Exercice 1

Exercice 1.1

On a $dim\mathbb{R}^2 = 2$ et $dim\mathbb{R}^3 = 3$

Exercice 1.2

Exercice 2

Non. Car une application linéaire doit satisfaire $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. On sait que $f(\lambda x)$ et $f(x)$ sont dans le cercle $C(0,1)$. Donc pour un $\lambda > 1$, on ne peut pas avoir $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Exercice 3

Famille libre? Il faut résoudre:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 1\lambda_3 & = 0 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + -2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Famille non libre car on peut λ_3 n'est pas égal à 0.

Famille génératrice? Non car du résultat précédent, on peut exprimer λ_1 et λ_2 en fonction de λ_3.

On a $\lambda_1 = -2\lambda_2$. Donc, $\forall k \in \mathbb{R}, v_3 = -2k.v_1 + kv_2$.

Exercice 4

Exercice 4.1

Soit $a, b \in \mathscr{H}_n$, on a $\sum_{k=1}^{n} a_{kk} = 0$ et $\sum_{k=1}^{n} b_{kk} = 0$.

Vérifions que $(a + \lambda b) \in \mathscr{H}_n$? La diagonale de la matrice $(a + \lambda b)$ sont les termes $a_{kk} + \lambda b_{kk}$. Donc $\sum_{k=1}^{n}(a_{kk} + \lambda b`_{kk}) = \sum_{k=1}^{n} a`_{kk} + \lambda \sum_{k=1}^{n} b`_{kk} = 0 + \lambda 0 = 0$. Comme la somme des coefficients diagonaux est nulle, alors $(a, b) \in \mathscr{H}_n$ et $\mathscr{H}_n$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 4.2

Soit

$$m_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, m_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, m_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Montrons que $B = (m_1, m_2, m_3)$ est une base de $\mathscr{H}_2$. B est génératrice? Tout élément de $\mathscr{H}_2$ est de la forme $m = \begin{vmatrix} a & b \\ c & -a \end{vmatrix}$. Montrons qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, tel que $\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \lambda_3 m_3 = m$. Vrai en prenant, $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b$ et $\lambda_3 = c$

B est libre? Montrons que si $\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \lambda_3 m_3 = 0$ alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 \\ 0\lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 1\lambda_3 & = 0 \\ -1\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Vrai. Donc famille libre et B est une base de $\mathscr{H}_2$.
La dimension de $\mathscr{H}_2$ est 3.

Exercice 4.3

???

Exercice 4.4

???

Exercice 5

Exercice 5.1

Pour que $\mathscr{F}$ soit une base, il faut qu'il soit libre.

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 8\lambda_2 + 7\lambda_3 & = 0 \\ 0\lambda_1 + -4\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + \alpha\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Pour que la famille $\mathscr{F}$ soit libre, il faut que $\alpha \neq 0$.

Exercice 5.2

Exercice 6

Exercice 6.1

Pour $n = 1$, $A_1 = |c|$ et $-A_1 = |-c|$, donc $det(A_1) = -det(-A_1)$, pour $n = 2$, $A_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ et $-A_2 = \begin{vmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{vmatrix}$, donc $det(A_1) = det(-A_1)$. Supposons que pour n impair, $det(M_n) = -det(M_n)$ et n pair, $det(M_n) = det(M_n)$. Faisons une preuve par récurrence de cette hypothèse.

Cas $n+1$ impair, montrons que $det(A_{n+1} = det(-A_{n+1})$.

$det(-A_{n+1}) = (-a_11).det(-A_{11}) - (-a_12).det(-A_{11}) + \ldots + (-a_1(n)).det(-A_{1(n)}) - (-a_1(n+1)).det(-A_{1(n+1)})$

par hypothése de récurrence on a

$det(-A_{n+1}) = (-a_11).det(A_{11}) - (-a_12).det(A_{11}) + \ldots + (-a_1(n)).det(A_{1(n)}) - (-a_1(n+1)).det(A_{1(n+1)}) = -(a_11.det(A_{11}) - a_1$

Cas $n+1$ pair, montrons que $det(A_{n+1} = det(-A_{n+1})$.

$det(-A_{n+1}) = (-a_11).det(-A_{11}) - (-a_12).det(-A_{11}) + \ldots - (-a_1(n)).det(-A_{1(n)}) + (-a_1(n+1)).det(-A_{1(n+1)})$

par hypothése de récurrence on a

$det(-A_{n+1}) = (-a_11).-det(A_{11}) - (-a_12).-det(A_{11}) + \ldots - (-a_1(n)).-det(A_{1(n)}) + (-a_1(n+1)).-det(A_{1(n+1)}) = a_11.det(A_{11})$

Vérifié.

Exercice 6.2

n est impair donc $det(A) = -det(-A)$, une matrice et sa transposée ont le même déterminant donc $det({}^tA) = det(A)$. On a ${}^tA = -A$ donc $det({}^tA) = det(-A)$. Ceux qui fait $det(-A) = det({}^tA) = det(A) = -det(-A)$. Donc la seule valeur possible pour $det(-A)$ est 0. Donc $det(A) = -det(-A) = -0 = 0$.

Exercice 7

Exercice 7.1

$$det(A_1) = a_1.x - (-1)a_0 = a_1.x + a_0$$

$$det(A_2) = a_2.det\left(\begin{vmatrix} x & 0 \\ -1 & x \end{vmatrix}\right) - a_1.det\left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix}\right) + a_0.det\left(\begin{vmatrix} -1 & x \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right) = a_2.x^2 + a1.x + a_0$$

Exercice 7.2

Preuve par récurrence. Supposons que $det(A_n) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, montrons que $det(A_{n+1}) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

$$det(A_{n+1}) = a_{n+1}.\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & x & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & -1 & x \end{vmatrix} - (-1)det(A_n) = a_{n+1}x^{n+1} + det(A_n)$$

□