Gruppenhomomorphismen und -isomorphismen

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

	0	1
0	0	1
1	1	0

$(\{1,-1\}, \cdot)$

	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

$0 \longmapsto 1$

$1 \longmapsto -1$

Definition 25

Seien G, H Gruppen. Eine Abbildung $f: G \to H$ heißt **Gruppenhomomorphismus**, falls:

$$f(g \cdot h) = f(g) \cdot f(h) \quad \text{für } \underline{\text{alle}} \ g, h \in G.$$

Ein Gruppenhomomorphismus f heißt **Isomorphismus**, falls f bijektiv ist.

<u>Bemerkung</u> Gruppenhomomorphismen $f: G \to H$ bilden die Struktur von G in H ab.

<u>Notation</u> Wenn es einen Isomorphismus $f: G \to H$ gibt, dann nennen wir G und H isomorph und schreiben $G \cong H$.

Satz 26

Sei $f: G \to H$ ein Gruppenhomorphismus. Dann gilt:

(1) $f(e_G) = e_H$

(2) $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$

(3) Wenn $U \subseteq G$ eine Untergruppe ist, ist $f(U)$ eine Untergruppe von H.

(4) Wenn $V \subseteq H$ eine Untergruppe ist, dann ist $f^{-1}(V) \subseteq G$ eine Untergruppe.

Beweis

(1) Sei $g \in G$ und $h := f(g)$. Dann gilt:

$$f(e_G) \cdot h = f(e_G) \cdot f(g) = f(e_G \cdot g) = f(g) = h$$

$$\Rightarrow f(e_G) \cdot h = h \Rightarrow f(e_G) = e_H$$

(2) Es gilt: $f(g^{-1}) \cdot f(g) = f(g^{-1} \cdot g) = f(e_G) \overset{(1)}{=} e_H$.

$$\Rightarrow f(g^{-1}) = f(g)^{-1}.$$

(3) Seien $h_1, h_2 \in f(U)$. Dann existieren $g_1, g_2 \in U$: $f(g_1) = h_1$, $f(g_2) = h_2$.

$$h_1 h_2^{-1} = f(g_1) \cdot f(g_2)^{-1} \overset{(2)}{=} f(g_1) \cdot f(g_2^{-1}) = f(\underbrace{g_1 \cdot g_2^{-1}}_{\in U}) \in f(U)$$

(4) Seien $g_1, g_2 \in f^{-1}(V)$. Dann gilt:

$$f(g_1 \cdot g_2^{-1}) = f(g_1) \cdot f(g_2^{-1}) \overset{(2)}{=} \underbrace{f(g_1)}_{\in V} \cdot \underbrace{f(g_2)}_{\in V}{}^{-1} \in V.$$

$$\Rightarrow g_1 \cdot g_2^{-1} \in f^{-1}(V)$$

$\square$

Definition 27

Sei $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann definieren wir

$$\ker(f) := \{ g \in G \mid f(g) = e_H \}.$$

den Kern von f.

Satz 28

Sei $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff \ker(f) = \{e_G\}.$$

Korollar 29

Sei $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

$f: G \to H$ ist ein Isomorphismus $\iff$ $\ker(f) = \{e_G\}$ und f surjektiv

Beweis von Satz 28

f ist nicht injektiv $\iff \exists\, g_1 \neq g_2$ mit $f(g_1) = f(g_2)$.

$$\iff \exists\, \underbrace{h = g_1 \cdot g_2^{-1}}_{\neq e_G} : f(g_1 \cdot g_2^{-1}) = f(g_1) \cdot f(g_2)^{-1} = e_H$$

$\square$

Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Dann ist die Abbildung $\pi: G \to G/N$, $g \mapsto gN$. ein Gruppenhomomorphismus.

(denn $\pi(g) \cdot \pi(h) = gN \cdot hN = g \cdot h \cdot N = \pi(g \cdot h)$)

Dabei gilt: $\ker(\pi) = N$.

Satz 29

Sei $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $\ker(f)$ ein Normalteiler in G.

Beweis

Zz: für alle $g \in G$ gilt: $g \cdot \ker(f) \cdot g^{-1} = \ker(f)$.

Sei $g \in G$ und $h \in \ker(f)$. Dann gilt:

$$f(g \cdot h \cdot g^{-1}) = f(g) \cdot f(h) \cdot f(g)^{-1} = f(g) \cdot f(g)^{-1} = e_H.$$

$\Rightarrow g \cdot h \cdot g^{-1} \in \ker(f)$.

$\Rightarrow g \cdot \ker(f) \cdot g^{-1} \subseteq \ker(f)$. $\Rightarrow g \cdot \ker(f) g^{-1} = \ker(f)$. $\square$

Korollar 30

Sei $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $G/\ker(f)$ eine Gruppe bzgl. der Gruppenverknüpfung aus G.

$G/\ker(f)$ heißt Faktorgruppe.

Satz 31 (Satz von Caley)

Sei G eine Gruppe mit $n := |G| < \infty$. Dann ist G isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n.

Beweis

Sei $g \in G$. Dann definieren wir $\varphi_g : G \to G$, $h \mapsto g \cdot h$

Es gilt: $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}}(h) = g \cdot g^{-1} \cdot h = h \Rightarrow \varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = id_G$.

