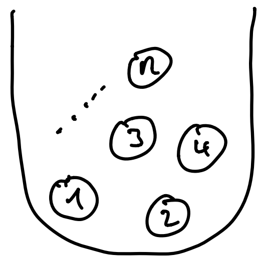
§ 5. Das Urnenmodell

Erinnerung: Sei Ω ein endlicher Ereignisraum. Dann ist die Gleichverteilung auf Ω definiert durch

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega} \quad \text{für } \omega \in \Omega.$$

Setting: Betrachte eine Urne. In dieser Urne befinden sich n Kugeln.



Das Zufallsexperiment im Urnenmodell besteht darin zufällig k Kugeln aus der Urne zu ziehen.

Dabei nehmen wir an, dass jede Kugel die gleiche Wahrscheinlichkeit hat gezogen zu werden.

Beobachtung: Wenn $k=1$: $P(\{\text{Kugel } i \text{ wird gezogen}\}) = \frac{1}{n}$

Frage: Was passiert für $k>1$?

Es gibt verschiedene Möglichkeiten den Fall $k>1$ zu modellieren.

<u>Möglichkeiten</u>: (1) mit oder ohne Zurücklegen
($\leadsto$ ist zweimal die 1 ziehen möglich?)

(2) mit oder ohne Beachtung der Reihenfolge
($\leadsto$ sind die Züge (1,2) und (2,1) gleich zu betrachten oder nicht?)

"erst 2 ziehen, dann 1 ziehen"

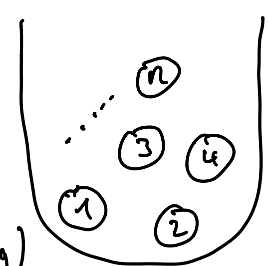
$\leadsto$ Insgesamt 4 Möglichkeiten,

		Beachtung der Reihenfolge:	
	/	mit	ohne
Zurücklegen	mit	$\Omega_{mZ,mR}$	$\Omega_{mZ,oR}$
	ohne	$\Omega_{oZ,mR}$	$\Omega_{oZ,oR}$

Um die jeweiligen Gleichverteilungen zu berechnen, reicht es aus die Anzahl der Elemente in den vier Ereignisräumen zu bestimmen.

1. Mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

Hier ziehen wir k Kugeln aus der Urne, wobei wir nach jedem Zug die Kugel zurücklegen.



(w_i = nummer der Kugel im i-ten Zug)

$\leadsto \Omega_{mZ,mR} = \{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_k) \mid 1 \le \omega_i \le n \text{ für alle } i \}$

$\rightsquigarrow \# \Omega_{MZ,mR} = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$

<u>Beispiel</u>: 4-maliger Würfelwurf: $\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid 1 \leq \omega_i \leq 6 \}$

$\Rightarrow P(\{\text{"4 mal 6 zu würfeln"}\}) = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296} \approx 0.0008$

2. Ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

Wenn wir eine Kugel gezogen haben, können wir sie im nächsten Zug nicht mehr ziehen.

$\rightsquigarrow \Omega_{oZ,mR} = \{ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k) \mid 1 \leq \omega_i \leq n$ für alle i, und $\omega_i \neq \omega_j$ für $i \neq j \}$.

$\Rightarrow \# \Omega_{oZ,mR} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k\text{-Faktoren}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

<u>Beispiel</u>: 10 Personen sollen auf 10 Stühlen sitzen.

$\rightsquigarrow \# \Omega = \frac{10!}{(10-10)!} = 10! = 3\,628\,800$.

3. Ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge.

Ohne Beachtung der Reihenfolge heißt, dass die Vektoren (wenn ich wieder Vektoren benutze, um Züge zu modellieren) $(1,2)$ und $(2,1)$ als gleich betrachtet werden. Was zählt die Menge $\{1,2\}$.

$\rightsquigarrow \Omega_{OZ,OR} = \{ \omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\} \mid 1 \leq \omega_i \leq n, \; \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j \}$.

$$\Rightarrow \# \Omega_{OZ,OR} \cdot \underbrace{\# \begin{matrix}\text{Möglichkeiten} \\ \omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\} \\ \text{anzuordnen}\end{matrix}}_{} = \# \Omega_{OZ,MR} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$= k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = k!$$

$$\Rightarrow \# \Omega_{OZ,OR} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} \longleftarrow \text{heißt Binomialkoeffizient}$$

<u>Bemerkung</u> $\binom{n}{k}$ = Anzahl der k-elementigen Teilmengen in einer n-elementigen Teilmenge.

<u>Beispiel</u>: Lotto "6 aus 49"

$\rightarrow \# \Omega = \binom{49}{6} = 13\,983\,816.$

4. Mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

In diesem Modell kann ich Kugeln mehrfach ziehen (weil <u>mit</u> Zurücklegen), aber die Reihenfolge soll nicht beachtet werden.

$$\rightarrow \Omega_{MZ,OR} = \{ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \mid \omega_i = \# \text{ der Züge in denen Kugel } i \text{ gezogen wurde} \}$$
$$= \{ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \mid 0 \leq \omega_i \leq k \text{ und } \omega_1 + \cdots + \omega_n = k \}$$

Für jedes $\omega \in \Omega_{MZ,OR}$ erstelle ich ein Diagramm:

<u>Beispiel</u>: $\omega = (2,4,1)$. Dann ist das Diagramm:

$$11 \mid 2222 \mid 3$$

oder: $\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet\bullet \mid \bullet$

$\omega = (2,0,1)$

$\rightsquigarrow$

$\bullet\bullet \mid \mid \bullet$

Allgemein: für $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \rightsquigarrow \underbrace{\bullet\bullet \dots \bullet}_{\omega_1 \text{ Punkte}} \mid \underbrace{\bullet\bullet \dots \bullet}_{\omega_2 \text{ Punkte}} \mid \dots \mid \underbrace{\bullet\bullet \dots \bullet\bullet\bullet}_{\omega_n \text{ Punkte.}}$

$\Rightarrow \# \Omega_{MZ,OR} = \#$ der Diagramme.

Jedes Diagramm besteht aus $n+k-1$ Symbolen. (k Punkte $\bullet$ und $n-1$ Striche $\mid$)

$\#$ Diagramme $= \#$ Möglichkeiten aus $n+k-1$ Symbolen $n-1$ auszuwählen, die Striche sein sollen.

$= \#$ $(n-1)$-elementigen Teilmengen in einer $n+k-1$ elementigen Teilmenge.

$$= \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$\Rightarrow \# \Omega_{MZ,OR} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Anwendung: Geburtstagsparadox.

Frage: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in eine Gruppe von m Personen, 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.

Annahme: $P(\{\text{Person } i \text{ am Tag } x \text{ Geburtstag}\}) = \frac{1}{365}$, also wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine feste Person an einem bestimmten Tag Geburtstag hat gleichverteilt.

Antwort für $m = 23$ ist die Wahrscheinlichkeit $\geq 50\%$.

Allgemeine Antwort

$P(\{2 \text{ Personen haben am gleichen Tag Geburtstag}\})$

$= 1 - P(\{\text{alle Personen haben an verschiedenen Tagen Geburtstag}\})$

$$= 1 - \frac{\#\text{ Möglichkeiten } 365 \text{ Tage auf } m \text{ Personen zu verteilen ohne Zurücklegen}}{\#\text{ Möglichkeiten } 365 \text{ Tage auf } m \text{ Personen zu verteilen.}}$$

$$= 1 - \frac{365!}{(365-m)!} \cdot \frac{1}{365^m} = p(m).$$