## Rappel de cours

**Definition 1.** Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes ssi:

- $(u_n)_{n\geq 0}$ est croisssante et $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
- $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n)_{n\geq 0} = 0$

## Exercice 3

Pour que $\sum c_n z^n$ converge, il suffit de montrer, par le critère d'Abel, que $\exists M, \forall n, |\sum_{k=0}^{n} z^k| \leq M$. On a

$$|\sum_{k=0}^{n} z^k| = \left|1.\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{1+|z^{n+1}|}{|1-z|} < \frac{2}{|1-z|}$$

car $|z| \leq 1$ et $|z^n| \leq 1$. On a trouvé un $M = \frac{2}{1-|z|}$, ce qui permet de montrer que $\sum c_n z^n$ converge.

## Exercice 4

### Exercice 4.1.a

Calculons

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}} = \frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

On a $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$ donc $u_n \ {}_{n\to\infty} v_n$

### Exercice 4.1.b

$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge?

1. Y a-t-il Convergence absolue? $\sum |\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}| = \sum \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|$ Cette suite diverge. Donc il n'y a pas de convergence absolue.
2. Cas Special Série Alternée? La série est alternée car $(-1)^n$ est alternée et $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est positif. Il faut montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0. Ce qui est vrai quand $n \to \infty$. Donc, la série de terme général $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

### Exercice 4.2

### Exercice 4.3

### Exercice 4.4

## Exercice 5

### Exercice 5.1

$$\begin{aligned} u_n - \frac{(-1)^n}{n} &= \frac{1}{\ln(n)+(-1)^n n} - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{n}{n(\ln(n)+(-1)^n n)} - \frac{(-1)^n(\ln(n)+(-1)^n n)}{n(\ln(n)+(-1)^n n)} \\ &= \frac{n-((-1)^n(\ln(n)+(-1)^n n))}{n(\ln(n)+(-1)^n n)} = \frac{n-(-1)^n\ln(n)-(-1)^n(-1)^n n}{n(\ln(n)+(-1)^n n)} = \frac{-(-1)^n\ln(n)}{n(\ln(n)+(-1)^n n)} \\ &= \frac{-\ln(n)}{(-1)^n n\ln(n)+n^2)} = \frac{\ln(n)}{n}\frac{-1}{(-1)^n\ln(n)+n} \end{aligned}$$

??

### Exercice 5.2

On a

$$u_n = \left(u_n - \frac{(-1)^n}{n}\right) - \frac{(-1)^n}{n}$$

Avec $u_n - \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge et $\frac{(-1)^n}{n}$ qui converge aussi (C.S.S.A avec $v_n = \frac{1}{n}$). Donc la série de terme général $u_n$ converge (somme de 2 séries qui convergent).

## Exercice 6

### Exercice 6.a

$$a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

Prenons $x = \frac{k}{n}$, on a $dx = \frac{1}{n}$ donc

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_1^2 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(|1+x|]_1^2 = \ln(3) - \ln(2) = \ln(\frac{3}{2})$$

### Exercice 6.b

$$b_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$$

## Exercice 7

### Exercice 7.a

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

Prenons $x = \frac{k}{n}$, on a $dx = \frac{1}{n}$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(|1+x|]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

### Exercice 7.b

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

Prenons $x = \frac{k}{n}$, on a $dx = \frac{1}{n}$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \arctan(1)$$

### Exercice 7.c

$$c_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2+k^2)^{1/n}$$

QED