Rappel de cours

Méthode de Newton

-

Exercice 1

Exercice 1.1.a

La définition de "f est dérivable en x_0" (note $f'(x_0)$) si la limite existe et est finie.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pour $x_0 = 0$, on a

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Exercice 1.1.b

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} 2\frac{f(2x) - f(0)}{2x} - \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2 \lim_{\frac{X}{2} \to 0} \frac{f(X) - f(0)}{X} - \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$= 2 \lim_{X \to 0} \frac{f(X) - f(0)}{X} - \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2f'(0) - f'(0) = f'(0)$$

Exercice 1.2.a

1 - Montrons que f dérivable en 0 $\implies$ g dérivable en 0.
g dérivable en 0 si il existe $a = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - lx - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - l$$

f est dérivable en 0 donc $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ existe, l existe également donc a existe.

2 - Montrons que g dérivable en 0 $\implies$ f dérivable en 0.
g dérivable en 0 donc il existe $a = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$

$$a = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - lx - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - l$$

Par hypothèse a et l existe, par conséquent $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ existe $(= a + l)$. Donc f est dérivable en 0.

Exercice 1.2.b

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right) =$$

QED.