

Exo 3.1.3

Q1

cours: La position d'équilibre de la masse est lorsque la force de rappel élastique $F_r = -k(l_e - l_0)$ est égale à la force gravitationnelle $F_g = m.g$. Donc,

$$\begin{aligned}F_e &= F_g \\m.g &= -k(l_e - l_0) \\l_e &= \frac{k.l_0 - m.g}{k}\end{aligned}$$

Q2

(a) La dérivée première de $f(x) = \sin(ax)$ est $f'(x) = a.\cos(ax)$. La dérivée seconde de $f(x)$ est $f''(x) = -a^2.\sin(ax)$.

(b) Une solution de l'équation $f''(x) = -a^2 f(x)$ est $f(x) = C.\sin(ax)$. En effet, $f''(x) = -C.a^2.\sin(ax) = -a^2.C.\sin(ax) = -a^2 f(x)$.

Une autre solution de l'équation $f''(x) = -a^2 f(x)$ est $f(x) = C.\cos(ax)$. En effet, $f''(x) = -C.a^2.\cos(ax) = -a^2.C.\cos(ax) = -a^2 f(x)$.

La solution générale de l'équation $f''(x) = -a^2 f(x)$ est $f(x) = C_1.\cos(ax) + C_2.\sin(ax)$. En effet, $f''(x) = -C_1.a^2.\cos(ax) - C_2.a^2.\sin(ax) = -a^2(C_1.\cos(ax) + C_2.\sin(ax)) = -a^2 f(x)$.

Q3

Identification du système : Le système étudié est la masse m qui est accrochée au ressort.

Bilan des forces : La masse est soumise à trois forces;

- la force de rappel du ressort qui est proportionnelle à l'allongement du ressort $F_r = -k.(y(t) + y_0) \vec{i}$.

Composantes dans un repère cartésien : Le mouvement est rectiligne. Il a lieu le long de l'axe O_y . Il est avantageux de prendre la position de la bille à l'équilibre pour l'origine O des coordonnées sur l'axe O_y . Donc, nous avons $y(t) = l(t) - (l_e)$.

PFD : La résultante des forces est égale à $m.\vec{a} = m.\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \vec{i}$. La seule force appliquée est la force de rappel du ressort à partir de la position d'équilibre. En effet, quand le mobile est à l'équilibre la force de la pesanteur est équivalente à la force de rappel du ressort.

$$-k.y(t). \vec{i}$$

Solution

$$\begin{aligned}m.\frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= -k.y(t) \\\frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= \frac{-k}{m}.y(t)\end{aligned}$$

La solution de cette équation différentielle est $y(t) = C_1.\cos(ax) + C_2.\sin(ax)$ avec $a = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Les conditions initiales sont à $t = 0$, $y(0) = y_0$, $v(0) = 0$. Donc,

$$y(0) = C_1.\cos(a.0) + C_2.\sin(a.0) = y_0$$

$$y(0) = C_1 = y_0$$

et

$$v(0) = y'(0) = -C_1.\sin(a.0) + C_2.\cos(a.0) = 0$$

$$v(0) = C_2 = 0$$

Donc la solution de l'équation est :

$$y(t) = y_0.\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t\right)$$