Untergruppen

Definition 11

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe von G ist eine Teilmenge $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$, so dass H bzgl. $\cdot$ auch eine Gruppe ist.

Beispiel: $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine UG $(\mathbb{Q}, +)$.

- $V = \{ id, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$ ist UG von $(S_4, \circ)$ (die sogenannte Klein'sche Vierergruppe).

Lemma 12

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$. Dann gilt:
H ist eine Untergruppe von G $\Leftrightarrow$ $\forall g, h \in H: g \cdot h^{-1} \in H$.

Beweis: Übung.

Lemma 13

Sei $(H_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untergruppen von $(G, \cdot)$. Dann ist $\bigcap_{i \in I} H_i$ eine Untergruppe von G.

Beweis: Übung

Lemma 14

Sei H eine Untergruppe von $(G,\cdot)$ und $g \in G$. Dann ist auch

$$g \cdot H \cdot g^{-1} = \{ g \cdot h \cdot g^{-1} \mid h \in H \}$$

eine Untergruppe von G, die sogenannte konjugierte Untergruppe.

Beweis: Übung.

Bemerkung: Zwei Elemente $g, h \in G$ heißen konjugiert, falls ein $a \in G$ existiert mit $a g a^{-1} = h$.

Definition 15

Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $S \subseteq G$ eine Teilmenge. Die Untergruppe

$$\langle S \rangle := \bigcap_{\substack{S \subseteq H \\ H \text{ ist UG von } G.}} H$$

heißt die von S erzeugte Untergruppe.

Beispiel: $S = \{g\}$ mit $g \in G$: Dann ist

$$\langle S \rangle = \begin{cases} \{ g, g^2, \ldots, g^{\mathrm{ord}(g)} \} & \text{falls } \mathrm{ord}(g) < \infty, \\ \{ \ldots, g^{-2}, g^{-1}, e, g, g^2, g^3, \ldots \}, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $g^{-i} := (g^{-1})^i$