

## Exercice 1

La fonction  $f(x)$  est paire ssi  $\forall x, f(x) = f(-x)$ , La fonction  $f(x)$  est impaire ssi  $\forall x, f(x) = -f(-x)$ .

Soit une fonction  $f(x)$ ,

$$f(x) = \frac{2f(x)}{2} = \frac{2f(x) + f(-x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Soit la fonction  $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ , la fonction  $f_1(x)$  est paire car  $f_1(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_1(x)$ .

Soit la fonction  $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ , la fonction  $f_2(x)$  est impaire car  $f_2(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -f_2(x)$ .

Pour toute fonction  $f(x)$ , on a trouvé une fonction  $f_1(x)$  paire et une fonction  $f_2(x)$  impaire tel que  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ .

## Buffon TD1 - Exercice 5

Vrai pour  $u_0$ ?  $u_0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$ , oui.

Admettons que  $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ , calculons  $u_{n+1}$ .

$$u_{n+1} = u_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Vrai pour  $v_0$ ?  $v_0 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6} = 0$ , oui.

Admettons que  $v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , calculons  $v_{n+1}$ .

$$v_{n+1} = v_n + n + 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Vrai pour  $w_0$ ?  $w_0 = \left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2 = 0$ , oui.

Admettons que  $w_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ , calculons  $w_{n+1}$ .

$$w_{n+1} = w_n + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$w_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2$$

## Buffon TD1 - Exercice 6

Preuve par récurrence, supposons  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies n! \geq 2^n$ , trouvons un entier  $n$  pour lequel  $n! \geq 2^n$  et vérifions la propriété pour  $n+1$  avec l'hypothèse de récurrence  $n! \geq 2^n$ . Prenons  $n=4$ , on a  $4! = 24 \geq 16 = 2^4$ .

$$\begin{aligned}(n+1)! &= n!(n+1) \geq 2^n(n+1) \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= n2^n + 2^n > 2^{n+1}, \text{ pour } n \geq 2\end{aligned}$$

Pour  $n_0 \geq 2$  la proposition est vraie. Donc il existe un  $n_0$  (par exemple  $n_0 = 2$ ) pour lequel la proposition est vraie.

## Buffon TD1 - Exercice 7

$$u_0 = 1, u_1 = u_0 = 1, u_2 = u_0 + u_1 = 2, u_3 = u_0 + u_1 + u_2 = 4, u_4 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 8.$$

Vrai pour  $u_0$ ?,  $u_0 = 1 \leq 2^0 = 1$ , Vrai.

Hypothèse de récurrence:  $u_n \leq 2^n$ , calculons  $u_{n+1}$ .

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_n + u_n = 2u_n \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

La proposition est vraie.

## Buffon TD1 - Exercice 8

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left( x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \implies \left( \forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z} \right) \right)$$

Pour  $n = 0$ , on a  $\forall x \in \mathbb{R}, \left( x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \implies \left( x^0 + \frac{1}{x^0} \in \mathbb{Z} \right) \right)$  qui est vrai.

Pour  $n = 1$ , on a  $\forall x \in \mathbb{R}, \left( x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \implies \left( x^1 + \frac{1}{x^1} \in \mathbb{Z} \right) \right)$  qui est vrai.

Supposons la propriété vraie au rang  $k < n$ , calculons le rang  $n$ .

$$\left( x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) \left( x + \frac{1}{x} \right) = x^n + x^{n-2} + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-2}} = \left( x^n + \frac{1}{x^n} \right) + \left( x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \right)$$

Donc

$$\left( x^n + \frac{1}{x^n} \right) = \left( x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) - \left( x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \right)$$

Par hypothèse de récurrence, on a  $\left( x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) \in \mathbb{Z}$  et  $\left( x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \right) \in \mathbb{Z}$ . Donc  $\left( x^n + \frac{1}{x^n} \right) \in \mathbb{Z}$  car la soustraction de deux nombres dans  $\mathbb{Z}$ .

## Buffon TD2 - Exercice 1.a

$$\begin{aligned} (1-a) \sum_{k=1}^n ka^{k-1} &= \sum_{k=1}^n ka^{k-1} - \sum_{k=1}^n aka^{k-1} = \sum_{k=1}^n ka^{k-1} - \sum_{k=1}^n ka^k \\ \sum_{k=1}^n ka^{k-1} - ka^k &= \sum_{k=0}^{n-1} a^k - na^n = \sum_{k=0}^n a^k - (n+1)a^n \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n ka^k = \sum_{k=1}^n ka^{k-1} - \sum_{k=0}^n a^k + (n+1)a^n$$

On a  $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$  et  $\sum_{k=1}^n ka^{k-1} = \left( \sum_{k=0}^n a^k \right)' = \left( \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \right)'$  Donc

$$\sum_{k=1}^n ka^k = \left( \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \right)' - \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + (n+1)a^n$$

## Buffon TD2 - Exercice 1.b

Trouver  $a, b, c$ , tel que  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$ .

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a(x^2 + 3x + 2) + b(x^2 + 2x) + c(x^2 + x)}{x(x+1)(x+2)}$$

Donc

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases}$$

Et  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -1$ ,  $c = \frac{1}{2}$ . Donc  $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} \right) - \left( \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \end{aligned}$$

## Exercice Cauchy

Solution de l'équation différentielle de la forme  $(y'(t) = a(t)y(t) + b(t))$  est  $y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_1(t)$  avec  $A(t)$  une primitive de la fonction  $a(t)$  et  $y_1(t)$  est une solution particulière de l'équation.

Pour  $y'(t) - \frac{y(t)}{t^2} = e^{\frac{1}{t}} \sin(t)$ , donc  $a(t) = \frac{1}{t^2}$  et  $b(t) = e^{\frac{1}{t}} \sin(t)$ . On a  $A(t) = -\frac{1}{t}$ . Recherchons une solution particulière de la forme  $y_1(t) = \lambda(t)a^{A(t)}$  avec  $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$ .

$$\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)} = e^{\frac{1}{t}} \sin(t) e^{-\frac{1}{t}} = \sin(t)$$

donc  $\lambda(t) = -\cos(t)$  et  $y_1(t) = -\cos(t)e^{-\frac{1}{t}}$

Par conséquent

$$y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_1(t) = \lambda e^{-\frac{1}{t}} - \cos(t)e^{-\frac{1}{t}} = e^{-\frac{1}{t}} (\lambda - \cos(t))$$

Calculons l'unique solution  $y(2\pi) = e^{-\frac{1}{2\pi}} (\lambda - \cos(2\pi)) = \lambda e^{-\frac{1}{2\pi}} = 0$ .

Donc  $\lambda = 0$  et l'unique solution est

$$y(t) = -\cos(t)e^{-\frac{1}{t}}$$

QED