

## § 7 Endliche und diskrete Zufallsvariablen

Erinnerung: Ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ist ein Tripel, wobei:

- $\Omega = \text{Ergebnisraum}$
- $\mathcal{A} = \{\omega \in \Omega\} = \text{die Menge von Ereignissen, denen wir eine Wahrscheinlichkeit zuordnen}$
- $P: \mathcal{A} \rightarrow [0,1], A \mapsto P(A) = \text{Wahrscheinlichkeitsmaß.}$

### Definition

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine **Zufallsvariable** ist eine Abbildung

$$X: \Omega \rightarrow W,$$

wobei  $W \subseteq \mathbb{R}$ . der **Wertebereich / Stichprobenraum** ist,  
so dass:  $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$  für  $a \in \mathbb{R}$  muss  $A \in \mathcal{A}$  erfüllen.

Idee: Zufallsvariablen modellieren Messungen von Ereignissen.

### Definition (endliche / diskrete Zufallsvariable)

Eine Zufallsvariable  $X$  heißt **endlich / diskret**, wenn  $X(\Omega)$  **endlich / diskret** ist.

## Beispiele

(1)  $\Omega = \{(w_1, w_2) \mid 1 \leq w_i \leq 6\}$ , der Ereignisraum für den zweifachen Würfelwurf. Die Augensummenzahl wird durch

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (w_1, w_2) \mapsto w_1 + w_2.$$

(2)  $\Omega = \{(w_1, w_2, w_3, w_4) \mid 1 \leq w_i \leq 6\}$ , der Ereignisraum für den vierfachen Würfelwurf. Betrachte die Zufallsvariable,

$$X(w_1, w_2, w_3, w_4) = \underbrace{\det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Verteilung ist} \\ \text{einfach}}} = w_1 w_4 - w_2 w_3$$

$\uparrow$                                      $\uparrow$   
Verteilung ist  
Kompliziert

Hier ist die Motivation für die Def. einer Zufallsvariable, dass sie uns eine komplizierte Verteilung mit Hilfe einer einfachen (nämlich der Verteilung von  $(w_1, \dots, w_4)$ ) beschreiben lässt.

## Definition (Verteilung einer Zufallsvariable)

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable. Sei  $A \subseteq \mathbb{W}$ , sodass  $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ . Wir nennen

$$P(X \in A) := P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$$

die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable  $X$ .

Notation:  $P_X(A) := P(X \in A)$

## Lemma

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X: \Omega \rightarrow W$  eine Zufallsvariable. Definiere:  $\mathcal{B} := \{A \subseteq W \mid X^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$ . Dann ist  $(W, \mathcal{B}, P_X)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Bemerkung Sei  $X$  eine endliche oder diskrete Zufallsvariable, so dass  $W = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ . Dann ist  $P_X$  vollständig charakterisiert durch Angabe:

$$P(X=a_i) := P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a_i\})$$

Beispiel Zweifacher Würfelwurf,  $X = \text{Summe der Augenzahlen}$   
 $P(X=2) = \text{Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme } = 2 \text{ ist.}$

Bemerkung Sei  $X$  eine endliche oder diskrete Zufallsvariable und  $A \subseteq W$ . Dann ist:  $P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{a_i \in A} P(X=a_i)$

- $\sum_{a \in W} P(X=a) = P(W) = 1$ .

Beispiel: Zweifacher Münzwurf :  $\Omega = \{(w_1, w_2) \mid w_1, w_2 \in \{Z, K\}\}$   
 $= \{(Z, Z), (K, K), (K, Z), (Z, K)\}$

$P = \text{Gleichverteilung auf } \Omega$

$X = \text{Anzahl der geworfenen Zahlen}$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow P(X=0) &= P(\{(K,K)\}) = \frac{1}{4} \\ P(X=1) &= P(\{(K,Z), (Z,K)\}) = \frac{1}{2} \\ P(X=2) &= P(\{(Z,Z)\}) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Beispiel Zweifacher Würfelspiel:  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 | 1 \leq \omega_i \leq 6\}$

$P$  = Gleichverteilung auf  $\Omega$

$X$  = Augensumme

$$\begin{aligned} P(X=i) &= \text{Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme } = i \text{ ist} \\ &= \frac{\#\{\omega_1, \omega_2 \in \Omega | X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 = i\}}{\#\Omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow P(X=2) &= \frac{1}{36}, \quad P(X=3) = \frac{1}{18}, \quad P(X=4) = \frac{1}{12}, \\ P(X=5) &= \frac{1}{9}, \quad P(X=6) = \frac{5}{36}, \quad P(X=7) = \frac{1}{6} \\ P(X=8) &= \frac{5}{36}, \quad P(X=9) = \frac{1}{9}, \quad P(X=10) = \frac{1}{12} \\ P(X=11) &= \frac{1}{18}, \quad P(X=12) = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Beispiel Werfe Würfel so lange, bis eine 6 kommt.

