

Questions pour le test 4

Suites récurrentes, fonctions réciproques, primitives, intégrales

A préparer pour la semaine du 2 décembre

Pour chaque affirmation suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1.— Le terme général de la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$, est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1.$$

2.— Le terme général de la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$, est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^{2^n}.$$

3.— La suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$, n'a pas de limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

4.— La suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \arctan(\frac{u_n}{2})$, est convergente.

5.— La fonction $\phi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = x^{\sqrt{3}}$ si $x > 0$ et $\phi(x) = -(-x)^{\sqrt{3}}$ si $x < 0$ se prolonge en 0 en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , bijective de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

6.— Pour tout $x \in [0, \pi]$, on a l'égalité $\arcsin(\sin x) = x$.

7.— Si $\phi :]-1, 1[\rightarrow]-1, 1[$ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 , alors ϕ^{-1} est également de classe \mathcal{C}^1 .

8.— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité suivante :

$$2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

9.— Si f est une bijection impaire de $[-1, 1]$ sur $[-2, 2]$, alors $f^{-1} : [-2, 2] \rightarrow [-1, 1]$ est impaire.

10.— On a la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) = 1.$$

11.— On a la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}.$$

12.— On a la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}.$$

13.— On a l'égalité

$$\int_0^1 (x-1)^2 e^x dx = 2e - 5.$$

14.— Si f est une fonction continue croissante sur \mathbb{R} , la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \int_{x^3}^{x^3+1} f(t) dt$ est également croissante sur \mathbb{R} .

15. — On a l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{3}.$$

16. — On a l'égalité suivante :

$$\int_{\exp(\exp(2))}^{\exp(\exp(1))} \frac{dx}{x(\ln x)(\ln(\ln x))} = -\ln 2.$$

Il y a 9 affirmations vraies et 7 affirmations fausses
