Nebenklassen und Normalteiler

Lemma 16

Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe.

$$f \sim g \;:\Leftrightarrow\; f \cdot g^{-1} \in H.$$

definiert eine Äquivalenzrelation auf G.

Beweis

Reflexivität: Da $e \in H$ gilt für alle $g \in G$: $e = g \cdot g^{-1} \in H \Rightarrow g \sim g$.

Symmetrie: Falls $f \sim g$, d.h. $f \cdot g^{-1} \in H$. Dann gilt: $(f \cdot g^{-1})^{-1} \in H$

$$(f \cdot g^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1} \cdot f^{-1} = g \cdot f^{-1} \in H \Rightarrow g \sim f.$$

Transitivität: Seien $f \sim g$, $g \sim h$. Dann $\underbrace{\underbrace{f \cdot g^{-1}}_{\in H} \cdot \underbrace{g \cdot h^{-1}}_{\in H}}_{f \cdot (g^{-1} \cdot g) \cdot h^{-1} = f \cdot h^{-1}} \in H \Rightarrow f \sim h.$ $\square$

Mit der gleichen Beweisstrategie lässt sich zeigen, dass

$$f \sim g \;:\Leftrightarrow\; f^{-1} \cdot g \in H$$

eine Äquivalenzrelation auf G ist.

Definition 17

(1) Die Äquivalenzklassen bzgl. $f \sim g \Leftrightarrow f \cdot g^{-1} \in H$ heißen **Rechtsnebenklassen**. Wir schreiben

$$Hg := \{ h \cdot g \mid h \in H \} \quad (\longleftarrow \text{ eine Rechtsnebenklasse })$$

$$H \backslash G := \{ Hg \mid g \in G \} \quad (\longleftarrow \text{ Menge alle Rechtsnebenklassen})$$

(2) Die Äquivalenzklassen bzgl. $f \sim g \Leftrightarrow f^{-1} \cdot g \in H$ heißen **Linksnebenklassen**. Wir schreiben

$$gH := \{ g \cdot h \mid h \in H \} \quad (\longleftarrow \text{ eine Linksnebenklasse })$$

$$G/H := \{ gH \mid g \in G \} \quad (\longleftarrow \text{ Menge aller Linksnebenklassen})$$

Lemma 18

G/H und $H \backslash G$ sind gleichmächtig.

Beweis

Betrachte $\varphi : G \longrightarrow G, \; g \longmapsto g^{-1}$. Dann:

$$\varphi(gH) = \{ (g \cdot h)^{-1} \mid h \in H \} = \{ h^{-1} \cdot g^{-1} \mid h \in H \} = \{ h \cdot g^{-1} \mid h \in H \} = H g^{-1}$$

$\rightsquigarrow$ φ induziert eine Bijektion $G/H \longrightarrow H \backslash G$. $\square$

Lemma 19

Falls $g_1 H \neq g_2 H$, so ist $g_1 H \cap g_2 H = \emptyset$

Beweis

Falls $g \in g_1 H \cap g_2 H$, so gilt: $g \sim g_1, g \sim g_2. \Rightarrow g_1 \sim g_2. \Rightarrow g_1 H = g_2 H$ $\square$

Definition 20

Sei $H \leq G$ eine Untergruppe. Der *Index* von H in G ist

$$(G:H) := |G/H| = |H \backslash G|$$

Satz 21

Sei $K \leq H \leq G$ eine Kette von Untergruppen. Dann gilt:

$$(G:K) = (G:H)(H:K).$$

Beweis

Seien $g_1 H, \dots, g_r H$ ein Repräsentantensystem für G/H, $r = (G:H)$,
und $h_1 K, \dots, h_s K$ ein Repräsentantensystem für H/K, $s = (H:K)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Behauptung 1:} & G/K = \{(g_i \cdot h_j)K \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\} \\ \text{Behauptung 2:} & r \cdot s = |\{(g_i \cdot h_j)K \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}|. \end{array}\right\} \Rightarrow |G/K| = (G:K) = r \cdot s.$$

Zu 1: „$\supseteq$" gilt per Definition.

„$\subseteq$" Da $g_1 H, \dots, g_r H$ ein Repr.sys bilden, gilt $G = \bigcup_{i=1}^{r} g_i H$.

Genauso, $H = \bigcup_{j=1}^{s} h_j K$.

