

§ 7 Endliche und diskrete Zufallsvariablen

Erinnerung: Ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) ist ein Tripel, wobei:

- $\Omega = \text{Ergebnisraum}$
- $\mathcal{A} = \{\omega \in \Omega\} = \text{die Menge von Ereignissen, denen wir eine Wahrscheinlichkeit zuordnen}$
- $P: \mathcal{A} \rightarrow [0,1], A \mapsto P(A) = \text{Wahrscheinlichkeitsmaß.}$

Definition

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine **Zufallsvariable** ist eine Abbildung

$$X: \Omega \rightarrow W,$$

wobei $W \subseteq \mathbb{R}$. der **Wertebereich / Stichprobenraum** ist,
so dass: $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$ für $a \in \mathbb{R}$ muss $A \in \mathcal{A}$ erfüllen.

Idee: Zufallsvariablen modellieren Messungen von Ereignissen.

Definition (endliche / diskrete Zufallsvariable)

Eine Zufallsvariable X heißt **endlich / diskret**, wenn $X(\Omega)$ endlich / diskret ist.

Beispiele

(1) $\Omega = \{(w_1, w_2) \mid 1 \leq w_i \leq 6\}$, der Ereignisraum für den zweifachen Würfelwurf. Die Augensummenzahl wird durch

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (w_1, w_2) \mapsto w_1 + w_2.$$

(2) $\Omega = \{(w_1, w_2, w_3, w_4) \mid 1 \leq w_i \leq 6\}$, der Ereignisraum für den vierfachen Würfelwurf. Betrachte die Zufallsvariable,

$$X(w_1, w_2, w_3, w_4) = \underbrace{\det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Verteilung ist} \\ \text{einfach}}} = w_1 w_4 - w_2 w_3$$

\uparrow \uparrow
Verteilung ist
Kompliziert

Hier ist die Motivation für die Def. einer Zufallsvariable, dass sie uns eine komplizierte Verteilung mit Hilfe einer einfachen (nämlich der Verteilung von (w_1, \dots, w_4)) beschreiben lässt.

Definition (Verteilung einer Zufallsvariable)

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Sei $A \subseteq \mathbb{W}$, sodass $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Wir nennen

$$P(X \in A) := P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$$

die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X .

Notation: $P_X(A) := P(X \in A)$

Lemma

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X: \Omega \rightarrow W$ eine Zufallsvariable. Definiere: $\mathcal{B} := \{A \subseteq W \mid X^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$. Dann ist (W, \mathcal{B}, P_X) ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Bemerkung Sei X eine endliche oder diskrete Zufallsvariable, so dass $W = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Dann ist P_X vollständig charakterisiert durch Angabe:

$$P(X=a_i) := P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega)=a_i\})$$

Beispiel Zweifacher Würfelwurf, $X = \text{Summe der Augenzahlen}$
 $P(X=2) = \text{Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme } = 2 \text{ ist.}$

Bemerkung Sei X eine endliche oder diskrete Zufallsvariable und $A \subseteq W$. Dann ist: $P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{a \in A} P(X=a)$

- $\sum_{a \in W} P(X=a) = P(W) = 1$.

Beispiel: Zweifacher Münzwurf : $\Omega = \{(w_1, w_2) \mid w_1, w_2 \in \{Z, K\}\}$
 $= \{(Z, Z), (K, K), (K, Z), (Z, K)\}$

$P = \text{Gleichverteilung auf } \Omega$

$X = \text{Anzahl der geworfenen Zahlen}$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow P(X=0) &= P(\{(K,K)\}) = \frac{1}{4} \\ P(X=1) &= P(\{(K,Z), (Z,K)\}) = \frac{1}{2} \\ P(X=2) &= P(\{(Z,Z)\}) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Beispiel Zweifacher Würfelspiel: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 | 1 \leq \omega_i \leq 6\}$

P = Gleichverteilung auf Ω

X = Augensumme

$$\begin{aligned} P(X=i) &= \text{Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme } = i \text{ ist} \\ &= \frac{\#\{\omega_1, \omega_2 \in \Omega | X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 = i\}}{\#\Omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow P(X=2) &= \frac{1}{36}, \quad P(X=3) = \frac{1}{18}, \quad P(X=4) = \frac{1}{12}, \\ P(X=5) &= \frac{1}{9}, \quad P(X=6) = \frac{5}{36}, \quad P(X=7) = \frac{1}{6} \\ P(X=8) &= \frac{5}{36}, \quad P(X=9) = \frac{1}{9}, \quad P(X=10) = \frac{1}{12} \\ P(X=11) &= \frac{1}{18}, \quad P(X=12) = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Beispiel Werfe Würfel so lange, bis eine 6 kommt.

