Propriétés des fonctions

Fonction monotone

- Une fonction est monotone croisante si elle est toujours croissante ou contient des plateaux.
- Une fonction est monotone décroissante si elle est toujours décroissante ou contient des plateaux.

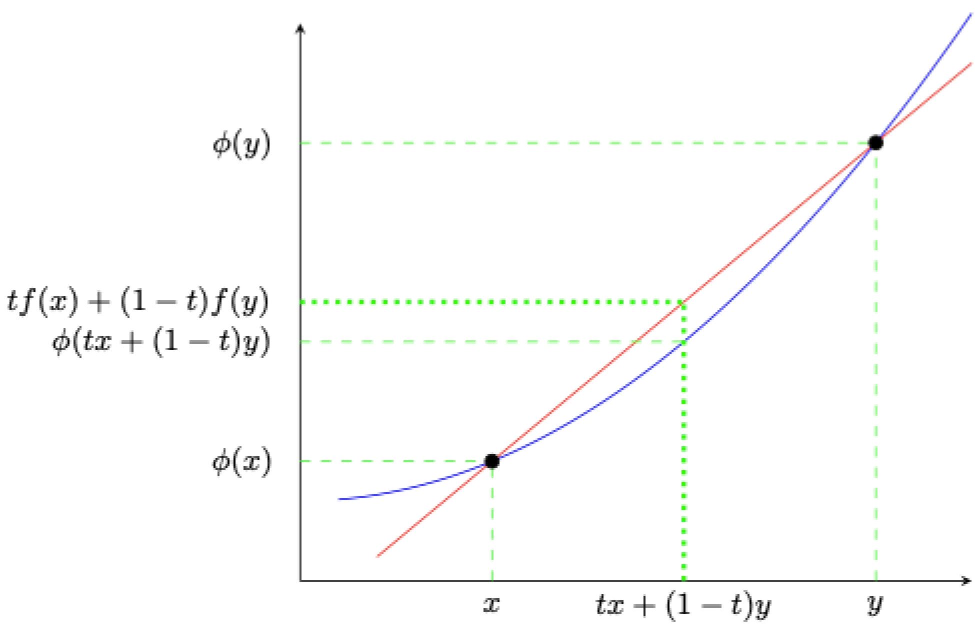
Fonction strictement monotones

- Une fonction est strictement monotone croisante si elle est toujours croissante.
- Une fonction est strictement monotone décroisante si elle est toujours décroissante.

Fonction convexe

Une fonction est convexe si l'inégalité suivante est satisfaite:

$$\phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$$



Fonction concave

Une fonction est concave si l'inégalité suivante est satisfaite:

$$\phi(tx + (1-t)y) \geq t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$$

Inégalité de Jensen

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\phi(x_i)$$

Inégalité de Jensen - version probabiliste

$$\phi(E[X]) \leq E[\phi(X)]$$

Fonction sous-additive

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$$

Concavité et sous-additivité

Soit une fonction concave ϕ sur les Réelles,
Alors la fonction est aussi sous-additive sur les réelle.

Preuve:

On commence avec la définition de la concavité

$$\phi(tx + (1-t)y) \geq t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$$

En posant $y = 0$, on a

$$\phi(tx) \geq t\phi(x)$$

Si on pose $t = \frac{x}{x+y}$ (faut le sentir), on a

$$\phi(x) = \phi(t(x+y)) \geq t\phi(x+y)$$

$$\phi(y) = \phi((1-t)(x+y)) \geq (1-t)\phi(x+y)$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}\phi(x) + \phi(y) &\geq t\phi(x+y) + (1-t)\phi(x+y)\\ &= \phi(x+y)\end{aligned}$$

Convexité et sous-additivité

Soit une fonction concave ϕ sur les Réelles,
On suppose aussi que la fonction ϕ est homogène ($\phi(cx) = c\phi(x)$)
Alors la fonction est sous-additive

Preuve;

