Rappel de cours

Travail

- La composante de la force d'un point M, $\overrightarrow{F}(M)$ sur l'axe $\mathcal{O}_x$ est donnée par le produit scalaire $f(x) = \overrightarrow{F}(M).\overrightarrow{i}$.
- Le travail d'une force $\overrightarrow{F}$ sur un segment $\overrightarrow{AB}$ est donné par :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB} = \int_{A\to B} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{i}\,dx = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx$$

- On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point A et B.

$$\forall A, B, C,\, W_{A\to B}\overrightarrow{F} = W_{A\to C}\overrightarrow{F} + W_{C\to B}\overrightarrow{F}$$

- Dans le cas où le chemin est rectiligne, si une force est conservatrice alors l'*énergie potentielle* associée à la force $\overrightarrow{F}$ est notée $E_p(x)$ est définie par :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) = \int_{A\to B} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{i}\,dx = E_p(x_b) - E_p(x_a)$$

.

- Le travail du poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ sur le segment $\overrightarrow{AB}$ est $W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) = -mg(z_b - z_a) = -mgh$.
- Le travail de la force de rappel élastique d'un ressort de raideur k, $\overrightarrow{F} = -k.x\,\overrightarrow{i}$ est $W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) = -\frac{1}{2}k(x_a^2 - x_b^2)$.

Énergie

- L'énergie mécanique d'un système $E_m = E_c + E_p$ avec E_c l'énergie cinétique qui dépend de la masse et de la norme de la vitesse du système physique étudié et de l'énergie potentielle E_p qui correspond aux forces exercées sur le système.
- L'énergie cinétique du système $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
- L'énergie potentielle qui correspond à l'ensemble des forces conservatives qui s'exercent sur le systéme, $E_p(B) - E_p(A) = W_{A\to B}(\overrightarrow{F}_{conservatives})$
- $E_m(B) - E_m(A) = W_{A\to B}(\overrightarrow{F}_{non\,conservatives})$

Puissance

- La puissance P représente l'énergie transférée uniformement (ie. le travail) pendant une unité de temps, $P = \frac{W}{\Delta t}$.
- $1\,W = 1\,J.s^{-1} = 1\,N.m.s^{-1} = 1\,kg.m^2.s^{-3}$

Exo 4.1.1

L'électron est soumis a la force gravitationnelle. Donc $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. On néglige l'énergie de la force gravitationnelle devant celle de l'énergie cimétique. On a $E_m = \frac{1}{2}mv^2 = 18\,keV$, donc $v = \sqrt{\frac{2*18\,keV}{m}}$ et $m = 9.10\,10^{-31}kg$, $18\,keV = 2.88\,10^{-12}$.

Exo 4.1.2

Il faut monter une masse de $m = 500 + 5 * 70 = 850\,kg$ à une vitesse de $v = 25/60 = 0.41\,m/s$. La puissance nécessaire est $P = m.g.v = 850 * 9.81 * 0.41 = 3418\,Watt$.

En l'abscence de frottements la puissance nécessaire pour lever la cabine d'ascenseur est égale à la puissance fournie par le moteur. Le puissance du poids est résistante, celle du moteur est motrice.
v On a $P = \frac{W}{\Delta_t}$, donc $W = P * \Delta_t = 3418 * 60 = 205kJ$.

Exo 4.1.3

Q1

TWh représente des $10^{12}Wh$.

Q2

On a $1W = 1J/s$. On produit $429.10^{12}Wh$ pour une année, donc on a produit $\frac{429.10^{12}}{24*365.25} = 48.10^9W$. Ce qui fait $48.10^9 * (24 * 365.25 * 3600) = 1.510^{18}J$.

Q3

La puissance électrique moyenne d'un réacteur est de $\frac{48.10^9}{58} = 0.82MW$.

Exo 4.2

Q1

Le travail accompli par la force est $\overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB}$

Q2

On a $E_m = E_c + E_p$. L'énergie du système E_m est conservée . Donc $E_{c0} + E_p = E_{cf} + E_{p_f}$ avec $E_{p_f} = 0$ car aucune force ne s'exerce sur la masse. Donc l'accroissement de l'énergie cinétique est $E_{cf} - E_{c0} = E_p$.

