§ 7 Endliche und diskrete Zufallsvariablen

<u>Erinnerung:</u> Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist ein Tripel, wobei:

- Ω = Ereignisraum
- $\mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega\}$ = die Menge von Ereignissen, denen wir eine Wahrscheinlichkeit zuordnen
- $P: \mathcal{A} \to [0,1]$, $A \mapsto P(A)$ = Wahrscheinlichkeitsmaß.

<u>Definition</u>

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung

$$X: \Omega \to W,$$

wobei $W \subseteq \mathbb{R}$. der Wertebereich / Stichprobenraum ist,
so dass: $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$ für $a \in \mathbb{R}$ muss $A \in \mathcal{A}$ erfüllen.

<u>Idee:</u> Zufallsvariablen modellieren Messungen von Ereignissen.

<u>Definition</u> (endliche / diskrete Zufallsvariable)

Eine Zufallsvariable X heißt endlich / diskret, wenn $X(\Omega)$ endlich / diskret ist.

Beispiele

(1) $\Omega = \{ (\omega_1, \omega_2) \mid 1 \le \omega_i \le 6 \}$, der Ereignisraum für den zweifachen Münzwurf. Die Augensummenzahl wird durch

$$X: \Omega \to \mathbb{R}, \quad (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 + \omega_2.$$

(2) $\Omega = \{ (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid 1 \le \omega_i \le 6 \}$, der Ereignisraum für den vierfachen Münzwurf. Betrachte die Zufallsvariable,

$$X\underbrace{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Verteilung ist} \\ \text{einfach}}} = \underbrace{\det \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_3 & \omega_4 \end{pmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Verteilung ist} \\ \text{kompliziert}}} = \omega_1 \omega_4 - \omega_2 \omega_3$$

Hier ist die Motivation für die Def. eine Zufallsvariable, dass sie uns eine komplizierte Verteilung mit Hilfe einer einfachen (nämlich der Verteilung von $(\omega_1, \dots, \omega_4)$) beschreiben lässt.

Definition (Verteilung einer Zufallsvariable)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X: \Omega \to W \subseteq \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Sei $A \subseteq W$, sodass $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Wir nennen

$$P(X \in A) := P(X^{-1}(A)) = P(\{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A \})$$

die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X.

Notation: $P_X(A) := P(X \in A)$

Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X: \Omega \to W$ eine Zufallsvariable. Definiere: $\mathcal{B} := \{A \subseteq W \mid X^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$. Dann ist $(W, \mathcal{B}, P_X)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Bemerkung Sei X eine endliche oder diskrete Zufallsvariable, so dass $W = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Dann ist P_X vollständig charakterisiert durch Angabe:

$$P(X = a_i) := P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a_i\})$$

Beispiel Zweifacher Würfelwurf, X = Summe der Augenzahlen

$P(X=2)$ = Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme $= 2$ ist.

Bemerkung Sei X eine endliche oder diskrete Zufallsvariable und $A \subseteq W$.

Dann ist:

- $P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{a_i \in A} P(X = a_i)$

- $\sum_{a \in W} P(X=a) = P(W) = 1.$

Beispiel: Zweifacher Münzwurf: $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{Z, K\}\}$
$= \{(Z,Z), (K,K), (K,Z), (Z,K)\}$

P = Gleichverteilung auf Ω

X = Anzahl der geworfenen Zahlen

$\rightsquigarrow$ $P(X=0) = P(\{(K,K)\}) = \frac{1}{4}$

$P(X=1) = P(\{(K,Z),(Z,K)\}) = \frac{1}{2}$

$P(X=2) = P(\{(Z,Z)\}) = \frac{1}{4}$

$\rightsquigarrow$ $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

<u>Beispiel</u> Zweifacher Würfelwurf: $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid 1 \leq \omega_i \leq 6\}$

$P =$ Gleichverteilung auf Ω

$X =$ Augensumme

$P(X=i) =$ Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme $= i$ ist

$$= \frac{\#\{(\omega_1,\omega_2) \in \Omega \mid X(\omega_1,\omega_2) = \omega_1 + \omega_2 = i\}}{\#\Omega}$$

$\rightsquigarrow$ $P(X=2) = \frac{1}{36}$, $P(X=3) = \frac{1}{18}$, $P(X=4) = \frac{1}{12}$,

$P(X=5) = \frac{1}{9}$, $P(X=6) = \frac{5}{36}$, $P(X=7) = \frac{1}{6}$

$P(X=8) = \frac{5}{36}$, $P(X=9) = \frac{1}{9}$, $P(X=10) = \frac{1}{12}$

$P(X=11) = \frac{1}{18}$, $P(X=12) = \frac{1}{36}$.

$$P(X \geq 10) = P(X=10) + P(X=11) + P(X=12)$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

Beispiel Werfe Würfel so lange, bis eine 6 kommt.

