Diskrete Strukturen

WS 2025/26

Daniel Robertz
RWTH Aachen

(basierend auf Folien von Gerhard Hiß)

Grundlagen

Erster Teil: Grundlagen

Kapitel 1: Mathematische Grundbegriffe

1.1 Aussagen

Begriff (*Aussage*)

„Sprachlicher Ausdruck“, welcher entweder wahr oder falsch ist.

Beispiele

- „Die RWTH Aachen hat eine Mensa.“
- „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“
- „$2 + 3 = 6$.“
- „Zu jeder reellen Zahl y gibt es eine reelle Zahl x mit $y = x^2$.“
- „Jede gerade Zahl, welche größer als 2 ist, ist eine Summe aus zwei Primzahlen.“

Gegenbeispiele

- „Es ist kalt.“
- „$a^2 + b^2 = c^2$.“

Zusammengesetzte Aussagen

Beispiele

„Franz fährt Fahrrad und Susanne speist Spargel“
ist zusammengesetzt aus

- „Franz fährt Fahrrad.“
- „Susanne speist Spargel.“

„Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.“
ist zusammengesetzt aus

- „Es regnet.“
- „Die Straße ist nass.“

„Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, dann ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist.“ ist zusammengesetzt aus

- „Der Hahn kräht auf dem Mist.“
- „Das Wetter ändert sich.“
- „Das Wetter bleibt wie es ist.“

Zusammengesetzte Aussagen (Forts.)

Hypothese

Wahrheitswert von zusammengesetzten Aussagen hängt ab von

- logischer Struktur der zusammengesetzten Aussage
- Wahrheitswerte der Einzelaussagen
- *nicht* von den Einzelaussagen selbst

$\rightsquigarrow$ Aussagenlogik

Vorgehen

Jede Zusammensetzung von Aussagen wird durch ihre Wahrheitswerte in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Einzelaussagen definiert.

$\rightsquigarrow$ Wahrheitstafel

Zusammengesetzte Aussagen (Forts.)

Definition

Die *Negation* von Aussagen und die wichtigsten Zusammensetzungen von Ausssagen werden durch die folgende Wahrheitstafel definiert.

Wir schreiben 1 bezw. 0 für die Wahrheitswerte *wahr* bzw. *falsch*.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \operatorname{xor} B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1

Zusammengesetzte Aussagen (Forts.)

Definition (in Worten)

- Die *Negation* (*Verneinung*) $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.
- Die *Konjunktion* (*und*-Verknüpfung) $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist.
- Die *Disjunktion* (*oder*-Verknüpfung) $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn A oder B wahr ist oder beide wahr sind.
- Das *exklusive oder* $A \operatorname{xor} B$ ist genau dann wahr, wenn A oder B wahr ist, aber nicht beide wahr sind.
- Die *Subjunktion* (*wenn-dann*-Verknüpfung) $A \rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn A wahr ist und B falsch ist.
- Die *Bijunktion* (*genau-dann*-Verknüpfung) $A \leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A und B den gleichen Wahrheitswert besitzen.

Zusammengesetzte Aussagen (Forts.)

Beispiele

- Verneinung von „$2+3=5$“:
  „Es gilt nicht, dass $2+3=5$ ist“ oder
  „$2+3$ ist ungleich 5“.
- Verneinung von „Das Glas ist voll“:
  „Das Glas ist nicht voll“.
  (Nicht: „Das Glas ist leer“.)
- Verneinung von „Alle Gläser sind voll“:
  „Nicht alle Gläser sind voll“ oder
  „Es gibt ein Glas, das nicht voll ist“.
- „Wenn $2+3=6$, dann ist $2+3=7$“ ist wahr.

Zusammengesetzte Aussagen (Forts.)

Definition

Seien A und B Aussagen.

- Ist $A \to B$ wahr, dann schreiben wir $A \Rightarrow B$ und sagen:
  "*Aus A folgt B*" oder
  "*A impliziert B*" oder
  "*Wenn A, dann B*" oder
  "*A ist hinreichend für B*" oder
  "*B ist notwendig für A*".
- Ist $A \leftrightarrow B$ wahr, dann schreiben wir $A \Leftrightarrow B$ und sagen:
  "*A und B sind gleichbedeutend*" oder
  "*A und B sind äquivalent*" oder
  "*A genau dann, wenn B*" oder
  "*A dann und nur dann, wenn B*" oder
  "*A ist notwendig und hinreichend für B*".

Zusammengesetzte Aussagen (Forts.)

Das Zusammensetzen von Aussagen kann iteriert werden. Durch geeignete Klammerung (oder Konventionen) wird die Reihenfolge der Zusammensetzung klar gemacht.

Beispiel

Wahrheitswerte von $(A \vee B) \to (A \wedge C)$:

A	B	C			$(A \vee B) \to (A \wedge C)$
1	1	1			
1	1	0			
1	0	1			
1	0	0			
0	1	1			
0	1	0			
0	0	1			
0	0	0			

Logische Terme

Definition

- *Alphabet der Aussagenlogik*:
  - A, B, C, ...: *Variablen*
  - 0, 1: *Konstante*
  - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$: *Symbole*
  - (,): *Klammern*
- „Sinnvoll" aus dem Alphabet zusammengesetzte Wörter:
  - A, B, C, ... sind Wörter,
  - 0, 1 sind Wörter,

  und für Wörter F und G haben wir Wörter
  - $(\neg F)$
  - $(F) \wedge (G)$
  - $(F) \vee (G)$
  - $(F) \rightarrow (G)$
  - $(F) \leftrightarrow (G)$

Logische Terme (Forts.)