On commence par la définition de la convexité

$$\phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$$

On pose $t = \frac{1}{2}$

$$\phi\left(\frac{1}{2}x + \left(1 - \frac{1}{2}\right)y\right) \leq \frac{1}{2}\phi(x) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\phi(y)$$

Vu que la fonction est homogène

$$\frac{1}{2}\phi(x+y) \leq \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\phi(y)$$

On multiplie par 2 et on obtient

$$\phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y)$$

Propriété de la mesure VaR

La VaR satisfait les propriétés suivantes

Propriété	Satisfait
Invariance à la translation	oui
Monotonicité	oui
Homogénéité	oui
Marge de risque non excessive	oui
Marge de risque justifiée	oui
Sous-additivité	non
Convexité	non
Marge de risque positive	non

Preuve (propriété 1, Invariance à la translation)

Soit la fonction croissante et continue

$$\varphi(x) = x + c$$

On obtient

$$F_{X+c}^{-1}(u) = F_X^{-1}(u) + c$$

On conclut

$$VaR_\kappa(X+c) = F^{-1}_{X+c}(u) = F^{-1}_X(u) + c = VaR_\kappa(X) + c$$

Preuve (propriété 2, la monotonicité)

D'après le théorème de la fonction quantile on a

$$X = F^{-1}_X(U) \quad \text{et} \quad Y = F^{-1}_Y(U)$$

Donc,

$$Pr(X \leq Y) = Pr(F^{-1}_X(U) \leq F^{-1}_Y(U))$$

Cela implique que

$$F^{-1}_X(U) \leq F^{-1}_Y(U)$$
$$VaR_\kappa(X) \leq VaR_\kappa(Y)$$

Preuve (propriété 3, l'homogénéité)

Soit la fonction croissante et continue

$$\varphi(x) = cx$$

On obtient

$$F^{-1}_{cX}(u) = cF^{-1}_X(u)$$

On conclut

$$VaR_\kappa(cX) = F^{-1}_{cX}(\kappa) = cF^{-1}_X(\kappa) = cVaR_\kappa(X)$$

Preuve (propriété 4 et 5, sous-additivité et convexité)

Il suffit de trouver un contre example avec 2 lois de probabilité!

Preuve (propriété 6, marge non excessive)

Soit une $v.a. X$ et un nombre positif c tel que $Pr(X \leq c) = 1$

Alors on voit que

$$F^{-1}_X(u) \leq c$$

On conclut

$$VaR_\kappa(X) = F^{-1}_X(\kappa) \leq c$$

Preuve (propriété 7, marge positive)

On définit κ_0 tel que

$$F_X(E[X]) = \kappa_0$$

On obtient

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(u) \leq E[X], &\quad 0 < u < \kappa_0 \\ F_X^{-1}(u) \geq E[X], &\quad \kappa_0 < u < 1 \end{aligned}$$

On conclut

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(X) \leq E[X], &\quad 0 < u < \kappa_0 \\ VaR_\kappa(X) \geq E[X], &\quad \kappa_0 < u < 1 \end{aligned}$$

Preuve (propriété 8, marge justifiée)

Soit une $v.a.\, X$ et un nombre positif c tel que $Pr(X = c) = 1$

On observe

$$F_X^{-1}(u) = c$$

On conclut

$$VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa) = c$$

- La VaR est une mesure monétaire
- La VaR n'est pas cohérente
- La VaR n'est pas convexe

Propriété de la mesure TVaR

La TVaR satisfait les propriétés suivantes

Propriété	Satisfait
Invariance à la translation	oui
Monotonicité	oui
Homogénéité	oui
Marge de risque non excessive	oui
Marge de risque justifiée	oui
Sous-additivité	oui
Convexité	oui
Marge de risque positive	oui

