Rappel de cours

Definition 1. Soit $u \to ||u||$ une norme $\mathbb{R}^m$. La distance sur $\mathbb{R}^m$ est la fonction $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ définie par $d(v, w) = ||w - v||$. En particulier, on notera d_1; d_∞; d_2 les distances associes $||.||_1$; $k.k1$; $k.k2$. Donc :

- $d_1((x_1, \ldots .x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = |y1 - x1| + \ldots + |y_m - x_m|$
- $d_\infty((x_1, \ldots .x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = max(|y1 - x1|, \ldots, |y_m - x_m|)$
- $d_2((x_1, \ldots .x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = \sqrt{(y1 - x1)^2 + \ldots + (y_m - x_m)^2}$

Definition 2.

Exercice 2.1

$$d_2(A,B) = \sqrt{(-2-1)^2 + (-3-1)^2} = 5$$
$$d_1(A,B) = |-2-1| + |-3-1| = 7$$
$$d_\infty(A,B) = max(|-2-1|, |-3-1|) = 4$$

Exercice 2.2

Exercice 2.2.1

Prenons un point $p, p \in \mathrm{B}(A,r) \cap \mathrm{B}(A',r')$, on a $d(A,A') \leq d(A,p) + d(p,A)$ mais $d(A,p) < r$ car $p \in \mathrm{B}(A,r)$ et $d(A',p) < r'$ car $p \in \mathrm{B}(A',r')$ donc $d(A,A') \leq d(A,p) + d(p,A) < r + r'$.

Exercice 2.2.2

Prenons un point p sur le segment $[A,A']$, on a $d(A,A') = d(A,p) + d(p,A')$. Partons de $D(A,A') < r + r'$. Prenons un point p, $d(A,p) = \frac{d(A,A')-r'+r}{2}$, on a $p \in \mathrm{B}(A,r)$ car $d(A,A') - r' < r$. Montrons que $p \in \mathrm{B}(A',r')$?

$$2d(A,p) = d(A,A') - r' + r$$
$$2(d(A,A') - d(p,A')) = d(A,A') - r' + r$$
$$2d(p,A') - r' + r = d(A,A') < r + r'$$
$$2d(p,A') < 2r'$$
$$d(p,A') < r'$$

Donc $p \in \mathrm{B}(A',r')$. donc $p \in \mathrm{B}(A,r) \cap \mathrm{B}(A',r')$ et $\mathrm{B}(A,r) \cap \mathrm{B}(A',r') \neq \emptyset$.

Exercice 2.3

Exercice 2.3.1

$$6 < d(P,S) < 7$$

Si P et Q ne sont pas disjoint donc $d(P,Q) < 2$. On a $d(P,S) \leq d(P,Q) + d(Q,S)$ donc

$$6 < d(P,Q) + d(Q,S) < 2 + d(Q,S)$$
$$4 < d(Q,S)$$

Si Q et R ne sont pas disjoint donc $d(Q,R) < 2$. On a $d(Q,R) \leq d(Q,R) + d(R,S)$ donc

$$4 < d(Q,R) + d(R,S) < 2 + d(R,S)$$
$$2 < d(R,S)$$

Donc R et S sont disjoints.

Exercice 2.3.2

- $6 < d(P,S)$ la distance la plus petite entre Q et R est lorsque P,Q,R,et S sont alignés et les point Q et R sont entre les points P et S. Donc $d(Q,R) > 6 - 1 - 1 = 4$
- $d(P,S) < 7$ la distance la plus grande entre Q et R est lorsque P,Q,R,et S sont alignés et les point Q et R ne sont pas entre les points P et S. Donc $d(Q,R) < 7 + 1 + 1 = 9$

