

Zerfällungskörper

Im Folgenden sei wieder $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$ ein Körper.

Definition 73

Sei $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$ eine Familie von Polynomen $f_i \in K[x]$. Dann nennen wir

$$L := K(\{\alpha \in \mathbb{C} \mid f_i(\alpha) = 0 \text{ für ein } i \in I\})$$

(L = kleinster Körper, der sowohl K als auch

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid f_i(\alpha) = 0 \text{ für ein } i \in I\} \text{ enthält}$$

den Zerfällungskörper von \mathcal{F} . Wir schreiben $L = ZFK(\mathcal{F})$.

Falls $\mathcal{F} = (f)$ nur aus einem Polynom besteht, schreiben $L = ZFK(f)$.

Beispiel $f = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Die Nullstellen von f sind $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow ZFK(f) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Definition 74

Der algebraische Abschluss \overline{K} von K ist

$$\overline{K} := ZFK(K[x] \setminus \{0\})$$

Bemerkung: $\overline{K} \subseteq \mathbb{C}$, da \mathbb{C} selbst algebraisch abgeschlossen.

(Dabei heißt ein Körper L algebraisch abgeschlossen, falls jedes Polynom mit Koeff. in L bereits eine Nullstelle in L hat).

Definition 75

(1) Seien K und L Körper. Eine Abbildung $\sigma: K \rightarrow L$

heißt **Körperhomomorphismus**, falls:

$$(1) \quad \forall x, y \in K: \sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$$

$$(2) \quad \forall x, y \in K: \sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \cdot \sigma(y).$$

$$(3) \quad \sigma(1) = 1.$$

(2) Seien K, L, L' Körper mit $K \subseteq L, K \subseteq L'$. Wir nennen $\sigma: L \rightarrow L'$ einen **K -Homomorphismus**, falls σ ein Körperhomomorphismus ist und für alle $x \in K$ gilt: $\sigma(x) = x$.

Wir schreiben $\text{Hom}(K, L) = \{ \text{Körperhomomorphismen } \sigma: K \rightarrow L \}$

$\text{Hom}_K(L, L') = \{ K\text{-Homomorphismen } \sigma: L \rightarrow L' \}$

Definition 76

Seien K, L Körper und sei $K \subseteq K'$ eine Körpererweiterung. Sei $\sigma \in \text{Hom}(K, L)$.

Wir nennen $\sigma' \in \text{Hom}(K', L)$ eine **Fortsetzung** von σ , falls $\sigma'|_K = \sigma$.

Lemma 77

Sei $K' = K(\alpha)$ eine algebraische Körpererweiterung von K . Sei $f \in K[x]$ das Minimalpolynom von α , $f(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$. Sei außerdem $\sigma \in \text{Hom}(K, L)$, wobei L ein weiterer Körper ist.

(1) Falls $\sigma' \in \text{Hom}(K', L)$ eine Fortsetzung von σ ist, so ist $\sigma'(\alpha)$ eine Nullstelle $f^\sigma := \sum_{i=0}^d \sigma(a_i) x^i$.

(2) Zu jeder Nullstelle $\beta \in L$ von f^σ gibt es genau eine Fortsetzung $\sigma' \in \text{Hom}(K', L)$ von σ , so dass $\beta = \sigma'(x)$.

In besonderen ist die Anzahl der Fortsetzungen σ' gleich der Anzahl der Nullstellen von f^σ in L .

Beweis

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \text{Es gilt: } f^\sigma(\sigma'(x)) &= \sum_{i=0}^d \sigma(a_i) \cdot \sigma'(x)^i \\
 &= \sum_{i=0}^d \sigma'(a_i) \cdot \sigma'(x^i) \\
 &= \sum_{i=0}^d \sigma'(a_i \cdot x^i) \\
 &= \sigma'\left(\sum_{i=0}^d a_i x^i\right) = \sigma'(0) = 0.
 \end{aligned}$$

(2) Eindeutigkeit: Da $K' = K(x) = \{g(x) \mid g \in K[x], \deg(g) < d\}$, folgt, dass σ' eindeutig durch Angabe von $\sigma'(x)$ definiert ist.

