TP04 Poursuite de l'échauffement

Continuons l'échauffement débuté lors des séances précédentes. As usual, l'invitation GitHub pour votre dossier de travail vous a été envoyée par mail.

Partie I

À préparer à la maison sans ordinateur

I.1 Partie entière

Réfléchir à un algorithme simple permettant d'écrire la fonction `partie_entiere(x)` qui renvoie la partie entière du réel `x`. On rappelle que la partie entière d'un réel x (notée $E(x)$) est l'entier le plus proche de x qui lui soit directement inférieur. Par exemple,

$$E(1{,}234\,5) = 1 \qquad E(345{,}432) = 345 \qquad \text{et} \qquad E(-345{,}432) = -346$$

I.2 Boucle `while`

On considère le code suivant

```
n = 1025478651
c = 0
while n != 0:
    if (n%10)%2 == 0:
        c += 1
    n //= 10
print(c)
```

Que vaut `c` à la fin de la boucle ? Que réalise ce programme ? On pourra faire un tableau pour suivre l'évolution des variables dans la boucle.

Partie II

Mise en jambe

II.1 Quelques listes à produire

NB : si vous écrivez les listes à suivre « à la main », vous n'aurez aucun point...

1. Créer la liste `L1` constituée de 12 zéros.
2. Créer la liste `L2 = [42,41,40,39,...,26,25,24]` (il s'agit de remplir les `...` de manière automatisée)
3. Créer la liste `L3 = [0,0,0,2,2,2,4,4,4,...,10,10,10]`
4. Créer la liste `L4 = [1,2,2,3,3,3,...,7,7,7,7,7,7,7,...,10,10]`. Stocker son 40e élément dans la variable `L4_40`.
5. Créer la liste `L5 = [1, 2,1, 3,2,1, 4,3,2,1, ..., 9,8,7,6,5,4,3,2,1]`. Stocker son 38e élément dans la variable `L5_38`.

Stop GitHub

Allez sur Github Desktop pour faire un commit. Choisissez vous-même (avec pertinence) le résumé. Pensez aussi à appuyer sur le bouton «Push origin» en haut à droite pour mettre à jour sur le web.

II.2 Partie entière

Implémenter la fonction `partie_entiere(x)` pour laquelle vous avez préparé un algorithme à la maison.

Stop GitHub
Allez sur Github Desktop pour faire un commit. Choisissez vous-même (avec pertinence) le résumé.
Pensez aussi à appuyer sur le bouton «Push origin» en haut à droite pour mettre à jour sur le web.

II.3 ProjectEuler numéro 1

Si l'on liste tous les entiers naturels inférieurs à 10 qui soient soit multiple de 3, soit multiple de 5, on obtient 3, 5, 6 et 9 dont la somme fait $3+5+6+9=23$.

Écrire la fonction sans argument `probleme_1()` qui renvoie la somme de tous les entiers multiples de 3 ou de 5 qui soient strictement inférieurs à 1000.

Stop GitHub
Allez sur Github Desktop pour faire un commit. Choisissez vous-même (avec pertinence) le résumé.
Pensez aussi à appuyer sur le bouton «Push origin» en haut à droite pour mettre à jour sur le web.

II.4 ProjectEuler numéro 48

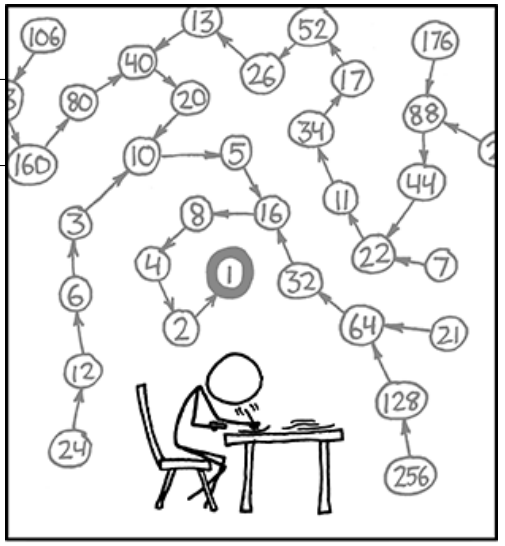
On peut calculer la somme $1^1+2^2+3^3+\cdots+10^{10}=10\,405\,071\,317$.

