Grundlagen der Algebra

WiSe 20/21

Uni Kassel

Algebra (arabisch: "Zusammenfügen gebrochener Teile")

heute: Rechnen mit Gleichungen
meist: polynomielle Gleichungen der Art

$$x^2 + px + q = 0$$

$\rightsquigarrow$ x eine Unbekannte
$p, q \in \mathbb{Q}$.

Das Beispiel $x^2+px+q=0$ ist eine quadratische Gleichung.
Die Lösung ist durch die p-q-Formel gegeben:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel: $p=2$
$q=-8$
$\rightsquigarrow x \in \{-2, 4\}$

Die Lösung der quadr. Gleichung seit min. 3000 BC bekannt.

Für Gleichungen vom Grad 3

$$x^3 + ax - b = 0$$

die allg. Gleichung $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ lässt sich in diese Form bringen

gibt es die Cardano-del-Ferro-Formel (Mitte 16 Jhd)

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^2}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3}}$$

Es gibt auch eine allgemeine Lösung für die Gleichung vom Grad 4, die sog. Ferrari-Formel (1545).

Die Frage, ob es eine allgemeine Formel für Gleichungen vom Grad 5, die nur mit $\{+, -, \cdot, /, \sqrt{\ }\}$ auskommt, gibt, war danach lange offen.

Antwort: Nein. Dies wurde erst ca. 300 Jahre später von Abel, Ruffini und Galois bewiesen.

Der Grund für diesen langen Zeitraum ist, dass der Beweis ein völlig neues mathematisches Konzept benötigt: die Gruppentheorie.

Betrachten wir noch einmal die kubische Gleichung

$$x^3 + ax - b = 0$$

Der Fundamentalsatz der Algebra (Gauss, 1799) zeigt, dass $u, v, w \in \mathbb{C}$ existieren, so dass

$$x^3 + ax - b = (x-u)(x-v)(x-w)$$

Das folgende Argument zeigt, dass u, v, w sich durch a, b und $\{ +, -, \cdot, /, \sqrt{\ } \}$ darstellen.

Definiere $\xi = e^{2\pi i/3}$, so dass $\xi^3 = 1$.
Für eine bijektive Abbildung $\pi: \{u, v, w\} \to \{u, v, w\}$, eine sogenannte Permutation, definieren wir:

$$y_\pi := \pi(u) + \xi \cdot \pi(v) + \xi^2 \cdot \pi(w)$$
$$z_\pi := y_\pi^{\,3}$$

Es gilt: $z_{id} = u^3 + v^3 + w^3 + 6uvw + 3\zeta(u^2v + v^2w + w^2u)$
$$+ 3\zeta^2(u^2w + v^2u + w^2v)$$

Beobachtung: z_π kann für alle Permutationen $\pi: \{u,v,w\} \to \{u,v,w\}$ nur 2 Werte annehmen.

D.h. $z_\pi \in \{r, s\}$.

Beobachtung: Falls $p = f(u,v,w,\zeta) \in \mathbb{C}$ ein Polynom (mit Koeff. in $\mathbb{Q}$) in u, v, w, ζ ist, und falls für alle Permutationen und alle $i \in \{1,2\}$ gilt:

$$f(\pi(u), \pi(v), \pi(w), \zeta^i) = f(u,v,w,\zeta)$$

dann gilt: $p \in \mathbb{Q}$.

Es folgt: $r + s \in \mathbb{Q}$, $r \cdot s \in \mathbb{Q}$

$\to$ $X^2 - (r+s)X + r \cdot s$ ist ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$
$= (X-r)(X-s)$

Folgerung: 1) z_π ist Lösung von $x^2 - (r+s)x + rs$

$\rightsquigarrow \quad z_\pi = \frac{r+s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r+s}{2}\right)^2 - rs}$

2) y_π ist Lösung von $x^3 - z_\pi$

$$y_\pi = \pi(u) + \eta \cdot \pi(v) + \eta^2 \cdot \pi(w)$$

3) u, v, w durch Lösen eines LGS aus den y_π gewonnen werden können.

Der entscheidende Punkt im Argument ist die Wirkung der Permutation.

Deswegen wollen wir in der VL diese Wirkungen studieren.
Die richtige ist die Sprache der Gruppentheorie.