivant peut-être utile :

   Proposition 3.15 *Soit f une fonction réelle de variable réelle définie sur un voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}$, sauf peut-être en x_0. On a :*
$$f(x) \underset{x \to x_0, x \neq x_0}{\longrightarrow} \ell \qquad \textit{ssi} \qquad \Big(f(x) \underset{x \to x_0, x < x_0}{\longrightarrow} \ell \quad \textit{et} \quad f(x) \underset{x \to x_0, x > x_0}{\longrightarrow} \ell \Big).$$

3.3 Limites en $+\infty$, en $-\infty$ et limites infinies

3.3.1 Voisinages de l'infini

Définition 3.16 *Soit V une partie de $\mathbb{R}$, on dit que*

1. *V est un voisinage de $+\infty$ si V contient l'intervalle $]A, +\infty[$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$.*
2. *V est un voisinage de $-\infty$ si V contient l'intervalle $]-\infty, A[$, pour un certain $A \in \mathbb{R}$.*

Enfin, on dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si D est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)

5. dont la démonstration est laissée au lecteur

3.3.2 Définition

Définition 3.17 *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonctiob définie au voisinage de $+\infty$ et ℓ un réel. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que} \qquad \Big(]A, +\infty[\subset D \quad \textit{et} \quad \forall x \in]A, +\infty[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon\Big).$$

On note cela « $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ » ou « $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$ ».

Exemples et Remarques

1. On a évidemment une définition analogue pour une limite finie en $-\infty$.
2. On a encore unicité de la limite, sous réserve d'existence.
3. La définition de « $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to +\infty$ » s'écrit en termes de voisinages :

   pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage U de $+\infty$ inclus dans D tel que $f(U) \subset V$.
4. Les assertions (a), (b),(c) suivantes sont équivalentes :
   (a) $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to +\infty$.
   (b) pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D tendant vers $+\infty$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ (c'est la caractérisation séquentielle de la limite).
   (c) il existe une fonction ϵ de limite 0 en 0 telle que, pour tout x assez voisin de $+\infty$, on a le développement asymptotique d'ordre 0 :
   $$f(x) = \ell + \epsilon(\frac{1}{x}).$$
5. La caractérisation séquentielle ci-dessus reste valable en se restreignant aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissantes ou même strictement croissantes.

Fonctions de référence

Les fonctions suivantes sont des exemples fondamentaux de fonctions de limite nulle en $+\infty$. Leur étude sera faite au chapitre 7.

1. Pour $\alpha > 0$, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha} = |x|^{-\alpha}$ a pour limite 0 en $+\infty$.
2. Pour $\alpha > 0$, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\ln |x|}{|x|^\alpha} = |x|^{-\alpha} \ln |x|$ a pour limite 0 en $+\infty$.
3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^\alpha e^{-|x|^\beta}$ a pour limite 0 en $+\infty$.

3.3.3 Opérations

Concernant les opérations et les limites en $+\infty$, les résultats vus sur les limites usuelles restent valables en remplaçant systématiquement $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}}$ par $\lim\limits_{x \to +\infty}$.

3.3.4 Limites infinies

Dans ce paragraphe on va exprimer le fait que la limite d'une fonction en un point x_0 (éventuellement à gauche ou à droite seulement) ou bien sa limite en $\pm\infty$, soit l'un des deux infinis.

Nous ne donnons que l'une des définitions, le schéma général de telles définitions devant être maintenant familier :

Définition 3.18 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0. On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0 \quad \textit{tel que} \qquad \Big(]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus\{x_0\} \subset D \quad \textit{et} \quad \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus\{x_0\},\ f(x) > A\Big).$$

Fonctions de référence

Les fonctions suivantes sont des exemples fondamentaux de fonctions de limite infinie. Les exemples ci-dessous relèvent de ce que l'on appelle les « croissances comparées » du logarithme, de l'exponentielle et des fonctions puissances, voir la partie 7.4.2 du chapitre 7 pour les justifications.

1. Pour $\alpha > 0$, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha} = |x|^{-\alpha}$ a pour limite $+\infty$ en 0.
2. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour limite $+\infty$ en 0^+ et $-\infty$ en 0^-.
3. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln|x|$ a pour limite $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$.
4. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^\alpha e^{+|x|^\beta}$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Proposition 3.19 (Composition et limites infinies) *Soient x_0 et f, g deux fonctions. Si*

$$\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} f(x) = +\infty \quad et \quad \lim_{y\to+\infty} g(y) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\},$$

alors

$$\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} g(f(x)) = \ell.$$

Exemples et Remarques

1. On a le même type d'énoncé si $g(y) \to \ell$ lorsque $y \to -\infty$ et $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to x_0$.
2. On peut remplacer les « $x \to x_0$ » par des « $x \to \pm\infty$ » ou encore des « $x \to x_0^\pm$ ».
3. La preuve de cette proposition est très similaire à celle de la proposition 3.11 sur la composition de limites finies.

3.3.5 Quelques remarques finales concernant les opérations

Voici quelques règles supplémentaires à bien connaître :

1. Si $f(x) \to +\infty$ et si $g(x) \to +\infty$, alors $f(x) + g(x) \to +\infty$ et $f(x)g(x) \to +\infty$.
2. Si $f(x) \to -\infty$ et $g(x) \to -\infty$, alors $f(x) + g(x) \to -\infty$ et $f(x)g(x) \to +\infty$.
3. Si $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ et si $g(x) \to +\infty$, alors $f(x) + g(x) \to +\infty$; de plus :
   si $\ell > 0$, alors $f(x)g(x) \to +\infty$,
   si $\ell < 0$, alors $f(x)g(x) \to -\infty$,
   si $\ell = 0$, on ne peut pas conclure directement (il y a indétermination).
4. Si $f(x) \to \ell$ et si $g(x) \to \pm\infty$, alors $f(x)/g(x) \to 0$.
5. Si $f(x) \to \ell > 0$ et si $g(x) \to 0^+$ (dans ce cas g est strictement positive au voisinage du point considéré), alors $f(x)/g(x) \to +\infty$.

Enfin, il y a des cas où on ne peut pas se prononcer sur l'existence d'une limite sans une étude plus approfondie. En voici une liste :

— comportement de $f(x) + g(x)$ lorsque $f(x) \to +\infty$ et $g(x) \to -\infty$ (ou vice versa),
— comportement de $f(x)g(x)$ lorsque $f(x) \to \pm\infty$ et $g(x) \to 0$ (ou vice versa),
— comportement de $f(x)/g(x)$ lorsque $f(x) \to \pm\infty$ et $g(x) \to \pm\infty$,
— comportement de $f(x)/g(x)$ lorsque $f(x) \to 0$ et $g(x) \to 0^\pm$,

Dans ces cas-là on dit qu'on est en présence d'une indétermination. Voici quelques exemples de techniques pour lever ces indéterminations.

1. Exemple d'indétermination du type 0/0 : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. C'est un résultat à connaître. Sa démonstration ne peut se faire qu'à partir de la définition même de la fonction sinus.

2. Exemple d'indétermination du type $+\infty/+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^2-3x+2}{3x^2+5} = \frac{7}{3}$. Ici numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$. La technique consiste à factoriser dans chacun d'eux la plus grande puissance de x car c'est le terme dominant dans une expression polynomiale lorsque $x \to \infty$. On écrit
$$\frac{7x^2-3x+2}{3x^2+5} = \frac{x^2}{x^2}.\frac{7-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}}$$
et les règles opératoires indiquent alors que la fraction de droite tend vers $\frac{7}{3}$.
3. Exemple d'indétermination du type $+\infty-\infty$: $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x) = \frac{1}{2}\cdot$ Il suffit de multiplier par l'expression conjuguée et d'appliquer ensuite la technique précédente.
$$\sqrt{x^2+x+1}-x = \frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\cdot$$
4. Exemple d'indétermination du type $0\times\infty$: $(3x^2-x+2)\sin\frac{1}{x^2} \to 3$ lorsque $x \to +\infty$. Il suffit de factoriser x^2 dans le polynôme et d'utiliser le résultat du premier exemple couplé avec la proposition 3.13 :
$$(3x^2-x+2)\sin\tfrac{1}{x^2} = \big(3-\tfrac{1}{x}+\tfrac{2}{x^2}\big)\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 3\times 1 = 3.$$
5. Les développements limités qui seront abordés au second semestre sont un outil puissant pour la levée des indéterminations.

3.4 Croissance et limite

On termine ce chapitre par le résultat important suivant qui découle de la propriété de la borne supérieure. C'est l'analogue pour les fonctions du théorème 2.25 pour les suites.

Théorème 3.20 *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $a < b$. On a l'alternative :*
— *ou bien f n'est pas majorée (i.e. $f([a,b[)$ n'est pas majoré) et alors $f(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} +\infty$,*
— *ou bien f est majorée et alors $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers b^-.*

Remarque 3.21 *On a bien sûr un résultat analogue pour la décroissance.*

Preuve. On définit l'ensemble $A = f([a,b[)$. Il n'est pas vide car $[a,b[$ n'est pas vide.
• Si A n'est pas majoré, i.e. si aucun $M \in \mathbb{R}$ ne majore A, on a :
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists y \in A \quad \text{tel que} \quad y > M\,.$$
Cela signifie que pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x_M \in [a,b[$ tel que $f(x_M) > M$. Par croissance de f, on en déduit qu'on a $f(x) > M$ pour tout $x \in [x_M, b[$. Ainsi, on a : $f(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} +\infty$.

• Si A est majoré, alors d'après le théorème 2.24 A admet un supremum $\ell \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation (2.2), on a donc :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A \quad \text{t.q.} \quad \ell-\varepsilon < y \qquad (\text{car } \ \ell-\varepsilon < \ell = \sup A\,).$$
Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in [a,b[$ tel que $\ell-\varepsilon < f(x_\varepsilon)$ et, par croissance de f, on a $\ell-\varepsilon < f(x) \le \ell$ pour tout $x \ge [x_\varepsilon, b[$. On a donc : $f(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} \ell$, ce qui achève la preuve du théorème. $\diamond$

Chapitre 4

Continuité

4.1 Fonction continue en x_0

4.1.1 Définition

Définition 4.1 *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ (donc y compris en x_0). On dit que f est continue en x_0 si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Exemples et Remarques

1. Compte tenu de la définition de $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ donnée au chapitre précédent et du fait que x_0 appartient à D_f et vérifie $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, on peut écrire que f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \Big( ]x_0-\eta, x_0+\eta[\subset D_f \quad \text{et} \quad \forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[,\ |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \Big).$$

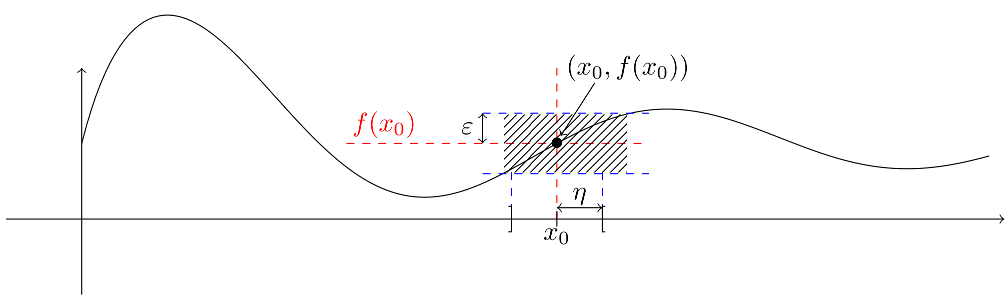


Figure 4.1 – Illustration graphique de la continuité en x_0

2. A partir des résultats obtenus sur les limites de sommes et de produits, on déduit que toute fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
3. Les fonctions ln, exp, $x \mapsto |x|^\alpha$, les fonctions trigonométriques usuelles sont continues en tout point de leurs ensembles de définition respectifs.
4. On a une caractérisation séquentielle de la continuité en x_0. Elle se démontre facilement en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite de $f(x)$ lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$, vue au chapitre précédent ; elle s'énonce ainsi :

Proposition 4.2 (Caractérisation séquentielle de la continuité) *Si D est un voisinage de x_0, la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est continue au point x_0 si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans D* [1] *qui tend vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.*

4.1.2 Prolongement par continuité

Lorsque la fonction f n'est pas définie en x_0, on ne peut pas parler de continuité de f en x_0. Mais si $f(x)$ admet une limite finie dans $\mathbb{R}$ lorsque x tend vers x_0, $x \neq x_0$, on peut construire une extension (= un prolongement) de f qui est définie et continue en x_0. En effet, on a :

Proposition 4.3 *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que x_0 n'appartient pas à D et que $D \cup \{x_0\}$ est un voisinage de x_0. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

i) il existe une fonction $g : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ continue en x_0 et égale à f sur D,

ii) $\lim\limits_{x\to x_0, x\neq x_0} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

La fonction g qui apparaît dans i) est unique et elle est définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases}.$$

On dit alors que f est **prolongeable par continuité** *au point x_0, et la fonction g est appelée le* **prolongement par continuité** *de f au point x_0.*

Preuve. "$i) \Rightarrow ii)$" : Si une telle fonction g existe, on a $\lim\limits_{x\to x_0, x\neq x_0} g(x) = g(x_0)$ par continuité de g en x_0 et on a donc $\lim\limits_{x\to x_0, x\neq x_0} f(x) = g(x_0)$ puisque g coïncide avec f sur D.
"$ii) \Rightarrow i)$" : S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to x_0, x\neq x_0} f(x) = \ell$, alors la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est continue en x_0 par définition.
Unicité de g : la fonction g est unique car d'une part on a $g\big|_D = f$ et d'autre part, par continuité de g, on a $g(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0, x\neq x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0, x\neq x_0} f(x)$ (valeur unique par unicité d'une limite). ◇

Exemples et Remarques

1. La fonction « sinus cardinal », qui intervient en traitement du signal, est définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $\operatorname{sinc}(0) = 1$. Il s'agit du **prolongement par continuité en** 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.
2. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 car $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = 0$.

4.1.3 Continuité à droite et à gauche en x_0

Définition 4.4 *Soit f une fonction définie au voisinage à droite d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ (donc y compris en x_0). On dit que f est* **continue à droite** *en x_0 si*

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Exemples et Remarques

1. On a une définition semblable concernant la continuité à gauche.

---

1. Noter que l'on ne suppose plus ici que la suite ne prend pas la valeur x_0.

2. Soit H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = 1$ si $x \geq 0$, $H(x) = 0$ si $x < 0$. La fonction H est continue à droite en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et elle est continue à gauche en tout $x_0 \neq 0$ (mais pas en 0).
3. Soit $\widetilde{H}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\widetilde{H}(x) = 1$ si $x > 0$, $\widetilde{H}(x) = 0$ si $x \leq 0$. La fonction $\widetilde{H}$ est continue à gauche en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et elle est continue à droite en tout $x_0 \neq 0$ (mais pas en 0).

Proposition 4.5 *Une fonction est continue en un point x_0 si et seulement elle est continue à gauche et à droite en x_0.*

Exercice résolu en cours. Étudier, suivant les valeurs du paramètre réel a, la continuité en 0 de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

Indication: La limite à gauche en 0 de cette fonction est 2, sa limite à droite en 0 est a et on a $f(0) = a$; f est donc continue en 0 si et seulement si $a = 2$.

4.1.4 Reformulation de résultats vus dans le chapitre précédent

On peut reformuler pour les fonctions continues en un point x_0 les résultats énoncés lors de l'étude des limites[2] :

f bornée localement

Proposition 4.6 *Si f est continue en x_0, alors f est bornée sur un certain voisinage de x_0.*

Positivité sur un voisinage

Proposition 4.7 *Si f est continue en x_0 et si $f(x_0)$ est > 0, alors on a $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$ pour tout x dans un certain voisinage de x_0.*

Opérations

Proposition 4.8 *Si f et g sont définies au voisinage de x_0 et continues en x_0, il en est de même de $f + g$ et fg ; de plus, si $g(x_0)$ n'est pas nul, alors f/g aussi est définie au voisinage de x_0 et continue en x_0.*

Composition

Proposition 4.9 *Si f est définie au voisinage de x_0 et continue en $x_0 \in \mathbb{R}$, et si g est définie au voisinage de $f(x_0)$ et continue en $f(x_0)$, alors la fonction $h = g \circ f$ est bien définie sur un certain voisinage de x_0 et elle est continue en x_0.*

4.2 Fonction continue sur un intervalle

4.2.1 Définition

Définition 4.10 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et soit I un intervalle non trivial*[3] *de $\mathbb{R}$, contenu dans D. On dit que f est continue sur I si, pour tout $x_0 \in I$, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 en restant dans I est égale à $f(x_0)$. Autrement dit, f est continue sur I si*

$$\forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \quad \textit{tel que} \quad \Big(\forall x \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\Big).$$

2. Nous laissons le lecteur reformuler aussi ces résultats pour des fonctions continues à droite ou à gauche en x_0.
3. Un intervalle est non trivial s'il contient au moins deux points (autant dire qu'il en contient une infinité !)

Exemples et Remarques

1. Si I est un intervalle ouvert non vide inclus dans D, la fonction f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout $x_0 \in I$ [4].

2. Si I est un intervalle inclus dans D et si f est continue en chaque point de I, alors f est continue sur I, **mais** la réciproque n'est pas vraie comme l'exemple suivant le prouve. On note $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $H(x) = 0$ si $x < 0$. La fonction H est constante sur l'intervalle $[0, 1]$ donc elle est continue sur $[0, 1]$. Elle est continue en chacun des points de l'intervalle $]0, 1]$, mais pas en 0.

3. Dans le cas où I est un segment $[a, b]$, dire que f est continue sur I équivaut à dire que :
   — elle est continue sur $]a, b[$,
   — elle est continue à droite en a,
   — elle est continue à gauche en b.

4. Plus généralement, si I est un intervalle non trivial inclus dans D, la fonction f est continue sur I ssi
   — f est continue en tout point x_0 qui est intérieur à I,
   — elle est continue à droite en la borne gauche de I si elle est finie et appartient à I,
   — elle est continue à gauche en la borne droite de I si elle est finie et appartient à I,

5. Une remarque élémentaire est que si f est continue sur un intervalle I alors f est continue sur tout intervalle non trivial J inclus dan I.

En utilisant la caractérisation séquentielle des limites, on obtient :

Proposition 4.11 *Soit f une fonction définie sur l'ensemble D et soit I un intervalle non trivial inclus dans D. On a l'équivalence entre :*
i) f est continue sur I,
ii) quel que soit x_0 dans I et quelle que soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

4.2.2 Propriétés

Recollement

Proposition 4.12 (Recollement) *Soient I et J deux intervalles non triviaux ayant un seul point commun. Si f est continue sur I et f est continue sur J alors f est continue sur l'intervalle $I \cup J$.*

Preuve. Notons a le point commun à I et J. Les intervalles I et J étant non triviaux, le point a est intérieur à l'intervalle $I \cup J$. De plus, quitte à échanger les lettres I et J on peut supposer que a est l'extrémité droite de I et l'extrémité gauche de J. Par ailleurs, par continuité de f sur I et sur J, les limites à gauche et à droite de f au point a sont toutes les deux égales à $f(a)$ donc f est continue au point a.

Maintenant, si x_0 est un point de $I \cup J$ différent de a, alors il existe un réel $\eta_0 > 0$ assez petit pour que l'ensemble $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$ ne rencontre que l'un des deux intervalles I et J. Dans ce cas $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[\cap (I \cup J)$ est égal à $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[\cap I$ si x_0 est dans I et égal à $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[\cap J$ si x_0 est dans J. Supposons que x_0 soit dans I (l'autre cas se traite de même). Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur I, il existe un réel $\eta_1 > 0$ tel que l'inégalité $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ soit vraie pour tout x dans $]x_0 - \eta_1, x_0 + \eta_1[\cap I$. Alors, si on pose $\eta = \min(\eta_0, \eta_1)$ on a $\eta > 0$ et aussi $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap (I \cup J) =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$. De plus, puisque $0 < \eta \leq \eta_1$ on a $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour tout x dans $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap (I \cup J)$ ce qui achève la démonstration. ◇

4. Observer qu'un intervalle ouvert non vide I est voisinage de chacun de ses points.

Opérations

Proposition 4.13 *Si I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et si f, g sont des fonctions à valeurs réelles continues sur I alors*

1. *$f + g$ est continue sur I,*
2. *fg est continue sur I,*
3. *si g ne s'annule en aucun point de I, alors f/g est continue sur I.*

Composition

Proposition 4.14 *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, et soit $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur J. Si on a $f(x) \in J$ pour tout $x \in I$ (i.e. si $f(I) \subset J$), alors la fonction composée $h = g \circ f$ est définie et continue sur I.*

4.2.3 Le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) : version 1

Théorème 4.15 *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soient a, b deux points de I. Si $g(a)$ et $g(b)$ sont non nuls et de signes opposés, i.e. si $g(a)g(b) < 0$, alors a est distinct de b et il existe c* **strictement entre**[5] *a et b tel que $g(c) = 0$.*

La preuve de ce théorème fait l'objet du paragraphe 4.3.

Exercice résolu en cours. Montrer qu'il existe un nombre $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $c = \cos^2 c$.

4.2.4 TVI : version 2

Théorème 4.16 *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soient a, b deux points de I. Si y est entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x entre a et b tel que $f(x) = y$.*

Preuve. Soit y un nombre entre $f(a)$ et $f(b)$. Si y est égal à $f(a)$ ou à $f(b)$ il suffit de prendre c égal à a ou à b selon le cas. On peut donc se limiter à traiter le cas où y est strictement entre $f(a)$ et $f(b)$, c-à-d le cas où on a $(y - f(a))(y - f(b)) < 0$. Considérons la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = y - f(t)$ pour tout $t \in I$. Elle est continue sur I car f l'est et on a $g(a)g(b) < 0$ donc d'après le théorème 4.15 il existe c entre a et b tel que $g(c) = 0$, i.e. tel que $f(c) = y$.

$\diamond$

4.2.5 TVI : version 3

Théorème 4.17 *Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'ensemble $f(I) = \{f(x)\,;\, x \in I\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Remarque Le théorème 4.17 ne précise pas le « type » (ouvert, semi-ouvert, fermé, borné ou non) de l'intervalle image. Dans le cas particulier où l'intervalle I est un segment (c-à-d de la forme $[a, b]$) l'image $f(I)$ est aussi un segment, mais dans tous les autres cas $f(I)$ peut être un intervalle de n'importe quel type. Par exemple, si $f, g : I = \left]-\pi, \pi\right[\to \mathbb{R}$ sont définies par $f(x) = |x|$ et $g(x) = \sin x$, on a $f(I) = [0, \pi[$, $(-f)(I) = \left]-\pi, 0\right]$ et $g(I) = [-1, 1]$.

La preuve du théorème 4.17 sera donnée plus loin ; elle utilise la caractérisation suivante des intervalles dont la démonstration repose sur la propriété de la borne supérieure :

Proposition 4.18 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Les deux points suivants sont équivalents :*
i) A est un intervalle de $\mathbb{R}$,
ii) pour tout couple (y_1, y_2) d'éléments de A tels que $y_1 < y_2$, on a $[y_1, y_2] \subset A$.

5. c est entre a et b si $a \leq c \leq b$ ou $a \geq c \geq b$ selon que b est plus grand ou plus petit que a ; cela s'écrit aussi $(c - a)(c - b) \leq 0$ quel que soit l'ordre de a et b ; de même, c est strictement entre a et b ssi $(c - a)(c - b) < 0$.

Preuve. On va montrer seulement l'implication $ii) \Rightarrow i)$ car l'implication $i) \Rightarrow ii)$ est évidente. On distingue quatre cas selon que l'ensemble A est majoré ou non, minoré ou non.

— Si A est à la fois majoré et minoré, on pose (c.f. théorème 2.24) $M = \sup A \in \mathbb{R}$ et $m = \inf A \in \mathbb{R}$. Il est clair que A est inclus dans $[m, M]$. Si $m = M$ alors A est inclus dans $\{m\}$ $(= \{M\})$ et comme A n'est pas vide on a $A = \{m\} = [m, M]$ qui est un intervalle. Maintenant, si $m < M$ on va montrer que A contient l'intervalle $]m, M[$. Considérons donc un réel y dans $]m, M[$. Par définition de m, il existe $y_1 \in A$ vérifiant $m \leq y_1 < y$ et par définition de M, il existe $y_2 \in A$ vérifiant $y < y_2 \leq M$. Alors, d'après $ii)$ le segment $[y_1, y_2]$ est inclus dans A et donc y appartient à A d'où $]m, M[\subset A$ comme annoncé. On en déduit la relation $]m, M[\subset A \subset [m, M]$. Elle implique que A est l'un des ensembles de la liste
$$[m, M]\,,\ ]m, M[\,,\ [m, M[\,,\ ]m, M]$$
qui sont tous des intervalles.

— Si A n'est ni majoré ni minoré, alors $A = \mathbb{R}$ (qui est un intervalle!) car pour tout y dans $\mathbb{R}$ il existe y_1 et y_2 dans A tels que $y_1 < y < y_2$ et d'après $ii)$ on a $[y_1, y_2] \subset A$ donc $y \in A$.

— Si A est majoré mais non minoré, on introduit la borne supérieure M de A et on montre facilement comme ci-dessus que A est inclus dans $]-\infty, M]$ et contient $]-\infty, M[$ donc A est égal à l'un de ces deux ensembles qui sont tous deux des intervalles.

— Si A est minoré mais non majoré, on montre de même que A est égal soit à $[m, +\infty[$ soit à $]m, +\infty[$ où m est la borne inférieure de A.

◇

Preuve du théorème 4.17

Soit $A = f(I) = \{f(x)\,;\, x \in I\}$. Si A est réduit à un singleton $\{y\}$ c'est un intervalle! Sinon, d'après la proposition 4.18, pour montrer que A est un intervalle il suffit de montrer qu'on a $[y_1, y_2] \subset A$ pour tous y_1, y_2 dans A tels que $y_1 < y_2$. Soient donc y_1, y_2 dans A vérifiant $y_1 < y_2$ et soit $y \in [y_1, y_2]$. Par définition de A, il existe alors deux points a et b dans I tels que $f(a) = y_1$ et $f(b) = y_2$. Le théorème 4.16 appliqué à f qui est continue sur l'intervalle I affirme qu'il existe x entre a et b (donc appartenant à I) tel que $y = f(x)$. Mais alors, y appartient à A. Ainsi, l'intervalle $[y_1, y_2]$ est inclus dans A et donc A est un intervalle.

4.2.6 Fonction continue sur un segment

Théorème 4.19 *Soit $I = [a, b]$ avec $a < b$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'ensemble $f([a, b])$ admet un maximum, c'est-à-dire qu'il existe (au moins) un réel $c \in [a, b]$ vérifiant*
$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(c).$$
De même, l'ensemble $f([a, b])$ admet un minimum, c'est-à-dire qu'il existe (au moins) un réel $d \in [a, b]$ vérifiant
$$\forall x \in I, \quad f(d) \leq f(x).$$

Preuve. On va désigner par I le segment $[a, b]$ pour alléger la rédaction et on va seulement prouver le résultat concernant le maximum car si on l'applique également à la fonction $-f$ qui elle aussi est continue sur I, on obtient l'existence d'un $d \in I$ vérifiant
$$\forall x \in I, \quad -f(x) \leq -f(d) \quad \text{c'est-à-dire } f(d) \leq f(x).$$
La preuve que $f(I)$ admet un maximum va se faire en deux temps : on montre d'abord que $f(I)$ est majoré puis que sa borne supérieure est atteinte.

– Montrons que $f(I)$ est majoré. Si ce n'est pas le cas, alors pour chaque n dans $\mathbb{N}$ il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$ car $f(I)$ n'est pas majoré par n. La suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers $+\infty$. Chacune de ses sous-suites tend aussi vers $+\infty$. Or, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car à valeurs dans I, donc elle admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un certain $x \in I$

d'après le théorème 2.32. Mais alors, par continuité de f sur I, on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x) \in \mathbb{R}$, en contradiction avec le fait que la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$ par construction. Comme l'hypothèse "$f(I)$ non majoré" conduit à une contradiction, on conclut que $f(I)$ est majoré.

– Montrons que $f(I)$ admet un maximum. D'après ce qui précède, l'ensemble $f(I)$ est non vide et majoré donc il admet une borne supérieure finie M. On va montrer qu'elle est atteinte, autrement dit que c'est un maximum. D'après la caractérisation séquentielle d'un supremum, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $f(I)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} y_n = M$. Pour chaque n, il existe $x_n \in I$ tel que $y_n = f(x_n)$ car $y_n \in f(I)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans I donc bornée. D'après le théorème 2.32, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un certain $c \in I$ et, par continuité de f, on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(c) \in f(I)$. Mais on a $\lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = \lim_{n\to+\infty} y_n = M$ Par unicité de la limite, on obtient $M = f(c)$, ce qui termine la preuve. $\diamond$

Exemples et Remarques

1. On peut énoncer le théorème 4.19 de manière plus concise : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
2. Si $I = [1, +\infty[$, la fonction $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur I mais f ne peut pas admettre de minimum sur I car si d appartient à I alors $d + 1$ appartient à I et vérifie $f(d + 1) < f(d)$.
3. Si $I =]0, 1]$, la fonction $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = (1 - x)\sin\frac{1}{x}$, f n'a ni minimum ni maximum sur I. Lorsque x tend vers $0+$, $f(x)$ s'approche arbitrairement près de 1 et de -1 sans jamais atteindre ces valeurs. Si on pose $x_n = 1/(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ et $x'_n = 1/(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)$ les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs dans I et elles vérifient : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = -1$. Mais par ailleurs on a $|f(x)| < 1$ pour tout $x \in I$; donc on a bien $\sup(f(I)) = 1$ et $\inf(f(I)) = -1$ mais ces bornes ne sont pas atteintes.
4. En associant le théorème 4.19 avec le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient le

   Théorème 4.20 *Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f([a, b])$ est un segment et il existe c, d dans $[a, b]$ tels que $f([a, b]) = [f(d), f(c)]$.*

4.3 Preuve du théorème 4.15

Comme $g(a)g(b) < 0$, on a nécessairement $a \neq b$. Quitte à échanger les noms a et b on va supposer $a < b$. De plus, quitte à devoir remplacer g par $-g$, on supposera aussi $g(a) < 0 < g(b)$. On va donner deux démonstrations. La première utilise la propriété de la borne supérieure. La seconde repose sur l'algorithme de dichotomie[6]. Elle fournit une méthode effective pour le calcul d'approximations par défaut et par excès à ε près d'une solution de l'équation $g(x) = 0$.

Première preuve. Soit $A = \{x \in [a, b]\,;\, g(x) < 0\}$ i.e. l'ensemble des point du segment $[a, b]$ où g est strictement négative. L'ensemble A n'est pas vide car il contient a et il est majoré par b. Appelons c son supremum. Comme $g(b)$ est strictement positif et que g est continue à gauche en b, il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait $g(x) > 0$ pour tout x dans $]b - \eta, b]$. On a donc $c \leq b - \eta < b$. D'après la caractérisation séquentielle du supremum, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui tend vers c. Par continuité de g on a $g(c) = \lim_{n\to+\infty} g(x_n)$. Mais on a $g(x_n) < 0$ car $x_n \in A$ et le théorème des gendarmes implique $g(c) \leq 0$. Maintenant, si on pose $y_n = c + \frac{1}{n}$ pour n dans $\mathbb{N}^*$ et si N est un entier plus grand que $\frac{1}{\eta}$ la suite $(y_n)_{n\geq N}$ est à valeurs dans $]c, b]$ donc aucun de ses termes n'est dans A, d'où $g(y_n) \geq 0$ pour tout $n \geq N$. Or, la suite $(y_n)_{n\geq N}$ converge vers c, donc par continuité on a $g(c) = \lim_{n\to+\infty} g(y_n)$ et avec le théorème des gendarmes on obtient $g(c) \geq 0$ d'où finalement $g(c) = 0$.

