Mutualisation et portefeuille homogène de risque d'assurance

Introduction

On considère on ensemble d'assurer avec chaque un un portefeuille qui suis une $v.a. X$ qui représente le montant de sinistre pour un assurer.

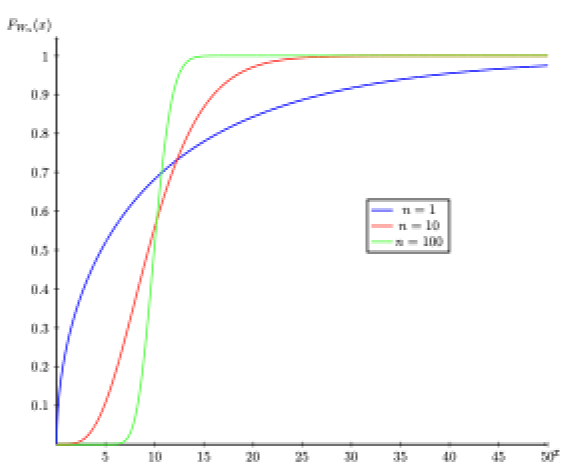
On remarque aussi que tout les portefeuille sont indépendant et identiquement distribuer.

On introduit aussi la $v.a. W_n$ qui est le cout de sinistre moyen porter par chaque assurer:

$$W_n = \frac{S_n}{n} \frac{\text{Montant total réclamer}}{\text{Nombre de contrat}}$$

Quand la taille de n augment on peut observer plusieurs choses,

- Le cout moyen de la moyenne réclamer par chaque client est pareille au cout moyen réclamer par un client.
- Le plus que n augment, le plus que l'équart-type des réclamation se rétréssi et la moyen de réclamation observer se raproche de la moyenne réclamer.



Sur le graphique en haut, on peut observer que plus que n augmente, plus que la fonction de répartition se rapproche de la fonction de répartition d'une loi discrète ou $Pr(Z = E[W_n]) = 1$.

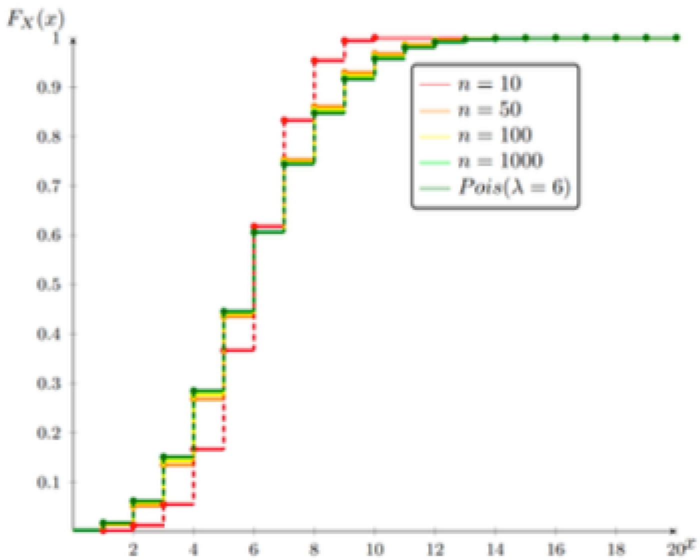
Loi faible des grands nombre

Convergence en Distribution

On dit qu'une suite Y converge en distribution vers la $v.a. Y$ si:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(x) = F_Z(x)$$

Notation: $Y_n \to^D Z$, quand $n \to \infty$



Le graphique en haut est une exemple de la binomial qui se rapproche de la fonction de répartition de la poisson quand n devient grand.

Cela nous mêne a les trois théorème qui suivre:

Convergence en distribution et TLS

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{Y_n}(t) = \mathcal{L}_Z(t)$$

si et seulement si $Y_n \to^D Z$

Convergence en distribution FGM

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}_{Y_n}(t) = \mathcal{M}_Z(t)$$

si et seulement si $Y_n \to^D Z$

Convergence en distribution FGP

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{Y_n}(t) = \mathcal{P}_Z(t)$$

si et seulement si $Y_n \to^D Z$

Exemple:
Soit la $v.a.$ $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$, ou $Y_n \sim Binom\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ et la $v.a.$ $Z \sim Pois(\lambda)$

$$\mathcal{P}_{Y_n}(s) = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}s\right)^n \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_Z(s) = e^{\lambda(s-1)}$$

Preuve:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathcal{P}_{Y_n}(t) &= \left(1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda}{n}s\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}(s-1)\right)^n \\ &= e^{\lambda(s-1)}\end{aligned}$$

donc avec le théorème de convolution de la FGP, on a conclut que $Y_n \to^D Z$.

Convergence en Probabilité

L'idée générale de cette théorème est que ça signifie la probabilité qu'un phénomène "inhabituel" se produise devient de plus en plus petite au fur et à mesure que la suite évolue. La théorème est la suivant:

On dit que la suite Y converge en probabilité vers la $v.a.Z$ si,

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|Y_N - Z| > \epsilon) = 0$$

pour tout $\epsilon > 0$

Notation: $Y_n \to^{\mathcal{P}} Z$, quand $n \to \infty$.