Existenz: Sei $g(x) \in K'$, $g \in K[x]$, $\deg(g) < d$, so dass $g(x) = \sum_{i=0}^k c_i \cdot x^i$.

Dann definieren eine Abbildung $\sigma': K' \rightarrow L$ durch:

$$\sigma'(g(x)) := \sum_{i=0}^k \sigma(c_i) \cdot \beta^i \in L.$$

Per Definition gilt: $\sigma'|_K = \sigma$ und $\sigma' \in \text{Hom}(K', L)$. \square

Korollar 78

Sei L ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\sigma \in \text{Hom}(K, L)$.

Sei $K' = K(z_1, \dots, z_m)$, wobei die z_i algebraisch über K sind ($K \subset K'$ ist eine endliche algebraische Körpererweiterung). Dann existiert eine Fortsetzung $\sigma' \in \text{Hom}(K', L)$ von σ .

Beweis

Sei $K_i = K(z_1, \dots, z_i)$. Dann ist $K_i = K_{i-1}(z_i)$. Für $\sigma_i \in \text{Hom}(K_i, L)$ finden wir eine Fortsetzung $\sigma_{i+1} \in \text{Hom}(K_{i+1}, L)$ (wegen Lemma 77 und weil L algebraisch abgeschlossen ist). Dann ist $\sigma_m = \sigma'$. \square

$$\begin{aligned}\text{Erinnerung } \text{Hom}_K(K', L) &= \{ \sigma \in \text{Hom}(K', L) \mid \forall x \in K: \sigma(x) = x \} \\ &= \{ \sigma \in \text{Hom}(K', L) \mid \sigma \text{ setzt } \text{id}_K \text{ fort} \}.\end{aligned}$$

Sind die K -Homomorphismen $K' \rightarrow L$.

Satz 79

Sei $L = K(z_1, \dots, z_m)$ eine endliche algebraische Körpererweiterung und sei \bar{L} der algebraische Abschluss von L . Dann sind die folgenden drei Punkte äquivalent:

- (1) Jeder K -Homomorphismus $\sigma: L \rightarrow \bar{L}$ beschränkt sich auf einen K -Homomorphismus $\sigma: L \rightarrow L$. D.h. $\text{Hom}_K(L, \bar{L}) = \text{Hom}_K(L, L)$.
- (2) L ist ein Zerfällungskörper einer Familie von Polynomen in $K[x]$.
- (3) Jedes Polynom $f \in K[x]$, welches in L eine Nullstelle hat, hat alle Nullstellen in L .

Beweis

(1) \Rightarrow (3): Sei also $f \in K[x]$ und $a \in L$ eine Nullstelle von f . Sei $b \in \bar{L}$ eine weitere Nullstelle von f . Mit Lemma 77 finden wir einen Körperhomomorphismus $\sigma: K(a) \rightarrow \bar{L}$, der die Identität auf K fortsetzt und so dass $\sigma(a) = b$. D.h. $\sigma \in \text{Hom}_K(K(a), \bar{L})$. Wir finden mit Korollar 78 eine Fortsetzung $\sigma' \in \text{Hom}_K(L, \bar{L})$ von σ . Nach Annahme gilt: $\sigma' \in \text{Hom}_K(L, L)$.
 $\Rightarrow b = \sigma(a) = \sigma'(a) \in L$.

(3) \Rightarrow (2): Sei $f_i \in K[x]$ das Minimalpolynom von z_i . Nach Annahme sind alle Nullstellen von f_i in L enthalten.
 $\Rightarrow L = \text{ZFK}(\{f_1, \dots, f_m\})$.

