Vorlesung 22 Homologie

In der letzten VL: einer Datenmenge $P = \{p_0, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^D$ einen simplizialen Komplex zuordnen.

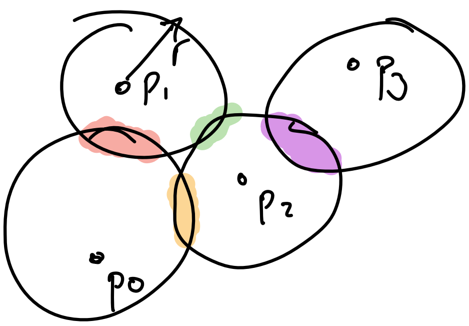
1) Čech-Komplex:

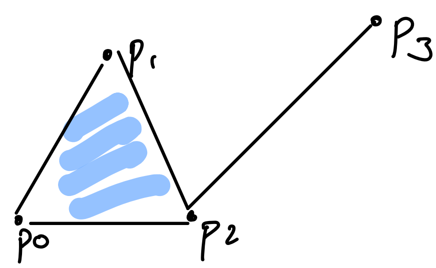
$$C_r(P) := \{ \alpha \subseteq \{0, \dots, n\} \mid \bigcap_{i \in \alpha} B_r(p_i) \neq \emptyset \}$$

2) Vietoris-Komplex

$$VR_r(P) := \{ \alpha \subseteq \{0, \dots, n\} \mid \max_{i,j \in \alpha} \| p_i - p_j \| \leq 2r \}$$

Bsp:





ist in $VR_r(P)$ aber nicht in $C_r(P)$.

Proposition 22.1

Für $r > 0$ und $P = \{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^D$:

$$C_r(P) \subseteq VR_r(P) \subseteq C_{2r}(P).$$

Beweis

Sei $\alpha \subset \{0, \dots, n\}$. Falls $\bigcap_{i \in \alpha} B_r(x_i) \neq \emptyset$. Dann gilt aber auch für alle $i,j \in \alpha$:

$$\| x_i - x_j \| \leq 2r.$$

$\Rightarrow \alpha \in VR_r(P)$.

Sei $\alpha \in VR_r(P)$, $\dim \alpha = d$. Sei $z := \frac{1}{d+1} \sum_{i \in \alpha} x_i$

Für alle $k \in \alpha$ gilt:

$$\|x_k - z\| = \frac{1}{d+1} \Big\| \sum_{\substack{i \in \alpha \\ i \neq k}} (x_i - x_k) \Big\|$$
$$\leq \frac{1}{d+1} \sum_{i \in \alpha,\, i \neq k} \|x_i - x_k\| \leq \frac{d}{d+1} 2r \leq 2r$$

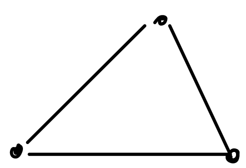
$\to z \in \bigcap_{i \in \alpha} B_{2r}(x_i) \Rightarrow \bigcap_{i \in \alpha} B_{2r}(x_i) \neq \emptyset$. □.

Homologie

Wir wollen jetzt Löcher in simplizialen Komplexen definieren. Dies wollen wir zunächst für den Fall eines geometrischen Komplexes in $\mathbb{R}^2$ behandeln.

Seien dazu $P = \{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^2$ gegeben, und K ein Komplex auf diesen Daten. Erste Idee einer Definition: Loch = Simplex Δ, der nicht in K ist, dessen Rand $\Gamma(\Delta)$ aber in K ist:

Beispiel:



