



FACULTAD DE INGENIERIA

Universidad de Buenos Aires

TRABAJO PRÁCTICO II
INTERPOLACIÓN EN BASE A PUERTO ATALAYA

[75.12] Análisis Numérico
Junio 2019
(Individual)

Pablo Berrotarán 98446 berrotaran.p@gmail.com

Índice

1. Consignas	2
2. Introducción	3
2.1. Objetivos	3
3. Desarrollo	4
3.1. Interpolación de datos	4
3.2. Interpolación por Mínimos Cuadrados	4
3.2.1. Análisis preliminar de los datos	4
3.2.2. Cálculo del Error Cuadrático Medio	5
3.3. interpolación mediante minimización del gradiente	5
3.3.1. Obtención de los parámetros que minimizan el error cuadrático medio mediante el gradiente	5
3.3.2. Resolución del sistema de ecuaciones	6
3.3.3. Aproximación de la próxima pleamar	7
4. Resultados	8
5. Conclusiones	8
6. Apéndice	9
6.1. Código para la interpolación por cuadrador mínimos	9
6.2. Código para la obtención del error cuadrático medio	9
6.3. Código para la minimización del error cuadrático medio por el gradiente	10
6.4. Código para predecir la pleamar del mes de Junio	13
6.5. Derivación de $\nabla G = 0$ para obtener los elementos del jacobiano	13

1. Consignas

Vamos a buscar un modelo aproximado para predecir mareas en uno de los puertos de la costa Argentina. Los datos se obtendrán de la página:

http://www.hidro.gob.ar/oceanografia/Tmareas/Form_Tmareas.asp

Cada grupo elegirá un puerto patrón diferente, eligiendo entre los disponibles en dicha página (informe el puerto elegido en el foro correspondiente en el campus; edite el asunto de la siguiente forma: nombre del puerto - apellido de cada integrante). Tome los datos completos de los meses de Abril y Mayo. Puede expresarlos en otra escala si lo considera más conveniente. Se comprobará si el modelo que figura en la guía para el Mar del Norte es aplicable. Es decir:

$$H(t) = h_0 + a_1 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t}{P_1}\right) + a_2 \cdot \text{cos}\left(\frac{2\pi \cdot t}{P_2}\right)$$

Para ello:

- I. Primero, estudie si el período de 12 hs. es válido (es decir, si es razonable suponer $P_1 = P_2 = 12$), si no, proponga un mejor valor obtenido a partir de la inspección de los datos y explique el criterio utilizado; luego estime por cuadrados mínimos los otros 3 parámetros. Halle el ECM.
- II. Obtenga los cinco parámetros sin realizar suposiciones sobre P_i ; para ello, minimice la condición $\sum_{i=1}^n (y_i - H(x_i))^2$. Resuelva el conjunto de ecuaciones no lineales que quedan planteadas por el método de Newton-Raphson. Sugerencia: Utilice como solución inicial los valores obtenidos en el punto anterior. Halle el ECM.
- III. Use cada modelo para intentar predecir la hora y altura de la primer pleamar de Junio, proponga una estrategia razonable (puede comparar con el valor dado en la página web; ¿hay alguna semejanza?)



Figura 1: Puerto Atalaya

2. Introducción

En el presente informe, se detallará cómo se utilizaron los conceptos de interpolación vistos en clase para ajustar y predecir en base a un set de datos obtenido a partir de un caso real. Para ello, se obtuvieron mediciones del nivel del mar para los meses de Abril y Mayo en el puerto de Atalaya; estas mediciones se realizaron con un espacio de aproximadamente seis horas entre medición y medición, contando así con un total de 236 puntos (tiempo, amplitud) a interpolar.

Con los datos disponibles, se realizarán dos modelos de ajuste; primero desarrollando interpolación por mínimos cuadrados como se vió en clase y luego encontrando los parámetros que minimizan la función de error cuadrático medio. Se buscará comparar ambos métodos; con este objetivo, se analizará cuál ajusta mejor a los datos disponibles así como cuál resulta más preciso para intentar predecir los datos del mes siguiente. Se utilizarán los modelos obtenidos para predecir en qué momento será y qué amplitud tendrá la pleamar del mes de Junio.