Definition de la $TVaR_\kappa(X)$

On se rappelle de les trois définitions de la $TVaR_\kappa(X)$

1. $$TVaR_k(X) = \frac{1}{1-k}\int_k^1 F_X^{-1}(u)\,du$$

2. $$TVaR_k(X) = \frac{1}{1-k}\pi_x(VaR_k(X)) + VaR_k(X)$$
$$TVaR_k(X) = \frac{1}{1-k}\left[E[X \times_{1\{x>VaR_k(X)\}}] + VaR_k(X)\left(F_X(VaR_k(X)-k)\right)\right]$$

3. $$TVaR_\kappa(X) = inf\{\phi(x)\} = inf\left\{x + \frac{\pi_X(x)}{1-\kappa}\right\}$$

   On observe que $\phi(x) = x + \frac{1}{1-k}\pi_X(x)$ est convexe ou le minimum atteint est quand $x = VaR_\kappa(X)$.

Preuve (Propriété 1, invariance à la translation)

Soit la fonction croissante et continue

$$\varphi(x) = x + c$$

On déduit que

$$F_{X+c}^{-1}(u) = F_X^{-1}(u) + c$$

Avec la définition de la TVaR, on à

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X+c) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X+c)\ du \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 F_{X+c}^{-1}(u)\ du \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u) + c\ du \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\ du\ + \frac{1}{1-k}\int_\kappa^1 c\ du \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\ du\ + c \\
&= TVaR_\kappa(X) + c
\end{aligned}$$

Preuve (propriété 2, monotonicité)

D'après le théorème de la fonction quantile on a

$$X = F_X^{-1}(U) \quad \text{et} \quad Y = F_Y^{-1}(U)$$

Donc,

$$Pr(X \leq Y) = Pr(F_X^{-1}(U) \leq F_Y^{-1}(U))$$

Cela implique que

$$F_X^{-1}(U) \leq F_X^{-1}(U)$$

Avec la définition,

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_k^1 F_X^{-1}(U)\, du \\ &\leq \frac{1}{1-\kappa}\int_k^1 F_Y^{-1}(U)\, du \\ &= TVaR_\kappa(Y) \end{aligned}$$

Preuve (propriété 3, homogénéité)

Soit la fonction croissante et continue

$$\varphi(x) = cx$$

On déduit que

$$F_{cX}^{-1}(u) = cF_X^{-1}(u)$$

Avec la définition

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(cX) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_k^1 VaR_u(cX)\, du \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_k^1 F_{cX}^{-1}(u)\, du \\ &= \frac{1}{1-\kappa} c\int_k^1 F_X^{-1}(u)\, du \\ &= cTVaR_\kappa(X) \end{aligned}$$

Preuve (propriété 4, sous-additivité)

On se rappel de la troisième définition de la TVaR

$$TVaR_\kappa(X) = inf\{\phi(x)\} = inf\left\{x + \frac{\pi_X(x)}{1-k}\right\}$$

On déduit que

$$TVaR_\kappa(X) \leq x + \frac{\pi_X(x)}{1-\kappa}$$

Et on pose aussi que

$$x_\alpha = \alpha VaR_\kappa(X) + (1-\alpha)VaR_\kappa(Y)$$

(Faut le sentir)

On commence avec la définition

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(\alpha X + (1-\alpha)Y) &\leq x_\alpha + \frac{\pi_{\alpha X+(1-\alpha)Y}(x_\alpha)}{1-\kappa} \\
&= \alpha VaR_\kappa(X) + (1-\alpha)VaR_\kappa(Y) + \frac{\pi_{\alpha X+(1-\alpha)Y}(\alpha VaR_\kappa(X) + (1-c}{1-\kappa} \\
&= \alpha VaR_\kappa(X) + (1-\alpha)VaR_\kappa(Y) + \frac{E[max(\alpha X + (1-\alpha)Y - (\alpha Va}{1-} \\
&= \alpha VaR_\kappa(X) + (1-\alpha)VaR_\kappa(Y) + \frac{E[max(\alpha X - \alpha VaR_\kappa(X) + (1-}{1-} \\
&= \alpha VaR_\kappa(X) + (1-\alpha)VaR_\kappa(Y) + \frac{E[max(\alpha X - \alpha VaR_\kappa(X));0)]}{1-\kappa} \\
&= \alpha VaR_\kappa(X) + \alpha\frac{E[max(X - VaR_\kappa(X));0)]}{1-\kappa} + (1-\alpha)VaR_\kappa(Y) + \\
&= \alpha \bigg(VaR_\kappa(X) + \frac{E[max(X - VaR_\kappa(X));0)]}{1-\kappa}\bigg) + (1-\alpha)\bigg(VaR_\kappa(Y \\
&= \alpha TVaR_\kappa(X) + (1-\alpha)TVaR_\kappa(Y)
\end{aligned}$$