Interprétation: La probabilité que la $v.a.Y_n$ s'écarte de la $v.a.Z$ tend vers 0 quand le nombre n augmente.

Quelle est la relation entre les deux théorème de convergence?

L'implication suit,

$$Y_n \to^{\mathcal{P}} Z \Rightarrow Y_n \to^{\mathcal{D}} Z$$

L'implication n'est pas toujours vraie pour l'inverse.

Loi faible des grands nombres (Variance finie, Chebychev)

$$W_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Alors, $W_n \to^{\mathcal{P}} \mu$, quand $n \to \infty$, c'est à dire:

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|W_n - \mu| > \epsilon) = 0$$

Pour faire la preuve il faut l'inégalité de Markov et celle de Chebychev.

L'inégalité de Markov est la suivant;
Soit une $v.a$ continue positive Z avec $E[Z] > \infty$
Alors, on a

$$Pr(Z \geq a) \leq \frac{E[Z]}{a}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0^\infty x f_Z(x)\, dx \\ &= \int_0^a x f_Z(x)\, dx + \int_a^\infty x f_Z(x)\, dx \\ &\geq \int_a^\infty x f_Z(x)\, dx \\ &\geq \int_a^\infty a f_Z(x)\, dx \\ &= aPr(Z > a) \end{aligned}$$

L'inégalité de chebychev est la suivante:
Soit la $v.aZ$ avec $E[Z] < \infty$ et $Var(Z) < \infty$.
Pour tout $k > 0$, on a

$$Pr\left(|Z - E[Z]| > k\sqrt{Var(Z)}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

Preuve:
On introduit la $v.a$ positive $Y = \frac{(Z-E[Z])^2}{Var(Z)}$ avec $E[Z] = 1$

On applique directement l'inégalité de markov:

$$\begin{aligned} Pr(Y \geq k^2) \leq \frac{E[Y]}{k^2} \\ &\rightarrow Pr\left(\frac{(Z-E[Z])^2}{Var(Z)} \geq k^2\right) \leq \frac{1}{k^2} \\ &\rightarrow Pr\left(\left|\frac{(Z-E[Z])}{\sqrt{Var(Z)}}\right| \geq k\right) \leq \frac{1}{k^2} \\ &\rightarrow Pr\left(|(Z-E[Z])| \geq k\sqrt{Var(Z)}\right) \leq \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Maintenant on peut utiliser c'est deux résultat pour prouvez la Loi faible des grands nombres (Variance finie, Chebychev)

Rappel de la loi:

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|W_n - \mu| > \epsilon) = 0$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
&Pr\left(|(W_n - E[W_n])| \geq k\sqrt{Var(W_n)}\right) \leq \frac{1}{k^2} \\
&= Pr\left(|(W_n - E[X])| \geq k\sqrt{\frac{Var(X)}{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2} \\
&= Pr\left(|(W_n - \mu)| \geq \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

Ensuite on pose $\epsilon = \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$ se qui nous donne:

$$\begin{aligned}
&= Pr\left(|(W_n - \mu)| \geq \epsilon\right) \leq \left(\frac{\sigma}{\epsilon\sqrt{n}}\right)^2 \\
&= Pr\left(|(W_n - \mu)| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{n}\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2
\end{aligned}$$

On prend la limite et on observe:

$$= \lim_{n\to\infty} Pr\left(|(W_n - \mu)| \geq \epsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2 \to 0$$

Conclusion de la loi Chebychev

Interprétation courante avec la loi faible des grand nombre:

- Le cout moyen par contrat tend vers l'espérance d'un contrat quand n est très grand.
- L'espérance d'un contrat est aussi appelée la prime pure.

Loi faible des grands nombre, (Sans variance, Khintchine)

$$W_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Alors, $W_n \to^{\mathcal{D}} \mu$, quand $n \to \infty$, c'est à dire:

$$\lim_{n\to\infty} F_{W_n}(x) = F_Z(x),\ Pr(Z = \mu) = 1$$

Note, comme dit plutôt,

$$Y_n \to^{\mathcal{P}} Z \Rightarrow Y_n \to^{\mathcal{D}} Z$$

Mais il a un **Exception**. Si la $v.a.\ Z$ et t.q $Pr(Z = c) = 1, c \in R$, alors $Y_n \to^{\mathcal{D}} Z \Rightarrow Y_n \to^{\mathcal{P}} Z$

Pour prouvez la loi, on a besoin d'une identité de la TLS,

$$E[e^{-tX}] = 1 - tE[X] + o(t)$$

Preuve:
La TLS du cout moyen est donnée par

$$e[e^{-tW_n}] = E[e^{-\frac{t}{n}S_n}] = \left(E[e^{-\frac{t}{n}X}]\right)^n$$

on prend ensuite la limite,

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left(E\left[e^{-\frac{t}{n}X}\right]\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}E[X] + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \\
&= E[e^{-tE[X]}]
\end{aligned}$$

Donc, $E[e^{-tE[X]}]$ est la TLS de la $v.aZ$, tq $Pr(Z=\mu)=1$.