☐ ***Exercice*** 1 (D'après bac S, Pondichéry, mai 2018.).
Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de $1\,000\,°\text{C}$. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.

On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.

La température du four est exprimée en degré Celsius (° C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à $70\,°\text{C}$. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

Partie A

Pour un nombre entier naturel n, on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1\,000$.

La température T_n est calculée par l'algorithme suivant :

```
T ← 1 000
Pour i allant de 1 à n
        T ← 0,82 × T + 3,6
Fin Pour
```

1) Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.

2) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.

3) Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

Partie B

Dans cette partie, on note t le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.

La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif, par :

$$f(t) = a\text{e}^{-\frac{t}{5}} + b,$$

où a et b sont deux nombres réels.

On admet que f vérifie la relation suivante : $f'(t) + \dfrac{1}{5}f(t) = 4$.

1) Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement, la température du four est de $1\,000\,°\text{C}$, c'est-à-dire que $f(0) = 1\,000$.

2) Pour la suite, on admet que, pour tout nombre réel positif t :

$$f(t) = 980\text{e}^{-\frac{t}{5}} + 20.$$

a) Déterminer la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.

b) Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

En déduire son tableau de variations complet.

c) Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

Corrigé exercice 1
Partie A

1) On cherche T_4 donc on applique l'algorithme pour $n = 4$.

À l'aide de la calculatrice on trouve $T_4 \approx 463\,°\mathrm{C}$.

2) On pose P_n : « $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$ »

- ***Initialisation*** : pour $n = 0$, $T_0 = 1\,000$ et $980 \times 0,82^0 + 20 = 1\,000$.
  P_0 est donc vraie.
- ***Hérédité*** : On suppose, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, que P_n est vraie, c'est-à-dire $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.
  Montrons alors que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $T_{n+1} = 980 \times 0,82^{n+1} + 20$.

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 0,82T_n + 3,6 \\ &= 0,82 \times (980 \times 0,82^n + 20) + 3,6 \\ &= 980 \times 0,82^{n+1} + 16,4 + 3,6 \\ &= 980 \times 0,82^{n+1} + 20 \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$ or elle est vérifiée à ce rang 0 donc par le principe de récurrence on a bien, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.

3) On cherche le plus petit entier naturel n tel que $T_n \leqslant 70$.

On peut utiliser la calculatrice pour trouver $T_{14} \approx 80,9 > 70$ et $T_{15} \approx 69,9 < 70$ donc il faut attendre au minimum 15 heures avant de pouvoir ouvrir le four sans dommage.

Partie B

1) $f(0) = 1\,000 \Leftrightarrow a + b = 1\,000$ et $f'(0) + \dfrac{1}{5}f(0) = 4 \;\Leftrightarrow\; f'(0) = -196$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -\dfrac{1}{5}a\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$ d'où $f'(0) = -196 \Leftrightarrow \dfrac{1}{5}a = 196$. On a donc

$$\begin{cases} a + b = 1\,000 \\ \dfrac{1}{5}a = 196 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 20 \\ a = 980 \end{cases}$$

Finalement on a $\forall t \in [0\,;\,+\infty[$, $f(t) = 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20$

2)

$$f(t) = 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20.$$

a) $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(-\dfrac{t}{5}\right) = -\infty$, donc en posant $T = -\dfrac{t}{5}$, $\lim\limits_{T\to-\infty} \mathrm{e}^T = 0$
Par opération sur les limites on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

b) D'après la question 1, $\forall t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = -196\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$, d'où $f'(t) < 0$.
On en déduit que f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	$1\,000$ ↘	20

c) On cherche à résoudre l'équation $f(t) = 70$.
Sur $[0\,;\,+\infty[$, f est continue et strictement décroissante à valeurs dans $]20\,;\,1\,000]$, or $70 \in]20\,;\,1\,000]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 70$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,+\infty[$.
Par dichotomie on trouve $\alpha \approx 14,9$ et comme f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$, on en déduit que $f(t) \leqslant 70 \Leftrightarrow t \geqslant \alpha$.
D'après ce modèle on peut donc ouvrir le four après environ 15 heures de refroidissement.