La implementación del código escrito para resolver estos problemas estará incluida al final del presente informe, y fué escrita usando el entorno GNU Octave.

2.1. Objetivos

En base a la realización del trabajo práctico, se pretende ganar un mejor entendimiento de los métodos de interpolación aplicados a grandes conjuntos de datos, así como de los métodos numéricos involucrados en la resolución del problema. Además, debido a la escala de la información con la que se trabaja, resulta imposible llevar a cabo los cálculos sin la asistencia de un programa que automatice estos métodos. Es por esto que resulta también de gran utilidad usar los conocimientos impartidos en clase para producir un algoritmo que conduzca el grueso de los cálculos necesarios para llegar a una solución. La implementación de estos algoritmos brindará no sólo una oportunidad para solidificar los conocimientos sobre interpolación y resolución iterativa de sistemas de ecuaciones no lineales, si no también de familiarización con los entornos de computo numérico como ser Matlab y GNU Octave.

3. Desarrollo

3.1. Interpolación de datos

Un problema numérico particularmente útil de saber resolver es aquel de interpolación de funciones. Es decir, teniendo un set de datos (x, y) obtener una función que mejor modele los puntos conocidos. En este caso, se propone interpolar las mediciones con una función del tipo

$$H(t) = h_0 + a_1 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t}{P_1}\right) + a_2 \cdot \text{cos}\left(\frac{2\pi \cdot t}{P_2}\right)$$

Para interpolar los datos, será necesario encontrar aquellos valores h_0 , a_1 y a_2 que logren que la función en cuestión pase lo más cerca posible de los puntos conocidos. Es claro que al contar con un gran número de puntos medidos y tan sólo cinco parámetros, se trata de un sistema sobredeterminado, por lo que será imposible ajustar exactamente los puntos con una sola función a menos que los mismos resultaran de la función usada, lo cuál casi seguramente no es el caso ya que se trata de un problema físico del mundo real.

3.2. Interpolación por Mínimos Cuadrados

La interpolación por Mínimos Cuadrados es un método extremadamente común en la resolución de sistemas sobredeterminados. Para poder realizar estimaciones mediante Mínimos Cuadrados, debe contarse con una función a interpolar de la forma

$$f^*(t) = \sum_{i=0}^n c_i \cdot \phi_i(t)$$

De esta forma, se busca la solución mínima para el error cuadrático medio, definido como

$$\|f^*(t) - f(t)\| = \sum_{i=1}^n |f^*(t_i) - f(t_i)|^2$$

Esta expresión tiene mínimos en el caso de funciones $\phi_i(t)$ que corresponden a los soluciones del sistema

$$\sum_{i=1}^n (\phi_i(t) \cdot \phi_k(t)) \cdot c_i = (f, \phi_k(t))$$

Sin embargo, para poder usar $\phi_0 = 1, \phi_1 = \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t}{P_1}\right), \phi_2 = \text{cos}\left(\frac{2\pi \cdot t}{P_2}\right)$ es necesario asumir que $P_1 = P_2 = \text{cte.}$

3.2.1. Análisis preliminar de los datos

Se observaron los datos publicados para Abril y Mayo por el Servicio de Hidrografía Naval disponibles en http://www.hidro.gob.ar/oceanografia/Tmareas/Form_Tmareas.asp. Los datos publicados consisten de 236 mediciones en formato (HORA:MIN, ALTURA), con mediciones llevadas a cabo cada aproximadamente seis horas. Es importante notar que las mediciones presentes en la tabla corresponden a aquellas en que la marea alcanzó máximos y mínimos locales. Con el fin de obtener una función continua a interpolar, se cambió la escala de las mediciones de modo que el tiempo sea monótonamente creciente en un eje continuo, y se observó una coincidencia de los valores pico y los valores valle de las mediciones cada aproximadamente 12 horas, con máximos locales de alrededor de 01.10m a las 01:00hs y a las 13:00hs, y mínimos locales de alrededor de 00.60m a las 7:00hs y 19:00hs. Estos valores, sin embargo, presentan un desplazamiento de los picos a medida que transcurre el tiempo; además de que al interpolar con $P_1 = P_2 = 12$ se obtiene un error cuadrático medio muy alto. Evaluando el promedio de las distancias entre un número n de puntos picos en un intervalo cualquiera de los datos, se encontró una mucho mejor suposición de partide en $P_1 = P_2 = 12,975hs$

