Rappel de cours:

-

Exercice 5.1

5.1.1.a

La relation ϕ est linéaire de E si

- $\forall A, B \in E, \phi(A+B) = \phi(A) + \phi(B)$
- $\forall A \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \phi(\lambda A) = \lambda \phi(A)$

Posons $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ et $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

En utilisant deux fois la distibitibité par rapport à l'addition, on a:

$$\phi(A+B) = M_1.(A+B).M_2 = M_1.(A.M_2 + B.M_2) = M_1.A.M_2 + M_1.B.M_2 = \phi(A) + \phi(B)$$

On a $(\lambda A).B = \lambda(A.B) = A.(\lambda B)$ (voir cours).

$$\phi(\lambda A) = M_1.(\lambda A).M_2 = M_1.(\lambda(A.M_2)) = \lambda(M_1.A.M_2) = \lambda \phi(A)$$

Donc la relation $\phi(M)$ est linéaire.

5.1.1.b

La matrice A est un point fixe de la relation ϕ si $\phi(A) = A$, soit

$$\phi(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} .A. \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = A$$

$$\phi(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = A$$

5.1.2.a

$$\phi(P_1+P_2) = ((P_1+P_2)(1), (P_1+P_2)'(2)) = ((P_1(1)+P_2(1)), (P_1'+P_2')(2)) = (P_1(1)+P_2(1), P_1'(2)+P_2'(2))$$
$$= (P_1(1), P_1'(2)) + (P_2(1), P_2'(2)) = \phi(P_1) + \phi(P_2)$$

Et

$$\phi(\lambda P) = (\lambda P(1), (\lambda P(2))') = (\lambda P(1), \lambda P'(2)) = \lambda(P(1), P'(2)) = \lambda \phi(P)$$

La relation ϕ est linéaire.

5.1.2.b

$$\phi(t-1) = ((t-1)(1), (t-1)'(2)) = ((t-1)(1), (1)(2)) = (0, 1)$$

$$\phi((t-2)^2) = ((t-2)^2(1), ((t-2)^2)'(2)) = ((t-2)^2(1), (t^2-4t+4)'(2)) = ((t-2)^2(1), (2t-4)(2)) = (1, 0)$$

On cherche P, tel que $\phi(P) = (1, -1)$. Comme la relation ϕ est linéaire on a

$$(1,-1) = 1.(1,0) - 1.(0,1) = 1.\phi((t-2)^2) - 1.\phi(t-1) = \phi(1.(t-2)^2) + \phi(-(t-1)) = \phi((t-2)^2 - (t-1)) = \phi(t^2-5t+5)$$

Donc $P = t^2 - 5t + 5$.

5.1.3.a

$$\phi(f_1+f_2)=\int_0^1(f_1+f_2)e^t dt=\int_0^1 f_1e^t+f_2e^t dt=\int_0^1 f_1e^t+\int_0^1 f_2e^t dt=\phi(f_1)+\phi(f_2)$$

$$\phi(\lambda f)=\int_0^1(\lambda f)e^t dt=\int_0^1\lambda fe^t dt=\lambda\int_0^1 fe^t dt=\lambda\phi(f)$$

5.1.3.b

Une fonction f de $E\to F$ appartient au noyau de ϕ si $\phi(f)=0_F$. Une fonction est dite affine si elle est de la forme $f(t)=at+b$. Donc on cherche une fonction $f=at+b$ tel que $\phi(f)=0$.

$$\phi(at+b)=\int_0^1(at+b)e^t dt=\int_0^1 ate^t+be^t dt=a\int_0^1 te^t dt+b\int_0^1 e^t dt=a+b(e-1)=0$$

car $\int e^t dt=e^t$ et $\int te^t dt=(t-1)e^t$.

Il faut trouver a et b tel que $a+b(e-1)=0$. Prenons par exemple, $b=0$ donc $a=0$, et $b=1$ donc $a=1-e$.
Les 2 fonctions affines sont $f_0(t)=0t+0=0$ et $f_1(t)=(1-e)t+1$.

Exercice 5.2

5.2.1

$$f(x,y,z,t)=\begin{vmatrix}1&-1&3&-1\\2&1&3&4\\-1&2&-4&3\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}x\\y\\z\\t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-y+3z-t\\2x+y+3z+4t\\-x+2y-4z+3t\end{vmatrix}$$

5.2.2.a

$Ker(f)=\{X\in\mathbb{R}^4, f(X)=0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$\begin{cases}x-y+3z-t & =0 \quad l_1\\2x+y+3z+4t & =0 \quad l_2\\-x+2y-4z+3t & =0 \quad l_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-y+3z-t & =0 \quad l_1\\-3y+3z-6t & =0 \quad 2l_1-l_2\\y-z+2t & =0 \quad l_1+l_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-y+3z-t & =0 \quad l_1\\y-z+2t & =0 \quad l_1+l_3\\0 & =0 \quad (2l_1-l_2)+3(l_1+l_3)\end{cases}$$

On a 2 variables primaires (x,y) et deux variables secondaires (z,t). Donc $Ker(f)=\{X\in\mathbb{R}^3, X=(2z-t,z-2t,z,t)\}$.

5.2.2.b

$$\begin{cases} x - y + 3z - t & = x_b \quad l_1 \\ 2x + y + 3z + 4t & = y_b \quad l_2 \\ -x + 2y - 4z + 3t & = z_b \quad l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t & = x_b \\ y - z + 2t & = x_b + z_b \\ -3y + 3z - 6t & = 2x_b - y_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t & = x_b \\ y - z + 2t & = x_b + z_b \\ -3(x_b + z_b) & = 2x_b - y_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z - t & = x_b \\ y - z + 2t & = x_b + z_b \\ -5x_b + y_b - 3z_b & = 0 \end{cases}$$

La fonction f est injective ssi $Ker(f) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$. On a $Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, X = (4z - t, z - 2t, z, t)\} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. La fonction n'est pas injective.

