§ 4. Wahrscheinlichkeitsräume

Erinnerung: In der ersten Vorlesung haben wir die statistische Grundgesamtheit Ω definiert.
Ein Merkmal ist eine Abbildung $X: \Omega \to W$, wobei W der Wertebereich ist.

Heute: Wir nennen Ω den Ereignisraum.
Teilmengen $A \subseteq \Omega$ nennen wir Ereignisse.

Definition (Wahrscheinlichkeitsraum)
Sei Ω ein Ereignisraum und sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Ereignissen.
Ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist eine Abbildung

$$P: \mathcal{A} \to [0,1], \quad A \mapsto P(A).$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$.

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls A und B disjunkt.

(c) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, falls $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt.

$P(A)$ heißt die Wahrscheinlichkeit von A.
Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

<u>Bemerkung</u>: Nicht jede Menge $\mathcal{A}$ von Ereignissen kann in der Definition gewählt werden. $\mathcal{A}$ muss ein sogenannte σ-Algebra sein.
Wenn $\mathcal{A}$ keine σ-Algebra ist, können Paradoxe entstehen ($\rightsquigarrow$ Banach-Tarski-Paradox).

<u>Wie</u> modelliert die Definition eines Wahrscheinlichkeitsraumes die Verteilung reeller Daten?

$P(A) \approx$ relative Häufigkeit des Ereignisses A sein,
wobei wir die relative Häufigkeit aus n Zufallsexperimenten berechnen.
und $\approx$ soll zu $=$ werden, wenn $n \to \infty$.
Dieser Ansatz wird frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff genannt.

Der Bayes'sche Wahrscheinlichkeitsbegriff definiert $P(A)$ als Erfahrungswert. Insbesondere ist es möglich unvollständige Information über deterministische Prozesse mit Wahrscheinlichkeitsmaßen zu modellieren.

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsräumen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathcal{A}$ Ereignisse.

(1) $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$

(2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(3) $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$

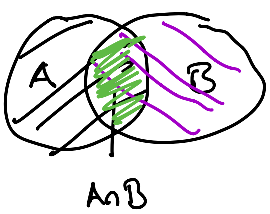
(4) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.

(5) Siebformel: $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Venn-Diagramme

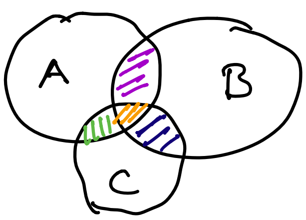
Für $A, B, C \in \mathcal{A}$ zeichnen wir jeweils einen Kreis:

z.B.: Für (2)



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Für (5):



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$P(A) =$ Fläche des Kreises von A, etc.

<u>Ein Beispiel</u> (Wahrscheinlichkeitsmaß beim Münzwurf)

(1) $\Omega = \{$ Menge aller Münzwürfe $\}$

$X: \Omega \to \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$. (= Wertebereich)

$\mathcal{A} = \{ \emptyset, \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = \text{Zahl}\}, \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = \text{Kopf}\}, \Omega \}$

Faire Münze: $P(\{X = \text{Zahl}\}) = 1/2, \quad P(\{X = \text{Kopf}\}) = 1/2$.

$(P: \mathcal{A} \to [0,1])$.

(2) $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$. $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\text{Kopf}\}, \{\text{Zahl}\}, \Omega\}$

$P(\{\text{Kopf}\}) = 1/2, \quad P(\{\text{Zahl}\}) = 1/2$.

$(P: \mathcal{A} \to [0,1])$.

<u>Definition</u> (Endlicher / diskreter Wahrscheinlichkeitsraum)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum. Falls Ω endlich / diskret ist, nennen wir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ endlichen / diskreten W-Raum.

<u>Satz</u>

Falls Ω endlich / diskret ist, ist $\mathcal{A} = \{$ alle Teilmengen von $\Omega \}$ eine zulässige Menge von Ereignissen.

Außerdem: P ist durch $P(\{\omega\})$ für $\omega \in \Omega$ eindeutig bestimmt, denn $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

<u>Definition</u> (Gleichverteilung)

Sei Ω endlich. Dann heißt das W-Maß

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} \quad \text{für } A \subseteq \Omega. \qquad (\# A = \text{Anzahl Elemente in } A)$$

das Maß der Gleichverteilung auf Ω.

Insbesondere gilt: $P(\{\omega\}) = \frac{1}{\# \Omega}$.