Pn vient de démontrer que la TVaR satisfait la propriété de la convexité. On peu conclure que vu quelle satisfait la propriété de la convexité de de l'honogénéité, elle est aussi sous-additive.

On peut aussi la démontrer avec la suite de preuve suivante:

On prend l'inégalité prouver précédament,

$$TVaR_\kappa(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha TVaR_\kappa(X) + (1-\alpha)TVaR_\kappa(Y)$$

On pose $\alpha = \frac{1}{2}$

$$TVaR_\kappa\left(\frac{1}{2}X + \left(1-\frac{1}{2}\right)Y\right) = \frac{1}{2}TVaR_\kappa(X) + \left(1-\frac{1}{2}\right)TVaR_\kappa(Y)$$

On a,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}TVaR_\kappa(X+Y) &\leq \frac{1}{2}TVaR_\kappa(X) + \frac{1}{2}TVaR_\kappa(Y) \\
TVaR_\kappa(X+Y) &\leq TVaR_\kappa(X) + TVaR_\kappa(Y)
\end{aligned}$$

Preuve (propriété 6, marge non excessive)

Soit une $v.a.\, X$ et un nombre positif c tel que $Pr(X \leq c) = 1$

Alors on voit que

$$F_X^{-1}(u) \leq c$$

On introduit la définition de la TVaR

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-k}\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\, du \leq \frac{1}{1-k}\int_\kappa^1 c\, du = c$$

Preuve (Propriété 7, marge positive)

On sait que

$$\lim_{k \to 0} TVaR_\kappa(X) = E[X]$$

On déduit que la TVaR est toujours croissante pour tous κ

Si on prend la dérivée de la TVaR, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\kappa}TVaR_\kappa(X) &= \frac{d}{d\kappa}\frac{1}{1-k}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\, du \\
&= \frac{1}{1-\kappa}VaR_u(X)|_{u=1} \times 0 - \frac{1}{1-\kappa}VaR_u(X)|_\kappa \times 1 + \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \frac{d}{d\kappa}VaR_u(X) \\
&= -\frac{1}{1-\kappa}VaR_\kappa(X) + \int_\kappa^1 \frac{d}{d\kappa}\frac{VaR_u(X)}{1-\kappa}\, du \\
&= -\frac{1}{1-\kappa}VaR_\kappa(X) + \int_\kappa^1 \frac{-VaR_u(X)}{(1-\kappa)^2}\, du \\
&= -\frac{VaR_\kappa(X)}{1-\kappa} - \frac{TVaR_\kappa(X)}{1-\kappa}
\end{aligned}$$

On sait que $TVaR_\kappa(X) \geq VaR_\kappa(x)$ donc on conclut que $\frac{d}{d\kappa}TVaR_\kappa(X) \geq 0$

Alors on conclut que $\frac{d}{d\kappa}TVaR_\kappa(x) \geq E[X]$

Preuve (propriété 8, marge justifiée)

Soit une $v.a.\, X$ et un nombre positif c tel que $Pr(X = c) = 1$

On observe

$$F_X^{-1}(u) = c$$

On applique a la définition de la TVaR

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,du = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 c\,du = c$$

- La TVaR est une mesure monétaire
- La TVaR est cohérente
- La TVaR est convexe