$\Rightarrow \varphi_g$ ist bijektiv.

Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Dann existiert <u>genau eine</u> $\pi \in S_n$,
so dass $\varphi_g(g_i) = g_{\pi(i)}$.

$\Rightarrow$ Wir finden eine Abbildung $\Psi: \{\varphi_g \mid g \in G\} \to S_n$, so dass
$\varphi_g(g_i) = g_{\Psi(g)(i)}$.

<u>Behauptung</u>

Die Abbildung $\Phi: G \to S_n$, $g \mapsto \Psi(\varphi_g)$ ist ein Gruppenhomomorphismus,
der injektiv ist.

Wenn das stimmt ist $\Phi: G \to \underbrace{\Phi(G)}_{\text{eine UG von } S_n}$ ein Isomorphismus.

<u>Beweis der Behauptung</u>: Seien $g, h \in G$ mit $\Psi(g) = \pi$, $\Psi(h) = \rho$.

$\Psi(g) = \pi \Leftrightarrow \varphi_g(g_i) = g_{\pi(i)} = g \cdot g_i$

$\Psi(h) = \rho \Leftrightarrow \varphi_h(g_i) = g_{\rho(i)} = h \cdot g_i$

$\Rightarrow \Psi(g \cdot h) = ?$

$\varphi_{g \cdot h}(g_i) = g \cdot h \cdot g_i = g \cdot g_{\rho(i)} = g_{\pi \circ \rho(i)}$

$\Rightarrow \Psi(g \cdot h) = \pi \circ \rho = \Psi(g) \circ \Psi(h) \rightsquigarrow \Psi$ ein Gruppenhomomorphismus.

Zur Injektivität: $\ker(\Psi) = \{g \in G \mid \Psi(g) = id\}$

$id(g_i) = g_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Falls $\varphi_g(g_i) = g_i \Rightarrow g \cdot g_i = g_i \Rightarrow g = e_G. \Rightarrow \ker(\Psi) = \{e_G\}$ ∎

<u>Satz 32</u>

Seien $f_1: G \to H$ und $f_2: H \to K$ Gruppenhomomorphismen. Dann
ist $f_2 \circ f_1: G \to K$ ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis

Seien $g, h \in G$. Dann gilt:

$$f_2 \circ f_1 (g \cdot h) = f_2(f_1(g \cdot h)) = f_2(f_1(g) \cdot f_1(h)) = f_2(f_1(g)) \cdot f_2(f_1(h))$$
$$= (f_2 \circ f_1(g)) \cdot (f_2 \circ f_1)(h). \quad \square$$

Definition 33

Sei G eine Gruppen. Dann ist

$$\mathrm{Aut}(G) := \{ f: G \to G \mid f \text{ ist ein Isomorphismus} \},$$

die Automorphismengruppe von G.

Satz 34

$\mathrm{Aut}(G)$ ist eine Gruppe bzgl. der Verknüpfung von Abbildungen.

Beweis: Übung

Definition 35

Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Dann heißt die Abbildung

$$\kappa_g : G \to G, \quad h \mapsto ghg^{-1}$$

die Konjugation zu g.

Satz 36

(1) Sei $g \in G$. Dann ist $\kappa_g \in \mathrm{Aut}(G)$

(2) $\kappa: G \to \mathrm{Aut}(G), g \mapsto \kappa_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis

(1) Seien $h_1, h_2 \in G$. Dann gilt:

$$\kappa_g(h_1 \cdot h_2) = g \cdot h_1 \cdot h_2\, g^{-1} = (g h_1 g^{-1}) \cdot (g\, h_2\, g^{-1}) = \kappa_g(h_1) \cdot \kappa_g(h_2).$$

$\Rightarrow$ κ_g ist ein Gruppenhomomorphismus.

und es gilt:

$$(\kappa_g \circ \kappa_{g^{-1}})(h) = g\, g^{-1} h\, g\, g^{-1} = h \quad \text{für alle } h \in H.$$

$\Rightarrow$ $\kappa_g \circ \kappa_{g^{-1}} = \mathrm{id}_G$ genauso: $\kappa_{g^{-1}} \circ \kappa_g = \mathrm{id}_G$.

$\Rightarrow$ κ_g ist invertierbar $\Rightarrow$ κ_g ist bijektiv.

(2) Seien $g, h \in G$. Dann ist $\kappa_{g \cdot h}$ folgende Abbildung:

$$\kappa_{g\cdot h}(\underset{x \in G}{x}) = g \cdot h \cdot x \cdot (g \cdot h)^{-1} = g \cdot h\, x\, h^{-1} g^{-1} = \kappa_g(\kappa_h(x))$$
$$= (\kappa_g \circ \kappa_h)(x)$$

$\Rightarrow$ $\kappa_{g \cdot h} = \kappa_g \circ \kappa_h$. $\square$

Satz 37

Die Abbildung $\mathrm{sgn}: S_n \to (\{1, -1\}, \cdot)$, $\pi \mapsto \mathrm{sgn}(\pi)$ (für die Definition von sgn siehe Vorlesung 1) ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis

Übung.

Korollar 38

$A_n := \{\pi \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\pi) = 1\}$ ist ein Normalteiler in S_n.

Beweis

$A_n = \ker(\operatorname{sgn})$.

A_n heißt die alternierende Gruppe.