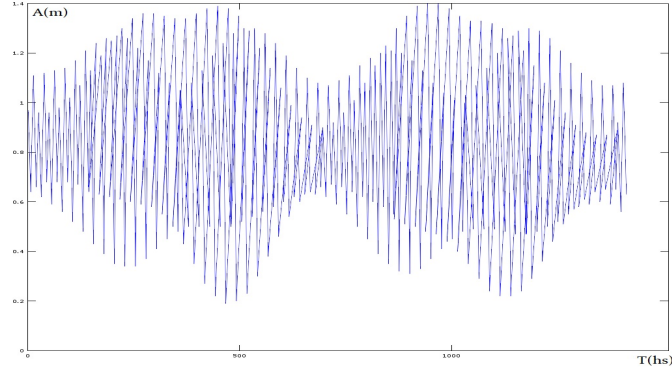


Figura 2: Pleamares y bajamares del set de datos

3.2.2. Cálculo del Error Cuadrático Medio

Con los valores h_0, a_1, a_2 obtenidos, se calcula el error cuadrático medio con su definición:

$$EMC = \sum_{i=1}^n (h_0 + a_1 \sin(\frac{2\pi \cdot t_i}{12}) + a_2 \cos(\frac{2\pi \cdot t_i}{12}) - y_i)^2$$

Calculando la altura esperada en base a la interpolación punto a punto y comparandola con las alturas reales de la marea en ese punto de tiempo.

3.3. interpolación mediante minimización del gradiente

Si en el momento de interpolar no se considera que $P_1 = P_2 = 12$, si no que se toman los periodos de las ondas de seno y coseno como sus propios parámetros de la función de interpolación, puede obtenerse el valor del error cuadrático medio según la expresión:

$$\sum_{i=1}^n (H(h_0, a_1, a_2, P_1, P_2, t_i) - y_i)^2 = G(h_0, a_1, a_2, P_1, P_2)$$

Entonces, encontrando los valores de h_0, a_1, a_2, P_1, P_2 que minimicen $G(h_0, a_1, a_2, P_1, P_2)$, se habrá hallado el mínimo error cuadrático medio para una interpolación del tipo $h_0 + a_1 \sin(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}) + a_2 \cos(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2})$. Será posible hallar h_0, a_1, a_2, P_1, P_2 tales que $G(h_0, a_1, a_2, P_1, P_2)$ sea mínimo si se hallan los valores en los que $\nabla G(h_0, a_1, a_2, P_1, P_2) = 0$ con:

$$\frac{\partial G(h_0, a_1, a_2, P_1, P_2)}{\partial \alpha} = 2 \cdot (\sum_{i=1}^n h_0 + a_1 \sin(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}) + a_2 \cos(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2})) \cdot \frac{\partial \phi(h_0, a_1, a_2, P_1, P_2)}{\alpha}$$

$$\text{Donde } \phi(h_0, a_1, a_2, P_1, P_2) = h_0 + a_1 \sin(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}) + a_2 \cos(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}) - \sum_{i=1}^n y_i$$

3.3.1. Obtención de los parámetros que minimizan el error cuadrático medio mediante el gradiente

Desarrollando las derivadas parciales de $G(h_0, a_1, a_2, P_1, P_2)$, se llega al siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} 2 \cdot \sum_{i=1}^n \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right) \cdot (h_0 + a_1 \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right) - \sum_{i=1}^n y_i) = 0 \\ 2n \cdot (h_0 + a_1 \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right) - \sum_{i=1}^n y_i) = 0 \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right) \cdot (h_0 + a_1 \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right) - \sum_{i=1}^n y_i) = 0 \\ 2 \cdot \frac{-2a_1\pi \cdot (\sum_{i=1}^n t_i \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right))}{P_1} \cdot (h_0 + a_1 \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right) - \sum_{i=1}^n y_i) = 0 \\ 2 \cdot \frac{2\pi a_2 (\sum_{i=1}^n t_i \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right))}{P_2^2} \cdot (h_0 + a_1 \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right) - \sum_{i=1}^n y_i) = 0 \end{cases}$$

3.3.2. Resolución del sistema de ecuaciones

Con el sistema de ecuaciones resultante, pueden hallarse los parámetros que minimizan el gradiente. Sin embargo, el despeje de $(H_0, a_1, a_2, P_1, P_2)$ no resulta un problema trivial. Para resolverlo, será necesario implementar mediante código un método numérico acorde. Un método útil para la resolución de ecuaciones no lineales es el de *Newton-Raphson*, que por ser un algoritmo iterativo se puede trasladar a código fácilmente.

