

## Gruppenhomomorphismen und -isomorphismen

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

	0	1
0	0	1
1	1	0

$(\{1, -1\}, \cdot)$

	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

$$0 \mapsto 1$$

$$1 \mapsto -1$$

### Definition 25

Seien  $G, H$  Gruppen. Eine Abbildung  $f: G \rightarrow H$  heißt **Gruppenhomomorphismus**, falls:

$$f(g \cdot h) = f(g) \cdot f(h) \quad \text{für alle } g, h \in G.$$

Ein Gruppenhomomorphismus  $f$  heißt **Isomorphismus**, falls  $f$  bijektiv ist.

Bemerkung Gruppenhomomorphismen  $f: G \rightarrow H$  bilden die Struktur von  $G$  in  $H$  ab.

Notation Wenn es einen Isomorphismus  $f: G \rightarrow H$  gibt, dann nennen wir  $G$  und  $H$  isomorph und schreiben  $G \cong H$ .

## Satz 26

Sei  $f: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

- (1)  $f(e_G) = e_H$
- (2)  $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$
- (3) Wenn  $U \subseteq G$  eine Untergruppe ist, ist  $f(U)$  eine Untergruppe von  $H$ .
- (4) Wenn  $V \subseteq H$  eine Untergruppe ist, dann ist  $f^{-1}(V) \subseteq G$  eine Untergruppe.

### Beweis

$$\begin{aligned} (1) \text{ Sei } g \in G \text{ und } h := f(g). \text{ Dann gilt: } f(e_G) \cdot h &= f(e_G) \cdot f(g) \\ &= f(e_G \cdot g) \\ &= f(g) = h \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(e_G) \cdot h = h \Rightarrow f(e_G) = e_H$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ Es gilt: } f(g^{-1}) \cdot f(g) &= f(g^{-1} \cdot g) = f(e_G) \stackrel{(1)}{=} e_H. \\ \Rightarrow f(g^{-1}) &= f(g)^{-1}. \end{aligned}$$

$$(3) \text{ Seien } h_1, h_2 \in f(U). \text{ Dann existieren } g_1, g_2 \in U: f(g_1) = h_1 \\ f(g_2) = h_2.$$

$$h_1 h_2^{-1} = f(g_1) \cdot f(g_2)^{-1} \stackrel{(2)}{=} f(g_1) \cdot f(g_2^{-1}) = f(\underbrace{g_1 \cdot g_2^{-1}}_{\in U}) \in f(U)$$

$$\begin{aligned} (4) \text{ Seien } g_1, g_2 \in f^{-1}(V). \text{ Dann gilt: } f(g_1 \cdot g_2^{-1}) &= f(g_1) \cdot f(g_2^{-1}) \\ &\stackrel{(2)}{=} f(g_1) \cdot \underbrace{f(g_2)^{-1}}_{\in V} \in V. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g_1 \cdot g_2^{-1} \in f^{-1}(V)$$

□

### Definition 27

Sei  $f: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Dann definieren wir  
 $\ker(f) := \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$ .  
den Kern von  $f$ .

### Satz 28

Sei  $f: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow \ker(f) = \{e_G\}.$$

### Korollar 29

Sei  $f: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus.

$f: G \rightarrow \ker(f)$  ist ein Isomorphismus  $\Leftrightarrow \ker(f) = \{e_G\}$  und  $f$  surjektiv

### Beweis von Satz 28

$f$  ist nicht injektiv  $\Leftrightarrow \exists g_1 \neq g_2$  mit  $f(g_1) = f(g_2)$ .

$$\Leftrightarrow \exists h = g_1 \cdot g_2^{-1}: f(g_1 \cdot g_2^{-1}) = f(g_1) \cdot f(g_2)^{-1} = e_H \\ \neq e_G$$

□

Sei  $G$  eine Gruppe und  $N \subseteq G$  ein Normalteiler. Dann ist die  
Abbildung  $\pi: G \rightarrow G/N$ ,  $g \mapsto gN$ , ein Gruppenhomomorphismus.  
(denn  $\pi(g) \cdot \pi(h) = gN \cdot hN = g \cdot h \cdot N = \pi(g \cdot h)$ )

Dabei gilt.  $\ker(\pi) = N$ .

### Satz 29

Sei  $f: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist  $\ker(f)$  ein Normalteiler in  $G$ .

### Beweis

Zz: für alle  $g \in G$  gilt:  $g \cdot \ker(f) \cdot g^{-1} = \ker(f)$ .

Sei  $g \in G$  und  $h \in \ker(f)$ . Dann gilt:

$$f(g \cdot h \cdot g^{-1}) = f(g) \cdot f(h) \cdot f(g)^{-1} = f(g) \cdot f(g)^{-1} = e_H.$$

$$\Rightarrow g \cdot h \cdot g^{-1} \in \ker(f).$$

$$\Rightarrow g \cdot \ker(f) \cdot g^{-1} \subseteq \ker(f). \Rightarrow g \cdot \ker(f) \cdot g^{-1} = \ker(f). \quad \square$$

### Korollar 30

Sei  $f: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist  $G/\ker(f)$  eine Gruppe bzgl. der Gruppenverknüpfung aus  $G$ .

$G/\ker(f)$  heißt **Faktorgruppe**.

### Satz 31 (Satz von Cayley)

Sei  $G$  eine Gruppe mit  $n := |G| < \infty$ . Dann ist  $G$  isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe  $S_n$ .