Q3

La puissance moyenne développé est $P = \frac{\Delta_W}{\Delta_t} = \frac{E_p}{T} = \frac{\overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB}}{T}$.

Exo 4.2.3 - Traineau

Q1.a

3 forces s'exercent sur la masse m; la force de la pesanteur (verticale) $\overrightarrow{P}$, la force de réaction $\overrightarrow{R}$ (perpendiculaire au plan incliné) et la force de frottement statique $\overrightarrow{f}$ (parallèle au plan incliné). Comme la masse ne bouge pas, la somme des 3 forces est nulle.
On définit un repère orthonormé centré sur la masse m et parallèle au plan incliné. Dans ce repère, les 3 forces ont les coordonnées:

$$\begin{cases} P_x = -m.g.sin(\beta) & R_x = 0 & f_x = \|\overrightarrow{f}\| \\ P_y = -m.g.cos(\beta) & R_y = \|\overrightarrow{R}\| & f_y = 0 \end{cases}$$

Donc, on a $\|\overrightarrow{R}\| = m.g.cos(\beta)$ et $\|\overrightarrow{f}\| = m.g.sin(\beta)$.

Q1.b

Le coefficient de frottement statique k_s peut être déterminé pour l'angle minimum du plan incliné β_{min} faisant boug'e la masse m.

$$k_s = \frac{\overrightarrow{f_{max}}}{\overrightarrow{R}}$$

$$k_s = \frac{-m.g.sin(\beta_{min})}{-m.g.cos(\beta_{min})}$$

$$k_s = \tan(\beta_{min})$$

Q1.c

Ne marche pas pour $\beta = 60°$. Mais $\tan(6°) = 0.1$.

Q2.a

Le travail $W_{C \to D} = W_{C \to D}(\overrightarrow{f\prime}) + W_{C \to D}(\overrightarrow{R}) + W_{C \to D}(\overrightarrow{P})$. On a

$$\begin{cases} W_{C \to D}(\overrightarrow{R}) = 0 & La\, force\, \overrightarrow{R}\, est\, toujours\, perpendiculaire\, au\, deplacement. \\ W_{C \to D}(\overrightarrow{f'}) = \overrightarrow{f'}.l = -k_d.m.g.\cos(\beta).l \\ W_{C \to D}(\overrightarrow{P}) = -m.g.h = m.g.l.\sin(\beta) \end{cases}$$

Donc, $W_{C \to D} = m.g.l.(sin(\beta) - k_d.cos(\beta))$.

Q2.b

Le travail $W_{D \to E} = W_{D \to E}(\overrightarrow{f'}) + W_{D \to E}(\overrightarrow{R}) + W_{D \to E}(\overrightarrow{P})$. On a

$$\begin{cases} W_{D \to E}(\overrightarrow{R}) = 0 & La\, force\, \overrightarrow{R}\, est\, toujours\, perpendiculaire\, au\, deplacement. \\ W_{D \to E}(\overrightarrow{f'}) = \overrightarrow{f'}.l = -k_d.m.g.l' \\ W_{D \to E}(\overrightarrow{P}) = -m.g.h = 0 \end{cases}$$

Donc, $W_{C \to D} = -k_d.m.g.l'$.

Q2.c

Les forces étant toutes conservatives on a $E_m = W_{C \to D} + W_{D \to E} = 0$

$$m.g.l.(sin(\beta) - k_d.cos(\beta)) - k_d.m.g.l' = 0$$

$$l.(sin(\beta) - k_d.cos(\beta)) - k_d.l' = 0$$

$$(sin(\beta) - k_d.cos(\beta)) - k_d\frac{l'}{l} = 0$$

$$sin(\beta) - k_d.cos(\beta) - k_d.r = 0$$

$$sin(\beta) - k_d(r + cos(\beta)) = 0$$

$$k_d = \frac{sin(\beta)}{r + cos(\beta)}$$

Q2.d

On a

$$l' = \frac{l.(\sin(\beta) - k_d.\cos(\beta))}{k_d}$$

Donc $l' = 5\frac{\sin(6°)-0.05\cos(6°)}{0.05} = 5.48m$.

