https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_du_chien

Exercice 1

On a $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $\beta(t) = (a, z(t))$, $\alpha(0) = (0,0)$ et $\alpha'(0) = (1,0)$. Donc on a $\beta(0) = (a,0)$ car $\alpha'(t)$ est orienté vers $\beta(t)$.

1.1 - Calculer $\alpha'(t)$

Comme $\alpha'(t)$ est sur la droite allant de $(x(t), y(t))$ vers $(a, z(t))$, on a $\frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{z(t)-y(t)}{a-x(t)}$ et $\alpha'(t) = (1, \frac{z(t)-y(t)}{a-x(t)})$.

1.2 - Calculer $\beta(t)$

Le point $\beta(t)$ est à l'intersection de la droite verticale passant par $(a,0)$ et de la droite passant par le point $(x(t), y(t))$ et de coefficient directeur $\frac{dy(t)}{dx(t)}$. La droite s'écrit $y = \frac{dy(t)}{dx(t)}.x + c$ avec $c = y(t) - \frac{dy(t)}{dx(t)}.x(t)$
β se deplacant sur la droite verticale $(a,0)$ et est au point (a,0) à t_0, on a $z(t) = y$ Donc $z(t) = y = \frac{dy(t)}{dx(t)}.a + y(t) - \frac{dy(t)}{dx(t)}.x(t) = \frac{dy(t)}{dx(t)}(a - x(t)) + y(t)$.
On a $\beta(t) = (a, \alpha'(t)(a - x(t)) + y(t))$

1.3 - Calculer $\beta'(t)$

β se déplacant sur un droite verticale, on a:

$$\beta'(t) = (0, (\frac{dy(t)}{dx(t)}(a - x(t)) + y(t))') = (0, -\frac{dy(t)}{dx(t)} + (a - x(t))\alpha''(t) + \frac{dy(t)}{dx(t)} = (0, (a - x(t))\alpha''(t))$$

1.4 - relation entre $\beta'(t)$ et $\alpha'(t)$

La vitesse $\alpha'(t)$ est toujours proportionnelle à la vitesse $\|\beta'(t)\| = \frac{1}{k}.\|\alpha'(t)\|$. Comme k=1 on a, $\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(t)\|$ La distance parcourue par β est également proportionelle à la distance parcourue par α.

$$\sqrt{0^2 + ((a - x(t))\alpha''(t))^2} = (a - x(t))\alpha''(t) = (a - x(t))\frac{dy(t)}{d^2x(t)}$$

$$\sqrt{(\frac{z(t) - y(t)}{(a - x(t))})^2 + 1^2} = \sqrt{\left(\frac{\frac{dy(t)}{dx(t)}(a - x(t)) + y(t) - y(t)}{(a - x(t))}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\left(\frac{dy(t)}{dx(t)}\right)^2 + 1}$$

Il reste a résoudre l'équation différentielle:

$$(a - x(t))\frac{dy(t)}{d^2x(t)} = \sqrt{\left(\frac{dy(t)}{dx(t)}\right)^2 + 1}$$

Donc, renomage $y' = \frac{dy(t)}{dx(t)}$ et séparation des variables:

$$\frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = \frac{dx}{a - x(t)}$$

En intégrant on a:

$$\ln(y' + \sqrt{1 + y'^2}) = -\ln(a - x) + C$$

À l'instant $t = 0$, les conditions initiales sont $x = 0$ et $y' = 0$, ce qui donne pour la constante :

$$C = \ln(a)$$

Donc

$$\ln(y' + \sqrt{1+y'^2}) = -\ln(a-x) + \ln(a) = \ln\left(\frac{a}{a-x}\right)$$

ou

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = \frac{a}{a-x}$$

En faisant l'égalité des opposés on a:

$$-\ln(y' + \sqrt{1+y'^2}) = \ln\left(\frac{1}{y' + \sqrt{1+y'^2}}\right) = \ln\left(\frac{y' - \sqrt{1-y'^2}}{(y' + \sqrt{1+y'^2})(y' - \sqrt{1+y'^2})}\right) = \ln\left(\frac{y' - \sqrt{1-y'^2}}{y'^2 - (1+y'^2)}\right)$$

$$= \ln(-(y' - \sqrt{1+y'^2})) = -\ln\left(\frac{a}{a-x}\right) = \ln\left(\frac{a-x}{a}\right)$$

Ou

$$y' - \sqrt{1+y'^2} = -\frac{a}{a-x}$$

En additionnant les deux on obtient

$$2y' = \frac{a}{a-x} + \frac{a-x}{a}$$

Enfin en intégrant:

$$y = \frac{x^2 - 2ax}{4a} + \frac{a}{2}\ln\frac{a}{a-x}.$$

Cette équation est équivalente à celle à montrer.