El método de *Newton-Raphson* dice que:

$$x_{k+1} = x_k - J^{-1}(\nabla G(H_0, a_1, a_2, P_1, P_2)) \cdot \nabla G(H_0, a_1, a_2, P_1, P_2)$$

Donde $J^{-1}(\nabla G(H_0, a_1, a_2, P_1, P_2))$ es la inversa del Jacobiano de $(\nabla G(H_0, a_1, a_2, P_1, P_2))$, y el Jacobiano de $(\nabla G(H_0, a_1, a_2, P_1, P_2))$ se define como:

$$J(\nabla G(H_0, a_1, a_2, P_1, P_2)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h_0} & \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \frac{\partial f_1}{\partial P_1} & \frac{\partial f_1}{\partial P_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_0} & \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & \frac{\partial f_2}{\partial P_1} & \frac{\partial f_2}{\partial P_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial h_0} & \frac{\partial f_3}{\partial a_1} & \frac{\partial f_3}{\partial a_2} & \frac{\partial f_3}{\partial P_1} & \frac{\partial f_3}{\partial P_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial h_0} & \frac{\partial f_4}{\partial a_1} & \frac{\partial f_4}{\partial a_2} & \frac{\partial f_4}{\partial P_1} & \frac{\partial f_4}{\partial P_2} \\ \frac{\partial f_5}{\partial h_0} & \frac{\partial f_5}{\partial a_1} & \frac{\partial f_5}{\partial a_2} & \frac{\partial f_5}{\partial P_1} & \frac{\partial f_5}{\partial P_2} \end{bmatrix}$$

Para comenzar a iterar sobre el método de Newton-Raphson, se usó como semilla el resultado obtenido de aplicar mínimos cuadrados asumiendo $P_1 = P_2 = 12$. Para la condición de corte, se eligió $\|x_{k+1} - x_k\|_{\infty} \leq 10^{-8}$

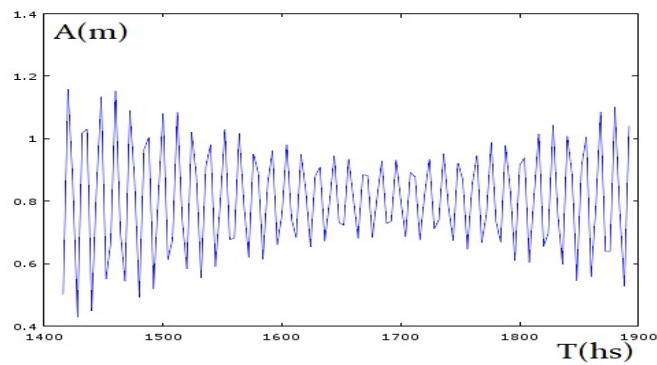


Figura 3: Pleamares y bajamares estimados

3.3.3. Aproximación de la próxima pleamar

Con los parámetros hallados, es posible estimar el comportamiento de la marea en días futuros realizando un trabajo de extrapolación. Tal es el caso con las horas de las pleamares, que se pueden interpretar como los máximos y mínimos locales de la función altura.

Solo será necesario para hayar la fecha de la primera pleamar de Junio encontrar el primer máximo local en el gráfico de la función $f^*(t)$ siendo t los puntos horarios de ese mes.