Exo 4.3.1

Q1

On a $F_g = G\frac{M_t.m}{(R_t+h)^2}$ avec $G = 6.674\,10^{-11}m^3.kg^{-1}.s^{-2}$, R_t le rayon de la terre et M_t la masse de la terre.

Q2

Le développement limité de $f(x)$ au point x_0 est $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + o(x - x_0)$. On a $f'(x) = n.(1+x)^{n-1}$. Donc,

$$f(x) = (1 + x_0)^n + n(1 + x_0)^{n-1}.(x - x_0) + o(x - x_0)$$

En prenant $x_0 = 0$, cela fait $f(x) = 1 + n.x^{n-1} + o(x)$.

Q3

On a $F_g = mg = G\frac{M_t.m}{(R_t+h)^2}$. Donc à petite altitude,

$$g = G\frac{M_t}{R_t^2(1 + \frac{h}{R_t})^2} = G\frac{M_t}{R_t(1 + 2\frac{h}{R_t})} = G\frac{M_t}{R_t^2}$$

$$g = 9.82$$

avec $R_t = 6370\,km$ et $M_t = 5.972\,10^{24}\,kg$.

Q4

On a $\int\frac{K}{x^2} = K\int\frac{1}{x^2} = \frac{-K}{x} + C$

Q5

On a

$$W_{0\to h} = \int_0^h f(x)dx = \int_0^h G\frac{M_t.m}{(R_t + x)^2}dx$$

Changement de variable $X = R_t + x$ donc $dX = dx$.

$$W_{0\to h} = \int_{R_t}^{R_t+h} G\frac{M_t.m}{X^2}dX = [-G\frac{M_t.m}{X} + C]_{R_t}^{R_t+h}$$

$$W_{0\to h} = -G\frac{M_t.m}{R_t + h} + G\frac{M_t.m}{R_t} = -G.M_t.m(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_t + h})$$

$$W_{0\to h} = -G.M_t.m(\frac{R_t + h - R_t}{R_t(R_t + h)}) = -G.M_t.m(\frac{h}{R_t(R_t + h)})$$

Lorsque h est petit devant R_t on a:

$$W_{0\to h} = -G.M_t.m(\frac{h}{R_t^2}) = -m.g.h$$

Exo 4.3.2

Q1

$$\int ax^2 + bx + c = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + d$$

Q2

On a $\overrightarrow{F} = -k.x.\overrightarrow{i}$, donc

$$E_p(x) = W_{0\to x}F(x) = \int_0^x F(x) = \int_0^x -k.x = [\frac{-k}{2}x^2]_0^x = -\frac{1}{2}k.x^2$$

Q3

L'énergie potentielle gravitationnelle est $E_p(x) = mgx$.
La forme de l'energie potentielle totale est $E_p = mgx - -\frac{1}{2}k.x^2$.

Exo 4.4.1

Q1

$$\int 2\,dx = 2x + C$$
$$\int Ax\,dx = \frac{1}{2}Ax^2 + C$$
$$\int -\frac{K}{x^2}\,dx = \frac{K}{x} + C$$

Q2

Une force est conservative si le calcul de son travail ne dépend pas du chemin parcouru. Donc, il suffit de montrer que

$$W_{A\to C}\overrightarrow{F} = W_{A\to B}\overrightarrow{F} + W_{B\to C}\overrightarrow{F}$$

Q3.a

$$W_{x_1\to x_2}\overrightarrow{F} = \int_{x_1\to x_2} -\frac{GmM}{x^2}dx = [\frac{GmM}{x}]_{x_1}^{x_2}$$
$$W_{A\to C}\overrightarrow{F} = \frac{GmM}{C} - \frac{GmM}{A}$$
$$W_{A\to B}\overrightarrow{F} + W_{B\to C}\overrightarrow{F} = \frac{GmM}{B} - \frac{GmM}{A} + \frac{GmM}{C} - \frac{GmM}{B} = \frac{GmM}{C} - \frac{GmM}{A} = W_{A\to C}\overrightarrow{F}$$

Conservative.

