

# Mutualisation et portefeuille homogène de risque d'assurance

## Introduction

On considère un ensemble d'assurés avec chaque un un portefeuille qui suit une *v. a.*  $X$  qui représente le montant de sinistre pour un assuré.

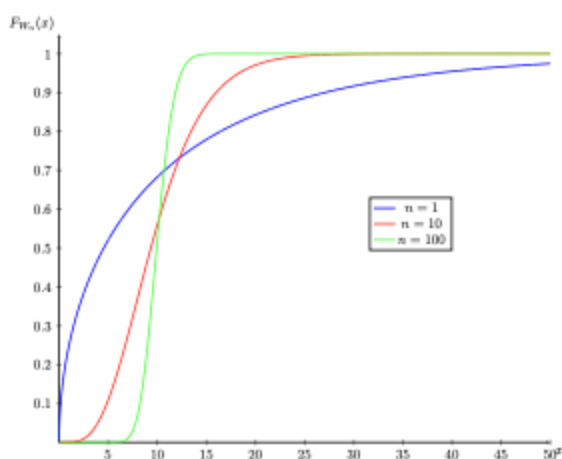
On remarque aussi que tous les portefeuilles sont indépendants et identiquement distribués.

On introduit aussi la *v. a.*  $W_n$  qui est le coût de sinistre moyen par assuré :

$$W_n = \frac{S_n}{n} \frac{\text{Montant total réclamer}}{\text{Nombre de contrat}}$$

Quand la taille de  $n$  augmente, on peut observer plusieurs choses,

- Le coût moyen de la moyenne réclamer par chaque client est pareille au coût moyen réclamer par un client.
- Plus que  $n$  augmente, le plus que l'écart-type des réclamations se rétrécit et la moyenne de réclamation observée se rapproche de la moyenne réclamer.



Sur le graphique en haut, on peut observer que plus que  $n$  augmente, plus que la fonction de répartition se rapproche de la fonction de répartition d'une loi discrète ou  $Pr(Z = E[W_n]) = 1$ .

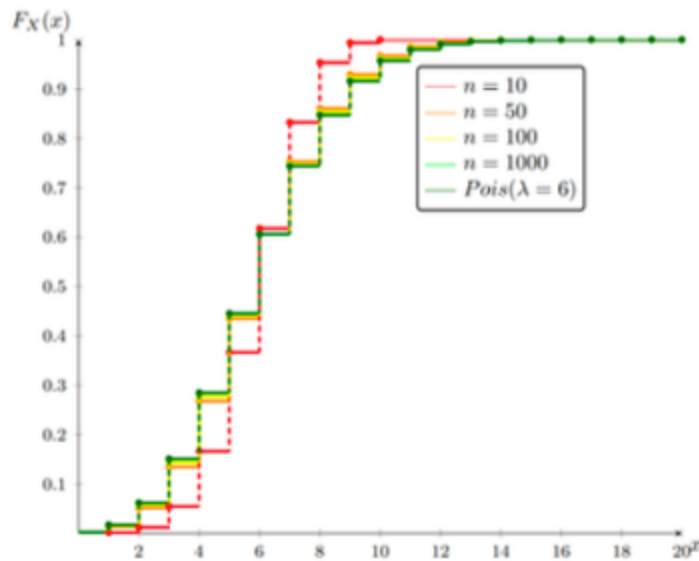
## Loi faible des grands nombres

### Convergence en Distribution

On dit qu'une suite  $Y$  converge en distribution vers la *v. a.*  $Y$  si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(x) = F_Z(x)$$

Notation:  $Y_n \rightarrow^D Z$ , quand  $n \rightarrow \infty$



Le graphique en haut est une exemple de la binomial qui se rapproche de la fonction de répartition de la poisson quand n devient grand.

Cela nous mène a les trois théorème qui suivre:

### Convergence en distribution et TLS

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{Y_n}(t) = \mathcal{L}_Z(t)$$

si et seulement si  $Y_n \rightarrow^D Z$

### Convergence en distribution FGM

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{Y_n}(t) = \mathcal{M}_Z(t)$$

si et seulement si  $Y_n \rightarrow^D Z$

### Convergence en distribution FGP

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{Y_n}(t) = \mathcal{P}_Z(t)$$

si et seulement si  $Y_n \rightarrow^D Z$

Exemple:

Soit la v. a.  $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ , ou  $Y_n \sim \text{Binom}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$  et la v. a.  $Z \sim \text{Pois}(\lambda)$

$$\mathcal{P}_{Y_n}(s) = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}s\right)^n \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_Z(s) = e^{\lambda(s-1)}$$

Preuve:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{Y_n}(t) &= \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}s\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}(s-1)\right)^n \\ &= e^{\lambda(s-1)}\end{aligned}$$

donc avec le théorème de convolution de la FGP, on a conclut que  $Y_n \rightarrow^D Z$ .

## Convergence en Probabilité

L'idée générale de cette théorème est que ça signifie la probabilité qu'un phénomène "inhabituel" se produise devient de plus en plus petite au fur et à mesure que la suite évolue. La théorème est la suivant:

On dit que la suite  $Y$  converge en probabilité vers la *v. a.*  $Z$  si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(|Y_N - Z| > \epsilon) = 0$$

pour tout  $\epsilon > 0$

Notation:  $Y_n \rightarrow^P Z$ , quand  $n \rightarrow \infty$ .

