Analysis für Informatiker

Skript zur Vorlesung

A. Krieg S. Walcher

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen University

Analysis für Informatiker

A. Krieg   S. Walcher

Prof. Dr. Aloys Krieg
Prof. Dr. Sebastian Walcher
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen University
D-52056 Aachen
E-Mail: krieg@rwth-aachen.de
walcher@mathA.rwth-aachen.de
Internet: http://www.mathA.rwth-aachen.de/

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript wurde nach einem ersten Durchlauf im WS 16/17 etwas überarbeitet und korrigiert. Es ist nach wie vor für den Gebrauch neben der Vorlesung und den Übungen der Veranstaltung „Analysis für Informatiker“ gedacht. Es hat somit unterstützende Funktion für die Lehrveranstaltung und beansprucht nicht, ein Lehrbuch zum Selbststudium zu sein. Ein sinnvoller Einsatz des Skripts ist deshalb mit aktivem Partizipieren bei allen Lehrangeboten des Moduls verbunden.

Vorausgesetzt werden gewisse Kenntnisse (Stichwort „Rechnen und Rechenregeln“) aus der schulischen Sekundarstufe I; zum Auffrischen und Füllen von Lücken empfehlen wir ggf. weitere Literatur in Buchform oder Online-Materialien. Insbesondere weisen wir auf den Online-Mathematik-Brückenkurs (OMB) und die Web- und Präsenzkurse von CeMath an der RWTH hin.

Vorausgesetzt werden weiterhin einige Kenntnisse, welche in der parallel laufenden Veranstaltung „Diskrete Strukturen“ erworben oder vertieft werden.

Der Inhalt umfasst neben grundlegenden Eigenschaften von Zahlbereichen (insbesondere reelle und komplexe Zahlen) Folgen und Reihen, Differential-und Integralrechnung von Funktionen einer reellen Variablen sowie grundlegende Begriffe und Sätze zur Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Beweise werden (aus Zeit- und Platzgründen) zum Teil weggelassen oder nur skizziert. Allerdings benutzt das Skript durchgängig mathematische Sprechweisen und Argumente; in dieser Hinsicht wird über eine rein kalkülorientiere Darstellung hinausgegangen.

Die Leserinnen und Leser sollen sich ermutigt fühlen, neben dem Lehrangebot der Veranstaltung auch weitere Literatur zu konsultieren. Neben Lehrbüchern der Analysis kommen hierfür auch Lehrbücher der Höheren Mathematik (für Ingenieurwissenschaften oder Physik) in Frage. Besonders hingewiesen sei darauf, dass eine Reihe von Büchern elektronisch (über die Universitätsbibliothek der RWTH) frei zugänglich ist.

Wir danken Frau Maike Sube, M. Ed., für das Erstellen der ersten Latex-Version dieses Skripts und zahlreiche kritische Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge. Frau Barbara Giese danken wir für die Erstellung der Graphiken und die Latex-Endfassung in bewährter Qualität. Schließlich danken wir dem Kollegen B. Stamm für Korrekturhinweise und Verbesserungsvorschläge.

Aachen, Juni 2018

Aloys Krieg
Sebastian Walcher

Kapitel I.

Grundlegendes

§1. Was bekannt ist (oder sein sollte)

Zahlbereiche

Sie kennen (aus der Schule oder dem Vorkurs) die Zahlbereiche

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (Menge der *natürlichen Zahlen*)
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (Menge der *natürlichen Zahlen mit* 0)
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (Menge der *ganzen Zahlen*)
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p$ und q ganze Zahlen, $q \neq 0\}$ (Menge der *rationalen Zahlen*)

und haben auch eine gewisse Vorstellung von der Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen*.
All diese Zahlbereiche werden noch genauer betrachtet.

Rechenoperationen

Auf diesen Zahlbereichen sind *Rechenoperationen* definiert, die gewissen Regeln genügen.

- Addition: Zu je zwei Zahlen a, b lässt sich ihre *Summe* $a + b$ bilden. Für alle a, b, c gelten die Rechenregeln
  - ▷ $a + b = b + a$ (*Kommutativgesetz*: Reihenfolge der Summanden ist egal)
  - ▷ $a + (b + c) = (a + b) + c$ (*Assoziativgesetz*: es kommt nicht auf die Reihenfolge der Additionen an)
  - ▷ Die Null ist *neutrales Element der Addition*: $0 + a = a$.

- Subtraktion: Falls bei gegebenen a, b die Gleichung $a + x = b$ eine Lösung hat, so nennen wir diese $b - a$.
  (In $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ist eine solche Gleichung stets lösbar, in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ nicht. Beispiel: $77 + x = 43$ ist in $\mathbb{N}_0$ nicht lösbar.)
  - ▷ Die Lösung von $a + x = 0$ nennt man (falls sie existiert) das *Negative* von a; Bezeichnung: $-a$.
    (Beispiel: $-(-3) = 3$, denn $(-3) + 3 = 0$.)
- Multiplikation: Zu je zwei Zahlen a, b lässt sich ihr *Produkt* bilden.
  Für alle a, b, c gilt:
  - ▷ $a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz)
  - ▷ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativgesetz)
  - ▷ $1 \cdot a = a$ (Die Eins ist das neutrale Element der Multiplikation.)
  - ▷ $0 \cdot a = 0$
- Division: Falls bei gegebenen $a \neq 0$ und b die Gleichung $a \cdot x = b$ eine Lösung hat, so nennen wir diese $\frac{b}{a}$.
  (In $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ist eine solche Gleichung – da $a \neq 0$ vorausgesetzt ist – stets lösbar; in $\mathbb{Z}, \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}$ im Allgemeinen nicht.)
  - ▷ Die Lösung von $a \cdot x = 1$ nennt man (falls sie existiert) $\frac{1}{a}$ oder a^{-1}.
    (Beispiel: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{15}{8}$, denn $\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{8} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$.)
  - ▷ Man darf *kürzen*: Aus $a \cdot b = a \cdot c$ und $a \neq 0$ folgt $b = c$.
- Distributivgesetze: Diese verbinden Addition und Multiplikation: Für alle a, b, c gilt:

  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Hier wird die Regel "Punkt vor Strich" verwendet!)

  Daraus und mit den Regeln von oben zum Beispiel:
  - ▷ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
  - ▷ $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$
  - ▷ $\frac{(a+b)}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$
  - ▷ $(a + b) \cdot (a - b) = (a + b) \cdot a - (a + b) \cdot b = a^2 + ba - ab - b^2 = a^2 - b^2$
    (Dritte binomische Formel.)
  - ▷ $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b)+b(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$
    (Erste binomische Formel.)

Aus diesen Regeln lassen sich viele weitere herleiten.

(1.1) Beispiel. Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0, d \neq 0$ gilt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} .$$

Denn

$$bd \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = bd \cdot \frac{a}{b} + bd \cdot \frac{c}{d} = d \cdot a + b \cdot c,$$

also löst $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ die Gleichung $bd \cdot x = ad + bc$.

Anordnung

- Auf den Zahlbereichen ist auch eine *Anordnung* definiert, d.h. zwei verschiedene Zahlen lassen sich vergleichen:
  Für a, b ist genau eine der Aussagen

  $$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a$$

  richtig.
  (Beispiele: $3 < 7$, $-48 < 1$, $\frac{77}{86} < \frac{78}{87}$.)

  - ▷ Weitere Bezeichnungsweisen:
    Statt $a < b$ schreibt man auch $b > a$. Mit $a \leqslant b$ (oder $b \geqslant a$) kürzt man die Aussage ab, dass $a < b$ oder $a = b$ gilt.

  - ▷ Man nennt a *positiv*, wenn $a > 0$ und *negativ*, wenn $a < 0$.

- Die Anordnung verträgt sich mit der Addition bzw. Subtraktion:
  Sind a, b, c gegeben und ist $a < b$, so auch $a + c < b + c$ und $a - c < b - c$.

- Die Anordnung verträgt sich mit der Multiplikation mit positiven Zahlen (bzw. Division durch positive Zahlen):
  Sind a, b, c gegeben und ist $a < b$, $c > 0$, so auch $a \cdot c < b \cdot c$ und $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

- Multiplikation mit negativen Zahlen (bzw. Division durch negative Zahlen) „dreht“ die Ungleichheitszeichen:
  Ist $a < b$ und $c < 0$, so gilt $a \cdot c > b \cdot c$ und $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

(1.2) Beispiel. $\frac{77}{86} < \frac{78}{87}$ ist nicht mit „bloßem Auge“ zu sehen. Man hat aber $77 \cdot 87 < 78 \cdot 86$ und Division durch $86 \cdot 87$ ergibt die behauptete Ungleichung.
Wenn man gerade keinen Rechner hat, weist man die zweite Ungleichung so nach:

$$77 \cdot 87 = 77 \cdot (86 + 1) = 77 \cdot 86 + 77 < 77 \cdot 86 + 86 = (77 + 1) \cdot 86 = 78 \cdot 86.$$

Wir kommen später nochmal auf diese Regeln zurück; grundsätzliche Vertrautheit mit ihnen wird aber im Folgenden (vor allem beim Rechnen) vorausgesetzt.

§2. Aussagen, Mengen, Abbildungen

Es werden hier kurz einige grundlegende Begriffe und Sprechweisen vorgestellt, die überall in der Mathematik (also auch in der Analysis) Verwendung finden. Genauer werden solche Themen in der Veranstaltung „Diskrete Strukturen“ behandelt.

Aussagen

Wir betrachten zum Einstieg einige Beispiele für Aussagen.

(2.1) Beispiele. a) Bonn ist die Hauptstadt von Nordrhein-Westfalen.

b) München ist die Hauptstadt von Bayern.

c) $3 + 4 = 7$.

Allgemein gehen wir von Folgendem aus:

(2.2) Arbeitsdefinition. Eine mathematische *Aussage* ist eine Behauptung (die rein sprachlich oder als „Symbolkette“ formuliert sein kann), der auf eindeutige Weise ein Wahrheitswert, nämlich *wahr* (1) oder *falsch* (0), zugeordnet werden kann.

(2.3) Beispiele. a) „Im Hörsaal sitzt mindestens eine Person, die heute Geburtstag hat“ ist eine Aussage, deren Wahrheitsgehalt leicht überprüft werden kann.

b) „Kaffee oder Tee?“ ist keine Aussage.

c) „7 ist eine Primzahl“ und „$2 \geqslant 1$“ sind Beispiele wahrer mathematischer Aussagen, ebenso: „Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine reelle Zahl y mit $x < y$“. („$2 \geqslant 1$“ ist übrigens ein Beispiel für eine „Symbolkette“.)

d) Die Aussagen „$\frac{2}{5}$ ist keine natürliche Zahl“ und „Jede natürliche Zahl ist eine rationale Zahl“ sind wahr. „Jede reelle Zahl ist eine rationale Zahl“ ist eine falsche Aussage.

e) Die Aussage „$2 + x = 5$“ ist wahr für $x = 3$ und falsch für alle Werte $x \neq 3$.

Uns geht es hier weniger um das „Wesen“ von Aussagen, sondern um Operationen mit Aussagen bzw. Verknüpfungen von Aussagen. Zur Definition werden sog. Wahrheitstafeln benutzt.

(2.4) Definition. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen.

1. Die *Negation* $\neg\mathcal{A}$ („nicht $\mathcal{A}$“) der Aussage $\mathcal{A}$ ist genau dann wahr, wenn $\mathcal{A}$ falsch ist. In der Wahrheitstafel

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
0	1
1	0

2. Die *Konjunktion* „$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$“ („$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$“) ist wahr, wenn beide Aussagen wahr sind und falsch, wenn mindestens eine der Aussagen falsch ist. In der Wahrheitstafel:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Die *Disjunktion* „$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$“ („$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$“) ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist. In der Wahrheitstafel:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(2.5) Bemerkung. In der Mathematik bedeutet *oder* immer *oder auch*. Wenn *entweder - oder* gemeint ist, wird es immer explizit so formuliert.

(2.6) Beispiele. a) „Bonn ist nicht die Hauptstadt von NRW“ ist die negierte Aussage von Beispiel (2.1) a) oben, ihr Wahrheitsgehalt ist wahr.

b) Die Verneinung der Aussagen in (2.3) c) lauten „7 ist keine Primzahl“, „$2 < 1$“ sowie „es gibt eine reelle Zahl x, so dass für alle reellen Zahlen y gilt $x \geqslant y$“.

Alle anderen Arten, zwei Aussagen miteinander zu verknüpfen, können auf Disjunktion, Konjunktion und Negation zurückgeführt werden. Zwei besonders wichtige Verknüpfungen beinhaltet die

(2.7) Definition. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mathematische Aussagen.

„$\Rightarrow$“ Die *Implikation* „$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$“ ist nur dann nicht wahr, wenn $\mathcal{A}$ wahr und $\mathcal{B}$ falsch ist. Wahrheitstafel:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

„$\Leftrightarrow$“ Die *Äquivalenz* „$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$“ ist genau dann wahr, wenn die Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ denselben Wahrheitswert haben. Die zugehörige Wahrheitstafel lautet

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(2.8) Bemerkung. Unter Implikation stellt man sich intuitiv „aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$“ vor. Ist $\mathcal{A}$ wahr, so muss auch $\mathcal{B}$ wahr sein. Aus einer falschen Aussage kann hingegen etwas Wahres oder etwas Falsches gefolgert werden.

(2.9) Beispiele. a) Die Äquivalenz von Aussagen ist Ihnen vielleicht von Termumformungen bekannt, es gilt „$x^2 = 2 \Leftrightarrow (x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2})$.“ Im Gegensatz dazu ist „$x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$“ eine wahre Implikation, aber keine Äquivalenzumformung, da eine Rückfolgerung falsch wäre.

b) Durch „$x \neq 2$ ist eine Primzahl $\Rightarrow x$ ist ungerade“ ist eine wahre Implikation gegeben.

Mengen

Um mit mathematischen Objekten ordentlich umgehen zu können, befassen wir uns im Folgenden mit Mengen. Vermutlich ist Ihnen die Mengenschreibweise grundsätzlich aus der Schule bekannt.

Bei der Beschreibung von Mengen nehmen wir den sogenannten naiven Standpunkt ein, der auf Georg CANTOR (1845-1918) zurückgeht. Dabei gehen wir davon aus, dass intuitiv bekannt ist, was „Objekte“ sind und was ein „Ganzes“ sein soll.

(2.10) Definition. Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von wohl bestimmten Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte nennt man *Elemente* der Menge. Die Wohlbestimmtheit besagt, dass man bei jedem Objekt genau entscheiden kann, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Im Wesentlichen gibt es zwei Arten, Mengen zu beschreiben: Man zählt alle Elemente der Menge auf oder man beschreibt die Elemente durch eindeutig charakterisierende Eigenschaften.

(2.11) Definition. $M = \{x, y, z, \ldots\}$ bedeutet, dass M diejenige Menge ist, die genau aus den angegebenen Elementen $x, y, z, \ldots$ besteht.
$M = \{x \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\} = \{x\,;\, x \text{ hat Eigenschaft } E\}$ bedeutet, dass M diejenige Menge ist, die genau aus allen Objekten x besteht, die die Eigenschaft E haben.

Ist x ein *Element* einer Menge M, so schreibt man $x \in M$. Ist x *kein Element* von M, so schreibt man $x \notin M$.

(2.12) Beispiele. a) Alle Studierenden, die am 1. Oktober 2016 an der RWTH Aachen eingeschrieben waren, bilden eine Menge. Alle großen Zahlen oder alle jungen Einwohner Aachens bilden keine Menge.

b) Die kleinen lateinischen Buchstaben bilden die Menge $A = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ mit 26 Elementen. Es ist $\ell \in A$, aber $L \notin A$.

c) Die *leere Menge* ist die Menge ohne Elemente und wird mit $\emptyset$ oder auch mit $\{\,\}$ bezeichnet, d. h.
$$\emptyset = \{\,\} = \{x \mid x \neq x\}.$$

Die Zahlbereiche bilden Mengen. Wir wiederholen die

(2.13) Bezeichnungen. $\mathbb{N} := \{n \mid n \text{ ist natürliche Zahl }\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der *natürlichen Zahlen.*
$\mathbb{N}_0 := \{n \mid n \text{ ist natürliche Zahl oder Null}\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der *natürlichen Zahlen einschließlich Null* oder die Menge der *nicht-negativen ganzen Zahlen.*
$\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ ist ganze Zahl}\} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ ist die Menge der *ganzen Zahlen.*
$\mathbb{Q} = \{x \mid \text{es gibt ganze Zahlen } a, b, \text{ wobei } b \neq 0, \text{ mit } x = a/b\}$ ist die Menge der *rationalen Zahlen* (Bruchzahlen).
Die Menge der *reellen Zahlen* wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. Dabei denken wir uns die reellen Zahlen als endliche oder unendliche Dezimalzahlen realisiert.
$\mathbb{R}_+$ steht für die Menge der *nicht-negativen reellen Zahlen*, $\mathbb{R}_+^*$ für die Menge der *positiven reellen Zahlen* und $\mathbb{R}^*$ für die Menge der reellen Zahlen ohne 0.

Für die Analysis besonders wichtig sind Teilmengen von $\mathbb{R}$, insbesondere die Intervalle.

(2.14) Definition. Für reelle Zahlen a, b mit $a < b$ definiert man
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\quad a \leqslant x \leqslant b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\quad a < x < b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\quad a \leqslant x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\quad a < x \leqslant b\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \leqslant a\}$$
$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; \quad x < a\}$$
$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; \quad a \leqslant x\}$$
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x\}$$

Des Weiteren sind $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ und allgemeiner $\mathbb{R}^n$ relevant.

(2.15) Definition. a)

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

ist die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen. Üblicherweise werden diese als Spalten dargestellt.

b)

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

ist die Menge aller geordneten Tripel reeller Zahlen.

c) Allgemeiner ist für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} ; a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller geordneten n-Tupel reeller Zahlen.

Wir werden darauf zurückkommen, wenn wir Funktionen mehrerer Veränderlicher betrachten. So wie man sich die Menge $\mathbb{R}$ als Zahlengerade vorstellen kann, lässt sich $\mathbb{R}^2$ als die Menge aller Punkte einer Ebene visualisieren und $\mathbb{R}^3$ als die Menge aller Punkte des Raumes. (Für $n > 3$ ist eine geometrische Visualisierung von $\mathbb{R}^n$ nicht mehr möglich.)

Die Anzahl der Elemente einer Menge formalisieren wir in der

(2.16) Definition. Sei M eine nicht-leere Menge. Gibt es paarweise verschiedene Elemente $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, sodass $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, so definiert man $\sharp M := n$. Andernfalls setzt man $\sharp M = \infty$. Zusätzlich definiert man $\sharp\emptyset = 0$. Man nennt $\sharp M$ die

Mächtigkeit oder *Ordnung* von M. Gilt $\sharp M = \infty$, so nennt man M *unendlich*. Im Fall $\sharp M \in \mathbb{N}_0$ spricht man von einer *endlichen Menge*.

Manche Autoren verwenden $|M|$ für die Mächtigkeit der Menge M.

Auch für Mengen interessieren Operationen und Verknüpfungen. Die Analogie zu Operationen mit und Verknüpfungen von Aussagen ist nicht zufällig.

(2.17) Definition. Seien M, N Mengen.

a) Die *Differenz von N und M* ist definiert

$$N \setminus M := \{x \in N \mid x \notin M\} = \{x \in N; \neg(x \in M)\}.$$

b) Die *Vereinigung* $M \cup N$ von M und N ist die Menge aller Elemente, die zu M oder (auch) zu N gehören:

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \ \vee \ x \in N\}.$$

c) Der *Durchschnitt* $M \cap N$ von M und N ist die Menge aller Elemente, die sowohl zu M als auch zu N gehören:

$$M \cap N := \{x \mid x \in M \ \wedge \ x \in N\}.$$

M und N heißen *disjunkt*, wenn $M \cap N = \emptyset$.

(2.18) Beispiele. a) Für $M = \{0, 1, 2, 3\},\ N = \{1, 3, 5\}$ gilt:

$$M \cup N = \{0, 1, 2, 3, 5\}, \quad M \cap N = \{1, 3\}, \quad M \setminus N = \{0, 2\}, \quad N \setminus M = \{5\}.$$

b) Es gelten $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+^* = \mathbb{N}$ sowie $\mathbb{N}_0 \setminus \{0\} = \mathbb{N},\ \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$, $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.

(2.19) Definition. Seien M, N Mengen.

a) M heißt *Teilmenge* von N, wenn jedes Element von M auch ein Element von N ist. Anders ausgedrückt: $x \in M \Rightarrow x \in N$, für jedes Objekt x.

Man schreibt dann $M \subset N$ oder $N \supset M$. Das Zeichen „$\subset$“ heißt *Inklusion*. (Manche Autoren verwenden auch das Zeichen „$\subseteq$“.) Man sagt auch, dass M in N *enthalten* ist oder dass N *die Menge M umfasst*.

b) M und N sind *gleich*, falls sie dieselben Elemente enthalten. Anders ausgedrückt: $x \in M \Leftrightarrow x \in N$, für jedes Element x.

Man schreibt dann $M = N$. Andernfalls schreibt man $M \neq N$.

c) M heißt *echte Teilmenge* von N, wenn $M \subset N$ und $M \neq N$. Man schreibt dafür $M \subsetneqq N$.

d) Ist $M \subset N$, so heißt $\complement_N(M) := N \setminus M$ das *Komplement von M in N*. Man schreibt auch einfach nur M^c, wenn die Grundmenge aus dem Zusammenhang klar ist.

(2.20) Beispiel. Die Zahlbereiche erfüllen die Inklusionen $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Man definiert $2\mathbb{Z} := \{2x |\ x \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} |\ \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}\}$ als die Menge aller geraden ganzen Zahlen. Offenbar gilt $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, aber $\mathbb{N} \not\subset 2\mathbb{Z}$.

Bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Z}$ beinhaltet $(2\mathbb{Z})^c = \mathbb{Z} \backslash 2\mathbb{Z}$ genau alle ungeraden ganzen Zahlen. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind genau die reellen Zahlen, die keine endliche oder periodische Dezimalbruchdarstellung besitzen.

Schnitte und Vereinigungen können auch auf mehr als zwei Mengen angewendet werden.

(2.21) Bezeichnungen. Für eine endliche Indexmenge I und Mengen M_i bezeichnen

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x;\ x \in M_j \text{ für ein } j \in I\}$$

die *Vereinigung aller Mengen M_i* für $i \in I$ und

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{x;\ x \in M_i \text{ für alle } i \in I\}$$

den *Schnitt über alle Mengen M_i* für $i \in I$.

Ein weiterer wesentlicher Begriff ist enthalten in der

(2.22) Definition. Sei M eine Menge. Dann ist die *Potenzmenge* von M die Menge aller Teilmengen von M, also

$$\mathrm{Pot}(M) := \{A \mid A \subset M\}.$$

Der Veranschaulichung dienen die

(2.23) Beispiele. a) $\mathrm{Pot}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
b) $\mathrm{Pot}(\{a\}) = \Big\{\emptyset, \{a\}\Big\}$.
c) $\mathrm{Pot}(\{a,b\}) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\Big\}$.
d) $\mathrm{Pot}(\{a,b,c\}) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\Big\}$.

(2.24) Definition. a) a1) Zwei *geordnete Paare* (a,b) und (x,y) sind genau dann gleich, wenn $a = x$ und $b = y$, d. h.

$$(a,b) = (x,y) \quad \Leftrightarrow \quad a = x \text{ und } b = y.$$

a heißt *erste Komponente* und b *zweite Komponente* des Paares (a,b).

a2) Sind M und N Mengen, so nennt man die Menge

$$M \times N := \{(a,b) \mid a \in M \text{ und } b \in N\}$$

das *kartesische Produkt* oder *Kreuzprodukt* von M und N.

b) Allgemein spricht man für $r \geqslant 2$ und Mengen $M_1, \ldots, M_r$ von *geordneten r-Tupeln* $(a_1, \ldots, a_r)$ mit $a_i \in M_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$ und $(a_1, \ldots, a_r) = (b_1, \ldots, b_r) \Leftrightarrow a_i = b_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Die Menge dieser r-Tupel wird mit

$$M_1 \times \cdots \times M_r \quad (\text{oder } \bigtimes_{1 \leqslant i \leqslant r} M_i)$$

bezeichnet. Im Fall $M_1 = \cdots = M_r = M$ schreibt man auch kurz M^r.

(2.25) Beispiele. a) Es gilt $(1,2) \neq (2,1)$.
b) Man hat $\{1,0\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(0,1),(0,2)\}$.
c) Bis auf die Schreibweise ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^3 (= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ usw.

Wir führen nun Quantoren ein:

(2.26) Definition. Es sei P eine Menge und für jedes $p \in P$ sei $\mathcal{A}(p)$ eine Aussage. Dann bedeutet
$\forall\, p \in P : \mathcal{A}(p)$, dass $\mathcal{A}(p)$ für alle $p \in P$ wahr ist; und weiter bedeutet
$\exists\, p \in P : \mathcal{A}(p)$, dass es ein $p \in P$ gibt, für welches $\mathcal{A}(p)$ wahr ist.
Man nennt $\forall$ den *Allquantor* und $\exists$ den *Existenzquantor*.

Mehr dazu erfahren Sie in der Veranstaltung “Diskrete Strukturen”. Wir werden diese Quantoren nur gelegentlich verwenden.

Abbildungen

Wir kommen nun zu Abbildungen. Einige Klassen von Abbildungen kennen Sie bereits aus der Schule.

(2.27) Definition. Seien A, B nicht-leere Mengen. Eine *Abbildung* f *von* A *nach* B ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zuordnet. Man nennt x das *Argument* und $f(x) := y$ das *Bild von* x *unter* f und schreibt dann die Abbildung in der Form

$$f : A \to B, \quad x \mapsto f(x).$$

A heißt *Definitionsbereich* und B *Ziel* der Abbildung f. Die Menge

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$$

nennt man den *Graph von* f. Zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : U \to V$ heißen *gleich*, wenn

$$A = U,\ B = V \quad \text{und} \quad f(x) = g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in A \quad \text{gilt.}$$

(2.28) Beispiele. a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist eine Abbildung.

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist keine Abbildung.

c) Die Abbildungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x+1)^2$ und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y^2 + 2y + 1$ sind gleich.

d) $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ ist keine Abbildung, weil der Zahl -1 durch diese Vorschrift kein Wert zugeordnet werden kann. Demgegenüber ist

$$F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{x+1},$$

eine Abbildung.

e) Für jede nicht-leere Menge A ist

$$id_A : A \to A, \quad x \mapsto x$$

eine Abbildung. Sie wird die *identische Abbildung* auf A genannt.

(2.29) Definition. Seien A, B nicht-leere Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Für $M \subset A$ heißt

$$f(M) := \{f(x) \mid x \in M\}$$

das *Bild von* M *unter* f. Speziell nennt man $f(A)$ die *Wertemenge von* f. Für $N \subset B$ heißt

$$f^{-1}(N) := \{x \in A \mid f(x) \in N\}$$

das *Urbild von* N *unter* f.

Nun führen wir Operationen auf Abbildungen aus.

(2.30) Definition. Ist $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$, eine Abbildung und M eine nicht-leere Teilmenge von A, so heißt die Abbildung

$$f|_M : M \to B, \quad x \mapsto (f|_M)(x) := f(x),$$

die *Restriktion* oder *Einschränkung* von f auf M. Ist $g : B' \to C$ eine weitere Abbildung mit der Eigenschaft $f(A) \subset B'$, so nennt man

$$g \circ f : A \to C, \quad x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)),$$

die *Verkettung* oder *Komposition* oder *Hintereinanderausführung* von g und f.

Spezielle Eigenschaften von Abbildungen behandeln wir in der

(2.31) Definition. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

- ▷ f heißt *injektiv*, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ aus $f(a_1) = f(a_2)$ stets $a_1 = a_2$ folgt.
- ▷ f heißt *surjektiv*, wenn zu jedem $y \in B$ (mindestens) ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ existiert.
- ▷ f heißt *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Weil eine Aussage $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ äquivalent zu $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ ist, bedeutet Injektivität, dass aus $a_1 \neq a_2$ auch $f(a_1) \neq f(a_2)$ folgt. Das bedeutet: Verschiedene Argumente haben verschiedene Bilder. Zum Nachweis der Injektivität ist es aber oft zweckmäßig, wie in (2.31) vorzugehen und aus der Gleichheit der Bilder die Gleichheit der Argumente zu schließen.
Negieren der Bedingung für Surjektivität ergibt: Wenn es ein $z \in B$ gibt, sodass $f(x) \neq z$ für alle $x \in A$, dann (und nur dann) ist f nicht surjektiv.
f ist dann und nur dann bijektiv, wenn zu jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ existiert.

(2.32) Bemerkung. Ist $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung, so gibt es genau eine Abbildung

$$f^{-1} : B \to A,$$

welche $f^{-1} \circ f = id_A$ und $f \circ f^{-1} = id_B$ erfüllt. Man nennt f^{-1} die *Umkehrabbildung* von f. Sie ist charakterisiert durch

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(y) = x \;\text{ für alle } x \in A,\; y \in B.$$

Kapitel II.

Zahlbereiche und mathematische Strukturen

§1. Natürliche Zahlen, Induktion und Rekursion

Wir sehen uns hier als Erstes die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ genauer an. Offensichtlich erhält man jede natürliche Zahl (irgendwann), wenn man bei 1 startet und dann immer um 1 weiter zählt. Diese Beobachtung ist die Grundlage für ein Beweisprinzip und ein Konstruktionsprinzip.
Zunächst das Beweisprinzip:

(1.1) Induktionsprinzip. *Um die Richtigkeit einer Aussage $A(n)$ für alle ganzen Zahlen $n \geqslant 1$ nachzuweisen, genügt es zu zeigen:*
(IA) $A(1)$ ist richtig (Induktionsanfang).
(IS) Für alle $n \geqslant 1$ gilt: Wenn $A(n)$ richtig ist, dann ist auch $A(n+1)$ richtig (Induktionsschritt).

