☐ ***Exercice*** 1.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition. Que peut on en déduire ?

2) (a) Montrer que $f'(x) = (-x^2 + x + 2)e^{-x}$.
   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3) (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur $\mathbb{R}$.
   (b) Donner les valeurs approchées des solutions α et β à 10^{-2} près.
   (c) En déduire le tableau de signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4) Déterminer une équation de la tangente (d) à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

5) Dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$, construire la courbe représentative de la fonction f et la droite (d).

6) On considère l'algorithme ci-dessous :

```
def f(x):
    return (x**2+x-1)*exp(-x)
def dichotomie (f,a,b,h) :
    while b-a>h :
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m) > 0:
            a = ...........
        else :
            b = ...........
    print("a=",a,"b=",b)
```

Compléter l'algorithme ci-dessus pour déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

☐ ***Exercice*** 2.
Dans l'espace muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2\ ;\ 1\ ;\ 4)$, $(4\ ;\ -1\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ 3\ ;\ 2)$ et $(4\ ;\ 3\ ;\ -2)$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

2) Soit M un point de la droite (CD).
   (a) Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.
   (b) On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3\ ;\ 3\ ;\ -1)$. Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
   (c) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.

3) (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).
   (d) Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{8}{3}\right)$.

4) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

□ ***Exercice*** 3.
Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80% de ses boîtes chez le fournisseur A et 20% chez le fournisseur B.

10% des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20% de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- événement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- événement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- événement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1) Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
   (a) Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap \bar{S}$?
   (b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.
2) On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
   Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

□ ***Exercice*** 4.
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 2}$ et $u_0 = 0$.

1) (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+3}{x+2}$.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$
2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.
3) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4) En déduire la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

□ ***Exercice*** 5.
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(2 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) et la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1+2t \\ y & = & -2+t \\ z & = & 4-t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$$

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

   Réponse A : M(2 ; 1 ; −1) ; **Réponse B :** N(−3 ; −4 ; 6) ;
   Réponse C : P(−3 ; −4 ; 2) ; **Réponse D :** Q(−5 ; −5 ; 1).

2. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ admet pour coordonnées :

   Réponse A : $\begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$; **Réponse B :** $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
   Réponse C : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **Réponse D :** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

Réponse A : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Réponse B : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Réponse C : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Réponse D : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

4. Une équation cartésienne du plan passant par le point C et orthogonal à la droite Δ est :

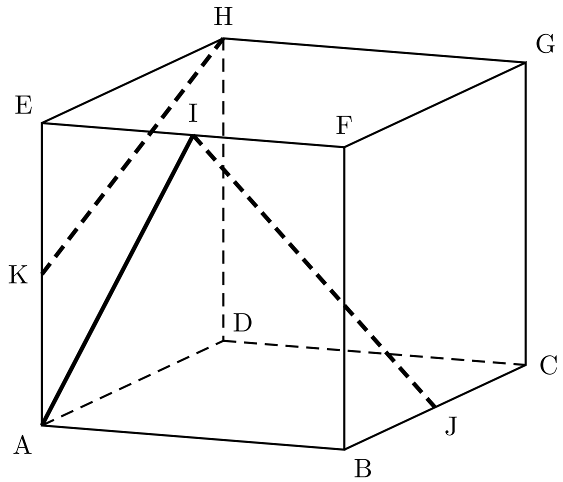
Réponse A : $x - 2y + 4z - 6 = 0$;
Réponse B : $2x + y - z + 1 = 0$;
Réponse C : $2x + y - z - 1 = 0$;
Réponse D : $y + 2z - 5 = 0$.

5. On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

Réponse A : $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ;
Réponse B : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
Réponse C : D a pour coordonnées $(3\ ;\ -1\ ;\ -1)$;
Réponse D : les points A, B, C et D sont alignés.