La fonction est surjective ssi $Im(f) = \mathbb{R}^3$. On a $Im(f) = B = (x_b, y_b, z_b) \neq \mathbb{R}^3$ car il y a une relation entre $x_b, y_b etz_b$. Donc la fonction f n'est pas surjective.

5.2.3.a

$$\begin{aligned} &u_1 = 3e_1 - e_3 = 3(1,0,0,0) - (0,0,1,0) = (3,0,-1,0) \\ &u_2 = e_2 - e_4 = (0,1,0,0) - (0,0,0,1) = (0,1,0,-1) \\ &f(u_1) = (3 - 0 - 3 - 0, 6 - 0 - 3 - 0, -3 + 0 + 4 + 0) = (0,3,1) \\ &f(u_2) = (0 - 1 + 0 - -1, 0 + 1 + 0 - 4, -0 + 2 - 0 - 3) = (0,-3,-1) \end{aligned}$$

On a $Vect(f(u_1), f(u_2)) = \{(0,3,1), (0,-3,-1)\}$. On remarque que $f(u_1) = -f(u_2)$, donc les 2 vecteurs sont colinéaires. Par conséquent $Vect(f(u_1), f(u_2))$ ne représente que les points de la droite de du plan (y, z) et de vecteur directeur $(0,3,1)$.

5.2.3.b

On a $Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, X = (-2z - t, z - 2t, z, t)\}$, les points de l'espace vectorielle sont $(x_f, y_f, z_f, t_f) = (-2z - t, z - 2t, z, t)$.
$E = Vect((3,0,-1,0), (0,1,0,-1))$, les points de l'espace vectorielle D sont $(x_e, y_e, z_e, t_e) = a.(3,0,-1,0) + b.(0,1,0,-1) = (3a, b, -a, -b)$.

$E \cap Ker(f)$ sont les points communs entre E et $Ker(f)$. Donc

$$\begin{cases} 3a & = -2z - t \\ b & = z - 2t \\ -a & = z \\ -b & = t \end{cases}$$

La solution de ce système est $b = a$. Donc $D = (3a, a, -a, -a)$ ou $D = (3,1,-1,-1)$.

$D' = (3,0,-1,0)$ et $D = (3,1,-1,-1)$ sont supplémentaires dans E si $((3,0,-1,0), (3,1,-1,-1))$ est une base de E.

Famille libre?

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_2 & = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ -\lambda_2 & = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, la famille est libre.
Et génératrice?

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 & = x \\ \lambda_2 & = y \\ -\lambda_1 - \lambda_2 & = z \\ -\lambda_2 & = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & = t + y \\ 0 & = x + 3z \\ \lambda_2 & = y \\ -\lambda_1 & = z + y \end{cases}$$

Oups la famille n'est pas génératrice. Problème.

5.4

5.4.1

En utilisant la distributivité par rapport à l'addition.

$$g(A+B) = (A+B)M - M(A+B) = AM + BM - MA - MB = AM - MA + BM - MB = g(A) + g(B)$$

$$g(\lambda A) = (\lambda A)M - M(\lambda A) = \lambda(AM) - \lambda(MA) = \lambda(AM - MA) = \lambda g(A)$$

Donc g est linéaire.

5.4.2

Par définition, $Ker(g) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g(M) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$.
On a $g(M) = AM - MA = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = MA$ qui est la définition de E.

Donc $Ker(g) = E$.

5.4.3

On a $M \in E, AM = MA$.
La matrice $A \in E$ car $AA = AA$.
La matrice $I_2 \in E$ car $I_2A = A = AI_2$.

On a trouvé 2 matrices qui appartiennent à E. Comme $Ker(g) = E$, on a $g(A) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et $g(I_2) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. De plus, la relation g est linéaire donc $g(\lambda_1 A + \lambda_2 I_2) = \lambda_1 g(A) + \lambda_2 g(I_2) = \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Donc $\lambda_1 A + \lambda_2 I_2$ est dans $Ker(g)$. Par conséquent $Ker(g) = \{A, I_2, \lambda_1 A + \lambda_2 I_2\}$, et $dim\ Ker(g) \geq 2$.

5.4.4

A et I_2 forment une base de $Ker(g)$ car la famille (A, I_2) est libre et génératrice. $dim\,Ker(g)$ et $rang(g)$ voir cours.

5.4.5

On a $g(A^2) = A^2A - AA^2 = A^3 - A^3 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Donc la matrice $A^2 \in Ker(g)$.

Comme les matrices A et I_2 sont une base de $Ker(g)$ alors tous les élément de l'ensemble $Ker(g)$ peuvent s'exprimer comme une combinaison linéaire des matrices A et I_2. Ou plus bestialement,

$$A^2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4A - I_2$$

Une matrice M_g est dans l'image de la relation g ssi il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $g(M) = AM - MA = M_g$. Soit $M = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$

$$AM = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2m_{11} + 3m_{21} & 2m_{12} + 3m_{22} \\ m_{11} + 2m_{21} & m_{12} + 2m_{22} \end{vmatrix}$$

$$MA = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2m_{11} + m_{12} & 3m_{11} + 2m_{12} \\ 2m_{21} + m_{22} & 3m_{21} + 2m_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_g = AM - MA = \begin{vmatrix} 3m_{21} - m_{12} & 3m_{22} - 3m_{11} \\ m_{11} - m_{22} & m_{12} - 3m_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -3b \\ b & -a \end{vmatrix}$$

avec $a = 3m_{21} - m_{12}$ et $b = m_{11} - m_{22}$.

QED