6. C.f. la preuve du théorème 2.32 de Bolzano-Weierstrass où une méthode de dichotomie a déjà été utilisée.

Seconde preuve. On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Si $g(c_0)$ est nul, on trouvé une solution de l'équation $g(x) = 0$ et on s'arrête là. Si $g(c_0)$ n'est pas nul, on continue comme suit :

— si $g(c_0) < 0$, on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$,

— si $g(c_0) > 0$, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$.,

Dans les deux cas on a : $\quad a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0, \quad b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a) \quad$ et $\quad g(a_1) < 0 < g(b_1)$.

On pose alors $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Si $g(c_1)$ est nul, on stoppe l'algorithme. Sinon, on fait comme ci-dessus, on pose $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$ ou $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$ selon que $g(c_1)$ est > 0 ou < 0. De cette façon, on a : $\quad a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0, \quad b_2 - a_2 = \frac{1}{2^2}(b-a) \quad$ et $\quad g(a_2) < 0 < g(b_2)$. Ensuite, on pose $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ et on répète l'opération. On a une alternative :

— ou bien l'algorithme fournit à une certaine étape un nombre c_n qui est solution de l'équation $g(x) = 0$ et on s'arrête là,

— ou bien l'algorithme construit récursivement deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
  - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit et $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$ pour tout n,
  - $g(a_n) < 0 < g(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant adjacentes, elles ont une même limite $c \in [a, b]$. Comme g est continue sur $[a, b]$ on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} g(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(b_n) = g(c)$. Or, en passant à la limite dans la double inégalité $g(a_n) < 0 < g(b_n)$ et en utilisant le théorème des gendarmes on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} g(a_n) \leq 0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} g(b_n)$. On en déduit $g(c) = 0$.

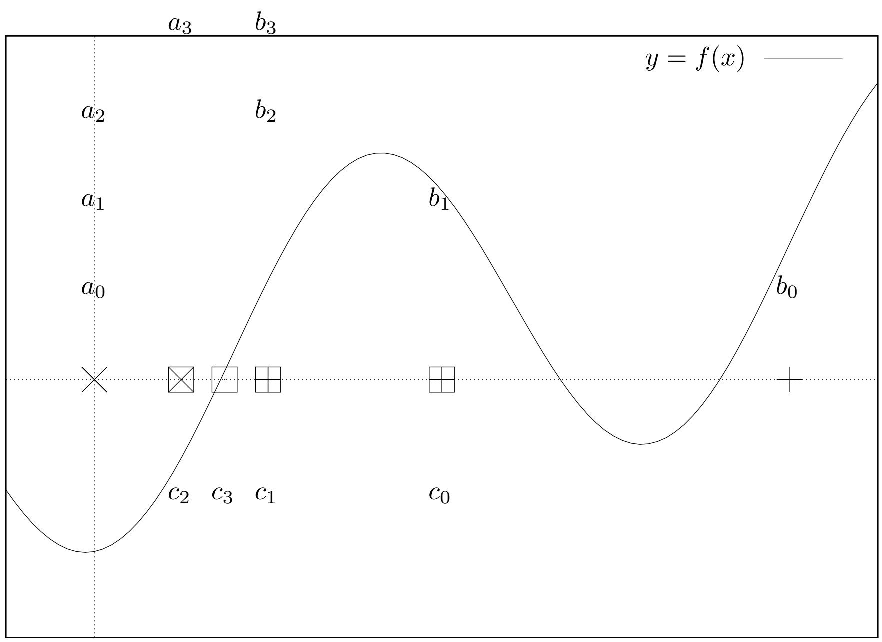


FIGURE 4.2 – L'algorithme de dichotomie. Le point c_3 est très proche d'une solution de l'équation

Chapitre 5

Dérivabilité

5.1 Dérivée en un point et interprétation géométrique

5.1.1 Définition

Dans la suite f est toujours une fonction définie au voisinage du réel x_0, y compris en x_0.

Définition 5.1 *Soit x_0 un réel et soit f une fonction définie au voisinage de x_0.*

1. *La fonction θ définie par $\theta(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est bien définie au voisinage de x_0 sauf en x_0. $\theta(x)$ est le* **taux d'accroissement** *de f entre x et x_0.*
2. *On dit que f est dérivable en x_0 lorsque le taux d'accroissement de f entre x et x_0 admet une limite lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$. Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 et on la note $f'(x_0)$. Lorsque cela a un sens, on a donc*

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot$$

3. *En notation physicienne, en considérant les variables x et $y = f(x)$, on a*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{y-y_0}{x-x_0}\cdot$$

Exemples et Remarques

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ admet un nombre dérivé en tout $x_0 \in \mathbb{R}$: $f'(x_0) = 2x_0$.
2. $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ admet un nombre dérivé (ou **une dérivée**) en x_0 pour tout $x_0 > 0$. On a
$$g'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot$$
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$ est dérivable en $x_0 = 0$ et $h'(0) = 0$. (Elle est en fait dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$, comme on le verra plus tard).

5.1.2 Interprétation géométrique

En considérant le graphe de f au voisinage de x_0, pour $x \neq x_0$ la **corde** au graphe passant par les points M_0 et M de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour équation cartésienne (d'inconnues $X, Y \in \mathbb{R}$)

$$Y - f(x_0) = \theta(x)(X - x_0).$$

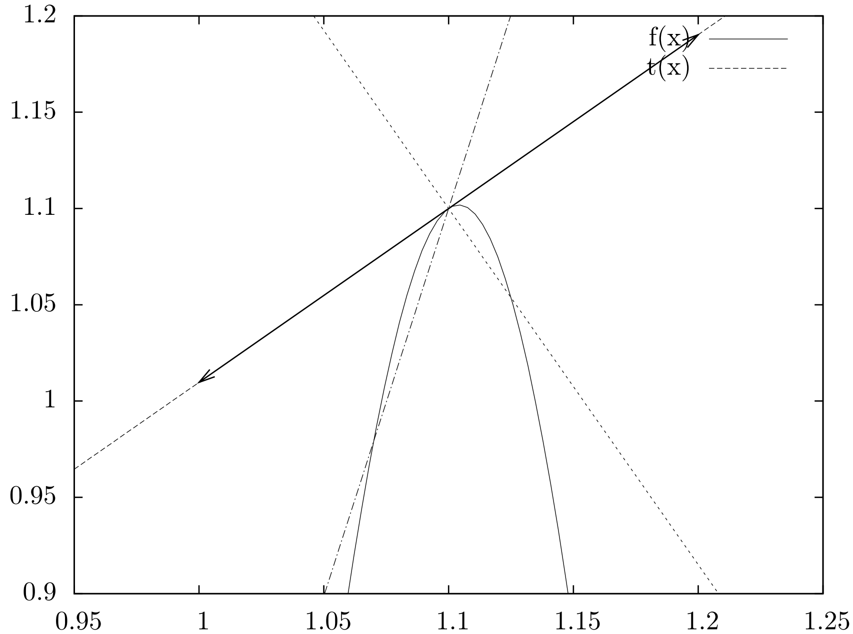


FIGURE 5.1 – $x_0 = 1.1$, quelques cordes au graphe de f passant par $(x_0, f(x_0))$ et la tangente au graphe en x_0

Lorsque x tend vers x_0, $\theta(x)$ tend vers $f'(x_0)$, ce qui signifie géométriquement que la corde se « rapproche » de la droite d'équation

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0).$$

Cette droite est appelée la tangente au graphe de f en x_0.

5.1.3 Tangente verticale

Si le taux d'accroissement d'une fonction f en un point x_0 admet une limite infinie lorsque x tend vers x_0, on dit que le graphe de f admet une tangente verticale. Attention ! Dans un tel cas, la fonction f n'est pas dérivable en x_0.

Un exemple typique est le cas fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ en 0. Nous invitons le lecteur à tracer l'allure de son graphe au voisinage de 0.

5.1.4 DL d'ordre 1

De la définition même d'une limite, on déduit :

Proposition 5.2 *Soient x_0 un réel et f une fonction définie au voisinage de x_0. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un réel ℓ et une fonction ϵ définie au voisinage de 0 tels que*

i) ϵ est continue en 0, $\epsilon(0) = 0$,

ii) pour tout x assez proche de x_0, on a

$$f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0).$$

Lorsque les points i) et ii) sont satisfaits, on a $\ell = f'(x_0)$.

La formule du point *ii*) s'appelle le **développement limité d'ordre 1** de f au voisinage de x_0.

5.1.5 Dérivabilité et continuité

Corollaire 5.3 *Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.*

Exemples et Remarques

1. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction valeur absolue en 0.
2. On peut construire une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui n'est dérivable en aucun point

5.1.6 Dérivabilité à droite et à gauche

Définition 5.4 *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie dans un voisinage à droite de x_0. On dit que f est dérivable à droite en x_0, de nombre dérivé $f'_d(x_0)$ si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite lorsque x tend vers x_0 à droite. Dans ce cas on a :*

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La dérivabilité à gauche et $f'_g(x_0)$, le nombre dérivé à gauche, sont définis de manière similaire.

Proposition 5.5 *Soit f une fonction définie au voisinage du point x_0. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et si de plus on a $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*

Exercice résolu en cours. Étudier la dérivabilité à droite en -1 et la dérivabilité en 0 de la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x^3}$.

5.1.7 Opérations algébriques

Proposition 5.6 *Soit x_0 un réel et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, dérivables en x_0. Alors :*

1. *$f + g$ est dérivable en x_0 et*
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$
2. *(Règle de Leibniz) fg est dérivable en x_0 et*
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$
En particulier, ceci s'applique si f est une fonction constante C, cela donne que Cg est dérivable en x_0 et
$$(Cg)'(x_0) = Cg'(x_0).$$
3. *Si $g(x_0) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont définies au voisinage de x_0, dérivables en x_0 et*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad et \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

5.1.8 Composition

Proposition 5.7 (Règle de la chaîne) *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0, dérivable en x_0. Soit $y_0 = f(x_0)$ et soit g une fonction définie au voisinage de y_0, dérivable en y_0. Alors, la fonction $h = g \circ f$ est définie au voisinage de x_0, dérivable en x_0 et*

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(y_0) = f'(x_0)g'(f(x_0)).$$

En notation physicienne, en posant $y = f(x)$, $z = g(y) = h(x)$, la formule ci-dessus s'écrit

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0} = \left(\left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=y_0}\right)\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}\right).$$

Preuve. Le fait que h soit bien définie au voisinage de x_0 est une conséquence de l'énoncé similaire sur la continuité.

D'après la proposition 5.2, il existe deux fonctions ϵ et η, définies au voisinage de 0 telles que pour tout x voisin de x_0 et tout y voisin de y_0 on ait :

$$\begin{array}{lrcl} i) & f(x) & = & f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)\epsilon(x-x_0), \\ ii) & g(y) & = & g(y_0)+(y-y_0)g'(y_0)+(y-y_0)\eta(y-y_0). \end{array}$$

Plus précisément, il existe des réels α et δ strictement positifs tels que l'égalité $i)$ soit vraie pour tout x dans l'intervalle $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ et que l'égalité $ii)$ soit vraie pour tout y dans l'intervalle $]y_0-\delta, y_0+\delta[$. D'autre part, comme f est continue en x_0 (car elle y est dérivable) et qu'on a $y_0 = f(x_0)$, il existe $\beta \in]0, \alpha[$ tel que pour tout x dans $]x_0-\beta, x_0+\beta[$ le nombre $f(x)$ appartienne à $]y_0-\delta, y_0+\delta[$. Par conséquent, pour tout x dans $]x_0-\beta, x_0+\beta[$ on peut substituer $f(x)$ à y dans $ii)$ et utiliser $i)$ ce qui donne

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(y_0)+(f(x)-y_0)g'(y_0)+(f(x)-y_0)\eta(f(x)-y_0) \\ &= g(f(x_0))+\Big((x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)\epsilon(x-x_0)\Big)g'(y_0)+ \\ &\quad +\Big((x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)\epsilon(x-x_0)\Big)\eta\Big((x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)\epsilon(x-x_0)\Big) \\ &= g(f(x_0))+(x-x_0)f'(x_0)g'(y_0)+(x-x_0)\epsilon_1(x-x_0) \end{aligned}$$

où ϵ_1 désigne la fonction définie à partir de la fonction ϵ par la relation

$$\epsilon_1(t) = \epsilon(t)g'(y_0)+\big(f'(x_0)+\epsilon(t)\big)\eta\big(tf'(x_0)+t\epsilon(t)\big).$$

La fonction ϵ_1 est clairement une fonction de limite 0 en 0. On a donc prouvé que h (c-à-d $g \circ f$) admet un DL d'ordre 1 au voisinage de x_0, qui est

$$h(x) = x(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)g'(y_0)+(x-x_0)\epsilon_1(x-x_0).$$

Cela montre que h est dérivable en x_0 et que l'on a $h'(x_0) = f'(x_0)g'(y_0)$. ◇

5.2 Fonction dérivable sur un intervalle, fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle

5.2.1 Définition

Définition 5.8 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de variable réelle, à valeurs réelles et soit I un intervalle non trivial contenu dans D.*

1. *Si la fonction f est dérivable en tout point de I (à droite ou à gauche en ce qui concerne les bornes de I contenues dans I), on dit que f est dérivable sur I. Dans ce cas, la fonction f' définie sur I par*
$$f'(x) = \text{le nombre dérivé de } f \text{ en } x$$
est appelée **la fonction dérivée** *de f sur I*
2. *Si la fonction f est dérivable sur I et que sa dérivée f' sur I est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, ce que l'on note $f \in \mathcal{C}^1(I)$.*

Exemples et Remarques

1. Les fonctions les plus simples sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$. Elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et elles ont toutes pour dérivée la fonction nulle.
2. La fonction $x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est la fonction constante égale à 1.
3. La fonction $\sqrt{\cdot}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. La fonction $\sqrt{.}$ n'est pas dérivable sur son intervalle de définition $[0, +\infty[$ car elle n'est pas dérivable à droite en 0.
5. La fonction ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
6. exp, sin, cos sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Leurs dérivées sont respectivement exp, cos et $-\sin$.

5.2.2 Opérations

Proposition 5.9 (Recollement) *Soient I et J deux intervalles non triviaux ayant pour seul point commun le point a. Alors, une fonction f définie sur l'intervalle $I \cup J$ est dérivable sur l'intervalle $I \cup J$ si et seulement si elle est dérivable sur l'intervalle I et sur l'intervalle J et si de plus l'égalité $f'_g(a) = f'_d(a)$ est satisfaite.*
Un énoncé similaire est vrai pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Il s'obtient en remplaçant partout "dérivable" par "de classe $\mathcal{C}^1$".

Les résultats concernant les opérations sur les fonctions et la dérivabilité en un point a s'étendent naturellement en des résultats sur les fonctions dérivées.

Proposition 5.10 *1. Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle I, alors :*
i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est dérivable sur I et on a $(\lambda f)' = \lambda f'$.
ii) Si f ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}\,.$$

2. Si f et g sont des fonctions dérivables sur l'intervalle I, alors
i) Les fonctions $f+g$ et fg sont dérivables sur I et on a :

$$(f+g)' = f' + g' \quad \text{et} \quad (f\,g)' = f\,g' + f'\,g.$$

ii) Si g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}\,.$$

3. Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle I, si g est une fonction dérivable sur l'intervalle J et si $f(I) \subset J$ (i.e. si $f(x) \in J$ pour tout $x \in I$), alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et on a :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)\,f'.$$

Un énoncé similaire est vrai pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Il s'obtient en remplaçant partout "dérivable(s)" par "de classe $\mathcal{C}^1$".

Exemples et Remarques

1. Du fait que la fonction $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on déduit que toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est une fonction polynomiale.
2. Une fraction rationnelle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle contenu dans son domaine de définition. Sa fonction dérivée sur un tel intervalle est elle-même une fraction rationnelle.
3. La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$. Sa dérivée est la fonction $(\tan)'$: $x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$	domaine de validité
x^n	nx^{n-1}	pour $x \in \mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$
x^n	nx^{n-1}	pour $x \neq 0$ si $n \in \mathbb{Z}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	pour $x > 0$ si $\alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	pour $x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	pour $x > 0$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	pour $x \neq 0$
$\sin x$	$\cos x$	pour $x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	pour $x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	pour $x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	pour $-1 < x < 1$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	pour $-1 < x < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	pour $x \in \mathbb{R}$

TABLE 5.1 – Les dérivées classiques

5.3 Dérivées d'ordre n, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ $\quad (n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$

Définition 5.11 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*

1. *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable sur I si elle est dérivable sur I et si la fonction f' (qui est alors bien définie sur I) est également dérivable sur I. La dérivée de f' est notée $f'' := (f')'$ et on dit que c'est la* **dérivée seconde** *de f.*

   On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est deux fois continûment dérivable sur I (ou bien qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I) si elle est deux fois dérivable sur I et si sa dérivée seconde f'' est continue sur I.

2. *Soit n un entier naturel. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est $n+1$ fois dérivable sur I si elle est n fois dérivable sur I et si sa dérivée[1] n-ième $f^{(n)}$ est dérivable sur I. On note $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$ sa dérivée $n+1$-ième.*

   Soit n un entier naturel. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est $n+1$ fois continûment dérivable sur I (ou bien qu'elle est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I) si elle est $n+1$ fois dérivable sur I et si $f^{(n+1)}$ est continue sur I.

3. *Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle I si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout entier naturel n. Cela équivaut à dire qu'elle est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exemples et Remarques

1. Par convention, une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur I est une fonction continue sur I.
2. La définition d'une fonction n fois dérivable sur I (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur I) est récursive. Pour vérifier qu'une fonction f est trois fois dérivable sur I, on a besoin de montrer d'abord qu'elle est deux fois dérivable sur I et de vérifier ensuite que $f^{(2)}$ est dérivable sur I.
3. La convention de notation pour les premières dérivées est la suivante $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$. L'écriture de droite est celle qu'on emploie généralement lors de la manipulation d'une de ces fonctions. Par exemple, dans un calcul on écrira « on a $f''(x) = \dots$ » mais l'écriture $f^{(k)}$ est préférable pour écrire des formules compactes comme la formule de Leibniz que l'on voir ci-dessous.

Proposition 5.12

Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ssi $f, f', \dots, f^{(n)}$ existent et sont continues sur I. On a aussi : f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ssi $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ existent et si $f^{(n-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Et aussi : f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ssi f est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et si $f^{(n-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Si f et g sont des fonctions n fois dérivables sur I (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur I) et si λ est une constante, alors $f+g$, λf et $f\,g$ sont n fois dérivables sur I (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur I).
Si, de plus, g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable sur I (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur I).

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable sur I, si $g : J \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable sur J et si $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I.
Enfin, on a l'énoncé analogue où tous les "n fois dérivable(s)" sont changés en "de classe $\mathcal{C}^n$".

Exemples et Remarques

1. Les formules pour $(f+g)^{(n)}$ et $(\lambda.f)^{(n)}$ sont très simples. On a
$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad \text{et} \quad (\lambda\, f)^{(n)} = \lambda\, f^{(n)}.$$
2. La formule pour $(f\,g)^{(n)}$ est plus compliquée. Elle s'appelle la **formule de Leibniz**. On la démontre aisément par récurrence sur n de la même manière que la formule du binôme de

[1] Par convention la dérivée 0-ième de f est la fonction f elle-même

Newton. Elle s'écrit

$$\begin{aligned}(f\,g)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}\, g^{(n-k)} \\ &= f\,g^{(n)} + nf'\,g^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} f''\,g^{(n-2)} + \dots \\ &\qquad \dots + \frac{n(n-1)}{2} f^{(n-2)}\,g'' + nf^{(n-1)}\,g' + g^{(n)}\,f.\end{aligned}$$

3. Il existe aussi une formule pour $(g \circ f)^{(n)}$ appelée **Formule de Faa Di Bruno** mais elle est assez horrible et ne sera pas donnée ici. Par ailleurs, elle nous serait d'une faible utilité.

Exemples et Remarques

1. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de même que exp, sin, cos
2. La fonction ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
3. $\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ mais ne l'est pas sur son ensemble de définition $[0, +\infty[$ elle n'est pas dérivable à droite (et a fortiori pas plusieurs fois dérivable) en 0.

5.4 Utilisation de la dérivée

5.4.1 Extrema et points critiques

Définition 5.13 *Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ admet un* **maximum local**[2] *en $a \in D$ s'il existe un voisinage I de a tel que $f(a)$ soit le maximum de $f(I \cap D)$, i.e. si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in I \cap D$.*

Remarque 5.14 *On a une définition analogue pour un* **minimum local**. *Si f admet un maximum local ou un minimum local en a, on dit qu'elle y admet un* **extremum local**.
Si f admet un **maximum global** *en a, i.e si $f(a)$ est le maximum de $f(D)$ (c'est-à-dire si on a $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in D$), alors f admet a fortiori un maximum local en a.*

Proposition 5.15 *Soit f une fonction à valeurs réelles, dérivable sur un intervalle I et soit a un point intérieur à I*[3]*. Si f admet un extremum local en a alors on a $f'(a) = 0$.*

Preuve. Comme f est dérivable en a nous pouvons écrire son DL d'ordre 1 en a : il existe une fonction ϵ, nulle et continue en 0 telle que pour tout x voisin de a, on ait

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x-a) = (x-a)\big(f'(a) + \epsilon(x-a)\big).$$

Par hypothèse le membre de gauche est de signe constant dans un voisinage de a (plus précisément, il est ≥ 0 si $f(a)$ est un minimum local et il est ≤ 0 si $f(a)$ est un maximum local). Par contre, si $f'(a)$ est non nul le membre de droite est du signe de $f'(a)$ pour $x > a$ voisin de a et il est du signe opposé à celui de $f'(a)$ pour $x < a$ voisin de a car $f'(a) + \epsilon(x-a)$ tend vers $f'(a)$ lorsque x tend vers a et donc possède le même signe que $f'(a)$ dans un certain voisinage de a. De cette contradiction on déduit qu'il est impossible que $f'(a)$ soit non nul si a est un point intérieur à I et $f(a)$ est un extremum local. $\diamond$

5.4.2 Le lemme de Rolle et le théorème des accroissements finis

Théorème 5.16 (Accroissements finis) *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe (au moins) un point $c \in]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

2. En Belgique, on dit aussi que a est un maximant local de f, le maximum est la valeur $f(a)$, un maximant est un point où cette valeur est atteinte
3. i.e a n'est pas une borne de I

Preuve. Dans le cas particulier où f vérifie de plus $f(a) = f(b)$, l'énoncé précédent affirme l'existence d'un point $c \in]a, b[$ vérifiant $f'(c) = 0$. Ce résultat porte le nom de **Lemme de Rolle**. Admettons momentanément que le lemme de Rolle est vrai et utilisons-le pour prouver le théorème 5.16. Soit donc f une fonction qui vérifie les hypothèses du théorème 5.16. Alors, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $[a, b]$ par

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \Bigg(\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)}_{y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) \text{ est l'éq. de la corde joignant } (a, f(a)) \text{ à } (b, f(b)) \, :} \Bigg)$$

vérifie les hypothèses du lemme de Rolle. En appliquant celui-ci, on obtient l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $\tilde{f}'(c) = 0$ c'est-à-dire tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot$ CQFD

Maintenant démontrons le lemme de Rolle, i.e. le théorème 5.16 dans le cas où la fonction f vérifie $f(a) = f(b)$ en plus des hypothèses du théorème 5.16. La fonction f, qui est continue sur $[a, b]$ admet un minimum m et un maximum M par le théorème 4.20.

Si $m = M$, cela signifie que la fonction f est constante sur $[a, b]$. Sa dérivée est donc nulle en tout point $c \in]a, b[$.

Si $m < M$, l'un de ces deux nombres est différent de $f(a)$ $(= f(b))$. Appelons-le μ. C'est un extremum global (et a fortiori local) de f. Il est atteint en (au moins) un point c de $[a, b]$ et puisque $f(c) = \mu \neq f(a) = f(b)$ le point c est distinct de a et de b donc il est intérieur à $[a, b]$. Mais alors on a $f'(c) = 0$ d'après la Proposition 5.15. $\diamond$

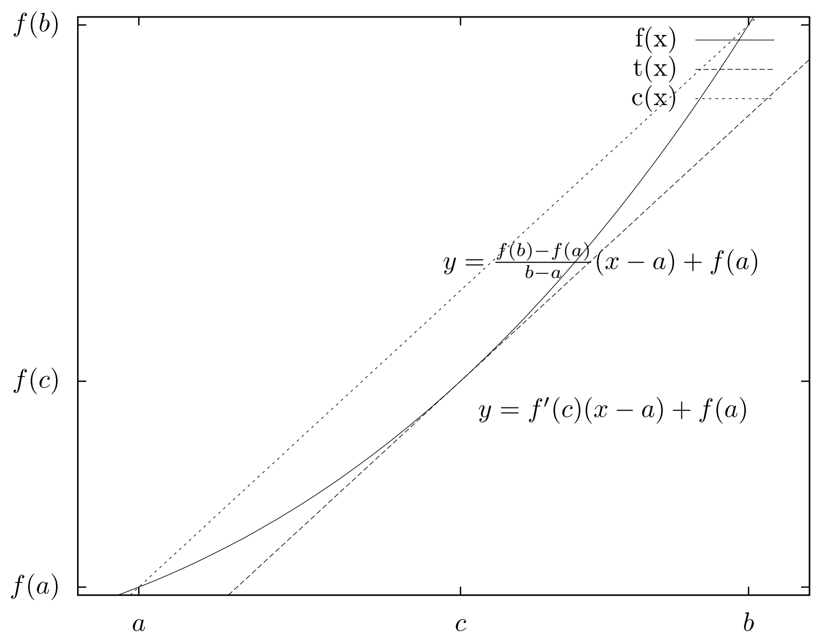


FIGURE 5.2 – $[a, b] = [1, 2]$, il y a une tangente entre a et b qui est parallèle à la corde au graphe entre a et b.

5.4.3 L'inégalité des accroissements finis

Théorème 5.17 *Soit I un intervalle non trivial et soit f une fonction continue sur I et dérivable l'intérieur de I, noté sur $\mathring{I}$* [4]

(i) S'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f'(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathring{I}$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \quad \textit{quels que soient } x \textit{ et } y \textit{ dans } I.$$

(ii) S'il existe $m \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f'(z)| \geq m$ pour tout $z \in \mathring{I}$, alors

$$|f(x) - f(y)| \geq m|x-y| \quad \textit{quels que soient } x \textit{ et } y \textit{ dans } I.$$

Preuve. On ne va montrer que le point (i) car la preuve de (ii) est similaire. Soient x, y dans I. Si $x = y$, le résultat est évident. Maintenant, si $x \neq y$ on peut se limiter au cas $x < y$ puisque x et y sont interchangeables dans l'énoncé. D'après le TAF (théorème 5.16) appliqué à la fonction f sur l'intervalle $[x, y]$, il existe $z \in]x, y[\subset \mathring{I}$ tel que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x-y| \leq M|x-y|\,.$$

◇

Une fonction continue sur un segment y étant majorée, on a le corollaire immédiat suivant.

Corollaire 5.18 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, alors il existe une constante $M \in \mathbb{R}^+$ telle que :*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \quad \textit{quels que soient } x \textit{ et } y \textit{ dans } [a,b].$$

(On peut prendre pour M tout nombre qui majore $|f'|$ sur l'intervalle $[a,b]$).

Ces propriétés servent à obtenir des inégalités intéressantes. En voici quelques unes que le lecteur pourra démontrer :

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|\,.$$
2. Soit $a > 0$; alors, pour tous $x, y \in [a, +\infty[$,
$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}|x-y|\,.$$
3. Pour tous x, y positifs,
$$|e^x - e^y| \geq |x-y|\,.$$

5.4.4 Croissance d'une fonction et signe de la dérivée

Théorème 5.19 *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur I.*

(i) Si f est dérivable sur I, on a l'équivalence :

$$\Big(\textit{ pour tout } x \in I,\ f'(x) \geq 0 \Big) \quad \textit{ssi} \quad \Big(\ f \textit{ est croissante sur } I\ \Big)\,.$$

(ii) Si f est dérivable sur I et si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.

(iii) Plus généralement, si f est continue sur I et si f est dérivable à dérivée strictement positive en tout point de I à l'exception éventuelle d'un nombre fini d'entre eux [5]*, alors f est strictement croissante sur I.*

---

4. i.e. f est dérivable en tout point de I qui n'est pas une de ses bornes. Si $I \in \{[a,b],]a,b], [a,b[,]a,b[\}$, alors $\mathring{I} =]a,b[$. Si $I \in \{[a,+\infty[,]a,+\infty[\}$ alors $\mathring{I} =]a,+\infty[$ et si $I \in \{]-\infty,b],]-\infty,b[\}$ alors $\mathring{I} =]-\infty,b[$. Enfin, $\mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

5. autrement dit, il peut exister $n \in \mathbb{N}^*$ points $a_1 < \cdots < a_n$ de I en lesquels f n'est pas dérivable ou alors elle dérivable mais de dérivée négative ou nulle. Dans ce dernier cas, on a en fait nécessairement $f'(a_i) = 0$, ce qui est laissé en exercice au lecteur intéressé.

Preuve. (i) Montrons l'implication "$\Rightarrow$". Soient x, y deux points de I avec $x < y$. La fonction f est dérivable sur $]x, y[$ et continue sur $[x, y]$ donc d'après le théorème 5.16 (TAF), il existe $z \in]x, y[\subset I$ vérifiant $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z) \geq 0$. On en déduit $f(y) \geq f(x)$. Mais alors f est croissante sur I.
Maintenant montrons l'implication "$\Leftarrow$". On suppose ici que la fonction dérivable f est croissante sur I. Considérons un point x quelconque de I et montrons que $f'(x)$ est ≥ 0. Si x n'est pas la borne droite de I, il existe $h > 0$ tel que $[x, x+h[\subset I$ (puisque I est non trivial). Tout $y \in]x, x+h[$ est donc dans I et vérifie $y > x$ et $f(y) \geq f(x)$ (par croissance de f) d'où $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$. En passant à la limite lorsque $y \to x^+$, on obtient $f'(x) \geq 0$ (gendarmes !). Si x est la borne droite de I, il existe $h > 0$ tel que $]x-h, x] \subset I$ et on raisonne de même. Ainsi f' est $\geq$ sur I.

(iii) Observons d'abord que (iii) implique (ii) donc en démontrant maintenant (iii) on va achever la preuve du théorème. Soient x, y dans I avec $x < y$. Il y a deux possibilités :
– Si f' est définie et strictement positive sur $]x, y[$, alors d'après le TAF (qui est applicable puisque f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$) il existe $z \in]x, y[$ vérifiant $f(y) - f(x) = (y-x)f'(z)$. On en déduit $f(y) > f(x)$ car $f'(z)$ est > 0.
– Sinon, il existe un nombre fini $n \in \mathbb{N}^*$ de points $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ strictement compris entre x et y en lesquels f est non dérivable ou de dérivée ≤ 0. Posons $a_0 := x$ et $a_{n+1} := y$. On peut appliquer le TAF à f sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ pour $i \in \{0, \ldots, n\}$ comme ci-dessus, ce qui conduit à $f(a_i) < f(a_{i+1})$. Ainsi on a $f(x) = f(a_0) < f(a_1) < \cdots < f(a_{n+1}) = f(y)$. Dans tous les cas on a $f(y) > f(x)$, donc f est strictement croissante sur I. Ceci achève la preuve de (iii) (et du théorème). $\diamond$

Exemples et Remarques

1. On a des résultats analogues concernant la décroissance en remplaçant les signes « $>$ » et « $\geq$ » par « $<$ » et « $\leq$ ».
2. Le théorème 5.19 est utilisé constamment lorsque l'on construit le **tableau de variations** de f. C'est lui qui justifie la relation entre le signe $+$ ou $-$ de f' et le sens de variation de f.
3. La fonction $\sqrt{\cdot}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a $\sqrt{\cdot}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ pour tout $x > 0$. La fonction $\sqrt{\cdot}$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (sa dérivée est strictement positive partout sauf en 0 où elle n'existe pas).
4. Lorsque l'on construit le tableau de variations de f, on cherche les intervalles sur lequels sa dérivée est > 0 et on les marque d'un « $+$ » dans le tableau de signe de f'. De même, on marque d'un « $-$ » les intervalles sur lesquels f' est < 0. On doit donc résoudre les deux inéquations $f'(x) < 0$ et $f'(x) > 0$ d'inconnue x. Dans la pratique, la fonction f est en général de classe $\mathcal{C}^1$. Dans ce cas, pour déterminer les intervalles où f' est > 0 (resp. < 0), il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = 0$ car, d'après le théorème 4.15 (TVI) [6] appliqué à la fonction continue f', le signe de f' est constant entre deux zéros consécutifs de f'. Pout trouver ce signe, on peut calculer $f'(x)$ pour un x bien choisi dans les intervalles concernés.

