

## § 4. Wahrscheinlichkeitsräume

Erinnerung: In der ersten Vorlesung haben wir die statistische Grundgesamtheit  $\Omega$  definiert.

Ein Merkmal ist eine Abbildung  $X: \Omega \rightarrow W$ , wobei  $W$  der Wertebereich ist.

Heute: Wir nennen  $\Omega$  den Ereignisraum.

Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  nennen wir **Ereignisse**.

### Definition (Wahrscheinlichkeitsraum)

Sei  $\Omega$  ein Ereignisraum und sei  $\mathcal{A}$  eine Menge von Ereignissen.

Ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** ist eine Abbildung

$$P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1], \quad A \mapsto P(A).$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a)  $P(\emptyset) = 0$  und  $P(\Omega) = 1$ .

(b)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , falls  $A$  und  $B$  disjunkt.

(c)  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ , falls  $A_1, A_2, \dots$  paarweise disjunkt.

$P(A)$  heißt **die Wahrscheinlichkeit** von  $A$ .

Das Tripel  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  heißt **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Bemerkung: Nicht jede Menge  $A$  von Ereignissen kann in der Definition gewählt werden.  $A$  muss ein sogenannte  $\sigma$ -Algebra sein.

Wie modelliert die Definition eines Wahrscheinlichkeitsraumes die Verteilung reeller Daten?

$P(A) \approx$  relative Häufigkeit des Ereignisses  $A$  sein,  
wobei wir die relative Häufigkeit aus  $n$  Zufallsexperimenten berechnen.

und  $\approx$  soll zu  $=$  werden, wenn  $n \rightarrow \infty$ .

Dieser Ansatz wird **frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff** genannt.

Der **Bayes'sche Wahrscheinlichkeitsbegriff** definiert  $P(A)$  als Erfahrungswert. Insbesondere ist es möglich unvollständige Information über deterministische Prozesse mit Wahrscheinlichkeitsmaßen zu modellieren.

## Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsräumen

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A, B, C \in \mathcal{A}$  Ereignisse.

$$(1) \quad P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$$

$$(2) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(3) \quad A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)$$

$$(4) \quad P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B).$$

$$(5) \quad \text{Siebformel: } P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ + P(A \cap B \cap C).$$

## Venn-Diagramme

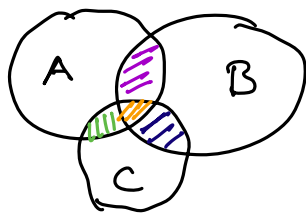
Für  $A, B, C \in \mathcal{A}$  zeichnen wir jeweils einen Kreis:

Z.B.: Für (2)



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Für (5):



$$P(A \cup B \cup C) \\ = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ + P(A \cap B \cap C)$$

$P(A)$  = Fläche des Kreises von A, etc.

### Ein Beispiel (Wahrscheinlichkeitsmaß beim Münzwurf)

(1)  $\Omega = \{\text{Menge aller Münzwürfe}\}$

$X: \Omega \rightarrow \{\text{Kopf, Zahl}\}$  (Wertebereich)

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = \text{Zahl}\}, \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = \text{Kopf}\}, \Omega\}$

Faire Münze:  $P(\{X = \text{Zahl}\}) = \frac{1}{2}$ ,  $P(\{X = \text{Kopf}\}) = \frac{1}{2}$ .

( $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ ).

(2)  $\Omega = \{\text{Kopf, Zahl}\}$ .  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\text{Kopf}\}, \{\text{Zahl}\}, \Omega\}$

$P(\{\text{Kopf}\}) = \frac{1}{2}$ ,  $P(\{\text{Zahl}\}) = \frac{1}{2}$ .

( $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ ).

### Definition (Endlicher / diskreter Wahrscheinlichkeitsraum)

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein W-Raum. Falls  $\Omega$  endlich / diskret ist, nennen wir  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  endlichen / diskreten W-Raum.

### Satz

Falls  $\Omega$  endlich / diskret ist, ist  $\mathcal{A} = \{\text{alle Teilmengen von } \Omega\}$  eine zulässige Menge von Ereignissen.

Außerdem:  $P$  ist durch  $P(\{\omega\})$  für  $\omega \in \Omega$  eindeutig bestimmt, denn  $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ .

### Definition (Gleichverteilung)

Sei  $\Omega$  endlich. Dann heißt das  $\mathcal{U}$ -Maß

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \quad \text{für } A \subseteq \Omega. \quad (\#A = \text{Anzahl Elemente in } A)$$

das Maß der Gleichverteilung auf  $\Omega$ .

Insbesondere gilt:  $P(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega}$ .