§ 3. Maße für Lage und Streuung

Motivation: Datensätze mit Hilfe von (eindimensionalen) Kennzahlen beschreiben.

Hier meinen wir explizit quantitative Daten. mit Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$. Die relevanten Informationen, die wir in diesen Abschnitt verstehen wollen sind (1) wo befinden sich die Daten und (2) wie weit verstreut sind die Daten.

Beispiel: Verteilung von Temperaturdaten.

wo: wenn die Daten alle bei um die 20°C liegen, dann handelt es sich um einen warmen Ort.

wie weit: Auf den Kanarischen Inseln ist das ganze Jahr über ca. 25°C. In Berlin schwankt die Temperatur über das Jahr zwischen −10°C und +30°C.

Teil 1: Lageparameter

Definition (Rangwerte)

Seien $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ Beobachtungen eines quantitativen Merkmals, so dass $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq x_{(3)} \leq \dots \leq x_{(N)}$. Wir nennen:

- $x_{(n)}$ den n-ten Rangwert.

Wir nennen: $x_{(1)}$ das Minimum und $x_{(N)}$ das Maximum.

Beispiel: Daten $x_1 = 3$, $x_2 = 6$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 4$.
Rangwerte: $x_{(1)} = 1$, $x_{(2)} = 1$, $x_{(3)} = 3$, $x_{(4)} = 4$, $x_{(5)} = 6$.

Rangwerte liefern Information darüber, in welchem Bereich sich die Daten befinden. Die Lage innerhalb dieses Bereichs wird durch Quantile beschrieben.

Idee: Für $0 < p < 1$ ist das p-Quantil ein Punkt $\tilde{x}_p$, sodass $\approx p \cdot 100\%$ der Daten kleiner als $\tilde{x}_p$ sind.

$$x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(k)} \leq \tilde{x}_p \leq x_{(k+1)} \leq \dots \leq x_{(N)}, \qquad \text{sodass } k \approx p \cdot N.$$

Beispiel: $p = 1/2$: ($1/2$ -Quantil = Median).

$x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, $x_4 = 6$

Rangwerte: $x_{(1)} = 1 \leq x_{(2)} = 1 \leq x_{(3)} = 4 \leq x_{(4)} = 6$

$$\boxed{\tilde{x}_{1/2} := 2.5}$$

Jetzt haben wir zusätzlich $x_{(5)} = 10$

$$x_{(1)} = 1 \leq x_{(2)} = 1 \leq \underbrace{x_{(3)} = 4}_{=: \tilde{x}_{1/2}} \leq x_{(4)} = 6 \leq x_{(5)} = 10$$

Definition (Quantile)

Seien $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ Beobachtungen eines Merkmals X.
Sei $0 < p < 1$. Das p-Quantil $\tilde{x}_p$ ist definiert als

$$\tilde{x}_p = \begin{cases} x_{(k)} , & \text{falls } p \cdot N \notin \mathbb{N} \text{ und } pN < k < pN+1 . \\ \frac{1}{2}\left(x_{(k)} + x_{(k+1)}\right) , & \text{falls } p \cdot N = k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Definition

Das $\frac{1}{2}$-Quantil heißt Median.
Das $\frac{1}{4}$-Quantil heißt unteres Quartil
Das $\frac{3}{4}$-Quantil heißt oberes Quartil

In R:
median(..)
quantile(...).

Definition (Mittelwert)

Seien $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ Beobachtungen eines Merkmals X.
Der Mittelwert der Daten ist definiert als

$$\bar{x} := \frac{1}{N}\left(x_1 + x_2 + \dots + x_N\right).$$

In R: mean(...).

Mittelwert und Median sind beides Maße für das „Zentrum" der Daten.