Théorème 5.20 *Soit I un intervalle non trivial et f une fonction dérivable sur I. On a l'équivalence :*

$$\Big(\text{ pour tout } x \in I,\ f'(x) = 0\ \Big) \quad \text{ssi} \quad \Big(\ f \text{ est constante sur } I\ \Big).$$

Preuve. En effet, par le théorème précédent, on a :
$\big(\ f' = 0 \text{ sur } I\ \big)$ ssi $\big(\ f$ est croissante et décroissante sur $I\ \big)$ ssi $\big(\ f$ est constante sur $I\ \big)$. $\diamond$

Exemples et Remarques

1. Ce théorème implique que deux primitives sur l'intervalle I d'une fonction f continue sur I, ont une différence constante sur I (voir le paragraphe 8.1 du chapitre 8).
2. Il est aussi à la base de résultats d'unicité concernant les équations différentielles.

6. l'hypothèse de continuité de la dérivée est en fait inutile, car on peut montrer que si f est une fonction dérivable (mais pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$) sur un intervalle I, sa dérivée f' prend toute valeur comprise entre deux valeurs qu'elle atteint : c'est le théorème de Darboux (le TVI pour la dérivée).

3. **Attention :** le fait que I soit un intervalle est fondamental ! Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1$ si $x > 0$ et par $f(x) = -1$ si $x < 0$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, de dérivée nulle, mais elle n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$ [7].

5.4.5 Prolongement de la dérivée

Théorème 5.21 *Soient I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction définie et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Supposons que*

(i) il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\lim_{x \to a, x \in I\setminus\{a\}} f(x) = \ell$,

(ii) il existe $\ell' \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\lim_{x \to a, x \in I\setminus\{a\}} f'(x) = \ell'$.

Alors la fonction $\tilde{f} : x \in I \mapsto \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq a \\ \ell & si \quad x = a \end{cases}$ est dérivable sur I et on a $\tilde{f}'(a) = \ell'$ c'est-à-dire $\tilde{f}'(a) = \displaystyle\lim_{x \to a, x \in I\setminus\{a\}} \tilde{f}'(x)$.

C'est le seul prolongement de f sur I qui soit continu (a fortiori le seul qui soit dérivable). Enfin, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$, alors $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Preuve. La fonction $\tilde{f}$ est, par définition, le prolongement par continuité en a de la fonction f. C'est le seul prolongement de f sur I qui soit continu. On sait déjà que sur $I \setminus \{a\}$, la fonction $\tilde{f}$ coïncide avec la fonction f et que celle-ci est dérivable, donc $\tilde{f}$ est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et on a $\tilde{f}'(x) = f'(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$. Il reste donc à vérifier que $\tilde{f}$ est dérivable en a avec $\tilde{f}'(a) = \ell'$ et que $\tilde{f}'$ est continue en a.

Soit $x \in I \setminus \{a\}$ et soit J_x le segment d'extrémités a et x (i.e. $J_x = [a, x]$ si $x > a$ et $J_x = [x, a]$ si $x < a$). D'après le TAF appliqué à $\tilde{f}$ sur l'intervalle J_x il existe un point $z_x \in \mathring{J}_x$ tel que

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{x - a} = \tilde{f}'(z_x) = f'(z_x)\,.$$

Comme z_x est strictement compris x et a, on a $z_x \to a$, $z_x \neq a$, lorsque $x \to a$ (gendarmes !) et alors l'hypothèse (ii) implique

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{x - a} = f'(z_x) \underset{x \to a, x \neq a}{\longrightarrow} \ell'\,.$$

Cela signifie que $\tilde{f}$ est dérivable en a avec $\tilde{f}'(a) = \ell'$. De plus, la fonction $\tilde{f}'$ est continue en a car, toujours d'après (ii), on a

$$\lim_{x \to a, x \neq a} \tilde{f}'(x) = \lim_{x \to a, x \neq a} f'(x) = \ell' = \tilde{f}'(a)\,.$$

Enfin, si $f \in \mathcal{C}^1(I \setminus \{a\})$ et si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans I qui tend vers un point x de I on a $\lim_{n \to +\infty} \tilde{f}'(x_n) = \tilde{f}'(x)$. On vient de le voir dans le cas $x = a$, et pour x dans $I \setminus \{a\}$ cela vient du fait que $\tilde{f}'$ est égale à f' sur $I \setminus \{a\}$ et que f' est continue sur $I \setminus \{a\}$. ◇

Exercice résolu en cours. Montrer que la fonction définie pour $x \neq 0$ par la formule $\frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}$. Quelle est la valeur de sa dérivée en 0 ? (Indication: on admettra qu'il existe deux fonctions ϵ_1 et ϵ_2, nulles et continues en 0, telles que $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon_1(x)$ et $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon_2(x)$.)

Corollaire 5.22 *Soient I un intervalle, a un point de I et f continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$. S'il existe $\ell' \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\lim_{x \to a, x \in I\setminus\{a\}} f'(x) = \ell'$, alors f est dérivable sur I (y compris en a), on a $f'(a) = \ell'$ et f' est continue en a.* [8] *Si de plus $f \in \mathcal{C}^1(I \setminus \{a\})$, alors $f \in \mathcal{C}^1(I)$.*

Preuve. On applique le théorème précédent à $g := f\big|_{I\setminus\{a\}}$ qui admet donc un unique prolongement dérivable de dérivée continue en a et qui n'est autre que f. ◇

7. par contre, elle l'est sur chacun des deux intervalles disjoints $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ dont l'union est $\mathbb{R}^*$.

8. si a est une borne de I il faut comprendre dérivabilité de f en a comme dérivabilité à gauche ou à droite et idem pour la continuité de f' en a.

5.4.6 Convexité

Définition 5.23 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle (non vide) I.*

1. *On dit que f est convexe sur I si :*

$$\forall\, t \in [0,1]\ ,\quad \forall\,(x,y) \in I^2\ ,\qquad f\big((1-t)x+ty\big) \;\le\; (1-t)f(x)+tf(y)\,.$$

2. *On dit que f est concave sur I si $-f$ est convexe sur I, i.e. si :*

$$\forall\, t \in [0,1]\ ,\quad \forall\,(x,y) \in I^2\ ,\qquad f\big((1-t)x+ty\big) \;\ge\; (1-t)f(x)+tf(y)\,.$$

Si on pose $\theta = 1-t$ et si t décrit l'intervalle $[0,1]$ alors la variable θ en fait autant (mais en sens inverse). Le changement de t en $1-\theta$ et de $1-t$ en θ montre que les lettres x et y jouent des rôles symétriques dans la définition de la convexité. On peut donc si on le souhaite se limiter dans cette définition aux x, y dans I qui vérifient $x \le y$. Si $x \le y$ alors

- l'ensemble des $(1-t)x+ty = x+t(y-x)$ décrit le segment $[x,y]$ de $\mathbb{R}$,
- l'ensemble des couples $\big(\,(1-t)x+ty,\ f\big((1-t)x+ty\big)\,\big)$ décrit le graphe de la restriction de f au segment $[x,y]$,
- l'ensemble des couples $\big((1-t)x+ty, (1-t)f(x)+tf(y)\big)$ décrit la corde au graphe de f joignant $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ puisque

$$\begin{aligned}\big(\,(1-t)x+ty,\ (1-t)f(x)+tf(y)\,\big) &= \big(x, f(x)\big) \;+\; t\big(\,y-x,\ f(y)-f(x)\,\big)\\ &= \big(x, f(x)\big) \;+\; t\,\overrightarrow{M_{(x,f(x))}M_{(y,f(y))}}\,.\end{aligned}$$

De plus, pour $t \in [0,1]$, le point d'abscisse $(1-t)x+ty$ sur la corde joignant $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ a pour ordonnée $(1-t)f(x)+tf(y)$. En effet, c'est évident si $x = y$ (car $(1-t)x+tx = x$ et $(1-t)f(x)+tf(x) = f(x)$ quel que soit t) et sinon ce point a pour coordonnées

$$(x, f(x)) + \theta\,\overrightarrow{M_{(x,f(x))}M_{(y,f(y))}} \;=\; \big((1-\theta)x+\theta y, (1-\theta)f(x)+\theta f(y)\big)$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$ choisi de manière que l'abscisse soit égale à $(1-t)x+ty$, c'est-à-dire nécessairement $\theta = t$ (c.f. figure suivante).

Dire que f est convexe sur I signifie donc que quels que soient x et y dans I avec $x < y$, le graphe de la restriction de f au segment $[x,y]$ est au-dessous de la corde qui joint $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$. De même, dire que f est concave sur I signifie que son graphe est au-dessus de ses cordes.

Il existe une caractérisation plus simple de la convexité (resp. concavité) dans le cas d'une fonction f au moins une fois dérivable. Elle est donnée par la proposition suivante.

Proposition 5.24 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non trivial et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

1. *On a les équivalences :*

$$\big(\ f \textit{ est convexe sur } I\ \big) \iff \big(\ f' \textit{ est croissante sur } I\ \big).$$
$$\big(\ f \textit{ est concave sur } I\ \big) \iff \big(\ f' \textit{ est décroissante sur } I\ \big).$$

2. *Si f est deux fois dérivable sur I, alors on a les équivalences :*

$$\big(\ f \textit{ est convexe sur } I\ \big) \iff \big(\ f'' \ge 0 \textit{ sur } I\ \big).$$
$$\big(\ f \textit{ est concave sur } I\ \big) \iff \big(\ f'' \le 0 \textit{ sur } I\ \big).$$

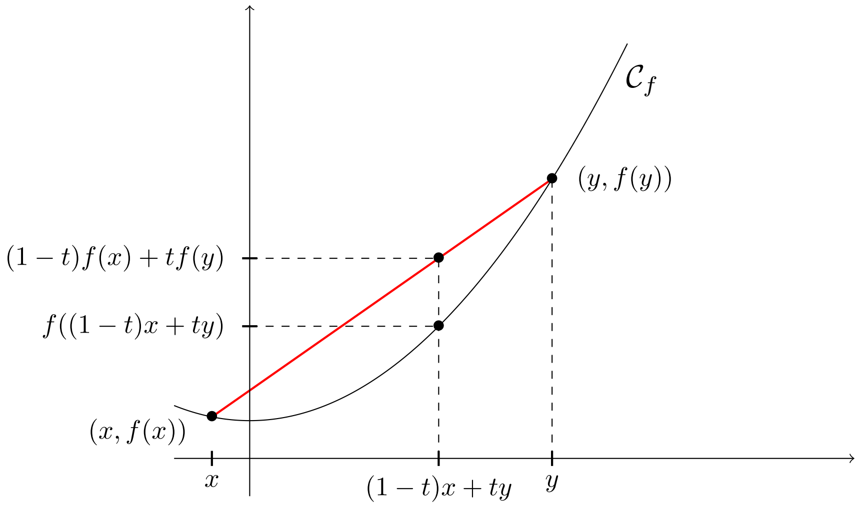


FIGURE 5.3 – Interprétation graphique de la convexité : pour tous $x \le y \in I$, la corde joignant $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ est au-dessus du graphe de la restriction de f au segment $[x, y]$

Preuve.

1. "$\Rightarrow$" Supposons f convexe sur I et considérons x, y dans I avec $x < y$. Définissons alors une fonction φ sur $[0,1]$ par

$$\forall\, t \in [0,1]\,, \quad \varphi(t) = (1-t)f(x) + tf(y) - f\big((1-t)x + ty\big). \tag{5.1}$$

Comme f est dérivable sur I et que, lorsque t décrit $[0,1]$, le point $(1-t)x+ty = x+t(y-x)$ décrit le segment $[x, y]$ inclus dans I, la fonction φ est dérivable sur $[0,1]$. Plus précisément on a :

$$\forall\, t \in [0,1]\,, \quad \varphi'(t) = -f(x) + f(y) - (y-x)f'\big((1-t)x + ty\big)\,. \tag{5.2}$$

La fonction φ est ≥ 0 sur $[0,1]$ par convexité de f et elle vérifie $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. On en déduit qu'on a $0 \le \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}$ pour tout t dans $]0,1]$ et alors en faisant tendre t vers 0^+ on obtient : $0 \le \varphi'(0) = -f(x) + f(y) - (y-x)f'(x)$.
De même on a $0 \ge \frac{\varphi(t)-\varphi(1)}{t-1}$ pour tout t dans $[0,1[$ et en faisant tendre t vers 1^- on obtient : $0 \ge \varphi'(1) = -f(x) + f(y) - (y-x)f'(y)$.
De ces deux inégalités, on en déduit en particulier qu'on a

$$-f(x) + f(y) - (y-x)f'(y) \le -f(x) + f(y) - (y-x)f'(x)\,,$$

c'est-à-dire $(y-x)f'(x) \le (y-x)f'(y)$ et comme $x < y$ on obtient finalement $f'(x) \le f'(y)$. Ainsi on a prouvé la croissance de f'.

"$\Leftarrow$" On suppose maintenant f' croissante et l'on souhaite montrer que f est convexe. Etant donnés x, y quelconques dans I, il s'agit de montrer : $f((1-t)x+ty) \le (1-t)f(x)+tf(y)$ pour tout $t \in [0,1]$. On a vu plus haut qu'il suffit de traiter le cas $x \le y$. C'est ce qu'on va supposer. Définissons à nouveau la fonction φ sur $[0,1]$ par la relation (5.1). Montrer la convexité de f sur I revient donc à montrer que la fonction φ est ≥ 0 sur $[0,1]$ (quels que soient x, y dans I vérifiant $x \le y$). Rappelons que φ est dérivable sur $[0,1]$ et vérifie

$$\forall t \in [0,1], \quad \varphi'(t) = -f(x) + f(y) - (y-x)f'\big((1-t)x + ty\big).$$

La fonction f' est croissante sur I et la fonction $t \mapsto (1-t)x + ty = x + t(y-x)$ est croissante sur $[0,1]$ (car $y \ge x$) et à valeurs dans $[x, y]$ inclus dans I. Donc par composition la fonction $t \mapsto f'\big((1-t)x+ty\big)$ est croissante sur $[0,1]$ et la fonction φ' est donc décroissante sur cet intervalle (à nouveau parce que $y \geq x$, cf. la formule (5.2)). Par ailleurs, comme $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, le lemme de Rolle assure qu'il existe (au moins) un réel $t_0 \in]0,1[$ tel que $\varphi'(t_0) = 0$. La décroissance de φ' sur $[0,1]$ conduit alors à :

$$\forall\, t \,\in\, [0,t_0]\,,\ \varphi'(t) \;\geq\; 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, t \,\in\, [t_0,1]\,,\ \varphi'(t) \;\leq\; 0\,.$$

Mais alors, la fonction φ est croissante sur $[0,t_0]$ (donc elle y est minorée par $\varphi(0)$) et elle est décroissante sur $[t_0,1]$ (donc elle y est minorée par $\varphi(1)$). Elle vérifie donc en particulier :

$$\forall\, t \,\in\, [0,1]\,,\quad \varphi(t) \;\geq\; \min\{\varphi(0),\varphi(1)\} \;=\; 0.$$

Ainsi φ est ≥ 0 et on en déduit que f est convexe sur I.

2. Si de plus f est deux fois dérivable, alors

$$\big(\, f \text{ est convexe} \,\big) \quad \text{ssi} \quad \big(\, f' \text{ est croissante} \,\big) \quad \text{ssi} \quad \big(\, f'' \text{ est positive} \,\big)\,.$$

$\diamond$

Exemples et Remarques

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On a aussi l'équivalence

$$\big(\, f \text{ est convexe sur } I \,\big) \quad \text{ssi} \quad \big(\, \forall\,(x,y) \,\in\, I^2\,,\ f(x) - f(y) \;\geq\; f'(y)(x-y) \,\big)\,.$$

ainsi qu'une équivalence analogue dans le cas concave. Graphiquement, cela signifie que f est convexe sur I ssi son graphe est au-dessus de ses tangentes aux points $(y, f(y))$ lorsque y parcourt I. En effet, pour tout $y \in I$, l'équation de la tangente au graphe de f en $(y, f(y))$ est $Y = f(y) + f'(y)(X-y)$ et lorsque $X = x$ on a $Y = f(y) + f'(y)(x-y)$.

Démontrons l'implication directe. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'appendice B pour l'implication réciproque et quelques détails supplémentaires sur la convexité. Supposons donc f dérivable et convexe sur I. On sait alors que f' est croissante sur I d'après la proposition 5.24. Le résultat à démontrer étant évident lorsque $x = y$ nous considérons x et y dans I avec $x \neq y$. D'après le TAF il existe un réel $c_{x,y}$ strictement compris entre x et y tel que $f(x) - f(y) = (x-y)f'(c_{x,y})$. En utilisant la croissance de f' sur I et en distinguant les cas on obtient :
– si $x < y$ on a $f'(c_{x,y}) \leq f'(y)$ d'où $(x-y)f'(c_{x,y}) \geq (x-y)f'(y)$ (car $x - y$ est < 0) ,
– si $x > y$ on a $f'(c_{x,y}) \geq f'(y)$ d'où $(x-y)f'(c_{x,y}) \geq (x-y)f'(y)$.
Ainsi dans tous les cas, on a bien $f(x) - f(y) = (x-y)f'(c_{x,y}) \geq f'(y)(x-y)$.

2. La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$, sa dérivée seconde y étant donnée par $x \mapsto e^x$. Son graphe est en particulier au-dessus de sa tangente au point d'abscisse $x = 0$, d'où :

$$\text{pour tout } x \text{ réel}\,,\quad e^x \;\geq\; 1 + x.$$

3. De même, $x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisque de dérivée seconde $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$. Son graphe est en particulier au-dessous de sa tangente au point d'abscisse $x = 1$, d'où :

$$\text{pour tout } x > 0\,,\quad \ln x \;\leq\; x - 1.$$

4. La fonction $x \mapsto \sin x$ est concave sur $[0,\pi]$ car sa fonction dérivée, $x \mapsto -\sin x$, y est négative ou nulle.

Le graphe de la fonction $x \mapsto \sin x$ restreinte à l'intervalle $[0,\pi]$ est en particulier au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0 d'où : pour tout $x \in [0,\pi]$, $\sin x \leq x$. Comme évidemment $\sin x \leq 1 \leq \pi \leq x$ pour tout $x \geq \pi$, on a ainsi :

$$\text{pour tout } x \geq 0\,,\quad \sin x \;\leq\; x.$$

Par ailleurs, le graphe de la fonction $x \mapsto \sin x$ restreinte à $[0, \pi]$ est au-dessus de ses cordes, donc, sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, il est au-dessus de la droite joignant $(0, \sin 0) = (0, 0)$ à $(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, 1)$. On en déduit l'inégalité, suivante souvent utile :

$$\text{pour tout } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] , \quad \sin x \;\geq\; \frac{2}{\pi} x.$$

Chapitre 6

Suites récurrentes (d'ordre un)

6.1 Définition

Définition 6.1 *On appelle suite récurrente (d'ordre un) une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations :*

$$\begin{cases} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

où f est une application d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans elle-même et où a est un point donné de A.

Exemples et Remarques

1. Noter que si l'ensemble A de définition de f est **stable par** f, i.e. vérifie $f(A) \subset A$, comme il est requis ci-dessus, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans A. En effet, le terme $u_0 = a \in A$ est bien défini et, si les termes $u_0, \ldots, u_n$ sont bien définis et appartiennent à A, alors

$$u_{n+1} \;=\; f(u_n) \quad \text{est bien défini et appartient à } A \text{ car } u_n \in A \text{ et } f(A) \subset A.$$

   On a donc montré par récurrence la

   Proposition 6.2 *Si A est stable par f, i.e. si $f(A) \subset A$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans A.*

2. Si par contre A n'était pas stable par $f : A \to \mathbb{R}$, alors il existerait $a \in A$ tel que $f(a) \notin A$. Il ne serait donc a priori pas possible de définir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme précédemment puisque déjà le terme $u_2 = f(u_1) = f(f(a))$ n'est pas défini si f n'est pas définie en dehors de A.

6.2 Suites arithmético-géométriques

Il s'agit les suites récurrentes d'ordre un pour lesquelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction affine : $f(x) = \alpha\, x + \beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On les appelle aussi suites récurrentes linéaires d'ordre un.

6.2.1 Suites arithmétiques

Il s'agit des suites récurrentes linéaires d'ordre un pour lesquelles $\alpha = 1$, c'est-à-dire pour lesquelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de la forme $f(x) = x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$. Le réel β est appelé la raison de la suite arithmétique. On montre facilement par récurrence le résultat suivant :

Proposition 6.3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison β. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\; u_n = u_0 + n\,\beta$$

et

$$\forall p \leq q \in \mathbb{N},\ \sum_{n=p}^{q} u_n = \frac{u_p + u_q}{2}\,(q-p+1) = \frac{\textit{Premier + Dernier termes}}{2} \times \textit{Nb de termes.}$$

6.2.2 Suites géométriques

Il s'agit des suites récurrentes linéaires d'ordre un pour lesquelles $\beta = 0$, c'est-à-dire pour lesquelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de la forme $f(x) = \alpha\, x$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Le réel α est appelé la raison de la suite géométrique. On montre facilement par récurrence le résultat suivant :

Proposition 6.4 *Soit u_n une suite géométrique de raison α. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0\, \alpha^n$$

et, si $\alpha \neq 1$ [1]*,*

$$\forall p \leq q \in \mathbb{N},\ \sum_{n=p}^{q} u_n = u_p\, \frac{1-\alpha^{q-p+1}}{1-\alpha} = \textit{Premier terme} \times \frac{1 - \textit{raison}^{\textit{Nb de termes}}}{1 - \textit{raison}}.$$

6.2.3 Cas général, lorsque $\alpha \neq 1$

Il n'est pas nécessaire d'apprendre par coeur ce qui suit, mais la démarche doit être connue.

L'idée est de chercher $\beta' \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(u_n - \beta')_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique de raison α. La relation

$$u_{n+1} - \beta' \ = \ f(u_n) - \beta' \ = \alpha\, u_n + \beta - \beta' \ = \ \alpha(u_n - \beta') + \alpha\, \beta' + \beta - \beta' \ = \ \alpha(u_n - \beta') + f(\beta') - \beta',$$

montre que β' convient ssi β' est solution de l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. L'unique solution de cette équation étant $\beta' = \frac{\beta}{1-\alpha}$, la suite $\left(u_n - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison α et vérifie donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - \frac{\beta}{1-\alpha} \ = \ \alpha^n \big(u_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\big)$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ = \ \alpha^n \big(u_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\big) + \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

6.3 Généralités

Dans tout ce paragraphe, I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ stable par f, i.e. f est une fonction de I dans I, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente définie par la donnée de $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition 6.5 *Soit $J \subset I$ un ensemble stable par $f : I \to I$, i.e. satisfaisant $f(J) \subset J$. S'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \in J$, alors $u_n \in J$ pour tout $n \geq N$.*

Preuve. Cela découle de la proposition 6.2 appliquée à f et $(u_n)_{n\geq N}$. $\diamond$

Proposition 6.6 *Si $f : I \to I$ est* **croissante***, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **monotone***. Plus précisément,*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \textit{est} \quad \textit{croissante si} \ \ u_1 = f(u_0) \geq u_0 \quad \textit{et} \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \textit{est décroissante si} \ \ u_1 = f(u_0) \leq u_0.$$

1. Si $\alpha = 1$, on a facilement $\sum_{n=p}^{q} u_n = \sum_{n=p}^{q} u_0 = (q-p+1)u_0$.

Preuve. Supposons $u_0 \leq u_1$ et montrons par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'une part, on a $u_0 \leq u_1$ et d'autre part, si on a $u_n \leq u_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors par croissance de f on a $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$, ce qui termine la récurrence. Lorsque $u_0 \geq u_1$, on montre de la même manière que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. $\diamond$

Corollaire 6.7 *Si $f : I \to I$ est décroissante, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.*

Preuve. La fonction $g = f \circ f : I \to I$ est alors croissante d'où la monotonie des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $v_0 \in I$ et $v_{n+1} = g(v_n)$. Or, dans le cas $v_0 = u_0$ (resp. $v_0 = u_1$), la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est autre que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$) qui est donc monotone.

$\diamond$

Proposition 6.8 *Si $f(x) \geq x$ pour tout $x \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Si $f(x) \leq x$ pour tout $x \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

Preuve. Il suffit de considérer $n \in \mathbb{N}$ et $x = u_n$. Dans le premier cas, on a $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$ et dans le second, on a $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$. $\diamond$

Définition 6.9 *Un réel $\ell \in I$ est appelé point fixe de la fonction $f : I \to I$ si $f(\ell) = \ell$.*

Remarque 6.10 *Si ℓ est un point fixe de f et si $u_N = \ell$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, alors $u_n = \ell$ pour tout $n \geq N$.*

Proposition 6.11 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in I$ et si f est continue au point ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.*

Preuve. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in I$ et si f est continue au point ℓ, alors

$$\ell \;=\; \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} \;=\; \lim_{n\to+\infty} f(u_n) \;=\; f(\ell).$$

$\diamond$

Exercice résolu en cours. Prenons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{4}$. La stratégie consiste à trouver des intervalles I stables par f sur lesquels appliquer les résultats précédents [2].

On commence par déterminer les variations de f, ses points fixes et le signe de $f(x) - x$ selon x. On vérifie facilement que f est croissante, continue sur $\mathbb{R}$ et satisfait :

i) $f(x) = x \Leftrightarrow x \in \{-2, 0, 2\}$,

ii) $f(x) \geq x \Leftrightarrow x \in [-2, 0] \cup [2, +\infty[$,

iii) $f(x) \leq x \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [0, 2]$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie c'est l'un des points fixes de f, à savoir -2, 0 et 2.

Cas $u_0 \in \{-2, 0, 2\}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors constante égale à u_0 donc converge vers cette valeur.

Cas $u_0 \in]0, 2[$. Cet intervalle étant stable par f, on a $u_n \in]0, 2[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, comme on a $f(x) \leq x$ sur $]0, 2[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; or, elle est minorée par 0, donc elle converge vers un réel ℓ. En passant à la limite dans les inégalités $0 < u_n \leq u_0$, on obtient $0 \leq \ell \leq u_0$. Or, on a $u_0 < 2$ et on sait que $\ell \in \{-2, 0, 2\}$. On en déduit $\ell = 0$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Cas $u_0 \in]2, +\infty[$. Cet intervalle étant stable par f, on a $u_n \in]2, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, comme on a $f(x) \geq x$ sur $]2, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc tend vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. En passant à la limite dans l'inégalité $u_n \geq u_0$, on obtient $\ell \geq u_0$. Or, on a $u_0 > 2$ et les seules

2. On peut vérifier les résultats de l'étude qui suit en remarquant que $u_n = 2\left(\frac{u_0}{2}\right)^{3^n}$.

limites finies ℓ possibles sont -2, 0 et 2 ; on en déduit $\ell = +\infty$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Les cas $u_0 \in]-\infty, -2[$ et $u_0 \in]-2, 0[$ se traitent de la même manière. On obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ dans le premier et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ dans le second.

6.4 Points fixes

Définition 6.12 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant un point fixe ℓ en lequel f est dérivable.*

1. *Si $|f'(\ell)| < 1$, ℓ est dit attractif.*
2. *Si $|f'(\ell)| > 1$, ℓ est dit répulsif.*

Proposition 6.13 *Soient I un intervalle, $f : I \to I$ et ℓ un point fixe attractif de f. Il existe alors un réel $\delta > 0$ tel que toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in I$ et qui vérifie $|u_N - \ell| \leq \delta$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, est convergente vers ℓ.*

Preuve. On a $\lim\limits_{x\to\ell, x\neq\ell} \left|\frac{f(x)-f(\ell)}{x-\ell}\right| = |f'(\ell)|$. D'autre part, comme ℓ est un point fixe attractif, on a $\frac{1-|f'(\ell)|}{2} > 0$, et par conséquent, par définition de la limite ci-dessus il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \big([\ell-\delta, \ell+\delta] \setminus \{\ell\}\big) \cap I, \quad \left|\frac{f(x)-f(\ell)}{x-\ell}\right| \;\leq\; |f'(\ell)| + \frac{1-|f'(\ell)|}{2} \;=\; \frac{1+|f'(\ell)|}{2} \;=: \; k < 1.$$

Pour $x \in [\ell-\delta, \ell+\delta] \cap I$ (y compris pour $x = \ell$ comme on le vérifie facilement), on déduit de ce qui précède :

$$|f(x) - \ell| \;=\; |f(x) - f(\ell)| \;\leq\; k\,|x-\ell| \;\leq\; k\,\delta \;\leq\; \delta.$$

Cette inégalité montre que l'intervalle $[\ell-\delta, \ell+\delta] \cap I$ est stable par f. Par conséquent, s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \in [\ell-\delta, \ell+\delta] \cap I$, alors $(u_n)_{n\geq N}$ est à valeurs dans $[\ell-\delta, \ell+\delta] \cap I$ et on obtient par récurrence :

$$\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \;=\; |\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n-N \text{ termes}}(u_N) - f\circ\cdots\circ f(\ell)| \underset{\text{Réc.}}{\leq} k^{n-N}|u_N - \ell| \;=\; \big(k^{-N}|u_N-\ell|\big)\,k^n$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ puisque $k \in [0, 1[$. $\diamond$

Remarque 6.14 *On remarquera que la convergence est exponentiellement rapide, i.e. il existe $C > 0$ et $a > 0$ (à savoir $a = -\ln k$ avec les notations précédentes) tels que :*

$$\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \;\leq\; C\,e^{-an}.$$

Proposition 6.15 *Soient I un intervalle, $f : I \to I$ et ℓ un point fixe répulsif de f. Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in I$ et qui converge vers ℓ est stationnaire.*

Preuve. On a $\lim\limits_{x\to\ell, x\neq\ell} \left|\frac{f(x)-f(\ell)}{x-\ell}\right| = |f'(\ell)|$. Comme ℓ est un point fixe répulsif, on a $\frac{|f'(\ell)|-1}{2} > 0$ et par définition de la limite il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \big([\ell-\delta, \ell+\delta] \setminus \{\ell\}\big) \cap I, \quad \left|\frac{f(x)-f(\ell)}{x-\ell}\right| \;\geq\; |f'(\ell)| - \frac{|f'(\ell)|-1}{2} \;=\; \frac{1+|f'(\ell)|}{2} \;\geq\; 1.$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans I et converge vers ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [\ell-\delta, \ell+\delta] \cap I$ pour tout $n \geq N$. On déduit donc des inégalités précédentes que $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \geq |u_n - \ell|$ et ainsi $|u_n - \ell| \geq |u_N - \ell|$ pour tout $n \geq N$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $0 \geq |u_N - \ell|$ c'est-à-dire $u_N = \ell$ et donc $u_n = \ell$ pour tout pour $n \geq N$. $\diamond$

Définition 6.16 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non trivial I. La fonction f est dite contractante si il existe un réel $k < 1$ tel que :*

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \ \leq\ k|x - y|.$$

Exemples et Remarques

1. Si f est dérivable sur I, il suffit d'après le théorème des accroissements finis (TAF) de montrer que $|f'| \leq k$ sur I pour s'assurer que : $\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.
2. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est contractante, elle est continue sur I puisque, pour tout $x_0 \in I$,

$$|f(x) - f(x_0)| \ \leq\ k|x - x_0| \ \underset{x \to x_0}{\longrightarrow}\ 0.$$

Théorème 6.17 (Théorème du point fixe ou de Picard) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application contractante. Alors f admet un unique point fixe ℓ et toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ.*

Exemples et Remarques

1. On ne peut pas remplacer l'hypothèse « f contractante » par l'hypothèse

$$\text{« } x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y| \text{ ».}$$

   En effet, le TAF montre que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ vérifie cette condition plus faible tandis que l'inégalité $\sqrt{x^2+1} > |x|$ montre que f n'a pas de point fixe dans $\mathbb{R}$.
2. On remarquera que la seule propriété de $\mathbb{R}$ utilisée dans la preuve ci-dessous est sa complétude. On obtient donc aussi les mêmes conclusions en remplaçant l'hypothèse « $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ » par « $f : I \to I$ » avec I de la forme $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$ ou $[a, b]$ avec $a \leq b$ réels quelconques [3].