4. Resultados

- Acorde a mínimos cuadrados: $f^*(t_i) = 0,77690 + 1,46284 \cdot \text{sen}(\frac{2\pi \cdot t_i}{12,975}) - 1,47580 \cdot \text{cos}(\frac{2\pi \cdot t_i}{12,975})$
- El error cuadrático medio por mínimos cuadrados: $\|f^*(t) - f(t)\| = 1,5045$
- Encontrando los mínimos de $\sum_{i=1}^n (H(h_0, a_1, a_2, P_1, P_2, t_i) - y_i)^2$, $f^*(t_i) = 0,80783 + 1,46284 \cdot \text{sen}(\frac{2\pi \cdot t_i}{12,976}) - 1,59109 \cdot \text{cos}(\frac{2\pi \cdot t_i}{13})$
- El error cuadrático medio minimizando la función del error cuadrático: $\|f^*(t) - f(t)\| = 1,0677$
- La hora y altura de la marea predicha en el momento de la pleamar será (1420.1500, 1.1585), que equivale al 1 de Junio, a aproximadamente las 13:00hs

5. Conclusiones

Logró ajustarse el set de datos a una función con el tipo $H(t) = h_0 + a_1 \cdot \text{sen}(\frac{2\pi \cdot t}{P_1}) + a_2 \cdot \text{cos}(\frac{2\pi \cdot t}{P_2})$ usando el método de mínimos cuadrados. Tras minimizar la expresión del error, se llegó a resultados muy similares que con los previamente obtenidos, necesitando pocas iteraciones sobre la semilla tomada para conseguir $\nabla G(h_0, a_1, a_2, P_1, P_2) = 0$.

Al evaluar las dos expresiones en base a sus errores cuadráticos medios, se obtuvo el mismo valor dado que ambas llegaron a parámetros similares. Sin embargo, a pesar de tratarse de un error cuadrático medio muy elevado respecto a los valores de las mediciones, se pudo predecir con un desfazaje de menos de seis horas la pleamar del mes de Junio, pudiendose confirmar que se trata de una predicción correcta mirando los datos disponibles del mes de Junio.

Durante el desarrollo del trabajo práctico, pudo apreciarse la importancia de cuadrados mínimos para la resolución de problemas numéricos sobredeterminados, así como de los métodos iterativos para resolver de forma computacional sistemas de ecuaciones muy complejos como resultó ser el problema de $\nabla G(h_0, a_1, a_2, P_1, P_2) = 0$.

6. Apéndice

6.1. Código para la interpolación por cuadrador mínimos

```
disp("Running...")
clear;

function x_sistema = minimos_cuadrados(x, y)
    phi_0 = ones(length(x), 1)';
    phi_1 = sin(2*pi.*x./12);
    phi_2 = cos(2*pi.*x./12);

    pi00 = phi_0 * phi_0';
    pi01 = phi_0 * phi_1';
    pi02 = phi_0 * phi_2';
    pi11 = phi_1 * phi_1';
    pi12 = phi_1 * phi_2';
    pi22 = phi_2 * phi_2';

    pif0 = phi_0 * y';
    pif1 = phi_1 * y';
    pif2 = phi_2 * y';

    A_sistema = [pi00, pi01, pi02; pi01, pi12, pi22; pi02, pi12, pi22]';
    b_sistema = [pif0, pif1, pif2]';

    x_sistema = A_sistema\b_sistema;
endfunction
```

6.2. Código para la obtención del error cuadrático medio

```
function ECM = calcular_ECM(x, y, parametros)
    ECM = 0;
    for i = 1:size(y');
        ECM_i = (y(i) - aproximar_y(x, i, parametros))^2;
        ECM = ECM + ECM_i;
    endfor
endfunction

function y = aproximar_y(x, i, parametros)
    a0 = parametros(1);
    a1 = parametros(2);
    a2 = parametros(3);
    y = a0 + a1*sin(2*pi*x(i)/p1) + a2*cos(2*pi*x(i)/p2);
endfunction
```

