

# Propriété souhaitables des mesures de risque

## Probabilité de ruine

La Définition de la probabilité de ruine est la suivante:

Probabilité que la compagnie de puisse pas satisfaire c'est engagement au cours de la prochaine période en suposant un capital initial.

$$\zeta_n(u) = Pr \left( S > \sum_{i=1}^n \pi_i + u \right) = 1 - F_S \left( \sum_{i=1}^n \pi_i + u \right)$$

## Probabilité de ruine et marge de sécurité

Soit la prime charger a un contrat noté  $\pi_i = \pi = 1, 2, \dots, n$ , alors on a les deux résultat suivant:

$$\text{si } \pi > E[X], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n(u) = 0$$

$$\text{si } \pi < E[X], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n(u) = 1$$

Dans cette section on va utiliser la théorème suivante:

$$F_{\varphi(X)}^{-1}(u) = \varphi(F_X^{-1}(u))$$

## Propriété 1 (Invariance à la translation)

$$\Psi(X + \pi) = \Psi(X) + \pi$$

Pour un contrat qui expose l'assureur couts  $X$ , on lui charge une prime  $\pi$ . Maintenant, le contrat représente le cout  $X' = X - \pi$  puisque la prime est suposer annulé les couts que l'assurer représente. Alore le rpisque que prend le portefeuille est  $\Psi(X') = \Psi(X - \pi) = \Psi(X) - \pi$ .

## Propriété 2 (Monotonicté)

Soit deux risques  $X_1$  et  $X_2$  tels que  $Pr(X_1 \leq X_2) = 1$ .

$$\Psi(X_1) \leq \Psi(X_2)$$

## Propriété 3 (Homogénéité)

$$\Psi(aX) = a\Psi(X)$$

La constante  $\alpha$  est tout simplement un taux de change entre deux devise.

## Propriété 4 (Sous-additivité)

$$\Psi(X_1 + \dots + X_n) \leq \Psi(X_1) + \dots + \Psi(X_n)$$

Le bénéfice de mutualisation est défini par

$$B^\Psi(S) = \sum_{i=1}^n \Psi(X_i) - \Psi(S)$$

Pour ne pas faire faillite. Il faut que  $B^\Psi$  soit positif. alors, si la propriété de sous-additivité est satisfaite, le bénéfice de mutualisation sera positif.

## Propriété 5 (Convexité)

$$\Psi(\alpha X + (1 - \alpha)X') \leq \alpha \Psi(X) + (1 - \alpha)\Psi_\kappa(X')$$

Les relations suivantes sont importantes pour la convexité et la sous-additivité:

Sous-Additivité + Homogénéité  $\rightarrow$  Convexité

Convexité + Homogénéité  $\rightarrow$  Sous-Additivité

## Mesure monétaire

Une mesure de risque est dite être monétaire si elle satisfait les deux propriétés suivantes:

- Propriété 1, *Invariance à la translation*
- Propriété 2, *monotonie*

## Mesure de risque cohérente

Une mesure de risque monétaire est dite être cohérente si elle satisfait les deux propriétés suivantes:

- Propriété 3, *homogénéité*
- Propriété 4, *Sous-additivité*

## Mesure de risque convexe

Une mesure de risque est convexe si elle satisfait la propriété suivante:

- Propriété 5, *convexité*

## Propriété 6 (Marge de risque non excessive)

Soit une v. a.  $X$  et soit  $b$  le plus petit nombre réel tel que  $Pr(X \leq b) = 1$

$$\Psi(X) \leq b$$

### **Propriété 7 (Marge de risque positive)**

$$\Psi(X) \geq E[X]$$

### **Propriété 8 (Marge de risque justifiée)**

$$\Psi(a) = a$$