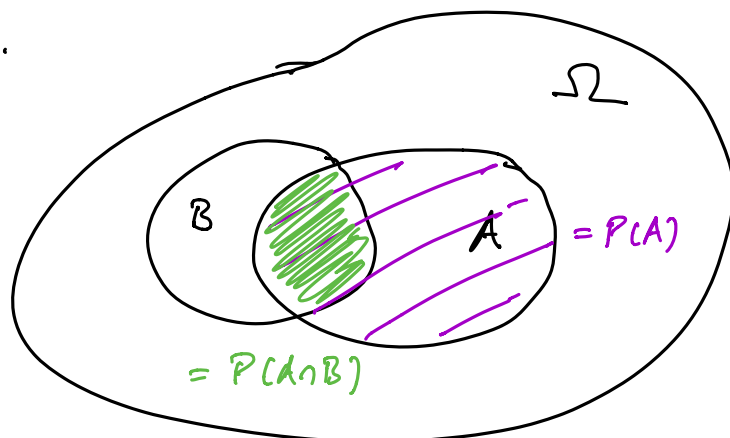


§6 Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

Motivation: Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$.

Venn-Diagramm:



$P(A)$ = Wahrscheinlichkeit von A

$P(B)$ = " " von B

$P(B|A) :=$ " " von B, falls A bereits eingetreten ist.

= " " von B, wenn A der neue Ereignisraum ist

(wenn A die Rolle von Ω eingenommen hat).

$P(B|A) \propto P(A \cap B)$
↑ "proportional zu".

Damit $P(A|A) = 1$, müssen wir P mit $\frac{1}{P(A)}$ skalieren.

Definition

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $P(B) > 0$. Dann heißt

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

Beispiel : Würfelnwurf: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2\}$ (= eine Zwei wird gewürfelt)

$B = \{2, 4, 6\}$ (= eine gerade Zahl wurde gewürfelt).

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

und $P(A) = \frac{1}{6}$

D.h. das Ereignis B macht A wahrscheinlicher. Falls eine gerade Zahl gewürfelt wird, ist es wahrscheinlicher eine Zwei zu würfeln als ohne diese Information.

Beispiel:

Corona-Impfstoff laut Biontech und Pfizer zu 90 Prozent wirksam

Ein mRNA-Impfstoff gegen das neuartige Coronavirus SARS-CoV-2 ist laut den Herstellern Biontech und Pfizer zu 90 Prozent wirksam. Die beiden Unternehmen haben die Ergebnisse einer Phase-3-Studie veröffentlicht. Der Impfstoff soll bereits in den nächsten Wochen in den USA zugelassen werden.

Zwei Forscher haben die Wirksamkeit des Impfstoffs nach einer Phase-3-Studie mit über 30.000 Probanden bestätigt. Die Studie fand in den USA statt. Die Teilnehmer wurden in zwei Gruppen eingeteilt: Eine Gruppe erhielt den Impfstoff, die andere Gruppe erhielt eine Placebo-Injektion. Nach 28 Tagen wurde festgestellt, dass 90 Prozent der geimpften Teilnehmer keine Anzeichen einer Infektion zeigten, während dies bei 10 Prozent der Placebo-Gruppe der Fall war.

Die Forscher betonten, dass der Impfstoff auch bei älteren Menschen und bei Personen, die zuvor bereits einmal infiziert wurden, wirksam ist. Die Studie wurde von der US-Regierung finanziert. Die Ergebnisse werden in der Fachzeitschrift 'The New England Journal of Medicine' veröffentlicht.

aerzteblatt.de

Home Archive News Themen D3 plus Politik Medizinal

SARS-CoV-2: Impfstoff von Biontech/Pfizer verhindert in Phase-3-Studie mehr als 90 % der bestätigten Infektionen

Knapp 40.000 Probanden haben zweite Dosis erhalten. Eine Zweitimpfung wurde am 9. November umfassen. 43.558 Teilnehmer, von denen 38.555 die zweite Dosis des Impfstoffs erhalten haben. Die Zwischenauswertung wurde nach Rücksprache mit der US-Arzneimittelbehörde FDA für den Zeitpunkt festgelegt, an dem 94 bestätigte Infektionen aufgetreten sind.