$\Omega = \{ (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \mid 1 \le \omega_i \le 6 \}$

X = Anzahl Würfe, bis wir zum ersten Mal eine 6 werfen.

$\leadsto$ $\{X = k\}$ = Ereignis, dass in den ersten $k-1$ Würfen keine 6 fällt, und im k-ten eine 6.

$\Rightarrow P(X=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$

(X heißt in diesem Fall geometrisch verteilt mit Parameter $p = 1/6$)

Wichtige diskrete Zufallsvariablen

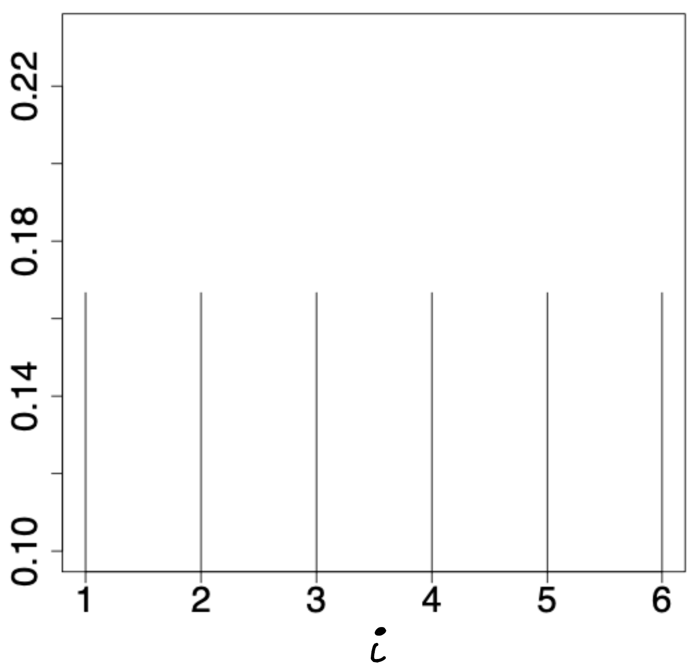
1. Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$

$P(X=i) = \frac{1}{n}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$

In R: "runif" erzeugt Zufallszahlen der Gleichverteilung.

"dunif" erzeugt die W-Funktion –"–

$P(X=i)$



Notation: $X \sim \text{Unif}(\{1, \ldots, n\})$

"hat die Verteilung"

2. Binomialverteilung

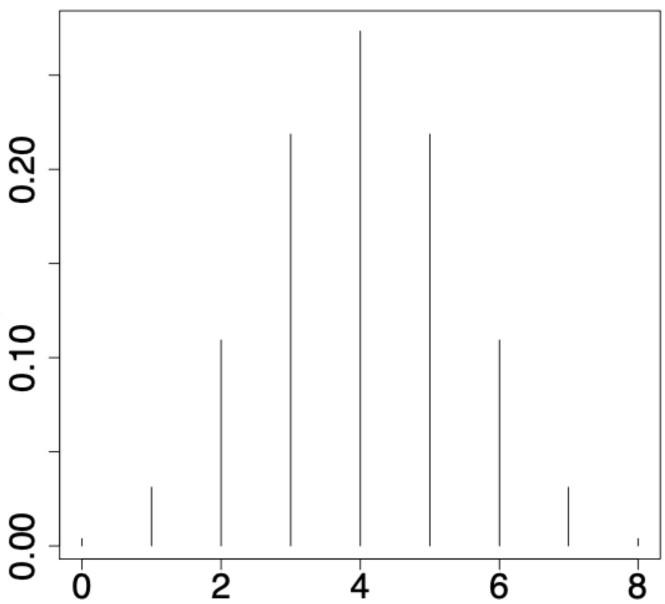
Verteilung auf $\mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$ mit $p \in [0,1]$. (die "Erfolgswahrscheinlichkeit").

$P(X=k)$ = die Wahrscheinlichkeit aus n Bernoulli-Experimenten (= Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit p) k Erfolge zu erzielen.

In R: rbinom

dbinom

$P(X=k)$



k

$n = 8$

$p = 0.5$

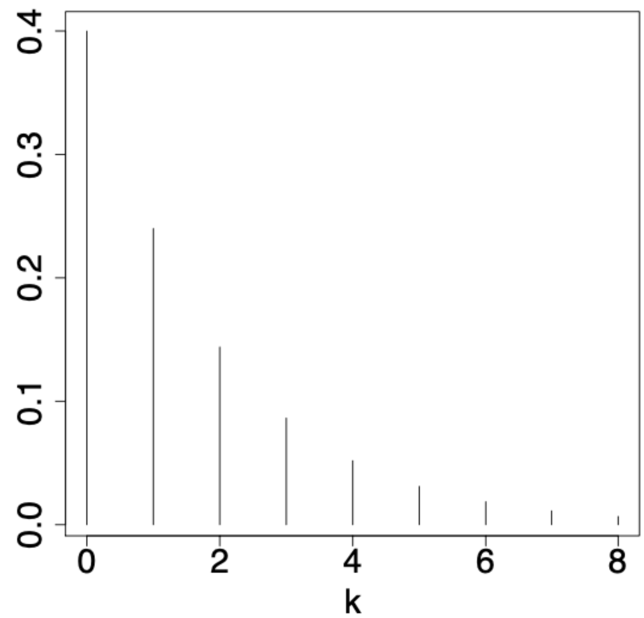
3. Geometrische Verteilung

Verteilung auf $\mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$.