Definition
Ein *logischer Term* (oder eine *aussagenlogische Formel*) ist ein sinnvoll aus dem Alphabet der Aussagenlogik zusammengesetztes Wort.

Durch Belegung der Variablen mit Wahrheitswerten bekommt der Term selbst einen Wahrheitswert.

Logische Terme (Forts.)

Beispiel

Logische Terme:

- A
- 1
- $\neg B$
- $A \wedge B$
- $0 \vee 1$
- $A \vee (B \wedge (\neg C))$

Keine logischen Terme:

- $\vee D$
- $A \to B \to C$

Logische Terme (Forts.)

Beispiele

- „Es regnet.“ entspreche A
- „Es schneit.“ entspreche B
- „Die Straße ist nass.“ entspreche C
- „Die Straße ist trocken.“ entspreche D
- „Der Hahn kräht auf dem Mist.“ entspreche E
- „Das Wetter ändert sich.“ entspreche F
- „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“ entspreche G
- „$2 + 3 = 6$.“ entspreche H

Logische Terme (Forts.)

- $(A \vee B) \rightarrow C$
- $(A \vee B) \rightarrow D$
- $E \rightarrow (F \vee \neg F)$
- $A \rightarrow G$
- $(A \wedge E) \leftrightarrow H$
- $(A \wedge \neg G) \leftrightarrow H$

Logische Äquivalenz und Tautologien

Definition

Seien S und T logische Terme, definiert auf derselben Variablenmenge.

- S und T heißen *logisch äquivalent*, geschrieben $S \equiv T$, wenn S und T denselben Wahrheitswert haben für jede Belegung der Variablen.
- T heißt *Tautologie*, wenn $T \equiv 1$.

Beispiele

- $\neg(\neg A) \equiv A$
- $A \to B \equiv \neg A \vee B$
- $A \vee \neg A$ ist Tautologie
- $A \wedge \neg B$ ist keine Tautologie
- $(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ ist Tautologie.

Logische Äquivalenz und Tautologien (Forts.)

Beweis, dass $(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \land \neg B)$ Tautologie ist.

Beispiel

A	B				$(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \land \neg B)$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Logische Äquivalenz und Tautologien (Forts.)

Beispiele

- - $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
  - $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
- - $A \wedge 1 \equiv A$
  - $A \vee 0 \equiv A$
- - $A \wedge B \equiv B \wedge A$
  - $A \vee B \equiv B \vee A$
- - $A \wedge A \equiv A$
  - $A \vee A \equiv A$
- - $A \wedge \neg A \equiv 0$
  - $A \vee \neg A \equiv 1$
- - $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
  - $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- - $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
  - $A \vee (A \wedge B) \equiv A$

Logische Äquivalenz und Tautologien (Forts.)

Beispiele

Bedeutsame Tautologien sind:

- Modus Ponens:
$$(A \land (A \to B)) \to B$$
- Tertium non datur (Gesetz des ausgeschlossenen Dritten):
$$A \lor \neg A$$
- de Morgan-Gesetze:
$$\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B),$$
$$\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$$
- Kontrapositionsgesetz:
$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$$

Aussageformen

Definition

Eine *Aussageform* ist ein sprachlicher Ausdruck, der Variablen enthält, und der für jede Belegung aller vorkommenden Variablen mit konkreten Objekten zu einer Aussage wird.
(Diese letzte Bedingung führt dazu, dass die Auswahl der Objekte, mit denen die Variablen belegt werden können, i.A. eingeschränkt ist.)

Bemerkung

Eine Aussageform ist selbst keine Aussage. Die Zusammensetzung von Aussageformen mittels $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, etc. ist wieder eine Aussageform.

Aussageformen (Forts.)

Beispiele

- „Wenn $x > 0$, dann ist x ein Quadrat."
- „Person x hat mindestens 50% der Klausur-Punkte erzielt."
- $A(x)$: „Person x hat in der Klausur volle Punktzahl erzielt."
  $B(x)$: „Person x hat das Modul bestanden."
  Dann ist auch $A(x) \to B(x)$ eine Aussageform.

  Für jede Belegung der Variable x mit einer Person ist $A(x) \to B(x)$ eine wahre Aussage. Es gilt also $A(x) \Rightarrow B(x)$.

Konventionen

Konventionen

- Wir sagen: „Die Aussage A *gilt*“, falls A den Wahrheitswert 1 hat (wahr ist).
- $A := B$ bedeutet: Das Symbol A wird durch das Symbol B definiert.
- $A :\Leftrightarrow B$: Die Aussage A wird durch die Aussage B definiert (A hat per Definition den gleichen Wahrheitswert wie B).
- *Ein* bedeutet stets *mindestens ein* und ist von *genau ein* zu unterscheiden.
- In einer Aufzählung von Objekten $x_1, \ldots, x_n$ heißen $x_1, \ldots, x_n$ *paarweise verschieden*, wenn keine zwei Objekte der Aufzählung gleich sind. Davon zu unterscheiden ist *verschieden* im Sinne von *nicht alle gleich*.

Verwendung von logischen Symbolen

- in mathematischen Texten:
  - keine logische Symbole, ausschließlich Umgangssprache
  - Ausnahme: zur Präzisierung komplexer logischer Situationen
- in Vorträgen:
  - Symbole zur Abkürzung