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Nous allons démontrer que cette suite est de Cauchy, ce qui impliquera, l'espace $\mathbb{R}$ étant complet, qu'elle converge vers un réel ℓ. La continuité de f impliquera alors $\ell = f(\ell)$, d'où l'existence d'un point fixe de f.

En vue de démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, remarquons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq k|u_n - u_{n-1}|$ d'où par récurrence : $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n|u_1 - u_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Considérons maintenant deux entiers naturels $p < q$. En utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} |u_q - u_p| &\leq |u_q - u_{q-1}| + |u_{q-1} - u_{q-2}| + \cdots + |u_{p+1} - u_p| \\ &\leq k^{q-1}|u_1 - u_0| + k^{q-2}|u_1 - u_0| + \cdots + k^p|u_1 - u_0| \\ &= \Big(\sum_{n=p}^{q-1} k^n\Big)|u_1 - u_0| \ =\ k^p\frac{1 - k^{q-p}}{1-k}|u_1 - u_0| \ \leq\ \frac{k^p}{1-k}|u_1 - u_0|. \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} k^p = 0$, il existe donc, pour tout $\varepsilon > 0$, un rang P_ε tel que $\frac{k^p}{1-k}|u_1 - u_0| < \varepsilon$ pour tout $p \geq P_\varepsilon$ et donc tel que $|u_q - u_p| < \varepsilon$ pour tous $q > p \geq P_\varepsilon$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien de Cauchy, donc elle converge et sa limite ℓ, comme on l'a déjà vu, est un point fixe de f.

Pour terminer la preuve du théorème 6.17, il nous reste à démontrer que ℓ est l'unique point fixe de f. Considérons donc ℓ' un (éventuel autre) point fixe de f. Comme f est contractante, on a $|\ell - \ell'| = |f(\ell) - f(\ell')| \leq k|\ell - \ell'|$ donc $\ell = \ell'$ puisque $k < 1$. Comme toute suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers un point fixe de f, ce qui précède nous assure qu'une telle suite converge vers ℓ. $\diamond$

3. On laisse le lecteur vérifier que ces intervalles sont bien complets et que ce sont (en dehors de $\mathbb{R}$ lui-même) les seuls intervalles complets.

Chapitre 7

Fonctions réciproques

7.1 Rappels et généralités

7.1.1 Bijection

Définition 7.1 *Soient $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to B$ une fonction réelle de variable réelle. On dit que f établit une bijection de A sur B si $f : A \to B$ est à la fois injective et surjective, autrement dit si :*

$$\textit{pour tout } y \in B\,,\ \textit{il existe un unique } x \in A \textit{ tel que } f(x) = y\,.$$

Ainsi, f établit une bijection de A sur B ssi pour tout y dans B, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans A admet une unique solution.

Remarque Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Pour que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admette **au moins** une solution, il faut que y soit ≥ 0. Si $y > 0$, il est bien connu (et on le redémontrera plus loin) que l'équation $x^2 = y$ admet deux solutions distinctes (non nulles et opposées). Pour que f établisse une bijection d'une partie A de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$, il faut et il suffit que A contienne 0 et que pour tout $y > 0$ l'ensemble A contienne une et une seule des deux solutions de l'équation $x^2 = y$. On choisit en général la solution positive (que l'on note $\sqrt{y}$) et, dans notre langage, cela se traduit par le fait que la restriction de f à $\mathbb{R}^+$ établit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

Mais on aurait aussi pu choisir systématiquement la solution négative : la restriction de f à $\mathbb{R}^-$ établit une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur $\mathbb{R}^+$.

7.1.2 Application réciproque

Si f établit une bijection de A sur B, alors à tout $y \in B$ on peut faire correspondre $g(y) \in A$, l'unique solution de l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in A$. Cela définit une fonction $g : B \to A$ appelée **fonction réciproque** de $f : A \to B$. On note cette application $g = f^{-1}$ pour marquer son lien avec la fonction f.

Exemples et Remarques

1. Si $f : A \to B$ est bijective, alors $f^{-1} : B \to A$ est caractérisée par :
$$\forall\,(x, y) \in A \times B\ , \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \tag{7.1}$$
2. On a ainsi, $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in A$ et $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in B$.
3. Dans ce contexte, la fonction $f^{-1} : B \to A$ est une bijection de B sur A et sa fonction réciproque est $(f^{-1})^{-1} = f$.

4. La fonction « racine carrée » $\sqrt{\cdot} : y \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{y} \in \mathbb{R}^+$ est définie comme étant la bijection réciproque de la bijection $(.)^2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$.

   Il faut bien se rendre compte que jusqu'à présent nous parlons de cette fonction $\sqrt{\cdot}$ sans aucune garantie quant à sa bonne définition.
5. Ne surtout pas confondre f^{-1} avec la fonction $\frac{1}{f}$! Le vocable **fonction inverse** de f est parfois utilisé mais selon le contexte, il désigne f^{-1} la bijection réciproque de f, ou $\frac{1}{f}$ la composée de l'inversion $x \mapsto \frac{1}{x}$ et de f.

7.1.3 Bijections et graphes

Le graphe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f de variable réelle à valeurs réelles est le sous-ensemble du plan formé par les points $(x, f(x))$ lorsque x décrit le domaine de définition de f.

Si $f : A \to B$ est une bijection, alors un couple (x, y) est dans $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $x \in A$, $y \in B$ et $y = f(x)$. D'après la caractérisation (7.1) de f^{-1}, un couple (x, y) appartient à $\mathcal{C}_f$ ssi le couple (y, x) est dans le graphe de f^{-1}.

Rapportons le plan à un repère orthonormé. Alors les graphes de f et f^{-1}, plus précisément, les courbes d'équation $y = f(x)$ avec $x \in A$ et $y = f^{-1}(x)$ avec $x \in B$, sont symétriques l'un de l'autre dans la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice du plan, i.e la droite d'équation $y = x$.

Remarquons par ailleurs que les courbes d'équation $y = f(x)$ avec $x \in A$ et $x = f^{-1}(y)$ avec $y \in B$ sont égales dans le plan (Ox, Oy).

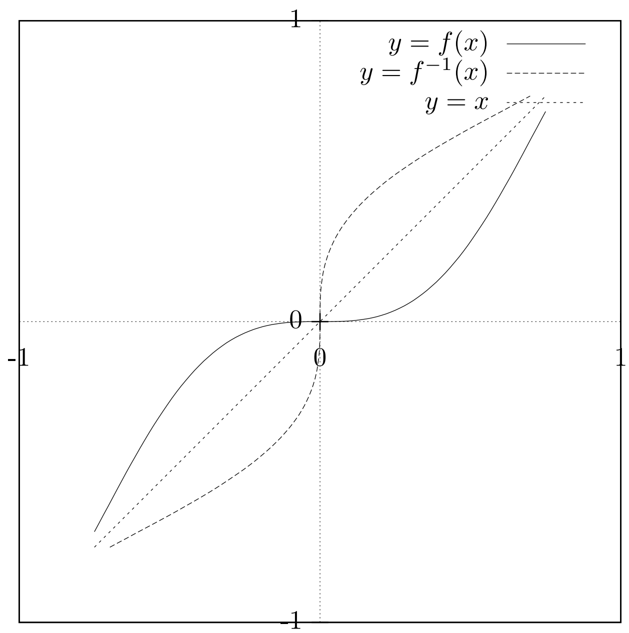


FIGURE 7.1 – Dans un même repère **orthonormé**, les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice

7.1.4 Composées de bijections

Proposition 7.2 *Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux bijections alors $g \circ f : A \to C$ est une bijection et l'on a*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Preuve. Cela a déjà été démontré au chapitre 1. ◇

7.2 Propriétés de régularité des fonctions réciproques

7.2.1 Le théorème de continuité

Théorème 7.3 *Soit f une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle I alors*

(i) $J = f(I)$ est intervalle de $\mathbb{R}$,

(ii) la fonction f établit une bijection de I sur J,

(iii) la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue, strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.

Preuve.

(i) C'est une des versions que nous avons données du théorème des valeurs intermédiaires, à savoir le théorème 4.17.

(ii) Soit $y \in J$ fixé. Par définition même de l'ensemble $J = f(I)$ [1], l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in I$ admet une solution. Par ailleurs, cette équation ne peut admettre qu'une solution car f est **strictement** monotone donc injective.

(iii) *Montrons que f^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f :*

Pour fixer les idées, supposons que f soit strictement croissante. Soient y_1, y_2 dans J avec $y_1 < y_2$. De deux choses l'une : soit $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, soit $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Si la première inégalité a lieu, alors par croissance de f on obtient $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$ c'est-à-dire $y_1 \geq y_2$, ce qui est contraire à l'hypothèse sur y_1 et y_2. Par conséquent, c'est la deuxième inégalité qui est vérifiée, autrement dit, pour tous y_1, y_2 dans J vérifiant $y_1 < y_2$, on a $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Cela montre que f est strictement croissante.

Montrons que f^{-1} est continue sur J :

Supposons encore pour fixer les idées que f (et donc aussi f^{-1}) est strictement croissante et montrons que, quel que soit $y_0 \in J$, la fonction f^{-1} est continue en y_0. Pour alléger un peu la preuve, supposons que y_0 n'est pas l'extrémité droite de J et montrons seulement que f^{-1} est continue à droite en y_0 (la continuité à gauche en y_0 se montre de façon analogue). Cela équivaut à montrer que pour toute suite strictement décroissante $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de J telle que $y_n \to y_0$, on a $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n := f^{-1}(y_n)$, de telle sorte que x_n appartient à I et $y_n = f(x_n)$ (et notamment on a $y_0 = f(x_0)$). Il s'agit donc de montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x_0.

Or, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante de limite y_0 et la fonction f^{-1} est strictement croissante, donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de I strictement décroissante et minorée par $x_0 \in I$. Elle admet donc une limite ℓ dans I (et on a $\ell \geq x_0$). De plus, par continuité de f sur I, on a $f(x_n) \to f(\ell)$ i.e. $y_n \to f(\ell)$, ce qui implique $f(\ell) = y_0 = f(x_0)$. Mais alors, par injectivité de f, on déduit que $\ell = x_0$, cqfd.

◇

7.2.2 Détermination de l'intervalle image

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Si a et b sont les bornes de I (a et b pouvant être des nombres réels ou les symboles $\pm\infty$), on déduit du TVI et de la stricte monotonie de f que $J = f(I)$ est l'intervalle explicité dans le tableau 7.1 ci-dessous dans les divers cas possibles.

1. on rappelle que $f(I)$ est l'ensemble des images par f de tous les éléments de I.

	$I=[a,b]$	$I=]a,b[$	$I=[a,b[$	$I=]a,b]$
f strict. croissante	$J=[f(a),f(b)]$	$J=]\lim\limits_{a^+}f,\lim\limits_{b^-}f[$	$J=[f(a),\lim\limits_{b^-}f[$	$J=]\lim\limits_{a^+}f,f(b)]$
f strict. décroissante	$J=[f(b),f(a)]$	$J=]\lim\limits_{b^-}f,\lim\limits_{a^+}f[$	$J=]\lim\limits_{b^-}f,f(a)]$	$J=[f(b),\lim\limits_{a^+}f[$

Table 7.1 – Intervalle image d'une bijection continue

Exemples et Remarques

1. Soit $f:]0,1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{x}$. Elle est continue, strictement décroissante sur $I=]0,1]$. On a $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$. Donc $J:=f(I)=[1,+\infty[$.
2. La fonction tangente est continue, strictement croissante sur l'intervalle $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Or, on a $\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}\tan x=\pm\infty$, donc on a $\tan(I)=\mathbb{R}$.

7.2.3 Le théorème de dérivabilité

Théorème 7.4 *Soit f une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle I. Soit $J=f(I)$ et soit $f^{-1}:J\to I$ la fonction réciproque de f.*

(i) Si $x_0\in I$, si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0)\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0=f(x_0)\in J$ et on a

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

(ii) Si f est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur J et sa dérivée est donnée par la formule

$$(f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}.$$

(iii) Soit n un entier ≥ 1. Si f est n fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^n$) sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est n fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^n$) sur J.

Preuve. Admettons provisoirement que le point (i) est démontré. On en déduit alors immédiatement que si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et sa dérivée est donnée par $(f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$. Cette expression montre que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (et que sa dérivée f' ne s'annule en aucun point de I) alors $(f^{-1})'$ est continue sur J et donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. Ceci achève la preuve du point (ii) (moyennant que (i) soit établi). Le point (iii) peut ensuite être démontré par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$, en partant de la relation $(f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$; cette démonstration est laissée en exercice.

Prouvons maintenant le point (i). Comme f est dérivable en x_0, il existe une fonction ϵ continue et nulle en 0 telle que, pour tout x dans I suffisamment proche de x_0, on ait

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)\epsilon(x-x_0)=y_0+(x-x_0)\big(f'(x_0)+\epsilon(x-x_0)\big).$$

Par continuité de f^{-1}, si y est un point de J assez proche de y_0 (qui est égal à $f(x_0)$) alors $f^{-1}(y)$ est assez proche de x_0 pour être substitué à x dans le DL ci-dessus, ce qui donne

$$y-y_0=\big(f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\big)g(y)\qquad\text{où}\quad g(y)=f'(x_0)+\epsilon\big(f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\big).$$

Par continuité de f^{-1} sur J d'une part, par continuité et nullité de ε en 0 d'autre part, la fonction g est continue en y_0 donc $g(y)\to g(y_0)=f'(x_0)$ lorsque y tend vers y_0 en étant dans J. Comme

$f'(x_0)$ est non nul par hypothèse, on a $g(y) \neq 0$ pour y voisin de y_0 et donc pour y voisin de y_0 mais distinct de y_0 on a

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{g(y)} \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

$\diamond$

7.3 Les fonctions racine n-ième, $\sqrt[n]{\cdot}$

7.3.1 Rappel : Les fonctions « puissance » d'exposant entier

Si n est un entier naturel non nul et si x est un nombre réel, on pose

$$x^n = \underbrace{x \dots x}_{n \text{ fois}}.$$

Proposition 7.5 *Pour tous réels x, y et tous entiers naturels non nuls n, m on a*

1. $1^n = 1$
2. $x^{m+n} = x^m \, x^n$
3. $(xy)^n = x^n \, y^n$
4. $(x^n)^m = x^{mn}$
5. *Binôme de Newton*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{\substack{k+\ell=n \\ 0 \le k,\ell}} \frac{n!}{k!\,\ell!} x^k y^\ell$$

Les règles 1, 2, et 4 suggèrent l'extension de la notation x^n à $n = 0$ en posant $x^0 = 1$ pour tout x et même son extension aux entiers négatifs (à condition de se restreindre aux nombres réels x non nuls) en posant pour tout entier $n < 0$ et tout $x \neq 0$

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n}.$$

On vérifie alors facilement la proposition suivante

Proposition 7.6 *Pour tous réels <u>non nuls</u> x, y et tous entiers relatifs n, m on a*

1. $1^n = 1$
2. $x^{m+n} = x^m \, x^n$
3. $(xy)^n = x^n \, y^n$
4. $(x^n)^m = x^{mn}$

Soit n un entier relatif. Notons p_n (comme "puissance n") la fonction définie par $p_n(x) = x^n$. Le domaine de définition de p_n est égal à $\mathbb{R}$ pour $n \geq 0$ et il est égal à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pour $n \leq -1$.

Proposition 7.7 1. *Pour $n \geq 1$, la fonction p_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par*

$$p_n'(x) = n \, p_{n-1}(x) \quad \big(\text{donc} \quad p_n'(x) = n \, \frac{p_n(x)}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \big)$$

2. *Pour $n \leq -1$, la fonction p_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$. Sa dérivée est donnée par*

$$p_n'(x) = n \, p_{n-1}(x) = n \, \frac{p_n(x)}{x}$$

7.3.2 Le cas n impair, $n \geq 3$

Le cas $n = 1$ est trivial : la fonction p_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à sa bijection réciproque. On supposera donc ici que n est un entier naturel impair ≥ 3.

Proposition 7.8 *1. La fonction p_n est impaire, de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

2. La fonction p_n définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On la note habituellement avec la notation racine n-ième :

$$p_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}\,.$$

3. La fonction p_n^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.

4. Pour $x \neq 0$, on a

$$(p_n^{-1})'(x) = \frac{1}{n}\frac{p_n^{-1}(x)}{x}\,.$$

5. La fonction p_n^{-1} n'est pas dérivable en 0, son graphe admet une tangente verticale au point $(0,0)$.

7.3.3 Le cas n pair, $n \geq 2$

On suppose ici que n est un entier naturel pair non nul, donc ≥ 2.

Proposition 7.9 *1. p_n est paire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.*

2. La fonction p_n définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. Sa bijection réciproque est continue, strictement croissante sur $[0,+\infty[$. On la note habituellement avec la notation racine n-ième :

$$p_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}\,.$$

3. La fonction p_n^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

4. Pour $x > 0$, on a

$$(p_n^{-1})'(x) = \frac{1}{n}\frac{p_n^{-1}(x)}{x}$$

5. La fonction p_n^{-1} n'est pas dérivable en 0, son graphe admet une demi-tangente verticale au point $(0,0)$.

7.3.4 Puissances rationnelles

Pour tout réel $x > 0$ et tout entier naturel non nul n, on pose

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Pour tout $x > 0$ et tout nombre rationnel α dont la forme réduite est $\alpha = \frac{p}{q}$ (avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux) on pose

$$x^\alpha = (x^p)^{\frac{1}{q}}$$

c'est-à-dire que, par définition, x^α est l'unique nombre $y > 0$ tel que $y^q = x^p$. On observera que pour n entier les définitions de x^n et de $x^{\frac{n}{1}}$ coïncident et que si $\alpha = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ mais que la fraction n'est pas réduite, on a quand même

$$(x^p)^{\frac{1}{q}} = x^\alpha.$$

Posons $y = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ et montrons que y est égal à x^α. Soit d le PGCD de p et q. On a $p = dp'$, $q = dq'$ et la forme réduite de α est $\alpha = \frac{p'}{q'}$. L'égalité cherchée découle de la suite d'implications

$$\left(\ (y^{q'})^d = y^q = x^p = (x^{p'})^d\ \right) \quad \text{implique} \quad \left(\ y^{q'} = x^{p'} = (x^\alpha)^{q'}\ \right) \quad \text{implique} \quad \left(\ y = x^\alpha\ \right).$$

Nous conservons par ailleurs la convention $x^0 = 1$.

Proposition 7.10 *Pour tous réels x, y strictement positifs et tous rationnels α, β on a :*

1. $1^\alpha = 1$
2. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha\, x^\beta$
3. $(xy)^\alpha = x^\alpha\, y^\alpha$
4. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\,\beta}$
5. *La fonction $p_\alpha :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$, $x \mapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et sa dérivée est donnée par*

$$p'_\alpha(x) = \alpha\, p_{\alpha-1}(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}\,.$$

Preuve. Montrons, à titre d'exemple, que $(xy)^\alpha = x^\alpha\, y^\alpha$. On suppose que $\alpha = \frac{p}{q}\cdot$ Par définition, $(xy)^\alpha$ est le nombre réel $z > 0$ tel que $z^q = (xy)^p$. En utilisant les règles de calcul déjà établies pour les exposants entiers, on obtient

$$(x^\alpha\, y^\alpha)^q = (x^\alpha)^q\, (y^\alpha)^q = x^p\, y^p = (x\, y)^p,$$

et, comme par ailleurs $x^\alpha\, y^\alpha$ est > 0, on a donc

$$x^\alpha\, y^\alpha = (x\, y)^\alpha.$$

Pour établir les propriétés de continuité et de dérivation de p_α, notons pour commencer que par définition on a $p_\alpha = p_{\frac{1}{q}} \circ p_p$. De plus, en remarquant que $p_{\frac{1}{q}}$ n'est autre que la restriction de $(p_q)^{-1}$ à $]0, +\infty[$, on obtient que la fonction $p_{\frac{1}{q}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et vérifie $p'_{\frac{1}{q}}(x) = \frac{1}{q} \frac{p_{\frac{1}{q}}(x)}{x}\cdot$ Par ailleurs la fonction p_p est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$. On en déduit que $p_\alpha := p_{\frac{1}{q}} \circ p_p$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et vérifie

$$p'_\alpha(x) = p'_p(x)\, p'_{\frac{1}{q}}(p_p(x)) = p\frac{p_p(x)}{x}\, \frac{1}{q} \frac{p_{\frac{1}{q}}(p_p(x))}{p_p(x)} = \frac{p}{q} \frac{p_\alpha(x)}{x} = \alpha x^{\alpha-1} = \alpha p_{\alpha-1}(x)\,.$$

$\diamond$

Proposition 7.11 *1. La fonction $x \mapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1.*

2. *Si $\alpha \neq 0$, alors p_α est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, de bijection réciproque $p_{\frac{1}{\alpha}}$.*
3. *Si $\alpha < 0$, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$. De plus, la fonction p_α est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.*
4. *Si $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$. De plus, la fonction p_α se prolonge par continuité en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$, strictement croissante.*
5. *Si $\alpha \geq 1$, alors la fonction p_α se prolonge par continuité en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.*
6. *Si $0 < \alpha < 1$, la fonction p_α n'est pas dérivable en 0. Son graphe admet une demi-tangente verticale au point $(0, 0)$.*

7.4 Les fonctions logarithme et exponentielle

7.4.1 Rappels : fonctions logarithme et exponentielle

Dans certains ouvrages, dont celui-ci, le logarithme népérien est défini comme étant la **primitive** s'annulant en 1 de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0 + \infty[$. Cette définition nécessite la connaissance du théorème d'existence des primitives de fonctions continues, ce que nous n'aborderons que dans le chapitre 8.2.

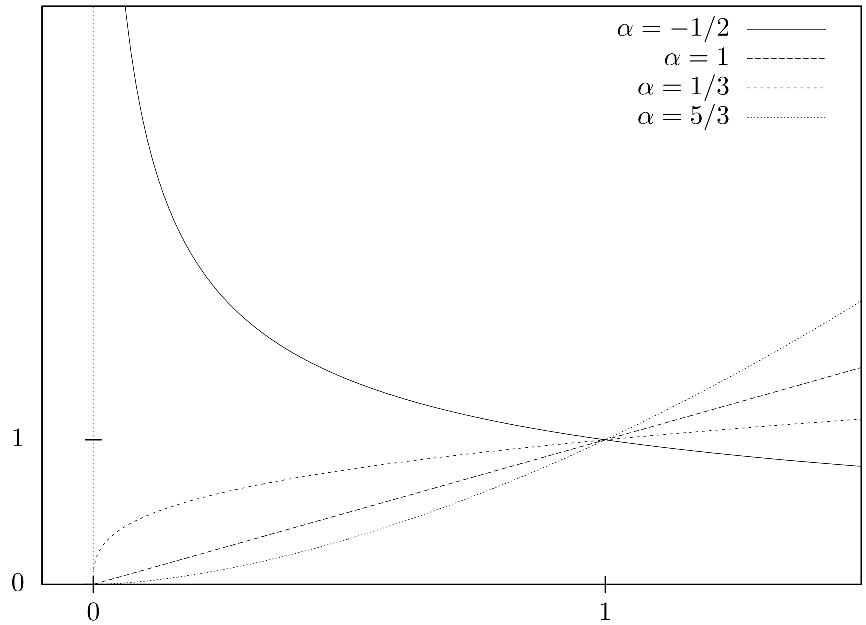


FIGURE 7.2 – Les graphes de différentes fonctions puissances

Théorème 7.12 (et Définition) *Il existe une unique fonction, notée* ln*, appelée le* **logarithme népérien** *définie et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]0, +\infty[$ *vérifiant*

1. $\ln 1 = 0$.
2. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ ·

De ceci, on peut déduire immédiatement les propriétés suivantes

Proposition 7.13 1. *Pour tous* $x, y > 0$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

2. *Pour tout réel* $x > 0$ *et tout rationnel* α, $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.
3. *La fonction* ln *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et strictement croissante sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *et vérifie* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Preuve. Prouvons par exemple le point 2. Fixons un rationnel α et considérons la fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x^\alpha)$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, elle vérifie $f(1) = 0$ et

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \frac{1}{x^\alpha} = \alpha \frac{1}{x} \cdot$$

On en déduit que $f(x) = \alpha \ln(x)$ pour $x \in I$, comme annoncé. En ce qui concerne le point 3, la stricte croissance de ln découle de la stricte positivité de sa dérivée. On en déduit : $\ln 2 > \ln(1) = 0$. Le point 2 implique que $\ln 2^n = n \ln 2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Comme 2^n et $n \ln 2$ tendent vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$, on en déduit alors que $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. ◇

Dans la plupart des cours de terminale actuels, la fonction exponentielle est définie comme étant la seule solution valant 1 en 0 de l'équation différentielle $f' = f$. Cette définition nécessite la connaissance de résultats d'existence de solutions d'équations différentielles et nous préférons adopter ici une autre définition : d'après le point 3 de la question précédente et $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ pour $x > 0$, ln réalise une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$, ce qui mène à la définition et aux résultats ci-dessous.

Théorème 7.14 (et Définition) *La fonction* **exponentielle***, notée* exp*, est définie comme la bijection réciproque de* $\ln : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$*. On a donc :*

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ *est strictement croissante, à valeurs* > 0 *et vérifie*
$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty\,.$$
2. $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *et, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
3. $\exp(0) = 1$ *et, pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
4. *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et tout rationnel* α, $\exp(\alpha\, x) = (\exp(x))^\alpha$.

Exemples et Remarques

1. Concernant la définition usuelle des cours de terminale actuels, on pourra remarquer que la fonction exponentielle est bien l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Déjà, on a $\exp(0) = 1$ et $\exp' = \exp$ sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, si $f' = f$ sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x)\exp(-x) - f(x)\exp(-x) = 0$ c'est-à-dire $\big(f(x)\exp(-x)\big)' = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ Cela implique que la fonction $x \mapsto f(x)\exp(-x)$ est constante : il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)\exp(-x) = A$ i.e. $f(x) = A\exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Et si de plus $f(0) = 1$, alors $A = 1$ et $f = \exp$.
2. La preuve de $\exp' = \exp$ s'écrit : $\exp'(x) = \frac{1}{(\exp^{-1})'(\exp(x))} = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \exp(x)\,.$
3. Si on pose $e = \exp(1)$ (i.e. si on définit e comme l'unique réel > 0 tel que $\ln e = 1$), le point 4 implique que pour tout α rationnel, on a $e^\alpha = \exp(\alpha)$. On choisit d'étendre la relation aux nombres irrationnels en posant pour tout x réel
$$e^x := \exp(x).$$
Les règles de calcul fondamentales sur les puissances sont respectées
(a) $e^0 = 1$,
(b) pour x, y réels, $e^{x+y} = e^x\, e^y$,
(c) pour x réel et α rationnel, $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$.

7.4.2 Croissances comparées

Proposition 7.15 *1. Pour tout nombre rationnel* α *on a*
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^x = +\infty\,.$$

2. Pour tout rationnel α,
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0\,.$$

3. Pour tout rationnel $\alpha > 0$,
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \ln x = 0\,.$$

4. Pour tout rationnel $\alpha < 0$,
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \ln x = 0\,.$$

Preuve. La difficulté majeure est de prouver le point 1. Commençons par établir, en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathcal{P}_n \ : \ « \ \forall\, x \ \geq \ 0\,, \quad e^x \ \geq \ 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} \ »\,.$$

Soit $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x - 1$ et pour tout entier $n \geq 1$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x - (1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!})$. On vérifie immédiatement que les fonctions f_n s'annulent en $x = 0$, qu'elles sont dérivables et que

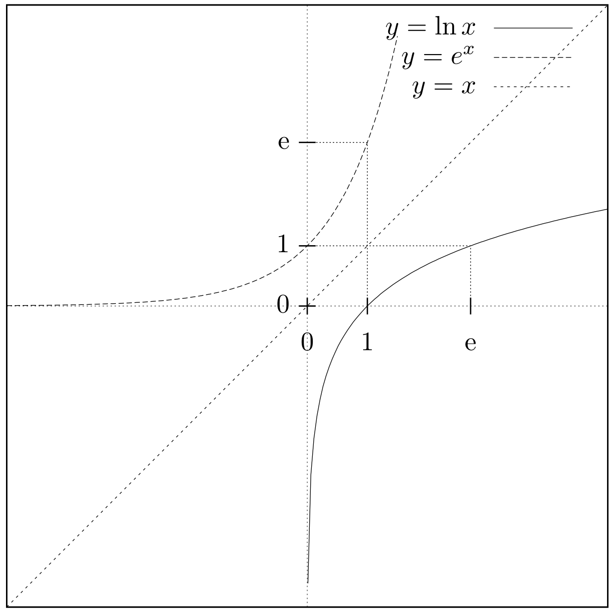


FIGURE 7.3 – Les graphes $y = \ln x$ et $y = e^x$

pour tout $n \geq 1$ on a $f'_n = f_{n-1}$. Comme la fonction exp est croissante, la fonction f_0 est ≥ 0 sur $\mathbb{R}^+$. Mais alors f_1 est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $f_1(0) = 0$ on en déduit que f_1 est ≥ 0 sur $\mathbb{R}^+$. De même, si pour un certain $n \geq 1$ la fonction f_n est ≥ 0 sur $\mathbb{R}^+$ on en déduit que f_{n+1} est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $f_{n+1}(0) = 0$ on déduit que f_{n+1} est elle aussi ≥ 0 sur $\mathbb{R}^+$. Par récurrence on obtient que toutes les fonctions f_n sont positives sur $\mathbb{R}^+$ et cela montre que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc $e^x \geq \frac{x^n}{n!}$ quel que soit $x \geq 0$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etant donné un nombre rationnel α, fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$ strictement supérieur à $-\alpha$. En utilisant ce qui précède, on obtient

$$\forall x > 0 , \quad x^\alpha e^x \geq \frac{1}{n!} x^{\alpha+n} ,$$

et par ailleurs on a $x^{\alpha+n} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, car $\alpha + n > 0$ et on en déduit $x^\alpha e^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, en vertu du théorème des gendarmes.

Pour le deuxième point, il suffit de se rappeler que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. En effet, on a donc

$$x^\alpha e^{-x} = \frac{1}{x^{-\alpha} e^x} ,$$

et d'après le point 1, le membre de droite de cette égalité tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ car son dénominateur tend vers $+\infty$.

Les points 3 et 4 sont des conséquences du point 2 : en effet, si on pose $y = -\alpha \ln x$, on a $x^\alpha \ln x = -\frac{1}{\alpha} y e^{-y}$ et on observe que si α est > 0 et x tend vers 0^+ ou bien si α est < 0 et x tend vers $+\infty$, alors y tend vers $+\infty$ et donc $y e^{-y}$ tend vers 0.

◇

7.4.3 Exponentielles et logarithmes de base $a > 0$, fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

D'après ce qui précède, pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{Q}$, on a :

$$\ln(a^x) = x \ln a \quad \text{et} \quad a^x = \exp(x \ln a) .$$

Pour $a > 0$, nous définissons alors a^x pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ par :

$$a^x := \exp(x \ln a) \qquad (\text{on a donc aussi : } \ln(a^x) = x \ln a)\,.$$

Dans le cas particulier où $a = \exp(1) = e \in \mathbb{R}$, cette définition donne $e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x)$, ce qui explique la notation e^x pour $\exp(x)$.