Q3.c

$$W_{x_1\to x_2}\overrightarrow{F} = \int_{x_1\to x_2} -kx\,dx = [\frac{1}{2}kx^2]_{x_1}^{x_2}$$
$$W_{A\to C}\overrightarrow{F} = \frac{1}{2}kC^2 - \frac{1}{2}kA^2$$
$$W_{A\to B}\overrightarrow{F} + W_{B\to C}\overrightarrow{F} = \frac{1}{2}kB^2 - \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}kC^2 - \frac{1}{2}kB^2 = \frac{1}{2}kC^2 - \frac{1}{2}kA^2 = W_{A\to C}\overrightarrow{F}$$

Conservative.

Q3.d

$$W_{x_1 \to x_2} \overrightarrow{F} = \int_{x_1 \to x_2} -\gamma \dot{x}\, dx$$

Cette intégrale d'epend de la vitesse au point x. La vitesse est indépendente de la position de x donc la force est non conservative.

Q3.e

$$W_{x_1 \to x_2} \overrightarrow{F} = \int_{x_1 \to x_2} -\Lambda x\, dx = [\frac{1}{2}\Lambda x^2]_{x_1}^{x_2}$$

$$W_{A \to C} \overrightarrow{F} = \frac{1}{2}\Lambda C^2 - \frac{1}{2}\Lambda A^2$$

$$W_{A \to B} \overrightarrow{F} + W_{B \to C} \overrightarrow{F} = \frac{1}{2}\Lambda B^2 - \frac{1}{2}\Lambda A^2 + \frac{1}{2}\Lambda C^2 - \frac{1}{2}\Lambda B^2 = \frac{1}{2}\Lambda C^2 - \frac{1}{2}\Lambda A^2 = W_{A \to C} \overrightarrow{F}$$

Conservative.

Exo 4.4.2

Q1

L'énergie potentielle d'une masse m est à 1000m d'altitude est: $E_p = W_{0 \to 1000} mg\, dx = [mgx]_0^{1000} = 1.g.1000 - 1.g.0 = 9810$

Q2

L'énergie cinétique au moment de l'impact est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Comme il n'y a pas de frottement et que les forces sont conservatives alors l'énergie est conservée. Donc

$$E_p = E_c$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 9810$$

$$v = \sqrt{2 * 9810} = 140m/s$$

Q3

Durant la chute l'énergie potentielle est de :

$$E_p(x) = W_{x \to 1000} mg\, dx = [mgx]_x^{1000} = 1.g.1000 - 1gx = 9810 - gx$$

L'énergie cinétique est:

$$E_c(x) = \frac{1}{2}mv(x)^2 = \frac{1}{2}v(x)^2$$

L'énergie est conserv'ee donc

$$E_c(x) = E_p(x)$$

$$v(x) = \sqrt{2(9810 - gx)}$$

Exo 4.4.3

Q1

La force du poids est une force conservative donc elle ne dépend pas du chemin parcourue mais uniquement du point de départ et d'arrivée.

Q2

La puissance représente l'énergie transférée uniformement (ie. le travail) pendant une unité de temps, $P = \frac{W}{\Delta t}$. La vitesse est identique mais la distance parcourue est différente pour monter une force verticalement ou sur un plan incliné (elle est plus courte verticalement). Donc le temps est 'egalement plus court. $P_{vert} = \frac{W}{\Delta_{t1}}$ et $P_{incline} = \frac{W}{\Delta_{t2}}$ avec $t1 < t2$. Il faut donc une plus grande puissance pour monter une charge verticalement.

Q3

Le travail est égale à $W_{A \to B}(\overrightarrow{P}) = -mg(z_b - z_a) = -mgh$. Il est négatif.
Si il existait des frottements alors le travail du poids serait identique mais le travail global nécessaire pour monter la charge serait plus grand.

Exo 4.4.4

Q1

Le travail est égale à $W_{A \to B}(\overrightarrow{P}) = -mg(z_b - z_a) = -mgh$.