Man nennt diese Methode das *Beweisprinzip der vollständigen Induktion*. Im Induktionsschritt nennt man die Annahme, dass $A(n)$ richtig ist, auch die *Induktionsvoraussetzung* (IV).

Das Beweisprinzip ist intuitiv leicht zu verstehen. Nach (IA) ist $A(1)$ richtig. Also kann man (IS) auf $n = 1$ anwenden und erhält die Gültigkeit von $A(2)$. Wendet man (IS) auf $n = 2$ an, so ergibt sich die Richtigkeit von $A(3)$ usw.

Wir diskutieren einfache

(1.2) Beispiele. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n$.
(IA) Für $n = 1$ gilt $2^1 = 2 > 1$.
(IS) Sei $n \geqslant 1$, so dass $2^n > n$ bereits gilt. Multiplikation mit 2 ergibt $2^{n+1} > 2n = n + n \geqslant n + 1$. Also gilt dann auch $2^{n+1} > (n + 1)$.

b) Die Teilmenge $\{0,1\}^n \subset \mathbb{R}^n$ besitzt genau 2^n Elemente. Wir beweisen die Aussage $A(n) : \sharp\{0,1\}^n = 2^n$ mit Induktion.
(IA) Für $n = 1$ gilt: $\sharp\{0,1\} = 2$ offensichtlich.
(IS) Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\sharp\{0,1\}^n = 2^n$.
Die Elemente von $\sharp\{0,1\}^{n+1}$ haben entweder eine 0 an der letzten Position oder eine 1; sind also von einer der folgenden Gestalten:

$$\text{Entweder} \quad \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für die ersten n Stellen gibt es nach Induktionsannahme jeweils 2^n Möglichkeiten. Insgesamt enthält $\{0,1\}^{n+1}$ also $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Elemente.

Das Konstruktionsprinzip ist wie folgt.

(1.3) Rekursion. *Es sei M eine nicht-leere Menge. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n : M \to M$ eine Abbildung. Weiter sei $b \in M$.*
Dann gibt es genau eine Abbildung $r : \mathbb{N} \to M$ mit den Eigenschaften

(i) $r(1) = b$;

(ii) $r(n+1) = g_n(r(n))$.

Auch das ist intuitiv einsichtig: Man hat $r(1) = b$, $r(2) = r(1+1) = g_1(r(1)) = g_1(b)$, $r(3) = g_2(r(2)) = g_2(g_1(b))$ usw. Bei einer mathematisch sauberen Grundlegung von $\mathbb{N}$ und weiterer Begriffe (die in dieser Veranstaltung nicht stattfindet) ist das Rekursionsprinzip allerdings ein Satz, den man beweisen muss und kann (Dedekindscher Rekursionssatz).

(1.4) Beispiel. Die Potenzen $a, a^2, a^3, \ldots$ einer reellen Zahl lassen sich rekursiv definieren. Man nehme $M = \mathbb{R}$, $b = a$ und definiert $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a \cdot x$ für alle n. Dann $r(1) = a$ und $r(n+1) = a \cdot r(n)$, also $a^{n+1} = a \cdot a^n$, für alle n.

Rekursiv lassen sich auch Summen- und Produktzeichen definieren:

(1.5) Definition. Es seien reelle Zahlen a_k, $k \in \mathbb{N}$ gegeben.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere die *Summe* $\sum_{k=1}^{n} a_k$ rekursiv durch

$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1$$

und

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}.$$

Analog definiert man das *Produkt* $\prod_{k=1}^{n} a_k$ rekursiv durch

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1$$

und

$$\prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}.$$

Anschaulich also für $n > 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots + a_n; \quad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

(1.6) Beispiele. Es gilt

a) $\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.

b) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Beweis mit Induktion.)

Den folgenden Satz soll Carl Friedrich Gauss (1777-1855) als Schüler bewiesen haben, als er die Zahlen von 1 bis 100 addieren sollte.

(1.7) Satz. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach n.
(IA) Im Fall $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.
(IS) Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

□

(1.8) Bemerkung. Induktions- und Rekursionsprinzip gelten (statt für $\mathbb{N}$) auch für $\mathbb{N}_0$ und allgemeiner, wenn ein beliebiges $m \in \mathbb{Z}$ gegeben ist, auch für

$$\mathbb{Z}_{\geqslant m} := \{k \in \mathbb{Z}; k \geqslant m\}.$$

So kann man die Aussage

$$A(n) : 2^n > n^2 \text{ für alle } n \geqslant 5$$

beweisen, indem man den Induktionsanfang bei $n_0 = 5$ setzt und den Induktionsschritt unter der Voraussetzung $n \geqslant 5$ durchführt.

Weiter kann man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k$$

für alle $n \geqslant m$ rekursiv definieren, also z. B.

$$\sum_{k=-3}^{2} 2^k = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4.$$

Als Konvention setzt man noch

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0 \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k := 1, \quad \text{falls } m > n.$$

Wir kommen zu einer weiteren

(1.9) Definition. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man $n!$ (gesprochen: n Fakultät) durch

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \in \mathbb{N}.$$

Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n$ definiert man den *Binomialkoeffizienten* durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \in \mathbb{Q}.$$

Insbesondere ist also $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$ und

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(1.10) Lemma. *Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n$. Dann gilt:*

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

b) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$, *falls $k > 0$.*

c) $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Beweis. a) Es gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

b) Man hat (mit Bruchrechenregeln)

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n+1-k)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n+1-k)!} \cdot [k + (n+1-k)] = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

c) Wir verwenden Induktion nach n für $A(n)$: $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle k, $0 \leqslant k \leqslant n$.
(IA) Im Fall $n = 0$ hat man $\binom{0}{0} = 1 \in \mathbb{N}$.
(IS) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für $0 \leqslant k \leqslant n$. Es gilt für $k \in \{0, n+1\}$:

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1 \in \mathbb{N}.$$

Sei also $0 < k \leqslant n$. Dann folgt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \in \mathbb{N}$$

aus b) und der Induktionsvoraussetzung. □

Damit haben wir das wesentliche Hilfsmittel zum Beweis der binomischen Formel.

(1.11) Satz. *(Binomische Formel)*
Für $n \in \mathbb{N}_0$ und alle reellen Zahlen a, b gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

(Dies gilt auch für komplexe Zahlen, die wir in Kapitel IV einführen.)

Beweis. Die zweite Summe entsteht aus der ersten durch Umindizierung $k \mapsto n-k$, wenn man (1.10) a) beachtet. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n.
(IA) Im Fall $n = 0$ gilt

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}.$$

(IS) Die obige Formel gelte für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Durch Multiplikation mit $a+b$ folgt daraus

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&\underset{(j=k+1)}{=} \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n}a^{n+1} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right]a^i b^{n+1-i}\right) + \binom{n}{0}b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}a^i b^{n+1-i}\right) + b^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^i b^{n+1-i},
\end{aligned}$$

wenn man (1.10) b) verwendet. □

Die in der Schule gelernte binomische Formel bezieht sich natürlich auf $n=2$. Es gilt speziell

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}$$

§2. Rationale Zahlen und Körper

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ setzen wir als bekannt voraus. Jede solche Zahl lässt sich in der Form

$$x = \frac{p}{q} \quad \text{mit} \quad p \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

darstellen. Die Darstellung ist jedoch keineswegs eindeutig; es gilt

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow p\cdot s = r\cdot q;$$

Stichwort „Erweitern und Kürzen". (Auf vollständig gekürzte Brüche gehen wir hier nicht weiter ein.)

Man hat die *Addition*

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p\cdot s + r\cdot q}{q\cdot s}$$

und die *Multiplikation*

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$$

rationaler Zahlen.
Schließlich kann man *positive rationale Zahlen* charakterisieren (etwa) durch

$$\frac{p}{q} > 0 \Leftrightarrow p \cdot q > 0.$$

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ lassen sich nicht so einfach beschreiben. Im Moment halten wir nur fest, dass auch auf $\mathbb{R}$ Addition und Multiplikation definiert sind, die üblichen Rechengesetze gelten, sowie positive Elemente ausgezeichnet sind.

Wir fassen wichtige Eigenschaften der Addition und Multiplikation (und Subtraktion und Division) in $\mathbb{Q}$ zusammen in:

(2.1) Bemerkung. Für $K = \mathbb{Q}$ gelten folgende Aussagen:

(K.1) (*Assoziativgesetze*) Für alle $a, b, c \in K$ ist

$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad \text{und} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

(K.2) (*Kommutativgesetze*) Für alle $a, b \in K$ ist

$$a+b = b+a \quad \text{und} \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

(K.3) (*Existenz neutraler Elemente*) Es gibt Elemente $0 \in K$ (Nullelement) und $1 \in K$ (Einselement), so dass für alle $a \in K$ gilt

$$a+0 = a \quad \text{und} \quad a \cdot 1 = a.$$

(K.4) (*Existenz inverser Elemente*) Zu jedem $a \in K$ existiert ein Element $-a \in K$ mit der Eigenschaft $a + (-a) = 0$. Zu jedem $a \in K, a \neq 0$, existiert ein Element $a^{-1} \in K$ mit der Eigenschaft $a \cdot a^{-1} = 1$. Man schreibt auch $\frac{1}{a}$ statt a^{-1}.

(K.5) (*Distributivgesetz*) Für alle $a, b, c \in K$ gilt

$$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Diese Gesetze haben sie in Kapitel I §1 schon mal gesehen. Man kann aus ihnen alle „üblichen“ Rechenregeln herleiten, und sie sind in diesem Sinn fundamental.

(2.2) Definition. Eine Menge K mit mehr als einem Element und Verknüpfungen

$$+: \quad K \times K \to K,\ (a,b) \mapsto a+b \quad \text{und}$$
$$\cdot: \quad K \times K \to K,\ (a,b) \mapsto a \cdot b\,,$$

welche (K.1) bis (K.5) genügen, heißt *Körper*.

(2.3) Beispiele. (a) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ (mit den üblichen Rechenoperationen) sind Körper.

(b) $\mathbb{F}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{array}{c|cc} + & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \end{array}$$

ist ein Körper. Für die Informatik ist es sehr interessant, für die Analysis weniger.

Wir halten einige Regeln für das Rechnen in Körpern fest:

(2.4) Satz. *Sei K ein Körper. Dann gilt für alle $a, b, c \in K$:*

(i) *Es gibt genau ein $x \in K$ mit $a + x = b$, nämlich $x = b + (-a)$. Wir schreiben auch $x = b - a$. Es gilt $-0 = 0$ und $-(a + b) = (-a) + (-b)$. Das Element 0 ist durch (K.3) eindeutig bestimmt.*

(ii) *Aus $a + c = b + c$ folgt $a = b$.*

(iii) *Ist $a \neq 0$, so gibt es genau ein $y \in K$ mit $a \cdot y = b$, nämlich $y = b \cdot a^{-1}$. Wir schreiben auch $y = \frac{b}{a} = b/a$. Es gilt $1^{-1} = 1$. Das Element 1 ist durch (K.3) eindeutig bestimmt.*

(iv) *Aus $a \cdot c = b \cdot c$ und $c \neq 0$ folgt $a = b$.*

(v) $a \cdot 0 = 0$.

(vi) *Es gilt $1 \neq 0$ und aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.*

(vii) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, $-(-a) = a$, $(-1) \cdot a = -a$ *und* $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$; *speziell* $(-1)^{-1} = -1$.

(viii) *Aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt $a \cdot b \neq 0$, $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ und $a^{-1} \neq 0$ mit $(a^{-1})^{-1} = a$.*

(ix) *Aus $b \neq 0$ und $c \neq 0$ folgt $ab^{-1} = (ac)(bc)^{-1}$. („Erweitern und Kürzen“)*

Diese Aussagen sollen hier nicht bewiesen werden. Als Nächstes sehen wir uns die Anordnung genauer an. Wir betrachten erst die positiven Elemente von $\mathbb{Q}$.

(2.5) Bemerkung. Sei $K = \mathbb{Q}$ und $P = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$:
Dann gilt
(P.1) Für alle $x \in K$ ist genau eine der Aussagen $x \in P$; $x = 0$; $-x \in P$ richtig.
(P.2) Für alle $x, y \in P$ gilt $x + y \in P$. (Also $P + P \subset P$.)
(P.3) Für alle $x, y \in P$ gilt $x \cdot y \in P$. (Also $P \cdot P \subset P$.)

Man nimmt diese Beobachtung zum Anlass für

(2.6) Definition. Es sei K ein Körper.

a) Man nennt K einen *angeordneten Körper*, wenn es eine Teilmenge P von K gibt, die (P.1), (P.2) und (P.3) aus (2.5) erfüllt. (P wird auch *Positivitätsbereich* genannt.)

b) Durch
$$x < y :\Leftrightarrow \quad y - x \in P$$
wird eine Relation „<“ auf K eingeführt, die *Anordnung* auf K. Weiter vereinbart man
$$\begin{aligned} x \leqslant y &\Leftrightarrow x < y \text{ oder } x = y; \\ x > y &\Leftrightarrow y < x; \\ x \geqslant y &\Leftrightarrow y \leqslant x. \end{aligned}$$

Man schreibt für (P.1) auch $K = P \mathbin{\dot\cup} \{0\} \mathbin{\dot\cup} (-P)$, mit dem Symbol „$\dot\cup$“ für „disjunkte Vereinigung“ (d. h. Vereinigung paarweise disjunkter Mengen).

(2.7) Beispiele. (a) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind angeordnete Körper.

(b) $\mathbb{F}_2$ lässt sich nicht anordnen. (Wie sollte man P wählen?)

Wieder ist die Pointe, dass sich alle bekannten Rechenregeln in $\mathbb{Q}$, die mit $+$, $\cdot$ und $<$ zu tun haben, aus den Körperaxiomen (K.1) - (K.5) und (P.1) - (P.3) herleiten lassen.

(2.8) Satz. *Sei K ein angeordneter Körper.*

a) Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$.

b) Für alle $a, b, c, d \in K$ gilt
b1) $a + c < b + c \;\Leftrightarrow\; a < b$;
b2) $a < b$ und $c \leqslant d \;\Rightarrow\; a + c < b + d$;
b3) $0 < a$ und $0 < b \;\Rightarrow\; 0 < ab$;
b4) $0 < a < b$ und $0 < c \leqslant d \;\Rightarrow\; ac < bd$;
b5) $0 < a < b \;\Rightarrow\; 0 < a^n < b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

c) Für alle $a, b, c, d \in K$ gilt:

c1) $a > 0$ *und* $b < 0 \;\Rightarrow\; ab < 0$;
$a < 0$ *und* $b < 0 \;\Rightarrow\; ab > 0$;

c2) $0 \leqslant a^2$; *speziell* $0 < 1$;

c3) $a > 0 \;\Leftrightarrow\; a^{-1} > 0$;

c4) $0 < a < b$ *und* $c < 0 \;\Rightarrow\; bc < ac < 0$;

c5) $a < b,\ a \neq 0$ *und* $b \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a^{-1} < b^{-1}, & \textit{falls } ab < 0, \\ b^{-1} < a^{-1}, & \textit{falls } ab > 0. \end{cases}$

Beweis. a) Aus $b - a \in P$ und $c - b \in P$ folgt $c - a = (c - b) + (b - a) \in P$ nach (P.1).
Für b1) benutze $b - a = (b + c) - (a + c)$ und (2.5).
Im Beweis von b2) kann man wegen b1) schon $c < d$ voraussetzen. Dann

$$(b + d) - (a + c) = \underbrace{(b - a)}_{\in P} + \underbrace{(d - c)}_{\in P} \in P \quad \text{nach (P.2).}$$

In b3) steht einfach (P.3) in anderer Formulierung. Im Fall $c = d$ folgt b4) aus $b - a \in P$, $c \in P$ und (P.3); im Fall $c < d$ ist weiter

$$bd - ac = b(d - c) + c(b - a) \in P$$

wegen (P.2) und (P.3). Mit simpler Induktion erhält man b5).
Zum Nachweis von c1) beachte im Fall $a > 0$, $b < 0$, dass $-b > 0$ und somit

$$-ab = a \cdot (-b) > 0$$

mit Satz (2.4). Falls $a < 0$, $b < 0$, so $-a > 0$, $-b > 0$ und deshalb $ab = (-a)(-b) \in P$ mit (2.4).
Dann ist c2) eine unmittelbare Konsequenz, da $1^2 = 1 \neq 0$.
Zum Nachweis von c3) nehme man $a > 0$, $a^{-1} < 0$ an. Dann $1 = a \cdot a^{-1} < 0$ nach c1) im Widerspruch zu c2).
c4) folgt aus $(-c)(b - a) > 0$ (wegen c3) und (2.5). Im Fall $a > 0$, $b > 0$ ergibt sich c5) wie folgt: Aus c3) folgt $a^{-1} > 0$ und $b^{-1} > 0$ und es ist $a^{-1} \neq b^{-1}$ wegen $a \neq b$. Wäre $a^{-1} < b^{-1}$, so $1 = aa^{-1} \overset{\text{b4)}}{<} bb^{-1} = 1$ und Widerspruch. Die restlichen Fälle ergeben sich hieraus mit c1), c3) und c4). □

(2.9) Bemerkung. Jeder angeordnete Körper K „enthält $\mathbb{Q}$“ (also auch $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$) in folgendem Sinn: Es gibt eine injektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Q} \to K,$$

welche die Rechenoperationen und die Anordnung respektiert; d. h. für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\begin{array}{lcl} \varphi(x+y) & = & \varphi(x)+\varphi(y); \\ \varphi(x \cdot y) & = & \varphi(x) \cdot \varphi(y); \\ x < y & \Rightarrow & \varphi(x) < \varphi(y). \end{array}$$

(Beachte, dass die Symbole links für $\mathbb{Q}$ gelten, die auf der rechten Seite für K.)

Wir wollen das hier nicht beweisen, aber die grundlegende Idee soll angegeben werden: Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$n \cdot 1 := \sum_{k=1}^{n} 1 \in K$$

und damit

$$\varphi_0 : \mathbb{N} \to K, \quad n \mapsto n \cdot 1.$$

Wegen $\varphi_0(n+1) - \varphi_0(n) = (n+1) \cdot 1 - n \cdot 1 = 1 > 0$ ist $\varphi_0(n+1) > \varphi_0(n)$ für alle n, also φ_0 injektiv. Man kann nun nachweisen, dass φ_0 die Rechenoperationen und die Anordnung respektiert und in weiteren Schritten φ_0 zu einer Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach K bzw. von $\mathbb{Q}$ nach K fortsetzen.

Wir werden im Folgenden stets annehmen, dass ein angeordneter Körper K die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als Teilmenge enthält.

Nun kommen wir zum Betrag.

(2.10) Definition. Sei K ein angeordneter Körper. Dann wird der *Betrag* oder *Absolutbetrag* $|x|$ von x definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Damit lässt sich zeigen:

(2.11) Satz. *Sei K ein angeordneter Körper. Dann gilt für alle $x, y \in K$:*

(i) $|x| \geqslant 0$ *und* $|x| > 0$ *für* $x \neq 0$.

(ii) $|x| = |-x|$ *und* $x \leqslant |x|$.

(iii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(iv) $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$ *und* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ *für* $y \neq 0$.

(v) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung).*

(vi) $|x+y| \geqslant ||x| - |y|| \geqslant |x| - |y|$ *(2. Dreiecksungleichung).*

(vii) $|x| \leqslant y \;\Leftrightarrow\; -y \leqslant x \leqslant y$.

Beweis. (i) Für $x \neq 0$ gilt entweder $|x| = x > 0$ oder $x < 0$, d. h. $|x| = -x > 0$ nach (2.10).
(ii) Für $x \geqslant 0$ gilt $|x| = |-x| = x$ und für $x < 0$ hat man $|x| = |-x| = -x$, insbesondere $x \leqslant 0 \leqslant |x|$.
(iii) Man führe eine Fallunterscheidung durch und verwende (2.10).
(iv) Man verwende (2.4) (vii).
(v) 1. Fall: Aus $x + y \geqslant 0$ folgt

$$|x+y| = x + y \leqslant |x| + |y|$$

wegen $x \leqslant |x|, y \leqslant |y|$ nach (ii).
2. Fall: Aus $x + y < 0$ folgt

$$|x+y| = -(x+y) = -x - y \leqslant |x| + |y|$$

wegen $-x \leqslant |-x| = |x|$ und $-y \leqslant |-y| = |y|$ nach (ii).
(vi) Man verwende (v) in den Rechnungen

$$\begin{aligned} |x| &= |x + y + (-y)| \leqslant |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|, \quad \text{also } |x+y| \geqslant |x| - |y|, \\ |y| &= |y + x + (-x)| \leqslant |x+y| + |x|, \quad \text{also } |x+y| \geqslant |y| - |x| = -(|x| - |y|). \end{aligned}$$

Es folgt $|x+y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$.
(vii) Es gilt $|x| \leqslant y$ genau dann, wenn $x \leqslant y$ und $-x \leqslant y$, d. h. $x \geqslant -y$. Also gilt insgesamt

$$|x| \leqslant y \;\Leftrightarrow\; -y \leqslant x \leqslant y. \qquad \square$$

Schließlich führen wir (für später) noch einige Bezeichnungen ein.

(2.12) Definition. Es sei K ein angeordneter Körper und $a, b \in K$ mit $a < b$.

a) Die folgenden Mengen werden *Intervalle* genannt:

(i) $[a,b] := \{x \in K;\; a \leqslant x \leqslant b\}$;

(ii) $[a,\infty] := \{x \in K;\; a \leqslant x\}$;

(iii) $(-\infty, b] := \{x \in K;\; x \leqslant b\}$;

(iv) $(a,b) := \{x \in K;\ a < x < b\}$;

(v) $(a,\infty) := \{c \in K;\ a < x\}$;

(vi) $(-\infty,b) := \{x \in K;\ x < b\}$;

(vii) $(a,b] := \{x \in K;\ a < x \leqslant b\}$;

(viii) $[a,b) := \{x \in K;\ a \leqslant x < b\}$.

b) Die ersten drei Typen (i) - (iii) von Intervallen heißen *abgeschlossen*, die Typen (iv) - (vi) heißen *offen*.

c) Sonderfälle: Man zählt auch die leere Menge $\emptyset$, die einpunktigen Mengen $[a,a] := \{a\}$ und $(-\infty,\infty) := K$ zu den Intervallen.

d) Ein Intervall heißt *nicht-ausgeartet*, wenn es mehr als ein Element enthält.

§3. Einiges zu Gleichungen und Ungleichungen

Wir wollen hier einige Prinzipien festhalten, die beim Umgang mit Zahlen (und Funktionen) nützlich sein können. Sie sind unmittelbare Folgerungen aus §2.
Zunächst wollen wir präzisieren, was wir mit einer Gleichung bzw. Ungleichung meinen. Es gibt keine allgemeine Definition, aber für unsere Zwecke reicht das Folgende aus.

(3.1) Arbeitsdefinition. Es seien K ein angeordneter Körper und $D \subset K$ nicht-leer sowie $f, g : D \to K$ Abbildungen.

a) Man nennt die Problemstellung

„Bestimme alle $x \in D$, welche $f(x) = g(x)$ erfüllen.“

eine *Gleichung* in D. Oft schreibt man nur kurz „$f(x) = g(x)$ (und $x \in D$)“.
Eine *Lösung* dieser Gleichung ist ein $z \in D$, das $f(x) = g(x)$ erfüllt. Die Menge aller Lösungen heißt *Lösungsmenge* der Gleichung.

b) Man nennt die Problemstellung

„Bestimme alle $x \in D$, welche $f(x) < g(x)$ [oder $f(x) \leqslant g(x)$] erfüllen.“

eine *Ungleichung* in D. Oft schreibt man nur kurz „$f(x) < g(x)$ [oder $f(x) \leqslant g(x)$](und $x \in D$)“.
Eine *Lösung* dieser Ungleichung ist ein $z \in D$, das $f(x) < g(x)$ [oder $f(x) \leqslant g(x)$] erfüllt. Die Menge aller Lösungen heißt *Lösungsmenge* der Ungleichung.

Folgende Beobachtungen können beim Lösen von Gleichungen bzw. Ungleichungen hilfreich sein.

(3.2) Lemma. *Es seien D, f, g wie in (3.1). Weiter sei $h : D \to K$.*

a) Für jedes $x \in D$ gilt

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x).$$

Weiter gilt

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x).$$

Ist zusätzlich $h(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x).$$

b) Für jedes $x \in D$ gilt

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x).$$

und

$$f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) \leqslant g(x) + h(x).$$

Ist $h(x) \geqslant 0$ für alle $x \in D$, so gilt weiter:

$$f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow f(x) \cdot h(x) \leqslant g(x) \cdot h(x).$$

Ist schließlich $h(x) > 0$ für alle $x \in D$, so gilt

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x).$$

Beweis. Alle Aussagen ergeben sich aus (2.8). □

(3.3) Bemerkung. Die Voraussetzung, dass $h(x) \geqslant 0$ (bzw. $h(x) > 0$) für alle $x \in D$ ist in Teil b) notwendig. Multiplikation mit negativen Zahlen „dreht eine Ungleichung um“; vgl. Satz (2.8) c4).

(3.4) Beispiele. Es sei K stets ein angeordneter Körper.

a) Gesucht sind alle $x \in K$ mit

$$2x + 3 = 6x - 7.$$

Wir führen die Lösung sehr kleinschrittig vor:

$$\begin{aligned} & 2x+3 = 6x-7 \\ \Leftrightarrow\ & 3 = 4x-7 \quad (\text{addiere} \quad h_1(x) = -2x) \\ \Leftrightarrow\ & 10 = 4x \quad (\text{addiere} \quad h_2(x) = 7) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{10}{4} = x \quad (\text{multipliziere mit} \quad h_3(x) = \frac{1}{4}) \\ \Leftrightarrow\ & 2.5 = x \end{aligned}$$

b) Gesucht sind alle $x \in K$ mit

$$|x| = 3x+4.$$

Hier ist eine Fallunterscheidung angebracht:

1. Fall: $x \geqslant 0$, also $D_1 = [0, \infty)$. Dann $|x| = x$ und

$$\begin{aligned} & x = 3x+4 \\ \Leftrightarrow\ & -2x = 4 \quad (\text{addiere} \quad h_1(x) = -3x) \\ \Leftrightarrow\ & x = -2 \quad (\text{multipliziere mit} \quad h_2(x) = -\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

In $D_1 = [0, \infty)$ haben wir also keine Lösung.

2. Fall: $x < 0$, also $D_2 = (-\infty, 0)$. Dann $|x| = -x$ und

$$\begin{aligned} & -x = 3x+4 \\ \Leftrightarrow\ & -4x = 4 \quad (\text{addiere} \quad h_1(x) = -3x) \\ \Leftrightarrow\ & x = -1 \quad (\text{multipliziere mit} \quad h_2(x) = -\frac{1}{4}). \end{aligned}$$

In $D_2 = (-\infty, 0)$ haben wir also die einzige Lösung -1.

Insgesamt ist die Lösungsmenge gleich $\{-1\}$.

c) Gesucht sind alle $x \in K$ mit

$$|x+1| < 2x+3$$

Auch hier ist eine Fallunterscheidung sinnvoll.

1. Fall: $x+1 \geqslant 0$, also $D_1 = [-1, \infty)$ und $|x+1| = x+1$. Dann

$$\begin{aligned} & x+1 < 2x+3 \\ \Leftrightarrow\ & -2 < x \quad (\text{addiere} \quad h(x) = -x-3). \end{aligned}$$

Dies ist für alle $x \in D_1$ (mit $x \geqslant -1$) richtig.

2. Fall: $x+1<0$, also $D_2 = (-\infty,-1)$ und $|x+1| = -x-1$. Dann

$$\begin{aligned} -x-16 &< 2x+3 \\ -4 &< 3x \quad (\text{addiere} \quad h_1(x) = x-3) \\ \frac{-4}{3} &< x \quad (\text{multipliziere mit} \quad h_2(x) = \frac{1}{3}). \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge in D_2 ist also $(-\frac{4}{3},-1)$.

Insgesamt besitzt die Ungleichung die Lösungsmenge

$$L = \left(-\frac{4}{3},\infty\right).$$

Nach diesen Anmerkungen zum praktischen Umgang mit Gleichungen und Ungleichungen wollen wir zwei Fakten beweisen, die in der Analysis vielfach nützlich sind. Zunächst geht es um die geometrische Summenformel:

(3.5) Satz. *(Geometrische Summenformel) Es sei K ein Körper.*
a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes $q \in K$, $q \neq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a,b \in K$ mit $a \neq b$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

Vor dem Beweis treffen wir noch eine

Vereinbarung. Ist K ein Körper, so setzt man $x^0 := 1$ für alle $x \in K$. Insbesondere gilt also auch $0^0 = 1$.

Beweis. a) Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach n.
(IA) Im Fall $n=0$ gilt $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{q-1}{q-1}$.
(IS) Es gelte $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}.$$

b) Im Fall $b=0$ ist die Behauptung trivial, weil beide Seiten gleich a^n sind. Ist $b \neq 0$, so verwendet man a) mit $q = \frac{a}{b} \neq 1$ in der Rechnung

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = b^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^k = b^n \cdot \frac{(a/b)^{n+1}-1}{(a/b)-1} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

□

Des Weiteren ist die folgende Abschätzung sehr oft nützlich.