X = Anzahl der Versuche von unabh. Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit p bis zum ersten Mal ein Erfolg eintritt.

In R: rgeom
dgeom

$P(X=k+1)$



$p=0{,}4$

4. Hypergeometrische Verteilung

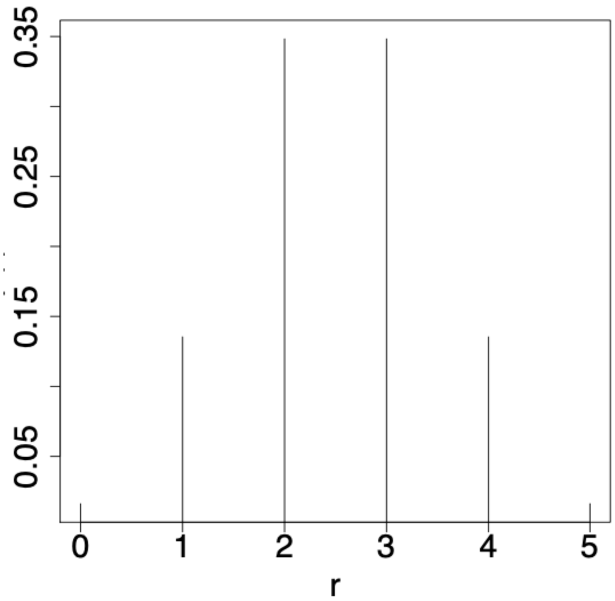
Verteilung auf $\mathbb{N} \cup \{0\}$ mit Parametern N, R, n.

$$P(X=r) = \frac{\binom{R}{r} \cdot \binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

X = die Anzahl der roten Kugeln beim Ziehen ohne Zurücklegen von n Kugeln aus R roten und $N-R$ weißen Kugeln.

In R: dhyper
rhyper.

$P(X=r)$



$N = 20$
$R = 10$
$n = 5$

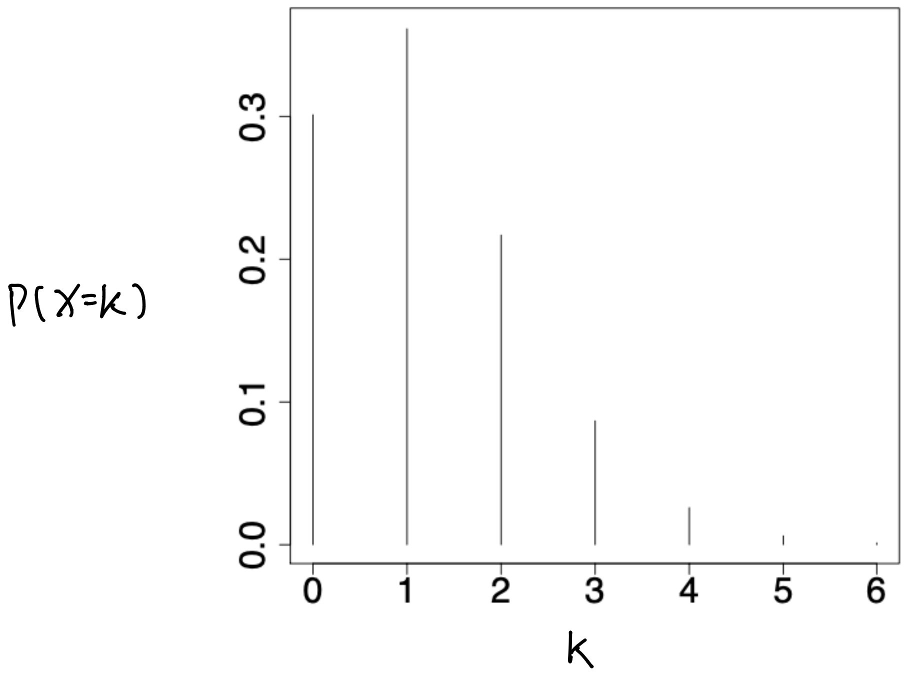
5. Poisson-Verteilung

Verteilung auf $\mathbb{N} \cup \{0\}$, mit Parameter $\lambda > 0$:

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

z.B.: X = Anzahl radioaktiver Zerfälle in einem Zeitintervall bei Zerfallsrate λ.

In R: dpois
rpois



$\lambda = 1.2.$