Q2

La puissance représente l'énergie transférée uniformement (ie. le travail) pendant une unité de temps. Comme l'accélération est constante, la vitesse croit uniformément. Pour une même unité de temps, la distance parcourue est plus grande (ie. la vitesse augmente), donc le travail nécessaire plus grand également. La puissance n'est dons pas constante mais augmente au fil du temps.

Q3

La variation d'énergie cinétique est $\frac{1}{2}m(v_i + a.t)^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}ma^2t^2 + mv_iat$
La variation d'énergie potentielle est $-mg(z_b - z_a) = -mg((z_a + \frac{1}{2}at^2 - z_a) = -\frac{1}{2}mgat^2$

Q4

Lorsque on lache la masse à t_l, on a $a_l = 0$, $v_l = a.t_l$ (vitesse atteinte depuis le début de l'accélération) et $x_l = \frac{1}{2}at_l^2$ ((altitude atteinte depuis le début de l'accélération). Il n'y a pas de frottement, donc $E_{m_{t_l}} = \frac{1}{2}ma^2t_l^2 - \frac{1}{2}mgat_l^2 = \frac{1}{2}mat_l^2(a - g)$.
Et $E_m(t) = E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) - mg(x_l + x(t) - x_l) = \frac{1}{2}mv^2(t) - mgx(t)$.
La masse monte jusqu'à ce que sa vitesse soit nulle (ie v(t) = 0) et l'énergie m'ecanique est préservée.

$$E_{m_{t_l}} = \frac{1}{2}mat_l^2(a - g) = E_m(t_f) = -mgx(t_f)$$

$$x(t_f) = \frac{at_l^2(g - a)}{2g}$$

Exo 4.4.5

À t_0, lorsque la masse est lachée, son son énergie potentielle $E_p = mgh$ et son énergie cinétique est $E_c = 0$, donc $E_{m_0} = mgh$.
À t_1, lorsque la masse arrive sur le ressort son énergie potentielle $E_p = mgl_0$ et son énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}mv_1^2$. $E_{m_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgl_0$.
À t, lorsque la masse est sur le ressort, il y a 2 forces qui s'exerce sur la masse; le poids et la force de rappel du ressort. $F_p(t) = mg$ et $F_r(t) = k(l_0 - x(t))$. Donc $E_p(t) = mgx(t) + kl_0x(t) - \frac{1}{2}kx^2(t)$ et son énergie cinétique est $E_c(t) = \frac{1}{2}mv^2(t)$. Donc $E_m(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + mgx(t) + kl_0x(t) - \frac{1}{2}kx^2(t)$.

La position la plus basse est lorsque la vitesse de la masse est nulle; $v(t) = 0$. Donc

$$mgx(t) + kl_0 x(t) - \frac{1}{2}kx^2(t) = mgh$$

$$\frac{1}{2}kx^2(t) - x(t)(kl_0 + mg) + mgh = 0$$

Exo 4.4.7

Q1

Mouvement rectiligne et ??.

Q2

Le positron est soumis à une seule force $\overrightarrow{F}$, donc $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$. L'équation différentielle est $m\ddot{x} - \frac{ke^2}{x^2} = 0$. On ne sait pas résoudre cette équation différentielle.

Q3

$$W_{A\to B}\overrightarrow{F} = \int_{A\to B} \frac{ke^2}{x^2} = [-\frac{ke^2}{x}]_{x_a}^{x_b} = -\frac{ke^2}{x_b} + \frac{ke^2}{x_a}$$

Quand B tend vers l'infini, le travail devient constant et égal à $\frac{ke^2}{x_a}$.

Q4

L'énergie potentielle $E_p(x) = W_{\infty\to x}\overrightarrow{F} = -\frac{ke^2}{x} + \frac{ke^2}{\infty} = -\frac{ke^2}{x}$.

Q4

On a $E_m = E_p + E_c$, les forces étant conservatives, l'énergie mécanique est conservée. Quand $x \to \infty$, on a $E_m = E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$ car $\lim_{x\to\infty} U(x) = 0$.
Au point x, on a $E_m(x) = E_c(x) + E_p(x) = \frac{1}{2}mv^2(x) - \frac{ke^2}{x} = \frac{1}{2}mv_0^2$.