☐ ***Exercice*** 6. **Les questions 1. à 5. de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante**

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse,

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

2. (a) Donner les coordonnées des points I et J.
   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + t \\ z = 8 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

5. Montrer que le point $L(4\,;0\,;3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5\,;3\,;1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

☐ ***Exercice*** 7.
Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0,98$ (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0,995$ (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.

On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».

On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.
3. (a) Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?
   (b) Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à $0,95$.
   Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

☐ ***Exercice*** 8.
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5 \;;$$

et pour tout entier naturel n :

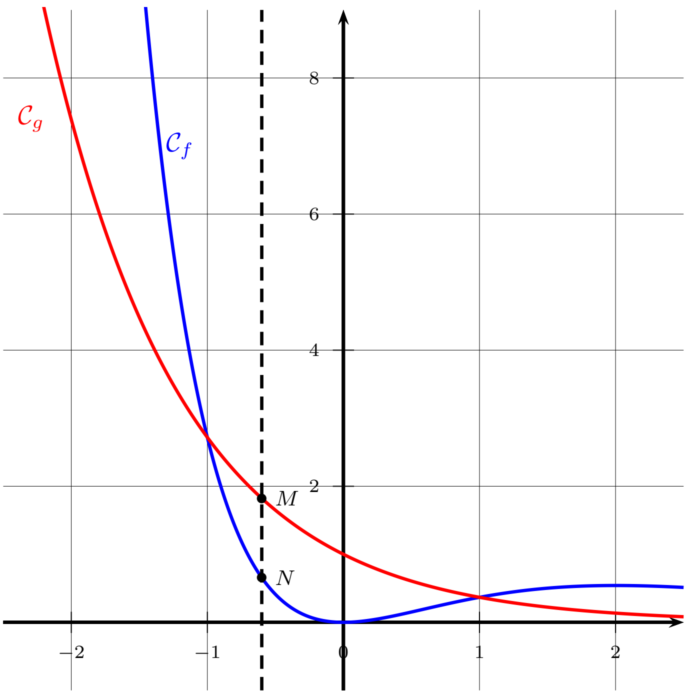
$$\begin{cases} u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.
   (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.
   (b) Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
   On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0 = 5$.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n).

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4. (a) Démontrer que $\ell = \ell'$.
   (b) On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
   Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à -dire que pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = c_n$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.
   (c) Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ'.

☐ ***Exercice*** 9.



Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

La question 3 est indépendante des questions 1 et 2.

1. (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
   (b) Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, on considère les points M de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ et N de coordonnées $(x\ ;\ g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN. On admet que : $d(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}$.

   On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ et on note d' sa fonction dérivée.

   (a) Montrer que $d'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2x - 1\right)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
   (c) Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale, et donner une valeur approchée à $0,1$ près de la distance M_0N_0.
3. Soit Δ la droite d'équation $y = x + 2$.

   On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - x - 2$.

   En étudiant le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, déterminer le nombre de points d'intersection de la droite Δ et de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Corrigé exercice 1

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition. Que peut on en déduire ?

Solution

$\lim_{x\to-\infty}(x^2+x-1)=+\infty$
$\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$
Par produit, on en conclut que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

La limite en $+\infty$ donne une forme indéterminée du type « $+\infty\times 0$ ».
$f(x)=(x^2+x-1)e^{-x}=x^2e^{-x}+xe^{-x}-e^{-x}=\frac{x^2}{e^x}+\frac{x}{e^x}-e^{-x}$
Or, par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.
De plus, $\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}=0$.
On peut donc en conclure, par composition, que $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$.
Ceci nous permet donc d'affirmer que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}-e^{-x}=0$

On en déduit que la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2) (a) Montrer que $f'(x)=(-x^2+x+2)e^{-x}$.