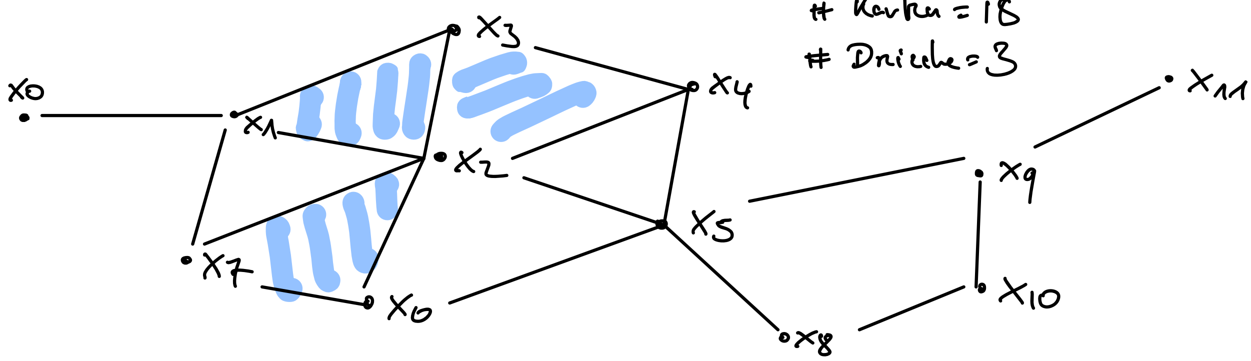
Diese Definition ist aber unzureichend:

Beispiel 20.2:

$\#$ Knoten $= 12$
$\#$ Kanten $= 18$
$\#$ Dreiecke $= 3$

$1 - \#$ Löcher $= 12 - 18 + 3 = -3$

$K =$



K hat 4 Löcher, aber eins der Löcher ist ein 4-Eck, kein Dreieck (= 2-Simplex).

Der Rand $(\{x_5, x_9\}, \{x_9, x_{10}\}, \{x_{10}, x_8\}, \{x_8, x_5\})$ definiert das Loch!

<u>Definition</u> 20.3

Sei K ein simplizialer Komplex auf $P = \{p_0, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$.
Insbesondere ist $\dim K \leq 2$ (d.h., wir haben Dreiecke, Kanten und Knoten).
Sei $\sigma \subseteq P$. Wir sagen, dass σ ein <u>Loch</u> von K ist, falls

- $\sigma \notin K$.
- $K' = \{\alpha \in K \mid \alpha \subsetneq \sigma\}$ soll genau einen Kreis bilden.

  und $\dim K' = 1$.

spezieller simplizialer Komplex.

<u>Theorem</u> 20.4

Sei K ein simplizialer Komplex in $\mathbb{R}^2$, und sei K zusammenhängend (d.h. $K^{(1)}$ ist ein zusammenhängender Graph). Dann gilt:

$$1 - \#\{\text{Löcher in } K\} = \#\{\text{Knoten von } K\} - \#\{\text{Kanten in } K\} + \#\{\text{Dreiecke in } K\}$$

<u>Beweis</u>

Induktion nach der Menge der Kanten.

<u>I.A.</u>: # Kanten = 0. $\to$ # Dreiecke = 0 und # Löcher = 0.

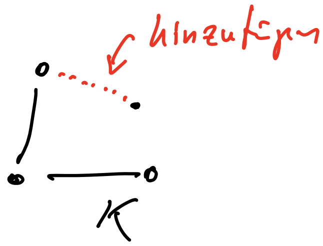
Da K zusammenhängend ist, muss # Knoten = 1

In diesem Fall

$$1 - 0 = 1 - 0 + 0 \checkmark.$$

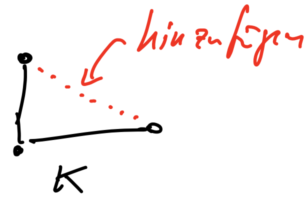
I.S. Sei K ein simplizialer Komplex, für den die obige Formel gilt. Wir fügen eine Kante hinzu. Es gibt folgende Möglichkeiten:

1. Wir fügen auch einen Knoten hinzu.



- \# Löcher und \# Dreiecke bleibt erhalten.
- \# Knoten und \# Kanten erhöhen sich um 1

2. Wir fügen keinen Knoten hinzu. Dann entsteht ein neuer Kreis.



<u>2a</u> Falls der Kreis drei Kanten hat, und wir das Dreieck hinzufügen:

- \# Löcher und \# Knoten bleiben unverändert
- \# Dreieck und \# Kanten erhöhen sich um 1

<u>2b</u> Wir fügen kein Dreieck hinzu

- \# Löcher und \# Kanten erhöhen sich um 1
- \# Dreiecke und \# Knoten bleiben unverändert.