Écrire la fonction sans argument `probleme_48()` qui renvoie le nombre constitué des 10 derniers chiffres de la somme $1^1+2^2+3^3+\cdots+1000^{1000}$.

Stop GitHub
Allez sur Github Desktop pour faire un commit. Choisissez vous-même (avec pertinence) le résumé.
Pensez aussi à appuyer sur le bouton «Push origin» en haut à droite pour mettre à jour sur le web.

Partie III

Conjecture de Collatz



THE COLLATZ CONJECTURE STATES THAT IF YOU PICK A NUMBER, AND IF IT'S EVEN DIVIDE IT BY TWO AND IF IT'S ODD MULTIPLY IT BY THREE AND ADD ONE, AND YOU REPEAT THIS PROCEDURE LONG ENOUGH, EVENTUALLY YOUR FRIENDS WILL STOP CALLING TO SEE IF YOU WANT TO HANG OUT.

XkcD résume merveilleusement bien toute la beauté de la procédure de Collatz dans le dessin ci-contre. L'idée est de construire une suite récurrente en appliquant successivement une même fonction f, c'est-à-dire que l'on ait $u_{n+1}=f(u_n)$. Sauf que la fonction f est un peu spéciale : elle n'a pas le même comportement si l'entier donné en argument est pair ou impair. Plus particulièrement, elle s'écrit

$$f : n \longmapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Par exemple, avec $u_0=13$, on obtient

$$13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \text{ etc.}$$

C'est ce qu'on appelle la suite de Collatz (ou suite de Syracuse) du nombre 13. Après avoir atteint le nombre 1, la suite de valeurs

(1,4,2,1,4,2,1,4,2...) se répète indéfiniment en un cycle de longueur 3 appelé cycle trivial. La conjecture de Collatz est l'hypothèse selon laquelle la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1. Bien qu'elle ait été vérifiée pour les 5,7 premiers milliards de milliards d'entiers et en dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture défie depuis de nombreuses années les mathématiciens. Paul Erdös a dit à son propos que « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes »...

1. Implémenter la fonction `f(n)` ci-dessus. Stocker dans la variable `trente_premiers` la liste `[f(1), f(2), f` (calculée de manière automatique, cela va sans dire...).

Stop GitHub
Allez sur Github Desktop pour faire un commit. Choisissez vous-même (avec pertinence) le résumé. Pensez aussi à appuyer sur le bouton «Push origin» en haut à droite pour mettre à jour sur le web.

2. Soit $u_0 = a \in \mathbb{N}^*$. On appelle orbite de a la liste des termes de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ jusqu'à ce que l'on tombe sur 1 (compris). Écrire le programme `orbite(a)` qui prend comme entrée l'entier `a` et stocker dans la variable `orbite_de_27` l'orbite de 27.

Stop GitHub
Allez sur Github Desktop pour faire un commit. Choisissez vous-même (avec pertinence) le résumé. Pensez aussi à appuyer sur le bouton «Push origin» en haut à droite pour mettre à jour sur le web.

Plusieurs caractéristiques d'une orbites peuvent être explorées :

— son « temps de vol » correspond au nombre total d'entiers visités sur l'orbite.

— son « altitude » est donnée par le plus grand entier visité sur l'orbite.

— son « temps de vol en altitude » correspond au nombre d'étapes avant de passer strictement en dessous du nombre de départ.

— et enfin son « temps de vol avant la chute » correspond au nombre d'étapes minimum après lequel on ne repasse plus au-dessus de la valeur de départ.