Sei $g \in G$. $\Rightarrow$ existiert $1 \leq i \leq r$ mit $g \in g_i \cdot H$.

Sei etwa $g = g_i \cdot h$. $\Rightarrow$ existiert $1 \leq j \leq s$ mit $h \in h_j \cdot K$.

$\Rightarrow g \in (g_i \cdot h_j) \cdot K \overset{\text{Lemma 19.}}{\Rightarrow} gK = (g_i \cdot h_j)K$.

Zu 2: Wir müssen zeigen, dass die $(g_i \cdot h_j)K$ paarweise verschieden sind. Sei $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$.

Falls $i_1 \neq i_2$: $g_{i_1} H \neq g_{i_2} H \overset{\text{Lemma 19}}{\Rightarrow} g_{i_1} h_{j_1} K \neq g_{i_2} h_{j_2} K$.

Falls $i_1 = i_2$: $\Rightarrow j_1 \neq j_2$. $\Rightarrow h_{j_1} K \neq h_{j_2} K$

$\Rightarrow g_{i_1} h_{i_1} K \neq g_{i_2} h_{j_2} K$. $\square$

Korollar 22

(1) $|G| = (G:H)\,|H|$.

(2) Falls G endlich ist, gilt für alle $g \in G$: $g^{|G|} = e$.

Beweis

(1) Benutze Satz 21 mit $K = \{e\}$.

(2) Betrachte $H := \{g, g^2, \dots, g^{\mathrm{ord}(g)} = e\} = \langle \{g\} \rangle$. Dann gilt: $|H| = \mathrm{ord}(g)$.

$$\Rightarrow \quad g^{|G|} \overset{\text{Satz 21}}{=} g^{(G:H)\cdot|H|} = \left(g^{\mathrm{ord}(g)}\right)^{(G:H)} = e^{(G:H)} = e. \qquad \square$$

Definition 23

Eine Untergruppe $N \leq G$ heißt Normalteiler, falls für alle $g \in G$ gilt:

$$gN = Ng. \qquad (\Leftrightarrow \; gNg^{-1} = N).$$

- D.h. ein Normalteiler ist eine Untergruppe $N \leq G$, so dass alle Linksnebenklassen gleich der jeweiligen Rechtsnebenklassen sind.
- Ein Normalteiler ist eine UG die gleich zu all ihren Konjugierten ist.

Satz 24

Sei $N \leq G$ ein Normalteiler. Dann ist G/N eine Gruppe bzgl. der Verknüpfung $(gN)\cdot(hN) := (g \cdot h)N$.

Beweis

Wohldefiniertheit: Da $Nh = hN$ gilt: $g\underbrace{N\,h}_{=hN}N \overset{\text{☺}}{=} gh\underbrace{N\cdot N}_{=N}$

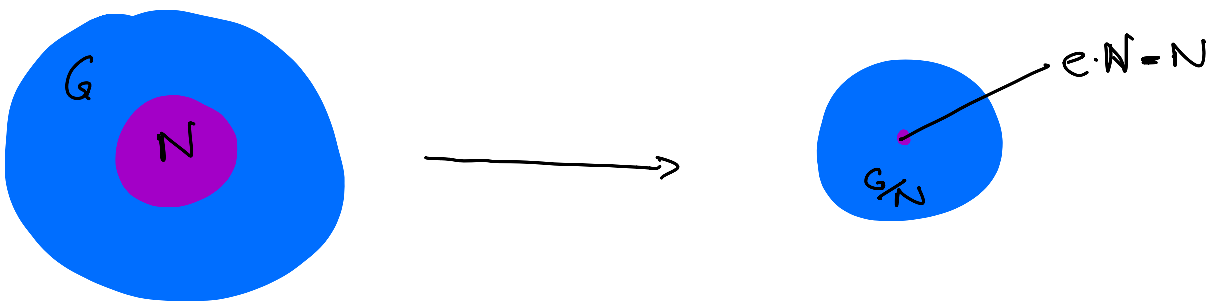
$= g\cdot h\ N.$

Neutr. Element: ist $e\cdot N = N$

Inverse Element ist $(gN)^{-1} = g^{-1}\cdot N$

Assoziativität wird von G vererbt.

Cartoon



Der Übergang von G nach G/N vergröbert die Gruppenstruktur, indem N zum neutralen Element wird. Die Information, die N in G enthalten hatte, wird gelöscht.