

### Question 1

On voit clairement sur le nuage de points (circonference/hauteur) que cela suit une droite. On essaye de trouver les valeurs de la droites qui minimisent le risque quadratique.

### Question 2

Pour minimiser la fonction  $\varphi(\beta_1, \beta_2)$  il faut trouver dériver la fonction par rapport à  $\beta_1$  et  $\beta_2$  et trouver les valeurs qui annulent les 2 dérivées.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} &= \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)^2}{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \beta_1 Y_i - \beta_2 x_i Y_i - \beta_1 Y_i + \beta_1^2 + \beta_1 \beta_2 x_i - \beta_2 x_i Y_i + \beta_2 x_i \beta_1 + \beta_2^2 x_i^2}{\beta_1} \\ &= \sum_{i=1}^n -Y_i - Y_i + 2\beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_2 x_i = 2 \sum_{i=1}^n -Y_i + \beta_2 x_i + \beta_1 \\ \frac{\partial \varphi(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} &= \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)^2}{\beta_2} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \beta_1 Y_i - \beta_2 x_i Y_i - \beta_1 Y_i + \beta_1^2 + \beta_1 \beta_2 x_i - \beta_2 x_i Y_i + \beta_2 x_i \beta_1 + \beta_2^2 x_i^2}{\beta_2} \\ &= \sum_{i=1}^n -x_i Y_i + \beta_1 x_i - x_i Y_i + \beta_1 x_i + 2\beta_2 x_i^2 = 2 \sum_{i=1}^n x_i (-Y_i + \beta_2 x_i + \beta_1) \end{aligned}$$

On cherche  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  les valeurs qui annulent le système

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i (-Y_i + \beta_2 x_i + \beta_1) = 0 \\ \sum_{i=1}^n -Y_i + \beta_2 x_i + \beta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n -Y_i x_i + \sum_{i=1}^n \beta_2 x_i^2 + \sum_{i=1}^n \beta_1 x_i = 0 & (1) \\ \sum_{i=1}^n -Y_i + \sum_{i=1}^n \beta_2 x_i + \sum_{i=1}^n \beta_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n -Y_i x_i + \beta_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i = 0 & (1) \\ \sum_{i=1}^n -Y_i + \beta_2 \sum_{i=1}^n x_i + n\beta_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

On fait (3) =  $n(1) - (2) \sum_{i=1}^n x_i$

$$\begin{cases} n \sum_{i=1}^n -Y_i x_i + n\beta_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n Y_i \sum_{i=1}^n x_i - \beta_2 (\sum_{i=1}^n x_i)^2 = 0 & (3) \\ \sum_{i=1}^n -Y_i + n\beta_2 \sum_{i=1}^n x_i + n\beta_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -n \sum_{i=1}^n Y_i x_i + \sum_{i=1}^n Y_i \sum_{i=1}^n x_i = \beta_2 (\sum_{i=1}^n x_i)^2 - n\beta_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 & (3) \\ \sum_{i=1}^n -Y_i + n\beta_2 \sum_{i=1}^n x_i + n\beta_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_2 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \sum_{i=1}^n x_i - n \sum_{i=1}^n Y_i x_i}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2} & (3) \\ \beta_1 = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n Y_i - n\beta_2 \sum_{i=1}^n x_i) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_2 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \sum_{i=1}^n x_i - n \sum_{i=1}^n Y_i x_i}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2} & (3) \\ \beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i Y_i - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n Y_i}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2} & (2) \end{cases}$$

### Question 3

Voir Python On obtient  $\beta_1 = 9.037475668452768$  et  $\beta_2 = 0.257137855007109$ .

### Question 4

Il semble raisonnable de dire que la circonférence (resp. la hauteur) d'un eucalyptus suit une loi normale. Ceci est visible sur le nuage de points car il y a plus de points au centre. Comme les 2 variables aléatoires suivent une loi normale, elles sont indépendantes et identiquement distribuées.

Si  $X$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  et  $Y = AX + b$  alors,  $Y$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$

Si  $X$  (resp.  $Y$ ) suit une loi normale  $\mathcal{N}(m_x, \sigma_x^2)$  (resp.  $\mathcal{N}(m_y, \sigma_y^2)$ ) alors  $X + Y$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(m_x + m_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ .

Dans notre cas on a  $e_i = Y_i - \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$ . Donc  $e_i$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(-\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 m_x + m_y, \hat{\beta}_2^2 \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ .

On a par définition  $m_y = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 m_x$ . Donc  $E(e_i) = 0$  et  $\sigma_{e_i} = \hat{\beta}_2^2 \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ .

### Question 5

En cherchant à minimiser  $\|Y - X\beta\|^2$ , on cherche à trouver l'élément de  $F$  le plus proche de  $Y$  au sens de la distance euclidienne. Il s'agit de la projection orthogonale de  $Y$  sur  $F$ . Comme  $z \in F$ , si et seulement si  $z = X\beta$ , on cherche  $\hat{\beta}$  tel que  $X\hat{\beta} = P_F(Y)$ .

Comme  $X\hat{\beta} = P_F(Y)$ , on a  $Y - X\hat{\beta} = Y - P_F(Y)$  qui est un vecteur orthogonal à  $X$  et par conséquent aussi à  $X\theta$ . Le produit scalaire de 2 vecteurs orthogonaux est nul, donc  $\forall \theta \in \mathbb{R}^3 \langle Y - X\hat{\beta}, X\theta \rangle = 0$ .

### Question 6

Pour trouver le minimum par rapport à  $\beta$ , il suffit de dériver l'expression par rapport à  $\beta$  et annuler l'expression. On remarque que  $\sum_{i=1}^n (Y - X\beta)^2 = (Y - X\beta)^t (Y - X\beta)$

$$(Y - X\beta)^t (Y - X\beta) = (Y^t - \beta^t X^t)(Y - X\beta) = Y^t Y - Y^t X\beta - \beta^t X^t Y + \beta^t X^t X\beta$$

et

$$\frac{\partial (Y - X\beta)^t (Y - X\beta)}{\partial \beta} = -Y^t X + \beta^t X^t X$$

On cherche  $\hat{\beta}$  tel que

$$\begin{aligned} -Y^t X + \hat{\beta}^t X^t X &= 0 \\ (\hat{\beta}^t X^t X)^t &= (-Y^t X)^t \end{aligned}$$

Donc

$$\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t Y$$

### Question 7

Voir Python

### Question 8

Les  $y_i$  sont identiques à ceux de la question 4. Ils suivent une loi normale.

??? pour le reste.

### Test de Student

### Question 9

Soient  $Z$  une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite et  $U$  une variable indépendante de  $Z$  et distribuée suivant la loi du chi-deux à  $k$  degrés de liberté. Par définition la variable  $T = \frac{Z}{\sqrt{U/k}}$  suit une loi de Student à  $k$  degrés de liberté.

Prenons  $U = (n - 3) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$  et  $Z = \hat{\beta}_3$ . On sait que  $U$  suit une loi de chi-deux à  $(n - 3)$  degrés de liberté (voir question précédente) et que  $Z$  suit une loi normale centrée et réduite. Donc

$$T = \frac{\hat{\beta}_3}{\sqrt{\frac{(n-3)\hat{\sigma}^2}{n-3}}} = \frac{\hat{\beta}_3}{\hat{\sigma}} = \frac{\hat{\beta}_3\sigma}{\hat{\sigma}}$$