Chapitre 1

La théorie des jeux

Il est très important, pour celui qui souhaite découvrir, de ne pas limiter son esprit á un seul chapitre de la science mais plutôt de rester en contact avec plusieurs autres.

Jacques Hadamard.

1.1 Présentation

La théorie des jeux est la science de la prise de décision stratégique. La théorie des jeux a été utilisée dans des sciences aussi diverses que la biologie évolutionniste, le management des décisions (politique) et l'économie. Elle peut être définie comme l'étude de modèles mathématiques des conflits et coopérations entre décideurs intelligents et rationnels. La théorie des jeux fournit des techniques mathématiques générales pour analyser des situations dans lesquelles deux personnes ou plus prennent des décisions qui s'influencent mutuellement.

Dans le langage de la théorie des jeux, un jeu fait référence à toute situation impliquant deux sujets ou plus. Les sujets impliqués dans un jeu peuvent être appelés les *joueurs*. Comme indiqué dans la définition ci-dessus, il y a deux hypothèses de base que les théoriciens des jeux font généralement à propos des joueurs : ils sont rationnels et intelligents. Chacun de ces adjectifs est utilisé ici dans un sens technique qui nécessite quelques explications. Un décideur est rationnel s'il prend des décisions de manière cohérente de ses propres objectifs. En théorie des jeux, en s'appuyant sur le fondamental résultats de la théorie de la décision, nous supposons que l'objectif de chaque joueur est de maximiser la valeur attendue de son propre gain, qui est mesuré en une certaine échelle d'utilité. L'idée derrière un *décideur rationnel* est que les actions sélectionnées (nommées *stratégies*) maximiseront les bénéfices d'utilité attendus par le joueur. Cette idée remonte au moins à Bernoulli (1738), mais la justification moderne de cette idée tient à Von Neumann et Morgenstern (1947) ([xx]).

Pour expliquer les concepts de la théorie des jeux, prenons un exemple ; "*l'évitement de la congestion du réseau internet*". Le réseau internet est basé sur le protocole

TCP/IP. En TCP/IP, un fichier est découpé en paquets qui transitent entre les différents noeuds du réseau entre l'émetteur et le récepteur. Chaque fois que le récepteur reçoit un paquet, il envoie un accusé de réception à l'émetteur. De cette façon, le lémetteur sait que le paquet est bien arrivé. Le protocole TCP/IP cherche à augmenter le débit du réseau jusqu'à sa saturation. Lorsque l'un des noeuds du réseau est saturé, il efface des paquets jusqu'à désaturer. L'émetteur ne recevant plus d'accusé réception pour un paquet va le ré-émettre après une certaine temporisation (géré par l'algorithme d'évitement de congestion). Si tous les émetteurs suivent cette règle, cela permet de désaturer le noeud pour le bénéfice de l'ensemble des utilisateurs. Cependant, il est possible pour certains émetteurs de violer cette règle et de ré-émettre le message sans latence.

Ce comportement peut être modélisé en théorie des jeux. Imaginons, deux personnes utilisant Internet. Elles ont deux choix possibles :

- Utiliser la version correct de l'algorithme d'évitement de congestion du réseau. Cette stratégie est notée C.
- Utiliser une version défectueuese de l'algorithme d'évitement de congestion du réseau. Cette stratégie est notée D.

Le comportement du réseau est le suivant ; si les 2 personnes choisissent la stratégie C, chaque paquet sera retardé de 2ms. Si les 2 personnes choisissent la stratégie D, chaque paquet sera retardé de 4ms. Si une des personnes choisit l'action C et l'autre l'action D, le premier voit ses paquets retardés de 6ms et le second voit ses paquets reçus sans retard. Bien sûr, chaque personne est rationnel et cherche á augmenter son débit, c'est à dire dans notre exmple, à minimiser le retard de ses paquets.

