Zyklische Gruppen

Definition 42

Eine Gruppe G heißt zyklisch, falls ein $g \in G$ existiert, so dass $G = \langle \{g\} \rangle$ (siehe Definition 15 in VL 2), d.h.

$$G = \begin{cases} \{g, g^2, \dots, g^{\operatorname{ord}(g)}\}, & \text{falls } \operatorname{ord}(g) < \infty \\ \{\dots, g^{-2}, g^{-1}, e, g, g^2, \dots\} \end{cases}$$

Beispiel $\mathbb{Z}$ ist zyklisch, da $\mathbb{Z} = \langle \{1\} \rangle = \langle \{-1\} \rangle$.

Lemma 43

Sei $H \subseteq \mathbb{Z}$ eine Untergruppe. Dann existiert $m \in \mathbb{Z}$, so dass $H = m\mathbb{Z} = \{m \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Insbesondere ist H zyklich (denn $m\mathbb{Z} = \langle \{m\} \rangle$).

Beweis

Annahme $H \neq \{0\}$. Sei also $x \in H$, $x \neq 0$. Falls $x < 0$, dann ist $-x > 0$ und $-x \in H$, weil $-x$ das Inverse zu x ist. Dies zeigt dass H positive Elemente enthält. Sei $m \in H$ das kleinste positive Element in H. Sei $a \in H$. Dann finden wir $q \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \underset{\in \mathbb{Z}}{r} < m$ mit

$$a = q \cdot m + r \qquad \text{(durch Anwenden des eukl. Algo.)}.$$

$$\to \quad r = \underbrace{a}_{\in H} - \underbrace{q \cdot m}_{\substack{= m + m + \dots + m \ (q\text{-mal}) \\ \in H}} \in H \quad \Rightarrow \quad r = 0. \quad \Rightarrow \quad a = q \cdot m \Rightarrow a \in \langle \{m\} \rangle$$

$$\Rightarrow H \subseteq \langle \{m\} \rangle$$

Es gilt auch $\langle \{m\} \rangle \subseteq H$, weil $m \in H$ $\Rightarrow$ $H = \langle \{m\} \rangle$.

$\Rightarrow$ H ist zyklisch $\square$

Satz 44

Sei G eine zyklische Gruppe. Dann gilt:

$$G \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } |G| = \infty \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, & \text{falls } |G| = m \end{cases}$$

Beweis

Sei $G = \{\langle g \rangle\}$. Dann definieren wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z} \to G, \quad k \mapsto g^k$$

Nach Konstruktion ist φ surjektiv.

$\Rightarrow \mathbb{Z}/\ker(\varphi) \cong G$.

Da $\ker(\varphi) \subseteq \mathbb{Z}$ eine Untergruppe ist, ist $\ker(\varphi) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 43.}}}{=} \begin{cases} \{0\}, & \text{oder} \\ m\mathbb{Z}, & m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$

$$\Rightarrow G \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } \ker(\varphi) = \{0\} \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, & \text{falls } \ker(\varphi) = m\mathbb{Z},\ m \neq 0. \end{cases}$$

$\square$.

Satz 45

(1) Sei G eine zyklische Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe. Dann ist auch H zyklisch.

(2) Falls $f: G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus ist, und G zyklisch ist, so sind auch $\ker(f)$ und $f(G)$ zyklisch.

Beweis

(1) Sei $G = \langle \{g\} \rangle$. Wir finden einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z} \to G, \quad i \mapsto g^i.$$

Dann ist $\varphi^{-1}(H)$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$, also zyklisch:

$\varphi^{-1}(H) = \langle \{m\} \rangle = \{ k \cdot m \mid k \in \mathbb{Z} \}$, $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} H &= \{ \varphi(k \cdot m) \mid k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ \varphi(m)^k \mid k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \langle \varphi(m) \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ H ist zyklisch.

(2) Sei $f : G \to G'$ mit G zyklisch.

$\ker(f) \subseteq G$ ist eine Untergruppe und nach (1) zyklisch.

Sei $G = \langle \{g\} \rangle$. Dann gilt:
$$\begin{aligned} f(G) &= \{ f(g^k) \mid k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ f(g)^k \mid k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \langle \{ f(g) \} \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $f(G)$ ist zyklisch. $\square$