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \mid 1 \leq \omega_i \leq 6\}$$

X = Anzahl Würfe, bis wir zum ersten Mal eine 6 werfen.

$\rightsquigarrow \{X=k\} = \text{Ergebnis, dass in den ersten } k-1 \text{ Würfen keine 6 fällt, und im } k\text{-ten eine 6.}$

$$\Rightarrow P(X=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$

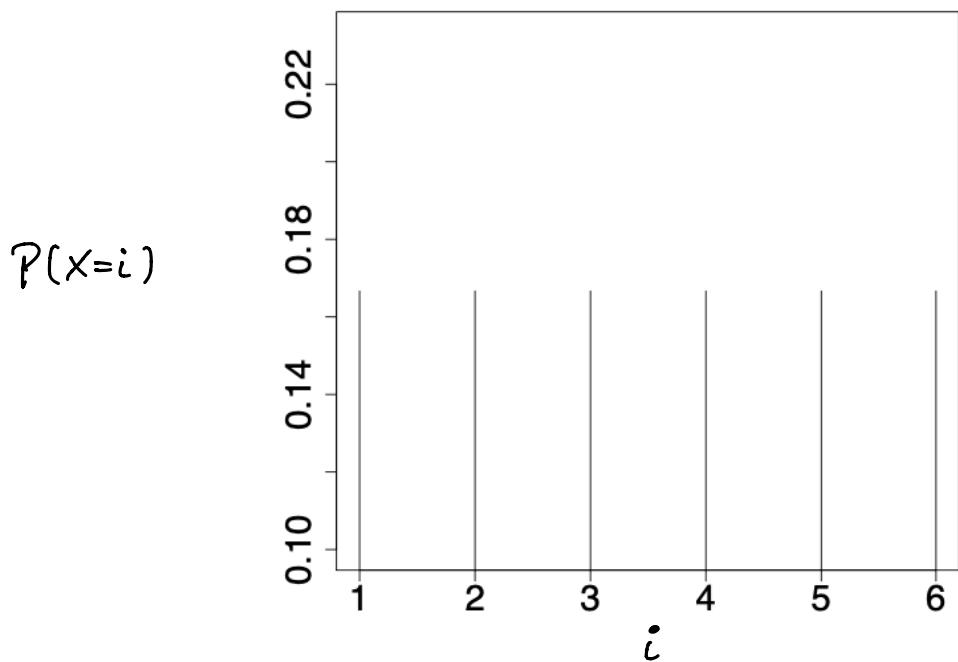
(X heißt in diesem Fall **geometrisch verteilt** mit Parameter $p = \frac{1}{6}$)

Wichtige diskrete Zufallsvariablen

1. Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$

$$P(X=i) = \frac{1}{n} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}$$

In R: "runif" erzeugt Zufallszahlen der Gleichverteilung.
"dunif" erzeugt die W-Funktion



Notation: $X \sim \text{Unif}(\{1, \dots, n\})$
 ↗ "hat die Verteilung"