Solution

La fonction f est de la forme $u\times v$ avec $u(x)=x^2+x-1$ et $v(x)=e^{-x}$.
Ainsi $u'(x)=2x+1$ et $v'(x)=-e^{-x}$.
On peut donc en déduire que :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1)e^{-x}-(x^2+x-1)e^{-x} \\ &= (2x+1-x^2-x+1)e^{-x} \\ &= (-x^2+x+2)e^{-x} \end{aligned}$$

(b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Solution

$f'(x)=0 \iff (-x^2+x+2)e^{-x}=0 \iff -x^2+x+2=0$
$\Delta=1^2-4\times(-1)\times 2=9$
Ainsi $x_1=\frac{-1-\sqrt{9}}{-2}=2$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{9}}{-2}=-1$
On peut donc en déduire le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$5e^{-2}$	$\searrow$	0

3) (a) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions α et β sur $\mathbb{R}$.

Solution

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1]$. On peut appliquer le corollaire du TVI sur cet intervalle pour affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty;-1]$ que nous appellerons α.

De même, la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-1;2]$. On peut appliquer le corollaire du TVI sur cet intervalle pour affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1;2]$ que nous appellerons β.
Enfin, sur l'intervalle $[2;+\infty[$, on a $f(x)>0$.
On peut donc en conclure que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.

(b) Donner les valeurs approchées des solutions α et β à 10^{-2} près.

Solution

Avec la calculatrice, on obtient $\alpha \approx -1,62$ et $\beta \approx 0,62$.

(c) En déduire le tableau de signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Solution

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4) Déterminer une équation de la tangente (d) à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

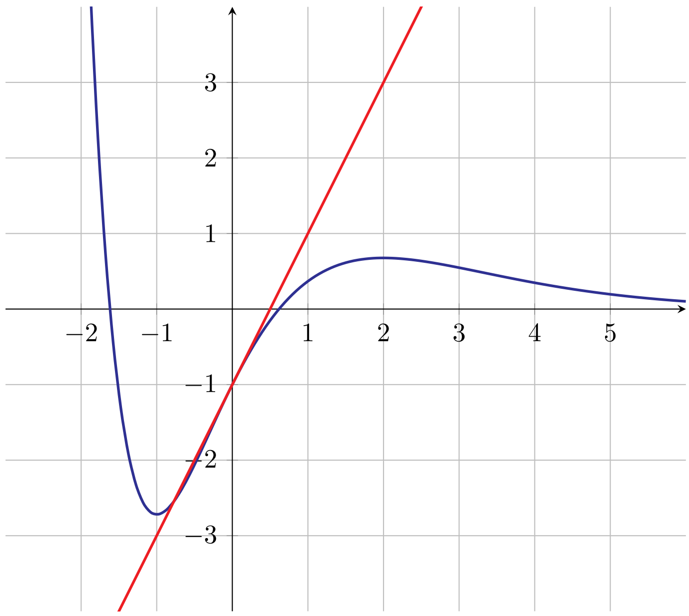
Solution

On a $f'(0)=2$ et $f(0)=-1$, donc une équation de la tangente (d) au point d'abscisse 0 est

$$y = f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$y = 2x-1$$

5) Dans un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, construire la courbe représentative de la fonction f et la droite (d).

Solution



6) Compléter l'algorithme pour déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Solution

```
def f(x):
    return (x**2+x-1)*exp(-x)
def dichotomie (f,a,b,h) :
    while b-a>h :
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m) > 0:
            a = m
        else :
            b = m
    print("a=",a,"b=",b)
```

Corrigé exercice 2

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

Solution

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\vec{\mathrm{u}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD), et (CD) passe par C$(0\ ;\ 3\ ;\ 2)$

on obtient une représentation paramétrique de (CD) : $\begin{cases}x = t\\ y = 3\\ z = 2 - t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

2) Soit M un point de la droite (CD).