Lorsque a est > 0 et différent de 1, la fonction $\exp_a : x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in \,]0, +\infty[$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Sa bijection réciproque est la fonction $\ln_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par

$$\ln_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}\,\cdot$$

La valeur $a = 10$ est particulièrement prisée en physique-chimie, par exemple pour définir le pH d'une solution ou le bruit en décibels. La fonction $\ln_{10}$ est le plus souvent notée log.

Ce qui précède nous permet de définir la fonction $p_\alpha :]0, +\infty[\to]0, +\infty[,\ x \mapsto p_\alpha(x) = x^\alpha$ pas seulement pour α rationnel, mais pour tout réel α. Pour cela on utilise la formule $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$. Ces fonctions ont déjà été étudiées pour les valeurs rationnelles de α et les résultats des propositions 7.10, 7.11 sont encore valables avec des exposants réels.

De même, les résultats de proposition 7.15 sont encore valables avec des exposants réels.

7.5 Fonctions trigonométriques réciproques

Les généralités sur les fonctions réciproques montrent que celles-ci servent à résoudre une équation du type $f(x) = y$ d'inconnue x pour un certain paramètre y. Sous l'hypothèse de bijectivité, la seule solution d'une telle équation est $x = f^{-1}(y)$.

D'un intérêt particulier sont les équations trigonométriques, i.e faisant intervenir les fonctions tan, sin, cos etc. Certaines d'entre elles pourront être résolues grâce aux fonctions réciproques arctan, arcsin, arccos, etc.

Le lecteur doit cependant être conscient que du fait de leur périodicité les fonctions trigonométriques usuelles ne peuvent être inversées que sur des intervalles particuliers.

7.5.1 La fonction arctan

La fonction tan est définie par $\tan(x) := \frac{\sin x}{\cos x}$ en tout point x tel que $\cos x \neq 0$. Elle est donc définie sur

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

La fonction tan est impaire et π-périodique. Ses propriétés sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 7.16 *1. La fonction* tan *restreinte à l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et elle est impaire.*

2. Sa dérivée est $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$, *elle est* > 0 *sur l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ *donc la fonction* tan *est strictement croissante sur cet intervalle.*

3. Les limites de la fonction tan *aux bornes de l'intervalle sont*

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty, \qquad \lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan x = -\infty,$$

4. Quelques valeurs remarquables : $\tan 0 = 0$, $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, $\tan \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, *etc.*

On en déduit donc que

Théorème 7.17 *1. La fonction* tan *restreinte à l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ *définit une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$. *Sa bijection réciproque est notée* arctan.

2. La fonction arctan *est strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$.

3. La fonction arctan *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot$$

4. Les limites en $\pm\infty$ *de la fonction* arctan *sont*

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \cdot$$

5. La fonction arctan *est impaire,* $\arctan(0) = 0$*,* $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$*, etc.*

Concernant la résolution de l'équation $\tan x = y$ avec pour inconnue le réel x, on a

Proposition 7.18 *Soit* $y \in \mathbb{R}$ *fixé. Le réel* x *est solution de l'équation* $\tan x = y$ *si et seulement si il existe un entier relatif* k *tel que* $x = \arctan y + k\pi$.

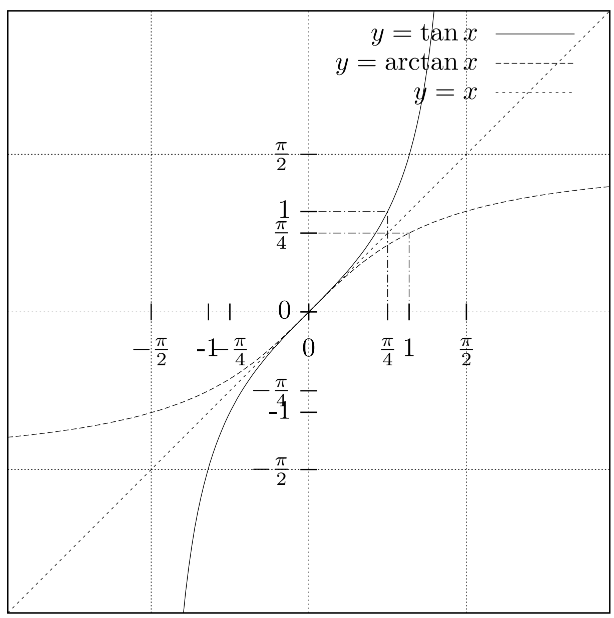


FIGURE 7.4 – Les graphes de $y = \tan x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $y = \arctan x$, $x \in]-1,+1[$

La proposition suivante, qui se prouve en étudiant la dérivée du membre de gauche, permet de ramener l'étude de $\arctan x$ en $+\infty$ à son étude en 0.

Proposition 7.19 *Pour tout* $x > 0$*, on a*

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

7.5.2 La fonction arcsin

La fonction sin est impaire et 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La proposition suivante résume ses propriétés sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition 7.20 *1. La fonction* sin *restreinte à l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et elle est impaire.*

2. *Pour* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ *on a* $\sin'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \geq 0$ *et en particulier on a* $\sin'(x) > 0$ *pour tout* x *dans l'intervalle ouvert* $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$. *La fonction* sin *est donc strictement croissante sur le segment* $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$.
3. *Quelques valeurs remarquables :* $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = +1$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *etc.*

On en déduit donc que

Théorème 7.21 1. *La fonction* sin *définit une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1, +1]$. *Sa bijection réciproque est notée* arcsin.

2. *La fonction* arcsin *est une bijection continue, strictement croissante de* $[-1, +1]$ *sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$.
3. *La fonction* arcsin *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1, +1[$ *et sa dérivée y est définie par*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

4. *La fonction* arcsin *est impaire,* $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, *etc.*
5. *Le graphe de* arcsin *admet des demi-tangentes verticales aux points d'abscisses* $x = \pm 1$.

Concernant la résolution de l'équation $\sin x = y$ où l'inconnue est le réel x, on a

Proposition 7.22 *Soit* $y \in [-1, +1]$ *fixé. Le réel* x *est solution de l'équation* $\sin x = y$ *si et seulement si il existe un entier relatif* k *tel que* $x = \arcsin y + 2k\pi$ *ou* $x = \pi - \arcsin y + 2k\pi$.

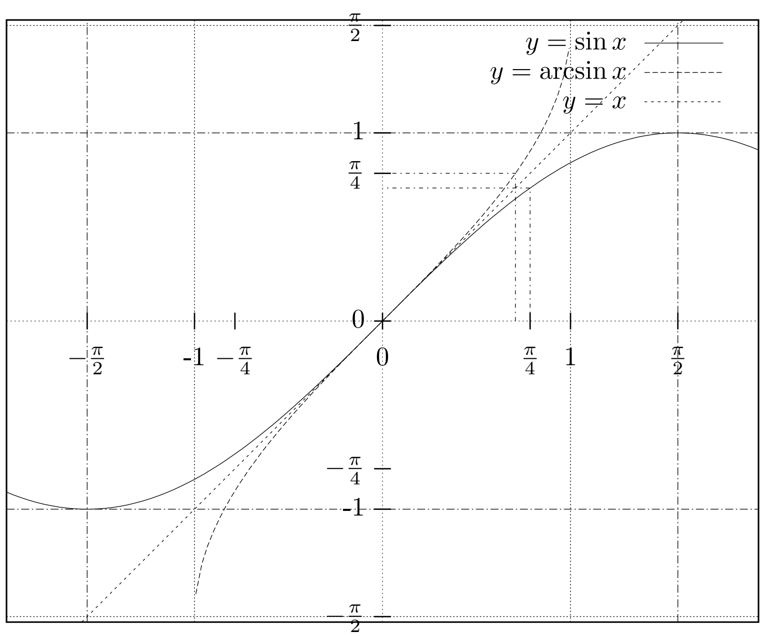


FIGURE 7.5 – Les graphes de $y = \sin x$ et $y = \arcsin x$

7.5.3 La fonction arccos

La fonction cos est paire, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La proposition suivante résume ses propriétés sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Proposition 7.23 1. *La fonction* cos *restreinte à l'intervalle* $[0, \pi]$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et elle est paire.*

2. *Pour* $x \in [0, \pi]$ *on a* $\cos'(x) = -\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} \leq 0$ *et en particulier on a* $\cos'(x) < 0$ *pour tout* x *dans l'intervalle ouvert* $]0, \pi[$. *La fonction* cos *est donc strictement décroissante sur* $[0, \pi]$.
3. *Quelques valeurs remarquables :* $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \pi = -1$ *etc.*

On en déduit donc que

Théorème 7.24 1. *La fonction* cos *définit une bijection de* $[0, \pi]$ *sur* $[-1, +1]$. *Sa bijection réciproque est notée* arccos.

2. *La fonction* arccos *est une bijection continue, strictement décroissante de* $[-1, +1]$ *sur* $[0, \pi]$.
3. *La fonction* arccos *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1, +1[$ *et sa dérivée y est définie par*

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = -(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

4. *La fonction* arccos *est paire,* $\arccos 1 = 0$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, *etc.*
5. *Le graphe de* arccos *admet des demi-tangentes verticales aux points d'abscisses* $x = \pm 1$.

Concernant la résolution de l'équation $\cos x = y$ où l'inconnue est le réel x, on a

Proposition 7.25 *Soit* $y \in [-1, +1]$ *fixé. Le réel* x *est solution de l'équation* $\cos x = y$ *si et seulement si il existe un entier relatif* k *tel que* $x = \arccos y + 2k\pi$ *ou* $x = -\arccos y + 2k\pi$.

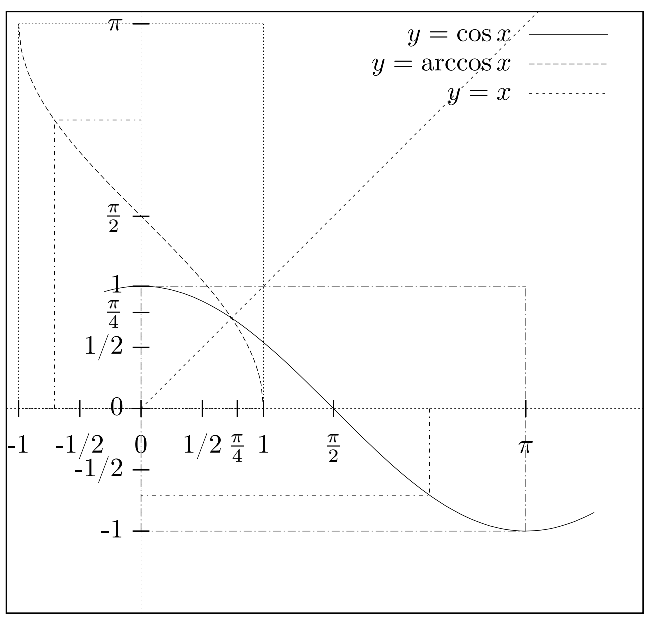


FIGURE 7.6 – Les graphes de $y = \cos x$ et $y = \arccos x$

On a la relation suivante entre arcsin et arccos. La preuve en est aisée en dérivant le membre de gauche. Cette relation est à rapprocher de la formule de trigonométrie bien connue $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ valable pour tout réel x.

Proposition 7.26 *Pour tout* $x \in [-1, +1]$, *on a* $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \cdot$

7.6 Transformation polaires/cartésiennes

Dans le plan muni d'un repère othonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on décrit la position d'un point M grâce à ses coordonnées cartésiennes. Il est parfois utile de décrire la position à l'aide de ρ, la distance de M à l'origine et de l'angle θ, défini modulo 2π que fait $\vec{OM}$ avec le vecteur $\vec{i}$ dirigeant l'axe des abscisses (cet angle n'est pas défini si $M = O$). On passe des coordonnées polaires $(\rho,\theta) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}$ de M à ses coordonnées cartésiennes en posant $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.

La question à laquelle nous allons répondre ici concerne le passage dans l'autre sens : i.e connaissant les coordonnées cartésiennes de M, déterminer ses coordonnées polaires. La détermination de ρ ne pose pas de problème : si $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ alors $x^2 + y^2 = \rho^2$ et donc $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Le problème est de calculer θ. Si M n'est pas sur l'axe des ordonnées, on a $x \neq 0$ et en faisant le bon quotient on a alors

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

Cette formule suggère l'utilisation de la fonction arctan.

Trois cas principaux se dégagent :

(i) Si $x > 0$, l'angle θ, qui sur le schéma doit être compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ est pris égal à $\theta = \arctan\frac{y}{x}$

(ii) Si $x < 0$ et $y > 0$, l'angle θ, qui sur le schéma doit être compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π est pris égal à $\theta = \pi + \arctan\frac{y}{x}$, dont la tangente vaut bien $\frac{y}{x}$

(iii) Si $x < 0$ et $y < 0$, l'angle θ, qui sur le schéma doit être compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$ est pris égal à $\theta = -\pi + \arctan\frac{y}{x}$, dont la tangente vaut bien $\frac{y}{x}$

Concernant les points de l'axe des ordonnées, on pose

(iv) $\theta = \frac{\pi}{2}$ si $x = 0$ et $y > 0$, ce qui est la limite naturelle de θ lorsque $y > 0$ est fixé et que x tend vers 0 par valeurs positives ou négatives.

(v) $\theta = -\frac{\pi}{2}$ si $x = 0$ et $y < 0$, ce qui est là encore la limite naturelle de θ lorsque $y < 0$ est fixé et que $x \to 0$.

Ce faisant, nous avons assigné à tout point M de coordonnées (x, y) sauf à ceux vérifiant $y = 0$, $x \leq 0$ un couple $(\rho,\theta) \in \,]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$. Une vérification que nous serons capable de mener après le chapitre du second semestre sur les fonctions de 2 variables montre que ρ, ainsi que θ, dépendent continûment du couple (x, y) dans le plan privé du demi-axe des abscisses négatives.

Si $x < 0$ est fixé, lorsque y tend vers 0 par valeurs positives, θ tend vers π et lorsque y tend vers 0 par valeurs négatives, θ tend vers $-\pi$. La fonction $\theta(x, y)$ ne peut pas se prolonger par continuité au plan (même en privant celui-ci de l'origine).

En résumé, la correspondance coordonnées polaires–coordonnées cartésiennes que nous venons d'expliciter établit une bijection continue et de réciproque continue [2] entre $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0),\, x \leq 0\}$

L'élimination du demi-axe des abscisses négatives est nécessaire pour éviter de choisir si ces points doivent avoir un angle π ou $-\pi$.

Si nous avions eu à nous concentrer sur un problème où les points sont proches de ce demi-axe négatifs, il est nécessaire d'utiliser d'autres conventions pour l'angle θ. Une option est d'éliminer le demi-axe des réels positifs et de considérer $\theta \in]0, 2\pi[$.

2. Nous verrons dans le chapitre du second semestre sur les fonctions de 2 variables ce que cela signifie

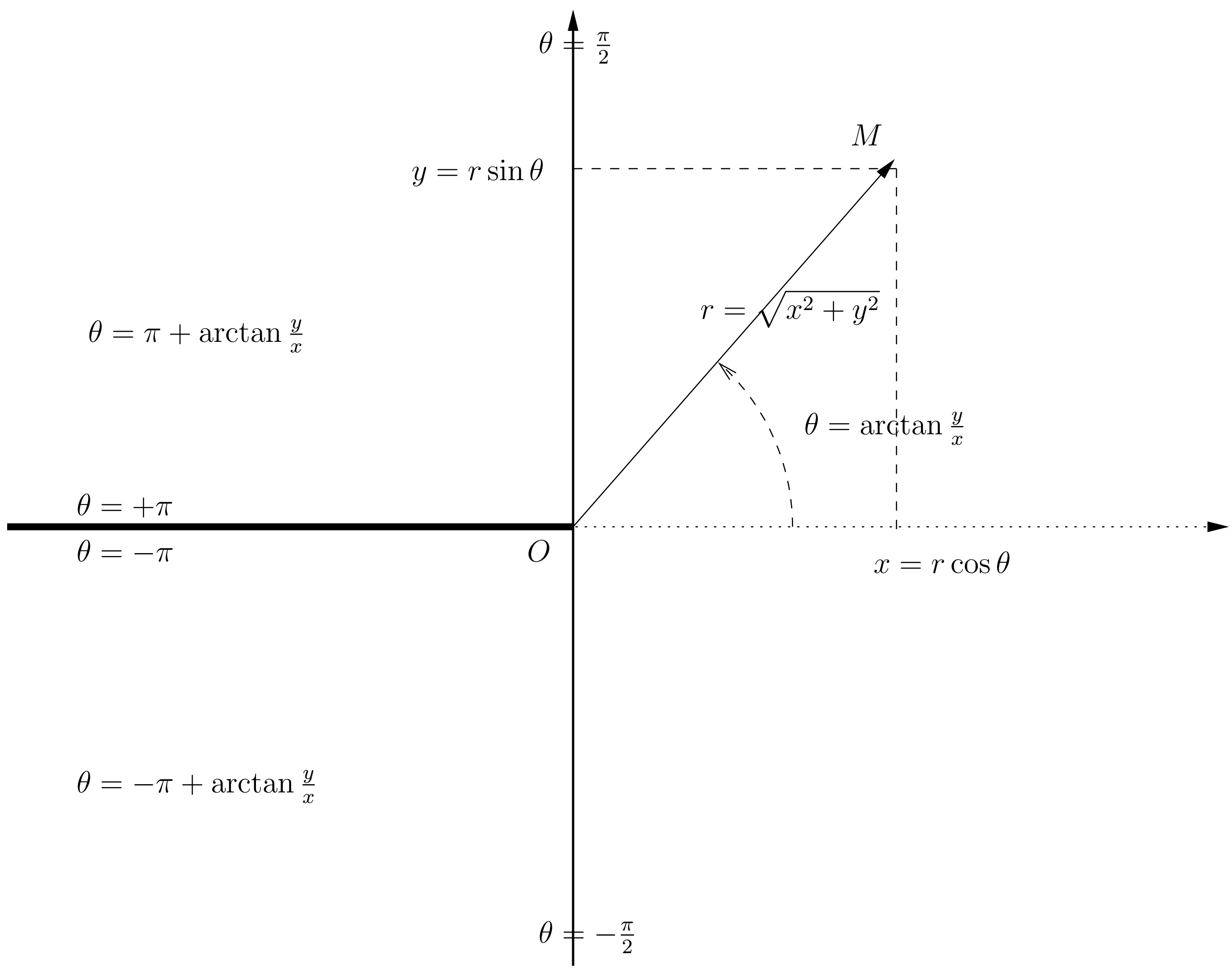


FIGURE 7.7 – Passage polaires-cartésiennes

Chapitre 8

Primitives et Intégrales

8.1 Primitives : définition et premières propriétés

Définition 8.1 *Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles définie sur I. On dit que f* **admet une primitive** *sur I s'il existe une fonction F définie et dérivable sur I dont la dérivée est égale à f, i.e. telle que $F' = f$ sur I.*
Toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $F' = f$ est appelée **une primitive de f sur I**.

Proposition 8.2 *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Si une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive F, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions $F + c$ où c est un réel quelconque.*

Preuve. Pour montrer l'égalité $\{\, G \;;\; G$ est une primitive de f sur $I\} = \{F + c\,;\; c \in \mathbb{R}\}$, on procède par double inclusion :

"$\supset$" Si $F' = f$ et si $G = F + c$ où c est un réel donné, alors G est dérivable sur I et $G' = F' = f$ donc G est une primitive de f sur I.

"$\subset$" Si G est dérivable sur I et si $G' = f$, alors $(G - F)' = 0$ donc il existe un réel c[1] tel que $G = F + c$, autrement dit, tel que G soit la fonction $x \mapsto F(x) + c$.

$\diamond$

Exemples et Remarques

1. Soit f admettant une primitive F sur I. Alors, étant donnés $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(a) = b$ (il s'agit de $G := F - F(a) + b$).
2. Toute fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ y admet une primitive : en effet si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ alors
$$F : x \mapsto a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$$
est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Précisément, c'est **la** primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
3. arctan est **la** primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
4. ln est **la** primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule en 1. Dans certains ouvrages[2], elle est même définie ainsi. L'existence de cette fonction est garantie par le corollaire 8.13 énoncé dans la suite du chapitre.

1. d'après le théorème 5.20
2. dont celui-ci

5. Une fonction continue, affine par morceaux [3], sur un intervalle $I = [a, b]$ admet une primitive [4] sur I. Par exemple, considérons la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 - x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Une primitive de cette fonction f sur I est $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

6. Le tableau des primitives classiques s'obtient en "inversant" la lecture du tableau des dérivées classiques :

$f(x)$	$F(x)$ à cste près	I
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$I = \mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{Z}, n \leq -2)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$
e^x	e^x	$I = \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$I = \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$I = \mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$I = \left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$, avec $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ ou $-\arccos x$	$I =]-1, 1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$I = \mathbb{R}$

TABLE 8.1 – Primitives classiques : F est une primitive de f sur I ; les autres primitives de f s'obtiennent en ajoutant une constante c à F.

3. une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, affine par morceaux s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ du segment $[a, b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, pour $i = 0, \ldots, n$, soit une fonction affine

4. par application de la proposition 5.9

8.2 Intégrale de Riemann d'une fonction continue

8.2.1 Sommes de Darboux et intégrale de Riemann

On rapporte le plan à un repère orthonormé. Soient $a < b$ deux réels et $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. On souhaite définir $\int_a^b f(t)\,dt$ comme « l'aire algébrique » comprise entre l'axe des abscisses et $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative du graphe de f : l'aire de la partie au-dessus de cet axe est comptée positivement et l'aire de la partie en dessous de l'axe est comptée négativement (voir la figure 8.1 ci-dessous).

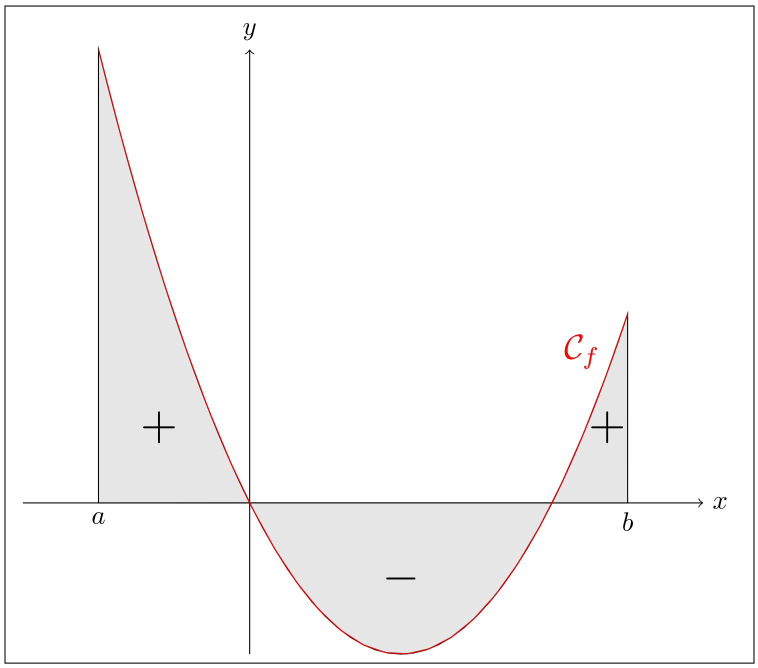


Figure 8.1 – On veut définir $\int_a^b f(t)\,dt$ comme la somme algébrique des aires grisées comprises entre l'axe des abscisses et $\mathcal{C}_f$.

Une difficulté pour le faire vient du fait que la notion d'aire d'une partie du plan est, à ce stade, assez rudimentaire. On sait ce qu'est l'aire d'un triangle, d'un parallélogramme et de toute figure polygonale pour laquelle on dispose d'une « décomposition en triangles » et on a l'« intuition » de ce qu'est l'aire d'un disque. Pour définir $\int_a^b f(t)\,dt$, on va donc avoir recours à des histogrammes dont les aires algébriques (aisément calculables comme sommes d'aires de rectangles) approchent l'aire algébrique de la partie du plan que l'on veut calculer. Ainsi on définit d'abord :

Définition 8.3 (Subdivision régulière) *Etant donnés deux réels $a < b$ et un entier $n \geq 1$, on pose*

$$a_{i,n} := a + i\frac{b-a}{n} \quad \textit{pour tout } \ i \in \{0,\ldots,n\}\,,$$

de sorte qu'on a

$$a = a_{0,n} < a_{1,n} < \cdots < a_{n,n} = b \quad \textit{et} \quad \forall\, i \in \{0,\ldots,n-1\}\ , \quad a_{i+1,n} - a_{i,n} = \frac{b-a}{n}.$$

La suite $(a_{i,n})_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ est appelée subdivision régulière de $[a,b]$ en n intervalles.

Définition 8.4 (Sommes de Darboux) *Soient $a < b$ deux réels, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,n})_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ la subdivision régulière de $[a,b]$ en n intervalles. Pour $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, on appelle :*

i) somme de Darboux inférieure d'ordre n associée à f le nombre

$$s_n(f) \ := \ \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\min_{x\in[a_i,a_{i+1}]} f(x) \ = \ \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\min_{[a_i,a_{i+1}]} f\,,$$

ii) somme de Darboux supérieure d'ordre n associée à f le nombre

$$S_n(f) \ := \ \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\max_{x\in[a_i,a_{i+1}]} f(x) \ = \ \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\max_{[a_i,a_{i+1}]} f\,.$$

Remarque 8.5

1. *S'il y a une ambiguïté possible sur l'intervalle $[a,b]$ considéré, on notera $s_n^{[a,b]}(f)$ et $S_n^{[a,b]}(f)$ les sommes précédentes.*
2. *Graphiquement, $S_n(f)$ est l'aire algébrique de l'histogramme à n colonnes de largeur $\frac{b-a}{n}$ et de hauteur $\max\limits_{[a_i,a_{i+1}]} f$ sur l'intervalle $[a_i,a_{i+1}]$. C'est-à-dire que son « graphe » est celui de la fonction constante par morceaux sur $[a,b]$ qui, pour chaque i, est égale à $\max\limits_{[a_i,a_{i+1}]} f$ sur l'intervalle $[a_i,a_{i+1}]$. De même on obtient $s_n(f)$ en considérant la fonction constante par morceaux égale à $\min\limits_{[a_i,a_{i+1}]} f$ sur $[a_i,a_{i+1}]$. Il est donc clair que si $\int_a^b f(t)\,dt$ est égale à l'aire algébrique de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses et $\mathcal{C}_f$, alors nécessairement $s_n(f) \le \int_a^b f(t)\,dt \le S_n(f)$. En effet, les « graphes » des histogrammes dont les aires sont $s_n(f)$ et $S_n(f)$ sont respectivement au-dessous et au-dessus de $\mathcal{C}_f$. Ceci est illustré à la figure suivante pour $n=5$.*

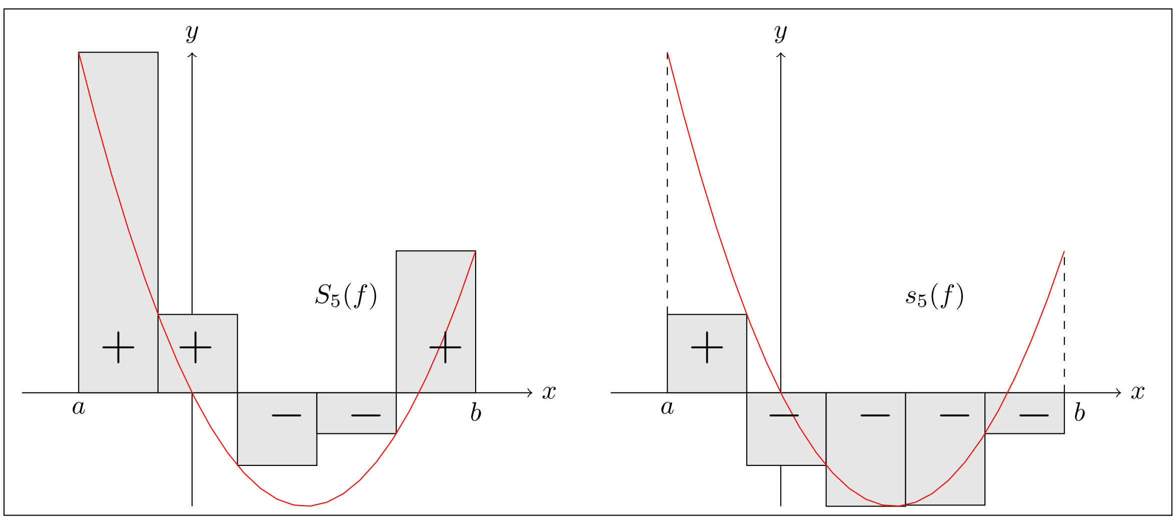


FIGURE 8.2 – L'aire algébrique grisée vaut $S_5(f)$ sur la figure de gauche, $s_5(f)$ sur celle de droite.

Les aires algébriques des histogrammes de la figure précédente ne semblent pas approcher très précisément l'aire algébrique que l'on souhaite calculer. Cela vient du fait que les histogrammes considérés n'ont que $n=5$ colonnes ! Lorsque n devient grand, ces histogrammes vont de mieux en mieux approcher, respectivement par au-dessus et par en dessous, l'aire algébrique comprise entre l'axe des abscisses et $\mathcal{C}_f$. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ sera alors définie comme la limite commune de $S_n(f)$ et $s_n(f)$ lorque n tend vers $+\infty$. Tout cela est rendu rigoureux par les propriétés suivantes.

Lemme 8.6 *Soient $a<b$ deux réels et $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on considère $s_n(f)$ et $S_n(f)$, les sommes de Darboux inférieures et supérieures de f. On a alors :*

i) Pour tous k, l dans $\mathbb{N}^*$, $\quad s_l(f) \ \leq \ s_{kl}(f) \ \leq \ S_{kl}(f) \ \leq \ S_k(f)$,

ii) $S_n(f) - s_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Preuve.

i) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $l \in \mathbb{N}^*$. Montrons d'abord $s_l(f) \leq s_{kl}(f)$. Pour cela, considérons la subdivison régulière en l intervalles de $[a, b]$, $(a_{i,l})_{i\in\{0,\dots,l\}}$, et la subdivison régulière en kl intervalles de $[a, b]$, $(a_{j,kl})_{j\in\{0,\dots,kl\}}$. Les nombres $a_{i,l}$ et $a_{j,kl}$ sont respectivement définis par

$$a_{i,l} \ := \ a + i\frac{b-a}{l} \quad \text{et} \quad a_{j,kl} \ := \ a + j\frac{b-a}{kl} \ = \ a + \frac{j}{k}\frac{b-a}{l}$$

de sorte que pour chaque $i \in \{0, \dots, l-1\}$, $(a_{j,kl})_{j\in\{ki,\dots,k(i+1)\}}$ est une subdivision régulière de $[a_{i,l}, a_{i+1,l}]$ en k intervalles. En effet, subdiviser $[a, b]$ de façon régulière en kl intervalles consiste à le subdiviser l intervalles puis à subdiviser chaque intervalle obtenu en k intervalles ! Maintenant, pour chaque $i \in \{0, \dots, l-1\}$,

$$\frac{b-a}{kl}\sum_{j=ki}^{k(i+1)-1} \min_{\underbrace{[a_{j,kl},\, a_{j+1,kl}]}_{\subset[a_{i,l},a_{i+1,l}]}} f \ \geq \ \frac{b-a}{kl}\sum_{j=ki}^{k(i+1)-1} \min_{[a_{i,l},a_{i+1,l}]} f \ = \ \frac{b-a}{l}\min_{[a_{i,l},a_{i+1,l}]} f\,.$$

En sommant les inégalités précédentes pour i allant de 0 à $l-1$, on obtient $s_{kl}(f) \geq s_l(f)$. La preuve de $S_{kl}(f) \leq S_l(f)$ est analogue, en remplaçant les min par des max. Enfin,

$$S_{kl}(f) - s_{kl}(f) \ = \ \frac{b-a}{kl}\sum_{i=0}^{kl-1} \underbrace{\Big(\max_{[a_{i,l},a_{i+1,l}]} f - \min_{[a_{i,l},a_{i+1,l}]} f\Big)}_{\geq 0} \geq 0\,.$$

ii) **Démonstration dans le cas $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ uniquement :** On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
0 \ \leq \ S_n(f) - s_n(f) \quad &= \quad \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\Big| \underbrace{\max_{[a_{i,n},a_{i+1,n}]} f}_{=f(D_{i,n}),\ D_{i,n}\in[a_{i,n},a_{i+1,n}]} \quad - \quad \underbrace{\min_{[a_{i,n},a_{i+1,n}]} f}_{=f(d_{i,n}),\ d_{i,n}\in[a_{i,n},a_{i+1,n}]} \Big| \\
&\underset{\text{TAF}}{=} \quad \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\big|D_{i,n}-d_{i,n}\big|}_{\leq\frac{b-a}{n}}\underbrace{\big|f'(c_{i,n})\big|}_{\leq\max_{[a,b]}|f'|} \quad \text{où } c_{i,n} \in]a_{i,n}, a_{i+1,n}[\\
&\leq \quad \frac{(b-a)^2}{n^2}\max_{[a,b]}|f'|\sum_{i=0}^{n-1} 1 \ = \ \frac{(b-a)^2}{n}\max_{[a,b]}|f'| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}$$

◇

Exemples et Remarques

1. La deuxième partie du lemme précédent a été démontrée sous l'hypothèse plus restrictive $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. La démonstration dans le cas $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ repose sur la notion de continuité uniforme que nous n'aborderons pas dans ce cours [5].
2. Le premier point du lemme nous permet par exemple de montrer que la suite $\big(s_{2^n}(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $\big(S_{2^n}(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, $l = 2^n$ et $k = 2$, on obtient

$$s_{2^n}(f) \ \leq \ s_{2.2^n}(f) \ = \ s_{2^{n+1}}(f) \quad \text{et} \quad S_{2^n.2}(f) \ = \ S_{2^{n+1}}(f) \ \leq \ S_{2^n}(f)\,.$$

Ceci est illustré à la figure suivante et sera utilisé dans la suite.