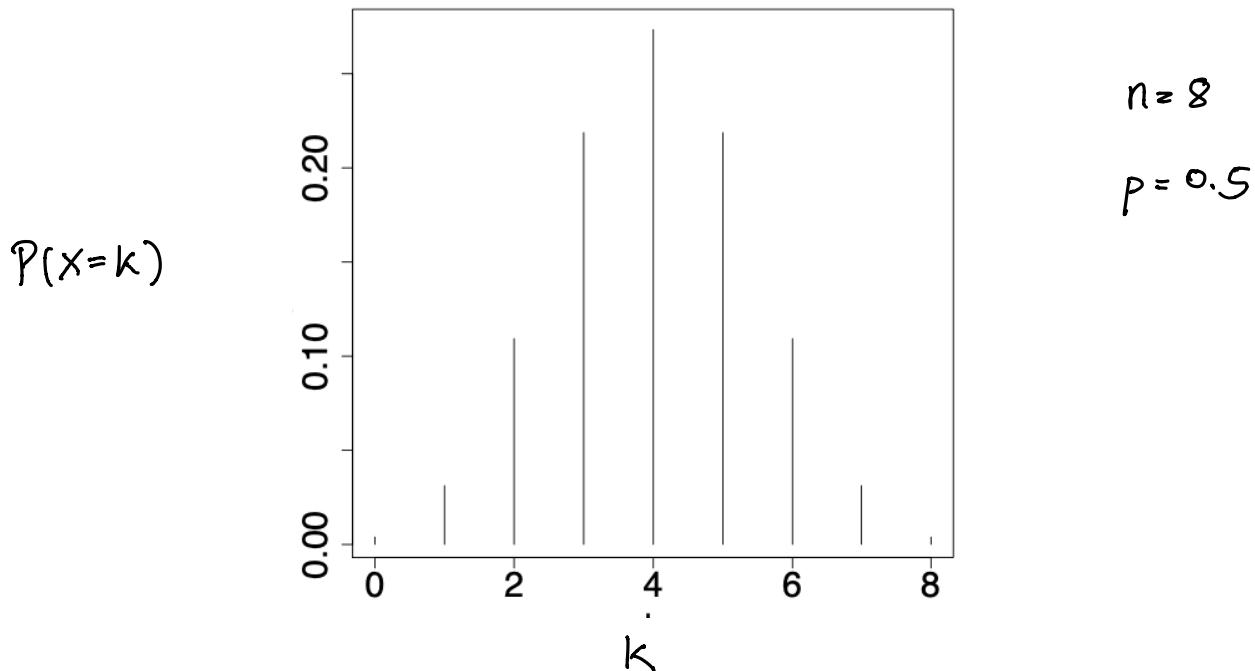
2. Binomialverteilung

Verteilung auf $\mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ mit $p \in [0, 1]$. (die "Erfolgswahrscheinlichkeit").

$P(X=k)$ = die Wahrscheinlichkeit aus n Bernoulli-Experimenten (= Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p) k Erfolge zu erzielen.