6.3. Código para la minimización del error cuadrático medio por el gradiente

```
disp("Running...")
clear;

function res = minimizar_gradiente(x0, t, y)
    n = size(t)(2);
    sum_y = sum(y);
    x_ant = 0;
    x_act = x0';
    while (abs(max(x_act) - max(x_ant)) > 0.0000001)
        x_ant = x_act;
        x_act = x_ant - jacobiano_invertido(x_ant, t, sum_y, n)*gradiente(x_ant, t, sum_y);
    endwhile
    res = x_act;
endfunction

function grad = gradiente(xk, t, sum_y, n)
    h0 = xk(1);
    a1 = xk(2);
    a2 = xk(3);
    p1 = xk(4);
    p2 = xk(5);

    senos_p1 = suma_senos(p1, t);
    senos_p2 = suma_senos(p2, t);
    cosenos_p1 = suma_cosenos(p1, t);
    cosenos_p2 = suma_cosenos(p2, t);

    senos_p1_d = suma_senos_d(p1, t);
    senos_p2_d = suma_senos_d(p2, t);
    cosenos_p1_d = suma_cosenos_d(p1, t);
    cosenos_p2_d = suma_cosenos_d(p2, t);

    senos_p1_d2 = suma_senos_d2(p1, t);
    senos_p2_d2 = suma_senos_d2(p2, t);
    cosenos_p1_d2 = suma_cosenos_d2(p1, t);
    cosenos_p2_d2 = suma_cosenos_d2(p2, t);

    f1 = 2*(n*h0+a1*senos_p1+a2*cosenos_p2 - sum_y)*n;
    f2 = 2*(n*h0+a1*senos_p1+a2*cosenos_p2 - sum_y)*senos_p1;
    f3 = 2*(n*h0+a1*senos_p1+a2*cosenos_p2 - sum_y)*cosenos_p2;
    f4 = 2*(n*h0+a1*senos_p1+a2*cosenos_p2 - sum_y)*(-2*a1*pi*cosenos_p1_d/p1^2);
    f5 = 2*(n*h0+a1*senos_p1+a2*cosenos_p2 - sum_y)*(2*a1*pi*senos_p2_d/p2^2);

    grad = [f1; f2; f3; f4; f5];
endfunction
```

```

function j_inv = jacobiano_invertido(xk,t, sum_y, n)
    h0 = xk(1);
    a1 = xk(2);
    a2 = xk(3);
    p1 = xk(4);
    p2 = xk(5);

    senos_p1 = suma_senos(p1,t);
    senos_p2 = suma_senos(p2,t);
    cosenos_p1 = suma_cosenos(p1,t);
    cosenos_p2 = suma_cosenos(p2,t);

    senos_p1_d = suma_senos_d(p1,t);
    senos_p2_d = suma_senos_d(p2,t);
    cosenos_p1_d = suma_cosenos_d(p1,t);
    cosenos_p2_d = suma_cosenos_d(p2,t);

    senos_p1_d2 = suma_senos_d2(p1,t);
    senos_p2_d2 = suma_senos_d2(p2,t);
    cosenos_p1_d2 = suma_cosenos_d2(p1,t);
    cosenos_p2_d2 = suma_cosenos_d2(p2,t);

    H = h0 + a1*senos_p1 + a2*cosenos_p2 - sum_y;

    df1_dh0 = 2*(n^2);
    df1_da1 = 2*n*senos_p1;
    df1_da2 = 2*n*cosenos_p2;
    df1_dp1 = (-4*a1*pi*n*cosenos_p1_d)/(p1^2);
    df1_dp2 = (4*a2*pi*n*cosenos_p2_d)/(p2^2);

    df2_dh0 = 2*n*senos_p1;
    df2_da1 = 2*(senos_p1^2);
    df2_da2 = 2*cosenos_p2*senos_p1;
    df2_dp1 = (-4*a1*pi*cosenos_p1_d*senos_p1 + 2*(H*cosenos_p1_d*-2*pi))/(p1^2);
    df2_dp2 = (a2*2*pi*senos_p2_d)/(p2^2);

    df3_dh0 = 2*n*cosenos_p2;
    df3_da1 = 2*senos_p1*cosenos_p2;
    df3_da2 = 2*(cosenos_p2^2);
    df3_dp1 = (-2*a1*pi*cosenos_p1_d)/(p1^2);
    df3_dp2 = (4*a2*pi*senos_p2_d*cosenos_p2 + 4*H*pi*cosenos_p2)/(p2^2);

    df4_dh0 = (2*n*-2*a1*pi*cosenos_p1_d)/(p1^2);
    df4_da1 = (-4*senos_p1*a1*pi*cosenos_p1_d + pi*-4*H*cosenos_p1_d)/(p1^2);
    df4_da2 = (-4*cosenos_p2*a1*pi*cosenos_p1_d)/(p1^2);
    df4_dp1 = ((8*((a1*pi)^2)*(cosenos_p1_d^2))/(p1^4) + 2*a1*H*((-4*(pi^2)*senos_p1_d^2)/(p1^2)))/(p1^2);
    df4_dp2 = (-8*(pi^2)*a2*a1*senos_p2_d*cosenos_p1_d)/((p1^2)*(p2^2));

    df5_dh0 = 2*n*(2*a2*pi*senos_p2_d/(p2^2));
    df5_da1 = (4*senos_p1*a2*pi*senos_p2_d)/(p2^2);
    df5_da2 = (4*a2*pi*cosenos_p2*senos_p2_d + 4*pi*H*senos_p2_d)/(p2^2);
    df5_dp1 = (-8*a1*a2*(pi^2)*cosenos_p1_d*senos_p2_d)/((p1^2)*(p2^2));
    df5_dp2 = ((8*((a2*pi)^2)*(senos_p2^2))/(p2^4) + 2*H*((-4*a2*(pi^2)*cosenos_p2_d^2)/(p2^2)))/(p2^2);