5. Le lecteur intéressé trouvera néanmoins dans l'appendice A la définition de cette notion ainsi qu'une démonstration du deuxième point du lemme 8.6 dans le cas général $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$.

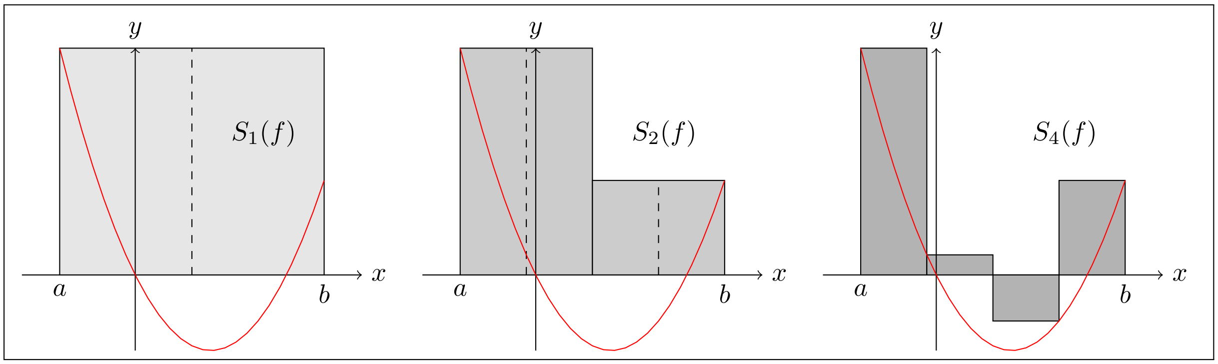


FIGURE 8.3 – La suite $\big(S_{2^n}(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

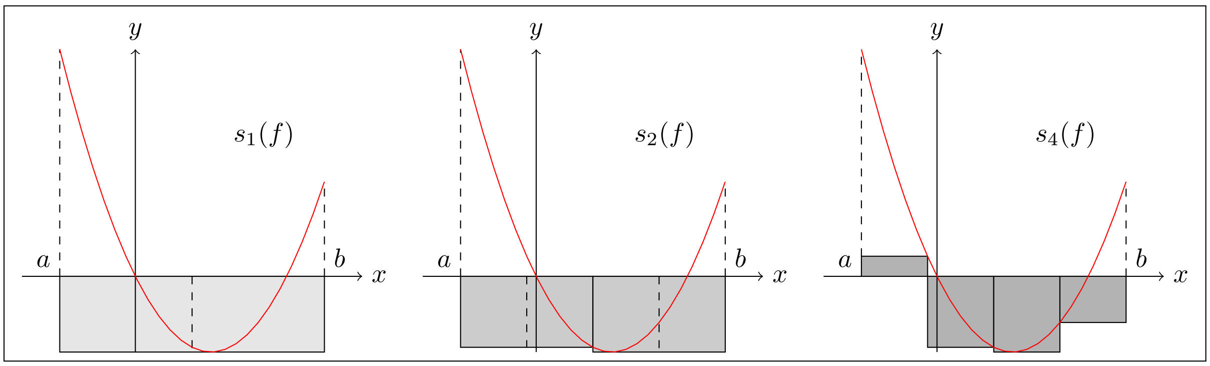


FIGURE 8.4 – La suite $\big(s_{2^n}(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Proposition 8.7 (Définition de l'intégrale d'une fonction continue)
Soient $a<b$ deux réels et $f\in\mathcal{C}^0([a,b])$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ donné, soient $s_n(f)$ et $S_n(f)$ les sommes de Darboux inférieures et supérieures de f. Alors :

i) Il existe $\ell\in\mathbb{R}$ tel que $s_n(f)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell$ et $S_n(f)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell$. De plus, on a :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*\ ,\quad s_n(f)\ \le\ \ell\ \le\ S_n(f)\,.$$

ii) — On définit $\int_a^b f(t)\,dt$ comme étant cette limite ℓ commune à $s_n(f)$ et $S_n(f)$. On a ainsi

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*\,,\quad s_n(f)\ \underset{n\to+\infty}{\overset{\le}{\longrightarrow}}\ \int_a^b f(t)\,dt:=\ell\ \underset{n\to+\infty}{\overset{\le}{\longleftarrow}}\ S_n(f)\,.$$

— On convient aussi que par définition :

$$\int_a^a f(t)\,dt:=0\quad\textit{(i.e. l'aire d'un rectangle plat est nulle)}\quad\textit{et}\quad\int_b^a f(t)\,dt:=-\int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Exemples et Remarques

1. Le signe $\int$ est un « S » [6] déformé. La « variable » t qui apparaît dans la notation joue un rôle similaire à celui de la variable i dans une somme du type $\sum_{i=0}^{n-1}u_i$. En particulier, sa « portée » est confinée à l'« intérieur » du symbole $\int$. On peut changer son nom sans changer l'interprétation du symbole et elle n'a pas de sens à l'extérieur du symbole :

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(s)\,ds=\int_a^b f(\xi)\,d\xi\,.$$

6. Comme **S**omme

2. Si on veut être plus précis, on peut aussi noter
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{t=a}^{t=b} f(t)\,dt\,.$$
3. Attention, une notation telle que
$$\int_a^b f(a)\,da$$
est trop ambiguë pour être utilisable, le a du $f(a)\ da$ est « intérieur » à l'intégrale alors que le a dans $\int_a^b$ est censé avoir une valeur définie hors de l'intégrale.

Preuve. Il s'agit donc de montrer le point i), le point ii) étant la définition de l'intégrale. D'abord, montrons que les suites $\big(S_{2^n}(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(s_{2^n}(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On a déjà remarqué que $\big(s_{2^n}(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ était croissante et $\big(S_{2^n}(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Par ailleurs, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$: $s_{2^n}(f)\le S_{2^n}(f)$ d'après le point i) du lemme 8.6, et $S_{2^n}(f)-s_{2^n}(f)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le point ii) du même lemme, d'où la conclusion. Ces deux suites ont donc une même limite $\ell\in\mathbb{R}$ et vérifient de plus $s_{2^n}(f)\le\ell\le S_{2^n}(f)$ pour tout n.

Pour conclure, il suffit donc de montrer que l'on a $s_n(f)\le\ell\le S_n(f)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et que $s_n(f)$ et $S_n(f)$ tendent vers ℓ. Or, toujours d'après le point i) du lemme 8.6, on a
$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*\,,\ \forall\, k\in\mathbb{N}^*,\quad s_{2^k}(f)\ \le\ S_n(f)\quad \text{donc à la limite } k\to+\infty :\ \ell\ \le\ S_n(f)\,. \tag{8.1}$$
On a donc
$$\ell\le S_n(f)\ =\ S_n(f)\,-\,s_n(f)\,+\,s_n(f)\ \le\ S_n(f)\,-\,s_n(f)\,+\,S_{2^n}(f) \tag{8.2}$$
avec $\underbrace{S_n(f)\,-\,s_n(f)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}+\,S_{2^n}(f)\ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ \ell$, et le théorème des gendarmes implique $S_n(f)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell$.

Or, on sait que la suite $(S_n(f)-s_n(f))$ tend vers 0 (point ii) du lemme 8.6). Par conséquent, puisque la suite $(S_n(f))$ converge vers ℓ, la suite $(s_n(f))$ converge aussi vers ℓ. Enfin, de l'inégalité $s_n(f)\le S_k(f)$ vraie pour tous $n,k\in\mathbb{N}^*$ on déduit que $s_n(f)\le\ell$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ (en prenant la limite lorsque $k\to+\infty$).

$\diamond$

8.2.2 Propriétés fondamentales de l'intégrale de Riemann

Théorème 8.8 (Sommes de Riemann) *Soient $a\le b$, $f\in\mathcal{C}^0([a,b])$, $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $(a_{i,n}:=a+i\frac{b-a}{n})_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ la subdivision régulière de $[a,b]$ en n intervalles. Pour chaque $i\in\{0,\ldots,n-1\}$, soit $c_{i,n}$ un réel quelconque dans l'intervalle $[a_{i,n},a_{i+1,n}]$. On a alors :*
$$\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1,n}-a_{i,n})f(c_{i,n})\ =\ \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(c_{i,n})\ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ \int_a^b f(t)\,dt\,.$$
La somme précédente est appelée somme de Riemann associée à f et à la subdivision régulière $(a_{i,n})_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ de $[a,b]$ pointée en $(c_{i,n})_{i\in\{0,\ldots,n-1\}}$.
En choisissant respectivement $c_{i,n}:=a_{i,n}=a+i\frac{b-a}{n}$ et $c_{i,n}:=a_{i,n}=a+(i+1)\frac{b-a}{n}$, on obtient :
$$S_n^g\ :=\ \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(a+i\frac{b-a}{n})\ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ \int_a^b f(t)\,dt\quad \textit{et}\quad S_n^d\ :=\ \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a+i\frac{b-a}{n})\ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ \int_a^b f(t)\,dt\,.$$
La somme S_n^g (resp. S_n^d) est appelée somme de Riemann d'ordre n à gauche (resp. à droite) associée à la fonction f.

Exemples et Remarques

1. La preuve découle directement de ce qui précède et du théorème des gendarmes. En effet, si l'on choisit les $c_{i,n}$ de telle sorte que $f(c_{i,n}) = \max\limits_{[a_{i,n}, a_{i+1,n}]} f$ (le TVI assure que c'est possible), la somme de Riemann associée n'est autre que $S_n(f)$ et si l'on choisit les $c_{i,n}$ de sorte que $f(c_{i,n}) = \min\limits_{[a_{i,n}, a_{i+1,n}]} f$, on obtient $s_n(f)$. Ainsi, toute somme de Riemann associée à f et à la subdivision régulière $(a_{i,n})_{i \in \{0,\dots,n\}}$ de $[a, b]$ est comprise entre $s_n(f)$ et $S_n(f)$!
2. Si f est la fonction constante égale à c sur $[a, b]$, alors on a
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \,, \quad S_n^g(f) = S_n^d(f) = S_n(f) = s_n(f) = (b-a)c \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (b-a)c \;=\; \int_a^b c\, dt$$
et l'on retrouve bien l'aire du rectangle !
3. Si $[a, b] = [0, 1]$ et $f(x) = x$, vérifions que $\int_0^1 x\, dx$ est bien l'aire du triangle isocèle rectangle de côté 1, à savoir $\frac{1}{2}\cdot$ Par ce qui précède, on a par exemple $\int_0^1 x\, dx = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n^g(f)$, or
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \,, \quad S_n^g(f) \;=\; \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \;=\; \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} 1 \;=\; \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\cdot$$

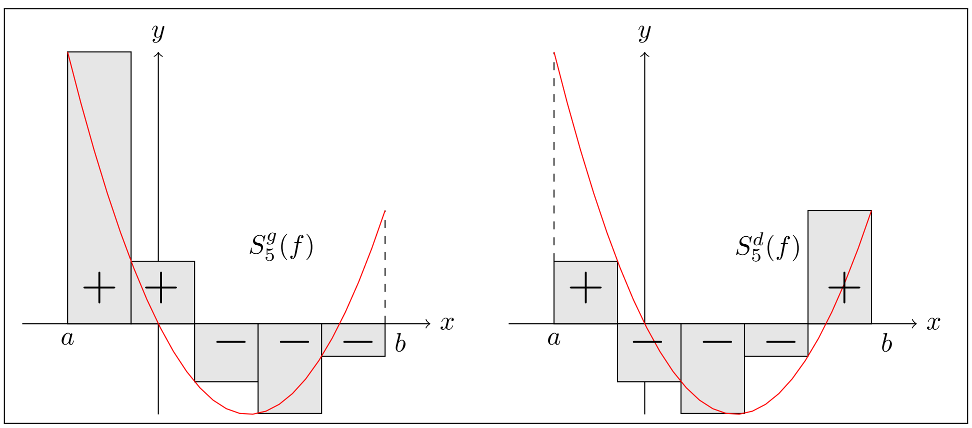


FIGURE 8.5 – L'aire grisée vaut $S_5^g(f)$ sur la figure de gauche et $S_5^d(f)$ sur celle de droite.

Proposition 8.9 (Relation de Chasles) *Soient I un intervalle, $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $a, b, c \in I$. On a*
$$\int_a^b f(t) dt \;+\; \int_b^c f(t)\, dt \;=\; \int_a^c f(t)\, dt\,.$$

Preuve. Démontrons le résultat dans le cas $a \leq b \leq c$. Le cas général en découle en utilisant la relation $\int_x^y f(t)\, dt = -\int_y^x f(t)\, dt$. Le lecteur pourra traiter cela en exercice. Par comparaison d'histogrammes, on remarque d'abord qu'on a
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \,, \quad s_n^{[a,b]}(f) \;+\; s_n^{[b,c]}(f) \;\leq\; S_n^{[a,c]}(f).$$
En prenant la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient $\int_a^b f(t)\, dt + \int_b^c f(t)\, dt \leq \int_a^c f(t)\, dt$. Mais, par comparaison d'histogrammes, on a aussi
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \,, \quad s_n^{[a,c]}(f) \;\leq\; S_n^{[a,b]}(f) \;+\; S_n^{[b,c]}(f)\,,$$
et, par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient l'inégalité inverse $\int_a^c f(t)\, dt \leq \int_a^b f(t)\, dt + \int_b^c f(t)\, dt$ ◇

Proposition 8.10 (Linéarité) *Soient I un intervalle, $f, g \in \mathcal{C}^0(I)$ et $a, b \in I$. On a*

$$\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\ ,\quad \int_a^b (\lambda f+\mu g)(t)\,dt \;=\; \lambda\int_a^b f(t)\,dt \,+\, \mu\int_a^b g(t)\,dt\,.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que pour tous $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$, les sommes de Riemann à droite associées à f, g et $\lambda f+\mu g$ vérifient

$$S_n^d(\lambda f+\mu g) \;=\; \lambda S_n^d(f) \,+\, \mu S_n^d(g)$$

et de faire tendre n vers $+\infty$ dans cette égalité. $\diamond$

Proposition 8.11 (Positivité, croissance et inégalité triangulaire)
Soient $a\le b$ et $f\in\mathcal{C}^0([a,b])$. On a :

i) *Si $f\ge 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt\ge 0$* **(positivité)**.

ii) *Si $f\ge 0$ et $a<b$, alors $\int_a^b f(t)\,dt=0$ implique que f est identiquement nulle sur $[a,b]$.*

Ceci équivaut à :

$$\textit{Si } a<b\,,\ f\ge 0 \textit{ et } f\ne 0_{[a,b]}\ ,\quad \textit{alors}\quad \int_a^b f(t)\,dt \;>\; 0 \quad \textbf{(stricte positivité)}.$$

iii) *Si $g\in\mathcal{C}^0([a,b])$ et $f\le g$, alors $\int_a^b f(t)dt\le\int_a^b g(t)\,dt$* **(croissance)**.

En particulier, si m et M sont des réels tels que $m\le f(t)\le M$ sur $[a,b]$, alors on a

$$m(b-a)\le\int_a^b f(t)\,dt\le M(b-a).$$

iv) $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|\le\int_a^b |f(t)|\;dt$ **(inégalité triangulaire)**.

Preuve.

i) Si $f\ge 0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $s_n(f)\ge 0$ et on en déduit $\int_a^b f(t)\,dt\ge 0$ en faisant tendre n vers $+\infty$,

iii) Si $f\le g$, alors $g-f\ge 0$ et donc $\int_a^b (g-f)(t)\,dt\ge 0$. Par linéarité, il vient $\int_a^b g(t)\,dt\ge\int_a^b f(t)\,dt\ge 0$. Le cas particulier en découle car, pour $c\in\mathbb{R}$, on a $\int_a^b c\,dt=c(b-a)$.

ii) Supposons $f\ge 0$ et $f\ne 0_{[a,b]}$. Il existe donc $c\in]a,b[$ tel que $f(c)>0$ (sinon on aurait $f(t)=0$ sur $]a,b[$ et donc aussi sur $[a,b]$ par continuité de f). Mais alors, encore par continuité de f, il existe $h>0$ tel que $[c-h,c+h]\subset[a,b]$ et $f(x)\ge\frac{f(c)}{2}$ sur $[c-h,c+h]$. En utilisant la relation de Chasles, la positivité de f sur $[a,b]$ et le résultat du point *iii)* déjà démontré, on obtient :

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \underbrace{\int_a^{c-h} f(t)\,dt}_{\ge 0} + \int_{c-h}^{c+h} f(t)\,dt + \underbrace{\int_{c+h}^b f(t)\,dt}_{\ge 0} \;\ge\; \int_{c-h}^{c+h}\frac{f(c)}{2}\,dt \;=\; hf(c)>0\,.$$

iv) Du point *iii)* et de l'encadrement $-|f|\le f\le|f|$ on déduit les inégalités :

$$-\int_a^b |f(t)|\,dt \;\le\; \int_a^b f(t)\,dt \;\le\; \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Le point *iv)* en dédoule immédiatement puisque $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|=\pm\int_a^b f(t)\,dt\,$.

$\diamond$

Théorème 8.12 (Théorème fondamental de l'analyse)

i) Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I)$. Alors, quel que soit $a \in I$, la fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)\,dt \end{array} \right.$$

est une primitive de f sur I.

ii) Si G est une primitive de f sur I, on a

$$\int_a^x f(t)\,dt \;=\; G(x) \,-\, G(a) \underset{déf}{=:} [G(t)]_a^x \,.$$

Corollaire 8.13 *Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.*

Exemples et Remarques

1. Le crochet $[G(t)]_a^b$ introduit dans le théorème vaut par définition $G(b) - G(a)$. Dans cette notation, la variable t est muette, i.e n'a des sens qu'à l'intérieur du crochet. Pour être plus précis, on devrait en fait noter $[G(t)]_{t=a}^{t=b}$.
2. D'après le point $ii)$ du théorème, si f est continue sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.
3. On sait déjà que si une fonction f admet des primitives sur un intervalle I et si a est un point de I, alors une et une seule de ces primitives s'annule en a. Le point $i)$ du théorème nous indique donc plus précisément que si $f \in \mathcal{C}^0(I)$, alors f admet des primitives sur I et que sa primitive qui s'annule en a est la fonction $F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.
4. Le corollaire 8.13 est une conséquence immédiate de ce qui précède.
5. Les primitives des fonctions continues sont de classe $\mathcal{C}^1$ puisque leurs dérivées sont continues.

Preuve. $i)$ Il faut montrer que $F' = f$, autrement dit il faut montrer que

$$\forall\, x \,\in\, I\,, \quad \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \underset{h \to 0\,,\, h \neq 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Considérons donc $x \in I$. Pour simplifier, on supposera que x est un point intérieur à I. Il existe donc $h_0 > 0$ tel que $[x - h_0, x + h_0] \subset I$ i.e. tel que $x + h$ appartient à I pour tout h de valeur absolue inférieure à h_0. En revenant à la définition d'une limite, ce qu'il faut démontrer s'écrit :

$$\forall\, \varepsilon \,>\, 0\,,\; \exists\, h_1 \,\in\,]0, h_0] \quad \text{tel que} \quad \left(\forall\, h \,\in\, [-h_1, h_1] \setminus \{0\}, \quad \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \,<\, \varepsilon \right).$$

Le cas où x est une extrémité de I se démontre de façon similaire en ne considérant que des voisinages à gauche de x dans le cas où x est l'extrémité droite de I (resp. des voisinages à droite de x dans le cas où x est l'extrémité gauche de I).

Pour h tel que $0 < |h| \leq h_0$, les nombres $F(x)$ et $F(x + h)$ sont définis et la relation de Chasles implique $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$. Par ailleurs, la fonction $t \mapsto f(x)$ étant constante on a $f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)\,dt$. A partir de ces deux relations on obtient aisément :

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \;=\; \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,dt \right|.$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue en x, il existe $h_1 \in]0, h_0]$ tel que l'on ait $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout t dans l'intervalle $[x - h_1, x + h_1]$. Ainsi, pour tout h non nul dans $[-h_1, h_1]$ on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &= \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}\big(f(t)-f(x)\big)\,dt\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{\min(x,x+h)}^{\max(x,x+h)}\big(f(t)-f(x)\big)\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\int_{\min(x,x+h)}^{\max(x,x+h)} \underbrace{|f(t)-f(x)|}_{<\varepsilon \quad \text{car } |t-x|\leq h_1}\,dt \leq \frac{1}{|h|}\,|h|\varepsilon = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

ii) Soit G une primitive de f sur I. D'après la proposition 8.2, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + c$, où F est la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$. On a donc

$$\forall\, x \in I\,, \quad G(x) - G(a) = \big(F(x)+c\big) - \big(F(a)+c\big) \underset{\text{car } F(a)=0}{=} F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

◇

8.2.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

L'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ correspond donc à l'idée que nous nous faisons de l'aire algébrique comprise entre le graphe de f et l'axe des abscisses. Par ailleurs, la traduction de la règle de Chasles en termes d'aires est que l'aire (algébrique) de l'union de deux formes géométriques dont l'intersection est un segment (i.e. un trait) est égale à la somme des aires (algébrique) de chacune de ces formes géométriques.

Dans le cas où f est une fonction continue par morceaux[7] sur le segment $[a, b]$, les remarques précédentes nous conduisent à définir

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\,dt$$

où $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ est une **subdivision de** $[a, b]$ **associée à** f et où $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\,dt$ doit s'interpréter comme l'intégrale de t_k à t_{k+1} de la fonction f_k définie et continue sur $[t_k, t_{k+1}]$ qui est égale à f sur $]t_k, t_{k+1}[$ et dont les valeurs aux bornes sont $f_k(t_k) = \lim_{t\to t_k^+} f(t)$ et $f_k(t_{k+1}) = \lim_{t\to t_{k+1}^-} f(t)$.

La règle de Chasles montre que si f est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$, la valeur de $\int_a^b f(t)\,dt$ **ne dépend pas** de la subdivision associée choisie pour effectuer le calcul[8].

Pour le calcul effectif de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on décompose l'intervalle en sous-intervalles sur lesquels f est continue, on calcule l'intégrale de f sur chacun de ces sous-intervalles et on additionne les valeurs de ces intégrales.

Les propositions 8.9, 8.10, ainsi que les points *i)*, *iii)* et *iv)* de la proposition 8.11 concernant la positivité et la croissance de l'intégrale et l'inégalité triangulaire s'étendent au cas de fonctions f, g continues par morceaux. Le point *ii)* de la proposition 8.11 concernant la stricte positivité **ne s'étend pas** à ce type de fonctions. À la place, on a :

7. Par définition, cela signifie qu'il existe des points $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tels que f est continue sur chacun des intervalles $]t_k, t_{k+1}[$ pour k variant de 0 à $n-1$, et que f admet une limite finie à droite en a, une limite finie à gauche en b et des limites finies à gauche et à droite en chacun des points $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Une telle subdivision de $[a, b]$ est appelée **subdivision de** $[a, b]$ **associée à** f.

8. Remarquons que des subdivisions associées à f peuvent ne pas être « économiques ». En effet, on n'impose pas que les points t_k d'une telle subdivision soient tous des points de discontinuité de f. Par contre, tous les points de discontinuité de f figurent nécessairement parmi les points des subdivisions associées à f.

Proposition 8.14 *Si $a < b$ et si f est une fonction continue par morceaux ≥ 0 sur $[a,b]$ qui vérifie*

$$\int_a^b f(t)\,dt = 0\,,$$

alors f est nulle sur $[a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points [9].

Le théorème 8.8 concernant les sommes de Riemann reste vrai pour les fonctions continues par morceaux. Sa preuve est cependant plus compliquée dans ce cas [10].

8.3 Techniques de calcul

Dans cette partie, nous présentons des techniques visant à calculer, ou tout au moins à simplifier, certaines expressions intégrales. Rappelons que dans cette introduction élémentaire, les fonctions à intégrer (qu'on appelle les **intégrandes**), sont au moins continues sur l'intervalle d'intégration.

8.3.1 Intégration par parties

Théorème 8.15 *Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$ alors on a*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g'(t)\,dt &= (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt \\ &= [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Exemples et Remarques

1. La preuve de ce théorème repose sur la remarque suivante : puisque la fonction $H := fg$ a pour dérivée $H' = f'g + fg'$, la fonction H est donc une primitive de la fonction continue $f'g + fg'$. En conséquence, on a

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt + \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt = [H(t)]_{t=a}^{t=b} = f(b)g(b) - f(a)g(a)\,.$$

2. Le but d'une intégration par parties est, la plupart du temps, de tomber sur une expression plus simple à évaluer que celle de départ. Par exemple, pour calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx,$$

on a le choix entre :

(a) poser $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$ et donc $f'(x) = 1$, $g(x) = \sin x$,

(b) poser $f(x) = \cos x$, $g'(x) = x$ et donc $f'(x) = -\sin x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$,

Le choix (a) mène à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

alors que le choix (b) mène à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}x^2\sin x\,dx\,.$$

9. ces points sont les points de discontinuité de f

10. Il faut enfermer les points de discontinuité de f dans des intervalles de longueur arbitrairement petite. Le complémentaire de ces intervalles est une réunion d'intervalles sur lesquels f est continue. Le traitement des intervalles qui renferment les points de discontinuité utilise le fait que f est globalement bornée.

Dans le premier cas, les choses tendent à se simplifier alors que dans le second, elles ont tendance à se compliquer ! En poursuivant avec le choix (a), on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \, .$$

3. Il n'y a pas de formule générale pour l'intégrale d'un produit : la formule d'intégration par parties permet dans certains cas de la calculer.

8.3.2 Changement de variables

Théorème 8.16 *Soit* $\mathbf{u}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'intervalle* $[a,b]$ *(ou* $[b,a]$*), prenant ses valeurs dans un intervalle* I*. Si* f *est une fonction continue sur* I*, alors*[11]

$$\int_a^b f(\mathbf{u}(x))\mathbf{u}'(x) \, dx \quad = \quad \int_{\mathbf{u}(a)}^{\mathbf{u}(b)} f(u) \, du.$$

Exemples et Remarques

1. La preuve de ce théorème repose sur la formule de la dérivée d'une fonction composée : si F est une primitive de f sur l'intervalle I, alors $H := F \circ \mathbf{u}$ est une primitive de la fonction continue $f \circ \mathbf{u} \, . \, \mathbf{u}'$ sur l'intervalle $[a,b]$ (ou $[b,a]$) et donc

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} f(\mathbf{u}(x)) \, \mathbf{u}'(x) \, dx \quad &= \quad [H(x)]_{x=a}^{x=b} \\ &= \quad F(\mathbf{u}(b)) - F(\mathbf{u}(a)) = [F(u)]_{u=\mathbf{u}(a)}^{u=\mathbf{u}(b)} \\ &= \quad \int_{u=\mathbf{u}(a)}^{u=\mathbf{u}(b)} f(u) \, du \, . \end{aligned}$$

2. Considérons le calcul de

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{3e^x+1} \, dx \qquad \text{c'est-à-dire} \quad I = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{3e^x+1} \, e^x \, dx = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{3e^x+1} (e^x)' \, dx \, .$$

Posons $u = \mathbf{u}(x) = e^x$, comme « nouvelle variable ». On a alors, au niveau symbolique tout au moins,

(a) $du = \mathbf{u}'(x) \; dx = e^x \; dx$

(b) lorsque $x = 0$, alors $u = \mathbf{u}(x) = 1$,

(c) lorsque $x = 1$, alors $u = \mathbf{u}(x) = e$,

et donc

$$I = \int_{\mathbf{u}(0)}^{\mathbf{u}(1)} \frac{1}{3u+1} \, du = \int_{u=1}^{u=e} \frac{1}{3u+1} \, du = \left[\frac{1}{3} \ln(3u+1) \right]_{u=1}^{u=e} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{3e+1}{4} \right) \, .$$

3. **Exercice résolu en cours.** Calculer l'aire d'un $\frac{1}{2}$-cercle et déterminer une primitive de $\sqrt{1-x^2}$.
L'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et l'axe des abscisses est un

11. Le lecteur pointilleux aura l'impression que nous dérogeons à notre règle de ne pas utiliser comme symbole de variable muette dans une intégrale (ou un crochet) une lettre désignant déjà un autre objet : en fait ce n'est pas le cas, car la fonction $\mathbf{u}$ en lettres grasses (dans l'intégrale en dx ou les bornes de l'intégrale en du) est à distinguer de la variable muette u (à l'intérieur de cette intégrale en du).

demi-disque de rayon 1. Si l'aire d'un disque de rayon R est bien πR^2 comme on l'a appris, nous devrions donc trouver

$$I := \int_{-1}^{1} f(u)\,du = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du = \frac{\pi}{2}\,\cdot$$

Vérifions-le en calculant l'intégrale I par un changement de variable. L'idée est de poser $u = \mathbf{u}(x) = \cos x$ et d'utiliser le théorème précédent. Pour cela, il suffit de remarquer que

$$I := \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du = \int_{u=\cos\pi}^{u=\cos 0} \sqrt{1-u^2}\,du = \int_{u=\mathbf{u}(\pi)}^{u=\mathbf{u}(0)} \sqrt{1-u^2}\,du$$

avec :

(a) $x \mapsto \mathbf{u}(x) = \cos x \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ et $du = \mathbf{u}'(x)\,dx = \cos' x\,dx = -\sin x\,dx$,

(b) lorsque $x = 0$, alors $u = \cos 0 = 1$,

(c) lorsque $x = \pi$, alors $u = \cos\pi = -1$.

