Untergruppen

Definition 11

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe von G ist eine Teilmenge $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$, so dass H bzgl. $\cdot$ auch eine Gruppe ist.

Beispiel: $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine UG $(\mathbb{Q}, +)$.

- $V = \{ id, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$ ist UG von $(S_4, \circ)$ (die sogenannte Klein'sche Vierergruppe).

Lemma 12

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$. Dann gilt:
H ist eine Untergruppe von G $\Leftrightarrow$ $\forall g, h \in H$: $g \cdot h^{-1} \in H$.

Beweis: Übung.

Lemma 13

Sei $(H_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untergruppen von $(G, \cdot)$. Dann ist $\bigcap_{i \in I} H_i$ eine Untergruppe von G.

Beweis: Übung

Lemma 14

Sei H eine Untergruppe von $(G,\cdot)$ und $g\in G$. Dann ist auch
$$g\cdot H\cdot g^{-1} = \{ g\cdot h\cdot g^{-1} \mid h\in H\}$$
eine Untergruppe von G, die sogenannte konjugierte Untergruppe.

<u>Beweis</u>: Übung.

<u>Bemerkung</u>: Zwei Elemente $g,h\in G$ heißen konjugiert, falls ein $a\in G$ existiert mit $aga^{-1}=h$.

Definition 15

Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $S\subseteq G$ eine Teilmenge. Die Untergruppe
$$\langle S\rangle := \bigcap_{\substack{S\subseteq H\\ H \text{ ist UG von } G.}} H$$
heißt die von S erzeugte Untergruppe.

<u>Beispiel</u>: $S=\{g\}$ mit $g\in G$: Dann ist
$$\langle S\rangle = \begin{cases} \{g, g^2, \dots, g^{\operatorname{ord}(g)}\} & \text{falls } \operatorname{ord}(g)<\infty, \\ \{\dots, g^{-2}, g^{-1}, e, g, g^2, g^3, \dots\}, & \text{sonst}\end{cases}$$
wobei $g^{-i} := (g^{-1})^i$