(3.6) Satz. *(*BERNOULLI*sche Ungleichung) Es sei K ein angeordneter Körper. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in K$, $a \geqslant -1$, gilt*

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

In diesem Fall gilt $(1+a)^n = 1 + na$ genau dann, wenn $n = 0$ oder $n = 1$ oder $a = 0$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n.
(IA) Im Fall $n = 0$ gilt $(1+a)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot a$.
(IS) Es gelte $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $1 + a \geqslant 0$ ergibt Multiplikation dieser Ungleichung mit $1 + a$:

$$(*) \qquad \begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n \cdot (1+a) \geqslant (1+na) \cdot (1+a) \\ &= 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a, \end{aligned}$$

denn $na^2 \geqslant 0$. (Wir haben hier einige Regeln benutzt. Neben dem Distributivgesetz wurde insbesondere bei der ersten Ungleichung benutzt, dass für $x, y, z \geqslant 0$ mit $x \geqslant y$ auch $xz \geqslant yz$ gilt; vgl. (2.8) b). Der Schluss „$na^2 \geqslant 0$“ benutzt zudem, dass $a^2 \geqslant 0$ für alle $a \in K$; vgl. (2.8) c3).)
Für $n = 0$ oder $n = 1$ oder $a = 0$ gilt die Gleichheit. Ist aber $n \geqslant 1$ und $a \neq 0$, so hat man $(1+a)^{n+1} > 1 + (n+1)a$ nach $(*)$ wegen $na^2 > 0$. □

Aus der binomischen Formel (1.11) erhalten wir

(3.7) Korollar. *Es sei $q \in \mathbb{Q}, q > 1$. Dann gibt es zu jedem $M > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\frac{q^n}{n} \geqslant M \quad \text{für alle } n \geqslant N.$$

Beweis. Es sei $q = 1 + r$ mit $r (= q - 1) > 0$. Für alle $n \geqslant 2$ ist dann

$$q^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k \geqslant \frac{n(n-1)}{2} r^2,$$

denn alle Summanden sind $\geqslant 0$. Also $\frac{q^n}{n} \geqslant \frac{r}{2} \cdot (n-1)$.
Zu $M \in \mathbb{Q}$, $M > 0$ wähle $N = 1 + \lceil 2M/r^2 \rceil$. (Dabei bezeichnet für $x \in \mathbb{Q}$ die *Aufrundung* $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl m mit $m \geqslant x$.) Für $n \geqslant N$ ist dann

$$\frac{r^2}{2}(n-1) \geqslant \frac{r^2}{2}(N-1) \geqslant \frac{r^2}{2} \cdot \frac{2M}{r^2} = M.$$

□

§4. Vollständigkeit und reelle Zahlen

Wir kommen nun zu einem wesentlichen Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Dieser liegt im Vollständigkeitsaxiom.

(4.1) Definition. Sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$. Die Menge M heißt *nach oben beschränkt*, falls ein $C \in K$ existiert, so dass $x \leqslant C$ für alle $x \in M$. Jedes solche C nennt man eine *obere Schranke* von M. Die Menge M heißt *nach unten beschränkt*, wenn ein $c \in K$ existiert mit $c \leqslant x$ für alle $x \in M$. Jedes solche c nennt man eine *untere Schranke* von M. Die Menge M heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Betrachtet man das größere der beiden Elemente $|c|$, $|C|$, so sieht man sofort, dass M genau dann beschränkt ist, wenn es ein $R > 0$ gibt, so dass $|x| \leqslant R$ für alle $x \in M$. Die leere Menge ist trivialerweise beschränkt.

(4.2) Beispiele. Sei stets $K = \mathbb{Q}$.
a) $\mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt, da z. B. $c = 1$ oder $c = \frac{1}{2}$ untere Schranken sind. Als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt: Gäbe es ein $C \in \mathbb{Q}$ mit $n \leqslant C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so wäre $C = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ und es folgte $q \cdot n \leqslant p$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also wegen $q \geqslant 1$ auch $n \leqslant q \cdot n \leqslant p$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und Widerspruch. (Dass $\mathbb{N}$ auch als Teilmenge von $\mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt ist, muss - und wird noch - bewiesen werden.)
b) Ist $M \subset \mathbb{Q}$ endlich, so ist M beschränkt.
c) $M = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$ ist beschränkt. Z. B. ist $\frac{3}{2}$ eine obere und $-\frac{3}{2}$ eine untere Schranke von M.
d) $\{x \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \frac{1}{m}\}$ ist beschränkt, da z. B. 1 eine obere und 0 eine untere Schranke ist.
e) $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, 0 < x < 1\}$ ist beschränkt.

Wir kommen nun zu einem weiteren wesentlichen Begriff.

(4.3) Definition. Sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$. Ein $C \in K$ heißt *Supremum* oder *kleinste obere Schranke* von M, wenn gilt:
(S.1) C ist eine obere Schranke von M, d. h. $x \leqslant C$ für alle $x \in M$.
(S.2) Ist C' eine obere Schranke von M, so gilt $C \leqslant C'$.
Ein $c \in K$ heißt *Infimum* oder *größte untere Schranke* von M, wenn gilt:
(I.1) c ist eine untere Schranke von M, d. h. $c \leqslant x$ für alle $x \in M$.
(I.2) Ist c' eine untere Schranke von M, so gilt $c' \leqslant c$.
Wir verwenden die Schreibweise $C = \sup M$ und $c = \inf M$.

Aus dieser Definition folgt *nicht*, dass das Supremum bzw. das Infimum für eine gegebene Menge existieren.

Ein besonderer Fall liegt vor, wenn Supremum oder Infimum zur Menge gehören:

(4.4) Definition. Sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$.

a) Existiert ein $C \in M$ mit $C = \sup M$, so nennt man C das *Maximum* von M; Bezeichnung $C = \max M$.

b) Existiert ein $c \in M$ mit $c = \inf M$, so nennt man c das *Minimum* von M; Bezeichnung $c = \min M$.

Es gilt also $c = \max M$ genau dann, wenn $c \in M$ und $x \leqslant c$ für alle $x \in M$. Des Weiteren gilt $c = \min M$ genau dann, wenn $c \in M$ und $x \geqslant c$ für alle $x \in M$.

Wiederum gilt, dass Maximum bzw. Minimum für eine gegebene Menge nicht unbedingt existieren.

(4.5) Beispiele. Sei wieder $K = \mathbb{Q}$.
a) Es gilt $\inf \mathbb{N} = 1$ und $\inf \mathbb{N}_0 = 0$.
b) Sei $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$. Dann gilt $\inf M = 0$ und $\sup M = 1$. Denn:
(S.1) Es gilt $x \leqslant 1$ für alle $x \in M$. Also ist 1 eine obere Schranke.
(S.2) Sei $C \in \mathbb{Q}$, $C < 1$. Gilt $C \leqslant 0$, so ist C wegen $\frac{1}{2} \in M$ keine obere Schranke. Sei also $0 \leqslant C < 1$. Dann definiere

$$x := \frac{1}{2}(1 + C) \in \mathbb{Q}$$

und es folgt $0 < x < 1$, also $x \in M$ und $C < x$. Demnach ist C keine obere Schranke von M. Es folgt $\sup M = 1$. Das Infimum wird analog behandelt.
c) Sei $M = \{x \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \frac{1}{m}\}$. Dann gilt $\inf M = 0$ und $\sup M = 1$.
d) Ist $M \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ nach oben beschränkt, so existiert $\sup M$ und $\sup M = \max M$. (Denn M enthält ein größtes Element.)
e) Die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q}; x \geqslant 0 \text{ und } x^2 < 2\}$ besitzt kein Supremum in $\mathbb{Q}$.
Wir zeigen dazu: Ist s Supremum von M, so gilt $s^2 = 2$. Wir führen zum Beweis die Annahmen $s^2 < 2$ bzw. $s^2 > 2$ jeweils zum Widerspruch. In jedem Fall können wir $s \geqslant 1$ annehmen, $1 \in M$.

(i) *Annahme*: $s^2 < 2$.
Wir zeigen, dass s dann keine obere Schranke von M ist. Für $h > 0, h < 1$ beachte $0 < h^2 < h$ und betrachte

$$(s + h)^2 = s^2 + 2sh + h^2 \leqslant s^2 + 2sh + h \leqslant s^2 + 3sh.$$

Also gilt $(s + h)^2 < 2$, falls $s^2 + 3sh < 2 \Leftrightarrow 3hs < 2 - s^2 \Leftrightarrow h < \frac{2-s^2}{3s}$.
Mit $h_0 := \frac{2-s^2}{6s}$ ist also $s + h_0 > s$ und $(s + h_0)^2 < 2$, also $s + h_0 \in M$.

(ii) *Annahme:* $s^2 > 2$.
In diesem Fall zeigen wir, dass es eine obere Schranke r gibt, die $r < s$ erfüllt. Für $h > 0$ ist
$$(s-h)^2 = s^2 - 2sh + h^2 \geqslant s^2 - 2sh$$
also $(s-h)^2 > 2$, falls $s^2 - 2hs > 2 \Leftrightarrow 2 - s^2 > 2hs \Leftrightarrow h < \frac{2-s^2}{2s}$. Mit $h_0 := \frac{2-s^2}{4s}$ ist also $s - h_0 < s$ und $(s-h_0)^2 > 2$.
Gäbe es ein Supremum s von M in $\mathbb{Q}$, so müsste $s^2 = 2$ gelten. In $\mathbb{Q}$ hat die Gleichung $x^2 = 2$ aber keine Lösung, wie sich zeigen lässt.

(4.6) Bemerkung. Es sei K ein angeordneter Körper.

a) Wenn ein Supremum (bzw. ein Infimum) einer Menge M existiert, dann ist es eindeutig bestimmt. Denn sind C und C' Suprema von M, so gilt $C \leqslant C'$ und $C' \leqslant C$ nach (4.3), also $C = C'$.

b) Falls die Menge M ein Supremum s besitzt, so besitzt $-M := \{x \in K; -x \in M\}$ ein Infimum und zwar $-s$.

Wir kommen nun zum Problem, dass bisher die reellen Zahlen nicht wirklich genauer charakterisiert wurden. Für die Zwecke dieser Veranstaltung wird das Problem wie folgt gelöst:

(4.7) Charakterisierung der reellen Zahlen. *$\mathbb{R}$ ist ein vollständiger angeordneter Körper; d. h. jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.*

(4.8) Bemerkungen. a) Folglich besitzt (mit (4.6)) auch jede nach unten beschränkte, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Infimum.

b) Aus mathematischer Sicht lässt die Charakterisierung eigentlich alle Fragen offen. Weder die Frage nach Existenz noch die nach Eindeutigkeit wird beantwortet. In der Tat gibt es einen solchen Körper und er ist im Wesentlichen (mathematisch: „bis auf Isomorphie“) eindeutig bestimmt. Bewiesen soll dies hier aber nicht werden.

Relevant für uns ist aber, dass man mit Hilfe der Vollständigkeit mathematische Sachverhalte beweisen kann.

(4.9) Beispiel. In $\mathbb{R}$ existiert ein $a > 0$ mit $a^2 = 2$ (also $\sqrt{2}$). Zur Begründung reicht es, das Beispiel (4.5) d) nochmal anzusehen. Die Menge
$$\widetilde{M} = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant 0 \text{ und } x^2 < 2\}$$
besitzt in $\mathbb{R}$ ein Supremum s, und genau wie in (4.5) d) folgt, dass weder $s^2 < 2$ noch $s^2 > 2$ gelten kann. Also muss $s^2 = 2$ sein.

Wir ziehen zunächst einige Folgerungen aus der Einbettung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$.

(4.10) Satz von ARCHIMEDES (287-212 v.Chr.). *Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist in $\mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt.*

Beweis. Wegen $1 \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{N} \neq \emptyset$. Wir schließen indirekt und nehmen an, dass $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert dann $C = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Weil $C - 1$ dann keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist, gibt es ein $a \in \mathbb{N}$ mit $a > C - 1$, insgesamt ein $a \in \mathbb{N}$ mit

$$C - 1 < a \leqslant C, \quad \text{also} \quad C < a + 1.$$

Es ist aber auch $a+1 \in \mathbb{N}$, also ist C keine obere Schranke von $\mathbb{N}$; Widerspruch. Folglich ist $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt. □

Wir ziehen zwei wichtige Folgerungen; zu Teil c) vergleiche Korollar (3.7).

(4.11) Korollar. *a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $b > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na > b$.*
b) Ist $a \in \mathbb{R}_+$ und gilt $a < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a = 0$.
c) Ist $q \in \mathbb{R}$ und $q > 1$ und $M \in \mathbb{R}$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\frac{q^n}{n} \geqslant M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$.

Beweis. a) Nach (4.10) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{b}{a}$. Es folgt $na > b$ wegen $a > 0$.
b) Wir führen den Beweis indirekt und nehmen $a \neq 0$, also $a > 0$ an. Aus $a \leqslant \frac{1}{n}$ folgt dann $n \leqslant \frac{1}{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ist ein Widerspruch zu (4.10).
c) Der Beweis von Korollar (3.7) lässt sich direkt übertragen, denn es gibt nach (4.10) zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $m > x$. □

Nun zeigen wir, dass $\mathbb{Q}$ „dicht“ in $\mathbb{R}$ liegt.

(4.12) Korollar. *Zu allen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft*

$$a < q < b.$$

Beweis. Wegen $b - a > 0$ existiert nach (4.11) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n(b-a) > 1$, also $0 < \frac{1}{n} < b - a$.
1. Fall: $a > 0$. Dann existiert wieder nach (4.11) ein $l \in \mathbb{N}$ mit $l \cdot \frac{1}{n} > a$. Also ist

$$M = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \frac{k}{n} > a \right\}$$

nicht-leer. Sei $m = \inf M = \min M$. Dann gilt $a < \frac{m}{n}$. Annahme: $\frac{m}{n} \geqslant b$. Dann folgt

$$\frac{m-1}{n} \geqslant b - \frac{1}{n} > b - (b-a) = a > 0.$$

Daraus erhält man $m - 1 \in \mathbb{N}$ und $m - 1 \in M$ als Widerspruch. Also gilt $a < \frac{m}{n} < b$.
2. Fall: $a \leqslant 0$. Wegen (4.10) existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $r > -a$, also $0 < a + r < b + r$. Nach dem 1. Fall existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < a + r < \frac{m}{n} < b + r, \quad \text{also} \quad a < \frac{m}{n} - r = \frac{m - rn}{n} < b, \quad \frac{m}{n} - r \in \mathbb{Q}.$$ □

Die Existenzaussage im nächsten Satz ist ebenfalls eine Konsequenz der Vollständigkeit. Im Grunde geht der Beweis wie in Beispiel (4.5) d); er ist allerdings technisch aufwendiger, weshalb wir ihn weglassen.

(4.13) Satz. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert zu jeder nicht-negativen reellen Zahl $x \in \mathbb{R}_+$ genau eine nicht-negative reelle Zahl $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$ mit der Eigenschaft $(\sqrt[n]{x})^n = x$.*

(4.14) Folgerung. *Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt*
a) $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$.
b) $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \;\Leftrightarrow\; x < y$.
c) $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.
d) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$.

Beweis. a) Es gilt $(\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y})^n = (\sqrt[n]{x})^n \cdot (\sqrt[n]{y})^n = x \cdot y$. Wegen $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \in \mathbb{R}_+$ muss $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ die n-te Wurzel aus $x \cdot y$ sein.
b) Aus $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$ folgt $x = (\sqrt[n]{x})^n < (\sqrt[n]{y})^n = y$ mit (2.8). Aus $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$ ergibt sich $x = (\sqrt[n]{x})^n > (\sqrt[n]{y})^n = y$ mit (2.8).
c) Es gilt $(\sqrt[n]{x})^m \in \mathbb{R}_+$ mit $((\sqrt[n]{x})^m)^n = \sqrt[n]{x}^{mn} = ((\sqrt[n]{x})^n)^m = x^m$, also $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.
d) Man hat $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} \in \mathbb{R}_+$ mit $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}})^{mn} = \left((\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}})^m\right)^n = (\sqrt[n]{x})^n = x$, also $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$. □

Wir schreiben natürlich wieder $\sqrt{y} := \sqrt[2]{y}$ für $y \in \mathbb{R}_+$.

(4.15) Definition. Sei $x > 0$. Für $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ setzt man

$$x^{m/n} := \begin{cases} \sqrt[n]{x^m}, & \text{falls } m \in \mathbb{N}_0, \\ 1/\sqrt[n]{x^{-m}}, & \text{falls } -m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(4.16) Bemerkung. Mit dieser Definition und (4.14) gelten die Potenzgesetze

$$\begin{aligned} x^{r+s} &= x^r \cdot x^s, \\ x^{-r} &= 1/x^r, \text{ sowie} \\ (x^r)^s &= x^{r \cdot s} \end{aligned}$$

für alle reellen $x > 0$ und alle $r, s \in \mathbb{Q}$.

§5. Abzählbarkeit

Abbildungen, die im Zusammenhang mit den natürlichen Zahlen stehen, spielen eine besondere Rolle. Das wird im nächsten Kapitel bei den Folgen noch deutlich werden. In diesem Paragrafen betrachten wir den mengentheoretischen Kontext.

(5.1) Definition. Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn $M = \emptyset$ oder wenn eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ existiert. Eine abzählbare Menge, die nicht endlich ist, heißt *abzählbar unendlich*. Eine nicht abzählbare Menge nennt man *überabzählbar*.

Eine Charakterisierung beinhaltet:

(5.2) Lemma. *Eine Menge $M \neq \emptyset$ ist genau dann abzählbar, wenn eine injektive Abbildung $g : M \to \mathbb{N}$ existiert.*

Beweis. „$\Leftarrow$“ Sei $W = g(M)$. Dann ist $\hat{g} : M \to W$, $x \mapsto g(x)$ bijektiv. Man definiert mit der Umkehrabbildung $\hat{g}^{-1} : W \to M$ für ein festes $x_0 \in M$ die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to M, \quad f(n) := \begin{cases} \hat{g}^{-1}(n), & \text{falls } n \in W, \\ x_0, & \text{falls } n \notin W. \end{cases}$$

Dann ist f surjektiv.
„$\Rightarrow$“ Sei $f : \mathbb{N} \to M$ surjektiv. Dann ist die Abbildung

$$g : M \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto \min\{n \in \mathbb{N};\ f(n) = x\},$$

wohldefiniert und injektiv. □

Wir diskutieren einige

(5.3) Beispiele. a) $\mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich. (Wähle $f = id$, die identische Abbildung.)
b) Die Abbildung

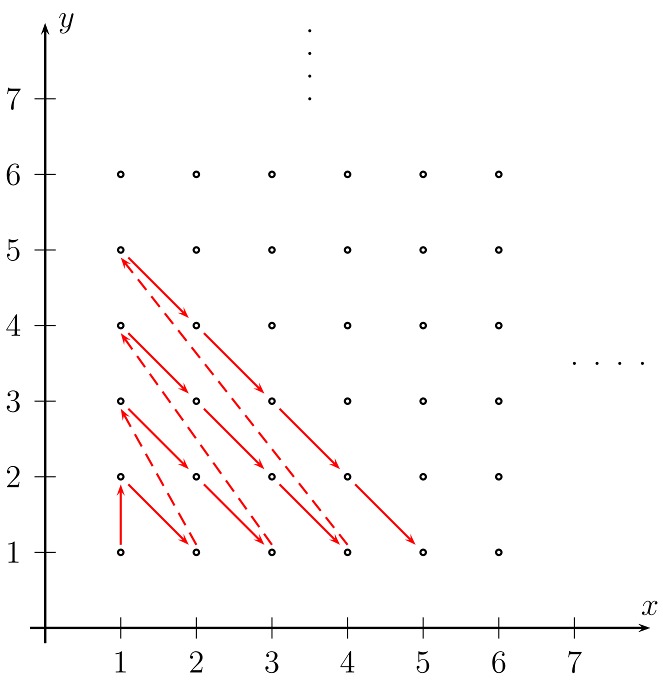
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1-n}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

ist bijektiv, so dass $\mathbb{Z}$ ebenfalls abzählbar unendlich ist.
c) Jede endliche Menge $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ ist abzählbar, denn

$$f : \mathbb{N} \to M, \quad f(j) := x_j,\ 1 \leqslant j \leqslant m, \quad f(j) := x_m \text{ für } j > m,$$

ist eine surjektive Abbildung.

Wir wollen nun zeigen, dass auch das Kartesische Produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist. Hinter dem Beweis steckt als Idee das sogenannte Cantorsche Diagonalverfahren (G. Cantor 1845-1918).



Visualisiert man $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als die Menge der positiv ganzzahligen Punkte in der Koordinatenebene, dann ist das „Durchlaufen" von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gut zu veranschaulichen und der Name Diagonalverfahren wird verständlich.

Jetzt soll die Abbildung aber formal korrekt angegeben werden.

(5.4) Satz. *a) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein Paar (m, l) mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leqslant l \leqslant m+1$, so dass*

$$n = \frac{m(m+1)}{2} + l.$$

b) Durch

$$\varphi(n) = \varphi\left(\frac{m(m+1)}{2} + l\right) = (l, m+2-l)$$

ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gegeben. Insbesondere ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar.

Beweis. a) Sei $A_k = \left\{n \in \mathbb{N};\ \frac{k(k+1)}{2} < n \leqslant \frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\mathbb{N}$ disjunkte Vereinigung der A_k und für $n \in A_k$ ist

$$n - \tfrac{k(k+1)}{2} \leqslant \tfrac{(k+2)(k+1)}{2} - \tfrac{k(k+1)}{2} = k+1.$$

b) Surjektivität: Ein Urbild von $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist

$$\frac{(j+k-2)(j+k-1)}{2} + j,$$

wie Nachrechnen zeigt.
Injektivität: Seien

$$n = \frac{m(m+1)}{2} + l \quad \text{und} \quad n' = \frac{m'(m'+1)}{2} + l' \quad \text{mit } \varphi(n) = \varphi(n').$$

Dann folgt $(l, m+2-l) = (l', m'+2-l')$, also $m+2 = m'+2$ (Addieren der Einträge) und $m = m'$. Vergleich der ersten Einträge zeigt $l = l'$. $\square$

(5.5) Korollar. *Eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar.*

Beweis. Sei $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, jedes M_n abzählbar und ohne Einschränkung $M_n \neq \emptyset$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{N} \to M_n$ surjektiv. Die Abbildung φ aus (5.4) werde komponentenweise mit $\varphi(n) = \big(\varphi_1(n), \varphi_2(n)\big)$ angegeben. Definiere

$$g : \mathbb{N} \to M$$

durch $g(l) = f_{\varphi_1(l)}\big(\varphi_2(l)\big)$. Nach (5.4) und Konstruktion ist jedes $f_j(k)$ mit $j, k \in \mathbb{N}$ im Bild von g enthalten. Also ist g surjektiv. $\square$

(5.6) Korollar. *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Man hat

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \quad M_n := \left\{ \frac{x}{n} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Mit $\mathbb{Z}$ ist jedes M_n abzählbar, also nach (5.5) auch $\mathbb{Q}$. □

Als weitere Anwendung formulieren wir das

(5.7) Korollar. *a) Sind M_1 und M_2 abzählbar, so auch $M_1 \times M_2$.*

b) Ist M abzählbar und $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $M^n = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n-mal}$ abzählbar.

Beweis. Aus a) ergibt sich b) wegen $M^{(n+1)} = M^{(n)} \times M$ mit offensichtlicher Induktion. Zum Beweis von a) dürfen wir $M_1 \neq \emptyset$ und $M_2 \neq \emptyset$ annehmen. Es seien $f : \mathbb{N} \to M_1$ und $g : \mathbb{N} \to M_2$ surjektiv. Dann gilt

$$\begin{aligned} M_1 \times M_2 &= \{(f(k), g(l)) \mid k, l \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} X_l, \\ X_l : &= \{(f(k), g(l)) \mid k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Da jedes X_l abzählbar ist, ist $M^{(n+1)}$ nach (5.5) ebenfalls abzählbar. □

Als erstes Negativbeispiel erhalten wir den

(5.8) Satz. *Die Potenzmenge* Pot($\mathbb{N}$) *ist überabzählbar.*

Beweis. Angenommen, es gibt eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathrm{Pot}(\mathbb{N})$. Nun betrachten wir $A := \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\} \in \mathrm{Pot}(\mathbb{N})$. Wegen der Surjektivität von f existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f(m) = A$.
1. Fall: $m \in f(m) = A$. Dann folgt $m \notin A = f(m)$ als Widerspruch.
2. Fall: $m \notin f(m) = A$. Dann folgt $m \in A = f(m)$ als Widerspruch.
Also kann kein solches f existieren. □

(5.9) Korollar. *Die Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ in $\{0,1\}$ ist überabzählbar.*

Beweis. Ordnet man einem $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ die Menge $X_f := \{n \in \mathbb{N};\ f(n) = 1\}$ zu, so erhält man eine Abbildung von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ nach Pot($\mathbb{N}$). Diese ist bijektiv. □

Um die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ nachzuweisen, müssen wir zuerst die Theorie noch weiter vorantreiben.

Kapitel III.

Folgen und Reihen

Folgen und Reihen sind grundlegende Hilfsmittel, um reelle Zahlen (wenigstens approximativ) zu beschreiben. Auch viele interessante und relevante Funktionen lassen sich am besten mit ihrer Hilfe definieren und diskutieren.

§1. Konvergenz reeller Folgen

In diesem Paragrafen geht es um den Konvergenzbegriff und um elementare Eigenschaften.

(1.1) Definition. Eine (reelle) *Folge* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Statt $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, schreibt man für die Folge kurz $(a_n)_{n \geqslant 1}$. Man nennt die Wertemenge dieser Abbildung $W = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ auch die *Wertemenge der Folge*. Gilt $W \subset M$, so spricht man von einer *Folge in* M.

Definitionsgemäß sind also zwei Folgen $(a_n)_{n \geqslant 1}$ und $(b_n)_{n \geqslant 1}$ genau dann gleich, wenn $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Als leichte Verallgemeinerung von (1.1) spricht man für $n_0 \in \mathbb{Z}$ auch im Fall einer Abbildung $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant n_0\} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, von einer Folge und schreibt dafür $(a_n)_{n \geqslant n_0}$.

(1.2) Beispiele. (i) Ist $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $(a_n)_{n \geqslant 1}$ die konstante Folge mit Wertemenge $W = \{1\}$.
(ii) Sei $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n)_{n \geqslant 1} = \left((-1)^n\right)_{n \geqslant 1}$ mit Wertemenge $W = \{1, -1\}$.
(iii) Die Folge $(n-1)_{n \geqslant 1}$ hat die Wertemenge $\mathbb{N}_0$.
(iv) $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1-n}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$ definiert eine Folge $(a_n)_{n \geqslant 1}$ mit Wertemenge $\mathbb{Z}$.
(v) Nach II(5.6) existiert eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, also eine Folge mit Wertemenge $\mathbb{Q}$.

(vi) $(\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$, $(\sqrt[n]{n})_{n\geqslant 1}$ und $\left(\frac{n^3-1}{n^2+1}\right)_{n\geqslant 1}$ sind weitere Beispiele reeller Folgen.
(vii) Für $u, q \in \mathbb{R}^*$ nennt man $(b_n)_{n\geqslant 1}$, definiert durch

$$b_n := u \cdot q^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine *geometrische Folge*. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass der Quotient aufeinanderfolgender Folgeglieder

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

konstant ist.

Wir führen noch einige weitere Begriffe ein:

(1.3) Definition. a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} \geqslant a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Folge heißt *monoton fallend*, wenn $a_{n+1} \leqslant a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *streng monoton wachsend* [resp. *streng monoton fallend*], wenn $a_{n+1} > a_n$ [resp. $a_{n+1} < a_n$] für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein $M_1 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leqslant M$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein $M_2 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \geqslant M_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine nach oben und unten beschränkte Folge heißt kurz *beschränkt*.

(1.4) Bemerkung. a) Eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist offensichtlich durch a_1 nach unten beschränkt, eine monoton fallende Folge ist offensichtlich nach oben beschränkt.

b) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|a_n| \leqslant M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Einen fundamentalen Begriff formulieren wir in der

(1.5) Definition. Eine reelle Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ heißt *konvergent*, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geqslant n_0.$$

Man nennt a *Limes* oder *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Man sagt auch, dass $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *gegen a konvergiert*. Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt *Nullfolge*. Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

Die Konvergenzbedingung besagt, dass *fast alle* Folgeglieder (d. h. alle bis auf endlich viele) von a höchstens den Abstand ε haben.

(1.6) Beispiele. (i) Gilt $a_n = c \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. Man kann nämlich stets $n_0(\varepsilon) = 1$ in der Definition wählen.
(ii) Für $(a_n)_{n\geqslant 1} = (\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Zu $\varepsilon > 0$ wählt man nach II(4.10) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geqslant n_0.$$

(iii) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$. Zu $\varepsilon > 0$ wählt man nach II(4.10) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Dann gilt

$$\Big|\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0\Big| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geqslant n_0.$$

Obwohl $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ für alle n gilt, hat man $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Nun wollen wir uns mit Eigenschaften konvergenter Folgen und ihrer Grenzwerte befassen.

(1.7) Satz. *a) Eine (reelle) Folge besitzt höchstens einen Grenzwert. D. h., wenn $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert, dann ist der Limes eindeutig bestimmt.*
b) Eine konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis. a) Seien a und a' Grenzwerte von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $\varepsilon > 0$. Man wählt $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für alle $n \geqslant n_0$ und $|a_n - a'| < \varepsilon/2$ für alle $n \geqslant n_1$. Sei $m \geqslant \max\{n_0, n_1\}$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$|a - a'| = |a - a_m + a_m - a'| \leqslant |a - a_m| + \ |a_m - a'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt daraus $a = a'$.
b) Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\varepsilon = 1$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| - |a| \leqslant |a_n - a| < 1 \quad \text{für alle} \quad n \geqslant n_0,$$

wenn man die 2. Dreiecksungleichung II(2.11) (vi) verwendet. Also gilt $|a_n| < |a| + 1$ für alle $n \geqslant n_0$. Sei $c := \max\{|a| + 1, |a_1|, \ldots, |a_{n_0}|\}$. Dann gilt

$$|a_n| \leqslant c \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

□

(1.8) Beispiel. Für $u \neq 0$, $|q| > 1$ ist die Folge $(u \cdot q^n)_{n\geqslant 1}$ nach II(4.11) unbeschränkt, also divergent.