(a) Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

Solution

B$(4\ ;\ -1\ ;\ 0)$.
Soit t le paramètre associé à M alors $M(t\ ;\ 3\ ;\ 2-t)$.
Alors $BM^2 = (t-4)^2 + (4)^2 + (2-t)^2 = 2t^2 - 12t + 36 = 2(t^2 - 6t + 18)$.
BM est minimale quand BM^2 l'est c'est-à-dire quand $t^2 - 6t + 18$ est minimal.
On sait que tout polynôme de la forme $at^2 + bt + c$ avec $a > 0$ admet un minimum en $t = -\dfrac{b}{2a}$
ici BM sera donc minimale pour $t = 3$ soit pour $M(3\ ;\ 3\ ;\ -1)$.

(b) On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3\ ;\ 3\ ;\ -1)$. Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

Solution

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{HB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$.
On en déduit que (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

(c) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.

Solution

D'après ce qui précède, on a (BH) est la hauteur issue de B dans BCD.
On a alors $\mathcal{A}_{\mathrm{BCD}} = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{CD} \times \mathrm{BH} = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{32} \times \sqrt{18} = \sqrt{144} = 12$ (en u. a.).
L'aire de BCD est donc bien de 12 cm^2.

3) (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

Solution

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ ne sont évidement pas colinéaires donc B, C et D définissent bien un plan.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC} = -8+4+4 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD} = 8+0-8 = 0$.

$\vec{n}$ est donc bien normal au plan (BCD) car orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

Solution

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (BCD) donc $(BCD):\ 2x+y+2z+d=0$.

$C(0\ ;\ 3\ ;\ 2)$ appartient à (BCD) donc $2x_C+y_C+2z_C+d=0$ ce qui donne $d=-7$.

Finalement $(BCD)\ :\ 2x+y+2z-7=0$.

(c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

Solution

Δ est orthogonale au plan (BCD) donc elle admet $\vec{n}$ pour vecteur directeur, on a alors

$$\Delta\ :\ \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 4+2t \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

(d) Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$.

Solution

I est un point de (BCD) donc $2x_I+y_I+2z_I-7=0$

De plus $I\in\Delta$ donc il existe un réel t tel que

$2(2+2t)+(1+t)+2(4+2t)-7=0 \iff 9t=-6 \iff t=-\frac{2}{3}$.

On en déduit $I\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$.

Remarque : on pouvait aussi simplement vérifier que les coordonnées proposées correspondaient à un point de Δ et à un point de (BCD).

4) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Solution

Δ est perpendiculaire au plan (BCD) en I et passe par A, on en déduit que AI est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ de base BCD.

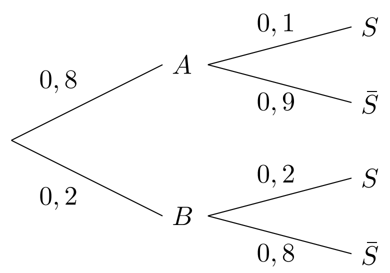
$AI = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = 2$.

$\mathcal{V}_{\text{ABCD}} = \frac{1}{3}\times AI\times\mathcal{A}_{\text{BCD}} = 8$ (en cm^3).

Le volume du tétraèdre est 8 cm^3.

Corrigé exercice 3 1) Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.

Solution



(a) Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap \bar{S}$?

Solution

$P(B \cap \bar{S}) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$

(b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.

Solution

On utilise la formule des probabilités totales :
$P(\bar{S}) = P(A \cap \bar{S}) + P(B \cap \bar{S}) = 0,8 \times 0,9 + 0,16 = 0,88$

2) On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Solution

$$P_S(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0,2 \times 0,2}{1 - 0,88} = \frac{0,04}{0,12} \approx 0,33$$

Corrigé exercice 4

1) (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+3}{x+2}$.

