

Homomorphie- und Isomorphiesätze

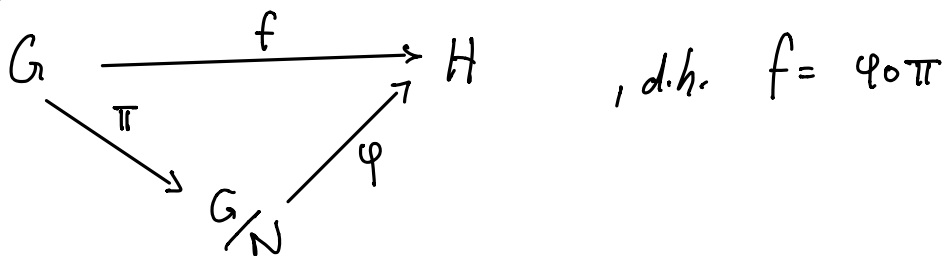
Erinnerung: (1) Wenn $f: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus ist, so ist $\ker(f) = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$ ein Normalteiler in G .

(2) Wenn $N \subseteq G$ ein Normalteiler ist und $\pi: G \rightarrow G/N$ der Gruppenhomomorphismus mit $\pi(g) = gN$, so gilt $\ker(\pi) = N$.

Satz 39 (Homomorphiesatz)

Sei $f: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus und $N \subseteq G$ ein Normalteiler, so dass $N \subseteq \ker(f)$. Dann gilt folgendes

(1) Es existiert ein **eindeutiger** Gruppenhomomorphismus $\varphi: G/N \rightarrow H$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:



(2) Es gilt:

- $f(G) = \varphi(G/N)$
- $\ker(\varphi) = \pi(\ker(f))$
- $\ker(f) = \pi^{-1}(\ker(\varphi))$

Bemerkung: Der Satz zeigt, dass Normalteiler eine universelle Eigenschaft erfüllen.

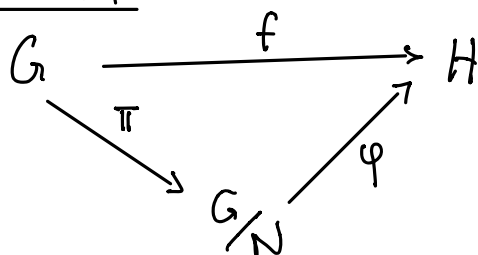
Denn: falls $N = \ker(f)$ in Satz 39 ist, so gilt:

$$G/N \cong U \subseteq H, \text{ wobei } U \subseteq H \text{ eine Untergruppe.}$$

Das heißt $f: G \rightarrow H$ und $\pi: G \rightarrow G/N$ haben die gleiche Information, weil $\varphi: G/N \rightarrow H$ eindeutig ist.

Beweis von Satz 39

Erinnerung:



Existenz: Wir definieren $\varphi: G/N \rightarrow H, a \cdot N \mapsto f(a)$.

Wir müssen zeigen, dass dies wohldefiniert ist.

Sei $a \cdot N = b \cdot N$, dann gilt: $b^{-1}a \in N$. Da $N \subseteq \ker(f)$, gilt: $\underbrace{f(b^{-1}a)}_{= f(b^{-1}) \cdot f(a)} = e_H \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow$ Definition von φ ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten a .

Eindeutigkeit Sei $\tilde{\varphi}$ eine weitere Abbildung, die die Anforderungen des Satzes erfüllt. Dann gilt für $a \in G$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(a \cdot N) &= \tilde{\varphi}(\pi(a)) = (\tilde{\varphi} \circ \pi)(a) \stackrel{\substack{\text{weil } \tilde{\varphi} \text{ das Diagramm} \\ \text{kommutieren lässt}}}{=} f(a) \\ &= \varphi(a \cdot N) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi = \tilde{\varphi}$. Dies zeigt (1).

Für (2). • $f(G) = (\varphi \circ \pi)(G) = \varphi(\pi(G)) \stackrel{\pi \text{ surjektiv}}{=} \varphi(G/N)$

$$\begin{aligned} \bullet \ker(\varphi) &= \{a \cdot N \in G/N \mid \varphi(a \cdot N) = e_H\} \\ &= \{a \cdot N \in G/N \mid f(a) = e_H\} \\ &= \{a \cdot N \in G/N \mid a \in \ker(f)\} \\ &= \pi(\ker(f)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \ker(f) &\stackrel{\substack{\uparrow \\ f = \varphi \circ \pi}}{=} \ker(\varphi \circ \pi) = \{a \in G \mid (\varphi \circ \pi)(a) = \varphi(\pi(a)) = e_H\} \\ &= \{a \in G \mid \pi(a) \in \ker(\varphi)\} \\ &= \pi^{-1}(\ker(\varphi)). \end{aligned}$$

□

Satz 40 (1. Isomorphiesatz)

Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler. Dann gilt:

(1) $HN = \{h \cdot n \mid h \in H, n \in N\}$ ist eine Untergruppe von G

(2) $N \subseteq HN$ ist ein Normalteiler

(3) $H \cap N$ ist ein Normalteiler in H .

