Exercice 5

Question 1

On a

$$E(X_1) = \int_a^1 tf(t)\,dt = \int_a^1 t\frac{1}{1-a}\,dt = \frac{1}{1-a}\frac{1-a^2}{2} = \frac{1+a}{2}$$

On a

$$E[X_1^2] = \int_a^1 t^2 f(t)\,dt = \int_a^1 t^2\frac{1}{1-a}\,dt = \frac{1}{1-a}\frac{1-a^3}{3} = \frac{1+a+a^2}{3}$$

Donc

$$V(X_1) = E[X_1^2](E[X_1])^2 = \frac{1+a+a^2}{3} - \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$$

Question 2

On a

$$E[X_1] = \frac{1+a}{2} \implies a = 2E[X_1] - 1$$

Donc on prend comme EMM de a

$$\tilde{a}_n = 2\bar{a}_n - 1$$

Mais $0 < a < 1$, il faut donc que son estimateur soit aussi $0 < \tilde{a}_n < 1$ Donc

$$0 < 2\bar{a}_n - 1 < 1 \implies 1 < 2\bar{a}_n < 2 \implies 1/2 < \bar{a}_n < 1$$

Donc l'EMM est défini uniquement si la moyenne de l'échantillon $\bar{a}_n$ est comprise entre 0.5 et 1.

Consistance. En appliquant le Lemme de l'application Continue (LAC). En prenant $h(x) = 2x - 1$, pour $1/2 < x < 1$. La fonction est continue. On a également, $\bar{a}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} E[X_1]$ selon la loi des grands nombres. Donc $\tilde{a}_n = h(\bar{a}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} h(E[X_1]) = a$. Donc consistance.

En appliquant le Théoème Central Limite (TCL) avec $\mu = a$ et $\sigma^2 = \frac{(1-a)^2}{12}$ on a

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{a}_n - a)}{\sqrt{\sigma^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Question 3

On calcule

$$\mathcal{L}_a(x_i,\ldots,x_n) = \prod_1^n \frac{1}{1-a}1_{x_i\in[a,1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n}\prod_1^n 1_{x_i\in[a,1]}(x_i) = \frac{1}{(1-a)^n}1_{min(x_i)\le x_i\le 1}(x_i)$$

Ce qui donne la fonction suivante:

$$\mathcal{L}_a(x_i,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & a = 0 \\ \frac{1}{(1-a)^n} & 0 < a \le min(x_i) \\ 0 & min(x_i) < a < 1 \end{cases}$$

$\mathcal{L}_a(x_i,\ldots,x_n)$ est croissante sur $0 \le a \le min(x_i)$ et nulle quand $min(x_i) < a$ donc EMV est maximale lorsque $a = min(x_i)$. On a $\hat{a}_n = \frac{1}{(1-min(x_i))^n}$.

Je ne comprends pas ce que represente Z_n.

Question 4

Vitesse de convergence de $\tilde{a}_n$. Il faut trouver le plus grand d qui verifie:

$$n^d(\tilde{a}_n - a) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0$$

$$\forall\epsilon, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n^d(\tilde{a}_n - a) \geq \epsilon) = 0$$

$$\forall\epsilon, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((2\bar{a}_n) \geq \frac{\epsilon}{n^d} + a + 1) = 0$$

Je ne comprends rien.

Exercice 6

Question 1-a

en prenant $k = 1$ on a

$$\mathbb{E}(U^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{2!}{2.1!} = \frac{1}{2}$$

en prenant $k = 2$ on a

$$\mathbb{E}(U^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{4!}{4.2!} = \frac{3}{2}$$

Question 1-b

Soit une variable aléatoire $Y = X_i^2$, l'événement $A = (Y \leq y)$ est équivalent à l'événement $B = (-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$. lorsque $y < 0$, on a $P(Y \leq y) = 0$. Lorsque $y \geq 0$,

$$F_Y(y) = P((Y \leq y)) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_x(\sqrt{y}) - F_x(-\sqrt{y})$$

et

$$f_y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_X(\sqrt{y}) - \frac{\partial}{\partial y} F_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_x(\sqrt{y}) + f_x(-\sqrt{y})]$$

Dans notre cas, $f_X(x)$ est défini pour $x \geq 0$, donc $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_x(\sqrt{y})$. Ce qui fait :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[\frac{\sqrt{y}}{\theta} exp\left(-\frac{\sqrt{y}^2}{2\theta}\right)\right] = \frac{1}{2\theta} exp\left(-\frac{y}{2\theta}\right)$$

qui est une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\theta}$.

Question 1-c

Calcul de $E(X_1)$

$$E(X_1) = \int_0^{+\infty} x f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

car $f_X(x) = 0$ lorsque $x < 0$.

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx$$

Par substitution prenant $u = \frac{x}{\sqrt{\theta}}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ et $\partial x = \sqrt{\theta}\partial u$, on obtient :

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \sqrt{\theta} du = \sqrt{\theta}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

D'après la question 1-a, pour $k = 1$, on a :

$$E(X_1) = \sqrt{2\pi\theta}\frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{\sqrt{2\pi\theta}}{2} = \sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}$$

Calcul de $E(X_1^2)$

$$E(X_1^2) = \frac{1}{\frac{1}{2\theta}} = 2\theta$$

car $E(X_1^2)$ est une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\theta}$.

Calcul de $E(X_1^3)$

$$E(X_1^3) = \int_0^{+\infty} x^3 f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)dx$$

car $f_X(x) = 0$ lorsque $x < 0$.

$$E(X_1^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{\theta} exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx$$

Par substitution prenant $u = \frac{x}{\sqrt{\theta}}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ et $\partial x = \sqrt{\theta}\partial u$, on obtient :

$$E(X_1^3) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 u^4 exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\sqrt{\theta}du = \sqrt{\theta}\theta^2\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u^4 exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

D'après la question 1-a, pour $k = 2$, on a :

$$E(X_1^3) = \sqrt{2\pi\theta}\theta^2\frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{3\sqrt{2\pi\theta}\theta^2}{2}$$

Calcul de $E(X_1^4)$.

$$E(X_1^4) = \int_0^{+\infty} x^4 f_x(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^5}{\theta} exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) dx = 8\theta^2$$

Par utilisation d'un solveur internet.