Solution

f est dérivable sur $[0; +\infty[$.
f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 5x + 3$ et $v(x) = x + 2$.
On a alors $u'(x) = 5$ et $v'(x) = 1$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5(x+2) - (5x+3)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{7}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $(x+2)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$. D'où :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\frac{3}{2}$ $\nearrow$

(b) Résoudre l'équation $f(x)=x$

Solution

$f(x)=x \iff \dfrac{5x+3}{x+2}=x \iff 5x+3=x^2+2x \iff x^2-3x-3=0$
$\Delta=(-3)^2-4\times 1\times(-3)=21$
Ainsi $x_1=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$ et $x_2=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$.
f étant définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, on en conclut que l'unique solution est $x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant u_n\leqslant 4$.

Solution

Soit P_n : « $0\leqslant u_n\leqslant 4$ ».
Initialisation : $u_0=0$ et ainsi $0\leqslant u_0\leqslant 4$.
On peut donc dire que P_0 est vraie.
Hérédité : Supposons P_k vraie pour un entier naturel k fixé, c'est à dire $0\leqslant u_k\leqslant 4$.
Montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est à dire $0\leqslant u_{k+1}\leqslant 4$.
On sait que $0\leqslant u_k\leqslant 4$.
Or la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$. On peut donc affirmer que $f(0)\leqslant f(u_k)\leqslant f(4)$.
Ainsi $\dfrac{3}{2}\leqslant u_{k+1}\leqslant\dfrac{23}{6}$ et donc $0\leqslant u_{k+1}\leqslant 4$.
On en conclut donc que P_{k+1} est vraie.
P_0 est vraie et P_n est héréditaire. On peut donc en conclure que P_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Solution

Soit P_n : « $u_{n+1}\geqslant u_n$ ».
Initialisation : $u_0=0$ et $u_1=\dfrac{3}{2}$.
Ainsi $u_1\geqslant u_0$.
On peut donc dire que P_0 est vraie.
Hérédité : Supposons P_k vraie pour un entier naturel k fixé, c'est à dire $u_{k+1}\geqslant u_k$.
Montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est à dire $u_{k+2}\geqslant u_{k+1}$.
On sait que $u_{k+1}\geqslant u_k$.
Or la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$. On peut donc affirmer que $f(u_{n+1})\geqslant f(u_n)$.
Ainsi $u_{k+2}\geqslant u_{k+1}$.
On en conclut donc que P_{k+1} est vraie.
P_0 est vraie et P_n est héréditaire. On peut donc en conclure que P_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4) En déduire la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Solution

D'après les questions 2 et 3, la suite (u_n) est croissante et majorée. On peut donc en conclure que la suite (u_n) est convergente.
De plus, $u_{n+1}=f(u_n)$. La limite l de la suite vérifie donc $f(l)=l$.
D'après la question 1b, on peut donc en conclure que $l=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$

Corrigé exercice 5 1. Pour $t=-2$, on trouve les coordonnées de B.

2. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ admet pour coordonnées : $\big(2-1\ ;\ 1-0\ ;\ 0-2\big)$ soit $\big(1\ ;\ 1\ ;\ -2\big)$

3. $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\mathrm{AB})$ s'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ soit :

$\begin{cases} x-1 &= 1\times t \\ y-0 &= 1\times t \\ z-2 &= -2\times t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= t \\ z &= 2-2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$

En posant $t = 1-u$, on obtient :

$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathrm{AB}) \iff \begin{cases} x &= 2-u \\ y &= 1-u \\ z &= 2u \end{cases} \quad u\in\mathbb{R}$. Donc réponse B.

4. La droite Δ a pour vecteur directeur $\delta\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

   Soit $\mathcal{P}$ le plan dont on cherche une équation.