(4) $H/H \cap N \cong H \cdot N / N$.

Beweis

(1) Seien $h_1 \cdot n_1 \in HN$ und $h_2 \cdot n_2 \in HN$. Dann gilt:

$$h_1 \cdot n_1 \cdot (h_2 \cdot n_2)^{-1} = h_1 \cdot \underbrace{n_1 \cdot n_2^{-1}}_{=: n \in N} \cdot h_2^{-1} = \underbrace{h_1 \cdot h_2^{-1}}_{\in H} \cdot \underbrace{h_2 \cdot n \cdot h_2^{-1}}_{\in N, \text{ weil } N \text{ Normalteiler ist}}$$

$$\Rightarrow h_1 \cdot n_1 \cdot (h_2 \cdot n_2)^{-1} \in HN \Rightarrow H \cdot N \subseteq G \text{ ist eine Untergruppe.}$$

(2) zz: $N \subseteq H \cdot N$ ist NT. Seien dazu $h \cdot n \in H \cdot N$. Dann gilt:

$$h \cdot n \cdot N \cdot (h \cdot n)^{-1} = h \cdot n \cdot \underbrace{N \cdot n^{-1}}_{= N} \cdot h^{-1} = h \cdot N \cdot h^{-1} = N$$

\uparrow
weil N ein NT in G ist.

(3)+(4). Betrachte die Abbildungen: $\psi: H \rightarrow H \cdot N, h \mapsto h (= h \cdot e_N)$

$$\pi: H \cdot N \rightarrow H \cdot N / N, h \cdot n \mapsto \frac{h \cdot n \cdot N}{= h \cdot N}.$$

\rightarrow Die Abbildung $\pi \circ \psi: H \rightarrow H \cdot N / N$ ist

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

$$\text{Es gilt: } \ker(\pi \circ \psi) = \{h \in H \mid h \cdot N = N\} = H \cap N.$$

$\Rightarrow H \cap N$ ist ein Normalteiler in H

$$\Rightarrow \frac{H}{\ker(\pi \circ \psi)} = \frac{H}{H \cap N} \cong H \cdot N / N, \text{ weil } \pi \circ \psi \text{ surjektiv ist.}$$

II

Satz 41 (2. Isomorphiesatz)

Sei G eine Gruppe und $H, N \subseteq G$ Normalteiler, so dass $N \subseteq H \subseteq G$.

(1) N ist Normalteiler in H

(2) H/N ist Normalteiler in G/N

(3) $G/N / H/N \cong G/H$.

Beispiel $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 2\mathbb{Z} = \{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $N = 4\mathbb{Z} = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Weil $(\mathbb{Z}, +)$ abelsch ist sind $H \subseteq G$, $N \subseteq H$ Normalteiler.

Nach Satz 41: $\frac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($=$ Art Kürzungsregel)
wie $\frac{1/4}{2/4} = 1/2$

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3\}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}.$$

$$2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0, 2\}.$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = \{0, 1\}$$

Beweis von Satz 41

Betrachte den Gruppenhomomorphismus $\pi: G \rightarrow G/H$, $g \mapsto gH$.

Dann gilt: $\ker(\pi) = H$, also $N \subseteq \ker(\pi)$.

Satz 39 impliziert, dass ein Gruppenhomomorphismus $\varphi: G/N \rightarrow G/H$ existiert, so dass

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/H \\ \sigma \searrow & & \nearrow \varphi \\ & G/N & \end{array} \quad \text{mit } \sigma(g) = gN.$$

kommutiert. Das heißt $\pi = \varphi \circ \sigma$.

Behauptung: φ ist surjektiv und $\ker(\varphi) = H/N$.

Wenn das stimmt, dann gilt: $\frac{G/N}{\ker(\varphi)} = \frac{G/N}{H/N} \cong G/H$.

Da $\pi = \varphi \circ \sigma$ und da π surjektiv ist, muss auch φ surjektiv.

Bemerkung: ${}^H N = \{ h \cdot N \mid h \in H \} \cong \{ g \cdot N \mid g \in G \} = G/N$

Zu (1): Seien $h \in H$. Dann gilt: $h N h^{-1} \stackrel{\text{da } h \in G}{=} N$. $\Rightarrow N \subseteq H$ ist ein Normalteiler.

Zu (2): Es reicht zu zeigen, dass ${}^H N = \ker(\varphi)$, weil dann ist G/N als Kern eines Gruppenhomomorphismus ein Normalteiler.

$$\begin{aligned} \text{Nach Satz 39(2) gilt: } \ker(\varphi) &= \sigma(\ker(\pi)) \\ &= \sigma(H) \\ &= {}^H N. \end{aligned}$$

Zu (3): Wir haben gezeigt, dass $\ker(\varphi) = {}^H N$ und dass φ surjektiv.
Damit haben wir die Behauptung bewiesen. Dies impliziert den Punkt (3).

□