Par exemple pour l'orbite du nombre 13, l'altitude vaut 40 (maximum de la suite), le temps de vol vaut 10, le temps de vol en altitude vaut 3 (on passe à $10 < 13$ lors de la 3^e étape) et le temps de vol avant la chute vaut 6 (on passe à $8 < 13$ lors de la 6^e itération de la fonction `f`).

3. Écrire une fonction `temps_de_vol(a)` qui renvoie le temps de vol correspondant à l'orbite de `a`.

Stop GitHub
Allez sur Github Desktop pour faire un commit. Choisissez vous-même (avec pertinence) le résumé. Pensez aussi à appuyer sur le bouton «Push origin» en haut à droite pour mettre à jour sur le web.

4. Écrire une fonction `altitude(a)` qui renvoie l'altitude de l'orbite de `a`. Pour s'entraîner, on implémentera la recherche du maximum « à la main ».

Stop GitHub
Allez sur Github Desktop pour faire un commit. Choisissez vous-même (avec pertinence) le résumé. Pensez aussi à appuyer sur le bouton «Push origin» en haut à droite pour mettre à jour sur le web.

5. Écrire une fonction `temps_en_altitude(a)` qui renvoie le temps de vol en altitude correspondant à l'orbite de `a`. On prendra comme convention que ce temps vaut 1 si `a` vaut initialement 1.

Stop GitHub
Allez sur Github Desktop pour faire un commit. Choisissez vous-même (avec pertinence) le résumé. Pensez aussi à appuyer sur le bouton «Push origin» en haut à droite pour mettre à jour sur le web.

6. Écrire une fonction `temps_avant_chute(a)` qui renvoie le temps de vol avant la chute pour l'orbite de `a`. À nouveau, on prend comme convention qu'il vaut 1 si `a` vaut initialement 1.

Stop GitHub
Allez sur Github Desktop pour faire un commit. Choisissez vous-même (avec pertinence) le résumé. Pensez aussi à appuyer sur le bouton «Push origin» en haut à droite pour mettre à jour sur le web.

À présent que l'on dispose de ces outils, utilisons-les pour faire un peu de « data-mining » (variante autour du ProjectEuler numéro 14).

7. Pour des entiers de départ de valeur strictement inférieures à un million, déterminer à chaque fois
   (a) celui qui monte le plus haut en altitude et la valeur de cette altitude maximale (à stocker dans la liste `le_plus_haut` qui aura donc deux éléments `[a,altitude(a)]`).
   (b) celui dont le temps de vol est le plus long et la valeur de ce temps de vol (à stocker dans la liste `le_plus_long`).
   (c) celui dont le temps de vol en altitude est le plus long et la valeur de ce temps de vol (à stocker dans la liste `le_plus_long_en_altitude`).
   (d) celui dont le temps de vol avant la chute est le plus long et la valeur de ce temps de vol (à stocker dans la liste `le_plus_long_avant_la_chute`).

Stop GitHub
Allez sur Github Desktop pour faire un commit. Choisissez vous-même (avec pertinence) le résumé. Pensez aussi à appuyer sur le bouton «Push origin» en haut à droite pour mettre à jour sur le web.

8. Ne trouvez-vous pas que la procédure suggérée fasse un peu « gachis » ? Implémentez une procédure unifiée qui puisse effectuer tous les calculs précédents en moins de temps (en sacrifiant peut-être un peu sur l'autel de la simplicité de conception). Estimez le gain de temps que l'on peut espérer et mesurez-le (via un `import time` et à l'aide de `time.clock()`, plus d'info avec `help(time.clock)`). N'oubliez pas de tester votre procédure en retrouvant les résultats précédent

Stop GitHub
Allez sur Github Desktop pour faire un commit. Choisissez vous-même (avec pertinence) le résumé. Pensez aussi à appuyer sur le bouton «Push origin» en haut à droite pour mettre à jour sur le web.