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \mid 1 \leq \omega_i \leq 6\}$$

$X$  = Anzahl Würfe, bis wir zum ersten Mal eine 6 werfen.

$\rightsquigarrow \{X=k\} = \text{Ergebnis, dass in den ersten } k-1 \text{ Würfen keine 6 fällt, und im } k\text{-ten eine 6.}$

$$\Rightarrow P(X=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$

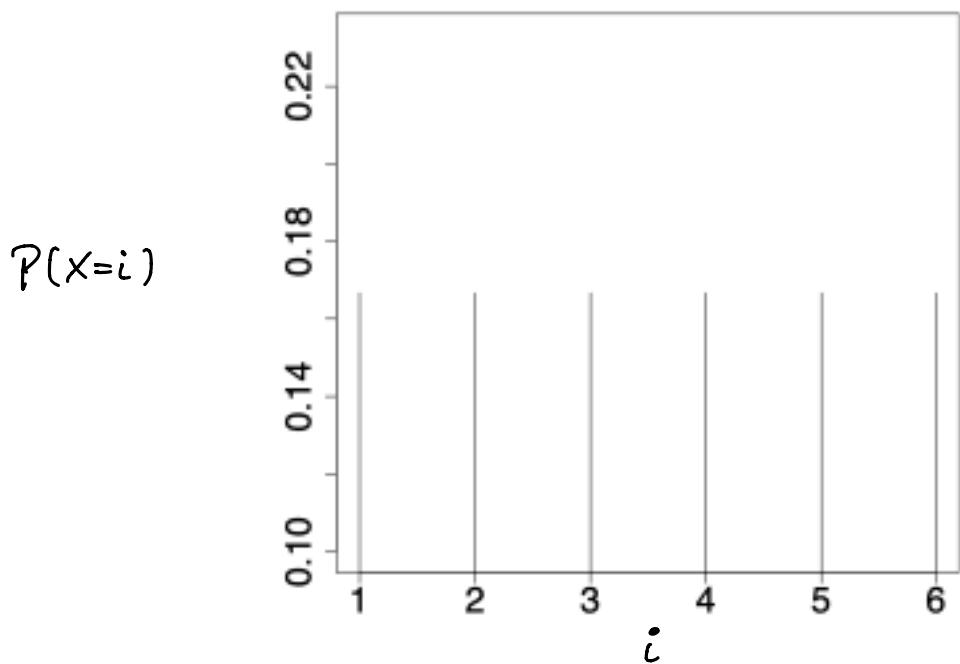
( $X$  heißt in diesem Fall **geometrisch verteilt** mit Parameter  $p = \frac{1}{6}$ )

### Wichtige diskrete Zufallsvariablen

#### 1. Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$

$$P(X=i) = \frac{1}{n} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}$$

In R: "runif" erzeugt Zufallszahlen der Gleichverteilung.  
"dunif" erzeugt die W-Funktion



Notation:  $X \sim \text{Unif}(\{1, \dots, n\})$   
 ↗ "hat die Verteilung"

