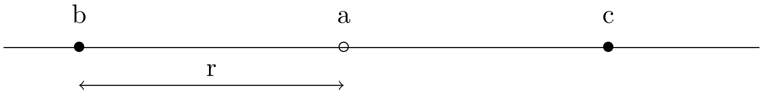
Rappel de cours

Definition 1.

Exercice 1.1



Les points b et c coïncident avec les bornes d'un intervalle ouverts $]b, c[$. L'intervalle équivalent de centre a et de rayon r est défini par le centre a au milieu des 2 points b et c, donc $a = \frac{b+c}{2}$ et le rayon soit la distance entre les points a et b (resp. c), donc $r = a - b = \frac{b+c}{2} - b = \frac{c-b}{2}$.

Exercice 1.2

$$I = [0 + (-1), 1 + 1] = [-1, 2]$$

On a $sin[0, 1] \equiv 0 \leq s \leq 1$ et $tin[-1, 1] \equiv -1 \leq t \leq 1$. La borne inférieure de l'intervalle $s + t$ est égale à $min(0 + (-1), 0 + 1, 1 + (-1), 1 + 1)$ car l'addition est une fonction strictement croissante. Mais on sait que $0 + (-1) < 0 + 1$,$0 + (-1) < 1 + (-1)$, $0 + (-1) < 1 + 1$ car $0 < 1$ donc $min(\ldots) = 0 + (-1)$. Même raisonnement pour la borne supérieur. Pour les bornes, les deux intervalles ont des bornes fermées donc la valeurs des bornes sont dans l'intervalles. par conséquent l'intervalle $s + t$ est égelement un intervalle fermé Donc $I = [-1, 2]$.

$$I' =]0 + (-1), 1 + 1[=] - 1, 2[$$

Mais raisonnement sur la valeur des bornes. Maintenant l'intervalle t est un intervalle ouvert. Donc ses bornes ne sont pas dans l'intervalle t. Par conséquent elles ne peuvent pas être dans l'intervalle $s + t$.

$$J = [3, 8]$$

On a $sin[-2, -1] \equiv -2 \leq s \leq -1$ et $tin[-4, -3] \equiv -4 \leq t \leq -3$. La borne inférieure de l'intervalle $s + t$ est égale à $min((-2) * (-4), (-2) * (-3), (-1) * (-4), (-1) * (-3)1 + 1)$ car la multiplication est une fonction strictement croissante. Même raisonnement pour la borne supérieur en prenant le max. Pour les bornes, les deux intervalles ont des bornes fermées donc la valeurs des bornes sont dans l'intervalles. par conséquent l'intervalle $s + t$ est égelement un intervalle fermé Donc $I = [3, 8]$.

$$I' =]3, 8[$$

Mais raisonnement sur la valeur des bornes. Maintenant l'intervalle t est un intervalle ouvert. Donc ses bornes ne sont pas dans l'intervalle t. Par conséquent elles ne peuvent pas être dans l'intervalle $s + t$.

Exercice 1.3

On a $I \cap J = \emptyset$ donc $\exists a$ tel que $a \in I$ et $a \in J$. On a $a \leq \sup(I)(ou + \infty)$ et $\inf(J)(ou - \infty) \leq a$, donc $\inf(J)(ou - \infty) \leq a \leq \sup(I)(ou + \infty)$.

Prenons $a, b \in (I \cup J)^2, a < b$, a-t-on $[a, b] \subset I \cup J$? Plusieurs cas:

- $(a, b) \in I^2$, I est un intervalle donc $[a, b] \subset I$ (caractérisation des intervalles) et $I \subset (I \cup J)$ (par définition, donc $[a, b] \subset (I \cup J)$.
- $(a, b) \in J^2$, même raisonnement
- $a \in I, b \in J$, I est un intervalle donc $[a, \sup(I)] \subset I$ (caractérisation des intervalles) et $[\inf(J), b] \subset J$, on a $\inf(J) \leq \sup(I)$
- $a \in J, b \in I$, ???

Exercice 1.4

Exercice 1.5

A

L'intervalle A est minoré par -1 ($A \subset [-1, +\infty]$) et majoré par 2 ($A \subset [-\infty; 2]$) donc l'intervalle A est bornée. Le diamètre $d(A) = \sup(d(x, x'), x, x' \in A)$. Le diamètre de $A = 1 - 0 = 1$.

B

L'intervalle B est minoré par -3 ($B \subset [-3, +\infty]$) et majoré par 4 ($B \subset [-\infty; 4]$) donc l'intervalle B est bornée. Le diamètre $d(B) = \sup(d(x, x'), \forall x, x' \in B)$. Au passage à la limite le diamètre de $B = \lim_{\epsilon \to 0}(3 - \epsilon) - (-2 + \epsilon) = 5$.

C

La partie C est bornée par 7 car $\forall x \in C, |x| \leq 7$. Le diamétre de C est $d(C) = \sup(d(x, x'), \forall x, x' \in C)$. Le diamètre de $C = \max(C) - \min(C) = 6 - 4 = 2$.

D

La partie D est bornée par 2 car $\forall x \in D, |x| \leq 2$. Le diamétre de D est $d(D) = \sup(d(x, x'), \forall x, x' \in D)$. Le diamètre de $C = max(C) - min(C) = \lim_{\epsilon \to 0}(1 - \epsilon) - (0 + \epsilon) = 1$.

QED