(1.9) Satz. *(Limitenregeln)*
Seien $c \in \mathbb{R}$ *und* $(a_n)_{n\geqslant 1}, (b_n)_{n\geqslant 1}$ *konvergente (reelle) Folgen mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$*. Dann gilt:*
a) $(a_n + b_n)_{n\geqslant 1}$ *konvergiert mit* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$*.*
b) $(ca_n)_{n\geqslant 1}$ *konvergiert mit* $\lim\limits_{n\to\infty} (ca_n) = ca$*.*
c) $(a_n \cdot b_n)_{n\geqslant 1}$ *konvergiert mit* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$*.*
d) Falls $b_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $b \neq 0$*, so konvergiert* $(a_n/b_n)_{n\geqslant 1}$ *mit*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

Beweis. Wir zeigen exemplarisch nur a):
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant n_2$. Sei $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung II(2.11) (v) für alle $n \geqslant n_0$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

(1.10) Beispiel. Die Folge $((-1)^n)_{n\geqslant 1}$ ist nicht konvergent. Denn wäre $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = a$, so $\lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty}((-1)^n)^2 = a^2$ mit Teil c) des Satzes; also müsste $a \in \{-1, 1\}$ sein. Die Annahme $a = 1$ führt aber zum Widerspruch, denn zu $\varepsilon^* := 1$ gibt es kein n_0, so dass $|(-1)^n - 1| < 1$ für alle $n \geqslant n_0$: Für ungerades n ist stets $|(-1)^n - 1| = 2$. Analog führt man die Annahme $a = -1$ zum Widerspruch.

Wir sehen uns weitere Anwendungen des Satzes an.

(1.11) Beispiele. a) Mit einer Induktion nach k folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^k = 0^k = 0.$$

b) Sei

$$a_n = \frac{4n^2 - 3n - 15}{3n^2 + n + 7} = \frac{4 - (3/n) - (15/n^2)}{3 + (1/n) + (7/n^2)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (4 - \frac{3}{n} - \frac{15}{n^2}) = 4$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^2}) = 3$, also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}$ nach (1.9).
c) Auf $b_n = \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}$ ist (1.9) nicht direkt anwendbar. Es folgt aber

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}^2 - \sqrt{n+1}^2} \\ &= \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{-1} = -(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}). \end{aligned}$$

Also ist $(b_n)_{n\geqslant 1}$ unbeschränkt und damit nach (1.7) divergent.

Als einfache Anwendung formulieren wir das

(1.12) Korollar. *a) Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$. Die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert genau dann gegen a, wenn $(a_n - a)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge ist.*
b) Ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ eine beschränkte Folge, so ist $(a_n b_n)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge.

Beweis. a) Weil die konstante Folge $(a)_{n\geqslant 1}$ gegen a konvergiert, folgt die Behauptung direkt aus der Limitenregel für die Summe.

b) Sei $|b_n| < B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| < \varepsilon/B$ für alle $n \geqslant n_0$. Dann gilt für alle $n \geqslant n$

$$|a_n b_n| \leqslant |a_n| \cdot B < (\varepsilon/B) \cdot B = \varepsilon,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. □

Sehr nützlich ist auch das folgende

(1.13) Sandwich-Lemma. *Gegeben seien reelle Folgen $(a_n)_{n\geqslant 1}, (b_n)_{n\geqslant 1}, (c_n)_{n\geqslant 1}$ mit der Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$. Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \quad \textit{für alle} \quad n \geqslant N,$$

so ist auch $(b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Beweis. Es gilt für alle $n \geqslant N$:

$$b_n - A \leqslant c_n - A,\ A - b_n \leqslant A - a_n \quad \text{also} \quad |b_n - A| \leqslant \max\{|a_n - A|,\ |c_n - A|\}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $n_0 \geqslant N$ mit der Eigenschaft $|a_n - A| < \varepsilon$ und $|c_n - A| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$. Es folgt $|b_n - A| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$. □

Als Anwendung formulieren wir zwei wichtige Beispiele als

(1.14) Lemma. *a) Für $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$, ist $(q^n)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge.*

b) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

c) Für $q \in \mathbb{R}$, $q > 0$, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

Beweis. a) Für $q = 0$ ist die Behauptung klar. Sei also $q \neq 0$. Aus $|q| < 1$ folgt $\frac{1}{|q|} = 1 + h$ mit $h > 0$. Mit der BERNOULLIschen Ungleichung II(3.6) ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{1}{q^n}\right| = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n \geqslant 1 + nh = 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > n\frac{1-|q|}{|q|}.$$

Daraus folgt $0 \leqslant |q^n| < \frac{|q|}{1-|q|} \cdot \frac{1}{n}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|q|}{1-|q|} \cdot \frac{1}{n} = 0$ ist nach (1.13) auch $(|q^n|)_{n\geqslant 1}$ und damit $(q^n)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge.
b) Es gilt $1 \leqslant \sqrt[n]{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der binomischen Formel II(1.11) erhält man für alle $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned} n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n &= [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{n} - 1)^k \geqslant \binom{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \\ \Rightarrow\ (\sqrt[n]{n} - 1)^2 &\leqslant \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n-1} \qquad \Rightarrow \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}} \\ \Rightarrow\ 1 \leqslant \sqrt[n]{n} &\leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \end{aligned}$$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ nach (1.6), also $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) = 1$ mit (1.9). Dann erhält man $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ aus (1.13).
c) Gilt $q \geqslant 1$, so hat man $1 \leqslant q \leqslant n$ für alle $n \geqslant n_0 := \lceil q \rceil$ (Aufrundung). Wegen $1 \leqslant \sqrt[n]{q} \leqslant \sqrt[n]{n}$ für $n \geqslant n_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ folgt die Behauptung aus (1.13). Gilt $0 < q < 1$, so hat man $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/q} = \lim\limits_{n\to\infty} {}^{1}/\sqrt[n]{q} = 1$ nach dem bewiesenen Fall. Dann ergibt sich $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$ aus den Limitenregeln. □

Wir diskutieren weitere

(1.15) Beispiele. a) Sei $0 < \alpha \leqslant \beta$ und $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge mit der Eigenschaft $\alpha \leqslant x_n \leqslant \beta$ für alle $n \geqslant 1$. Dann gilt $\sqrt[n]{\alpha} \leqslant \sqrt[n]{x_n} \leqslant \sqrt[n]{\beta}$. Aus (1.14) c) und dem Sandwich-Lemma (1.13) ergibt sich dann

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

b) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ rationaler Zahlen, die gegen x konvergiert. Wir wählen $x_n \in \left(x, x + \frac{1}{n}\right) \cap \mathbb{Q}$ nach II(4.12).

Wir kommen zu einem weiteren neuen Begriff.

(1.16) Definition. Eine Folge $(a'_k)_{k\geqslant 1}$ heißt *Teilfolge* einer Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$, wenn es eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\geqslant 1}$ von Indizes in $\mathbb{N}$ gibt mit $a'_k = a_{n_k}$ für alle $k \geqslant 1$.

Die Teilfolge entsteht also aus der ursprünglichen Folge durch „Streichen“ von Folgegliedern. Beachte, dass $n_k \geqslant k$ für alle k wegen der strengen Monotonie.

(1.17) Lemma. *Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine konvergente Folge mit Limes a. Dann konvergiert auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ gegen a.*

Beweis. Sei $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geqslant 1}$. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Wegen $n_k \geqslant k$ folgt $n_k \geqslant N$ für alle $k \geqslant N$, also $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geqslant N$. Das bedeutet $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. □

Wir hatten schon früher rekursiv definierte Abbildungen von $\mathbb{N}$ in irgendeine Menge M betrachtet. Für Folgen werden wir noch spezifischer:

(1.18) Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ und $g : M \to M$ eine Abbildung, und weiter $a_0 \in M$.
Durch $a_{n+1} := g(a_n)$ wird eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 0}$ rekursiv definiert.

Grenzwerte rekursiv definierter Folgen lassen sich in vielen Fällen charakterisieren:

(1.19) Beispiel. Es sei $q \in \mathbb{R}, q > 0$. Wenn

$$a_0 = q, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{q}{a_n})$$

einen Grenzwert s besitzt, so gilt $s > 0$ und $s = \sqrt{q}$. Den Nachweis von $s > 0$ lassen wir hier weg. Die zweite Aussage begründet man so: $(a_{n+1})_{n\geqslant 0}$ ist eine Teilfolge von (a_n). Nach Lemma (1.17) gilt also $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = s$. Andererseits ist mit den Grenzwertregeln

$$s = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{q}{\lim_{n\to\infty} a_n}) = \frac{1}{2}(s + \frac{q}{s}).$$

Daraus folgt $s = \frac{q}{s}$ oder $s^2 = q$.

(1.20) Bemerkung. Die sogenannten LANDAU-Symbole O und o werden zum Vergleich des Wachstumsverhaltens von Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit positiven Folgegliedern benutzt. Man schreibt

(i) $a_n = O(b_n)$, falls $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist;

(ii) $a_n = o(b_n)$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Diese Bezeichnungen sind z. B. für Komplexitätsabschätzungen gebräuchlich.

(1.21) Beispiele. a) Es ist $\binom{n}{2} = O(n^2)$, da

$$\frac{\binom{n}{2}}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2} \leqslant \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n.$$

b) Es ist $\sqrt{n} = o(n)$, da

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

§2. Monotone Folgen und das Cauchy-Kriterium

Bisher haben wir noch keine brauchbaren Kriterien, die Konvergenz einer Folge nachzuweisen, ohne den Grenzwert vorher zu kennen. Das soll nun geändert werden. Wir beweisen das Monotoniekriterium, das eine direkte Konsequenz der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist. Dann betrachten wir das Cauchy-Kriterium, welches sich daraus ableiten lässt.

Vorab noch eine Aussage zum Verhalten von Grenzwerten bezüglich Ungleichungen.

(2.1) Lemma. *Seien $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergente reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ sowie $c \in \mathbb{R}$.*
a) Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leqslant b_n$ für alle $n \geqslant N$, so folgt $a \leqslant b$.
b) Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leqslant c$ [bzw. $a_n \geqslant c$] für alle $n \geqslant N$, so folgt $a \leqslant c$ [bzw. $a \geqslant c$].

Beweis. a) Es gilt $d_n := b_n - a_n \geqslant 0$ für alle $n \geqslant N$ und $d = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = b - a$ nach (1.9). Annahme: $d < 0$. Dann erfüllen fast alle Folgeglieder $|d_n - d| < \varepsilon^* := |d|$ sowie $d_n \geqslant 0$. Es fogt $d_n - d = |d_n - d| < |d| = -d$ und der Widerspruch $d_n < 0$. Also gilt $d \geqslant 0$ und damit $a \leqslant b$.
b) Man verwende a) mit $b_n = c$. □

Einfach zu beweisen, aber fundamental ist der

(2.2) Satz. *Jede monotone, beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist konvergent. Ist W die Wertemenge von $(a_n)_{n\geqslant 1}$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup W, & \text{falls } (a_n)_{n\geqslant 1} \text{ monoton wachsend ist,} \\ \inf W, & \text{falls } (a_n)_{n\geqslant 1} \text{ monoton fallend ist.} \end{cases}$$

Beweis. Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ohne Einschränkung monoton wachsend, da wir andernfalls einfach $(-a_n)_{n\geqslant 1}$ betrachten. Sei $a = \sup W$ und $\varepsilon > 0$. Weil $a - \varepsilon$ keine obere Schranke ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Da a eine obere Schranke von W und $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton wachsend ist, gilt

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant a_n \leqslant a \quad \text{für alle } n \geqslant n_0,$$

also $-\varepsilon < a_n - a < 0$ für alle $n \geqslant n_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. □

Zur Veranschaulichung diskutieren wir einige Beispiele, die von zentraler Bedeutung sind.

(2.3) Beispiel. Sei $q \in \mathbb{R}, q \geqslant 1$ und $a_1 := q$ sowie $a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{q}{a_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.
Beh. Es gilt $1 \leqslant a_n \leqslant q \leqslant a_n^2$ und $a_n \geqslant a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bew. Wegen $q \geqslant 1$ gilt $1 \leqslant a_1 = q \leqslant q^2 = a_1^2$. Gilt nun $1 \leqslant a_n \leqslant q \leqslant a_n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so hat man insbesondere $a_n \neq 0$ und

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{q}{a_n}\right) \geqslant \frac{1}{2}(1+1) = 1, \\
a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{q}{a_n}\right) \leqslant \frac{1}{2}(q+q) = q, \\
a_{n+1}^2 &= \left[\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{q}{a_n}\right)\right]^2 \\
&\geqslant \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2q \cdot \frac{a_n}{a_n} + \left(\frac{q}{a_n}\right)^2\right) \geqslant \frac{1}{4}\Big(q + 2q + q\Big) = q
\end{aligned}$$

wegen $a_n^2 \geqslant q$ und $\frac{q}{a_n} \leqslant a_n$. Nun gilt

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{q}{a_n}\right) = \frac{a_n^2 - q}{2a_n} \geqslant 0.$$

□

Demnach ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton fallend und beschränkt. Nach (2.2) existiert der Grenzwert $s = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant 1$ und mit Beispiel (1.19) folgt nun $s = \sqrt{q}$.

Wir kommen zu einem weiteren fundamentalen Begriff.

(2.4) Definition. Eine reelle Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ heißt CAUCHY-*Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geqslant N.$$

Der fundamentale Zusammenhang wird dargestellt in dem

(2.5) Satz. *(*CAUCHY-*Kriterium)*
Für eine reelle Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sind äquivalent:
(i) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist konvergent.
(ii) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist eine CAUCHY-*Folge.*

Auf den Beweis soll in diesem Skript verzichtet werden.

Wir wollen uns noch mit einer Verallgemeinerung des Limes-Konzepts beschäftigen, welches wesentlich von der Tatsache Gebrauch macht, dass wir reelle Folgen betrachten.

Es ist zweckmäßig, ∞ und $-\infty$ als neue Symbole einzuführen und $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ zu betrachten. Wir legen noch fest: $-\infty < a < \infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(2.6) Definition. Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine reelle, divergente Folge. Man nennt $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *bestimmt divergent gegen* ∞ [bzw. *gegen* $-\infty$] und schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ [bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$], wenn es zu jedem $M \in \mathbb{R}, M > 0$, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$a_n \geqslant M \quad [\text{bzw. } a_n \leqslant -M] \quad \text{für alle } n \geqslant n_0.$$

Andernfalls nennen wir $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *unbestimmt divergent.*

(2.7) Beispiele. a) Sei $a_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ bestimmt divergent, mit

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

b) Die Folge $((-2)^n)_{n\geqslant 1}$ ist unbestimmt divergent.
c) Die Folge $((-1)^n)_{n\geqslant 1}$ ist unbestimmt divergent.

(2.8) Bemerkung. Im weiteren Verlauf ist es bequem, Supremum und Infimum pro forma auch für unbeschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ einzuführen:
Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so setze

$$\sup A\colon = \infty.$$

Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach unten beschränkt, so setze

$$\inf A\colon = -\infty.$$

§3. Reihen und Konvergenz von Reihen

Reihen sind „abzählbar unendliche Summen“, deren Konvergenz auf die Konvergenz von Folgen zurückgeführt wird.

(3.1) Definition. Eine (*unendliche*) *Reihe* ist ein Paar $((a_k)_{k\geqslant 1}, (s_n)_{n\geqslant 1})$ von Folgen mit der Eigenschaft

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir nennen s_n die *n-te Partialsumme* und schreiben abkürzend $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für die Reihe.

Man beachte, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bisher nur ein Symbol ist. Ganz im Sinne der Folgen kann eine Reihe auch z. B. bei $k = 0$ oder allgemeiner bei $k = k_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen.

(3.2) Definition. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent*, wenn es ein $S \in \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

wenn also die Folge $(s_n)_{n\geqslant 1}$ der Partialsummen gegen S konvergiert. Wir schreiben dafür auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S, \quad \text{d. h.} \quad S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Eine Reihe heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergiert.
Sind alle a_k, $k \in \mathbb{N}$, reell, so sagt man, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *bestimmt divergent* ist, wenn die Folge der Partialsummen bestimmt divergent ist.

Der Begriffsklärung dient die

(3.3) Bemerkung. Das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wird also einerseits für die Folge der Partialsummen (die Reihe) benutzt, andererseits auch für ihren Grenzwert, falls dieser existiert. Diese Doppeldeutigkeit ist historisch bedingt. Sie macht in der Praxis keine Probleme, sobald man sich daran gewöhnt hat: Die Bedeutung ergibt sich aus dem Kontext.

Zunächst diskutieren wir ein

(3.4) Beispiel. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1,$$

denn für $n \in \mathbb{N}$ hat man

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Das zentrale Beispiel ist enthalten in dem

(3.5) Satz. *(Geometrische Reihe)*
Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ *konvergiert für alle* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $|q| < 1$ *und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \textit{für } |q| < 1.$$

Beweis. Es gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

für $q \neq 1$ nach II(3.5). Weiterhin hat man $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$ nach (1.14) a), also

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

□

Ein wesentliches Negativbeispiel ist enthalten in dem

(3.6) Satz. *Die harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *divergiert bestimmt gegen* ∞.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Partialsumme s_{2^n}. Es gilt

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{2^j} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{2^j - 2^{j-1}}{2^j} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Sei $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geqslant 2(M-1)$, also $1 + \frac{N}{2} \geqslant M$. Für $n \geqslant n_0 := 2^N$ gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{N}{2} \geqslant M.$$

□

Aus den Grenzwertregeln (1.9) für die Folgen der Partialsummen erhält man:

(3.7) Lemma. *Sind* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$ *konvergente Reihen, so konvergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ *gegen* $\alpha A + \beta B$, *d. h.*

$$\alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k).$$

(3.8) Satz. *(*CAUCHY*-Kriterium für Reihen)*
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert genau dann, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass*

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} a_k\Big| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad n \geqslant m \geqslant n_0.$$

Beweis. Es gilt

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \text{für alle} \quad n \geqslant m.$$

Also besagt die angegebene Bedingung, dass $(s_n)_{n\geqslant 1}$ eine CAUCHY-Folge ist. Dann folgt die Behauptung aus (2.5). □

Offensichtlich folgt (mit $n = m + 1$):

(3.9) Korollar. *Wenn die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert, dann ist* $(a_k)_{k\geqslant 1}$ *eine Nullfolge.*

Die Bedingung, dass $(a_k)_{k\geqslant 1}$ eine Nullfolge ist, ist aber nicht hinreichend für die Konvergenz einer Reihe, wie die harmonische Reihe in (3.6) zeigt. Andererseits kann man aus II(3.7) schließen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ für $q \in \mathbb{R}$, $|q| \geqslant 1$, divergiert, weil $(q^k)_{k\geqslant 0}$ keine Nullfolge ist.

Das Monotoniekriterium hat folgende Konsequenz:

(3.10) Satz. *Sei* $(a_k)_{k\geqslant 1}$ *eine reelle Folge mit* $a_k \geqslant 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert genau dann, wenn die Folge* $(s_n)_{n\geqslant 1}$ *der Partialsummen nach oben beschränkt ist.*

Beweis. Wegen $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geqslant 0$ ist die Folge $(s_n)_{n\geqslant 1}$ monoton wachsend. Dann folgt die Behauptung aus (2.2) und (1.7). □

Eine Anwendung ist wie folgt.

(3.11) Satz. *a) Es sei* $(d_k)_{k\geqslant 1}$ *eine Folge in* $\{0, 1\}$. *Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k 2^{-k}.$$

b) Zu jedem $x \in [0, 1) \subset \mathbb{R}$ *gibt es eine Folge* $(c_k)_{k\geqslant 1}$ *in* $\{0, 1\}$ *so, dass*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 2^{-k}.$$

c) $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Beweis. a) Für alle n ist

$$\sum_{k=1}^{n} d_k 2^{-k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1} 2^{-l} = \frac{1}{2}(\frac{1-2^{-n}}{1-2^{-1}}) = 1-2^{-n} \leqslant 1$$

mit der Summenformel für die geometrische Reihe. Mit (3.10) folgt Konvergenz.
Für b) und c) skizzieren wir die Beweise nur.
Die Folge der c_n wird rekursiv definiert.
$n = 1$: Falls $x < \frac{1}{2}$, setze $c_1 = 0$; anderenfalls $c_1 = 1$.
Es folgt

$$0 \leqslant x - c_1 2^{-1} < 2^{-1}$$

Sind $c_1, \dots, c_n$ bestimmt, so dass

$$0 \leqslant x - \sum_{k=1}^{n} c_k 2^{-k} < 2^{-n},$$

so setze $c_{n+1} = 0$, falls die Differenz $< 2^{-(n+1)}$ ist, und $c_{n+1} = 1$ sonst.
Für den Beweis von c) nutzt man aus, dass $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, also die Menge aller Folgen mit Werten in $\{0,1\}$ nach II(5.9) überabzählbar ist. Da solche Folgen in der Darstellung von b) auftreten, kann man (nach Überwindung einiger technischer Probleme, welche durch die Nicht-Eindeutigkeit der Darstellung verursacht werden) auf die Überabzählbarkeit von $[0,1)$ schließen. Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ folgt. □

Nun behandeln wir sogenannte alternierende Reihen und ein Kriterium, das auf Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716) zurückgeht.

(3.12) Satz. *(*LEIBNIZ*-Kriterium)*
Sei $(a_k)_{k\geqslant 1}$ eine reelle, monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Big|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k\Big| \leqslant a_n.$$

(Ebenso konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$, mit analoger Abschätzung für den Reihenrest.)

Beweis (Skizze). Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$. Betrachte die Teilfolgen $(s_{2m})_{m\geqslant 1}$ und $(s_{2m+1})_{m\geqslant 0}$. Dann gilt

(i) $\quad s_{2m+2} - s_{2m} = a_{2m+2} - a_{2m+1} \leqslant 0;$

(ii) $\quad s_{2m+3} - s_{2m+1} = -a_{2m+3} + a_{2m+2} \geqslant 0;$

(iii) $\quad s_{2m+1} - s_{2m} = -a_{2m+1} \leqslant 0.$

Also ist die Folge (s_{2m}) monoton fallend, (s_{2m+1}) monoton wachsend und (s_{2m}) durch s_1 nach unten beschränkt sowie (s_{2m+1}) durch s_2 nach oben beschränkt. Die Folgen (s_{2m}) und (s_{2m+1}) konvergieren somit nach dem Monotoniekriterium; wegen $\lim\limits_{m\to\infty}(s_{2m+1} - s_{2m}) = 0$ haben sie den gleichen Grenzwert. Es folgt die Konvergenz von $(s_n)_{n\geqslant 1}$.

Weiter ist (Induktion nach l)

$$(-1)^n \sum_{k=n}^{l}(-1)^k a_k = a_n - (\underbrace{a_{n+1} - a_{n+2}}_{\geqslant 0}) - (\cdots) \leqslant a_n,$$

woraus die Abschätzung für den Reihenrest folgt. □

(3.13) Beispiel. a) Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
b) Will man den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ bis auf einen Fehler von 10^{-3} approximieren, so reicht dafür die Partialsumme $s_6 = \sum_{k=0}^{6} \frac{(-1)^k}{k!}$.
Denn die Reihe erfüllt die Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums und es ist $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < 10^{-3}$.

Des Weiteren beschäftigen wir uns mit der absoluten Konvergenz von Reihen und mit weiteren Konvergenzkriterien. Die absolute Konvergenz ist eine Spezialität von Reihen, die bei Folgen nicht auftritt.

(3.14) Definition. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Eine Reihe, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, nennt man *bedingt konvergent*.

(3.15) Beispiele. a) Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$, nach (3.5) absolut, da die Absolutreihe ebenfalls eine geometrische Reihe ist. Sie divergiert für $|q| \geqslant 1$ nach II(3.7), da dann $(q^k)_{k\geqslant 1}$ keine Nullfolge ist.
b) Die alternierende harmonische Reihe ist bedingt konvergent.

Aus der Konvergenz folgt also nicht die absolute Konvergenz einer Reihe. Es gilt aber der

(3.16) Satz. *Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.*

Beweis. Wir verwenden das Cauchy-Kriterium (3.8) für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$ für alle $m \geqslant n \geqslant n_0$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} a_k\Big| \leqslant \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geqslant n \geqslant n_0.$$

Nach (3.8) konvergiert dann auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. □

Wir kommen nun zu den wichtigen Vergleichskriterien.

(3.17) Satz. *(Majoranten-/Minorantenkriterium)*
Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.
a) Gegeben sei eine konvergente reelle Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$. *Wenn es ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass*

$$|a_k| \leqslant c_k \quad \textit{für alle } \ k \geqslant N,$$

dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*
b) Gegeben sei eine divergente reelle Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$. *Wenn es ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass*

$$|a_k| \geqslant d_k \geqslant 0 \quad \textit{für alle } \ k \geqslant N,$$

dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *divergent.*

Man nennt $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ in a) eine *Majorante* und $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ in b) eine *Minorante* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis. a) Wir verwenden das CAUCHY-Kriterium (3.8). Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \geqslant N$ mit $0 \leqslant \sum_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon$ für alle $m \geqslant n \geqslant n_0$. Es folgt

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| \leqslant \sum_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geqslant n \geqslant n_0.$$

Also konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ nach (3.8).
b) Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Es gilt $0 \leqslant d_k \leqslant |a_k|$ für alle $k \geqslant N$. Dann folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ aus a). Das ist ein Widerspruch. $\square$

(3.18) Korollar. *(Quotientenkriterium)*

(a) Gibt es ein $q < 1$ *und ein* $N \in \mathbb{N}$ *derart, dass* $a_k \neq 0$ *und* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqslant q$ *für alle* $k \geqslant N$, *so ist* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent. Insbesondere: Falls*

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| =: r < 1,$$

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

(b) Gibt es ein $Q > 1$ *und ein* $N \in \mathbb{N}$ *derart, dass* $a_k \neq 0$ *und* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geqslant Q$ *für alle* $k \geqslant N$, *so ist* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *divergent. Insbesondere: Ist*

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| =: R > 1,$$

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *divergent.*

Beweis. (a) Für die erste Aussage definiere

$$c_k := \begin{cases} 0; & k < N, \\ |a_N| \cdot q^{k-N}; & k \geqslant N. \end{cases}$$

Dann $|a_k| \leqslant c_k$ für alle $k \geqslant N$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergiert (geometrische Reihe). Nun verwende (3.17) a).

Zur zweiten Aussage: Weil $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = r < 1$, gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < \frac{r+1}{2} < 1$$

für alle $k \geqslant N_1$ (Konvergenzbedingung mit $\varepsilon = \frac{1-r}{2}$). Damit ist die erste Aussage anwendbar.

Der Beweis von (b) läuft analog mit dem Minorantenkriterium (3.17) b). □

Ein weiteres wesentliches Beispiel neben der geometrischen Reihe ist enthalten in dem

(3.19) Satz. *Die Exponentialreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k =: \exp(x)$$

konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut.

Beweis. Für $x = 0$ ist nichts zu zeigen. Falls $x \neq 0$, hat man mit $a_k = \frac{x^k}{k!}$ die Abschätzung

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = |\frac{x^{k+1} \cdot k!}{x^k \cdot (k+1)!}| = \frac{|x|}{k+1},$$

also $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0$. Die Behauptung folgt nun mit (3.18) a). □

Jeder reellen Zahl x wird also durch die Reihe eine reelle Zahl zugeordnet; dies definiert eine Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

genannt EULERsche Exponentialfunktion. Einsetzen von $x = 0$ in die Reihe liefert $\exp(0) = 1$, und man definiert $\exp(1) =: e$.

Die fundamentale Eigenschaft der Exponentialfunktion geben wir (da der Aufwand zu groß wäre) ohne Beweis an:

(3.20) Satz. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die Funktionalgleichung*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Jedoch wollen wir aus der Funktionalgleichung einige Folgerungen ziehen und diese auch beweisen.

(3.21) Satz. *a) Es ist* $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp(x) > 0$.

c) Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *mit* $x_1 < x_2$ *ist* $\exp(x_1) < \exp(x_2)$. *(Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend.)*

Beweis. a) $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1$.

b) Es ist $\exp(x) = \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \exp(\frac{x}{2})^2 > 0$, da $\exp(\frac{x}{2}) \neq 0$ nach a).

c) Es ist $\frac{\exp(x_2)}{\exp(x_1)} = \exp(x_2) \cdot \exp(-x_1) = \exp(x_2 - x_1)$. Also reicht es, $\exp(x) > 1$ für alle $x > 0$ zu zeigen. Letzteres folgt aus der Reihenentwicklung, denn es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \geqslant \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x.$$

□

Statt $\exp(x)$ ist oft auch die Bezeichnung e^x gebräuchlich, wobei $e = \exp(1)$. Wir wollen das rechtfertigen.

(3.22) Bemerkung. Es gilt $\exp(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$, wobei die rechte Seite wie in II(4.15) definiert ist. (Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ hatten wir a^x bisher nicht definiert.)

Zur Begründung:

(i) Es ist $\exp(1) = e = e^1$, also $\exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e^2$, und allgemein für $n \in \mathbb{N}$:

$$\exp(n + 1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = \exp(n) \cdot e.$$

Damit folgt $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Induktion.

(ii) Es ist $\exp(0) = 1 = e^0$ nach Definition. Weiter $\exp(-1) = \exp(1)^{-1} = e^{-1}$ nach (3.21) a). Daraus folgt mit Induktion, dass $\exp(-n) = e^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Für $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q > 1$ ist (wieder mit Induktion)

$$\left(\exp\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q = \exp\Big(\underbrace{\frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}}_{q \text{ Summanden}}\Big) = \exp(p) = e^p$$

also nach Definition II(4.15)

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{e^p} = e^{\frac{p}{q}}.$$

Kapitel IV.