Interprétation: La probabilité que la *v. a.*  $Y_n$  s'écarte de la *v. a.*  $Z$  tend vers 0 quand le nombre  $n$  augmente.

Quelle est la relation entre les deux théorème de convergence?

L'implication suit,

$$Y_n \rightarrow^P Z \Rightarrow Y_n \rightarrow^D Z$$

L'implication n'est pas toujours vraie pour l'inverse.

## Loi faible des grands nombres (Variance finie, Chebychev)

$$W_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

Alors,  $W_n \rightarrow^P \mu$ , quand  $n \rightarrow \infty$ , c'est à dire:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(|W_n - \mu| > \epsilon) = 0$$

Pour faire la preuve il faut l'inégalité de Markov et celle de Chebychev.

L'inégalité de Markov est la suivant;

Soit une v. a continue positive  $Z$  avec  $E[Z] > \infty$

Alors, on a

$$Pr(Z \geq a) \leq \frac{E[Z]}{a}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0^{\infty} x f_Z(x) dx \\ &= \int_0^a x f_Z(x) dx + \int_a^{\infty} x f_Z(x) dx \\ &\geq \int_a^{\infty} x f_Z(x) dx \\ &\geq \int_a^{\infty} a f_Z(x) dx \\ &= a Pr(Z > a) \end{aligned}$$

L'inégalité de chebychev est la suivante:

Soit la v. a  $Z$  avec  $E[Z] < \infty$  et  $Var(Z) < \infty$ .

Pour tout  $k > 0$ , on a

$$Pr\left(|Z - E[Z]| > k\sqrt{Var(Z)}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

Preuve:

On introduit la v. a positive  $Y = \frac{(Z - E[Z])^2}{Var(Z)}$  avec  $E[Z] = 1$

On applique directement l'inégalité de markov:

$$\begin{aligned} Pr(Y \geq k^2) &\leq \frac{E[Y]}{k^2} \\ &\rightarrow Pr\left(\frac{(Z - E[Z])^2}{Var(Z)} \geq k^2\right) \leq \frac{1}{k^2} \\ &\rightarrow Pr\left(\left|\frac{(Z - E[Z])}{\sqrt{Var(Z)}}\right| \geq k\right) \leq \frac{1}{k^2} \\ &\rightarrow Pr\left(|(Z - E[Z])| \geq k\sqrt{Var(Z)}\right) \leq \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Maintenant on peut utiliser c'est deux résultat pour prouvez la [Loi faible des grands nombres \(Variance finie, Chebychev\)](#).

Rappel de la loi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(|W_n - \mu| > \epsilon) = 0$$

Preuve:

$$\begin{aligned} Pr\left(|(W_n - E[W_n])| \geq k\sqrt{Var(W_n)}\right) &\leq \frac{1}{k^2} \\ &= Pr\left(|(W_n - E[X])| \geq k\sqrt{\frac{Var(X)}{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2} \\ &= Pr\left(|(W_n - \mu)| \geq \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Ensuite on pose  $\epsilon = \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$  se qui nous donne:

$$\begin{aligned} &= Pr(|(W_n - \mu)| \geq \epsilon) \leq \left(\frac{\sigma}{\epsilon\sqrt{n}}\right)^2 \\ &= Pr(|(W_n - \mu)| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{n} \left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2 \end{aligned}$$

On prend la limite et on observe:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} Pr(|(W_n - \mu)| \geq \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2 \rightarrow 0$$

### Conclusion de la loi Chebychev

Interprétation courante avec la loi faible des grand nombre:

- Le cout moyen par contrat tend vers l'espérance d'un contrat quand  $n$  est très grand.
- L'espérance d'un contrat est aussi appelée la prime pure.

### Loi faible des grands nombre, (Sans variance, Khintchine)

$$W_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

Alors,  $W_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu$ , quand  $n \rightarrow \infty$ , c'est à dire:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{W_n}(x) = F_Z(x), \quad Pr(Z = \mu) = 1$$

Note, comme dit plutôt,

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Z \Rightarrow Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$$

Mais il a un **Exception**. Si la v. a.  $Z$  et t.q  $Pr(Z = c) = 1, c \in R$ , alors  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \Rightarrow Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Z$

Pour prouvez la loi, on a besoin d'une identité de la TLS,

$$E[e^{-tX}] = 1 - tE[X] + o(t)$$

Preuve:

La TLS du cout moyen est donnée par

$$E[e^{-tW_n}] = E[e^{-\frac{t}{n}S_n}] = \left(E[e^{-\frac{t}{n}X}]\right)^n$$

on prend ensuite la limite,

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(E\left[e^{-\frac{t}{n}X}\right]\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}E[X] + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \\ &= E[e^{-tE[X]}] \end{aligned}$$

Donc,  $E[e^{-tE[X]}]$  est la TLS de la  $v. aZ$ , tq  $Pr(Z = \mu) = 1$ .