On a donc

$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du = \int_{\cos\pi}^{\cos 0} \sqrt{1-u^2}\,du \quad &= \quad \int_{\pi}^{0} \underbrace{\sqrt{1-\cos^2 x}}_{=\sqrt{\sin^2 x}}\,(-\sin x)\,dx \\ &\underset{\substack{\sin u \geq 0 \\ \text{sur } [0,\pi]}}{=} \quad -\int_{\pi}^{0} \sin^2 x\,dx = \int_{0}^{\pi} \sin^2 x\,dx\,. \end{aligned}$$

Il reste à calculer la dernière intégrale, ce que l'on fait en **linéarisant** $\sin^2 x$: on a

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

et donc une primitive de $\sin^2 x$ est donnée par $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$. On en déduit

$$I = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\,\cdot$$

Déterminons maintenant une primitive F de $\sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,+1]$. Une telle fonction est donnée pour $x \in [-1,1]$ par

$$F(x) = \int_{1}^{x} \sqrt{1-u^2}\,du = \int_{\cos 0}^{\cos(\arccos x)} \sqrt{1-u^2}\,du\,.$$

On va effectuer le même changement de variable que précédemment, mais comme la variable x est déjà utilisée on va poser $u = \cos(t)$ avec $t \in [0, \arccos(x)] \subset [0,\pi]$. On a

(a) $t \mapsto u := \cos t \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ et $du = (-\sin t)\,dt$,

(b) lorsque $t = 0$, alors $u = 1$,

(c) lorsque $t = \arccos x \in [0,\pi]$, alors $u = \cos(\arccos x) = x$,

(d) $\sqrt{1-u^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = |\sin t| = \sin t$ car $t \in [0,\pi]$,

et donc

$$\begin{aligned} F(x) = \int_{1}^{x} \sqrt{1-u^2}\,du = -\int_{0}^{\arccos x} \sin^2 t\,dt \quad &= \quad -\frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\arccos x} \\ &= \quad \frac{1}{2}(-\arccos x + x\sqrt{1-x^2})\,, \end{aligned}$$

où, pour obtenir la dernière ligne, nous avons utilisé que $\sin 2t = 2\cos t \sin t$ et que $\sin(\arccos x) = |\sin(\arccos x)| = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$ (car $\arccos x \in [0,\pi]$).

On conseille au lecteur de relire le début du chapitre 7 avant de lire le paragraphe qui suit. Dans les exemples précédents, on a utilisé le théorème 8.16 avec un changement de variable du type $\mathbf{u}(x) = u$, soit en partant de l'expression $\int_{\mathbf{u}(a)}^{\mathbf{u}(b)} f(u)\,du$ (comme dans l'exemple 3), soit en partant de l'expression $\int_a^b f(\mathbf{u}(x))\,\mathbf{u}'(x)\,dx$ (comme dans l'exemple 2). Dans ce dernier cas, le changement de variable était particulièrement facile puisque l'on a reconnu la forme $f'(\mathbf{u}(x))\,\mathbf{u}'(x) = (f \circ \mathbf{u})'(x)$ mais il arrive parfois (en fait la plupart du temps) que l'on veuille mener un changement de variable du type $u = \mathbf{u}(x)$ dans une intégrale du type

$$\int_a^b f(\mathbf{u}(x))\,dx\,.$$

On peut alors « forcer » l'apparition du terme $\mathbf{u}'(x)$ en écrivant

$$\int_a^b f(\mathbf{u}(x))\,dx = \int_a^b f(\mathbf{u}(x))\,\mathbf{u}'(x)\,\frac{1}{\mathbf{u}'(x)}\,dx\,.$$

Pour que cela ait un sens, il faut bien sûr que $\mathbf{u}'(x)$ ne **s'annule pas sur l'intervalle** $[a,b]$. De plus, si c'est bien le cas, alors $\mathbf{u}$ **définit une bijection**[12] du segment $[a,b]$ sur le segment $\mathbf{u}([a,b])$[13]. De plus, comme $\mathbf{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\mathbf{u}'(x) \neq 0$ sur $[a,b]$, sa bijection réciproque $\mathbf{u}^{-1} : \mathbf{u}([a,b]) \to [a,b]$ est également de classe $\mathcal{C}^1$, d'après le théorème 7.4 sur la régularité des fonctions réciproques, et l'on déduit de $\mathbf{u}^{-1}(\mathbf{u}(x)) = x$ la relation $(\mathbf{u}^{-1})'(\mathbf{u}(x)) = \frac{1}{\mathbf{u}'(x)}$ pour $x \in [a,b]$. On a alors[14]

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\mathbf{u}(x))\,dx &= \int_a^b f(\mathbf{u}(x))\,.\,\mathbf{u}'(x)\,.\,(\mathbf{u}^{-1})'(\mathbf{u}(x))\,dx \\ &= \int_a^b \Big(f.(\mathbf{u}^{-1})'\Big)\Big(\mathbf{u}(x)\Big)\,.\,\mathbf{u}'(x)\,dx = \int_{\mathbf{u}(a)}^{\mathbf{u}(b)} \big(f.(\mathbf{u}^{-1})'\big)(u)\,du\,,\end{aligned}$$

la dernière égalité étant une conséquence du théorème 8.16 avec le changement de variable $u = \mathbf{u}(x)$ et la fonction $g = f.(\mathbf{u}^{-1})'$. Nous avons ainsi montré le

Théorème 8.17 *Soit $\mathbf{u}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, établissant une bijection de $[a,b]$ sur le segment $\mathbf{u}([a,b])$, de bijection réciproque $\mathbf{u}^{-1}$, elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{u}([a,b])$[15]. Si f est une fonction continue sur le segment $\mathbf{u}([a,b])$, on a*

$$\int_a^b f(\mathbf{u}(x))\,dx \quad = \quad \int_{\mathbf{u}(a)}^{\mathbf{u}(b)} f(u).(\mathbf{u}^{-1})'(u)\,du\,.$$

Remarque 8.18 *Le changement de variable $u = \mathbf{u}(x)$ (équivalent à $x = \mathbf{u}^{-1}(u)$) s'écrit au niveau symbolique :*

1. *$x = \mathbf{u}^{-1}(u)$ donc $dx = (\mathbf{u}^{-1})'(u)\ du$,*
2. *lorsque $x = a$, alors $u = \mathbf{u}(a)$,*
3. *lorsque $x = b$, alors $u = \mathbf{u}(b)$,*

et donc

$$\int_{x=a}^{x=b} f(\mathbf{u}(x))\,dx = \int_{u=\mathbf{u}(a)}^{u=\mathbf{u}(b)} f(u).(\mathbf{u}^{-1})'(u)\,du\,.$$

---

12. d'après le TVI, puisque $\mathbf{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc $\mathbf{u}'$ est continue et, ne s'annulant pas, ne change pas de signe
13. $\mathbf{u}([a,b]) = [\mathbf{u}(a), \mathbf{u}(b)]$ si $\mathbf{u}$ est strictement croissante et $[\mathbf{u}(b), \mathbf{u}(a)]$ sinon
14. pour éviter toute ambiguïté les produits sont signalés par des « . »
15. On dit que $\mathbf{u}$ établit un $\mathcal{C}^1$-**difféomorphisme du segment** $[a,b]$ **sur le segment** $\mathbf{u}([a,b])$, de difféomorphisme réciproque $\mathbf{u}^{-1}$. Notons au passage que l'on déduit alors de $\mathbf{u}^{-1}(\mathbf{u}(x)) = x$ que $(\mathbf{u}^{-1})'(\mathbf{u}(x)).\mathbf{u}'(x) = 1$ et donc que $\mathbf{u}'(x) \neq 0$ pour tout x, d'où la validité du raisonnement précédant le théorème.

Remarquons d'ailleurs que cette égalité n'est autre que l'énoncé du théorème 8.16 avec f remplacé par $f \circ \mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ remplacé par $\mathbf{u}^{-1}$ et a et b remplacés pas $\mathbf{u}(a)$ et $\mathbf{u}(b)$, puisque l'on obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{u}(a)}^{\mathbf{u}(b)} f(u)\,.\,(\mathbf{u}^{-1})'(u)\,du = \int_{\mathbf{u}(a)}^{\mathbf{u}(b)} (f\circ\mathbf{u})(\mathbf{u}^{-1}(u))\,.\,(\mathbf{u}^{-1})'(u)\,du \quad &\underset{x=\mathbf{u}^{-1}(u)}{=} \quad \int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathbf{u}(a))}^{\mathbf{u}^{-1}(\mathbf{u}(b))} (f\circ\mathbf{u})(x)\,dx \\ &= \quad \int_a^b f(\mathbf{u}(x))\,dx\,.\end{aligned}$$

Notons de plus que pour appliquer ici le théorème 8.16, on a besoin que $\mathbf{u}^{-1}$ existe et soit de classe $\mathcal{C}^1$, mais c'est bien le cas si $\mathbf{u}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme comme demandé dans le théorème 8.17.

8.3.3 Intégration des fractions rationnelles

Le but de ce paragraphe est de décrire une méthode permettant de calculer l'intégrale d'une fraction rationnelle ou une primitive d'une telle fonction sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition.

Cette technique est basée sur deux faits :

1. on peut décomposer toute fraction rationnelle en « éléments simples »
2. on dispose de techniques permettant d'intégrer ces éléments simples.

A titre d'exemple préparatoire, nous présentons cette méthode pour le calcul d'une primitive sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ de

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}\,\cdot$$

La fonction f est clairement continue sur l'intervalle I et l'on est donc assuré de l'existence d'une telle primitive. Nous cherchons ici à en obtenir une formule explicite. Pour $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\right) && (8.3)\\ &= \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\,. && (8.4)\end{aligned}$$

Une primitive de chacun des termes de cette somme étant connue, une primitive de f sur I est

$$F : x \mapsto \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x+1)\,\cdot$$

Décomposition en éléments simples

Le lecteur perplexe doit ici se demander d'où sort la décomposition (8.4) qui fait le travail demandé d'une façon aussi miraculeuse et s'il est possible de trouver de telles décompositions pour n'importe quelle fraction rationnelle. La réponse tient en le résultat suivant que nous admettons [16].

Définition 8.19 *Les* **éléments simples** *pour les fractions rationnelles à coefficients réels sont les fonctions de l'un des trois types suivants :*

1. *Les monômes, de la forme $S(x) = \lambda x^n$ où λ est un réel non nul, n un entier naturel. On prend la convention usuelle que x^0 est la fonction constante égale à 1.*
2. *Les éléments de première espèce de la forme $S(x) = \dfrac{\alpha}{(x+a)^n}$ où α est un réel non nul, a est un réel quelconque et n est un entier naturel > 0.*
3. *Les éléments de deuxième espèce de la forme $S(x) = \dfrac{\beta x + \gamma}{(x^2+bx+c)^n}$ où (β, γ) est un couple de réels distinct de $(0,0)$, b et c sont deux réels quelconques vérifiant $b^2 - 4c < 0$ et n est un entier naturel > 0.*

16. Il sera démontré dans le cours sur les polynômes et fractions rationnelles.

Nota : Si S_1 et S_2 sont deux éléments simples et si $S_1(x)$ et $S_2(x)$ sont égaux pour tout x dans l'intersection de leurs domaines de définition, alors S_1 et S_2 sont du même type et leurs nombres caractéristiques (λ, n pour les monômes, α, a, n pour les éléments de première espèce, β, γ, b, c, n pour ceux de seconde espèce) sont égaux, autrement dit, S_1 et S_2 sont identiques.

Théorème 8.20 (Décomposition en éléments simples) *Soit $f = \frac{N}{D}$ une fraction rationnelle avec N et D deux fonctions polynomiales, D n'étant pas identiquement nulle. Il existe alors un unique ensemble*[17] *d'éléments simples $\{S_k(x),\, k = 1, \ldots, K\}$ tel que*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} S_k(x)\,.$$

Exemples et Remarques

1. Dans l'exemple introductif, la famille des éléments simples associés à f comporte deux termes :
$$S_1(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \qquad \text{et} \qquad S_2(x) = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}\,.$$
S_1 est de première espèce avec $n = 1$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $a = 1$ et S_2 est de seconde espèce avec $n = 1$, $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$, $b = 0$ et $c = 1$. La partie unicité du théorème affirme que si l'on dispose d'un ensemble $\{\tilde{S}_k(x),\, k = 1, \ldots, \tilde{K}\}$ d'éléments simples tels que
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\tilde{K}} \tilde{S}_k(x)$$
pour tout x dans le domaine de f alors le nombre $\tilde{K}$ de ces éléments simples vaut 2, et, **quitte à les renuméroter**, on a
$$\tilde{S}_1(x) = S_1(x) \qquad \text{et} \qquad \tilde{S}_2(x) = S_2(x).$$

2. Pour mener à bien une décomposition d'une fraction $f = \frac{N}{D}$, on s'appuiera sur les précisions suivantes
   (a) Si le degré de N est inférieur au degré de D, il n'y aura aucun monôme dans la décomposition en éléments simples de f. On peut toujours se ramener à ce cas en effectuant une division euclidienne de N par D. Par exemple, si
   $$N(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 2 \quad \text{et} \quad D(x) = 1 + x + x^2 + x^3 = (x+1)(x^2+1),$$
   en effectuant la-dite division euclidienne, on obtient
   $$N(x) = (x-2)D(x) + x$$
   et donc
   $$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = x - 2 + \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}\,.$$
   Comme nous avons déjà effectué la décomposition en éléments simples de cette dernière fraction, nous obtenons sans nouveau calcul que la décomposition de f en éléments simples est
   $$f(x) = x - 2 + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}\,.$$

17. la section **Exemples et Remarques** ci-dessous précise cette liste d'éléments simples.

(b) Si le degré de N est strictement inférieur au degré de D et si D se factorise en [18]

$$D = P_1^{n_1} \dots P_K^{n_K}.Q_1^{m_1} \dots Q_L^{m_L}$$

où

i) les K polynômes P_k (tous distincts) sont de la forme

$$P_k(x) = x + a_k$$

avec $a_k \in \mathbb{R}$

ii) les L polynômes Q_ℓ (tous distincts) sont de la forme

$$Q_\ell(x) = x^2 + b_\ell x + c_\ell$$

avec b_ℓ et c_ℓ réels vérifiant $b_\ell^2 - 4c_\ell < 0$,

iii) les entiers naturels n_k, m_ℓ sont tous > 0.

Alors :

i. les éléments simples de première espèce de la décomposition de f sont de la forme

$$S_{1,k,n}(x) = \frac{\alpha_{k,n}}{P_k(x)^n}$$

pour des réels $\alpha_{k,n} \neq 0$ et certains exposants $n \in \{1, \dots, n_k\}$.
Il y a donc au plus $n_1 + n_2 + \cdots + n_K$ tels éléments simples.

ii. les éléments simples de seconde espèce de la décomposition de f sont de la forme

$$S_{2,\ell,m}(x) = \frac{\beta_{\ell,m}x + \gamma_{\ell,m}}{Q_\ell(x)^m}$$

pour des couples de réels $(\beta_{\ell,m}, \gamma_{\ell,m}) \neq (0,0)$ et certains exposants $m \in \{1, \dots, m_\ell\}$.
Il y a donc au plus $m_1 + m_2 + \cdots + m_\ell$ tels éléments simples.

3. Dans notre exemple introductif, on a $N(x) = x$ et $D(x) = \underbrace{(x+1)}_{P_1(x)^{n_1}}\underbrace{(x^2+1)}_{Q_1(x)^{m_1}}$ avec $n_1 = m_1 = 1$ donc la décomposition de f relève du point précédent. Nous savons donc *a priori* qu'il existe des réels α_1, β_1 et γ_1 tels que

$$f(x) = \frac{\alpha_1}{P_1(x)} + \frac{\beta_1 x + \gamma_1}{Q_1(x)}.$$

Il ne reste plus qu'à faire un travail d'identification [19] de ces coefficients pour nous permettre de retrouver la décomposition de l'introduction.

4. **Exercice résolu en cours.** Donner la forme de la décomposition en éléments simples de

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x(x+1)^3(1+x^2)^2}.$$

On a $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ avec $N(x) = x^2 + 3$ et $D(x) = x(x+1)^3(1+x^2)^2$. Cette décomposition relève du point 2.(b) et l'on peut dire qu'il existe des réels α_1, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{2,3}$, $\beta_{1,1}$, $\gamma_{1,1}$, $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$ tels que

$$f(x) = \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_{2,1}}{x+1} + \frac{\alpha_{2,2}}{(x+1)^2} + \frac{\alpha_{2,3}}{(x+1)^3} + \frac{\beta_{1,1}x + \gamma_{1,1}}{1+x^2} + \frac{\beta_{1,2}x + \gamma_{1,2}}{(1+x^2)^2}.$$

18. avec la convention usuelle que si l'entier K (resp. L) vaut 0, il n'y a aucun polynôme de type P (resp. Q) dans la factorisation de D.

19. Dans ce cas précis, en réduisant le membre de droite au même dénominateur et en identifiant les coefficients du numérateur, on obtient que $\alpha_1 + \gamma_1 = 0$, $\beta_1 + \gamma_1 = 1$ et $\alpha_1 + \beta_1 = 0$ d'où $\gamma_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}$ et $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$.

Il reste maintenant à identifier ces 8 coefficients. Si nous mettons au même dénominateur le membre de droite et identifions le numérateur (de degré ≤ 7) ainsi obtenu avec le numérateur du membre de gauche, nous obtenons un système de 8 équations linéaires à 8 inconnues.
On trouve

$$f(x) = \frac{3}{x} + \frac{-\frac{15}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{5}{2}}{(x+1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^3} + \frac{\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}}{1+x^2} + \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{(1+x^2)^2}.$$

5. Toute fraction rationnelle peut, au moins théoriquement, se mettre sous la forme traitée précédemment : il suffit pour cela de factoriser le dénominateur en utilisant la connaissance des racines réelles et complexes conjuguées de ce polynôme. Par exemple, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^4} &= \frac{1}{(x-e^{i\frac{\pi}{4}})(x-e^{i\frac{3\pi}{4}})(x-e^{i\frac{5\pi}{4}})(x-e^{i\frac{7\pi}{4}})} \\ &= \frac{1}{(x-e^{i\frac{\pi}{4}})(x-e^{i\frac{3\pi}{4}})(x-e^{-i\frac{3\pi}{4}})(x-e^{-i\frac{\pi}{4}})} \\ &= \frac{1}{(1+\sqrt{2}x+x^2)(1-\sqrt{2}x+x^2)}. \end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples de cette fraction est donc de la forme

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{\beta_1 x + \gamma_1}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{\beta_2 x + \gamma_2}{1-\sqrt{2}x+x^2}$$

et il y a quatre coefficients à trouver. Nous pouvons réduire le nombre de ces coefficients en remarquant que la fonction à gauche est paire et que l'on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^4} &= \frac{1}{1+(-x)^4} \\ &= \frac{-\beta_1 x + \gamma_1}{1-\sqrt{2}x+x^2} + \frac{-\beta_2 x + \gamma_2}{1+\sqrt{2}x+x^2} \end{aligned}$$

ce qui fait apparaître une « autre » décomposition de $\frac{1}{1+x^4}$ en éléments simples. Comme nous savons que la décomposition en éléments simples est unique, on en déduit que

$$\beta_2 = -\beta_1 \text{ et } \gamma_2 = \gamma_1$$

Nous n'avons donc plus que deux inconnues. Pour les déterminer, on utilise l'identité

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^4} &= \frac{\beta_1 x + \gamma_1}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{-\beta_1 x + \gamma_1}{1-\sqrt{2}x+x^2} \\ &= \frac{(\beta_1 x + \gamma_1)(1-\sqrt{2}x+x^2) + (-\beta_1 x + \gamma_1)(1+\sqrt{2}x+x^2)}{1+x^4} \\ &= \frac{\beta_1 x(-2\sqrt{2}x) + 2\gamma_1(1+x^2)}{1+x^4} \\ &= \frac{2(-\sqrt{2}\beta_1 + \gamma_1)x^2 + 2\gamma_1}{1+x^4}. \end{aligned}$$

On obtient $\gamma_1 = \frac{1}{2} = \gamma_2$, $\beta_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} = -\beta_2$ et finalement

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-x+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right).$$

Intégration des éléments simples

Monômes et éléments de première espèce Ces éléments ne posent pas de problèmes car nous savons que :

1. un monôme λx^n admet pour primitive le monôme $\frac{\lambda}{n+1}x^{n+1}$,
2. un élément de première espèce $S_1(x) = \frac{\alpha}{(x+a)^n}$ admet une primitive de la forme

$$\alpha \ln |x+a| \quad \text{si } n = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\alpha}{1-n}\frac{1}{(x+a)^{n-1}} \quad \text{si } n > 1 \ .$$

Éléments de deuxième espèce On peut aussi donner des formules pour les primitives des éléments de deuxième espèce mais il y a plus de calculs que dans le cas précédent.

1. D'abord, on peut démontrer [20] que pour calculer une primitive d'un élément simple du type

$$\frac{\beta x + \gamma}{(x^2+bx+c)^n}$$

avec $\Delta = b^2 - 4c < 0$, il suffit de savoir calculer des primitives de

$$S_{2,0,n} = \frac{1}{(1+x^2)^n} \qquad \text{et} \qquad S_{2,1,n} = \frac{x}{(1+x^2)^n} \ .$$

2. Une primitive de $S_{2,1,n} = \frac{x}{(1+x^2)^n}$ est donnée par l'une des formules

$$\frac{1}{2}\ln |x^2+1| \quad \text{si } n = 1 \qquad \text{ou} \qquad -\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \quad \text{si } n > 1 \ .$$

3. Maintenant, montrons que l'on peut toujours donner une formule élémentaire pour une primitive de $S_{2,0,n} = \frac{1}{(1+x^2)^n}$. Notons

$$\Sigma_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$$

la primitive de $S_{2,0,n}$ qui s'annule en 0.

20. Voici la justification de cette assertion : une primitive de $\frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^n}$ (cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant jamais) est

$$\int_0^x \frac{\beta u + \gamma}{(u^2+bu+c)^n}\,du \,.$$

D'après la relation

$$u^2+bu+c = \left(u+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4} = \frac{-\Delta}{4}\left(\left(\frac{2u+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right) \qquad \text{avec} \ \ \Delta = b^2-4ac < 0\,,$$

on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\beta u+\gamma}{(u^2+bu+c)^n}\,du \quad &= \quad \frac{1}{\left(\frac{-\Delta}{4}\right)^n}\int_0^x \frac{\beta.u+\gamma}{\left(\left(\frac{2u+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right)^n}\,du \\ &= \quad \frac{1}{\left(\frac{-\Delta}{4}\right)^n}\int_0^x \frac{\beta\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\left(\frac{2u+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+\gamma-\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}b}{\left(\left(\frac{2u+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right)^n}\,du \\ &\underset{t=\frac{2u+b}{\sqrt{-\Delta}}}{=} \quad \int_{\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}}^{\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}} \frac{\beta' t+\gamma'}{(1+t^2)^n}\,dt\,\cdot\end{aligned}$$

pour certaines constantes β' et γ' dont l'expression fait intervenir β, γ, b et $\sqrt{-\Delta}$. La continuation du calcul dépend alors de la connaissance de primitives de $\frac{1}{(1+t^2)^n}$ et $\frac{t}{(1+t^2)^n}$.

(a) Le cas $n = 1$ est bien connu, on a $\Sigma_1(x) = \arctan(x)$.

(b) Les cas $n > 1$ se calculent par récurrence sur n. On a

$$\begin{aligned}
\Sigma_n(x) &= \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt \\
&= \int_0^x \frac{1+t^2}{(1+t^2)^n}\,dt - \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^n}\,dt \qquad \text{(astuce !)} \\
&= \Sigma_{n-1}(x) - \int_0^x t\frac{t}{(1+t^2)^n}\,dt \\
&\overset{\text{IPP}}{=} \Sigma_{n-1}(x) + \left[t\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}\right]_0^x - \frac{1}{2(n-1)}\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}\,dt \\
&= \frac{2n-3}{2n-2}\Sigma_{n-1}(x) + \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\,.
\end{aligned}$$

4. Nous venons donc de montrer que l'on peut toujours donner une formule pour une primitive d'un élément simple de seconde espèce, quitte à faire des calculs d'une certaine complexité. Faire un de ces calculs à la main peut s'avérer difficile mais toutes les techniques présentées s'implément facilement en machine.

5. **Exercice résolu en cours.** Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de

$$\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt &= \int_0^x \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2}\,dt - \int_0^x t\frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt \\
&= \arctan x - \left(\left[-t.\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}\right]_{t=0}^{t=x} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}\,.
\end{aligned}$$

6. **Exercice résolu en cours.** Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de

$$\frac{1}{1+x^4}$$

et déterminer

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{dt}{1+t^4}\,.$$

Grâce à la décomposition en éléments simple que nous avons donnée de $\frac{1}{1+x^4}$, on voit qu'il suffit de calculer une primitive $S(x)$ de

$$\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,.$$

La dérivée du dénominateur est $2x+\sqrt{2}$, ce qui conduit à écrire

$$\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,.$$

Calculons

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt &= \int_0^x \frac{1}{(t+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\,dt \\
&= 2\int_0^x \frac{1}{(\sqrt{2}t+1)^2+1}\,dt \\
&\underset{u=\sqrt{2}t+1}{=} \sqrt{2}\int_1^{\sqrt{2}x+1} \frac{1}{u^2+1}\,du \\
&= \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)-\sqrt{2}\arctan(1)\,.
\end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ est donc

$$S(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x+1)\,.$$

De plus, si F est une primitive d'une fonction f, alors $(-F(-x))'=f(-x)$, donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$ est donnée par

$$\tilde{S}(x)=-S(-x)=-\frac{1}{2}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)-\arctan(-\sqrt{2}x+1)\,.$$

Finalement, une primitive de $\dfrac{1}{1+x^4}$ est donnée par $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(S(x)+\tilde{S}(x))$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\left(\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)-\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)\right)+\arctan(\sqrt{2}x+1)-\arctan(-\sqrt{2}x+1)\right).$$

On a donc

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}}+\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)\right)\,.$$

Lorsque $x\to+\infty$, les termes de la parenthèse ci-dessus tendent respectivement vers 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ donc

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{dt}{1+t^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

8.3.4 Intégration des polynômes et fractions rationnelles en $\cos$ et $\sin$

Polynômes en $\cos$ et $\sin$

Un polynôme en cos et sin (ou polynôme trigonométrique) est une fonction de la forme

$$f(x)=\sum_{k,\ell\geq 0} a_{k,\ell}\cos^k x\sin^\ell x \qquad \text{(somme finie).}$$

Notre but est de décrire plusieurs techniques permettant de calculer une intégrale (ou bien une primitive) d'une telle fonction. On voit immédiatement par linéarité qu'il suffit de savoir calculer l'intégrale d'une fonction du type $\cos^k x\sin^\ell x$. Plusieurs techniques s'offrent à nous et on peut évidemment les combiner :

1. la linéarisation d'une expression trigonométrique,
2. des changements de variables,
3. des intégrations par parties astucieuses.

Linéarisation [21]

Le principe de la linéarisation d'un polynôme trigonométrique est basé sur le fait suivant : étant donnée une expression du type $\cos^k x \sin^\ell x$ avec $k, \ell \geq 0$, on peut la transformer en une combinaison linéaire de fonctions du type $\cos \lambda x$ et $\sin \mu x$ avec $0 \leq \lambda, \mu \leq k + \ell$ [22]. Il est alors facile de déterminer une primitive d'une telle fonction [23].

Les outils de base pour effectuer cette transformation sont les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton. Ceci amène à travailler avec des nombres complexes. Les formules d'Euler sont :

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \qquad \text{et} \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \cdot$$

Utilisons-les pour retrouver les formules de l'angle double pour cos et sin. On a

$$\cos^2 x = \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{i2x} + e^{-i2x} + 2e^{ix}e^{-ix}\right) = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} \cdot$$

Une primitive de $\cos^2 x$ est donc $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x$.
De même,

$$\sin^2 x = \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{i2x} + e^{-i2x} - 2\right) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} \cdot$$

Une primitive de $\sin^2 x$ est donc $-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x$.

Exercice résolu en cours. Linéariser $\cos^3 x \sin^2 x$ et en donner une primitive.
On a

$$\begin{aligned}
\cos^3 x \sin^2 x &= -\frac{1}{32}(e^{ix} + e^{-ix})^3\,(e^{ix} - e^{-ix})^2 \\
&= -\frac{1}{32}(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x})(e^{i2x} + e^{-i2x} - 2) \\
&= -\frac{1}{32}\Big((e^{i5x} + 3e^{i3x} + 3e^{ix} + e^{-ix}) + (e^{ix} + 3e^{-ix} + 3e^{-i3x} + e^{-i5x}) \\
&\qquad -2(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x})\Big) \\
&= -\frac{1}{16}\left(\cos 5x + \cos 3x - 2\cos x\right).
\end{aligned}$$

Une primitive en est donc

$$-\frac{1}{80}\sin 5x - \frac{1}{48}\sin 3x + \frac{1}{8}\sin x.$$

Mais on pouvait aussi écrire

$$\begin{aligned}
\cos^3 x \sin^2 x &= \cos x\,(\sin x \cos x)^2 = \cos x \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\cos x\,\sin^2 2x \\
&= \frac{1}{4}\cos x . \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) = \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{8}\cos x \cos 4x \\
&= \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{16}(\cos 5x + \cos 3x)
\end{aligned}$$

en utilisant la formule $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$ avec $a = 4x$ et $b = x$.

---

21. C.f. le chapitre du second semestre portant sur les nombres complexes.
22. Ce procédé est une illustration élémentaire du fait bien connu en physique qu'une fonction 2π-périodique s'exprime comme combinaison linéaire de fonctions du type $\cos \lambda x$ et $\sin \mu x$.
23. Si $\mu > 0$, $\lambda > 0$, une primitive de $\cos \mu x$ est $\frac{1}{\mu}\sin \mu x$ et une primitive de $\sin \lambda x$ est $-\frac{1}{\lambda}\cos \lambda x$

Changement de variables Dans certain cas, spécialement si k et ℓ sont de parités différentes [24], il peut être intéressant d'utiliser la relation $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ (ou $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$), pour calculer une primitive de la fonction concernée grâce au changement de variable $u = \cos x$ ou $u = \sin x$. En effet on a $\cos^{2p} x \sin^{2q+1} x = \cos^{2p} x\,(1-\cos^2 x)^q\,(-\cos x)'$ et de même on a $\cos^{2p+1} x \sin^{2q} x = (1-\sin^2 x)^p \sin^{2q} x\,(\sin x)'$. Par exemple, supposons que le problème soit de calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x\, dx\,.$$

On a $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1-\sin^2 x)\cos x$ et donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^2 x \cos x\, dx \\ &\underset{\substack{u=\sin x \\ du = \cos x\, dx}}{=} \int_0^1 (1-u^2)u^2\, du = \int_0^1 (u^2-u^4)\, du = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}\,\cdot \end{aligned}$$

Notons qu'au lieu de faire le changement de variable $u = \sin x$, on aurait tout aussi bien pu dire que $g(x) := \cos^3 x \sin^2 x = (1-\sin^2 x)\sin^2 x \cos x$ est de la forme $f(\sin x)\sin'(x)$ avec $f(y) = (1-y^2)y^2 = y^2 - y^4$, et donc qu'une primitive G de g est donnée par $G(x) := F(\sin x)$ avec F primitive de f, c'est-à-dire par $G(x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}\cdot$ De là, on déduit alors que $I = [G]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15}\cdot$

Fractions rationnelles en $\cos$ **et** $\sin$

L'objet de cette partie est de décrire une technique pour calculer intégrales et primitives de fonctions du type $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ où $N(x)$ et $D(x)$ sont deux polynômes trigonométriques (cf. partie précédente). Les calculs ci-dessous ne sont valides que sur un intervalle où la fonction $D(x)$ ne s'annule pas.

Pour ce type de fonctions on peut toujours se ramener au calcul d'une intégrale d'une fraction rationnelle en faisant le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ i.e. $x = 2\arctan t$. En effet, on a alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt\,.$$

On ne peut évidemment effectuer ce changement de variable que sur un intervalle fermé $[a,b]$ où $\tan\frac{x}{2}$ est bien définie. Si l'intervalle $[a,b]$ donné ne possède pas cette propriété, il faudra le couper en plusieurs morceaux et/ou faire un passage à la limite, par exemple dans une intégrale sur $[a, b-\varepsilon]$ lorsque ε tend vers 0.

D'autres changements de variables du type $t = \sin x$, $t = \cos x$ ou $t = \tan x$ peuvent être plus intéressants que celui-ci, mais ils ne fonctionnent pas à tous les coups [25] !