(2) \Rightarrow (1): Sei $L = \text{ZFK}(\mathcal{F})$, mit $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$. Und sei $\sigma \in \text{Hom}_K(L, \bar{L})$. Da $f_i \in K[x]$, ist $f_i^{\sigma} = f_i \in K[x]$. $\Rightarrow \sigma(L)$ ist auch Zerfällungskörper der Familie \mathcal{F} $\Rightarrow L = \sigma(L)$. $\Rightarrow \sigma \in \text{Hom}_K(L, L)$. \square

Satz 80

Sei $L = K(z_1, \dots, z_m)$ eine endliche algebraische Körpererweiterung von K .

Dann gilt:

$$[L : K] = \# \text{Hom}_K(L, \bar{K}).$$

Bemerkung Da $\bar{K} = \bar{L}$, ergibt sich für einen Zerfällungskörper L :
 $[L : K] = \# \text{Hom}_K(L, L)$.

Beweis von Satz 80

Sei $K_i = K(z_1, \dots, z_i)$, so dass $K_i = K_{i-1}(z_i)$. Sei $f_i \in K_{i-1}[x]$ das Minimalpolynom von z_i über K_{i-1} . Dann gilt:

- $[K_i : K_{i-1}] = \deg(f_i)$
- Nach Lemma 77(2): $\# \text{Hom}_{K_{i-1}}(K_i, \bar{K}) = \deg(f_i)$.

$$\Rightarrow [K_i : K_{i-1}] = \# \text{Hom}_{K_{i-1}}(K_i, \bar{K}).$$

$$\begin{aligned} \text{Andererseits: } [L : K] &= [K_m : K_{m-1}] \cdot [K_{m-1} : K_{m-2}] \cdot \dots \cdot [K_1 : K]. \\ &= \# \text{Hom}_{K_{m-1}}(K_m, \bar{K}) \cdot \dots \cdot \# \text{Hom}_K(K_1, \bar{K}) =: \aleph \end{aligned}$$

Wir müssen jetzt zeigen, dass $\aleph = \# \text{Hom}_K(L, \bar{K})$.

Dazu genügt es das folgende Hilfssatz zu beweisen:

Hilfssatz:

Sei $K \subseteq L \subseteq M$ eine Kette von endlichen algebraischen Körpererweiterungen.

Dann gilt: $\# \text{Hom}_K(M, \bar{K}) = \# \text{Hom}_L(M, \bar{K}) \cdot \# \text{Hom}_K(L, \bar{K})$.

Beweis

Sei $\text{Hom}_K(L, \bar{K}) = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, $\text{Hom}_L(M, \bar{K}) = \{\tau_j \mid j \in J\}$.

Mit Korollar 78 kann ich die σ_i fortsetzen zu $\sigma'_i: M \rightarrow \bar{K}$.

Zu zeigen: (1) Die $\sigma'_i \circ \tau_j$ für $i \in I, j \in J$ sind paarweise verschieden.

$$(2) \quad \text{Hom}_K(M, \bar{K}) = \{\sigma'_i \circ \tau_j \mid i \in I, j \in J\}$$

Zu (1). Sei $\sigma'_i \circ \tau_j = \sigma'_k \circ \tau_\ell$. Da τ_j und τ_ℓ auf L die Identität sind, gilt: $\sigma'_i = \sigma'_k$ und damit gilt auch $\tau_j = \tau_\ell$.
 $\Rightarrow i = k$ und $j = \ell$.

Zu (2): Sei $\pi \in \text{Hom}_K(M, \bar{K})$. Dann ist die Einschränkung
 $\pi|_L \in \text{Hom}_K(L, \bar{K}) \Rightarrow \exists i \in I : \pi|_L = \sigma_i^{-1}$.
 $\Rightarrow (\sigma_i^{-1})^{-1} \circ \pi \in \text{Hom}_L(M, \bar{K}) \Rightarrow \exists j \in J : (\sigma_i^{-1})^{-1} \circ \pi = \tau_j$
 $\Rightarrow \pi = \sigma_i^{-1} \circ \tau_j.$ □

Bemerkung Die meisten Resultate in dieser Vorlesung wurden für endliche Körpererweiterungen bewiesen. Die meisten davon lassen sich auch für unendliche Körpererweiterungen verallgemeinern.