Definition 1.1. Un jeu peut être modélisé par un triplet $< N, S, u >$ avec :

- N représente les joueurs. $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ est un ensemble de cardinal n (nombre de joueurs dans le jeu).
- S représente l'ensemble des combinaisons de stratégies possibles pour l'ensemble des joueurs $S : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ avec S_i l'ensembles des stratégies possibles pour le joueur i. Tous les joueurs n'ont pas nécessairement les même stratégies et certaines combinaisons de stratégies peuvent être impossibles.
- u représente la fonction de $u : S \to \mathbb{R}^n$ qui associe à chaque combinaison de stratégie une valeur d'utilié avec pour chaque u_i :
  - une valeur négative représentant une perte pour le joueur i
  - une valeur positive représentant un gain pour le joueur i

Il est plus commode de représenter la fonction d'utilité pour le joueur i comme $u(s_i, s_{-i})$, avec $s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ qui représente la stratégie jouée par tous les autres joueurs et de noter u_i la i-ème composante de la fonction d'utilité.

Pour notre exemple, nous avons :

- 2 joueurs, $N = \{1, 2\}$
- les stratégies possibles pour les 2 joueurs sont identiques $S_1 = S_2 = \{C, D\}$. Et l'ensemble des combinaisons de stratégies possibles est défini comme $S = \{(C, C), (D, C), (C, D), (D, D)\}$
- la fonction utilité peut être représentée par la matrice suivante :

$Joueur_2$ / $Joueur_1$	C	D
C	(-2,-2)	(-6,0)
D	(0,-6)	(-4,-4)

Definition 1.2. Une stratégie s_i^* *domine strictement* (strictly dominates) la stratégie s_i ssi :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

Quelque soit ce la stratégie choisie que les autres joueurs, la stratégie s_i^* est le meilleur choix pour le joueur i. Comme le joueur i est rationel, il ne va jamais jouer une stratégie dominée s_i.

Definition 1.3. Une stratégie s_i^* *domine faiblement* (weakly dominates) la stratégie s_i, ssi :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

et

$$\exists s_{-i} \in S_{-i}, u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

Quelque soit la stratégie choisie par les autres joueurs, la stratégie s_i^* est au moins aussi bonne que la stratégie s_i pour le joueur i.

Il est maintenant possible d'étendre ces définitions sur l'ensemble des stratégies possibles pour le joueur i.

Definition 1.4. Une stratégie s_i^d est *strictement dominante* (resp. *faiblement dominante*) pour le joueur i ssi s_i^d domine strictement (resp. domine faiblement) toutes les autres stratégie pour le joueur i.

Pour notre exemple, pour le joueur 1, la stratégie D domine strictement la stratégie C. En effet, on a $S_{-1} = \{C, D\}$. pour $s_{-1} = C, u_1(D, C) > u_1(C, C)$ et pour $s_{-1} = D, u_1(D, D) > u_1(C, D)$. En fait, la stratégie D est également la stratégie strictement dominante pour le joueur 2.

Comme le joueur i est rationnel, et qu'il existe une stratégie strictement dominante, alors le joueur i ne va pas jouer une autre stratégie.

Definition 1.5. Un *profil de stratégie* (strategy profile) $S^d = (s_1^d, s_2^d, ldots, s_n^d)$ est un *équilibre strictement dominant* ssi s_i^d est une stratégie dominante pour chaque joueur i.

Pour notre exemple, $S^d = (D, D)$ est un équilibre strictement dominant. Il est intéressant de remarquer l'importance des valeurs pour la fonction d'utilité. Si on prend l'hypothèse que le réseau s'écroule dans le cas où les 2 joueurs suivent le stratégie défectueuse (ie $u(D, D) = (-8, -8)$). Alors il n'y a plus de stratégie dominante pour chaque joueur, et donc plus d'équilibre strictement dominant.

Definition 1.6. Pour le joueur i, une stratégie s_i est nommée *meilleure réponse* (Best Response) pour le profil de stratégie σ_{-i}, ssi

$$\forall s_i' \in S_i, u_i(s_i, \delta_{-i}) \geq u_i(s_i', \sigma_{-i})$$