Donc $4 < d(Q,R) < 9$

Exercice 2.4

Exercice 2.4.1

$\|.\|$ est une norme donc la relation est scalairement multiplicative; $\|\lambda.u\| = |\lambda|\|u\|$. Donc, $\|u\| = \|\lambda.u'\| = |\lambda|.\|u'\|$ donc

$$\lambda = \pm\frac{\|u\|}{\|u'\|}$$

Exercice 2.4.2

Preuve par l'absurde. Admettons que

Exercice 2.5

- (N définie-positive). $N((0,0)) = \max(|0-0|,|0|) = 0, \forall(x,y) \neq (0,0), N((x,y)) = \max(|x-y|,|y|) > 0?$. 2 cas:
  - $y \neq 0, N((x,y)) = \max(|x-y|,|y|) > 0$
  - $y = 0, x \neq 0, N((x,y)) = \max(|x|,|0|) > 0$
- (N_+). $\forall u, v, N(u+v) \leq N(u) + N(v)?$
- $(N_\times)$. $\forall u, \forall\lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda.u) = \lambda.N(u)?$. $N(\lambda.u) = \max(|\lambda x - \lambda y|,|\lambda y|) = \max(|\lambda(x-y)|,|\lambda y|) = \lambda\max(|x-y|,|y|) = \lambda.N(u)$.
- (N' définie-positive). $N'((0,0)) = |2.0+0|+|0+0|) = 0, \forall(x,y) \neq (0,0), N'((x,y)) = |2x+y|+|x+y|) > 0?$. 2 cas:
  - $x \neq 0, x+y = 0, N'((x,y)) = |2x+y| + |0| > 0$
  - $x \neq 0, 2x+y = 0, N'((x,y)) = |0| + |x+y| > 0$
  - $x+y \neq 0, x+y \neq 0, N'((x,y)) = |2x+y| + |x+y|) > 0$
- (N'_+). $\forall u, v, N(u+v) \leq N(u) + N(v)?$,

  $|2(x_u+x_v)+(y_u+y_v)|+|(x_u+x_v)+(y_u+y_v)| \leq |2x_u+y_u|+|x_u+y+u|+|2x_v+y_v|+|x_v+y+v|?$

  $|2x_u+y_u+2x_v+y_v)|+|(x_u+y_u)+(x_v+y_v)| \leq |2x_u+y_u|+|x_u+y+u|+|2x_v+y_v|+|x_v+y+v|?$

  Prenons $f((x,y)) = 2x+y$ et $g(x) = x+y$

  $$|f(x_u,y_u)+f(x_v,y_v)|+|g(x_u,y_u)+g(x_v,y_v)| \leq |f(x_u,y_u)|+|g(x_u,y_u)|+|f(x_v,y_v)|+|g(x_v,y_v)|?$$

  $$|f(x_u,y_u)+f(x_v,y_v)|+|g(x_u,y_u)+g(x_v,y_v)| \leq |f(x_u,y_u)|+|f(x_v,y_v)|+|g(x_u,y_u)|+|g(x_v,y_v)|?$$

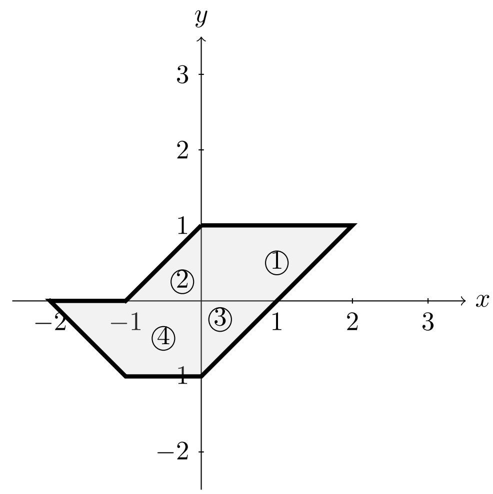
  Vrai car on a 2 identités triangulaires sur f et g.
- $(N'_\times)$. $\forall u, \forall\lambda \in \mathbb{R}, N'(\lambda.u) = \lambda.N'(u)?$. $N'(\lambda.u) = |\lambda 2x + \lambda y|,|\lambda y|) = \max(|\lambda(x-y)|,|\lambda y|) = \lambda\max(|x-y|,|y|) = \lambda.N(u)$.

