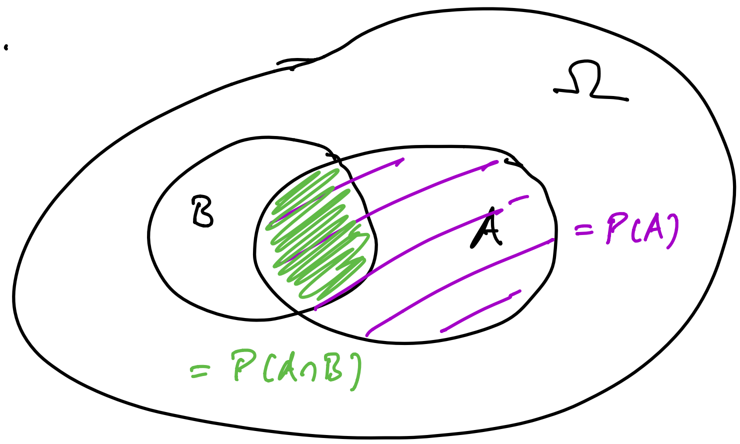
§6 Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

Motivation: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$.

Venn-Diagramm:



$P(A) =$ Wahrscheinlichkeit von A

$P(B) =$ –"– von B

$P(B|A) :=$ –"– von B, falls A bereits eingetreten ist.

$=$ –"– von B, wenn A der neue Ereignisraum ist (wenn A die Rolle von Ω eingenommen hat).

$P(B|A) \propto P(A \cap B)$

└ "proportional zu".

Damit $P(A|A) = 1$, müssen wir P mit $\frac{1}{P(A)}$ skalieren.

<u>Definition</u>

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $P(B) > 0$. Dann heißt

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

Beispiel: Würfelwurf: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{2\}$ (= eine Zwei wird gewürfelt)

$B = \{2,4,6\}$ (= eine gerade Zahl wurde gewürfelt).

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = 1/3$$

und $P(A) = 1/6$

D.h. das Ereignis B macht A wahrscheinlicher. Falls eine gerade Zahl gewürfelt wird, ist es wahrscheinlicher eine Zwei zu würfeln als ohne diese Information.

Beispiel:

DW Made for minds.

THEMEN MEDIA CENTER TV DEUTSCH LERNEN

DEUTSCHLAND CORONAVIRUS WELT WIRTSCHAFT KULTUR WISSEN & UMWELT SPORT

THEMEN / WISSEN & UMWELT

COVID-19

Corona-Impfstoff laut Biontech und Pfizer zu 90 Prozent wirksam

Die erste Zwischenanalyse einer Phase-3-Studie zeigt eine hohe Wirksamkeit und keine schwerwiegenden Nebenwirkungen bei dem Impfstoff-Kandidaten. Eine Impfstoff-Zulassung soll bereits kommende Woche beantragt werden.

Zwar liegen noch keine Primärdaten vor und es hat auch noch keine Überprüfung durch eine Peer-Review-Publikation gegeben, aber diese Pressemitteilung des Mainzer Impfstoff-Herstellers Biontech und Pfizer macht Hoffnung: Ihr Impfstoffkandidat BNT162b2 erwies sich in der ersten Zwischenanalyse als mehr als 90 Prozent wirksam im Schutz vor COVID-19-Erkrankung und es wurden auch keine schwerwiegenden Nebenwirkungen beobachtet.

Gesammelt wurden die Daten von einem externen, unabhängigen Data Monitoring Committee (DMC) im Rahmen der laufenden Phase-3-Studie, an der bislang insgesamt 43.538 Probanden in verschiedenen Ländern teilnahmen. Die eine Hälfte bekam den mRNA-Impfstoff, die andere Hälfte erhielt ein Placebo.

aerzteblatt.de

/ Ärzteblatt / cme / Ärztestellen / Studieren / English Edition

Home Archiv News Themen DÄ plus Politik Medizin

News > Medizin > SARS-CoV-2: Impfstoff von Biontech/Pfizer verhindert in Phase-3-Studie mehr als 90 % der bestätigten Infektionen

Medizin

SARS-CoV-2: Impfstoff von Biontech/Pfizer verhindert in Phase-3-Studie mehr als 90 % der bestätigten Infektionen

Knapp 40.000 Probanden haben zweite Dosis erhalten

Eine Zwischenauswertung vom 8. November umfasste 43.538 Teilnehmer, von denen 38.955 die zweite Dosis des Impfstoffkandidaten erhalten haben. Die Zwischenauswertung wurde nach Rücksprache mit der US-Arzneimittelbehörde FDA für den Zeitpunkt festgelegt, an dem 94 bestätigte Erkrankungen aufgetreten sind.