Exemples et Remarques

1. **Exercice résolu en cours.** Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$.
   Cette intégrale est bien définie car $\cos x$ ne s'annule pas lorsque x décrit $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. La fonction $\tan\frac{x}{2}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur cet intervalle et le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ (ou plutôt $x = 2\arctan t$) donne

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{2}{1+t^2} \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\, dt = \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{2}{1-t^2}\, dt\,.$$

24. si k et ℓ sont de même parité on peut commencer par transformer $\cos^k x \sin^\ell x$ en un polynôme trigonométrique de degré $(k+\ell)/2$ évalué en $2x$ car $\cos^{2p} x \sin^{2q} x = (\frac{1+\cos 2x}{2})^p\,(\frac{1-\cos 2x}{2})^q$ et $\cos^{2p+1} x \sin^{2q+1} x = (\frac{1+\cos 2x}{2})^p\,(\frac{1-\cos 2x}{2})^q\,\frac{\sin 2x}{2}$.

25. On dispose d'un critère pour savoir qu'un tel changement de variable va fonctionner ou pas : il s'agit des **règles de Bioche** que le lecteur intéressé devrait facilement trouver.

Pour calculer cette intégrale de fraction rationnelle, on peut utiliser la décomposition en éléments simples

$$\frac{2}{1-t^2} \quad = \quad \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}$$

d'où on déduit

$$\int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{2}{1-t^2}\,dt \quad = \quad \left[\ln\frac{1+t}{1-t}\right]_0^{\tan\frac{\pi}{8}}$$

et finalement

$$I = \ln\frac{1+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{8}}\,.$$

Voici une autre méthode : on a

$$I \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx\,.$$

Il est alors naturel de poser $u = \sin x$. On obtient

$$I \;=\; \int_0^{\sin\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1-t^2} \;=\; \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{1-\sin\frac{\pi}{4}} \;=\; \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\,.$$

Les deux réponses ont des formes différentes mais désignent bien sûr le même nombre. En effet, si $\alpha = \tan\frac{\pi}{8}$, on a

$$\begin{aligned} 1+\sin\frac{\pi}{4} &= 1+\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{(1+\alpha)^2}{1+\alpha^2} \\ 1-\sin\frac{\pi}{4} &= 1-\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{(1-\alpha)^2}{1+\alpha^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\ln\frac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{1-\sin\frac{\pi}{4}} \;=\; \ln\frac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} \;=\; 2\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\,.$$

Notons que l'un ou l'autre de ces changements de variables permettent de calculer une primitive de $\frac{1}{\cos x}$ sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$. En effet, pour $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} F(x) \quad &= \quad \int_0^x \frac{1}{\cos u}\,du \;=\; \int_0^x \frac{(\sin u)'}{1-\sin^2 u}\,du \\ &\underset{t=\sin u}{=} \int_0^{\sin x} \frac{1}{1-t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1+t}{1-t}\right]_{t=0}^{t=\sin x} \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \;=\; \ln\frac{\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} \;=\; \ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\,. \end{aligned}$$

Les égalités de la dernière ligne s'obtiennent à l'aide de la relation $\sin x = -\cos(x+\frac{\pi}{2})$ et des formules de l'angle double qui donnent

$$\begin{aligned} 1+\sin x &= 1-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \\ 1-\sin x &= 1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\,. \end{aligned}$$

De plus, on a utilisé le fait que pour x dans $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, on a $(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) > 0$.

2. Pour illustrer le fait que le changement de variable doit être bien défini sur tout l'intervalle d'intégration, nous allons observer ce que donne l'emploi abusif de cette méthode pour évaluer
$$I \;=\; \int_{2\frac{\pi}{3}}^{4\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx\,.$$
Cette intégrale est bien définie car $1+\sin x$ est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle $\left[2\frac{\pi}{3}, 4\frac{\pi}{3}\right]$.
En appliquant le changement de variable comme une recette, c'est-à-dire en posant sans précautions $t = \tan\frac{x}{2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\;dt$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, on obtient
$$I \;=\; 2\int_{t=\tan\frac{\pi}{3}}^{t=\tan 2\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1+t)^2}\,dt\,.$$
Or l'intégrale de droite n'est tout simplement pas définie : $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ et $\tan 2\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$, l'intervalle d'intégration contient donc le point $t_0 = -1$ en lequel la fonction $\frac{1}{(1+t)^2}$ n'est pas définie.
Le problème vient de ce que, lorsque x décrit l'intervalle $\left[2\frac{\pi}{3}, 4\frac{\pi}{3}\right]$, x « passe » par la valeur π pour laquelle $\tan\frac{x}{2}$ n'est pas définie.
Essayons maintenant de répondre correctement à la question en cherchant, par cette méthode de calcul, une primitive de $\frac{1}{1+\sin x}$ sur l'intervalle $\left[2\frac{\pi}{3}, 4\frac{\pi}{3}\right]$. Cherchons tout d'abord une primitive de cette fonction sur l'intervalle $\left[2\frac{\pi}{3}, \pi\right[$. Soit donc x dans cet intervalle et calculons
$$F(x) \;=\; \int_{2\frac{\pi}{3}}^{x} \frac{1}{1+\sin u}\,du \;=\; 2\int_{\tan\frac{\pi}{3}}^{\tan\frac{x}{2}} \frac{dt}{(1+t)^2} \;=\; -2\left[\frac{1}{1+t}\right]_{\tan\frac{\pi}{3}}^{\tan\frac{x}{2}} \;=\; -2\frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$$
où $C = \frac{2}{1+\sqrt{3}}\cdot$ Comme on pouvait s'y attendre, cette formule n'est pas définie pour $x = \pi$.
Transformons l'expression de $F_1(x) := F(x) - C$ (on laisse de côté la constante C, on cherche une primitive !). On a :
$$F_1(x) \;=\; -2\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}} \;=\; -2\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} \;=\; -\frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\,.$$
Ce qui est remarquable avec cette nouvelle expression, c'est que non seulement elle donne une primitive de $\frac{1}{1+\sin x}$ sur l'intervalle $\left[2\frac{\pi}{3}, \pi\right[$ mais aussi qu'elle définit une fonction (que l'on appelle encore F_1) dont le domaine de définition contient $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right[$, i.e l'un des intervalles les plus larges possibles sur lequel $\frac{1}{1+\sin x}$ est définie et continue. Il s'avère aussi, en dérivant F_1, que $F_1'(x) = \frac{1}{1+\sin x}$ sur cet intervalle.
Notre intégrale I vaut donc
$$I \;=\; \Big[F_1(x)\Big]_{x=2\frac{\pi}{3}}^{x=4\frac{\pi}{3}} \;=\; -2\left(\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \;=\; \frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{2}{\sqrt{3}+1} \;=\; 2\sqrt{3}\,.$$

Annexe A

Pour aller un peu plus loin sur... la continuité (uniforme)

La continuité uniforme a été évoquée au chapitre 8 sur l'intégration dans les exemples et remarques qui suivent l'énoncé du lemme 8.6 (la démonstration du point (ii) de ce lemme peut se faire en utilisant cette notion comme on le verra à la fin de cette annexe, mais au chapitre 8, dans un souci de simplification, elle n'a été donnée que sous une hypothèse plus restrictive. La continuité uniforme est une notion plus forte que la continuité qui se définit ainsi :

Définition A.1 *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur A. On dit que la fonction f est uniformément continue sur A si :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0 \ \text{ tel que } \qquad \Big(\forall x\,,\, y \in A, \quad |x-y| < \eta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon \Big).$$

Exemples et Remarques

1. Si $f : A \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur A, alors elle est continue sur A. En effet, si $x \in A$ et $\varepsilon > 0$ sont fixés, alors le $\eta = \eta(\varepsilon)$ qui apparaît dans la définition précédente (il **ne dépend pas de** x **mais seulement de** ε) vérifie :
$$\forall y \in A, \quad |x-y| < \eta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$
d'où la continuité de f en x, quel que soit $x \in A$.
2. En d'autres termes, la continuité de $f : A \to \mathbb{R}$ sur A se traduit par le fait que pour chaque $x \in A$ et chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta = \eta(x, \varepsilon) > 0$ tel que :
$$\forall y \in A, \quad |x-y| < \eta(x,\varepsilon) \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon\,,$$
tandis que l'uniforme continuité de f sur A signifie que le choix du $\eta(x,\varepsilon) > 0$ peut être fait indépendamment de $x \in A$, i.e. que, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tel que
$$\forall x \in A\,,\ \forall y \in A, \quad |x-y| < \eta(\varepsilon) \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon\,.$$
C'est exactement la définition A.1.
3. Par contre, la réciproque est fausse : la continuité d'une fonction n'implique généralement pas son uniforme continuité. Montrons par exemple que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est continue sur $]0,1]$, n'est pas uniformément continue sur cet intervalle. Pour cela, considérons

un ε dans $]0,1[$ et un x quelconque de $]0,1]$. Alors, pour $y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$|f(y)-f(x)| < \varepsilon \iff -\varepsilon + \frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \varepsilon + \frac{1}{x}$$
$$\underset{\text{car } 1-\varepsilon x>0}{\iff} x - \frac{\varepsilon x^2}{1+\varepsilon x} = \frac{x}{1+\varepsilon x} < y < \frac{x}{1-\varepsilon x} = x + \frac{\varepsilon x^2}{1-\varepsilon x}.$$

Le point x est fixé dans $]0,1]$ et on cherche $\eta(x,\varepsilon)$ tel que :

$$\text{pour tout } \ y \in]0,1], \quad |y-x| < \eta(x,\varepsilon) \ \text{ implique } \ |f(y)-f(x)| < \varepsilon.$$

Il est donc nécessaire que $\eta(x,\varepsilon)$ vérifie

$$]0,1] \cap]x-\eta(x,\varepsilon), x+\eta(x,\varepsilon)[\ \subset \ \left]x - \frac{\varepsilon x^2}{1+\varepsilon x}\,,\, x + \frac{\varepsilon x^2}{1-\varepsilon x}\right[. \qquad (*)$$

Or pour $x > 0$ suffisamment proche de 0, on a

$$x - \frac{\varepsilon x^2}{1+\varepsilon x} = \frac{x}{1+\varepsilon x} > 0 \qquad \text{et} \qquad x + \frac{\varepsilon x^2}{1-\varepsilon x} = \underbrace{\frac{x}{1-\varepsilon x}}_{\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0} < 1$$

et dans ce cas l'intervalle $]x - \frac{\varepsilon x^2}{1+\varepsilon x}\,,\, x + \frac{\varepsilon x^2}{1-\varepsilon x}[$ est inclus dans $]0,1[$. Mais alors, l'inclusion $(*)$ exige que $\eta(x,\varepsilon)$ vérifie

$$\eta(x,\varepsilon) \leq \min\left(\tfrac{\varepsilon x^2}{1+\varepsilon x}, \tfrac{\varepsilon x^2}{1-\varepsilon x}\right) = \tfrac{\varepsilon x^2}{1+\varepsilon x}.$$

De ce qui précède on déduit maintenant que si $\eta(\varepsilon) > 0$ vérifie

$$\text{pour tout } \ x \in]0,1] \text{ et tout } \ y \in]0,1], \quad |y-x| < \eta(\varepsilon) \ \text{ implique } \ |f(y)-f(x)| < \varepsilon,$$

on doit avoir $0 < \eta(\varepsilon) \leq \widetilde{\eta}(x,\varepsilon) := \frac{\varepsilon x^2}{1+\varepsilon x}$ pour tout x suffisamment proche de 0. Mais cette condition est impossible à satisfaire car $\widetilde{\eta}(x,\varepsilon)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+. Il s'ensuit que la fonction f n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

4. Au point précédent, à visée pédagogique, on a calculé explicitement, pour $\varepsilon \in]0,1[$ et x assez petit, le $\eta(x,\varepsilon)$ maximal, à savoir $\widetilde{\eta}(x,\varepsilon) := \frac{\varepsilon x^2}{1+\varepsilon x}$, qui assure $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < \varepsilon$ pour tout y dans l'intervalle $]x-\eta(x,\varepsilon), x+\eta(x,\varepsilon)[$, et on a conclu que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$ parce que $\widetilde{\eta}(x,\varepsilon) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Mais ces calculs sont relativement fastidieux alors qu'en fait on peut arriver au résultat beaucoup plus vite. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $x \mapsto \frac{1}{x}$ soit uniformément continue sur $]0,1]$. En considérant $\varepsilon = 1$, il existe alors $\eta > 0$, que l'on d'ailleurs choisir tel que $0 < \eta \leq 1$ [1], tel que

$$\forall x \in]0,1]\,,\ \forall y \in]0,1], \quad |x-y| < \eta \implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < 1\,.$$

En considérant alors $y = \eta \in]0,1]$, on a en particulier $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < 1$ pour tout $x \in]0,\eta]$ et donc $\frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{\eta}$ pour tout $x \in]0,\eta]$. L'hypothèse que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est uniformément continue sur $]0,1]$ a conduit à la contradiction que cette fonction est bornée sur $]0,\eta]$!

Avec cet exemple, nous avons montré qu'une fonction continue n'est pas nécessairement uniformément continue. C'est néanmoins le cas pour les fonctions continues sur un segment comme l'énonce le théorème suivant :

1. s'il ne l'est pas on le remplace par $\min(\eta,1)$ ce qui ramène à la situation souhaitée.

Théorème A.2 (Théorème de Heine) *Soient deux réels $a \leq b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur le segment $[a,b]$.*

Preuve. Démontrons ce théorème par l'absurde en supposant que f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$. D'après la définition A.1 de l'uniforme continuité, on obtient par négation :

$$\exists\, \varepsilon > 0\,,\ \forall\, \eta > 0\,,\quad \exists\, x,\, y \in [a,b] \quad \text{tels que} \quad |x-y| < \eta \quad \text{et} \quad |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon\,.$$

Fixons un tel $\varepsilon > 0$. On a alors en particulier :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\quad \exists\, x_n,\, y_n \in [a,b] \quad \text{tels que} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon\,.$$

D'après le théorème 2.32, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset [a,b]$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers un certain $x \in [a,b]$. D'après l'inégalité $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, la suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge elle aussi vers x, puisque d'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|y_{\varphi(n)} - x| \ \leq\ \underbrace{|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}|}_{< \frac{1}{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{|x_{\varphi(n)} - x|}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

La continuité de f implique donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_{\varphi(n)}) = f(x)$. Mais par ailleurs on a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en particulier on a $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En passant à la limite dans cette dernière inégalité lorsque n vers $+\infty$ on obtient une contradiction, à savoir $0 \geq \varepsilon > 0$, et cela termine la preuve du théorème A.2. $\diamond$

Nous terminons ce premier appendice par la démonstration du deuxième point du lemme 8.6 du chapitre 8 sur l'intégration à l'aide du théorème précédent. On rappelle que la démonstration de ce point n'a été donnée que sous l'hypothèse plus restrictive $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ dans le chapitre 8. Le lemme A.3 ci-dessous reprend l'énoncé du lemme 8.6.

Lemme A.3 *Soient $a < b$ deux réels, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n(f)$ et $S_n(f)$ les sommes de Darboux inférieure et supérieure d'ordre n associées à f sur $[a,b]$. On a alors :*

i) Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $l \in \mathbb{N}^*$, $s_l(f) \ \leq\ s_{kl}(f) \ \leq\ S_{kl}(f) \ \leq\ S_k(f)$,

ii) $S_n(f) - s_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$

Preuve.

ii) **Démonstration dans le cas général $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ [2] :** Elle ne diffère de celle donnée dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ que dans les détails de la majoration. On a d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \ \leq\ S_n(f) - s_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\max_{[a_{i,n}, a_{i+1,n}]} f - \min_{[a_{i,n}, a_{i+1,n}]} f \Big)$$

où $a_{i,n} = a + i\, \frac{b-a}{n}$.

Or, toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes ; ce résultat appliqué à la fonction f sur chacun des segments $[a_{i,n}, a_{i+1,n}]$ pour i allant de 0 à $n-1$ assure l'existence de nombres $d_{i,n}$ et $D_{i,n}$ dans $[a_{i,n}, a_{i+1,n}]$ tels que $\max\limits_{[a_{i,n}, a_{i+1,n}]} f = f(D_{i,n})$ et $\min\limits_{[a_{i,n}, a_{i+1,n}]} f = f(d_{i,n})$. On a donc

$$0 \ \leq\ S_n(f) - s_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \big(f(D_{i,n}) - f(d_{i,n}) \big).$$

2. on rappelle que la notation $f \in C^0(I)$ signifie que f est continue sur I.

Fixons $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue sur le segment $[a, b]$, elle y est uniformément continue d'après le théorème A.2 et donc :

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in [a, b], \qquad |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $|D_{i,n} - d_{i,n}| \leq a_{i+1,n} - a_{i,n} = \frac{b-a}{n}$. Comme $\frac{b-a}{n}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel qu'on ait $\frac{b-a}{n_0} < \eta$ et donc $\frac{b-a}{n} < \eta$ pour tout entier $n \geq n_0$. Il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(n \geq n_0 \quad \implies \quad \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad |f(D_{i,n}) - f(d_{i,n})| < \frac{\varepsilon}{b - a} \right),$$

d'où finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(n \geq n_0 \quad \implies \quad 0 \leq S_n(f) - s_n(f) < \frac{b - a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b - a} = \varepsilon \right),$$

ce qui prouve la convergence de $\big(S_n(f) - s_n(f)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers 0 et conclut la preuve.

$\diamond$

Annexe B

Pour aller un peu plus loin sur... la convexité

La proposition suivante énumère plusieurs propriétés caractérisant la convexité d'une fonction f (c.f. définition 5.23 à la fin du chapitre 5 sur la dérivabilité). Seul le premier point est véritablement nouveau ici, les deux autres points ayant été énoncés et partiellement démontrés dans la partie 5.4.6 sur la convexité.

Proposition B.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle non trivial I.*

1. *On a l'équivalence :*

$$f \text{ est convexe sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\forall\, y \in I, \quad \tau_y : x \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \text{est croissante sur } I \setminus \{y\} \right)$$

2. *Si f est dérivable sur I, on a les équivalences :*

$$\begin{aligned} f \text{ est convexe sur } I \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, (x,y) \in I^2, \quad f(x) - f(y) \;\geq\; f'(y)(x-y) \\ &\Longleftrightarrow \quad f' \text{ est croissante sur } I\,. \end{aligned}$$

3. *Si f est deux fois dérivable sur I, on a l'équivalence :*

$$f \text{ est convexe sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad f'' \geq 0 \text{ sur } I\,.$$

Preuve.

1. "$\Rightarrow$" Supposons d'abord f convexe sur I et considérons un point y dans I. Il faut montrer que le taux d'accroissement $x \mapsto \tau_y(x) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ est croissant sur $I \setminus \{y\}$. Considérons donc x_1, x_2 dans $I \setminus \{y\}$ tels que $x_1 < x_2$ et montrons que $\tau_y(x_1) \leq \tau_y(x_2)$. On distingue trois cas :

   Cas $y < x_1 < x_2$. Puisque $x_1 \in]y, x_2[$, il existe alors $t \in]0,1[$ tel que $x_1 = (1-t)y + tx_2$. Plus précisément, on a

$$x_1 \;=\; y + \frac{x_1 - y}{x_2 - y}(x_2 - y) \;=\; (1-t)y \,+\, tx_2 \quad \text{avec} \quad t \;=\; \frac{x_1 - y}{x_2 - y} \;\in]0,1[\,.$$

   Par convexité de f, on a alors $f(x_1) \;\leq\; (1-t)f(y) + tf(x_2)$ et donc

$$f(x_1) - f(y) \;\leq\; t\big(f(x_2) - f(y)\big) \;=\; \frac{x_1 - y}{x_2 - y}\big(f(x_2) - f(y)\big)\,.$$

   On en déduit $\tau_y(x_1) \leq \tau_y(x_2)$ en divisant cette dernière inégalité par $x_1 - y$ qui est > 0.

Cas $x_1 < x_2 < y$. On procède de la même manière. Dans ce cas on a $x_2 = tx_1 + (1-t)y$ avec $t = \frac{x_2 - y}{x_1 - y} \in]0,1[$ donc, par convexité de f on a $f(x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(y)$ i.e.

$$f(x_2) - f(y) \leq t\big(f(x_1) - f(y)\big) = \frac{x_2 - y}{x_1 - y}\big(f(x_1) - f(y)\big),$$

d'où on déduit $\tau_y(x_1) \leq \tau_y(x_2)$ en divisant par $x_2 - y$ qui est < 0.

Cas $x_1 < y < x_2$. Ce cas peut être vu comme le premier cas où l'on aurait échangé y et x_1 ; on a donc $\tau_{x_1}(y) \leq \tau_{x_1}(x_2)$ i.e. $\tau_y(x_1) \leq \tau_{x_2}(x_1)$ puisque $\tau_x(y) = \tau_y(x)$ pour tous $x \neq y \in I$. Mais le cas $x_1 < y < x_2$ peut aussi être vu comme le deuxième cas où l'on aurait échangé y et x_2 donc on a $\tau_{x_2}(x_1) \leq \tau_{x_2}(y) = \tau_y(x_2)$. Or, on a vu que $\tau_y(x_1) \leq \tau_{x_2}(x_1)$, donc par transivité on obtient $\tau_y(x_1) \leq \tau_y(x_2)$.

"$\Leftarrow$" Supposons maintenant que, quel que soit y dans I, la fonction taux d'accroissement τ_y est croissante sur $I \setminus \{y\}$ et montrons alors que f est convexe. Considérons donc $x_1, x_2 \in I$ et montrons qu'on a $f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ pour tout $t \in [0,1]$. Si $x_1 = x_2$, le résultat est évident donc on va selimiter à traiter le cas $x_1 \neq x_2$ et même plus précisément le cas $x_1 < x_2$ (c'est loisible, quitte à échanger x_1 et x_2 ainsi que t et $1-t$). L'inégalité à démontrer étant encore évidente si $t = 0$ ou $t = 1$, on va aussi supposer qu'on a $t \in]0,1[$. Or, si $t \in]0,1[$, on a : $(1-t)x_1 + tx_2 = x_1 + t(x_2 - x_1) \in]x_1, x_2[$. Par croissance de τ_{x_1} sur $I \setminus \{x_1\}$ on a donc $\tau_{x_1}((1-t)x_1 + tx_2) \leq \tau_{x_1}(x_2)$. Cela s'écrit encore

$$\frac{f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) - f(x_1)}{t(x_2 - x_1)} = \frac{f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) - f(x_1)}{(1-t)x_1 + tx_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par $t(x_2 - x_1)$ qui est > 0 on obtient

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) - f(x_1) \leq t\big(f(x_2) - f(x_1)\big)$$

ce qui s'écrit aussi $f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$. C'est le résultat voulu.

2. Dans le cas où la fonction f est dérivable sur I, l'équivalence

$$f \text{ est convexe sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad f' \text{ est croissante sur } I \qquad (*)$$

est simplement le premier point de la proposition 5.24. Cela a été démontré dans la partie 5.4.6. L'implication

$$(\, f \text{ est convexe sur } I \,) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall (x,y) \in I^2,\ f(x) - f(y) \geq f'(y)(x-y) \Big)$$

a également été démontrée à la fin de la partie 5.4.6 dans une remarque.

Il reste donc à démontrer l'implication :

$$\Big(\forall (x,y) \in I^2,\ f(x) - f(y) \geq f'(y)(x-y) \Big) \quad \Longrightarrow \quad (\, f \text{ est convexe sur } I \,).$$

Compte tenu de l'équivalence $(*)$ rappelée ci-dessus, il suffit de démontrer que f' est croissante sur I. Considérons donc x, y dans I vérifiant $x < y$. En appliquant l'hypothèse au couple (x,y) puis au couple (y,x) on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &\geq f'(y)(x-y) \\ f(y) - f(x) &\geq f'(x)(y-x) \quad \text{i.e.} \quad f(x) - f(y) \leq f'(x)(x-y) \end{aligned}$$

d'où on déduit $f'(y)(x-y) \leq f'(x)(x-y)$. Comme $x < y$ on a finalement $f'(x) \leq f'(y)$. On a bien établi la croissance de f' sur I et donc prouvé la convexité de f.

3. Ce troisième point est une conséquence immédiate du point précédent et de l'équivalence : f' est croissante ssi f'' est positive.

◇

Exemples et Remarques

1. Il y a bien sûr des propriétés analogues pour les fonctions concaves. On les obtient simplement en remplaçant f par $-f$ dans les énoncés pour les fonctions convexes.
2. En posant $t_1 = t$ et $t_2 = 1 - t$ on donne à la définition de la convexité de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (cf. la définition 5.23) la forme parfaitement symétrique suivante :

   f est convexe sur I ssi

   pour tous x_1, x_2 dans I et tous t_1, t_2 positifs ou nuls de somme égale à 1,
   $$f(t_1x_1 + t_2x_2) \ \leq\ t_1f(x_1) + t_2f(x_2).$$

   En fait, une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ vérifie pour tout entier $n \geq 1$ l'assertion $(\mathcal{A}_n)$ suivante :

   pour tous $x_1, \ldots, x_n$ dans I et tous $t_1, \ldots, t_n$ positifs ou nuls de somme égale à 1,
   $$f\Big(\sum_{k=1}^{n} t_kx_k\Big) \ \leq\ \sum_{k=1}^{n} t_kf(x_k).$$

   L'assertion $(\mathcal{A}_1)$ est sans intérêt puisqu'elle se réduit à « $\forall x_1 \in I,\ f(x_1) \leq f(x_1)$ ». Par ailleurs, on a observé ci-dessus que $(\mathcal{A}_2)$ est vraie ssi f est convexe sur I. On va montrer par récurrence que si f est convexe sur I, alors l'assertion $(\mathcal{A}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Plus précisément, on va montrer que si n est un entier ≥ 2 et si $(\mathcal{A}_n)$ est vraie alors $(\mathcal{A}_{n+1})$ est également vraie. Mais avant de faire cela, il convient de justifier que l'inégalité qui apparaît dans $(\mathcal{A}_n)$ a un sens. Sous les hypothèses de $(\mathcal{A}_n)$ notons m (resp. M) le plus petit (resp. le plus grand) des réels $x_1, \ldots, x_n$. Les t_k étant ≥ 0, il est clair que
   $$m = (t_1 + \cdots + t_n)m \ \leq\ t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \ \leq\ (t_1 + \cdots + t_n)M = M.$$

   Comme m et M appartiennent à I, le segment $[m, M]$ est inclus dans I (car I est un intervalle) donc le réel $\sum_{k=1}^{n} t_kx_k$ appartient à I et $f(\sum_{k=1}^{n} t_kx_k)$ est bien défini.
   Montrons maintenant que si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et vérifie $(\mathcal{A}_n)$ pour un certain entier $n \geq 2$ alors $(\mathcal{A}_{n+1})$ est vraie. Pour cela considérons $n + 1$ points $x_1, \ldots, x_{n+1}$ dans I et $n + 1$ coefficients $t_1, \ldots, t_{n+1}$ positifs ou nuls de somme égale à 1 et montrons l'inégalité
   $$f\Big(\sum_{k=1}^{n+1} t_kx_k\Big) \ \leq\ \sum_{k=1}^{n+1} t_kf(x_k).$$

   • Si $t_{n+1} = 1$ alors $t_1, \ldots, t_n$ sont tous nuls car ils sont ≥ 0 et de somme 0. L'inégalité à démontrer se réduit dans ce cas à $f(x_{n+1}) \leq f(x_{n+1})$ qui est trivialement vraie.
   • Si $t_{n+1} < 1$ alors on a $t_1 + \cdots + t_n = 1 - t_{n+1} > 0$ et les nombres $\theta_k = \frac{t_k}{1-t_{n+1}}$ pour $k = 1, \ldots, n$ sont positifs ou nuls et de somme égale à 1. Posons $x = \sum_{k=1}^{n} \theta_kx_k$. On a alors $x \in I$ et $(1 - t_{n+1})x = \sum_{k=1}^{n} t_kx_k$ d'où
   $$f\Big(\sum_{k=1}^{n+1} t_kx_k\Big) = f\big((1 - t_{n+1})x + t_{n+1}x_{n+1}\big) \underset{(f\ \text{convexe sur}\ I)}{\leq} (1 - t_{n+1})f(x) + t_{n+1}f(x_{n+1})$$
   et aussi
   $$f(x) = f\Big(\sum_{k=1}^{n} \theta_kf(x_k)\Big) \underset{(\mathcal{A}_n)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \theta_kf(x_k) = \frac{1}{1 - t_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} t_kf(x_k)$$
   c'est-à-dire $(1 - t_{n+1})f(x) \leq \sum_{k=1}^{n} t_kf(x_k)$ puisque $1 - t_{n+1}$ est > 0. En reportant cette inégalité dans la précédente on obtient l'inégalité voulue : $f\Big(\sum\limits_{k=1}^{n+1} t_kx_k\Big) \leq \sum\limits_{k=1}^{n+1} t_kf(x_k)$.

   L'assertion $(\mathcal{A}_{n+1})$ est donc vraie et par récurrence on obtient que si f est convexe sur I alors $(\mathcal{A}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

3. La convexité permet d'obtenir certaines inégalités très utiles en pratique. Par exemple, on a vu au chapitre 5 que l'inégalité $e^x \geq x+1$ est vraie pour tout x réel par convexité de $x \mapsto e^x$ et que l'inégalité $\ln x \leq x-1$ est vraie pour tout $x>0$ par concavité de $x \mapsto \ln x$. Citons encore l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \quad (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \ \leq\ \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\,.$$

Elle exprime que la moyenne géométrique est toujours inférieure à la moyenne arithmétique. Si l'un des $x_i \in \mathbb{R}^+$ est nul l'inégalité est évidente et si tous les x_i sont non nuls on trouve en prenant le logarithme qu'elle est équivalente à l'inégalité

$$\frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n} \ \leq\ \ln\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right).$$

Or, celle-ci est une conséquence immédiate de la convexité de la fonction $x \mapsto -\ln(x)$ et de la deuxième remarque ci-dessus avec $t_1 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$.

4. Dans le même esprit citons l'inégalité de Young qui s'obtient aussi en utilisant la concavité de ln (i.e. la convexité de $-\ln$) :

$$\forall\, x,y\ \geq 0\,,\ \ \forall\, p,q\ >\ 1 \text{ tels que } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad xy\ \leq\ \frac{x^p}{p}\ +\ \frac{y^q}{q}\,.$$

5. Signalons également que si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur l'intervalle I, alors pour tout $x_0 \in \mathring{I}$[1] le taux d'accroissement τ_{x_0} est défini au voisinage de x_0 sauf en x_0 et admet des limites finies à gauche et à droite en x_0. Pour justifier l'existence de la limite à gauche par exemple, il suffit de remarquer que la fonction croissante $x \mapsto \tau_{x_0}(x)$ est majorée pour $x < x_0$ par $\tau_{x_0}(x_0+\varepsilon)$ où $\varepsilon > 0$ est choisi assez petit pour que $x_0+\varepsilon$ appartienne à I. Par conséquent, $\tau_{x_0}(x)$ admet une limite finie $f'_g(x_0)$ lorsque $x \to x_0^-$ (d'après le théorème 3.20) qui vérifie $f'_g(x_0) \leq \tau_{x_0}(x_0+\varepsilon)$. En faisant tendre ε vers 0^+ on obtient l'existence de $f'_d(x_0)$ et l'inégalité $f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0)$. Enfin l'existence d'une dérivée à gauche (resp. à droite) pour f au point x_0 implique la continuité à gauche (resp. à droite) de f au point x_0. Ainsi, on a les implications successives :

$$\big(\, f \text{ est convexe sur } I\,\big) \quad \Longrightarrow \quad \big(\, f'_g \text{ et } f'_d \text{ existent sur } \mathring{I}\,\big) \quad \Longrightarrow \quad \big(\, f \text{ est continue sur } \mathring{I}\,\big)$$

et par ailleurs on a $f'_g \leq f'_d$.

1. l'intérieur $\mathring{I}$ de l'intervalle I se compose de tous les points de I qui ne sont pas une borne de I.