```

```

    j = [df1_dh0, df1_da1, df1_da2, df1_dp1, df1_dp2; df2_dh0, df2_da1, df2_da2, df2_dp1, df2_dp2];
    j_inv = inv(j);
endfunction

function resultado = suma_senos(p,t)
    v = sin(2.*pi.*t./p);
    resultado = sum(v);
endfunction

function resultado = suma_cosenos(p,t)
    v = cos(2.*pi.*t./p);
    resultado = sum(v);
endfunction

function resultado = suma_senos_d(p,t)
    v = (sin(2.*pi.*t./p).*t);
    resultado = sum(v);
endfunction

function resultado = suma_cosenos_d(p,t)
    v = (cos(2.*pi.*t./p).*t);
    resultado = sum(v);
endfunction

function resultado = suma_senos_d2(p,t)
    v = (sin(2.*pi.*t./p).*(t.^2));
    resultado = sum(v);
endfunction

function resultado = suma_cosenos_d2(p,t)
    v = (cos(2.*pi.*t./p).*(t.^2));
    resultado = sum(v);
endfunction

```

6.4. Código para predecir la pleamar del mes de Junio

```
function pleamar = predecir_pleamar(parametros, horarios)
    h0 = parametros(1);
    a1 = parametros(2);
    a2 = parametros(3);
    p1 = parametros(4);
    p2 = parametros(5);
    t = construir_horarios(horarios(length(horarios)))
    alturas = h0.+a1.*sin(2.*pi.*t./p1).+a2.*cos(2.*pi.*t./p2);
    altura_maxima = max(alturas);

    for i = 1:length(alturas)
        if (alturas(i) == altura_maxima)
            tiempo_del_maximo = t(i);
        endif
    endfor

    pleamar = [tiempo_del_maximo, altura_maxima];
endfunction

function horarios = construir_horarios(ultima_hora)
    n = 30*4
    horarios = ones(n,1);
    for i = 1:n
        horarios(i) = ultima_hora + 4*i;
    endfor
endfunction
```

6.5. Derivación de $\nabla G = 0$ para obtener los elementos del jacobiano

- $\frac{\partial f_1}{\partial h_0} = 2n^2$
- $\frac{\partial f_1}{\partial a_1} = 2n \cdot \sum_{i=1}^n \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right)$
- $\frac{\partial f_1}{\partial a_2} = 2n \cdot \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right)$
- $\frac{\partial f_1}{\partial P_1} = \frac{-4n\pi a_2 \cdot \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right) \cdot t_i}{P_1^2}$
- $\frac{\partial f_1}{\partial P_2} = \frac{4n\pi a_2 \cdot \sum_{i=1}^n \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right) \cdot t_i}{P_2^2}$
- $\frac{\partial f_2}{\partial h_0} = 2n \cdot \sum_{i=1}^n \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right)$
- $\frac{\partial f_2}{\partial a_1} = 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right)\right)^2$
- $\frac{\partial f_2}{\partial a_2} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right) \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right)$
- $\frac{\partial f_2}{\partial P_1} = \frac{-4\pi \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right) t_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right)\right) + \phi \cdot \left(\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right) t_i\right)\right)}{P_1^2}$
- $\frac{\partial f_2}{\partial P_2} = \frac{a_2 \cdot 2\pi \cdot \left(\sum_{i=1}^n \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right) t_i\right)}{P_2^2}$
- $\frac{\partial f_3}{\partial h_0} = 2n \cdot \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right)$