### Beweis

Sei  $g \in G$ . Dann definieren wir  $\varphi_g: G \rightarrow G$ ,  $h \mapsto gh$

$$\text{Es gilt: } \varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}}(h) = g \cdot g^{-1} \cdot h = h \Rightarrow \varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \text{id}_G.$$

$\Rightarrow \varphi_g$  ist bijektiv.

Sei  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ . Dann existiert genau eine  $\pi \in S_n$ , so dass  $\varphi_g(g_i) = g_{\pi(i)}$ .  
 ⇒ Wir finden eine Abbildung  $\psi: \{\varphi_g | g \in G\} \rightarrow S_n$ , so dass  
Beweis  $\varphi_g(g_i) = g_{\psi(g)(i)}$ .

Die Abbildung  $\phi: G \rightarrow S_n$ ,  $g \mapsto \psi(\varphi_g)$  ist ein Gruppenhomomorphismus, der injektiv ist.

Wenn das stimmt ist  $\phi: G \rightarrow \underbrace{\phi(G)}_{\text{eine UG von } S_n}$ , ein Isomorphismus.

Beweis der Behauptung, Seien  $g, h \in G$  mit  $\psi(g) = \pi$ ,  $\psi(h) = \rho$ .

$\psi(g) = \pi \Leftrightarrow \varphi_g(g_i) = g_{\pi(i)} = g \cdot g_i$

$\psi(h) = \rho \Leftrightarrow \varphi_h(g_i) = g_{\rho(i)} = h \cdot g_i$

$\Rightarrow \psi(g \cdot h) = ?$

$\varphi_{g \cdot h}(g_i) = g \cdot h \cdot g_i = g \cdot g_{\rho(i)} = g_{\pi \circ \rho(i)}$

$\Rightarrow \psi(g \cdot h) = \pi \circ \rho = \psi(g) \circ \psi(h) \rightarrow \psi$  ein Gruppenhomomorphismus.

Zur Injektivität:  $\ker(\psi) = \{g \in G \mid \psi(g) = \text{id}\}$

$\text{id}(g_i) = g_i$  für alle  $1 \leq i \leq n$ .

Falls  $\underbrace{\varphi_g(g_i)}_{=} = g_i \Rightarrow \underbrace{g \cdot g_i}_{=} = g_i \Rightarrow g = e_G$ .  $\Rightarrow \ker(\psi) = \{e_G\}$  □

### Satz 32

Seien  $f_1: G \rightarrow H$  und  $f_2: H \rightarrow K$  Gruppenhomomorphismen. Dann ist  $f_2 \circ f_1: G \rightarrow K$  ein Gruppenhomomorphismus.

### Beweis

Seien  $g, h \in G$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} f_2 \circ f_1(g \cdot h) &= f_2(f_1(g \cdot h)) = f_2(f_1(g) \cdot f_1(h)) = f_2(f_1(g)) \cdot f_2(f_1(h)) \\ &= (f_2 \circ f_1(g)) \cdot (f_2 \circ f_1)(h). \end{aligned}$$

□

### Definition 33

Sei  $G$  eine Gruppe. Dann ist

$$\text{Aut}(G) := \{ f: G \rightarrow G \mid f \text{ ist ein Isomorphismus} \},$$

die Automorphismengruppe von  $G$ .

### Satz 34

$\text{Aut}(G)$  ist eine Gruppe bzgl. der Verknüpfung von Abbildungen.

Beweis: Übung

### Definition 35

Sei  $G$  eine Gruppe und  $g \in G$ . Dann heißt die Abbildung

$$\chi_g: G \rightarrow G, \quad h \mapsto ghg^{-1}$$

die Konjugation zu  $g$ .

### Satz 36

(1) Sei  $g \in G$ . Dann ist  $\chi_g \in \text{Aut}(G)$

(2)  $\chi: G \rightarrow \text{Aut}(G), g \mapsto \chi_g$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

### Beweis

(1) Seien  $h_1, h_2 \in G$ . Dann gilt:

$$Kg(h_1 \cdot h_2) = g \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot g^{-1} = (gh_1g^{-1}) \cdot (gh_2g^{-1}) = Kg(h_1) \cdot Kg(h_2).$$

$\Rightarrow Kg$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

und es gilt:

$$(Kg \circ Kg^{-1})(h) = g \cdot g^{-1} \cdot hg \cdot g^{-1} = h \quad \text{für alle } h \in G.$$

$\Rightarrow Kg \circ Kg^{-1} = id_G$  genauso:  $Kg^{-1} \circ Kg = id_G$ .

$\Rightarrow Kg$  ist invertierbar  $\Rightarrow Kg$  ist bijektiv.

(2) Seien  $g, h \in G$ . Dann ist  $K_{g \cdot h}$  folgende Abbildung:

$$K_{g \cdot h}(x) = \underset{x \in G}{\overset{\uparrow}{g \cdot h \cdot x \cdot (g \cdot h)^{-1}}} = g \cdot h \cdot x \cdot h^{-1}g^{-1} = Kg(K_h(x))$$

$$= (Kg \circ K_h)(x)$$

$\Rightarrow K_{g \cdot h} = Kg \circ K_h$ .

□

### Satz 37

Die Abbildung  $sgn: S_n \rightarrow (\{-1, 1\}, \cdot)$ ,  $\pi \mapsto sgn(\pi)$  (für die Definition von  $sgn$  siehe Vorlesung 1) ist ein Gruppenhomomorphismus.

### Beweis

Übung.

### Korollar 38

$A_n := \{\pi \in S_n \mid sgn(\pi) = 1\}$  ist ein Normalteiler in  $S_n$ .

## Beweis

$$A_n = \ker(\text{sgn}).$$

$A_n$  heißt die alternierende Gruppe.