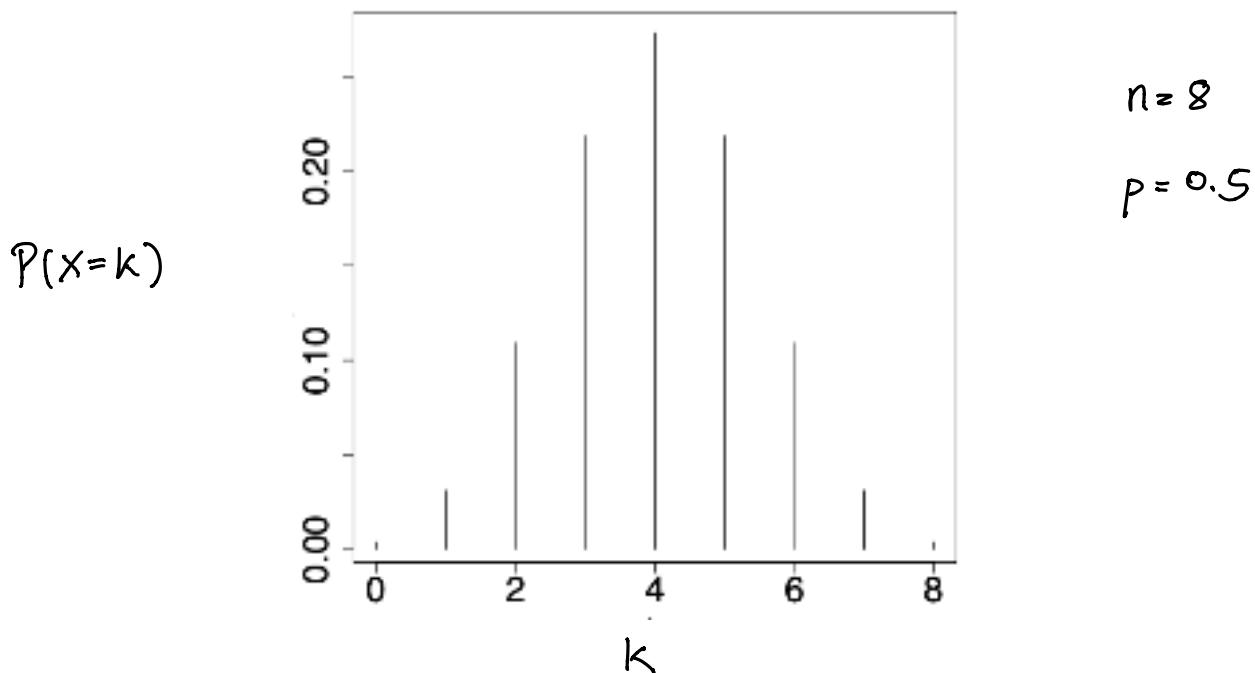
## 2. Binomialverteilung

Verteilung auf  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  mit  $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$  mit  $p \in [0, 1]$ . (die "Erfolgswahrscheinlichkeit").

$P(X=k)$  = die Wahrscheinlichkeit aus  $n$  Bernoulli-Experimenten (= Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ )  $k$  Erfolge zu erzielen.