Exercice 2.5.1

4 cas :

1. $x-y > 0$ et $y > 0$, donc $max(x-y,y) < 1$,
2. $x-y < 0$ et $y > 0$, donc $max(-x+y,y) < 1$
3. $x-y > 0$ et $y < 0$, donc $max(x-y,-y) < 1$

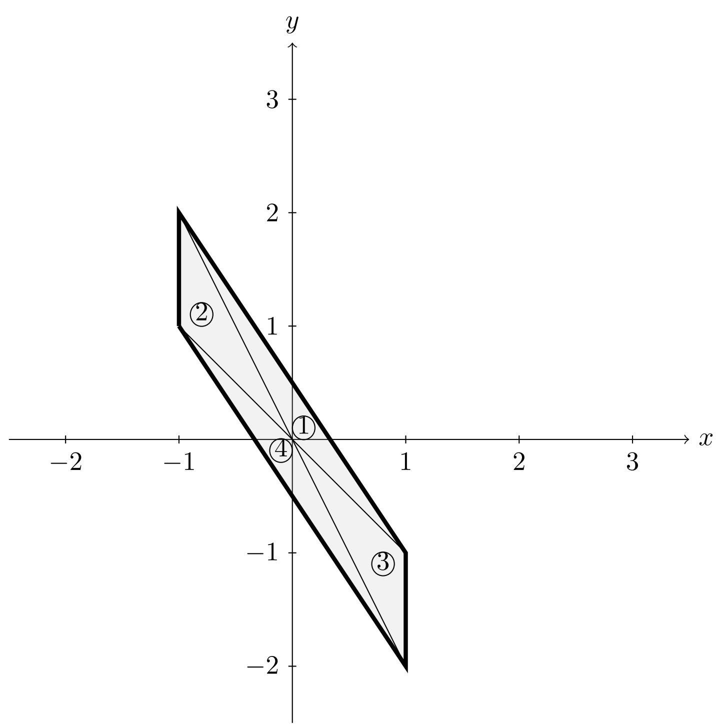
4. $x - y < 0$ et $y < 0$, donc $max(-x + y, -y) < 1$



$N(\mathrm{B}((0,0),1))$

4 cas :

1. $2x + y > 0$ et $x + y > 0$, donc $3x + 2y - 1 < 1$
2. $2x + y < 0$ et $x + y > 0$, donc $x > -1$
3. $2x + y > 0$ et $x + y < 0$, donc $x < -1$
4. $2x + y < 0$ et $x + y < 0$, donc $3x + 2y - 1 < 0$



$N'(\mathrm{B}((0,0),1))$

Exercice 2.5.3

$$K\|(x,y)\|_\infty \leq \max(|x-y|,|y|) \leq L\|(x,y)\|_\infty$$
$$K\max(|x|,|y|) \leq \max(|x-y|,|y|) \leq L\max(|x|,|y|)$$

Exercice 2.16

Exercice 2.16.1

Puisque O est un ouvert alors $\forall x \in O, \exists r_o > 0, B(x,r_o) \subset O$ et puisque O' est un ouvert alors $\forall y \in O', \exists r_{o'} > 0, B(y,r_{o'}) \subset O'$. Prenons $r = min(r_o, r_{o'})$. On a $B(x,r) \subset O$ et $B(y,r) \subset O'$.

Prenons $(a,b) \in B((x,y),r)$ un point quelconque dans la boule ouverte $B((x,y),r)$. On a $\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} < r$. Vérifions que $a \in O$ et $b \in O'$?. On a $\sqrt{(x-a)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} < r$ et de même $\sqrt{(y-b)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} < r$ donc $a \in B(x,r) \subset O$ et $b \in B(y,r) \subset O'$ car O et O' sont ouverts. Donc $a \in O$ et $b \in O'$.

Exercice 2.16.2

Puisque O est un fermé (donc $\mathbb{R} \setminus O$ est un ouvert) alors $\forall x \in \mathbb{R} \setminus O, \exists r_o > 0, B(x,r_o) \subset \mathbb{R} \setminus O$ et puisque O' est un fermé (donc $\mathbb{R} \setminus O'$ est un ouvert) alors $\forall y \in \mathbb{R} \setminus O', \exists r_{o'} > 0, B(y,r_{o'}) \subset \mathbb{R} \setminus O'$.

Donc $(\mathbb{R} \setminus O) \times (\mathbb{R} \setminus O')$ est un ouvert (voir 2.16.1) et on a $(O \times O' = \mathbb{R}^2 \setminus ((\mathbb{R} \setminus O) \times (\mathbb{R} \setminus O'))$, donc $O \times O'$ est un fermé.

QED