Gruppenaktionen

Definition 46

Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine Operation oder Aktion von G auf X ist eine Abbildung

$$G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto g.x$$

welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) $e_G . x = x$ für alle $x \in X$.

(2) $(gh).x = g.(h.x)$ für alle $g, h \in G$ und $x \in X$.

Beispiele

(1) triviale Gruppenaktion: $g.x = x$ für alle $g \in G$ und $x \in X$.

(2) Sei $G \subset S(X) = \{ \sigma : X \to X \mid \sigma \text{ bijektiv} \}$. G operiert auf X in "natürlicher Weise" $(\sigma, x) \mapsto \sigma(x)$, für $\sigma \in G \subset S(X)$

(3) G wirkt auf sich selber: $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ (d.h. $X = G$).

(4) G wirkt auf sich selber durch Konjugation: $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$

Lemma 47

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X wirkt. Sei $g \in G$. Dann definieren wir $\tau_g : X \to X$, $x \mapsto g.x$. Dann gilt:

(1) $G \to S(X)$, $g \mapsto \tau_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus

(2) Die Menge der Gruppenaktionen ist bijektiv zu den Gruppenhom. $G \to S(X)$.

Beweis

(1). Seien $g, h \in G$ und $x \in X$. Dann gilt:

$$\tau_{g \cdot h}(x) = (g \cdot h) . x = g . (h . x) = \tau_g(\tau_h(x)) = (\tau_g \circ \tau_h)(x)$$

$$\Rightarrow \tau_{g \cdot h} = \tau_g \circ \tau_h$$

(2) Wir müssen zeigen, dass ein Gruppenhom. $\varphi : G \to S(X)$ eine Gruppenaktion definiert: Wir definieren

$$G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto \varphi(g)(x). \qquad (*)$$

Es gilt: $(e_G, x) \mapsto \varphi(e_G)(x) = id_X(x) = x$

$$(g \cdot h) . x = \varphi(g \cdot h)(x) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x) = \varphi(g)(\varphi(h)(x)).$$

$\rightarrow$ $(*)$ ist eine Gruppenaktion.

Dabei gilt: die Zuordnungen Gruppen.hom $G \to S(X)$ $\leftrightarrow$ Aktionen von G auf X sind invers zueinander.

$\square$

Definition 48

Sei G eine Gruppe und X eine Menge, auf der G wirkt. Sei $x \in X$.

Dann definieren wir:

(1) $Gx = \{ g.x \mid g \in G \}$

(2) $G_x = \{ g \in G \mid g.x = x \}$

Gx heißt **Bahn** oder **Orbit** von x.

G_x heißt **Stabilisator** von x.

Lemma 49

$G_x \subset G$ ist eine Untergruppe.

Beweis

Erinnerung: $G_x = \{ g \in G \mid g.x = x \}$

Seien $g, h \in G_x$. Zu zeigen: $gh^{-1} \in G_x$.

Es gilt:

$$(g \cdot h^{-1}).(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{weil } h \in G_x}}{=} (g \cdot h^{-1}).(h.x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gruppenaktion-} \\ \text{eigenschaft.}}}{=} (g h h^{-1}).x = g.x = x$$

$\Rightarrow (g h^{-1}).(x) = x \Rightarrow G_x$ ist eine UG von G $\square$.

Lemma 50

Sei G eine Gruppe und X eine Menge, auf der G wirkt.

Seien $x, y \in X$. Dann gilt:

Entweder $Gx = Gy$ oder $Gx \cap Gy = \emptyset$.

Beweis

Sei $z \in Gx \cap Gy$. Dann existieren $g, h \in G$ mit:

$$z = g.x \quad \text{und} \quad z = h.y.$$

$$\Rightarrow g.x = h.y \begin{cases} \Rightarrow (h^{-1}g).x = y & \Rightarrow y \in Gx \Rightarrow Gy \subseteq Gx \\ \Rightarrow x = (g^{-1}h).y & \Rightarrow x \in Gy \Rightarrow Gx \subseteq Gy. \end{cases}$$

$\Rightarrow Gx = Gy$.

Korollar 51

X ist eine disjunkte Vereinigung von Bahnen von G.

Definition 52

Die Aktion von G auf X heißt transitiv, wenn es genau eine Bahn gibt.

(Äquivalent dazu ist: für alle $x, y \in X$ existiert $g \in G$ mit $y = g.x$).