Nachher geht es um die Wirksamkeit des Impfstoffs. Die meisten Fälle im Abstand von der Studiezeitpunkt sind mit dem Impfstoff. Die Effektivität sei mehr als 90 %. Die Zahlen werden nicht gemacht. Angesichts der Teilnehmerzahl dürfte das Ergebnis jedoch signifikant sein.

$A = \{ \text{infizierte Personen} \}$

$B = \{ \text{geimpfte Personen} \}$

$$P(A) = \frac{94}{43538} \quad P(B) = \frac{38955}{43538} \quad P(A \cap B) = \frac{40}{43538}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{40/43538}{38955/43538} \approx 0.001$$

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} \approx 0.01$$

$$\Rightarrow \frac{P(A|B)}{P(A|B^c)} \approx \frac{0.001}{0.01} = 0.1 = 10\%$$

$$\Rightarrow P(A|B) \approx 10\% \cdot P(A|B^c)$$

(Die Wahrscheinlichkeit einer Infektion gegeben B ist 90% kleiner als gegeben B^c)

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ mit der Eigenschaft, dass die B_i eine Partition von Ω bilden:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n B_i, \quad \text{und} \quad B_i \cap B_j = \emptyset \text{ f\"ur } i \neq j.$$

Außerdem gelte $P(B_i) > 0$ für alle i . Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$

Satz von Bayes

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

mit $P(A), P(B) > 0$.

Beobachtung: $\frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(B)}$

$$\Rightarrow \text{Es gilt: } P(A|B) > P(A) \Leftrightarrow P(B|A) > P(B)$$

Wenn A das Ereignis B wahrscheinlicher macht, dann macht auch B das Ereignis A wahrscheinlicher.

Stochastische Unabhängigkeit

Idee: zwei Ereignisse A, B sollen **unabhängig** sein, wenn das Ereignis A die Wahrscheinlichkeit von B nicht beeinflusst.

$$\text{D.h. } P(B|A) = P(B)$$

$$\begin{aligned} \text{Da } P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ gilt: } P(B|A) = P(B) \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ &\Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \end{aligned}$$

Definition

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$.

Dann nennen wir A und B **stochastisch unabhängig**, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Beispiel 2-fache Würfelwurf. $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid 1 \leq \omega_1, \omega_2 \leq 6\}$

$A = \{ \text{im ersten Wurf eine 2} \}$, $B = \{ \text{im zweiten Wurf eine 2} \}$

$$A = \{ \omega_1 = 2 \}$$

$$B = \{ \omega_2 = 2 \}$$

Falls die Würfe unabhängig sind, dann sind A und B stochastisch unabhängig

$$\Rightarrow P(\{2,2\}) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Bemerkung Wenn A und B stochastisch unabhängig sind, sind auch

- A und B^c
- A^c und B
- A^c und B^c

stochastisch unabhängig.

Definition

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Dann heißen die A_i

(1) paarweise stoch. unabhängig, falls

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) P(A_j) \quad \text{für alle } i \neq j$$

gilt.

(2) gemeinsam stoch. unabhängig, falls

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$$

für alle Wahlen von Indizes $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

((2) impliziert (1), aber im Allgemeinen gilt die Rückrichtung nicht).

Binomialverteilung

Ein wichtiges Beispiel im Kontext von stochastischer Unabhängigkeit ist die **Binomialverteilung**.

Idee: wir modellieren n unabhängige Zufallsexperimente mit Ausgang in $\{0,1\}$. D.h., falls ω_i das i -te Experiment beschreibt, dann
 $\omega_i = 0$ oder $\omega_i = 1$.

Für die Binomialverteilung nimmt man an, dass

$$P(\{\omega_1 = 0\}) = P(\{\omega_2 = 0\}) = \dots = P(\{\omega_n = 0\}) = p.$$

für ein $0 \leq p \leq 1$.

Wegen der stoch. Unabhängigkeit gilt:

$$P(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) = p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \text{ wobei} \\ k = \#\{i \mid \omega_i = 0\}$$

Insbesondere gilt: $P(\{\text{genau } k \text{ der } \omega_i = 0 \text{ sind}\})$
 $= \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$