Struktur der symmetrischen Gruppe S_n

Definition 8

(1) $\sigma \in S_n$ heißt Transposition, falls $i, j \in \{1, \dots, n\}$ existieren, so dass $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$, $\sigma(k) = k$ für alle $k \neq i, j$.
Wir schreiben $\sigma = (i\,j)$.

(2) $\sigma \in S_n$ heißt Zykel der Länge r, falls $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ existieren, so dass $\sigma(i_j) = i_{(j+1 \bmod r)}$ und $\sigma(k) = k$ für alle $k \notin \{i_1, \dots, i_r\}$.
Wir schreiben $\sigma = (i_1 \dots i_r)$.

Satz 9

Sei $\sigma \in S_n$.

(1) σ lässt sich schreiben als Produkt von Transpositionen.

(2) σ lässt sich schreiben als Produkt von disjunkten Zykeln.
Dieses Produkt ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.

(3) $|S_n| = n!$

Beweis

(1) Sei $\sigma \in S_n$ und $r := r(\sigma) = \max\{0 \leq r \leq n \mid \forall 1 \leq i \leq r : \sigma(i) = i\}$.
Falls $r = n$, dann ist $\sigma = \mathrm{id} = \tau^2$ für alle Transpositionen $\tau \in S_n$.
Falls $r < n$, dann ist $s := \sigma(r+1) > r+1$. Sei $\tau_1 := (r+1\ s)$.
Dann gilt: $r(\tau_1 \circ \sigma) > r(\sigma)$. Induktiv finden wir Transpositionen $\tau_2, \dots, \tau_k$, sodass $r(\tau_k \circ \tau_{k-1} \circ \dots \circ \tau_1 \circ \sigma) = n$.

$\Rightarrow \quad \tau_k \circ \dots \circ \tau_1 \circ \sigma = id \quad \Rightarrow \quad \sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k .$

(2) Sei $\sigma \in S_n \setminus \{id\}$. Wir haben die <u>disjunkte</u> Zerlegung

$$\{1, \dots, n\} = \dot{\bigcup_{j=1}^{k}} K_j \qquad (\text{d.h. } K_j \cap K_i = \emptyset \text{ falls } i \neq j).$$

wobei die K_j wie folgt definiert sind:

$K_1, \dots, K_k$ sind definiert als die Äquivalenzklassen der Relation:

$$i_1 \sim i_2 \iff \exists\, l \in \mathbb{N} : \sigma^l (i_1) = i_2 .$$

Wir definieren $\tau_1, \dots, \tau_k$ mit

$$\tau_i|_{K_j} = \begin{cases} \sigma|_{K_j}, & \text{falls } i = j \\ id|_{K_j}, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

<u>Beachte:</u> $\tau_i = (i \ \ \sigma(i) \ \ \sigma^2(i) \dots \sigma^r(i))$ für $r = \operatorname{ord}(\tau_i) - 1$.

Wegen Lemma 7 ist $r < \infty$. Die τ_i sind disjunkte Zykel.

Und es gilt $\underline{\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k .}$

(Die letzte Gleichung lässt sich beweisen durch das Studium von rechter und linker Seite und ihrer Wirkung auf $i \in \{1, \dots, n\}$. Sei z.B. $i \in K_j$. Dann gilt:

$$\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k (i) = \tau_j (i) = \sigma(i).$$

)

(3) <u>Übung</u>

$\square$

Definition 10

Sei $\sigma \in S_n$. Das Signum von σ ist definiert als

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

Bemerkung

(1) $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$

(2) Falls $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, nennen wir σ eine gerade Permutation, sonst ungerade.

(3) Für den Moment ist die Definitions nicht wichtig. Sie wird später von zentraler Bedeutung sein.