§ 2 Häufigkeitsverteilungen und grafische Darstellung

Sei Ω eine statistische Grundgesamtheit,
$X: \Omega \to W$ ein Merkmal mit Wertebereich W,
$D = \{e_1, \dots, e_N\}$ eine Stichprobe der Größe N.

<u>Annahme</u>:
- X ist entweder nominal, ordinal oder quantitativ diskret.
- W ist endlich, $\# W =: M$.
- $W = \{z_1, \dots, z_M\}$ wurde nummeriert

<u>Definition</u> 2.1 (Häufigkeitsverteilung).
Sei $1 \leq j \leq M$. Wir definieren
(1) $N_j := \# \{ i \mid 1 \leq i \leq N, X(e_i) = z_j \} = \# X^{-1}(z_j)$,
ist die absolute Häufigkeit von z_j.
(2) $f_j = \frac{N_j}{N}$ = relative Häufigkeit von z_j
(3) $(N_1, \dots, N_M)$ ist absolute Häufigkeitsverteilung des Merkmals X der Daten D.
(4) $(f_1, \dots, f_M)$ ist relative Häufigkeitsverteilung.

Beispiel: $\Omega = \{a, b, c\}$ (nominale Daten mit $M = 3$)

$D = \{e_1, \dots, e_5\}$ $(N = 5)$

$X(e_1) = a, \quad X(e_2) = b, \quad X(e_3) = a, \quad X(e_4) = a, \quad X(e_5) = a.$

Sei etwa $z_1 := a, \quad z_2 := b, \quad z_3 := c.$

Dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \# \{ i \mid X(e_i) = z_1 = a \} \\ &= \# \{1, 3, 4, 5\} = 4 \\ N_2 &= 1, \quad N_3 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(N_1, N_2, N_3) \\ &= (4, 1, 0) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{N_1}{N} = \frac{4}{5} = 0.8 \\ f_2 &= \frac{1}{5} = 0{,}2 \\ f_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(f_1, f_2, f_3) \\ &= (0.8, 0{,}2, 0) \end{aligned}$$

$\leadsto$ In R: table(...).

Bemerkung: Es gilt: (a) $\sum_{j=1}^{M} N_j = N$

(b) $\sum_{j=1}^{M} f_j = \sum_{j=1}^{M} \frac{N_j}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{M} N_j = \frac{N}{N} = 1$

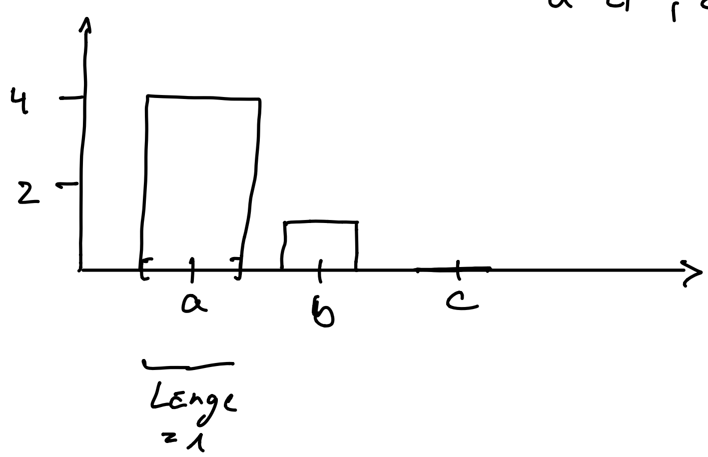
Definition 2.2 (Balkendiagramm)

Ein Balkendiagramm stellt die Häufigkeitsverteilung eines nominalen oder ordinalen Merkmals dar.

Auf der x-Achse werden die Werte aus W aufgetragen.
Über $z_j \in W$ wird ein Balken der Länge 1 und Höhe N_j gezeichnet.

Beispiel $W = \{a, b, c\}$, $(N_1, N_2, N_3) = (4, 1, 0)$

$a = z_1$, $b = z_2$, $c = z_3$



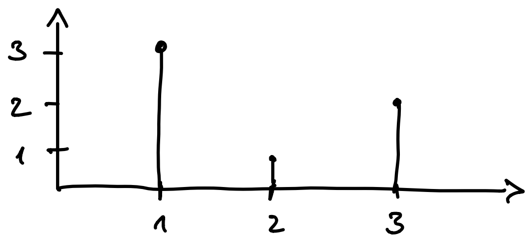
In R: barplot(--)

Definition 2.3 (Stabdiagramme)

Ein Stabdiagramm stellt die Häufigkeitsverteilung eines quantitativ diskreten Merkmals dar.

Auf der x-Achse werden die Werte in W aufgetragen.
Über $z_j \in W$ wird ein Stab der Länge N_j gezeichnet.

Beispiel $W = \{1, 2, 3\}$, $(N_1, N_2, N_3) = (3, 1, 2)$.



In R: plot(...).

Bisher: ordinale, nominale Merkmale ($\rightsquigarrow$ Balkendiagramm), oder quantitativ diskrete Merkmale ($\rightsquigarrow$ Stabdiagramm).

Jetzt Für quantitativ kontinuierliche Daten benutzen wir **Histogramme**.

Idee Einen kontinuierlichen Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$.

Definition 2.4 (Diskretisierung)
Sei $W \subseteq \mathbb{R}$ ein kontinuierlicher Wertebereich.
Es seien $I_j = (v_{j-1}, v_j]$, $1 \le j \le k$, halboffene Intervalle, sodass,

(1) $W \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j$

(2) $v_j \le v_{j+1}$ für alle $1 \le j \le k-1$, (d.h. $I_j \cap I_\ell = \emptyset$, falls $j \neq \ell$).

(d.h. jeder Punkt in W liegt in genau einem Intervall I_j).

Dann nennen wir $(I_1, \dots, I_k)$ eine Diskretisierung von W.

Definition 2.5 (Häufigkeitsverteilung quantitativ stetiger Merkmale).
Sei X ein quantitativ stetiges Merkmal mit Wertebereich W.
Und sei $I = (I_1, \dots, I_k)$ eine Diskretisierung von W.

(1) $N_j := \# \{ i \mid 1 \le i \le N : X(e_i) \in I_j \} = \# X^{-1}(I_j)$

(2) $f_j := N_j / N$

(3) $(N_1, \dots, N_k)$ ist die absolute Häufigkeitsverteilung von X bzgl. der Diskretisierung I.

(4) $(f_1, \dots, f_k)$ ist die relative Häufigkeitsverteilung.

Bemerkung Eine Diskretisierung transformiert ein quantitativ stetiges Merkmal in ein quantitativ diskretes. mit Wertebereich $\{I_1, \dots, I_k\}$.

Definition 2.6.

Ein Histogramm stellt ein quantitativ stetiges Merkmal als Balkendiagramm nach Transformation in ein quantitativ diskretes Merkmal dar.

In R: hist(...)

Eine weitere Möglichkeit die Häufigkeitsverteilung eines quantitativen Merkmals zu beschreiben ist die empirische Verteilungsfunktion

Definition 2.7

Sei X ein Merkmal mit Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$.

Sei $D = \{e_1, \dots, e_N\}$ und $x_i := X(e_i)$.

Die zugehörige empirische Verteilungsfunktion ist:

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \cdot \# \{ i \mid 1 \leq i \leq N : x_i \leq x \}$$

Bemerkung: $\lim_{x \to \infty} F_N(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F_N(x) = 0$.

Beispiel $N = 4$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 5$