In R:
 rbinom

dbinom



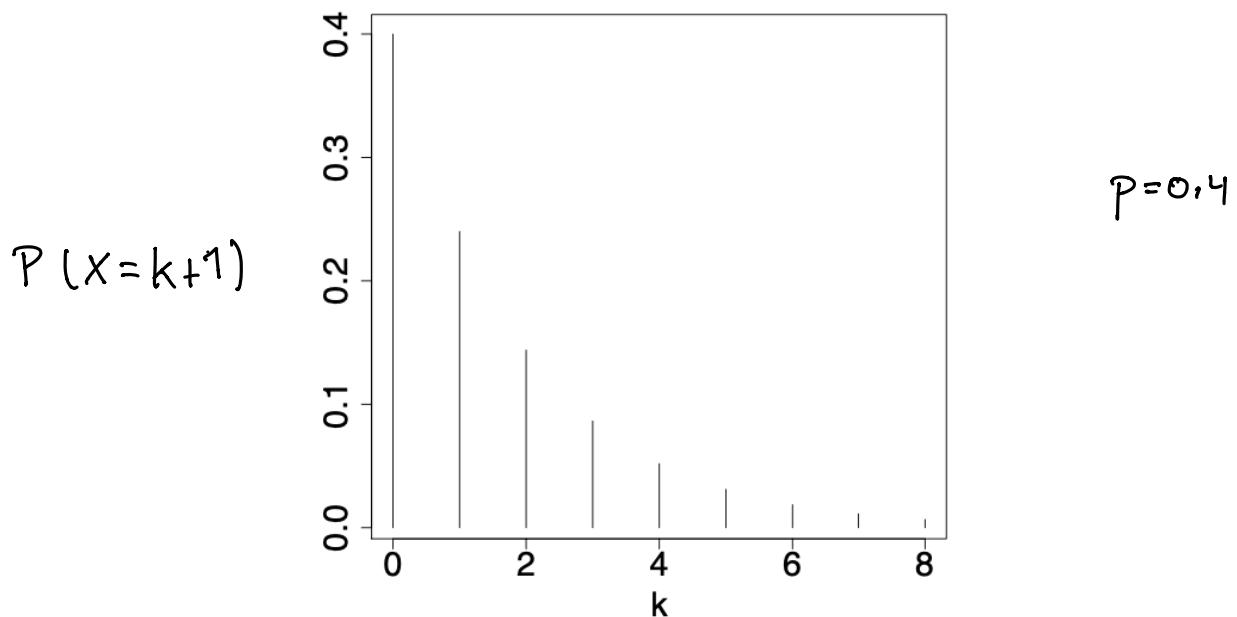
3. Geometrische Verteilung

Verteilung auf Nufos mit $P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$.

X = Anzahl der Versuche von unabh. Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit p bis zum ersten Mal ein Erfolg eintritt.

In R: $rgeom$

$dgeom$



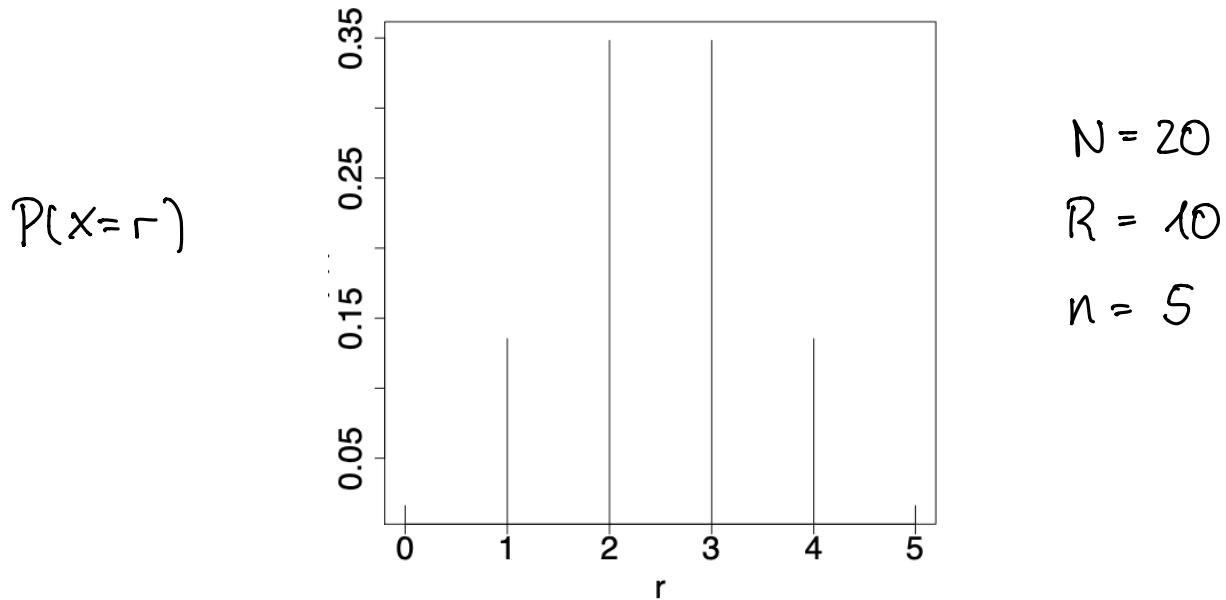
4. Hypergeometrische Verteilung

Verteilung auf Nufos mit Parametern N, R, n .

$$P(X=r) = \frac{\binom{R}{r} \cdot \binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

X = die Anzahl der roten Kugeln beim Ziehen ohne Zurücklegen von n Kugeln aus R roten und $N-R$ weißen Kugeln.

In R: dhyper
rhyper.



5. Poisson - Verteilung

Verteilung auf Anz. mit Parameter $\lambda > 0$:

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

z.B.: X = Anzahl radioaktiver Zerfälle in einem Zeitintervall bei Zerfallsrate λ .

In R: dpois
rpois