Komplexe Zahlen und Zahlenfolgen

§1. Die komplexen Zahlen

(1.1) Arbeitsdefinition. Die Menge $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen* wird gegeben durch

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Man rechnet in $\mathbb{C}$ „wie üblich“, wobei man zusätzlich $i^2 = -1$ berücksichtigt:

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$$

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ nennt man

$x := \mathrm{Re}(z)$ den *Realteil* von z
$y := \mathrm{Im}(z)$ den *Imaginärteil* von z
$\overline{z} := x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl.*

(1.2) Bemerkungen. a) Wir kümmern uns hier nicht um Existenzprobleme („Gibt es eine Zahl, deren Quadrat gleich -1 ist?“), sondern nehmen die Existenz von $\mathbb{C}$ als gegeben an.

b) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper, d. h. es gelten die Gesetze (K1) bis (K5) aus II(2.1). Das neutrale Element der Multiplikation ist $1 = 1 + i \cdot 0$; multiplikativ invers zu $z \neq 0$ ist

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

c) Durch die Identifikation $x = x + i \cdot 0$ kann man $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen. Addition und Multiplikation solcher Elemente entsprechen der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$.

d) Wir setzen noch $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(1.3) Beispiele. • Es ist $(3+4i)\cdot(7-2i) = (3\cdot 7 - 4\cdot(-2)) + i\cdot(3\cdot(-2)+4\cdot 7) = 29+22i$.

• Es ist

$$(3-4i)^{-1} = \frac{3}{3^2+(-4)^2} + i\cdot\frac{-(-4)}{3^2+(-4)^2} = \frac{3}{25}+\frac{4}{25}i.$$

• Es gilt $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$ und allgemein

$$i^{4k} = 1 \qquad \text{für alle} \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$i^{4k+1} = i \qquad \text{für alle} \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$i^{4k+2} = -1 \qquad \text{für alle} \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$i^{4k+3} = -i \qquad \text{für alle} \quad k\in\mathbb{Z}$$

Nun betrachten wir die Eigenschaften der Konjugation.

(1.4) Lemma. *Für $z=x+iy\in\mathbb{C}$ und $w=u+iv\in\mathbb{C}$ mit $x,y,u,v\in\mathbb{R}$ gilt*

a) $x = Re(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z}),\ y = Im(z) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$.

b) $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}, \quad \overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}, \quad \overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, falls $w\neq 0$.

c) $z\cdot\overline{z} = x^2+y^2\in\mathbb{R}_+$ und $z\cdot\overline{z}>0$ für $z\neq 0$.

d) $z=\overline{z}$ ist äquivalent zu $z\in\mathbb{R}$.

Beweis. a) und d) Es gilt $\frac{1}{2}(z+\overline{z}) = \frac{1}{2}(x+iy+x-iy) = x$ und $\frac{1}{2i}(z-\overline{z}) = \frac{1}{2i}(x+iy-x+iy) = y$.
b) Man hat

$$\begin{aligned}
\overline{z}+\overline{w} &= (x-iy)+(u-iv) = (x+u)-i(y+v) = \overline{z+w},\\
\overline{\overline{z}} &= \overline{x-iy} = x+iy = z,\\
\overline{z}\cdot\overline{w} &= (x-iy)\cdot(u-iv)\\
&= (xu-yv)+i(-xv-yu) = (xu-yv)-i(xv+yu) = \overline{z\cdot w}.
\end{aligned}$$

Gilt $w\neq 0$, so hat man $1 = w\cdot\frac{1}{w}$ und daher

$$1 = \overline{1} = \overline{w}\cdot\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}, \quad \text{also} \quad \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \frac{1}{\overline{w}}.$$

Damit folgt

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z \cdot \frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

c) Es gilt $z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 \geqslant 0$. Aus $z \neq 0$ ergibt sich $(x, y) \neq (0, 0)$, also $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 > 0$. □

Insbesondere c) nehmen wir zum Anlass für die

(1.5) Definition. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist der *Betrag von z*

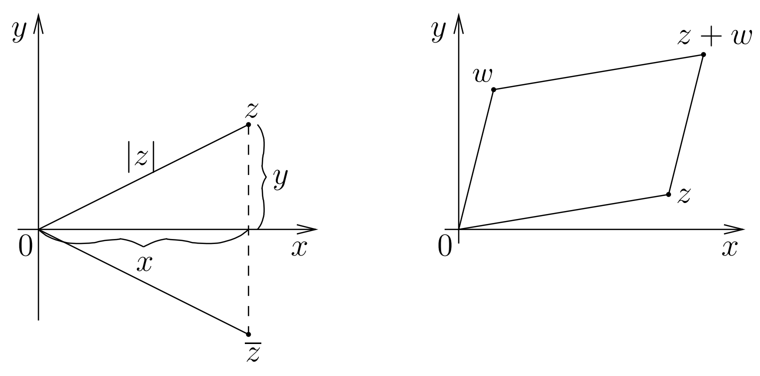
$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$$

nach (1.4) und II(4.13) wohldefiniert.

Man sollte bemerken, dass für $z = x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ diese Definition mit dem reellen Betrag übereinstimmt, denn es gilt $\sqrt{x^2} = |x|$. Man hat zum Beispiel

$$|1 + i| = \sqrt{2}, \quad |-3 + 4i| = 5, \quad |8 - 6i| = 10.$$

Wir können uns die komplexen Zahlen als Gaussche Zahlenebene vorstellen. Dazu identifizieren wir den Punkt $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit dem Paar $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann erhält speziell die Addition auch eine geometrische Bedeutung.



Nach dem Satz des Pythagoras (ca. 580-500 v. Chr.) ist $|z|$ der Abstand von z zum Nullpunkt. $\overline{z}$ entsteht aus z durch Spiegelung an der x-Achse. Für je zwei $z, w \in \mathbb{C}^*$ mit $\frac{z}{w} \notin \mathbb{R}$ bilden die Punkte $0, z, w, z + w$ die Ecken eines Parallelogramms.

(1.6) Satz. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

a) $|Re\,(z)| \leqslant |z|,\ |Im\,(z)| \leqslant |z|,\ |z| \leqslant |Re\,(z)| + |Im\,(z)|.$

b) $|z| \geqslant 0$ *und es ist* $|z| = 0$ *äquivalent zu* $z = 0$.

c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|,\ |\overline{z}| = |z|$ *und* $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, *falls* $w \neq 0$.

d) Es gelten die Dreiecksungleichungen

$$|z + w| \leqslant |z| + |w| \quad \text{und} \quad \big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|.$$

e) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, *falls* $z \neq 0$.

Beweis. a) Aus $x^2 \leqslant x^2 + y^2$ folgt $|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ mit II(4.13). Analog erhält man $|y| \leqslant |z|$. Darüber hinaus gilt $|z|^2 = x^2 + y^2 \leqslant (|x| + |y|)^2$, also $|z| \leqslant |x| + |y|$.
b) Man verwende (1.4) c).
c) Aus

$$|z \cdot w|^2 = (zw)\overline{(zw)} = z\overline{z} \cdot w\overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$$

(vgl. (1.4) b) folgt durch Wurzelziehen

$$|zw| = |z| \cdot |w|.$$

Wendet man den Betrag auf die Gleichung $w \cdot \frac{1}{w} = 1$ an, so erhält man

$$1 = |1| = |w| \cdot \left|\frac{1}{w}\right|, \quad \text{also} \quad \left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{|w|}$$

und damit $\left|\frac{z}{w}\right| = \left|z \cdot \frac{1}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$. Weiterhin gilt $|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z}\,\overline{\overline{z}}} = \sqrt{\overline{z}z} = |z|$.
d) Es gilt

$$\begin{aligned}(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 &= |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2 - (z + w)\overline{(z + w)} \\ &= 2|z|\,|w| - z\overline{w} - w\overline{z} = 2(|z\overline{w}| - Re\,(z\overline{w})) \geqslant 0\end{aligned}$$

nach a) und c). Also hat man $|z| + |w| \geqslant |z + w|$. Aus dem bewiesenen Teil folgt

$$\begin{aligned}|z - w| + |w| &\geqslant |(z - w) + w| = |z|, \\ |z - w| + |z| &= |w - z| + |z| \geqslant |w|.\end{aligned}$$

Also hat man $\pm(|z| - |w|) \leqslant |z - w|$, d. h. $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|$.
e) Es gilt

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = 1, \quad \text{also} \quad \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}.$$

□

(1.7) Bemerkung. In $\mathbb{C}$ gilt der sogenannte *Fundamentalsatz der Algebra*: Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$, so hat die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = 0$$

eine Lösung in $\mathbb{C}$. (Jede nicht konstante Polynomabbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.) Bewiesen wird diese Aussage hier aber nicht.

§2. Komplexe Folgen und Reihen

Wir wollen nun das Folgenkonzept auch für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$ entwickeln.

(2.1) Definition. Eine (komplexe) *Folge* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{C}, n \mapsto a_n$, die wir wieder einfach mit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ bezeichnen. Gilt $a_n \in M \subset \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so spricht man von einer *Folge in M*.

Natürlich ist jede reelle Folge auch eine komplexe Folge. Neue Beispiele sind etwa $(i^n)_{n\geqslant 1} = (i, -1, -i, 1, i, \ldots)$ oder $((1+i)^n)_{n\geqslant 1} = (1+i, 2i, 2(-1+i), -4, -4(1+i), \ldots)$.

(2.2) Definition. Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine komplexe Folge.

(a) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in \mathbb{C}$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geqslant n_0.$$

Man nennt a *Limes* oder *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und schreibt dafür $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

(b) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, so heißt $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine *Nullfolge*.

(c) Man nennt $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine CAUCHY-*Folge* , wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad m, n \geqslant n_0.$$

(d) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ heißt *beschränkt*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$|a_n| \leqslant c \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man mache sich klar, dass die Begriffe "nach oben beschränkt" oder "monoton" für komplexe Folgen keinen Sinn machen.

Das folgende Lemma erlaubt es uns, die bekannten Resultate über reelle Folgen zu verwenden.

(2.3) Lemma. *Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine komplexe Folge und $a \in \mathbb{C}$.*
a) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert genau dann gegen a, wenn die beiden reellen Folgen $(Re(a_n))_{n\geqslant 1}$ gegen $Re(a)$ und $(Im(a_n))_{n\geqslant 1}$ gegen $Im(a)$ konvergieren.
b) Insbesondere: Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so auch $\lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \overline{a}$.
c) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist genau dann eine CAUCHY*-Folge, wenn $(Re(a_n))_{n\geqslant 1}$ und $(Im(a_n))_{n\geqslant 1}$* CAUCHY*-Folgen sind.*
d) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist genau dann beschränkt, wenn $(Re(a_n))_{n\geqslant 1}$ und $(Im(a_n))_{n\geqslant 1}$ beschränkt sind.
e) Konvergiert $(a_n)_{n\geqslant 1}$ als komplexe Folge gegen a und gilt $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $a_n = x_n + iy_n$, $a = x + iy$.
a) "$\Rightarrow$" Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Aus (1.6) a) folgt $|x_n - x| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon$ und $|y_n - y| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$.
"$\Leftarrow$" Zu $\varepsilon > 0$ existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant n_1$ und $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant n_2$. Ist $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, so folgt aus (1.6) a) für alle $n \geqslant n_0$

$$|a_n - a| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

e) folgt direkt aus a).
b), c), d) Man geht völlig analog vor. □

Damit können wir die Ergebnisse von Kapitel II, §1 anwenden. Es ergibt sich der

(2.4) Satz. *a) Der Grenzwert einer konvergenten komplexen Folge ist eindeutig bestimmt.*
b) Eine konvergente komplexe Folge ist beschränkt.
c) Eine komplexe Folge ist genau dann eine CAUCHY*-Folge, wenn sie konvergiert.*
d) Sind $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ komplexe Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, so gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b.$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$

(iii) Gilt $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}.$

Beweis. Zur Illustration erläutern wir d)
(ii) Sei $a_n = x_n + iy_n$, $a = x + iy$, $b_n = u_n + iv_n$, $b = u + iv$. Es gilt

$$\begin{aligned} Re(a_nb_n) &= x_nu_n - y_nv_n \xrightarrow[n\to\infty]{} xu - yv = Re(ab), \\ Im(a_nb_n) &= x_nv_n + y_nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} xv + yu = Im(ab), \end{aligned}$$

wenn man III(1.9) und (2.3) verwendet. □

Von komplexen Folgen kommt man (analog zum reellen Fall) zu komplexen Reihen. Wir fassen wesentliche Begriffe und Aussagen kurz zusammen.

(2.5) Definition. a) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setze

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird dann eine *(komplexe) unendliche Reihe* genannt und mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abgekürzt.

b) Die Reihe heißt *konvergent*, wenn die Folge (s_n) konvergiert. (Der Grenzwert wird ggf. auch mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet.)

c) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Im nächsten Satz fassen wir einige Regeln zusammen. Die Beweise sind i.W. analog zum reellen Fall; wir gehen hier nicht näher darauf ein.

(2.6) Satz. *Es seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ unendliche Reihen.*

a) Sind beide Reihen konvergent und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ konvergent und für die Grenzwerte gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

b) Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so auch konvergent.

Von entscheidender Bedeutung ist, dass man über die Reihenentwicklung die Exponentialfunktion auch über $\mathbb{C}$ definieren kann.

(2.7) Satz. *a) Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *konvergiert* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ *absolut. Der Grenzwert wird mit* $\exp(z)$ *bezeichnet.*

b) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt die Funktionalgleichung*

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

Die Beweise dieser Aussagen sind für den komplexen Fall analog zum reellen (und von vergleichbarer Schwierigkeit). Wir gehen hier nicht darauf ein. Interessant für uns ist aber, dass man aus der komplexen Exponentialfunktion weitere interessante *reelle* Funktionen gewinnt.

(2.8) Lemma. *a) Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *ist* $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ *ist* $|\exp(ix)| = 1$.

Beweis. a) folgt sofort aus Lemma (2.3) b).
b) Für $z = ix$ ist dann

$$\overline{\exp(ix)} = \exp(\overline{ix}) = \exp(-ix)$$

und somit $\exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)} = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = \exp 0 = 1.$ □

Das nimmt man zum Anlass, die trigonometrischen Funktionen auf „analytische“ Weise zu definieren.

(2.9) Definition. Für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert man

$$\cos x := \mathrm{Re}(\exp(ix)); \qquad \sin x := \mathrm{Im}(\exp(ix))$$

(2.10) Bemerkung. Damit gilt per Definition die sog. Euler-Identität

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x.$$

Für theoretische und praktische Zwecke nützlich ist folgender

(2.11) Satz. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ hat man die (absolut) konvergenten Reihenentwicklungen*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \pm \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \pm \ldots$$

Beweis. (Skizze.)
Es ist

$$\begin{aligned}\exp(ix) &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \ldots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \ldots\end{aligned}$$

(unter Benutzung der Potenzen von i)

$$\ldots = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots) + i \cdot (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots)$$

(Trennung von Real- und Imaginärteil; Konvergenz garantiert mit Lemma (2.3)).
Der Rest ist ordentliches Aufschreiben der Reihen. □

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhalten wir Funktionalgleichungen für Cosinus und Sinus:

(2.12) Satz. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \sin y + \sin x \cdot \cos y$$

Beweis. Betrachte Real- und Imaginärteil von $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$, also

$$\cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y) = (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y),$$

und rechne aus. □

(2.13) Korollar. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ 1 &= \cos^2 x + \sin^2 x \quad \text{(„Pythagoras“)}\end{aligned}$$

(Hier wird $\cos^2 x := (\cos x)^2, \sin^2 x := (\sin x)^2$ abgekürzt.)

Beweis. Die ersten beiden Aussagen erhält man durch Gleichsetzen von x und y. Die dritte folgt mit $y = -x$ sowie den Identitäten $\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$, die aus den Reihenentwicklungen folgen. $\square$

(2.14) Bemerkungen. a) Die ungewöhnliche Art der Einführung von cos und sin lässt die Frage offen, ob das wirklich die „bekannten“ trigonometrischen Funktionen sind. Das kann bewiesen werden (was wir hier nicht tun).

b) Bei diesem Zugang führt man die „Kreiszahl“ π am besten so ein: Man kann beweisen, dass cos eine kleinste positive Nullstelle besitzt. Diese nennt man $\frac{\pi}{2}$ (und hat damit π definiert).

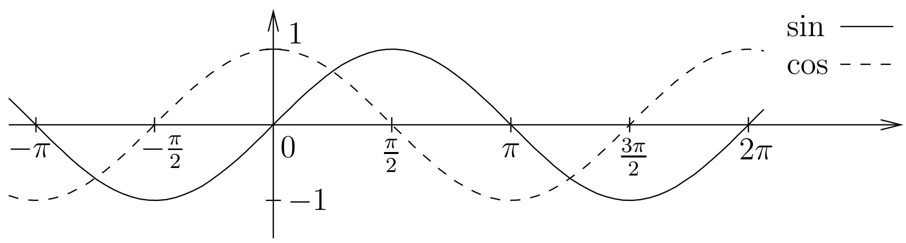
c) Es lässt sich weiter folgende Wertetabelle herleiten:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\exp(ix)$	1	$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+i)$	$\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$	i	-1	$-i$	1

d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ kann man nachweisen, dass

$$\begin{aligned} \cos(x+2\pi) &= \cos x, & \sin(x+2\pi) &= \sin x, \\ \cos(x+\pi) &= -\cos x, & \sin(x+\pi) &= -\sin x, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x. \end{aligned}$$

Die Graphen sehen wie folgt aus:



Sinus und Cosinus

Kapitel V.

Reelle Funktionen - Grundlegendes

§1. Begriffe und Beispiele

In diesem Paragraphen sammeln wir einige Begriffe zu Funktionen. Zunächst geht es um Teilmengen von $\mathbb{R}$, die als Definitionsbereiche interessant sind.

(1.1) Definition. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Dann heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

die *ε-Umgebung von x_0*. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ heißt *Umgebung* von x_0, wenn ein (von x_0 und U abhängiges) $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x_0) \subset U$.

(1.2) Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}$. Ein Element $x_0 \in M$ heißt *innerer Punkt* von M, wenn M eine Umgebung von x_0 ist, d. h., wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $U_\varepsilon(x_0) \subset M$. Mit $\overset{\circ}{M}$ ("Inneres von M") bezeichnen wir die Menge der inneren Punkte von M. Man nennt M *offen*, wenn alle Elemente von M innere Punkte von M sind, d. h. wenn $M = \overset{\circ}{M}$. Man nennt $A \subset \mathbb{R}$ *abgeschlossen*, wenn $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist.

Ohne Beweise geben wir an:

(1.3) Beispiele. a) $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen.

b) Die Intervalle $(a, b), (-\infty, a)$ und (a, ∞) sind offen.

c) Die Intervalle $[a, b], (-\infty, a]$ und $[a, \infty)$ sind abgeschlossen.

d) Die Intervalle $[a, b)$ bzw. $(a, b]$ sind weder offen noch abgeschlossen.

e) Jede nicht-leere offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine Vereinigung abzählbar vieler offener Intervalle.

Nun zu Funktionen.

(1.4) Definition. Eine Abbildung $f : A \to B$ mit $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ nennt man eine *reelle* oder *reellwertige Funktion einer reellen Variablen* oder *Veränderlichen.*
$f(x)$ heißt auch *Funktionswert* von f an der Stelle x. Gilt $f(x) = 0$, so nennt man x eine *Nullstelle* der Funktion f.
Als *Graph* von f bezeichnet man die Menge

$$G_f = \{(x, f(x));\ x \in A\} \subset A \times B \subset \mathbb{R}^2.$$

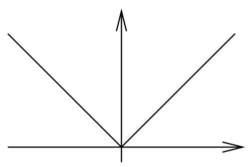
Wir betrachten ein paar einfache

(1.5) Beispiele. a) Sei $c \in \mathbb{R}$ fest. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = c$, heißt *konstante Funktion.*

b) Wir betrachten die *Betragsfunktion*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto |x|,$$

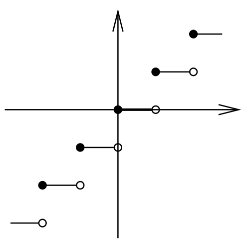
mit dem nebenstehenden Graphen.



c) Die Entier-Funktion oder *Größte-Ganze-Funktion* wird gegeben durch

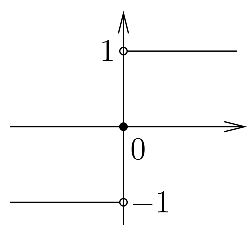
$$\mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto [x] := \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}.$$

Man nennt $[x]$ auch die GAUSS-*Klammer* von x. (In der Literatur wird auch die Bezeichnung $\lfloor x \rfloor$ statt $[x]$ verwendet.)



d) Die *Signum-Funktion* ist definiert durch

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$



e) Die DIRICHLET*sche Sprungfunktion* ist definiert durch

$$D : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Man kann ihren Graphen nicht zeichnen.

f) Weitere Funktionen sind für $n \in \mathbb{N}$ z.B.

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n, \quad \text{und} \quad \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$

g) Durch Potenzreihen haben wir die Funktionen exp, sin und cos von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ definiert.

Auf naheliegende Weise kann man Funktionen addieren und multiplizieren (und unter geeigneten Voraussetzungen dividieren). Diese „intuitiv klaren“ Operationen definieren wir formal wie folgt:

(1.6) Definition. Es seien $D \subset \mathbb{R}$ nicht-leer und $f\colon D \to \mathbb{R}$ sowie $g\colon D \to \mathbb{R}$; weiter $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Man definiert Funktionen $f + g\colon D \to \mathbb{R}$ und $\alpha f\colon D \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned}(f+g)(x)\colon &= f(x) + g(x);\\ (\alpha f)(x)\colon &= \alpha f(x),\end{aligned}$$

wobei rechts jeweils die Operationen in $\mathbb{R}$ gemeint sind.

b) Man definiert $f \cdot g\colon D \to \mathbb{R}$ durch

$$(f \cdot g)(x)\colon = f(x) \cdot g(x),$$

wobei rechts die Multiplikation in $\mathbb{R}$ gemeint ist. Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so definiert man

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)\colon = \frac{f(x)}{g(x)},$$

wobei rechts die Division in $\mathbb{R}$ gemeint ist.

Dies ist etwas gewöhnungsbedürftig, aber beachten Sie, dass durch die jeweiligen Vorschriften in der Tat jedem $x \in D$ eindeutig eine reelle Zahl zugeordnet wird. Dass für die so definierten Verknüpfungen auf der Menge aller Funktionen von D nach $\mathbb{R}$ die üblichen Rechenregeln gelten, lässt sich leicht nachweisen.

Wir kommen nun zu neuen Begriffen.

(1.7) Definition. Gegeben sei eine Funktion $f : D \to E$ mit $D, E \subset \mathbb{R}$.

(a) Man nennt f *monoton wachsend* oder *monoton steigend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x \leqslant y$ stets $f(x) \leqslant f(y)$ gilt. f heißt *streng monoton wachsend* oder *streng monoton steigend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ stets $f(x) < f(y)$ gilt.

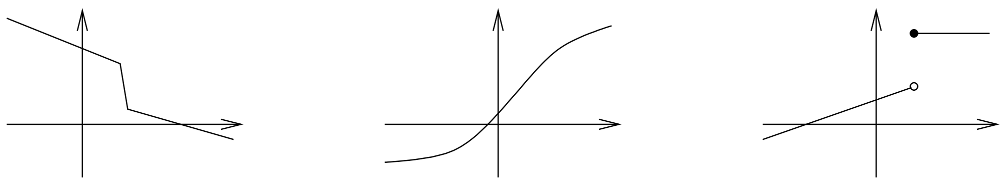
(b) Man nennt f *monoton fallend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x \leqslant y$ stets $f(x) \geqslant f(y)$ gilt. f heißt *streng monoton fallend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ stets $f(x) > f(y)$ gilt.

(c) Man nennt f *[streng] monoton*, wenn f [streng] monoton wachsend oder [streng] monoton fallend ist.

(d) Man nennt f *nach oben beschränkt* bzw. *nach unten beschränkt* bzw. *beschränkt*, wenn die Wertemenge $W = f(D)$ die entsprechende Eigenschaft hat, wenn es also ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) \leqslant c \quad \text{bzw.} \quad f(x) \geqslant c \quad \text{bzw.} \quad |f(x)| \leqslant c \quad \text{für alle } x \in D.$$

Als Beispiele für Monotonie sollen die folgenden Graphen dienen.



streng monoton fallend — streng monoton wachsend — monoton wachsend

Als direkte Anwendung von II(4.13) und II(2.8) b5) erhalten wir das

(1.8) Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^n$, streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $y \mapsto \sqrt[n]{y}$. Sie ist ebenfalls streng monoton wachsend. Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ ist auch die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, und ihre Umkehrfunktion streng monoton wachsend. Für die Umkehrfunktion gilt $x \mapsto \operatorname{sgn}(x) \cdot \sqrt[n]{|x|}$.

Allgemeiner gilt das

(1.9) Lemma. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, streng monoton wachsend [bzw. fallend] mit $W = f(D)$. Dann ist f injektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to D$ ist ebenfalls streng monoton wachsend [bzw. fallend].*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall, dass f streng monoton wachsend ist. (Der andere wird analog behandelt.) Seien $x, x' \in D$ mit $x \neq x'$. Dann gilt entweder $x < x'$ oder $x' < x$. Daraus folgt $f(x) < f(x')$ oder $f(x') < f(x)$, in jedem Fall aber $f(x) \neq f(x')$. Demnach ist f injektiv und $f^{-1} : W \to D$ existiert. Seien nun $w, w' \in W$ mit $w < w'$. Seien $x, x' \in D$ mit $f(x) = w$ und $f(x') = w'$. Wegen $w \neq w'$ gilt $x \neq x'$. Wäre $x' < x$, so würde $w' = f(x') < f(x) = w$ als Widerspruch folgen. Also muss $x < x'$ gelten, d. h.

$$f^{-1}(w) = x < x' = f^{-1}(w').$$

Demnach ist f^{-1} ebenfalls streng monoton wachsend. $\square$

Schließlich wollen wir noch Maxima und Minima von Funktionen definieren.

(1.10) Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ nicht-leer und $f : D \to \mathbb{R}$.

a) (i) Man nennt $x_0 \in D$ eine *Maximalstelle* von f und $f(x_0)$ ein *Maximum* von f, falls $f(x_0) \geqslant f(x)$ für alle $x \in D$.

(ii) Man nennt $x_1 \in D$ eine *relative (oder lokale) Maximalstelle* von f und $f(x_1)$ ein *relatives (oder lokales) Maximum*, wenn es eine Umgebung $U_\delta(x_1)$ (mit $\delta > 0$) gibt, sodass x_1 Maximalstelle für $f|_{D \cap U_\delta(x_1)}$ ist.

b) (i) Man nennt $x_0 \in D$ eine *Minimalstelle* von f und $f(x_0)$ ein *Minimum* von f, falls $f(x_0) \leqslant f(x)$ für alle $x \in D$.

(ii) Man nennt $x_1 \in D$ eine *relative (oder lokale) Minimalstelle* von f und $f(x_1)$ ein *relatives (oder lokales) Minimum*, wenn es eine Umgebung $U_\delta(x_1)$ (mit $\delta > 0$) gibt, sodass x_1 Minimalstelle für $f|_{D \cap U_\delta(x_1)}$ ist.

Maximal- bzw. Minimalstellen heißen zusammenfassend *Extremalstellen*, Maxima bzw. Minima heißen zusammenfassend *Extrema*.

Zu beachten ist, dass wir hier zunächst nur einige Begriffe eingeführt haben. Wir werden uns später um den praktischen Umgang mit diesen kümmern.

§2. Polynome und rationale Funktionen

(2.1) Definition. Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ein *reelles Polynom*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$(*) \qquad p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Gilt $a_n \neq 0$ in $(*)$, so nennt man n den *Grad* des Polynoms. Gilt $a_0 = \ldots = a_n = 0$ in $(*)$, so heißt p das *Nullpolynom.* Jede Restriktion eines Polynoms heißt eine *Polynomfunktion.*

Vielfache, Summen und Produkte von Polynomen (im Sinne von (1.6)) sind wieder Polynome.

(2.2) Satz. *Ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ hat höchstens n Nullstellen.*

Beweis. (i) Wir beweisen zunächst folgende Hilfsaussage: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p(x)$ ein Polynom vom Grad n mit einer Nullstelle α. Dann existiert ein Polynom $q(x)$ vom Grad $n-1$ mit $p(x) = (x-\alpha)\cdot q(x)$ für alle x. Denn für $x \neq \alpha$ hat man mit der geometrischen Summenformel II(3.5)

$$\frac{p(x)}{x-\alpha} = \frac{p(x)-p(\alpha)}{x-\alpha} = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^k - \alpha^k}{x-\alpha} = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k-1} x^j \alpha^{k-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j =: q(x),$$

wobei

$$b_j = \sum_{k=j+1}^{n} a_k \alpha^{k-1-j}, \quad b_{n-1} = a_n \neq 0.$$

Also $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ für $x \neq \alpha$, aber dies gilt auch für $x = \alpha$.