$$y(t) = \frac{a}{4}\left(\left(\frac{a-x(t)}{a}\right)^2 - 1 - 2\ln\left(\frac{a-t}{a}\right)\right) = \frac{a}{4}\left(\frac{a^2 - 2ax(t) + x^2(t)}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} - 2\ln\left(\frac{a-t}{a}\right)\right)$$

$$= \frac{-2ax(t) + x^2(t)}{4a} - \frac{a}{2}\ln\left(\frac{a-t}{a}\right)$$

Exercice 2

Lorsque $k \neq 1$, il faut résoudre l'équation (voir question précédente).

$$(a - x(t))\frac{dy(t)}{d^2x(t)} = \frac{1}{k}\sqrt{\left(\frac{dy(t)}{dx(t)}\right)^2 + 1}$$

Donc, on recommance renomage $y' = \frac{dy(t)}{dx(t)}$ et séparation des variables:

$$\frac{y'}{\sqrt{y'^2+1}} = \frac{1}{k}.\frac{dx}{a - x(t)}$$

En intégrant on a:

$$\ln(y' + \sqrt{1+y'^2}) = -\frac{1}{k}\ln(a-x) + C$$

À l'instant $t = 0$, les conditions initiales sont $x = 0$ et $y' = 0$, ce qui donne pour la constante :

$$C = \frac{1}{k}\ln(a)$$

Donc

$$\ln(y' + \sqrt{1+y'^2}) = -\frac{1}{k}\ln(a-x) + \frac{1}{k}\ln(a) = \ln\left(\sqrt[k]{\frac{a}{a-x}}\right)$$

ou

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = \sqrt[k]{\frac{a}{a-x}}$$

De la même facon que pour la question 1, on obtient

$$y' - \sqrt{1+y'^2} = -\sqrt[k]{\frac{a-x}{a}}$$

En additionnant les 2, on a:

$$2y' = \sqrt[k]{\frac{a}{a-x}} - \sqrt[k]{\frac{a-x}{a}}$$

Enfin en intégrant:

$$y = \frac{k(a-x)}{2}\left(\frac{1}{k+1}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{1-k}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{-\frac{1}{k}}\right) + C$$

Pour Pour x = 0 ; y = 0 on a

$$C = \frac{ka}{k^2-1}$$

Donc

$$y = \frac{k(a-x)}{2}\left(\frac{1}{k+1}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{1-k}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{-\frac{1}{k}}\right) + \frac{ka}{k^2-1}$$

$$y = \frac{k(a-x)}{2(k+1)}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{1}{k}} + \frac{k(a-x)}{2(1-k)}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{-\frac{1}{k}} + \frac{ka}{k^2-1}$$

$$y = \frac{ka(a-x)}{2a(k+1)}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{1}{k}} + \frac{ka(a-x)}{2a(1-k)}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{-\frac{1}{k}} + \frac{ka}{k^2-1}$$

$$y = \frac{ka}{2(k+1)}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{1+\frac{1}{k}} + \frac{ka}{2(1-k)}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{1-\frac{1}{k}} + \frac{ka}{k^2-1}$$

Comme $a = 1$, on obtient la même équation que celle demandée:

$$y(t) = \frac{k}{k^2-1} + \frac{k\,(1-t)^{1+1/k}}{2\,(1+k)} + \frac{k(1-t)^{1-1/k}}{2\,(1-k)}$$

Exercice 3

Le poursuivant rattrape le fugitif à l'instant t si l'éqution $(x(t), y(t)) = (a, z(t))$ a une solution. Comme k=1, les deux ont touours la même vitesse. Par conséquent, la distance parcourue par le poursuivant est égale à la distance parcourue par le fugitif a tout instant. La distance minimale parcourue par le poursuivant à l'instant t est égale à $\sqrt{(x(t)-x(t_0))^2 + (y(t)-y(t_0))^2}$ (ie ligne droite depuis $(x(t_0), y(t_0))$). La distance parcourue par le fugitif est égale à $\sqrt{(a-a)^2 + (z(t)-z(t_0))^2}$. À l'instant t_0, le poursuivant est à $(0,0)$ et le fugitif à $(a,0)$ car le vecteur vitesse du poursuivant est $(1,0)$ et pointe toujours vers le fugitif. On a donc:

$$\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{z^2(t)}$$

On cherche l'instant t tel que $(x(t), y(t)) = (a, z(t))$ donc

$$\sqrt{a^2 + z^2(t)} = \sqrt{z^2(t)}$$

Comme a est différent de zéro, cette équation n'a pas de solution, donc le poursuivant ne peut pas rattraper le figutif lorsque $k = 1$.

QED