   $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\delta = 0 \iff 2(x-0)+1(y-1)-1(z-2)=0 \iff$
   $2x+y-1-z+2=0 \iff 2x+y-z+1=0.$

5. En faisant apparaître le point A dans chaque vecteur (Chasles), on obtient :
   $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}} \iff \overrightarrow{\mathrm{AD}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$: le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

Corrigé exercice 6 En prenant le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ on a :

$$\mathrm{A}(0\ ;\ 0\ ;\ 0),\ \mathrm{B}(0\ ;\ 0\ ;\ 0),\ \mathrm{C}(1\ ;\ 1\ ;\ 0),\ \mathrm{D}(0\ ;\ 1\ ;\ 0),\ \mathrm{E}(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$$

$$\mathrm{F}(1\ ;\ 0\ ;\ 1),\ \mathrm{G}(1\ ;\ 1\ ;\ 1),\ \mathrm{H}(0\ ;\ 1\ ;\ 1),\ \mathrm{I}(0,5\ ;\ 0\ ;\ 1),\ \mathrm{J}(1\ ;\ 0,5\ ;\ 0),\ \mathrm{K}(0\ ;\ 0\ ;\ 0,5)$$

1. On a $\overrightarrow{\mathrm{AI}}(0,5\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{KH}}(0\ ;\ 1\ ;\ 0,5)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.

2. (a) Voir plus haut.

   (b) On a $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}(0,5\ ;\ 0,5\ ;\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$.
   On a $2\overrightarrow{\mathrm{IJ}}+2\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
   Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est donc une combinaison des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

3. d_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{u_1}}(1\ ;\ -2\ ;\ 3)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{u_2}}(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles

4. Le plan a pour vecteur normal le vecteur $\vec{\mathrm{p}}(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{u_2}}(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$.
   Or $\vec{\mathrm{p}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{u_2}} = 1+3-4=0$: les vecteurs sont orthogonaux donc la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

5. **Méthode 1**

   Soit Δ la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ contenant M. Cette droite a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{\mathrm{p}}$, donc une équation paramétrique de Δ est :

   $\begin{cases} x &= 5+1t \\ y &= 3+3t \\ z &= 1-2t \end{cases} ,t\in\mathbb{R}.$

   Le projeté L, de M sur le plan $\mathcal{P}$ a ses coordonnées qui vérifient les quatre équations :

   $\begin{cases} x &= 5+1t \\ y &= 3+3t \\ z &= 1-2t \\ x+3y-2z+2 &= 0 \end{cases} ,t\in\mathbb{R}. \Rightarrow 5+t+3(3+3t)-2(1-2t)+2=0 \iff$

   $5+t+9+9t-2+4t+2=0 \iff 14t+14=0 \iff t+1=0 \iff t=-1.$

   En reportant dans les trois premières équations du système, on trouve les coordonnées de L projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$:

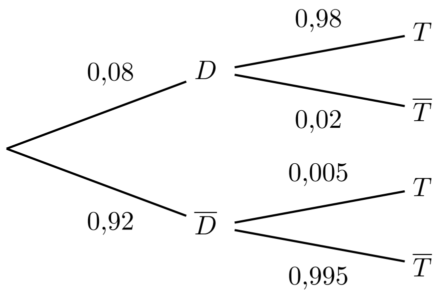
   $\begin{cases} x &= 5-1 \\ y &= 3+3\times(-1) \\ z &= 1-2\times(-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 4 \\ y &= 0 \\ z &= 3 \end{cases}$

   Donc le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$ est le le point $\mathrm{L}(4\,;0\,;3)$.

Méthode 2

On a $\overrightarrow{\mathrm{ML}}(-1\ ;\ -3\ ;\ 2)$, donc $\overrightarrow{\mathrm{ML}} = -\vec{\mathrm{p}}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

D'autre part $\mathrm{L}(4\,;0\,;3) \in \mathcal{P} \iff 4+3\times 0-2\times 3+2=6-6=0$ est vraie, donc L est le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$.

Corrigé exercice 7 1. 

2. D'après la loi des probabilités totales :
   $P(T) = P(D\cap T) + P\left(\overline{D}\cap T\right)$: or
   $P(D\cap T) = P(D)\times P_D(T) = 0,08\times 0,98 = 0{,}078\,4$ et
   $P\left(\overline{D}\cap T\right) = P\left(\overline{D}\right)\times P_{\overline{D}}(T) = 0,92\times 0,005 = 0{,}004\,60$. Donc :
   $P(T) = 0{,}078\,4 + 0{,}004\,6 = 0,083$.