In R:  
`rbinom`

`dbinom`



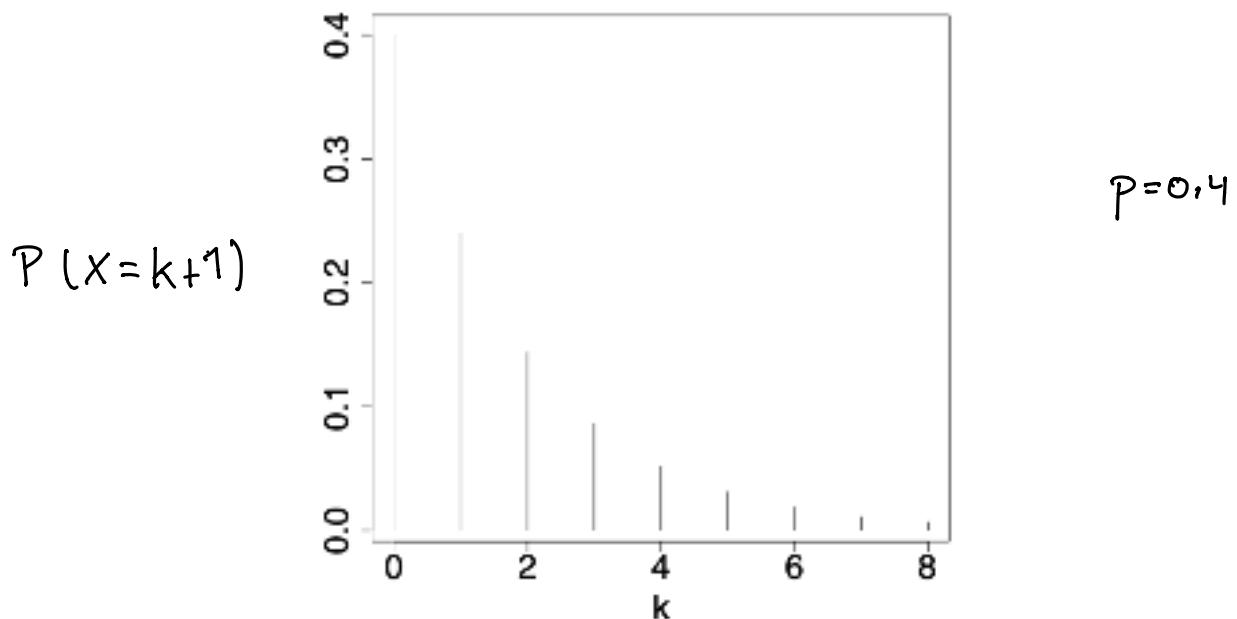
### 3. Geometrische Verteilung

Verteilung auf Wfso mit  $P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$ .

$X$  = Anzahl der Versuche von unabh. Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  bis zum ersten Mal ein Erfolg eintritt.

In R:  $rgeom$

$dgeom$



$$P = 0.4$$

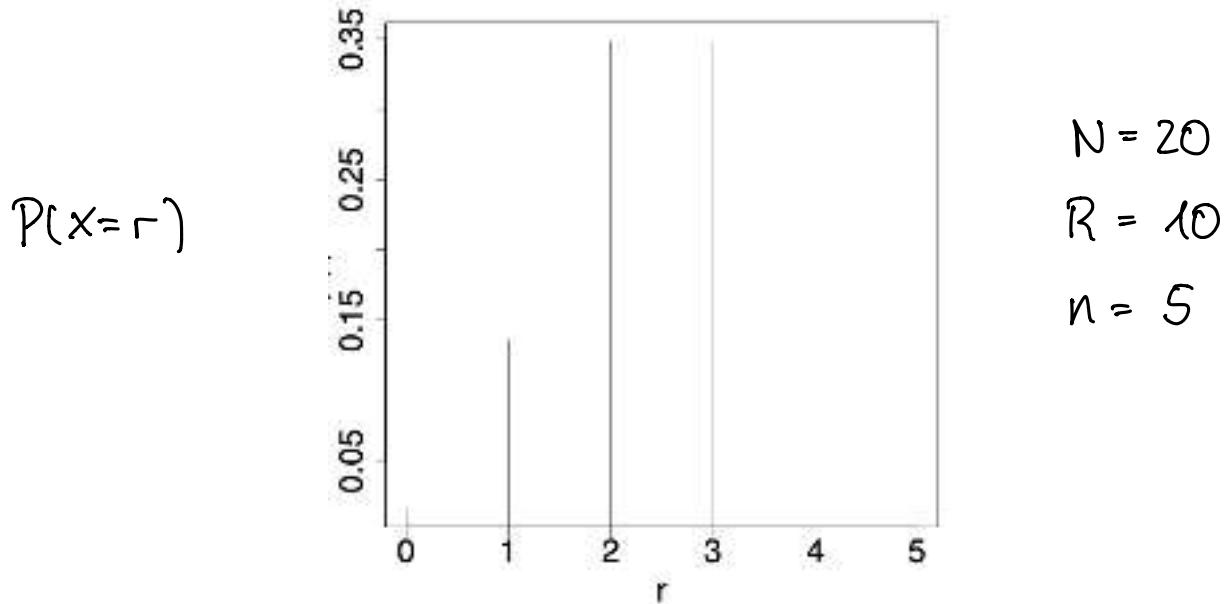
### 4. Hypergeometrische Verteilung

Verteilung auf Wfso mit Parametern  $N, R, n$ .

$$P(X=r) = \frac{\binom{R}{r} \cdot \binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

$X$  = die Anzahl der roten Kugeln beim Ziehen ohne Zurücklegen von  $n$  Kugeln aus  $R$  roten und  $N-R$  weißen Kugeln.

In R: dhyper  
rhyper.



$$\begin{aligned}N &= 20 \\R &= 10 \\n &= 5\end{aligned}$$

## 5. Poisson-Verteilung

Verteilung auf Anz. mit Parameter  $\lambda > 0$ :

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

z.B.:  $X$  = Anzahl radioaktiver Zerfälle in einem Zeitintervall bei Zerfallsrate  $\lambda$ .

In R: dpois  
rpois