(ii) Nun zum eigentlichen Beweis, der mit Induktion nach n geführt wird. Im Fall $n = 0$ ist das Polynom eine Konstante $\neq 0$, also ohne Nullstelle. Sei nun $n > 0$ und p Polynom vom Grad n. Hat p keine Nullstelle, so ist die Aussage richtig. Hat p eine Nullstelle α, so gibt es ein Polynom q vom Grad $n-1$, so dass

$$p(x) = (x-\alpha)q(x) \quad \text{für alle } x.$$

Nach Induktionsvoraussetzung hat q höchstens $n-1$ Nullstellen, also p höchstens n Nullstellen. □

Reelle nicht konstante Polynome müssen nicht unbedingt Nullstellen haben, wie das Beispiel $p(x) = x^2 + 1$ zeigt. Als Anwendung von (2.2) erhalten wir das

(2.3) Korollar. *(Identitätssatz für Polynome)*
Seien $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ zwei reelle Polynome. Gibt es mindestens $n+1$ verschiedene reelle Zahlen $x_0, \ldots, x_n$ mit $p(x_j) = q(x_j)$ für $j = 0, 1, \ldots, n$, so folgt

$$a_k = b_k \quad \text{für} \quad k = 0, \ldots, n.$$

Insbesondere ist der Grad eines Polynoms eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $r(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k - b_k)x^k = p(x) - q(x)$. Da $r(x)$ mindestens $n+1$ verschiedene Nullstellen $x_0, \ldots, x_n$ hat, folgt $r(x) = 0$ für alle x sowie $a_k = b_k$ für alle k aus (2.2). □

Als nächstes leiten wir eine Wachstumsaussage für Polynome her.

(2.4) Satz. *Sei*

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

ein reelles Polynom vom Grad n mit $a_n > 0$.

a) Es gibt ein $r \in \mathbb{R}_+$*, so dass*

$$\frac{1}{2} \cdot a_n \cdot |x|^n \leqslant |p(x)| \leqslant 2 \cdot a_n \cdot |x|^n \quad \text{für alle} \quad |x| \geqslant r.$$

b) Es sei $\rho > 0$*. Dann gibt es ein* $M > 0$*, so dass*

$$|p(x)| \leqslant M \cdot |x|^n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \ |x| \geqslant \rho.$$

Beweis. Wir beweisen nur Teil a). Vorüberlegung: Für $|x| \geqslant 1$ ist

$$\frac{|a_0|}{|x|^n} + \frac{|a_1|}{|x|^{n-1}} + \ldots + \frac{|a_{n-1}|}{|x|} \leqslant \frac{|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|}{|x|}$$

Es gibt weiterhin ein $r \geqslant 1$, sodass

$$\frac{|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|}{|x|} \leqslant \frac{|a_n|}{2}$$

für alle x mit $|x| \geqslant r$. Für $|x| \geqslant r$ ist damit und mit den beiden Varianten der Dreiecksungleichung:

$$|p(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k||x|^k$$

$$= |x|^n(|a_n| + \frac{|a_0|}{|x|^n} + \frac{|a_1|}{|x|^{n-1}} + \ldots + \frac{|a_{n-1}|}{|x|}) \leqslant |x|^n(|a_n| + \frac{|a_n|}{2}) \leqslant 2|a_n||x|^n$$

und weiter

$$|p(x)| \geqslant |x|^n(|a_n| - (\frac{|a_0|}{|x|^n} + \frac{|a_1|}{|x|^{n-1}} + \ldots + \frac{|a_{n-1}|}{|x|})) \geqslant |x|^n \cdot \frac{|a_n|}{2}$$

□

Wichtig ist in diesem Zusammenhang auch noch die folgende

(2.5) Definition. Eine *rationale Funktion* ist der Quotient zweier Polynomfunktionen. Seien also p, q Polynomfunktionen, q nicht das Nullpolynom und $M := \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$ die (endliche) Nullstellenmenge von q. Dann hat die rationale Funktion die Form

$$\mathbb{R} \backslash M \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Kapitel VI.

Funktionen: Grenzwerte und Stetigkeit

§1. Grenzwerte

Wir kommen nun zu einem fundamentalen Begriff der Analysis, nämlich zum Grenzwert von Funktionen. Vorab noch eine Definition.

(1.1) Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ nicht leer.

a) Ein $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt von* D, wenn es zu jedem $\rho > 0$ ein $x \in U_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}$ gibt. (Es ist also $(U_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$ nicht leer.)

b) Ist $x_0 \in D$, aber kein Häufungspunkt von D, so heißt x_0 *isolierter Punkt* von D.

(1.2) Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 Häufungspunkt von D. Die Funktion f heißt *konvergent gegen* $L \in \mathbb{R}$ *für* $x \to x_0$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Man schreibt dafür $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ und nennt L den Grenzwert von f für $x \to x_0$.

Der Begriff Häufungspunkt ist etwas gewöhnungsbedürftig. Man beachte, dass $0 < |x - x_0|$ vorausgesetzt wird. Daher braucht f in x_0 gar nicht definiert zu sein oder es kann $f(x_0) \neq L$ gelten, obwohl $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ gilt.

(1.3) Beispiele. a) Ist $D \subset \mathbb{R}$ und gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < x_0 < b$ sowie $(a, x_0) \cup (x_0, b) \subset D$, so ist x_0 Häufungspunkt von D.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{für } x \neq 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$

Dann gilt

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2,$$

da $f(x) = x + 1$ für $x \neq 1$.
c) Ist f konstant, $f(x) = c$ für alle $x \in D$, so gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$ für jeden Häufungspunkt x_0 von D.
d) Für die identische Abbildung $g : D \to D, g(x) = x$ gilt $\lim_{x\to x_0} g(x) = x_0$ für jeden Häufungspunkt x_0 von D. Denn die Bedingung der Definition ist mit $L = x_0, \delta = \varepsilon$ erfüllt.
e) Es gilt $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1 = \exp(0)$. Denn für $|x| \leqslant 1$ gilt $|\exp(x) - 1| \leqslant e \cdot |x|$, wie aus folgender Ungleichungskette folgt:

$$|\exp(x) - 1| = |\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}| = |x| \cdot |\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}|$$

$$\leqslant |x| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{k!} \leqslant |x| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leqslant |x| \cdot e.$$

(Hierbei werden Rechenregeln für Reihen verwendet und die Tatsache, dass auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$ für alle x konvergiert; dies wird wie in III(3.19) bewiesen.)
Zu $\varepsilon > 0$ wähle nun $\delta = min\{\frac{\varepsilon}{2e}, 1\}$. Dann gilt für alle x mit $|x| < \delta$:

$$|\exp(x) - 1| \leqslant e \cdot \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

f) In ähnlicher Weise kann man über die Reihenentwicklungen zeigen, dass $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ $(= \sin 0)$ und $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ $(= \cos 0)$.

Grenzwerte von Funktionen lassen sich grundsätzlich auf Grenzwerte von Folgen zurückführen, denn es gilt:

(1.4) Lemma. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D und $L \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*
(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.
(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ in $D\backslash\{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Insbesondere ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

Den Beweis wollen wir hier nicht bringen. Aber aus den Grenzwertregeln für Folgen III(1.9) erhält man damit sofort die nächste Aussage:

(1.5) Satz. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, weiter sei $g : D' \to \mathbb{R}$ und x_0 Häufungspunkt von $D \cap D'$. Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_f$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_g$, so folgt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$*

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f)(x) = \alpha L_f$.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}(f \pm g)(x) = L_f \pm L_g$.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}(f \cdot g)(x) = L_f \cdot L_g$.

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_f}{L_g}$, *falls* $L_g \neq 0$.

Daraus ergeben sich wichtige Aussagen zu Grenzwerten bekannter Funktionen.

(1.6) Satz. *a) Es sei* $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *eine Polyomfunktion. Dann gilt* $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$ *für jedes* $x_0 \in \mathbb{R}$.

b) Es sei weiter $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine Polynomfunktion, und* $Q \neq 0$. *Für alle* $x_0 \in D := \{z \in \mathbb{R}; Q(z) \neq 0\}$ *ist dann* $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Beweis. (Skizze.) a) Wir zeigen die Aussage erst für Potenzfunktionen $p_n : x \mapsto x^n$. Im Fall $n = 0$ und $n = 1$ wurde sie schon nachgewiesen. Aus $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$ und $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ folgt nach (1.5) (iii) schon $\lim_{x\to x_0} x^{n+1} = x_0^{n+1}$. Mit Induktion folgt also die Richtigkeit für alle p_n. Benutzt man dies zusammen mit (1.5) (i) und (ii), so folgt mit Induktion auch die Aussage für Polynome.
Teil b) folgt aus a) und (1.5) (iv). □

(1.7) Satz. *a) Für alle* $x_0 \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\lim_{x\to x_0} \exp(x) = \exp(x_0).$$

b) Für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\lim_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0) \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to x_0} \cos(x) = \cos(x_0).$$

Beweis. Wir zeigen nur a); Teil b) folgt auf ähnliche Weise. Es ist

$$\exp(x) = \exp(x_0) \cdot \exp(x - x_0).$$

In Beispiel (1.3) d) wurde $\lim_{y\to 0} \exp(y) = 1$ gezeigt; also auch $\lim_{x\to x_0} \exp(x - x_0) = 1$. Mit (1.5) (i) folgt die Behauptung. □

Für manche Zwecke benötigt man auch einseitige Grenzwerte.

(1.8) Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ nicht-leer und x_0 ein Häufungspunkt von D; weiter $f : D \to \mathbb{R}$.

a) Es sei $L_1 \in \mathbb{R}$ und $g_1 := f\big|_{D \cap (x_0, \infty)}$. Wenn x_0 Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ ist und
$$\lim_{x \to x_0} g_1(x) = L_1,$$
so nennt man f *rechtsseitig konvergent* gegen L_1 für $x \to x_0$ und schreibt
$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = L_1.$$
Man nennt L_1 dann den *rechtsseitigen Grenzwert* von f für $x \to x_0$.

b) Es sei $L_2 \in \mathbb{R}$ und $g_2 := f\big|_{D \cap (-\infty, x_0)}$. Wenn x_0 Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$ ist und
$$\lim_{x \to x_0} g_2(x) = L_2,$$
so nennt man f *linksseitig konvergent* gegen L_2 für $x \to x_0$ und schreibt
$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = L_2.$$
Man nennt L_2 dann den *linksseitigen Grenzwert* von f für $x \to x_0$.

(1.9) Beispiel. Die Signum-Funktion
$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$
besitzt in $x_0 = 0$ den rechtsseitigen Grenzwert $L_1 = 1$ und den linksseitigen Grenzwert $L_2 = -1$.
Das folgt einfach aus $g_1(x) = 1$ für alle $x > 0$ bzw. $g_2(x) = -1$ für alle $x < 0$. Aber $\lim \operatorname{sgn}_{x \to 0} x$ existiert nicht.

(1.10) Bemerkung. Es seien die Bezeichnungen wie in (1.8).

a) Falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ und x_0 Häufungspunkt sowohl von $D \cap (x_0, \infty)$ als auch von $D \cap (-\infty, x_0)$ ist, so existieren die einseitigen Grenzwerte und es gilt
$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = L.$$

b) Umgekehrt: Ist x_0 Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ sowie von $D \cap (-\infty, x_0)$ und existieren $\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = L_1$ sowie $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = L_2$, so existiert der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ genau dann, wenn $L_1 = L_2$. (Der Beweis soll hier nicht gebracht werden.)

Auch für Grenzwerte von Funktionen gibt es ein Monotoniekriterium, das sich mit Hilfe von (1.4) und dem Monotoniekriterium für Folgen beweisen lässt.

(1.11) Satz. *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D; weiter $f : D \to \mathbb{R}$.*

a) Ist x_0 Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ und existiert ein $r > 0$ so, dass $f|_{D\cap(x_0,x_0+r)}$ monoton und beschränkt ist, so existiert $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$.

b) Ist x_0 Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$ und existiert ein $r > 0$ so, dass $f|_{D\cap(x_0-r,x_0)}$ monoton und beschränkt ist, so existiert $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$.

Wir wollen auch noch Grenzwerte für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ definieren.

(1.12) Definition. a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ∞ Häufungspunkt von D, d. h. zu jedem $R > 0$ gibt es ein $x \in D$ mit $x > R$. Die Funktion f heißt *konvergent gegen $L \in \mathbb{R}$ für $x \to \infty$*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in D$ existiert, so dass

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{für alle } x > x_0.$$

Man schreibt dafür $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.

b) Ist $-\infty$ Häufungspunkt von D, gibt es also zu jedem $R > 0$ ein $x \in D$ mit $x < -R$, so gilt per Definition $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = M \in \mathbb{R}$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in D$ existiert, so dass

$$|f(x) - M| < \varepsilon \quad \text{für alle } x < x_0.$$

Der Veranschaulichung dienen die folgenden

(1.13) Beispiele. a) Es gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$: Zu $\varepsilon > 0$ wähle $x_0 = \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist für $x > x_0$ stets $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$.
b) Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{x-2}$. Dann gilt $(2, \infty) \subset \mathbb{R}\backslash\{2\}$ und man hat $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x-2} = 1$.
Begründung: Zu $\varepsilon > 0$ definiert man $x_0 = 2 + \frac{2}{\varepsilon}$ und erhält für alle $x > x_0$

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{x}{x-2} - 1\right| = \frac{2}{x-2} < \frac{2}{x_0 - 2} = \varepsilon.$$

c) Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$. Zu $\varepsilon > 0$ definiert man $x_0 = \sqrt{1/\varepsilon}$ und folgert für alle $x > x_0$

$$|f(x)| = \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{x_0^2+1} < \frac{1}{x_0^2} = \varepsilon.$$

Analog zeigt man $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$.

(1.14) Bemerkung. (a) Die Grenzwertregeln (1.5) gelten auch für $\lim_{x\to\infty}$ und $\lim_{x\to-\infty}$, wie man nachweisen kann.

(b) Auch das Monotoniekriterium gilt für die Grenzwerte mit $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$. Im Detail:

- Falls es unter den Voraussetzungen von (1.12) a) ein $M > 0$ gibt, so dass $f|_{D\cap(M,\infty)}$ monoton und beschränkt ist, so existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
- Falls es unter den Voraussetzungen von (1.12) b) ein $M > 0$ gibt, so dass $f|_{D\cap(-\infty,-M)}$ monoton und beschränkt ist, so existiert $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Anwendungen werden wir später sehen.

Wir wollen noch einen letzten Begriff einführen, nämlich die bestimmte Divergenz.

(1.15) Definition. a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und ∞ ein Häufungspunkt von D. Dann nennt man f *bestimmt divergent* gegen ∞ [bzw. gegen $-\infty$] für $x \to \infty$, wenn es zu jedem $M > 0$ ein $R \in D$ gibt, sodass

$$f(x) > M \qquad [\text{bzw.} \quad f(x) < -M]$$

für alle $x > R$. Man schreibt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ [bzw. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$].

b) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $-\infty$ ein Häufungspunkt von D. Dann nennt man f *bestimmt divergent* gegen ∞ [bzw. gegen $-\infty$] für $x \to -\infty$, wenn es zu jedem $M > 0$ ein $R \in D$ gibt, sodass

$$f(x) > M \qquad [\text{bzw.} \quad f(x) < -M]$$

für alle $x < R$. Man schreibt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ [bzw. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$].

(1.16) Beispiele. a) Ist $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom, $n \geqslant 1$ und $a_n > 0$, so gilt $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$, denn nach V(2.4) gibt es ein $r \geqslant 1$ so, dass

$$p(x) \geqslant \frac{a_n}{2} x^n \geqslant \frac{a_n}{2} x \quad \text{für alle} \quad x \geqslant r.$$

Zu $M > 0$ wähle $R = 2M/a_n$.

b) Es ist $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, denn für alle $x > 0$ ist $e^x > x$ (Reihenentwicklung). Zu $M > 0$ kann man also $R = M$ wählen.

c) Es ist $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$: Zu $\varepsilon > 0$ wähle $R = \frac{1}{\varepsilon}$ und benutze b).

d) Durch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \cdot \sin x$ ist eine Funktion gegeben, für die $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nicht existiert, aber f ist nicht bestimmt divergent, denn $f(k \cdot \pi) = 0$ und $f((2k + \frac{1}{2})\pi) = (2k + \frac{1}{2})\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Auch für einseitige Grenzwerte mit $x \downarrow x_0$ bzw. $x \uparrow x_0$ wird bestimmte Divergenz definiert.

(1.17) Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ nicht-leer und $f : D \to \mathbb{R}$.

a) Ist x_0 ein Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$, so nennt man f *rechtsseitig bestimmt divergent* gegen ∞ [bzw. gegen $-\infty$] für $x \to x_0$, wenn es zu jedem $M > 0$ ein $a \in D \cap (x_0, \infty)$ gibt, sodass

$$f(x) > M \quad [\text{bzw } f(x) < -M]$$

für alle $x \in D \cap (x_0, a)$.

In Zeichen: $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) = \infty$ [bzw. $-\infty$].

b) Ist x_0 ein Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$, so nennt man f *linksseitig bestimmt divergent* gegen ∞ [bzw. gegen $-\infty$] für $x \to x_0$, wenn es zu jedem $M > 0$ ein $b \in D \cap (-\infty, x_0)$ gibt, sodass

$$f(x) > M \quad [\text{bzw } f(x) < -M]$$

für alle $x \in D \cap (b, x_0)$.

In Zeichen: $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = \infty$ [bzw. $-\infty$].

(1.18) Beispiel.

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Dann $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = -\infty$.
(Zum Nachweis der zweiten Aussage wähle zu $M > 0$:

$$b = -\frac{1}{M}.$$

Dann ist für $b < x < 0$:

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{b} = -M.$$

Die erste Aussage begründet man analog.)

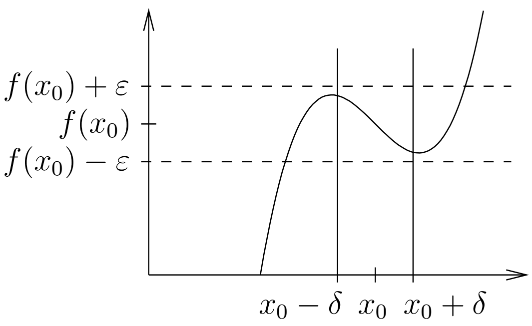
§2. Stetige Funktionen

In der Analysis ist man nicht an allen möglichen Funktionen interessiert, sondern vor allem an solchen mit „schönen“ Eigenschaften. Stetigkeit ist eine solche Eigenschaft.

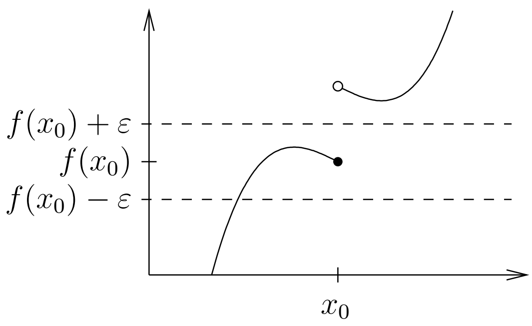
(2.1) Definition. Gegeben sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

- Ist x_0 Häufungspunkt von D, so heißt f *stetig in* x_0, falls $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- (Konvention:) Ist x_0 kein Häufungspunkt von D, so heißt f stetig in x_0.

f heißt *stetig auf* E, falls $E \subset D$ und f in jedem Punkt $x_0 \in E$ stetig ist. Man nennt f *stetig*, wenn f stetig auf D ist.



Diese Funktion ist stetig in x_0.



Diese Funktion ist nicht stetig in x_0.

Die obigen Skizzen sollen der Veranschaulichung dienen. Anschaulich gesprochen wird eine stetige Funktion auf einem Intervall dadurch charakterisiert, dass man ihren Graphen “durchzeichnen” kann, dass also keine Sprünge auftreten.

Aus (1.6) und (1.7) folgt sofort:

(2.2) Satz. *a) Polynomfunktionen sind stetig auf* $\mathbb{R}$.

b) Rationale Funktionen sind stetig in ihrem maximalen Definitionsbereich.

c) exp, sin *und* cos *sind stetig auf* $\mathbb{R}$.

Wir geben noch eine andere Charakterisierung an, die eine direkte Konsequenz von (1.4) ist.

(2.3) Satz. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann sind äquivalent:*
(i) f ist stetig in x_0.
(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0).$$

(2.4) Beispiele. a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto [x]$, ist unstetig in allen $x_0 \in \mathbb{Z}$. Zur Begründung sei $x_n := x_0 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ und

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left[x_0 - \frac{1}{n}\right] = x_0 - 1 \neq x_0 = f(x_0).$$

Ist $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, so ist f stetig in x_0. Begründung: Für $\varepsilon > 0$ sei $\delta := \min\{x_0 - [x_0], [x_0] + 1 - x_0\} > 0$. Für $x \in U_\delta(x_0)$ gilt dann $[x] = [x_0]$, also $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.
b) Wir betrachten wieder die Signum-Funktion

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht stetig in 0, wie in (1.9) gezeigt wurde.

Die folgenden Aussagen sind für den Umgang mit stetigen Funktionen nützlich.

(2.5) Satz. *a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Dann existiert eine Umgebung U von x_0, so dass $f\big|_{D\cap U}$ beschränkt ist, d. h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leqslant c$ für alle $x \in U \cap D$.*
b) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Ist $f(x_0) > 0$ [bzw. $f(x_0) < 0$], so existiert eine Umgebung U von x_0 und ein $\rho > 0$, so dass

$$f(x) > \rho \quad [\textit{bzw. } f(x) < -\rho] \quad \textit{für alle } x \in D \cap U.$$

c) Seien $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ beide stetig in $x_0 \in D_f \cap D_g$, sowie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch αf, $f + g$ und $f \cdot g$ stetig in x_0 und im Fall $g(x_0) \neq 0$ ebenfalls f/g.
d) Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Es gelte $f(D_f) \subset D_g$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ sei stetig in $y_0 := f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ stetig in x_0.

Beweis. Vorab: Ist x_0 isolierter Punkt (also kein Häufungspunkt) von D, so sind alle Aussagen offensichtlich. Für den Rest des Beweises wird angenommen, dass x_0 Häufungspunkt von D ist.

a) Da f stetig in x_0 ist, existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < 1$ für alle $x \in D \cap U_\delta(x_0)$. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$|f(x)| < |f(x_0)| + 1 =: c \quad \text{für alle} \quad x \in D \cap U_\delta(x_0).$$

b) Sei $\rho = \frac{1}{2} f(x_0) > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \rho, \quad \text{also} \quad f(x) \in (\rho, 3\rho)$$

für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Also folgt die Behauptung mit $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
c) folgt aus den Grenzwertregeln in (1.5).
d) Sei $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge in D_f mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Nach (2.3) ist $(y_n)_{n\geqslant 1} := (f(x_n))_{n\geqslant 1}$ eine Folge in D_g mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 = f(x_0)$. Wendet man nun (2.3) auf g an, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0) = (g \circ f)(x_0).$$

Also ist auch $g \circ f$ stetig in x_0. □

Wir beschäftigen uns nun mit der Stetigkeit der Umkehrfunktion. Ohne Beweis geben wir an:

(2.6) Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone, stetige Funktion mit $W = f(I)$. Dann ist die Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : W \to I$$

ebenfalls stetig.

(2.7) Beispiel. Es sei $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Dann ist $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ stetig als Umkehrfunktion der stetigen Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto x^n$.

Wir betrachten nun spezielle Eigenschaften stetiger Funktionen. Die erste geben wir ohne Beweis an.

(2.8) Satz. *(Satz vom Minimum und Maximum)*
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $[a, b] \subset D$. Dann nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an, d. h. es gibt $x_m, x_M \in [a, b]$ mit

$$f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) \quad \textit{für alle } x \in [a, b].$$

Bei dieser Aussage ist wichtig, dass es um ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall $[a, b]$ geht. (Für alle anderen Typen von Intervallen stimmt sie i. A. nicht.)

Unser nächstes Ziel ist eine Zusammenhangseigenschaft.

(2.9) Zwischenwertsatz. (Bernhard BOLZANO (1781-1848))
Seien $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a, b] \subset D$.
a) Gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ [oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$], so existiert ein $c^* \in (a, b)$ mit

$$f(c^*) = 0.$$

b) Sei $m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ und $M := \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Dann gilt

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Beweis. a) Wir betrachten den Fall $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Sei $S := \{x \in [a, b] \mid f(x) \leqslant 0\}$. Wegen $S \subset [a, b]$ ist S beschränkt und aus $a \in S$ folgt $S \neq \varnothing$. Demnach existiert

$$c^* := \sup S.$$

Nun ergibt sich $f(c^*) = 0$ wie folgt:

- Wäre $f(c^*) < 0$, so $c^* < b$ und es gäbe nach (2.5) b) ein $\delta > 0$ derart, dass $f(x) < 0$ für alle $x \in U_\delta(c^*) \cap [a, b]$, also c^* nicht obere Schranke von s; Widerspruch.
- Wäre $f(c^*) > 0$, so $c^* > a$ und es gäbe ein $\delta > 0$ so, dass $f(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(c^*) \cap [a, b]$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ so, dass $m > 1$ und $c^* - \frac{\delta}{m} \in [a, b]$. Dann ist $c^* - \frac{\delta}{m}$ obere Schranke von S, also c^* nicht kleinste obere Schranke; Widerspruch.

b) Nach (2.8) existieren $c, d \in [a, b]$ mit $f(c) = m$ und $f(d) = M$. Sei ohne Einschränkung $c < d$, da man sonst $-f$ betrachten kann. Für $\mu \in (m, M)$ wende man a) auf die Funktion

$$g : D \to \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x) - \mu,$$

an. Aus $g(c) < 0$ und $g(d) > 0$ folgt die Existenz eines $\xi \in (c, d)$ mit $g(\xi) = 0$, also $f(\xi) = \mu$. Wegen $f([a, b]) \subset [m, M]$ erhält man daraus die Behauptung. □

Als Anwendung des Zwischenwertsatzes erhalten wir das

(2.10) Korollar. *Sei $p(x)$ ein reelles Polynom ungeraden Grades. Dann hat $p(x)$ eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, n ungerade und ohne Einschränkung $a_n > 0$. Dann gilt $p(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right)$ für $x \neq 0$ sowie

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) = a_n > 0,$$

also existiert ein $R > 0$ so, dass

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} > 0 \text{ für alle } x \text{ mit } |x| > R.$$

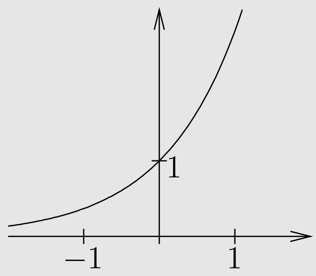
Weil n ungerade ist, gilt $p(a) < 0$ für $a < -R$ und $p(b) > 0$ für $b > R$. Da Polynome stetig sind, existiert nach (2.9) ein $\xi \in (a, b)$ mit $p(\xi) = 0$. $\square$

Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir uns intensiver mit der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ und ihrer Umkehrfunktion beschäftigen.

(2.11) Satz. *a) Die reelle Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty), x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.
b) Die Exponentialfunktion wächst schneller als jedes Polynom: Ist $P(X)$ ein reelles Polynom, so gilt



$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{\exp(x)} = \lim_{x \to -\infty} P(x) \cdot \exp(x) = 0.$$

Beweis. a) Die strenge Monotonie (und damit die Injektivität) wurde bereits bewiesen. Ebenso wurde schon

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = \lim_{w \to \infty} \frac{1}{\exp(w)} = 0$$

gezeigt.
Da exp nach (2.2) stetig ist, folgt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ aus dem Zwischenwertsatz (2.9): Denn zu $y > 0$ existiert ein x_1 mit $\exp(x_1) < y$ wegen $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ und ein x_2 mit $\exp(x_2) > y$ wegen $\lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$. Also gibt es ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $\exp(\xi) = y$.
b) Sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad n. Nach V(2.4) gibt es ein $c > 0$ und ein $R > 0$ mit $|P(x)| \leqslant c|x|^n$ für alle $|x| \geqslant R$. Aufgrund der Reihendarstellung gilt $\exp(x) > \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}$ für alle $x \geqslant 0$, also

$$\left|\frac{P(x)}{\exp(x)}\right| \leqslant \frac{cx^n}{\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}} = \frac{c \cdot (n+1)!}{x} \quad \text{für alle } x \geqslant R.$$

Es folgt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{\exp(x)} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} P(x) \exp(x) = \lim_{w \to \infty} \frac{P(-w)}{\exp(w)} = 0.$$ $\square$

Aus der Bijektivität von exp folgt die Existenz der Umkehrfunktion.

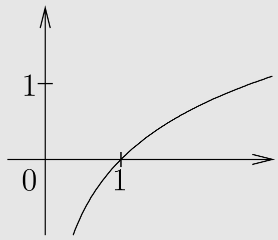
(2.12) Definition. Die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ heißt *natürlicher Logarithmus* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

Natürlich kann man nun die Eigenschaften der Exponentialfunktion auf den Logarithmus übertragen.

(2.13) Satz. *Die Funktion* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Für alle* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *und alle* $w \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x,$$

$$\exp(\ln x) = x, \qquad \ln(\exp(w)) = w.$$



Es gilt $\ln 1 = 0$ *und* $\ln e = 1$ *sowie*

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty.$$

Beweis. Da ln die Umkehrfunktion von exp ist, gilt $\ln(\exp(w)) = w$ für alle $w \in \mathbb{R}$ und $\exp(\ln x) = x$ für alle $x > 0$. Weil exp injektiv ist und

$$\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x) \cdot \exp(\ln y) = x \cdot y = \exp(\ln(x \cdot y)),$$

folgt

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Aus $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$ erhält man $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$ sowie

$$\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0, \quad \text{also} \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x.$$

Strenge Monotonie und Stetigkeit ergeben sich aus V(1.9) und (2.6). Weil ln streng monoton wachsend ist mit $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$, folgt notwendig

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty.$$

□

Damit lässt sich auch die allgemeine Potenz (und die allgemeine Exponentialfunktion) definieren.

(2.14) Definition. Für reelles $a > 0$ und reelles b definiert man

$$a^b := \exp(b \cdot \ln a).$$

(2.15) Bemerkung. Falls b eine rationale Zahl ist, stimmt (2.14) mit der „alten“ Definition aus II(4.15) überein. Dies begründet man wie in Bemerkung III(3.22).

