Homomorphie- und Isomorphiesätze

Erinnerung: (1) Wenn $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus ist, so ist $\ker(f) = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$ ein Normalteiler in G.

(2) Wenn $N \subseteq G$ ein Normalteiler ist und $\pi: G \to G/N$ der Gruppenhomomorphismus mit $\pi(g) = gN$, so gilt $\ker(\pi) = N$.

Satz 39 (Homomorphiesatz)

Sei $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und $N \subseteq G$ ein Normalteiler, so dass $N \subseteq \ker(f)$. Dann gilt folgendes

(1) Es existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\varphi: G/N \to H$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \\ & G/N \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

, d.h. $f = \varphi \circ \pi$

(2) Es gilt:
- $f(G) = \varphi(G/N)$
- $\ker(\varphi) = \pi(\ker(f))$
- $\ker(f) = \pi^{-1}(\ker(\varphi))$

<u>Bemerkung:</u> Der Satz zeigt, dass Normalteiler eine universelle Eigenschaft erfüllen.

Denn: falls $N = \ker(f)$ in Satz 39 ist, so gilt:

$G/N \cong U \subseteq H$, wobei $U \subseteq H$ eine Untergruppe.

Das heißt $f: G \to H$ und $\pi: G \to G/\ker(f)$ haben die gleiche Information, weil $\varphi: G/\ker(f) \to H$ eindeutig ist.

<u>Beweis von Satz 39</u>

Erinnerung:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \\ & G/N \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Existenz:</u> Wir definieren $\varphi: G/N \to H,\ a \cdot N \mapsto f(a)$.

Wir müssen zeigen, dass dies wohldefiniert ist.

Sei $a \cdot N = b \cdot N$, dann gilt: $b^{-1}a \in N$. Da $N \subseteq \ker(f)$, gilt: $\underbrace{f(b^{-1}a)}_{= f(b^{-1}) \cdot f(a)} = e_H$. $\Rightarrow$ $f(a) = f(b)$ $\Rightarrow$ Definition von φ ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten a.

Eindeutigkeit Sei $\tilde{\varphi}$ eine weitere Abbildung, die die Anforderungen des Satzes erfüllt. Dann gilt für $a \in G$:

$$\tilde{\varphi}(a\cdot N) = \tilde{\varphi}(\pi(a)) = (\tilde{\varphi}\circ\pi)(a) \overset{\text{weil } \tilde{\varphi} \text{ das Diagramm kommutieren lässt}}{=} f(a)$$
$$= \varphi(a\cdot N)$$

$\Rightarrow \varphi = \tilde{\varphi}$. Dies zeigt (1).

Für (2). • $f(G) = (\varphi\circ\pi)(G) = \varphi(\pi(G)) \overset{\pi \text{ surjektiv}}{=} \varphi(G/N)$

• $\ker(\varphi) = \{a\cdot N \in G/N \mid \varphi(a\cdot N) = e_H\}$
$= \{a\cdot N \in G/N \mid f(a) = e_H\}$
$= \{a\cdot N \in G/N \mid a \in \ker(f)\}$
$= \pi(\ker(f))$.

• $\ker(f) \underset{f=\varphi\circ\pi}{=} \ker(\varphi\circ\pi) = \{a \in G \mid (\varphi\circ\pi)(a) = \varphi(\pi(a)) = e_H\}$
$= \{a \in G \mid \pi(a) \in \ker(\varphi)\}$
$= \pi^{-1}(\ker(\varphi))$.

□

Satz 40 (1. Isomorphiesatz)

Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Dann gilt:

(1) $HN = \{h\cdot n \mid h \in H, n \in N\}$ ist eine Untergruppe von G

(2) $N \trianglelefteq HN$ ist ein Normalteiler

(3) $H \cap N$ ist ein Normalteiler in N.

(4) $H/H\cap N \cong H\cdot N/N$.