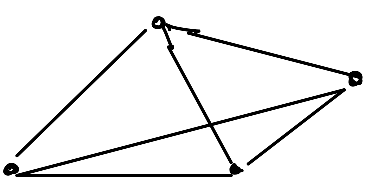
$\square$

In Definition 20.3 haben wir ein Loch als einen "ungefüllten" Kreis definiert. Wie können wir diese Idee in höhere Dimensionen übertragen?

<u>Beispiel</u> 20.5

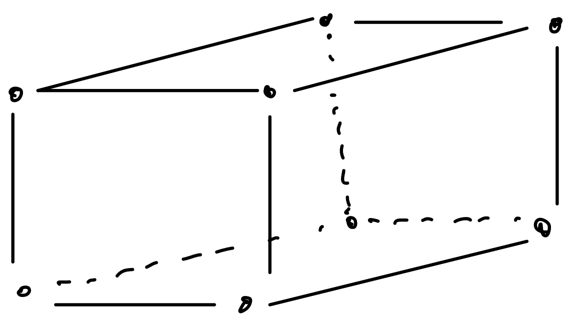
Wir betrachten ein "leeres" Tetraeder:

K :

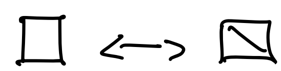


$\dim K = 2$ (bestehend aus allen Knoten, Kanten und Dreiecken).

Intuitiv würden wir sagen, dass K ein "höherdimensionales" Loch hat, nämlich das Innere, was nicht da ist.
Der Rand des inneren Tetraeders besteht aus einer Vereinigung von Dreiecken, Knoten und Kanten, die das Loch umschließen.
In diesem Sinne, wollen wir das Loch als "ungefüllte" 2-Sphäre verstehen (analog zu ungefülltem Kreis).
Wir brauchen dazu eine geeignete Definition einer 2-Sphäre in einem simplizialen Komplex.
Betrachten wir ein weiteres Beispiel, den Würfel:



(gefüllte Viereck
= 2x gefüllte Dreieck:



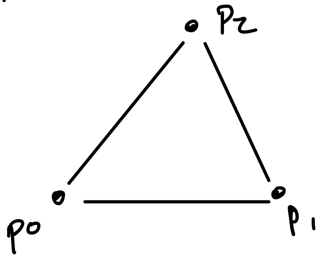
)

Hier können wir nicht in geschlossener Art und Weise um den Würfel gehen ohne ein Viereck doppelt zu besuchen.

Lösung des Problems: <u>LINEARE ALGEBRA</u>
Die Idee in Homologietheorie-Theorie ist folgende:

- Wir definieren <u>alle</u> Möglichkeiten um ein Loch entlang Simplizes zu gehen als Vektoren in einem Vektorraum.
- Die Addition in diesem Vektorraum interpretieren wir als Vereinigung von zwei Möglichkeiten, um ein Loch zu gehen.
- Löcher werden dann als Elemente im <u>Kern</u> einer Linearen Abbildung definiert.

Beispiel 20.6



$\{p_0, p_1\} + \{p_1, p_2\} + \{p_0, p_2\} \longleftrightarrow$ Pfad um das Loch

↳ auf Ränder abbilden

$p_0 + p_1 + p_1 + p_2 + p_0 + p_2 = 0$ über $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Definition 20.7

Sei $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ eine endliche Menge.

Der <u>freie Vektorraum</u> bzgl. S über $\mathbb{F}_2$ ist:

$$\mathcal{F}(S) := \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i s_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{F}_2 \right\}. \cong \mathbb{F}_2^{\,m}$$

s.d. $\{s_1, \dots, s_m\}$ linear unabh. sind.

mit Operationen:

- $\sum a_i s_i + \sum b_i s_i := \sum (a_i + b_i) s_i$
- $\lambda \sum a_i s_i := \sum (\lambda a_i) s_i$.

Definition 20.8

Sei $n \geq 0$ und K ein simplizialer Komplex. Der Vektorraum der n-Ketten in K ist

$$C_n(K) := \mathcal{F}(K^{(n)} \setminus K^{(n-1)})$$
$$= \mathcal{F}(\{\text{simplices in } K \text{ von dim } n\}).$$