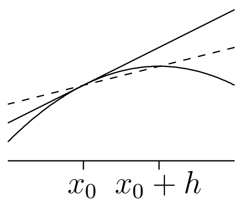
Kapitel VII.

Differentialrechnung

In diesem Kapitel soll die Differentialrechnung von reellwertigen Funktionen einer reellen Variablen beschrieben werden. Dazu sei stets $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \varnothing$.

§1. Die Ableitung einer Funktion

Geometrisch gesehen, möchte man den Graphen einer Funktion in der Nähe eines Punktes durch eine Gerade approximieren. Die Tangente liefert die beste Approximation. Man macht nun den Ansatz, die Steigung der Tangente als Grenzwert der Steigung von Sekanten auszurechnen. Für $h \neq 0$ ist die Steigung der Sekante, also der Geraden durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, gegeben durch



$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

(1.1) Definition. a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein innerer Punkt von $D \subset \mathbb{R}$.

(a1) Man nennt f in x_0 *differenzierbar*, wenn der Limes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *Ableitung* von f im Punkt x_0 oder an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet.

(a2) Man nennt dann die Gerade

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)\}$$

die *Tangente* an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

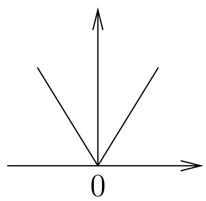
b) Einseitige Differenzierbarkeit: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und es gebe ein $\rho > 0$, sodass $[x_0, x_0 + \rho) \subset D$. Falls
$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'_+(x_0)$$
existiert, nennt man f in x_0 *rechtsseitig differenzierbar*. Falls es ein $\rho > 0$ gibt mit $(x_0 - \rho, x_0] \subset D$ und
$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'_-(x_0)$$
existiert, nennt man f in x_0 *linksseitig differenzierbar*.

Mit VI(1.10) folgt: f ist in x_0 genau dann differenzierbar, wenn $f'_+(x_0)$ und $f'_-(x_0)$ existieren und gleich sind.

Die Tangente ist eine lineare Approximation an den Graphen von f. Der leicht zu berechnende Wert $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ wird in der Nähe des i. A. schwer zu berechnenden Funktionswertes $f(x)$ liegen, solange x nahe bei x_0 ist.

Elementar sind die

(1.2) Beispiele. a) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ konstant und x_0 innerer Punkt von D, so ist $f'(x_0) = 0$. Denn es ist schon $f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$ für alle h, sodass $x_0 + h \in D$.
b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h \xrightarrow[h \to 0]{} 2x_0.$$
Also ist f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = 2x_0$.
c) Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, und $x_0 = 0$. Dann gilt
$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{für } h > 0, \\ -1 & \text{für } h < 0. \end{cases}$$



Also existiert kein Limes für $h \to 0$. Demnach ist f im Punkt 0 nicht differenzierbar. f ist aber (insbesondere auch) im Punkt 0 stetig.

Aus der Definition der Differenzierbarkeit folgt

(1.3) Korollar. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in einem inneren Punkt x_0 von $D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Dann gilt:*
a) f ist stetig in x_0.
b) Es gibt ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset D$ und ein $M > 0$, so dass
$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant M \cdot |x - x_0| \quad \textit{für alle } x \in U_\delta(x_0).$$

Beweis. Es gilt für alle $x \in D$, dass

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \phi(x),$$

wobei

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \neq x_0, \\ f'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

Nach Definition der Differenzierbarkeit ist ϕ stetig in x_0, also auch f. Weiter gibt es nach VI(2.5) a) ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset D$ und ein $M > 0$, so dass

$$|\phi(x)| < M \quad \text{für alle } x \in U_\delta(x_0).$$

Also $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \cdot |\phi(x)| \leqslant M \cdot |x - x_0|$. □

Nun führen wir globale Differenzierbarkeit ein.

(1.4) Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $D \subset \mathbb{R}$ enthalte keine isolierten Punkte.
a) f heißt *differenzierbar auf* D, wenn f in jedem inneren Punkt von D differenzierbar ist und in jedem Randpunkt, der zu D gehört, einseitig differenzierbar ist.
b) Ist f differenzierbar auf D, so heißt die Funktion

$$f' : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x) \text{ (bzw. } f'_+(x) \text{ oder } f'_-(x),\ \text{falls } x \text{ Randpunkt)},$$

die *Ableitung von* f.
Man schreibt auch $f' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f$.
c) Zweite Ableitung: Ist f differenzierbar auf D und existiert die Ableitung von f' in $x_0 \in D$, so wird sie *zweite Ableitung* von f in x_0 genannt und mit $f''(x_0)$ bezeichnet. Ist f' auf ganz D differenzierbar, so nennt man ihre Ableitungsfunktion die *zweite Ableitung* von f auf D; Bezeichnung f''.
d) Analog werden rekursiv höhere Ableitungen $f''', f^{(4)}, \ldots, f^{(n)}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Wir formulieren die Rechenregeln in dem

(1.5) Satz. *Gegeben seien Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$, die in einem inneren Punkt x_0 von $D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar sind. Dann gilt*
a) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist αf differenzierbar in x_0 mit $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.
b) $f + g$ ist differenzierbar in x_0 mit $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
c) (Produktregel) $f \cdot g$ ist differenzierbar in x_0 mit

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

d) (Quotientenregel) Gilt $g(x_0) \neq 0$, so ist auch f/g differenzierbar in x_0 mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis. Wir zeigen nur a), b) und c); benutzt werden die Grenzwertregeln VI(1.5).
a) Es gilt

$$\frac{(\alpha f)(x_0+h)-(\alpha f)(x_0)}{h} = \alpha \cdot \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \alpha f'(x_0).$$

b) Man hat

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\ &\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)+g'(x_0).\end{aligned}$$

c) Weil g nach (1.3) auch stetig in x_0 ist, folgt

$$\begin{aligned}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h) + f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\ &\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).\end{aligned}$$

□

(1.6) Korollar. *a) Sei $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, ein reelles Polynom. Dann ist $p(x)$ differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit*

$$p'(x_0) = a_1 + 2a_2x_0 + \ldots + na_nx_0^{n-1},$$

d. h.

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} a_kx^k = \sum_{k=1}^{n} ka_kx^{k-1}.$$

b) Jede rationale Funktion ist differenzierbar auf ihrem Definitionsbereich.

Beweis. a) Aus (1.2) a) ist bekannt, dass konstante Funktionen in jedem inneren Punkt von D Ableitung Null besitzen. Dies ist die Aussage von a) für $n = 0$. Wir verwenden nun eine Induktion nach n. Für $n = 1$ haben wir

$$\frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h} = \frac{a_0+a_1(x_0+h)-(a_0+a_1x_0)}{h} = a_1 = p'(x_0).$$

Durch Induktion folgt mit (1.5)

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x\cdot x^n) = \left(\frac{d}{dx}x\right)\cdot x^n + x\cdot\left(\frac{d}{dx}x^n\right) = 1\cdot x^n + x\cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Die Behauptung für *Grad* $p = n+1$ erhält man nun aus (1.5) mit der Zerlegung $p(x) = q(x) + a_{n+1}x^{n+1}$, *Grad* $q \leqslant n$ oder $q \equiv 0$.
b) folgt direkt mit der Quotientenregel. □

(1.7) Satz. *Die Funktion* exp, sin *und* cos *sind auf* $\mathbb{R}$ *differenzierbar mit*

$$\exp'(x) = \exp(x),\ \sin' x = \cos x,\ \cos' x = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage für exp; für sin und cos laufen die Beweise analog.
(i) exp ist differenzierbar in 0 mit $\exp'(0) = 1$. Dazu betrachte mit der Reihenentwicklung für $h \neq 0$:

$$\frac{\exp(h) - 1}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!},$$

also

$$|\frac{\exp(h) - 1}{h} - 1| = |\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!}|$$

$$\leqslant |h| \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^{k-2}}{k!} \leqslant |h| \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \leqslant |h| \cdot e$$

für alle h mit $|h| \leqslant 1$. Wegen $\lim_{h\to 0} |h| \cdot e = 0$ folgt die Aussage.
(ii) Für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ ist nun

$$\frac{1}{h}(\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)) - \exp(x_0) = \exp(x_0) \cdot \left[\frac{1}{h}(\exp(h) - 1) - 1\right]$$

Nach (i) konvergiert der Ausdruck $[\frac{1}{h}(\exp(h) - 1) - 1]$ für $h \to 0$ gegen 0. □

Nun beschäftigen wir uns mit der Differentiation bei Komposition.

(1.8) Satz. *(Kettenregel)*
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in einem inneren Punkt x_0 von $D \subset \mathbb{R}$. Ist $g : D' \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(D) \subset D'$, die in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar ist, so ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 mit

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Weil g differenzierbar in y_0 ist, ist

$$h : D' \to \mathbb{R},\ y \mapsto \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & \text{falls } y \neq y_0, \\ g'(y_0), & \text{falls } y = y_0, \end{cases}$$

stetig in y_0 mit der Eigenschaft

$$g(y) - g(y_0) = (y - y_0) \cdot h(y) \quad \text{für alle} \quad y \in D'.$$

Setzt man nun $y = f(x)$, so folgt für alle $x \in D, x \neq x_0$:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot h(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0) \cdot g'(y_0),$$

denn es gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$ wegen der Stetigkeit von f in x_0. $\square$

In der praktischen Anwendung der Kettenregel gilt es, g und f zu bestimmen, wenn man einen konkreten Ausdruck zu differenzieren hat.

(1.9) Beispiele. a) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x^2 + x)$. Man hat

$$h = g \circ f \quad \text{mit} \quad g(y) = \sin y \quad \text{und} \quad f(x) = x^2 + x.$$

Dann gilt $g'(y) = \cos y$ und $f'(x) = 2x + 1$, also mit (1.8)

$$h'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) = (2x + 1) \cdot \cos(x^2 + x).$$

b) Für $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(\frac{1}{1+x^2})$ ist $h = g \circ f$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ und $g = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Also

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \exp(\frac{1}{1 + x^2}) \cdot (\frac{1}{1 + x^2})' = \exp(\frac{1}{1 + x^2}) \cdot (\frac{(-2x)}{(1 + x^2})^2).$$

Nun beschäftigen wir uns mit der Ableitung der Umkehrfunktion. Nimmt man einfach einmal an, dass f in x_0 und f^{-1} in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar sind, so folgt aus $f^{-1}(f(x)) = x$ mit der Kettenregel

$$(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1,$$

also

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Es lässt sich außerdem beweisen, dass aus der Differenzierbarkeit von f in x_0 und $f'(x_0) \neq 0$ die Differenzierbarkeit von f^{-1} in y_0 folgt. Also

(1.10) Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, injektiv sowie differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to \mathbb{R}$, $W = f(I)$, differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Die Ergebnisse von (1.10) verwenden wir in dem

(1.11) Korollar. *a)* $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ *für* $x > 0$.
b) $\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ *für* $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis. a) Es gilt $\ln x = f^{-1}(x)$ für $f(x) = \exp x = f'(x)$. Also gilt

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 0.$$

b) Es gilt nach der Kettenregel und a) für $x > 0$:

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha \ln x}\right) = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha\,\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

§2. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

In diesem Paragrafen soll der Mittelwertsatz für differenzierbare Funktionen mit seinen Anwendungen hergeleitet werden.

Wir erinnern an den Begriff des relativen (oder lokalen) Extremums; vgl. V(1.10).

(2.1) Satz. *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion,* x_0 *ein innerer Punkt von* D *und* f *differenzierbar in* x_0*. Wenn* f *in* x_0 *ein relatives Extremum hat, dann gilt* $f'(x_0) = 0$.

Beweis. f habe in x_0 ein relatives Maximum. (Den Fall eines relativen Minimums behandelt man analog.) Sei $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset D$ und $f(x) \leqslant f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Dann gilt für alle $0 < h < \delta$

$$\begin{aligned} &\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0, \quad \text{also } f'(x_0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0 \\ &\frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h} \geqslant 0, \quad \text{also } f'(x_0) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Es bleibt nur

$$f'(x_0) = 0.$$

□

Auf die Voraussetzungen des Satzes gehen wir ein in den

(2.2) Bemerkungen. a) Die Bedingung, dass x_0 ein innerer Punkt von D ist, ist wesentlich. Zum Beipiel hat $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, in $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ relative Extrema. Es gilt aber $f'(x_0) = f'(x_1) = 1$.
b) Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz eines relativen Extremums in x_0. Man betrachte

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3,\ f'(x) = 3x^2,\ x_0 = 0,\ f'(0) = 0.$$

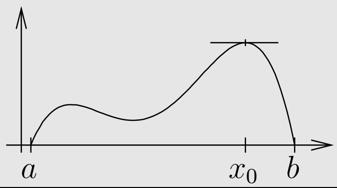
c) Es kann auch ein Extremum vorliegen, ohne dass die Funktion in x_0 differenzierbar ist. Man betrachte

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|,\ x_0 = 0.$$

Wie man auf die Existenz von Nullstellen der Ableitung schließen kann, zeigt der

(2.3) Satz von Michel Rolle (1652-1719).

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar mit $f(a) = f(b) = 0$. Dann existiert (mindestens) ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.



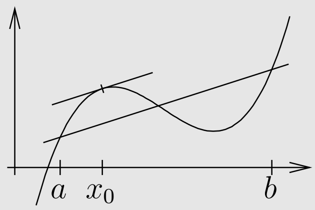
Beweis. Falls $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, wählt man $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Andernfalls existiert ohne Einschränkung ein $x_1 \in (a,b)$ mit $f(x_1) > 0$ (sonst betrachte man $-f$). Nach dem Satz vom Minimum und Maximum VI(2.8) gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x) \leqslant f(x_0)$ für alle $x \in [a,b]$. Wegen $f(x_1) > 0$ gilt $x_0 \in (a,b)$. Dann hat f in x_0 ein Extremum und $f'(x_0) = 0$ folgt aus (2.1). $\square$

Man kann den Satz von Rolle auch so formulieren, dass zwischen je zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion auf einem Intervall stets eine Nullstelle der Ableitung liegt.

(2.4) Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert (mindestens) ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Beachte: Die Steigung der Tangente in x_0 ist gleich der Steigung der Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.

Beweis. Wir definieren

$$F : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - f(a) - (x-a) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Mit f ist F stetig und auf (a,b) differenzierbar. Wegen $F(a) = F(b) = 0$ kann man (2.3) anwenden und erhält ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$0 = F'(x_0) = f'(x_0) - 1 \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

(2.5) Beispiel. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\cos x_1 - \cos x_2| \leqslant |x_1 - x_2|.$$

Zum Nachweis sei o. B. d. A. $x_1 < x_2$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (x_1, x_2)$ derart, dass

$$\frac{\cos x_2 - \cos x_1}{x_2 - x_1} = \cos'(\xi) = -\sin \xi.$$

Übergang zum Betrag und die (für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gültige) Abschätzung $|\sin \xi| \leqslant 1$ ergibt die Behauptung.

Das spezielle Beispiel ist hier nicht so wichtig, aber die Art, wie der Mittelwertsatz hier für Abschätzungen verwendet wurde, sollte man sich merken.

Für ein Intervall I bezeichne $\mathring{I}$ das zugehörige offene Intervall mit den gleichen Grenzen. Als wichtige Folgerung aus dem Mittelwertsatz erhalten wir den

(2.6) Satz. *Seien I ein Intervall mit $\mathring{I} \neq \emptyset$ und $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf $\mathring{I}$ differenzierbar sind. Dann gilt:*

a) $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathring{I}$ ist äquivalent zur Existenz eines $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = c$ für alle $x \in I$.

b) $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathring{I}$ ist äquivalent zur Existenz eines $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in I$.

c) f ist genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in \mathring{I}$.

d) f ist genau dann monoton fallend, wenn $f'(x) \leqslant 0$ für alle $x \in \mathring{I}$.

e) f ist streng monoton wachsend, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathring{I}$.

f) f ist streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathring{I}$.

Beweis. a) Seien $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$. Nach dem Mittelwertsatz (2.4) existiert ein $x_0 \in (\alpha, \beta)$ mit

$$0 = f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}, \quad \text{also} \quad f(\beta) = f(\alpha).$$

Demnach ist f konstant. Umgekehrt hat ein konstantes f die Ableitung 0.
b) Man wende a) auf $f(x) - g(x)$ an.
c), e) Wenn f monoton wächst, so gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \quad \text{für alle} \quad x \in I,\, x \neq x_0,$$

also auch $f'(x_0) \geqslant 0$.
Nun gelte andererseits $f'(x) \geqslant 0$ [bzw. $f'(x) > 0$] für alle $x \in \mathring{I}$. Sind $\alpha, \beta \in I$ mit $\alpha < \beta$ beliebig, so existiert nach dem Mittelwertsatz ein $x_0 \in (\alpha, \beta)$ mit

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(x_0) \geqslant 0 \quad [\text{bzw. } > 0].$$

Es folgt $f(\beta) \geqslant f(\alpha)$ [bzw. $f(\beta) > f(\alpha)$], so dass f [streng] monoton wachsend ist.
d), f) Man wende c), e) auf $-f$ an. □

(2.7) Bemerkung. In (2.6) e) und f) wird nicht „genau dann“ behauptet. Dies wäre auch nicht richtig. Zum Beispiel erfüllt

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 \quad \text{mit} \quad f'(x) = 3x^2$$

„nur“ die Bedingung $f'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (da $f'(0) = 0$), aber f ist streng monoton wachsend.

Mit (2.6) lassen sich genaue Kriterien für lokale Extrema geben. Aus (2.6) folgt direkt:

(2.8) Korollar. *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, x_0 ein innerer Punkt von D und es gebe ein $\delta > 0$ so, dass f in $U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ differenzierbar ist. Dann gilt:*

a) Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$ mit $x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$ mit $x > x_0$, so ist x_0 strikte lokale Minimalstelle; d. h. es gilt $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.

b) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$ mit $x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$ mit $x > x_0$, so ist x_0 strikte lokale Maximalstelle; d. h. es gilt $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.

c) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$, so liegt in x_0 keine lokale Extremstelle vor.

Daraus ergibt sich wiederum ein (vielleicht aus der Schule bekanntes) weiteres Kriterium.

(2.9) Korollar. *Es sei x_0 innerer Punkt von D und f zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x_0.*

a) Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so ist x_0 strikte lokale Minimalstelle.

b) Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so ist x_0 strikte lokale Maximalstelle.

Beweis. a) Weil $f''(x_0) > 0$ und f'' stetig in einer Umgebung von x_0, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $f''(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; vgl. VI(2.5) b).
Anwendung des Mittelwertsatzes (2.4) auf f' ergibt nun für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$: Es gibt ein ξ zwischen x und x_0, sodass

$$f'(x) = f'(x) - f'(x_0) = (x - x_0) \cdot f''(\xi);$$

in jedem Fall gilt $f''(\xi) > 0$. Also wechselt f' bei x_0 sein Vorzeichen von "–" nach "+"; mit (2.8) a) folgt die Behauptung.
Teil b) wird analog bewiesen. $\square$

Kapitel VIII.

Stammfunktionen und Integrale

§1. Stammfunktionen und ihre Eigenschaften

Die Betrachtung von Stammfunktionen hat als Motiv, den Prozess des Ableitens „umzukehren“.

(1.1) Definition. Gegeben seien Funktionen $F : D \to \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Man nennt F eine *Stammfunktion von f*, wenn F auf D differenzierbar ist mit $F' = f$.

Aus VII(2.6) b) folgt direkt der

(1.2) Satz. *Es sei I ein nichtausgeartetes Intervall. Gegeben seien Funktionen $f, F, G : I \to \mathbb{R}$, so dass F eine Stammfunktion von f ist. Dann sind äquivalent:*

(i) G ist ebenfalls eine Stammfunktion von f.

(ii) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F(x) = G(x) + c \quad \text{für alle } x \in I.$$

Deshalb ist folgende Definition widerspruchsfrei.

(1.3) Definition. Es sei I ein nichtausgeartetes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion F. Dann heißt für $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)dx := F(b) - F(a)$$

das *bestimmte Integral* von f mit Grenzen a und b.

(1.4) Bemerkungen. a) Ist G eine andere Stammfunktion von f, so ist $G = F + c$ mit einer Konstanten c; also $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.

b) Statt $F(b) - F(a)$ schreibt man auch abkürzend $F|_a^b$.

c) Eine unmittelbare Folgerung aus der Definition ist die Regel

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

für alle $a, b, c \in I$, denn

$$F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a).$$

d) Sind F_1 Stammfunktion von f_1, F_2 Stammfunktion von f_2 und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so ist (mit VII(1.5)) $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$ Stammfunktion von $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$. Daraus ergibt sich

$$\int_a^b \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\, dx = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Eine wichtige Eigenschaft des Integrals ist seine *Monotonie*:

(1.5) Satz. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter seien $a, b \in I$ und $a < b$.*

a) Gilt $f(x) \leqslant g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

b) Gibt es zusätzlich noch ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) < g(x_0)$, so ist

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Wegen (1.4) dürfen wir $f = 0$ annehmen (Übergang zu $g - f$). Sei G Stammfunktion von g.

a) Zu zeigen ist $\int_a^b g(x)dx \geqslant 0$. Nach VII(2.6) ist aber G monoton wachsend, also $G(b) \geqslant G(a)$.

b) Wegen $g(x_0) > 0$ gibt es mit VI(2.5) ein $\delta > 0$ so, dass $g(x) > 0$ auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$. Sei (α, β) das Innere dieses Intervalls. Dann ist G auf $[\alpha, \beta]$ streng monoton wachsend, also $G(a) \leqslant G(\alpha) < G(\beta) \leqslant G(b)$. □

Die Frage nach der Existenz von Stammfunktionen beantworten wir (ohne Beweis) wie folgt:

(1.6) Satz. *Es sei I ein nichtausgeartetes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann besitzt f eine Stammfunktion F auf I.*

Damit ist nicht gesagt, dass eine Stammfunktion explizit („als geschlossener Funktionsausdruck“) angegeben werden kann.

(1.7) Bezeichnung. Wir führen das *unbestimmte Integral* ein: Die Schreibweise

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

bedeutet (*keine Gleichheit*, sondern)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

für jedes Intervall $[a, b]$ im Definitionsbereich von f.

Aus Kapitel VII kennen wir schon eine ganze Reihe von Stammfunktionen. Man muss nur die Ableitungen bekannter Funktionen betrachten.

(1.8) Beispiele. a) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

b) $\int x^s\,dx = \frac{1}{s+1}x^{s+1}$ für $s \in \mathbb{R}$, $s \neq -1$, Definitionsbereich $\mathbb{R}_+^*$.

c) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$, Definitionsbereich $(0, \infty)$.

d) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x)$, Definitionsbereich $(-\infty, 0)$.

Man kann insgesamt also sagen: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$, Definitionsbereich $\mathbb{R}^*$.

e) $\int \sin x\,dx = -\cos x$, $\int \cos x\,dx = \sin x$.

f) $\int \exp(x)\,dx = \exp(x)$.

g) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$, falls $f : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$.

Es gibt einige Verfahren, die beim konkreten Berechnen von Integralen helfen können. Die Produktregel der Differentiation führt zu

(1.9) Satz. *(Partielle Integration)*
Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int\limits_a^b f(t)g'(t)\,dt = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

Beweis. Als stetige Funktionen besitzen alle auftretenden Integranden nach (1.6) Stammfunktionen. Die Behauptung folgt aus (1.3) und VII(1.5) c):

$$\begin{aligned} f(t)g(t)\Big|_a^b &= \int\limits_a^b \frac{d}{dt}(f(t)g(t))\,dt = \int\limits_a^b f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\,dt \\ &= \int\limits_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int\limits_a^b f(t)g'(t)\,dt. \end{aligned}$$

□

Die Kettenregel der Differentiation führt zu

(1.10) Satz. *(Substitutionsregel)*
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi([a,b]) \subset D$. Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Ist φ darüber hinaus streng monoton mit $\varphi(a) = \alpha, \varphi(b) = \beta$ und ist ψ die Umkehrfunktion von φ, so gilt

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int\limits_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist $F \circ \varphi$ nach VII(1.8) differenzierbar mit

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Aus der Definition ergibt sich damit

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (F \circ \varphi)(t)\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(x)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Der zweite Teil folgt mit $\psi(\alpha) = a$ und $\psi(\beta) = b$. □

Nützlich sind die

(1.11) Bemerkungen. a) Zur Abkürzung (und als Merkregel) schreibt man oft: $x = \varphi(t),\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$; $x = \alpha \Leftrightarrow t = a$.
b) Gilt die (etwas schärfere) Bedingung $\varphi'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist eine äquivalente (und auch manchmal nützliche) Version die Folgende:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} h(\varphi(u))\,\mathrm{d}u,$$

wobei $h(x) := \frac{f(x)}{\psi'(x)}$. Zum Nachweis beachte die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion. Kurzschreibweise und Merkregel: $u = \psi(x),\ \mathrm{d}u = \psi'(x)\,\mathrm{d}x$.

Der Illustration dienen die

(1.12) Beispiele. a) Wir berechnen $\int_a^b \ln t\,dt$ für $0 < a < b$. Dazu verwenden wir (1.9) mit $f(t) = \ln t, g(t) = t$, $g'(t) = 1$, $f'(t) = \frac{1}{t}$.

$$\int_a^b \ln t \cdot 1\,dt = t \cdot \ln t\Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{t} \cdot t\,dt = t \cdot \ln t\Big|_a^b - \int_a^b dt = (t \ln t - t)\Big|_a^b,$$

also

$$\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1).$$

b) Es ist für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x\Big|_a^b - \int_a^b 1 \cdot e^x\,dt = (x - 1) \cdot e^x\Big|_a^b$$

mit $f(x) = x,\ f'(x) = 1, g(x) = e^x, g'(x) = e^x$.
c) Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $[a, b] \subset D$. Weiter seien $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$. Dann ist

$$\int\limits_{(a-d)/c}^{(b-d)/c} f(cx+d)\,dx = \frac{1}{c}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Insbesondere ist $x \mapsto \frac{1}{c}F(cx+d)$ Stammfunktion von $x \mapsto f(cx+d)$, wenn F Stammfunktion von f ist.
d) Wir berechnen $\int t \cdot e^{-t^2} dt$:
Mit der Substitution $x = -t^2, dx = -2tdt$ ist:

$$\int\limits_a^b t \cdot e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}\int\limits_a^b (-2t)e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}\int\limits_{-a^2}^{-b^2} e^x dx = -\frac{1}{2}e^x\Big|_{-a^2}^{-b^2} = -\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_a^b.$$

e) Sei $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Dann

$$\int\limits_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = \int\limits_{e^\alpha}^{e^\beta} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)},$$

mit $u = e^x$, $\mathrm{d}u = e^x\mathrm{d}x$ (ausführlich $\psi(x) = e^x$, $\psi'(x) = e^x\mathrm{d}x$, $h(x) = \frac{1}{e^x(1+e^x)}$). In diesem Beispiel, das den Nutzen von (1.12) illustriert, wurde das Problem auf die Integration einer rationalen Funktion zurückgeführt.

§2*. Geometrische Interpretation des Integrals

Typischerweise wird das Integral (etwa in der Schule) mit der Motivation eingeführt, Flächen zu berechnen. Wir haben in diesem Skript einen anderen Zugang gewählt, wollen aber kurz auf die geometrische Interpretation eingehen.

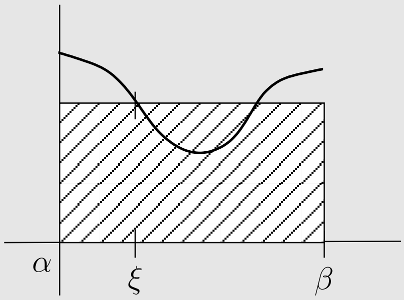
(2.1) Bemerkung. Es sei I nichtausgeartetes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion F. Für $\alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta$ ist dann

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein ξ zwischen α und β mit $F(\beta) - F(\alpha) = F'(\xi) \cdot (\beta - \alpha) = f(\xi) \cdot (\beta - \alpha)$.

Zusammengefasst: Es gibt ein ξ zwischen α und β so, dass

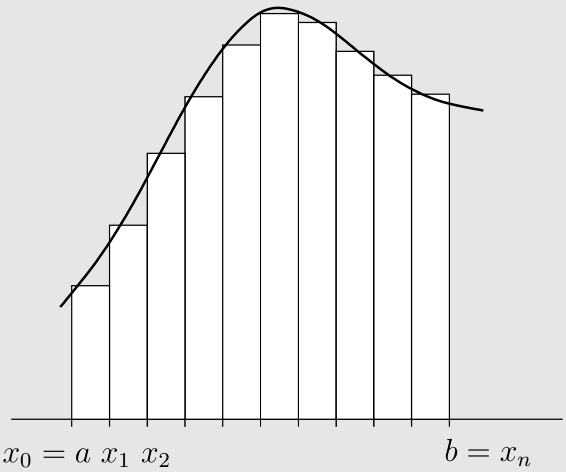
$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi) \cdot (\beta - \alpha).$$



Wenn $\beta > \alpha$ und $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$, dann steht rechts die Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen $\beta - \alpha$ und $f(\xi)$.
Man kann diese Prozedur auch durch Unterteilen noch verfeinern:

Es seien $a, b \in I$ mit $a < b$ und $n \in \mathbb{N}$. Definiere Unterteilungspunkte $x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Dann ist

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$



und nach der Vorüberlegung gibt es ξ_i zwischen x_{i-1} und x_i, so dass

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \frac{b-a}{n} \cdot f(\xi_i)$$

und insgesamt

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f(\xi_i)$$

Bisher war das Argument mathematisch exakt. Ab jetzt werden wir etwas nebulös, aber die Idee sollte klar werden.
Ist n hinreichend groß (also $|x_i - x_{i-1}|$ hinreichend klein), so macht man wegen der Stetigkeit von f keinen großen Fehler, wenn man jedes ξ_i durch irgendein $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ersetzt. Also

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f(\zeta_i)$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite nennt man eine (spezielle) *Riemannsche Summe.* Falls $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a, b]$, lässt sich dies geometrisch als Summe von Rechteckflächen auffassen. Für $n \to \infty$ („die Rechtecke werden immer schmaler") sollte der Grenzwert (existieren und) die Fläche „unterhalb des Graphen von f" darstellen. Wir nehmen dies zum Anlass für

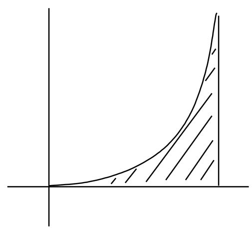
(2.2) Definition. Es sei I nichtausgeartetes Intervall, $a, b \in I$ mit $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

a) Ist $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a, b]$, so nennt man $\int_a^b f(x)dx$ den *Flächeninhalt, welcher von den Geraden $x = a, x = b$, der x-Achse und dem Graphen von f* begrenzt wird.

b) Ist $f(x) \leqslant 0$ für alle $x \in [a, b]$, so nennt man $-\int_a^b f(x)dx$ den *Flächeninhalt, welcher von den Geraden $x = a, x = b$, der x-Achse und dem Graphen von f* begrenzt wird.