Beweis

(1) Seien $h_1 \cdot n_1 \in HN$ und $h_2 \cdot n_2 \in HN$. Dann gilt:

$$h_1 \cdot n_1 \cdot (h_2 \cdot n_2)^{-1} = h_1 \cdot \underbrace{n_1 \cdot n_2^{-1}}_{=: n \in N} \cdot h_2^{-1} = \underbrace{h_1 \cdot h_2^{-1}}_{\in H} \cdot \underbrace{h_2 \cdot n \cdot h_2^{-1}}_{\in N,\text{ weil } N \text{ Normalteiler ist}}$$

$\Rightarrow h_1 \cdot n_1 \cdot (h_2 \cdot n_2)^{-1} \in HN \quad \Rightarrow \quad H \cdot N \subseteq G$ ist eine Untergruppe.

(2) Zz: $N \subseteq H \cdot N$ ist NT. Seien dazu $h \cdot n \in H \cdot N$. Dann gilt:

$$h \cdot n \cdot N \cdot (h \cdot n)^{-1} = h \cdot \underbrace{n \cdot N \cdot n^{-1}}_{= N} \cdot h^{-1} = h \cdot N \cdot h^{-1} = N$$

weil N ein NT in G ist.

(3)+(4). Betrachte die Abbildungen: $\varphi: H \to H \cdot N,\ h \mapsto h \ (= h \cdot e_N)$

$\pi: H \cdot N \to H \cdot N / N,\ h \cdot n \mapsto \underbrace{h \cdot n \cdot N}_{= h \cdot N}$

$\to$ Die Abbildung $\pi \circ \varphi: H \to H \cdot N / N$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

Es gilt: $\ker(\pi \circ \varphi) = \{ h \in H \mid h \cdot N = N \} = H \cap N$.

$\Rightarrow$ $H \cap N$ ist ein Normalteiler in H

$\Rightarrow$ $H / \ker(\pi \circ \varphi) = H / H \cap N \cong H \cdot N / N$, weil $\pi \circ \varphi$ surjektiv ist.

$\square$

Satz 41 (2. Isomorphiesatz)

Sei G eine Gruppe und $H, N \subseteq G$ Normalteiler, so dass $N \subseteq H \subseteq G$.

(1) N ist Normalteiler in H

(2) H/N ist Normalteiler in G/N

(3) $(G/N) / (H/N) \cong G/H$.

__Beispiel__ $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 2\mathbb{Z} = \{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $N = 4\mathbb{Z} = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Weil $(\mathbb{Z}, +)$ abelsch ist sind $H \subseteq G$, $N \subseteq H$ Normalteiler.

Nach Satz 41: $$\frac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$ $\left(= \text{Art Kürzungsregel wie } \frac{1/\cancel{4}}{2/\cancel{4}} = 1/2 \right)$

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

$2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$.

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$$

__Beweis von Satz 41__

Betrachte den Gruppenhomomorphismus $\pi: G \to G/H$, $g \mapsto gH$.

Dann gilt: $\ker(\pi) = H$, also $N \subseteq \ker(\pi)$.

Satz 39 impliziert, dass ein Gruppenhomomorphismus $\varphi: G/N \to G/H$ existiert, so dass

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & G/H \\ & G/N \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$ mit $\sigma(g) = gN$.

kommutiert. Das heißt $\pi = \varphi \circ \sigma$.

__Behauptung__: φ ist surjektiv und $\ker(\varphi) = H/N$.

Wenn das stimmt, dann gilt: $$\frac{G/N}{\ker(\varphi)} = \frac{G/N}{H/N} \cong G/H.$$

Da $\pi = \varphi \circ \sigma$ und da π surjektiv ist, muss auch φ surjektiv.

Bemerkung: $H/N = \{h \cdot N \mid h \in H\} \subseteq \{g \cdot N \mid g \in G\} = G/N$

Zu (1): Seien $h \in H$. Dann gilt: $h N h^{-1} \overset{\text{da } h \in G}{=} N$. $\Rightarrow$ $N \subseteq H$ ist ein Normalteiler.

Zu (2): Es reicht zu zeigen, dass $H/N = \ker(\varphi)$, weil dann ist H/N als Kern eines Gruppenhomomorphismus ein Normalteiler.

Nach Satz 39 (2) gilt:
$$\begin{aligned} \ker(\varphi) &= \sigma(\ker(\pi)) \\ &= \sigma(H) \\ &= H/N. \end{aligned}$$

Zu (3): Wir haben gezeigt, dass $\ker(\varphi) = H/N$ und dass φ surjektiv. Damit haben wir die Behauptung bewiesen. Dies impliziert den Punkt (3).

$\square$