Rappel de cours

Definition 1. Une suite de réels est dite *Suite de Cauchy* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } m \geq N) \implies |u_n - u_m| \leq \epsilon$$

Exercice 1.1

Exercice 1.1.1

On a $m > 0$ et $n > 0$ donc $\frac{m.n}{(n+m)^2} > 0$, donc 0 est un minorant.

$$\frac{m.n}{(n+m)^2} = \frac{1}{\frac{m}{n} + 2 + \frac{n}{m}}$$

Il faut montrer que

$$\begin{array}{l} \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2 \\ \frac{m^2+n^2}{m.n} \geq 2 \\ m^2 + n^2 - 2m.n \geq 0 \\ (m-n)^2 \geq 0 \end{array}$$

Donc 1/4 est un majorant.

On a 1/4 est la borne supérieure de A si il n'existe aucun majorant inférieur à 1/4. On a $1/4 \in A$ pour $m = n = 1$. Donc il n'existe pas de plus petit majorant.

On a 0 est la borne inférieure de A si il n'existe aucun minorant supérieur à 0. Quand $n = 1$, on a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{(m+1)^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0$$

Donc il n'exise pas de minorant supérieur à 0.

Exercice 1.1.2

Montrons que 2 est un majorant et 0 un minorant.

On a $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > 0$ car $n, m \in \mathbb{N}^*$. DOnc 0 est un minorant.

On a $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{m+n}{n.m}$, montrons que

$$\begin{array}{l} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq 2 \\ \frac{m+n}{n.m} \leq 2 \\ m + n \leq 2m.n \\ m + n - 2m.n \leq 0 \\ m(1-n) + n(1-m) \leq 0 \end{array}$$

Vrai car $(1-n) \leq 0$, $(1-m) \leq 0$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$. Donc 2 est un majorant.

On a 2 est la borne supérieure de A si il n'existe aucun majorant inférieur à 2. On a $2 \in A$ pour $m = n = 1$. Donc il n'existe pas de plus petit majorant.

On a 0 est la borne inférieure de A si il n'existe aucun minorant supérieur à 0. On a

$$\lim_{m\to\infty, n\to\infty,} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \lim_{m\to\infty, n\to\infty,} \frac{1}{m} + \lim_{m\to\infty, n\to\infty,} \frac{1}{n} = 0$$

Donc il n'exise pas de minorant supérieur à 0.

Exercice 1.1.3

La fonction $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ est strictement croissante pour $x \leq -3$ ($f'(x) = \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$). Donc $f(-3) = 2$ est la borne supérieure de A. On a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+1/x}{1+2/x} = 1$$

Donc 1 est la borne inférieure. Oui la borne supérieure est atteinte pour $x = -3$ mais pas la borne inférieure car c'est une limite.

Maintenant si on prend $x \leq 3$ c'est autre chose car $\sup(A) = \infty$ et $\inf(A) = -\infty$ quand $x \to -2$.

Exercice 1.1.4

Comme l'ensemble A est borné alors il existe $\sup(A)$ et $\inf(A)$. Divisons en 3 cas; $x < y$, $x = y$, et $x > y$.

Pour le cas $x = y$ on a $0 \in A$. Pas très intéressant car $|x - y| \geq 0$. Donc, 0 n'est pas un majorant.

Pour le cas $x > y$ on a $|x-y| = x-y$. La plus grande valeur possible est quand $x = \sup(A)$ et $y = \inf(A)$ (ie. plus grand écart possible) donc $|\sup(A) - inf(A)|$.

Pour le cas $x < y$ on a $|x - y| = y - x$. La plus grande valeur possible est quand $x = \inf(A)$ et $y = \sup(A)$ (ie. plus grand écart possible) donc $|\sup(A) - inf(A)|$.

Exercice 1.1.5

$\sup(|f(x)|) = 2$ car

$]-\infty, -1[$	$\|f(x)\| = 0$
$[-1, 0[$	$\|f(x)\| = 1$
$[0, 1]$	$\|f(x)\| = 1$
$]1, 2]$	$\|f(x)\| = 2$
$]2, \infty[$	$\|f(x)\| = 0$

Exercice 1.2

Exercice 1.2.1

On voit bien que cela diverge, car $1/n$ diverge. Donc il faut trouver un contre-exemple pour n et m. Prenons pour commencer $m = n + 1$ on a $|u_m - u_n| = \frac{1}{n+1}$, pour un ϵ donné on peut uoujors trouver un n tel que $1/n < \epsilon$. donc pas bon contre-exemple. Il faut éliminer les n pour trouver une constante.

Prenons $m = 2n$, $|u_m - u_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Là, c'est mieux. On a, pour $m = 2n$, $|u_m - u_n| > \frac{1}{2}$ donc la suite n'est pas de Cauchy (car si on prend $\epsilon = 1/3$, la propriété n'est pas vérifée pour $m = 2n$).

La suite n'est pas de Cauchy et elle est croissante donc elle diverge. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 1.2.2

$$\begin{array}{lll} u_2 & \frac{u_0+u_1}{2} & \\ u_3 & \frac{u_1+u_2}{2} & = \frac{u0+3u_1}{4} \\ u_4 & \frac{u_2+u_3}{2} & = \frac{3u0+5u_1}{8} \\ u_5 & \frac{u_3+u_4}{2} & = \frac{5u0+7u_1}{16} \end{array}$$

Calculons $|u_{n+1} - u_n|$

$$|\frac{u_{n-1} + u_n}{2} - \frac{u_{n-2} + u_{n-1}}{2}| = |\frac{u_n - u_{n-2}}{2}| = |\frac{\frac{u_{n-2}+u_{n-1}}{2} - u_{n-2}}{2}| = |\frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{2^2}|$$

Si n est pair alors

$$|u_{n+1} - u_n| = |\frac{u_1 - u_0}{2^n}| = \frac{|u_1 - u_0|}{2^n}$$

si n est impair alors

$$|u_{n+1} - u_n| = |\frac{u_2 - u_1}{2^(n-1)}| = |\frac{\frac{u_0+u_1}{2} - u_1}{2^(n-1)}| = |\frac{u_0 - u_1}{2^n}| = \frac{|u_0 - u_1|}{2^n}$$

Exercice 1.2.3

Preuve par récurrence. Quand $p = n + 2$ on a $u_p = \frac{u_n+u_{n+1}}{2}$ donc u_p est la moyenne entre u_n et u_{n+1} donc c'est compris entre u_n et u_{n+1}. Si $p > n + 2$ alors u_p compris entre u_n et u_{n+1} alors u_{p+1} est compris entre u_n et u_{n+1}. $u_{p+1} = \frac{u_{p-1}+u_p}{2}$, c'est la moyenne entre u_{p-1} et u_p mais u_p u_{p-1} compris entre u_n et u_{n+1} donc leur moyenne est aussi comptris entre u_n et u_{n+1}.

Exercice 1.2.4

Prenons N tel que $\frac{|u_0-u_1|}{2^N} < \epsilon$, montrons que $\forall m, n > N, |u_n - u_m| \leq \epsilon$. On sait que $|u_{N+1} - u_N| \leq \epsilon$ et que u_m et u_n sont compris entre u_N et u_{N+1} donc $|u_n - u_m| \leq \epsilon$. Donc la suite est de Cauchy, donc elle converge.