Satz 53

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X wirkt. Sei $x \in X$. Dann gilt:

$$(G : G_x) = \# Gx.$$

Beweis

Wir zeigen, dass es eine Bijektion $G/G_x \cong Gx$ gibt.

Sei $x \in X$ beliebig, aber fest gewählt.

Sei $\varphi : G \to Gx$, $g \mapsto g.x$ (es gilt: $g.x \in Gx \subset X$).

Seien $g, h \in G$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(g) = \varphi(h) \iff g.x = h.x &\iff h^{-1}g.x = x \\
&\iff (h^{-1}g) \in G_x. \\
&\iff g \in h \cdot G_x \\
&(\iff h \in g \cdot Gx)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ φ induziert eine injektive Abbildung $\tilde{\varphi} : G/G_x \longrightarrow Gx$.

Da φ surjektiv ist, ist auch $\tilde{\varphi}$ surjektiv.

$\Rightarrow$ $G/G_x \cong Gx$. $\square$

Satz 54 (Bahnungleichung)

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X wirkt. Seien $x_1, \dots, x_n \in X$, so dass $Gx_1, \dots Gx_n$ genau die Bahnen in X sind, d.h. $X = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} Gx_i$. Dann gilt:

$$\# X = \sum_{i=1}^{n} \# G x_i = \sum_{i=1}^{n} (G : G_{x_i})$$

Beweis

nach Satz 53 $\square$

Betrachte noch einmal die Wirkung von G auf sich selbst durch Konjugation: $G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto ghg^{-1}$.

Definition 55

Sei G eine Gruppe und $S \subset G$ eine Teilmenge. Wir definieren:

(1) $Z_S = \{ g \in G \mid gs = sg \text{ für alle } s \in S \}$

(2) $N_S = \{ g \in G \mid gS = Sg \}$

Z_S heißt Zentralisator von S in G.

N_S heißt Normalisator von S in G

$Z := Z_G = \{ g \in G \mid gh = hg \text{ für alle } h \in G \}$ heißt das Zentrum von G.

Lemma 56

(1) $Z \subseteq G$ ist ein Normalteiler

(2) Z_S und N_S sind Untergruppen von G.

(3) Ist $S \subseteq G$ eine Untergruppe, so ist N_S die größte aller Untergruppen $H \subseteq G$ mit der Eigenschaft, dass S ein Normalteiler in H ist.

(in anderen Worten: falls $H \subseteq G$ eine UG ist, s.d. $S \subseteq H$ ein Normalteiler ist, dann gilt: $H \subseteq N_S$.).

Beweis

Übung.

Beobachtung: Bzgl. der Konjugationsoperation von G auf sich selbst:

Sei $x \in G$, dann gilt:

(1) Falls $x \in Z$, dann $Gx = \{x\}$.

(2) Falls $x \notin Z$, dann $G_x = Z_{\{x\}}$.

Korollar 57 (Klassengleichung)

Seien $x_1, \dots, x_n \in G \setminus Z$, so dass $G \setminus Z = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} Gx_i$.

Dann gilt:

$$\# G = \# Z + \sum_{i=1}^{n} (G : Z_{\{x_i\}}).$$

Beweis

Anwendung der Bahnengleichung in diesem Spezialfall der Konjugation.

Lemma 58

Ist G/Z zyklisch, so ist G abelsch.

Beweis

Sei $a \in G$ mit $G/Z = \langle \{aZ\} \rangle$. Wir schriben $\bar{a} := aZ$ und $\bar{g} = gZ$ und $\bar{h} = hZ$. Weil G/Z zyklisch ist, existieren $m, n \in \mathbb{Z}$ mit

$$\bar{a}^n = \bar{g} \quad \text{und} \quad \bar{a}^m = \bar{h}.$$

Das heißt: es existieren $b, c \in Z$ mit $g = a^n \cdot b$ und $h = a^m \cdot c$.

Dann:

$$gh = a^n b \cdot a^m c \overset{b \in Z}{=} a^n a^m bc = a^{n+m} \cdot b \cdot c.$$

und $$hg = a^m \cdot c \cdot a^n \cdot b \overset{c \in Z}{=} a^m a^n cb \overset{b \in Z}{=} a^{n+m} \cdot b \cdot c$$

$\Rightarrow gh = hg$

$\Rightarrow$ G abelsch. $\square$