3. (a) La probabilité conditionnelle $P_T(D) = \dfrac{P(T\cap D)}{P(T)} = \dfrac{P(D\cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}078\,4}{0,083} \approx 0{,}944\,5$, soit 0,945 au millième près.
   (b) D'après la question précédente $0,945 < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

Corrigé exercice 8

1. • $u_1 = \dfrac{3\times 16+2\times 5}{5} = \dfrac{58}{5}$;
   • $v_1 = \dfrac{16+5}{2} = \dfrac{21}{2}$.

2. (a) On a quel que soit $n\in\mathbb{N}$,
   $w_{n+1} = u_{n+1}-v_{n+1} = \dfrac{3u_n+2v_n}{5} - \dfrac{u_n+v_n}{2} = \dfrac{6u_n+4v_n-5u_n-5v_n}{10} = \dfrac{u_n-v_n}{10} = \dfrac{w_n}{10}$.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'égalité $w_{n+1} = \dfrac{1}{10}w_n$ montre que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10} = 0,1$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 16-5 = 11$.
   On sait qu'alors pour tout naturel n, $\quad w_n = 11\times(0,1)^n$.
   (b) Comme $0,1>0 \Rightarrow 0,1^n > 0$ et $11>0$, donc la suite (w_n) est une suite de nombres supérieurs à zéro.
   D'autre part $0<0,1<1$ entraine que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,1^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

3. (a) Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}-u_n = \dfrac{3u_n+2v_n}{5} - u_n = \dfrac{3u_n+2v_n}{5} - \dfrac{5u_n}{u_n} = \dfrac{-2u_n+2v_n}{5} = -\dfrac{2}{5}(u_n-v_n) = -\dfrac{2}{5}w_n = -\dfrac{4}{10}w_n = -0,4w_n$
   (b) On a vu à la question 2. b. que $w_n>0$, quel que soit le naturel n, donc $-0,4w_n<0$ et par conséquent :
   $u_{n+1}-u_n<0 \iff u_{n+1}<u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.
   Initialisation : On a $u_0 = 16\geqslant 5$: la proposition est vraie au rang $n=0$.
   Hérédité : on suppose que pour $n\in\mathbb{N}$, $\quad$ on a $u_n\geqslant 5$.
   On a donc $3u_n\geqslant 15$ (1) et comme on a admis que $v_n\geqslant 5$, on a $2v_n\geqslant 10$ (2).
   On peut ajouter membre à membre (1) et (2) pour obtenir :
   $3u_n+2v_n\geqslant 25$ d'où en multipliant par le nombre positif $\dfrac{1}{5}$:
   $\dfrac{3u_n+2v_n}{5}\geqslant 5$ et finalement $u_{n+1}\geqslant 5$.
   Conclusion : la minoration par 5 est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$; d'après le principe de récurrence on a donc quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $\quad u_n\geqslant 5$.
   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 5 : d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell\geqslant 5$.

4. (a) On a vu à la question 2.b. que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ ou encore que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.
   Les deux suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et donc que $\ell = \ell'$.

   (b) On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
   Donc : $c_{n+1} = 5u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2(u_n + v_n) = 3u_n + 2v_n + 2u_n + 2v_n$
   $= 5u_n + 4v_n = c_n$.
   Donc la suite (c_n) est constante.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = c_0 = 5u_0 + 4v_0 = 5 \times 16 + 4 \times 5 = 80 + 20 = 100$.

   (c) Puisque $c_n = 5u_n + 4v_n$ et que (u_n) et (v_n) ont mÃªme limite ℓ, on a donc :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 100 = 100 = 5\ell + 4\ell = 9\ell$.
   $9\ell = 100$ donc $\ell = \dfrac{100}{9}$.