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad \frac{\partial f_3}{\partial a_1} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right) \cdot \sum_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right) \\
\blacksquare \quad \frac{\partial f_3}{\partial a_2} &= 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right)\right)^2 \\
\blacksquare \quad \frac{\partial f_3}{\partial P_1} &= \frac{-2\pi a_1 \cdot \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_1}\right) \cdot \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right)}{P_1^2} \\
\blacksquare \quad \frac{\partial f_3}{\partial P_2} &= \frac{-2\pi a_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right) t_i\right) \cdot \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right) + 4\pi \phi \cdot \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_i}{P_2}\right)}{P_2^2} \\
\blacksquare \quad \frac{\partial f_4}{\partial h_0} &= 2n \cdot \frac{-2a_1 \pi \left(\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi t_i}{P_1}\right) t_i\right)}{P_1^2} \\
\blacksquare \quad \frac{\partial f_4}{\partial a_1} &= \frac{-4 \cdot a_1 \pi \cdot \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_i}{P_1}\right)\right) \left(\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi t_i}{P_1}\right) t_i\right) + (-4) \pi \cdot \phi \cdot \left(\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi t_i}{P_1}\right) t_i\right)}{\text{denom}} \\
\blacksquare \quad \frac{\partial f_4}{\partial a_2} &= \frac{((-4) \cdot a_1 \pi \cdot \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi t_i}{P_2}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi t_i}{P_2}\right) t_i\right))}{P_1^2} \\
\blacksquare \quad \frac{\partial f_4}{\partial P_1} &= \frac{8 \cdot (a_1 \pi)^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi t_i}{P_1}\right) t_i\right)^2}{P_1^4} + 2 \cdot \phi \cdot \left(\frac{-4a_1 \cdot \pi^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_i}{P_1}\right) t_i^2\right)}{P_1^4} - \frac{a_1 \pi \left(\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi t_i}{P_1}\right) t_i\right)}{P_1}\right) \\
\blacksquare \quad \frac{\partial f_4}{\partial P_2} &= \left(\frac{4\pi \cdot a_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_i}{P_2}\right) t_i\right)}{P_2^2}\right) \cdot \left(\frac{-2 \cdot a_1 \pi \cdot \left(\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi t_i}{P_1}\right) t_i\right)}{P_1^2}\right) \\
\blacksquare \quad \frac{\partial f_5}{\partial h_0} &= 4n \cdot \frac{a_n \pi \cdot \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_i}{P_2}\right) t_i\right)}{P_2^2} \\
\blacksquare \quad \frac{\partial f_5}{\partial a_1} &= 4 \cdot \sum_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_i}{P_1}\right) \cdot \frac{a_2 \pi \cdot \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_i}{P_2}\right) t_i\right)}{P_2^2} \\
\blacksquare \quad \frac{\partial f_5}{\partial a_2} &= 4 \cdot \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi t_i}{P_2}\right) \cdot \frac{a_2 \pi \cdot \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_i}{P_2}\right) t_i\right) + 4 \cdot \phi \cdot \pi \cdot \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_i}{P_2}\right) t_i\right)}{P_2^2} \\
\blacksquare \quad \frac{\partial f_5}{\partial P_1} &= \frac{(-8) \cdot a_1 \pi \cdot \left(\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi t_i}{P_1}\right) t_i\right)}{P_1^2} \cdot \frac{a_2 \pi \cdot \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_i}{P_2}\right) t_i\right)}{P_2^2} \\
\blacksquare \quad \frac{\partial f_5}{\partial P_2} &= \frac{8 \cdot (a_2 \pi)^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_i}{P_2}\right) t_i\right)^2}{P_2^4} + 2 \cdot \phi \cdot \left(\frac{-4a_2 \cdot \pi^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi t_i}{P_2}\right) t_i^2\right)}{P_2^4} + \frac{a_2 \pi \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_i}{P_2}\right) t_i\right)}{P_2}\right)
\end{aligned}$$

Siendo

$$\phi = h_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_i}{P_1}\right) + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi t_i}{P_2}\right) - \sum_{i=1}^n y_i$$