Nach den jetzt vorgestellten Ergebnissen sind die meisten Fälle im Placeboarm der Studie aufgetreten. Laut dem Hersteller liegt die Effektivität bei mehr als 90 %. Genauere Angaben werden nicht gemacht. Angesichts der Teilnehmerzahl dürfte das Ergebnis jedoch signifikant sein.

$A = \{$infizierte Personen$\}$

$B = \{$geimpfte Personen$\}$

$$P(A) = \frac{94}{43538} \qquad P(B) = \frac{38955}{43538} \qquad P(A \cap B) = \frac{40}{43538}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{40/43538}{38955/43538} \approx 0.001$$

$$P(A \mid B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} \approx 0.01$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \mid B)}{P(A \mid B^c)} \approx \frac{0.001}{0.01} = 0.1 = 10\%$$

$$\Rightarrow P(A \mid B) \approx 10\% \cdot P(A \mid B^c)$$

(Die Wahrscheinlichkeit einer Infektion gegeben B ist 90% kleiner als gegeben B^c).

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ mit der Eigenschaft, dass die B_i eine Partition von Ω bilden:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad \text{und} \quad B_i \cap B_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Ausserdem gelte $P(B_i) > 0$ für alle i. Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i).$$

Satz von Bayes

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $P(A), P(B) > 0$. Dann gilt:

$$P(A \mid B) = P(B \mid A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

Beobachtung: $\frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(B)}$

$\Rightarrow$ Es gilt: $P(A|B) > P(A) \Leftrightarrow P(B|A) > P(B)$

Wenn A das Ereignis B wahrscheinlicher macht, dann macht auch B das Ereignis A wahrscheinlicher.

Stochastische Unabhängigkeit

Idee: zwei Ereignisse A, B sollen unabhängig sein, wenn das Ereignis A die Wahrscheinlichkeit von B nicht beeinflusst.

D.h. $P(B|A) = P(B)$

Da $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$, gilt:

$$\begin{aligned} & P(B|A) = P(B) \\ \Leftrightarrow\ & P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \\ \Leftrightarrow\ & P(A|B) = P(A) \end{aligned}$$

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$.

Dann nennen wir A und B stochastisch unabhängig, wenn

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B).$$

Beispiel 2-fache Würfelwurf. $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid 1 \le \omega_1, \omega_2 \le 6\}$

$A = \{$ im ersten Wurf eine 2 $\}$, $B = \{$ im zweiten Wurf eine 2 $\}$

$A = \{\omega_1 = 2\}$ $\qquad B = \{\omega_2 = 2\}$

Falls die Würfe unabhängig sind, dann sind A und B stochastisch unabhängig

$$\Rightarrow P\{(2,2)\} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Bemerkung Wenn A und B stochastisch unabhängig sind, sind auch

- A und B^C
- A^C und B
- A^C und B^C

stochastisch unabhängig.

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Dann heißen die A_i

(1) paarweise stoch. unabhängig, falls

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) P(A_j) \quad \text{für alle } i \neq j$$

gilt.

(2) gemeinsam stoch. unabhängig, falls

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

für alle Wahlen von Indizes $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$.

((2) impliziert (1), aber im Allgemeinen gilt die Rückrichtung nicht).

Binomialverteilung

Ein wichtiges Beispiel im Kontext von stochastischer Unabhängigkeit ist die Binomialverteilung.

Idee: wir modellieren n unabhängige Zufallsexperimente mit Ausgang in $\{0,1\}$. D.h., falls ω_i das i-te Experiment beschreibt, dann

$$\omega_i = 0 \quad \text{oder} \quad \omega_i = 1.$$

Für die Binomialverteilung nimmt man an, dass

$$P(\{\omega_1 = 0\}) = P(\{\omega_2 = 0\}) = \dots = P(\{\omega_n = 0\}) = p.$$

für ein $0 \leq p \leq 1$.

Wegen der stoch. Unabhängigkeit gilt:

$$P(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) = p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \text{ wobei}$$

$$k = \#\{i \mid \omega_i = 0\}$$

Insbesondere gilt: $P(\{\text{genau } k \text{ der } \omega_i = 0 \text{ sind}\})$

$$= \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$