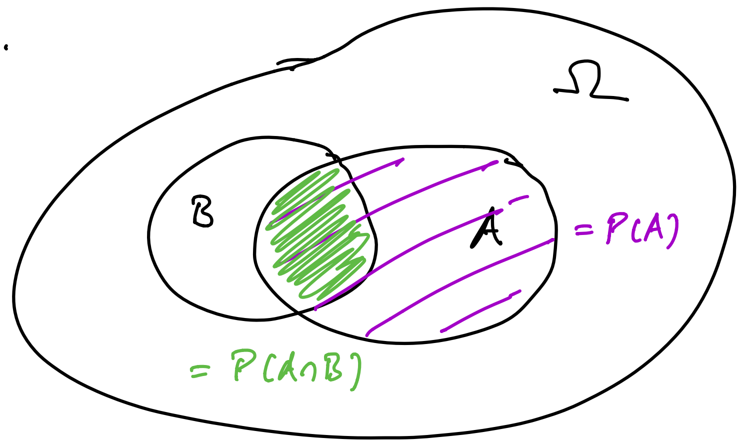
§6 Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

Motivation: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$.

Venn-Diagramm:



$P(A)$ = Wahrscheinlichkeit von A

$P(B)$ = — " — von B

$P(B|A) :=$ — " — von B, falls A bereits eingetreten ist.

$=$ — " — von B, wenn A der neue Ereignisraum ist (wenn A die Rolle von Ω eingenommen hat).

$P(B|A) \propto P(A \cap B)$

└ "proportional zu".

Damit $P(A|A) = 1$, müssen wir P mit $\frac{1}{P(A)}$ skalieren.

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $P(B) > 0$. Dann heißt

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

Beispiel: Würfelwurf: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{2\}$ (= eine Zwei wird gewürfelt)

$B = \{2,4,6\}$ (= eine gerade Zahl wurde gewürfelt).

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = 1/3$$

und $P(A) = 1/6$

D.h. das Ereignis B macht A wahrscheinlicher. Falls eine gerade Zahl gewürfelt wird, ist es wahrscheinlicher eine Zwei zu würfeln als ohne diese Information.

Beispiel:

DW Made for minds.

THEMEN MEDIA CENTER TV DEUTSCH LERNEN

Corona-Impfstoff laut Biontech und Pfizer zu 90 Prozent wirksam

[illegible]

aerzteblatt.de

Home Archiv News Themen DÄ plus Politik Medizin

SARS-CoV-2: Impfstoff von Biontech/Pfizer verhindert in Phase-3-Studie mehr als 90 % der bestätigten Infektionen

Knapp 40.000 Probanden haben zweite Dosis erhalten

[illegible]

$A = \{$infizierte Personen$\}$

$B = \{$geimpfte Personen$\}$

$$P(A) = \frac{94}{43538} \qquad P(B) = \frac{38955}{43538} \qquad P(A \cap B) = \frac{40}{43538}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{40/43538}{38955/43538} \approx 0.001$$

$$P(A \mid B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} \approx 0.01$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \mid B)}{P(A \mid B^c)} \approx \frac{0.001}{0.01} = 0.1 = 10\%$$

$$\Rightarrow P(A \mid B) \approx 10\% \cdot P(A \mid B^c)$$

(Die Wahrscheinlichkeit einer Infektion gegeben B ist 90% kleiner als gegeben B^c).

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ mit der Eigenschaft, dass die B_i eine Partition von Ω bilden:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \qquad \text{und} \qquad B_i \cap B_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Ausserdem gelte $P(B_i) > 0$ für alle i. Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i).$$

Satz von Bayes

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $P(A), P(B) > 0$. Dann gilt:

$$P(A \mid B) = P(B \mid A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

Beobachtung: $\frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(B)}$

$\Rightarrow$ Es gilt: $P(A|B) > P(A) \iff P(B|A) > P(B)$

Wenn A das Ereignis B wahrscheinlicher macht, dann macht auch B das Ereignis A wahrscheinlicher.

Stochastische Unabhängigkeit

Idee: zwei Ereignisse A, B sollen unabhängig sein, wenn das Ereignis A die Wahrscheinlichkeit von B nicht beeinflusst.

D.h. $P(B|A) = P(B)$

Da $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$, gilt:

$$P(B|A) = P(B)$$
$$\iff P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$
$$\iff P(A|B) = P(A)$$

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$.

Dann nennen wir A und B stochastisch unabhängig, wenn

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B).$$

Beispiel 2-fache Würfelwurf. $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid 1 \le \omega_1, \omega_2 \le 6\}$

$A = \{$ im ersten Wurf eine 2 $\}$, $B = \{$ im zweiten Wurf eine 2 $\}$

$A = \{\omega_1 = 2\}$ $\qquad$ $B = \{\omega_2 = 2\}$

Falls die Würfe unabhängig sind, dann sind A und B stochastisch unabhängig

$$\Rightarrow P\{(2,2)\} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Bemerkung Wenn A und B stochastisch unabhängig sind, sind auch

- A und B^C
- A^C und B
- A^C und B^C

stochastisch unabhängig.

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Dann heißen die A_i

(1) paarweise stoch. unabhängig, falls
$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) P(A_j) \quad \text{für alle } i \neq j$$
gilt.

(2) gemeinsam stoch. unabhängig, falls
$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$
für alle Wahlen von Indizes $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$.

((2) impliziert (1), aber im Allgemeinen gilt die Rückrichtung nicht).

Binomialverteilung

Ein wichtiges Beispiel im Kontext von stochastischer Unabhängigkeit ist die Binomialverteilung.

Idee: wir modellieren n unabhängige Zufallsexperimente mit Ausgang in $\{0,1\}$. D.h., falls ω_i das i-te Experiment beschreibt, dann

$$\omega_i = 0 \quad \text{oder} \quad \omega_i = 1.$$

Für die Binomialverteilung nimmt man an, dass

$$P(\{\omega_1 = 0\}) = P(\{\omega_2 = 0\}) = \dots = P(\{\omega_n = 0\}) = p.$$

für ein $0 \leq p \leq 1$.

Wegen der stoch. Unabhängigkeit gilt:

$$P(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) = p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad , \text{wobei}$$
$$k = \#\{i \mid \omega_i = 0\}$$

Insbesondere gilt: $P(\{\text{genau } k \text{ der } \omega_i = 0 \text{ sind}\})$
$$= \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$