Beispiel $x_1 = 3,\ x_2 = 10,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 5$

Dann (a) Median: $N = 5,\ p = 1/2 \rightsquigarrow \underbrace{N \cdot p}_{=2{,}5} \notin \mathbb{N} \rightsquigarrow 2{,}5 < k < 3{,}5 \Rightarrow k = 3$

$$\Rightarrow \tilde{x}_{1/2} = x_{(3)} = 3$$

(b) Mittelwert: $\frac{1}{5}(3 + 10 + 1 + 1 + 5) = \frac{20}{5} = 4$

Beobachtung Extremwerte in den Beobachtungen ziehen $\bar{x}$ von $\tilde{x}_{1/2}$ weg. $(= x_2 = 10)$.

Teil 2 Streuungsparameter

Definition (Streuungsparameter)

Seien $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$ Beobachtungen eines Merkmals X. Wir nennen:

$R := x_{(N)} - x_{(1)}$ die Spannweite

$Q := \tilde{x}_{3/4} - \tilde{x}_{1/4}$ den Quartilsabstand

$S := \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$ die Standardabweichung der Daten.

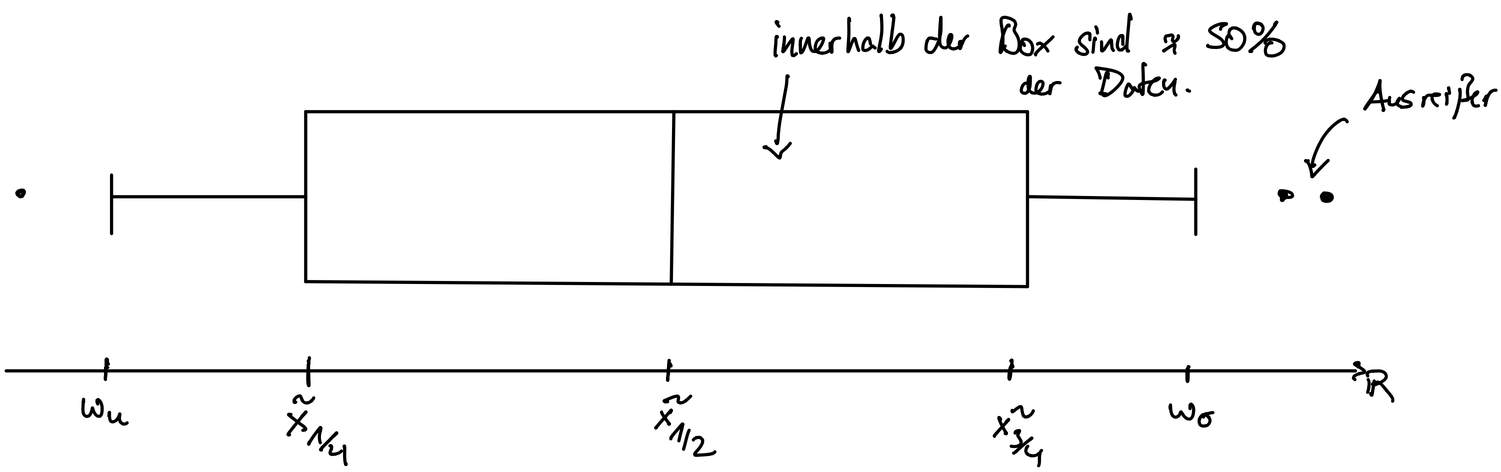
Ausserdem, nennen wir $s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2$ die Varianz der Daten, oder auch Stichprobenvarianz.

In R: sd(..) für die Standardabweichung

var(..) für die Varianz.

Varianz und Standardabweichung messen den Mittelwert der quadratischen Abweichung der Beobachtungen x_i zum Mittelwert $\bar{x}$.

<u>Visualisierung</u>: Die Informationen über Lage und Streuung werden in einem Boxplot zusammengefasst.



wobei $w_u := \text{kleinste Beobachtung} > \tilde{x}_{1/4} - \frac{3}{2}\underbrace{(\tilde{x}_{3/4} - \tilde{x}_{1/4})}_{Q}$.

$w_o := \text{größte Beobachtung} < \tilde{x}_{3/4} + \frac{3}{2}(\tilde{x}_{3/4} - \tilde{x}_{1/4})$.

w_u, w_o heißen unterer und oberer Whisker.

Ausreißer = Daten die $< w_u$ oder $> w_o$ sind.