(2.3) Beispiele. a) Für $f(x) = x^2, F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ergibt sich

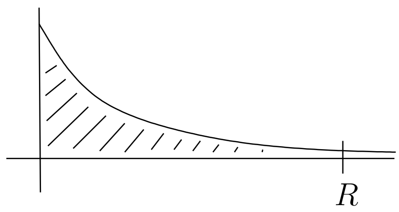
$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$



Die Fläche, die von der x-Achse und der „Normalparabel" für $0 \leqslant x \leqslant 1$ begrenzt wird, hat den Flächeninhalt $\frac{1}{3}$.

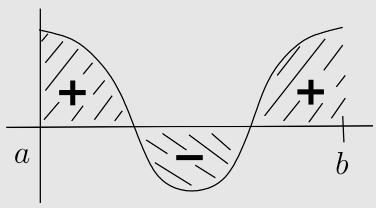
b) Mit $f(x) = e^{-x}, F(x) = -e^{-x}$ gilt für alle $R > 0$:

$$\int_0^R e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^R = 1 - e^{-R}.$$



Die Fläche, welche von der x-Achse, dem Graphen und den Geraden $x = 0$ bzw. $x = R$ begrenzt wird, hat also immer Flächeninhalt < 1, egal wie groß man R wählt.

(2.4) Bemerkung. Man kann (2.2) erweitern auf den Fall, dass das Vorzeichen von f in $[a, b]$ wechselt:
Man teilt das Intervall so auf, dass f auf jedem Teilintervall entweder nur Werte $\geqslant 0$ oder nur Werte $\leqslant 0$ besitzt, und summiert die Teilflächen auf. Näher wollen wir uns hiermit nicht befassen.



§3. Uneigentliche Integrale

Es gibt zwei Typen von uneigentlichen Integralen, die den Integrationsbegriff aus §1 verallgemeinern. Einmal ist das Integrationsintervall unbeschränkt, beim anderen Typ ist der Integrand unbeschränkt.

(3.1) Definition. a) Eine stetige Funktion $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt *uneigentlich integrierbar,* wenn $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ in $\mathbb{R}$ existiert. Dann setzt man

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

b) Eine stetige Funktion $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ heißt *uneigentlich integrierbar*, wenn $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ in $\mathbb{R}$ existiert. Dann setzt man

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

c) Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *uneigentlich integrierbar*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f\big|_{(-\infty,c]}$ und $f\big|_{[c,\infty)}$ uneigentlich integrierbar sind. Dann setzt man

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx.$$

In den Fällen a) - c) heißen $\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ bzw. $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ *uneigentliches Integral.*

(3.2) Beispiele. a) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so existiert $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ genau dann, wenn $\alpha > 1$. Ist nämlich $\alpha \neq 1$, so gilt für $b > 1$

$$\int_1^b x^{-\alpha}\,dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow[b\to\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{falls}\, \alpha < 1. \end{cases}$$

Also gilt

$$\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{für } \alpha > 1.$$

Darüber hinaus hat man

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^b = \ln b \xrightarrow[b\to\infty]{} \infty.$$

b) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}(-e^{-x})\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1$. (Vergleiche (2.3).)
c) Es sei $\lambda > 0$ und $f_\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$. Dann existiert $\int_0^\infty f_\lambda(x)dx = 1$; dies zeigt man wie in b) mit der Stammfunktion

$$F_\lambda : x \mapsto -e^{-\lambda x}.$$

In der Wahrscheinlichkeitstheorie ist f_λ die Dichtefunktion einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung, der *Exponentialverteilung* zum Parameter λ. Die Gleichheit $\int_0^\infty f_\lambda(x)dx = 1$ besagt dann gerade, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit gleich 1 ist.

In vielen interessanten Fällen kann man zwar keine Stammfunktion explizit angeben, aber trotzdem zeigen, dass das uneigentliche Integral existiert. Dies liegt (wieder einmal) am Monotoniekriterium.

(3.3) Satz. *(Vergleichskriterium): Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter gelte $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ für alle $x \in D$.*

a) Ist $[a,\infty) \subset D$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und existiert $\int_a^\infty g(x)dx$, so ist auch f auf $[a,\infty)$ uneigentlich integrierbar und es gilt

$$0 \leqslant \int_a^\infty f(x)dx \leqslant \int_a^\infty g(x)dx.$$

b) Ist $(-\infty, b] \subset D$ für ein $b \in \mathbb{R}$ und existiert $\int_{-\infty}^b g(x)dx$, so ist auch f auf $(-\infty, b]$ uneigentlich integrierbar und es gilt

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^b f(x)dx \leqslant \int_{-\infty}^b g(x)dx.$$

Beweis. a) Es sei F Stammfunktion von f auf $[a,\infty)$, $F(a) = 0$. Nach (1.5) (oder VII(2.6)) ist F monoton wachsend. Mit (1.5) gilt weiter für alle $R \geqslant a$:

$$F(R) = \int_a^R f(x)dx \leqslant \int_a^R g(x)dx \leqslant \int_a^\infty g(x)dx =: M.$$

Aus dem Monotoniekriterium VI(1.14) folgt nun die Existenz von $\lim_{R\to\infty} F(R)$.
Teil b) wird analog bewiesen. □

(3.4) Beispiel. Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ existiert. Man kann in diesem Fall keine Stammfunktion explizit angeben, aber mit (3.3) lässt sich Konvergenz zeigen:

- Für $x \geqslant 1$ ist $x^2 \geqslant x$, also $0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$. Weil

$$\int_1^R e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_1^R = e^{-1} - e^{-R} \to e^{-1}$$

  für $x \to \infty$, existiert $\int_1^\infty e^{-x} dx$.

- Analog zeigt man, mit $0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^x$ für $-\infty < x \leqslant -1$, die Existenz von $\int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2} dx$.

- Schließlich existiert $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ wegen (1.5).

Mit noch mehr Theorie kann man übrigens

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\sqrt{\pi}$$

zeigen.

Wir beschäftigen uns nun mit dem zweiten Typ, den unbeschränkten Integranden.

(3.5) Definition. a) Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Falls $\lim\limits_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^b f(x)\, dx$ in $\mathbb{R}$ existiert, nennt man f über $(a,b]$ *uneigentlich integrierbar* und setzt

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^b f(x)\, dx.$$

b) Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Falls $\lim\limits_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)\, dx$ in $\mathbb{R}$ existiert, nennt man f über $[a,b)$ *uneigentlich integrierbar* und setzt

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)\, dx.$$

Man nennt $\int_a^b f(x)\, dx$ in den Fällen a) - b) *uneigentliches Integral.*

Auch zu diesem neuen Begriff rechnen wir ein

(3.6) Beispiel. Für welche $\rho \in \mathbb{R}$ existiert $\int_0^1 x^{-\rho}\,dx$? Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\rho}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho} x^{1-\rho}\Big|_\varepsilon^1, \\ \ln x\Big|_\varepsilon^1, \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho}(1-\varepsilon^{1-\rho}), & \text{falls } \rho \neq 1, \\ -\ln\varepsilon, & \text{falls } \rho = 1, \end{cases} \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} \begin{cases} \frac{1}{1-\rho}, & \text{falls } \rho < 1, \\ \infty, & \text{falls } \rho \geqslant 1. \end{cases}$$

Also existiert das uneigentliche Integral für $\rho < 1$ mit

$$\int_0^1 x^{-\rho}\,dx = \frac{1}{1-\rho}.$$

(3.7) Bemerkung. Auch hier gilt (bei sinngemäßer Übertragung) das Vergleichskriterium aus (3.3).

§4. Einige Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen

Als Anwendung der Integralrechnung wollen wir einige sog. Differentialgleichungen lösen.

(4.1) Definition. Es seien I, J nichtausgeartete Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}, g : J \to \mathbb{R}$ stetig.

(i) Dann nennt man
$$y' = f(x) \cdot g(y)$$
eine *separierbare (oder trennbare) gewöhnliche Differentialgleichung* auf $I \times J$.

(ii) Ist I' ein nichtausgeartetes Teilintervall von I und $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so heißt φ eine *Lösung* der Differentialgleichung, wenn
$$\varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x))$$
für alle $x \in I'$.

(iii) Ist außerdem $x_0 \in I'$ und $y_0 = \varphi(x_0)$, so heißt φ Lösung des *Anfangswertproblems*
$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad y(x_0) = y_0.$$

(4.2) Beispiele. a) $y' = x^2 \cdot y^2$ ist eine separierbare Differentialgleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b) $y' = y - y^2$ ist eine separierbare Differentialgleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (mit $f = 1$).

c) $y' = y^2 + x^2$ ist (was auch immer, aber) keine separierbare Differentialgleichung.

Die Lösung separierbarer Gleichungen lässt sich weitestgehend auf Probleme der Integralrechnung zurückführen.

(4.3) Satz. *Gegeben sei das Anfangswertproblem aus 4.1 (iii), weiter sei* $g(y_0) \neq 0$. *Es sei* $F : I \to \mathbb{R}$ *eine Stammfunktion von* f *mit* $F(x_0) = 0$ *(also* $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$*),* $H : J' \to \mathbb{R}$ *eine Stammfunktion von* $\frac{1}{g}$ *auf einem Teilintervall* $J' \subset J$*, das* y_0 *enthält und* $g(y) \neq 0$ *für alle* $y \in J'$ *erfüllt, mit* $H(y_0) = 0$ *(also* $H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}ds$*).*
Dann gibt es ein nichtausgeartetes Intervall $I' \subset I$*, auf dem das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung* φ *besitzt. Es gilt*

$$(*) \qquad H(\varphi(x)) = F(x)$$

für alle $x \in I'$*. Zudem besitzt die Funktion* H *eine Umkehrfunktion, und es ist damit*

$$\varphi(x) = H^{-1}(F(x)) \quad \textit{für alle } \ x \in H(J').$$

Beweis. (i) Angenommen, φ ist eine Lösung des Anfangswertproblems. Dann ist für alle $x \in I'$:

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x).$$

Mit der Substitutionsregel folgt

$$\int\limits_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\, dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt,$$

also

$$H(\varphi(x)) = F(x).$$

Wenn eine Lösung existiert, muss also $(*)$ gelten.

(ii) Weil $\frac{1}{g}$ auf J' sein Vorzeichen nicht wechselt, ist H streng monoton, also umkehrbar. Wir *definieren* nun

$$\varphi(x) := H^{-1}(F(x)).$$

Dann ist $\varphi(x_0) = H^{-1}(0) = y_0$ und (Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion sowie Kettenregel)

$$\varphi'(x) = (H^{-1})'(F(x)) \cdot F'(x) = \frac{1}{H'((H^{-1})(F(x)))} \cdot f(x)$$

$$= \frac{1}{H'(\varphi(x))} \cdot f(x) = g(\varphi(x)) \cdot f(x).$$

□

(4.4) Bemerkungen. a) Man kann zu J' und I' genauere Festlegungen treffen: Setze $J' \subset J$ als das größte Teilintervall von J, das y_0 enthält und in dem g keine Nullstelle besitzt, und I' als das größte Teilintervall von I, dass x_0 enthält und $F(I') \subset H(J)$ erfüllt.

b) Der Satz macht keine Aussage über Anfangswerte (x_0, y_0) mit $g(y_0) = 0$. Für einen solchen Anfangswert ist offensichtlich die konstante Funktion

$$\varphi : I \to \mathbb{R}, \varphi(x) = y_0$$

eine Lösung, aber es kann weitere geben. Man kann jedoch zeigen: Ist g differenzierbar in y_0, so ist diese Lösung die einzige.

(4.5) Beispiele. a) Löse $y' = x^2 \cdot y^2,\ \ y(1) = 1$.
Hier ist $f(x) = x^2, g(y) = y^2$ und $g(y_0) = g(1) \neq 0$. Also

$$F(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 1),$$

$$H(y) = \int_1^y \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{y} + 1.$$

Man hat damit

$$\begin{aligned} H(\varphi(x)) &= F(x) \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{\varphi(x)} + 1 &= \frac{1}{3}(x^3 - 1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\varphi(x)} &= \frac{1}{3}(4 - x^3) \\ \Leftrightarrow \varphi(x) &= \frac{3}{4 - x^3} \end{aligned}$$

Für das (maximale) Existenzintervall findet man hier $I' = (-\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4})$.

b) Löse $y' = y - y^2,\ \ y(0) = 1$.
Nach (4.4) b) ist die konstante Funktion $\varphi = 1$ die einzige Lösung.

c) Löse $y' = y - y^2,\ \ y(0) = \frac{1}{2}$.
Hier ist $F(x) = x$ und

$$H(y) = \int_{\frac{1}{2}}^y \frac{ds}{s(1 - s)}.$$

Eine Stammfunktion $\widetilde{H}$ von $s \to \frac{1}{s(1-s)}$ findet man aus der Zerlegung

$$\frac{1}{s(1 - s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{(1 - s)} \qquad \text{(Nachrechnen!)}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(s) &= \ln s - \ln(1-s) \qquad \text{(siehe (1.8) und (1.12) c))}\\ &= \ln \frac{s}{1-s}.\end{aligned}$$

Also $H(y) = \ln \frac{y}{1-y} - \ln 1 = \ln \frac{y}{1-y}$, und mit (4.3) folgt

$$\begin{aligned}\ln \frac{\varphi(x)}{1-\varphi(x)} &= x\\ \Leftrightarrow \frac{\varphi(x)}{1-\varphi(x)} &= e^x\\ \Leftrightarrow \varphi(x)(1+e^x) &= e^x\\ \Leftrightarrow \varphi(x) &= \frac{e^x}{1+e^x} \left(= \frac{1}{e^{-x}+1}\right)\end{aligned}$$

für alle $x \in I' := \mathbb{R}$.

Ein Spezialfall von (4.3) sollte gesondert erwähnt werden:

(4.6) Satz (Lineare Differentialgleichungen). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtausgeartetes Intervall, $x_0 \in I$ und $a : I \to \mathbb{R}$ stetig.*

a) (Homogene Gleichung). Für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ existiert genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = a(x) \cdot y, \quad y(x_0) = y_0,$$

auf I, nämlich

$$\varphi(x) = y_0 \cdot \exp \int_{x_0}^{x} a(t)dt.$$

b) (Inhomogene Gleichung). Ist weiter $b : I \to \mathbb{R}$ stetig, so besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung auf I, nämlich

$$\psi(x) = \varphi(x) \cdot u(x),$$

wobei

$$\varphi(x) := \exp \int_{x_0}^{x} a(t)dt$$

und

$$u(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}dt$$

für $x \in I$.

Beweis. (Skizze.)
Teil a) folgt mit (4.3) durch Nachrechnen (beachte $g(y) = y, H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s}$).
Für Teil b) liefert der Ansatz

$$\psi(x) = \varphi(x) \cdot u(x) \qquad \text{(„Variation der Konstanten“)}$$

mit $\varphi(x) = \exp \int_{x_0}^{x} a(t)dt$ und noch unbekanntem $u(x)$:

$$\underline{\varphi'(x) \cdot u(x)} + \varphi(x)u'(x) = \psi'(x) = \underline{a \cdot \varphi(x)u(x)} + b(x),$$

die unterstrichenen Terme sind dabei nach Wahl von φ gleich. Also: Wenn

$$u'(x) = \frac{b(x)}{\varphi(x)},$$

dann löst ψ die Gleichung. □

(4.7) Beispiel. Löse: $y' = -y + x, y(0) = 1$. Hier ist $\varphi(x) = e^{-x}$ und weiter

$$u(x) = 1 + \int_0^x \frac{t}{e^{-t}} dt = 1 + \int_0^x t \cdot e^t dt = 2 + (x-1)e^x$$

(Stammfunktion mit partieller Integration; vgl. (1.12) b).)

Kapitel IX.

Funktionen mehrerer Veränderlicher

§1. Erinnerung: Matrizen, Vektoren, lineare Gleichungssysteme

Aus der Veranstaltung „Diskrete Strukturen“ sind Vektoren und Matrizen bekannt. Wir wiederholen kurz einige Begriffe.

- Ein *reeller Vektor* mit b Komponenten ist (für die Zwecke dieses Skripts) ein geordnetes Tupel von n reellen Zahlen; dargestellt wird er als Spalte

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} \quad v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}.$$

  Die Menge aller dieser Vektoren wird mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

- Für Elemente des $\mathbb{R}^n$ ist eine Addition und eine Skalarmultiplikation mit reellen Zahlen „komponentenweise“ definiert:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}; \qquad c \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c \cdot v_1 \\ \vdots \\ c \cdot v_n \end{pmatrix}.$$

- Eine reelle Matrix A mit m Zeilen und n Spalten ist (für die Zwecke dieses Skripts) ein Tupel von $m \times n$ reellen Zahlen a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$, die als „Rechteckschema“ dargestellt wird:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Menge aller Matrizen mit m Zeilen und n Spalten wird mit $\mathbb{R}^{m\times n}$ bezeichnet. Man nennt

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

die k-te Spalte von A; und

$$\begin{pmatrix} a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \end{pmatrix}$$

die l-te Zeile von A.

- Für Elemente von $\mathbb{R}^{m\times n}$ ist eine Addition und eine Skalarmultiplikation „komponentenweise" definiert, analog zu Vektoren.
- Produkt „Matrix $\times$ Vektor":
  Der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und dem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ (wie oben) wird ein „Produkt" in $\mathbb{R}^m$ wie folgt zugeordnet:

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} v_j \end{pmatrix}$$

  (Multiplikationsregel „Zeile mal Spalte".) Beachte: Die Spaltenzahl von A stimmt mit der Komponentenzahl von v überein.
- Allgemeiner lässt sich einem Paar von Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ (mit Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B) das Produkt $A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ zuordnen: Die k-te Spalte von $A \cdot B$ erhält man durch Multiplikation von A mit der k-ten Spalte von B.
- Die *Einsmatrix*

$$E (= E_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

  hat (u.a.) die besondere Eigenschaft, dass

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

  für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
- Man nennt ein $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertierbar*, wenn es ein $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, so dass

$$C \cdot D = E.$$

Falls eine solche Matrix existiert, ist sie durch C eindeutig bestimmt; man schreibt $D = C^{-1}$, und es gilt auch

$$C^{-1} \cdot C = E.$$

C^{-1} heißt die inverse Matrix oder kurz Inverse von C.

- Berechnung von inversen Matrizen:
  Zu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilde die „erweiterte“ Matrix

$$(A|E) \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$$

und führe an dieser (falls möglich) so lange elementare Zeilenumformungen aus, bis eine Gestalt

$$(E|B)$$

entsteht. Dann ist $B = A^{-1}$.
Falls die Ausführung solcher Umformungen nicht möglich ist (dies geschieht genau dann, wenn beim Umformen von A eine Zeile mit Nullen entsteht), so ist A nicht invertierbar.

(1.1) Beispiele. a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann

$$\begin{aligned}(A|E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{Z2-2\cdot Z1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -3 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{Z2\cdot(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} &\xrightarrow{Z1-2\cdot Z2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & | & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ = (E\,|\,B).\end{aligned}$$

Also

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$$

dies lässt sich auch durch Nachrechnen bestätigen.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dann

$$
\begin{aligned}
(A|E) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[Z3-3\cdot Z1]{Z2-2\cdot Z1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & | & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[Z3\cdot(-\frac{1}{5})]{Z2\cdot(-\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & | & \frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Z3-Z2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & * & * & * \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Da links eine Zeile mit lauter Nullen entstanden ist, ist A nicht invertierbar.

(1.2) Bemerkung. Für 2×2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

halten wir noch eine andere Charakterisierung fest:

- A ist invertierbar genau dann, wenn

$$\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

- Es gilt dann

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

  (Das lässt sich direkt nachrechnen!)

Dies ist ein Spezialfall einer Aussage, die sich für beliebige $n \times n$-Matrizen formulieren lässt. (Man nennt $\det A$ die Determinante von A.) Die Formeln werden aber für $n > 2$ komplizierter und für praktische Rechnungen unbrauchbar.
Mehr dazu werden Sie in der Veranstaltung „Lineare Algebra“ erfahren.

§2. Kurven in $\mathbb{R}^n$

Wir führen hier einige Begriffe ein, die später von Nutzen sind, und betrachten Beispiele.

(2.1) Definition. Es sei $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ und I ein nichtausgeartetes Intervall. Weiter seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}$ Funktionen.

a) Dann nennt man

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

eine *Kurve* in $\mathbb{R}^n$.
Man nennt φ *stetig* in $t_0 \in I$, falls $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dies sind. Man nennt φ *stetig* (auf I), falls $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dies sind.

b) Falls $t_0 \in I$ und alle φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ in t_0 differenzierbar sind, so nennt man die Kurve *differenzierbar in* t_0. Falls alle φ_i auf I differenzierbar [bzw. stetig differenzierbar] sind, so nennt man die Kurve differenzierbar [bzw. stetig differenzierbar].

c) Für eine in t_0 differenzierbare Kurve $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ nennt man

$$\varphi'(t_0) := \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_n'(t_0) \end{pmatrix}$$

den *Tangentenvektor* an die Kurve im Punkt $\varphi(t_0)$.

d) Das Bild $\varphi(I) = \{\varphi(t); t \in I\}$ heißt die *Spur* der Kurve φ.

(2.2) Beispiele. a) Parametrisierte Strecken. Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$. Durch

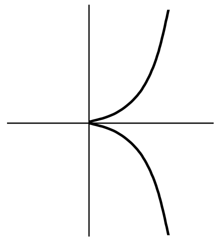
$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto (1-t)u + tv$$

wird eine stetig differenzierbare Kurve gegeben, die *parametrisierte Strecke* von u nach v.

b) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ definiert eine stetig differenzierbare Kurve mit $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$.
Ihre Spur ist gleich der Parabel $\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$; der Tangentenvektor bei t_0 ist gleich $\varphi'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t_0 \end{pmatrix}$; das ist auch der Richtungsvektor der Tangenten an den Graphen der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, wie sie in VII(1.1) definiert wurde.

c) NEILsche Parabel: Durch

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

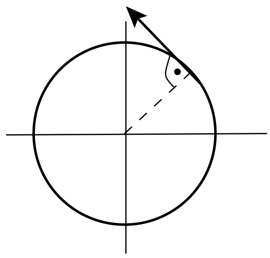


ist eine stetig differenzierbare Kurve gegeben;

es ist $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$. Beachte $\varphi'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; am Punkt $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat die Spur einen „Knick“.

d) Parametrisierung des Kreises:

Durch $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ ist eine stetig differenzierbare Kurve mit $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ gegeben. Ihre Spur ist die Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius 1.



Die Tangente $\varphi'(t_0)$ steht hier in jedem Punkt $\varphi(t_0)$ senkrecht auf dem Ortsvektor des Punktes.

e) Durch

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

(getwistete kubische Parabel) bzw.

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

(Helix) sind zwei stetig differenzierbare Kurven gegeben.

§3. Längenmessung in $\mathbb{R}^n$

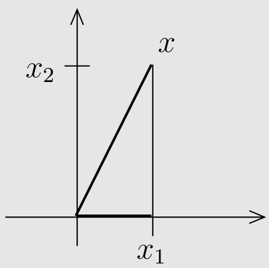
Wir verallgemeinern zunächst den geometrisch motivierten Begriff des Abstands zweier Punkte in Ebene und Raum auf den $\mathbb{R}^n$, für beliebiges n.

(3.1) Definition. Für $x \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

die Euklidische *Norm* (oder der *Betrag*) von x. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ nennt man $\|x - y\|$ den *Abstand* von x und y. (Man schreibt auch $\|x\|_2$ statt $\|x\|$.)

(3.2) Bemerkungen. a) Für $n = 1$ ist dies der übliche Betrag.
Für $n = 2$ ist dies (dank des Satzes von Pythagoras) die übliche Länge eines Vektors in der Koordinatenebene, entsprechend für $n = 3$.



b) Es gibt auch andere Normen auf dem $\mathbb{R}^n$, die für Rechnungen oder theoretische Überlegungen manchmal besser sind. Beispiele sind

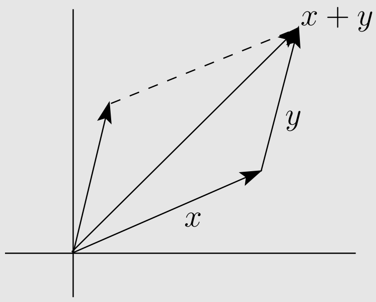
- die *Maximumsnorm* $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$;
- die 1-*Norm* $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

(3.3) Satz. *Für die Norm auf $\mathbb{R}^n$ gelten folgende Eigenschaften:*
(N1) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\| \geqslant 0$. Weiter ist $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
(N2) Für alle $x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ ist

$$\|c \cdot x\| = |c| \cdot \|x\|.$$

(N3) Dreiecksungleichung: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$



Auf einen Beweis verzichten wir hier. Er wird in der Veranstaltung „Lineare Algebra“ gegeben. (Probleme macht nur (N3).) Aus (N3) lässt sich auch die *zweite Dreiecksungleichung* herleiten: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|.$$

Wir wollen nun auch im $\mathbb{R}^n$ Begriffe wie Umgebung, offene Menge etc. einführen.

(3.4) Definition. a) Es sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Dann heißt

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < r\}$$

die *offene Kugel* mit Mittelpunkt a und Radius r.
(Für $n = 1$ ist dies ein Intervall, für $n = 2$ eine Kreisscheibe.)

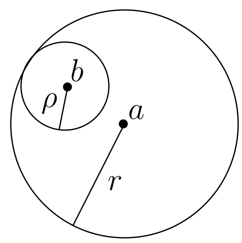
b) Es sei $a \in \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ heißt *Umgebung* von a, wenn ein $r > 0$ existiert, sodass $K_r(a) \subset U$. (Insbesondere ist $a \in U$.)

c) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt $a \in M$ *innerer Punkt von* M, wenn es eine Umgebung U von a gibt, so dass $U \subset M$.

d) $M \subset \mathbb{R}$ heißt *offen*, wenn jeder Punkt von M ein innerer Punkt ist.

(3.5) Beispiel. Die offene Kugel $K_r(a)$ ist offen. Das muss bewiesen werden!
Es sei also $b \in K_r(a)$. Dann ist $\rho := r - \|b - a\| > 0$.
Wir zeigen $K_\rho(b) \subset K_r(a)$.
Für $x \in K_\rho(b)$ ist $\|x - b\| < \rho$, also mit der Dreiecksungleichung (N3):

$$\|x-a\| = \|(x-b)+(b-a)\| \leqslant \|x-b\|+\|b-a\| < \rho+\|b-a\| = r.$$



§4. Stetigkeit

(4.1) Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $a \in M$ und $f : M \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Man nennt f *stetig in* a, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in M$ mit $\|x - a\| < \delta$ gilt

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

f heißt *stetig* (auf M), wenn f in jedem Punkt $a \in M$ stetig ist.

(4.2) Beispiel. Die Abbildung

$$\pi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1$$

(„Projektion auf die erste Koordinate“) ist stetig.
Denn sei $a \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - a\| < \delta := \varepsilon$ ist dann

$$|\pi_1(x) - \pi_1(a)| = |x_1 - a_1| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2} = \|x - a\| < \varepsilon.$$

Ebenso zeigt man, dass die Projektion

$$\pi_k : x \mapsto x_k$$

auf die k-te Koordinate stetig ist.

Für die Praxis nützlich ist folgende Eigenschaft, die wir ohne Beweis angeben.

(4.3) Satz. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}^m$;*

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \qquad (\textit{mit} \quad f_i = \pi_i \circ f : M \to \mathbb{R}).$$

Genau dann ist f stetig in $a \in M$, wenn dies jedes $f_i, 1 \leqslant i \leqslant m$, ist.

Bezüglich Summen und Produkten stetiger Funktionen hat man:

(4.4) Satz. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $M' \subset \mathbb{R}^m$ und $f, g : M \to \mathbb{R}^m, h : M' \to \mathbb{R}^p$ sowie $\varphi : M \to \mathbb{R}$ Abbildungen. Dann gilt:*
a) Sind f, g und φ stetig in $a \in \mathbb{R}^n$, so sind auch $\alpha f + \beta g$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\varphi \cdot f$ und im Fall $\varphi(a) \neq 0$ auch $\frac{1}{\varphi} \cdot f$ stetig in a.
b) Ist f stetig in a und h stetig in $f(a)$ mit $f(M) \subset M'$, so ist $h \circ f : M \to \mathbb{R}^p$ stetig in a.

Ein Beweis soll hier nicht gegeben werden.

Nun diskutieren wir einige

(4.5) Beispiele. a) Ein *Polynom* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine endliche Linearkombination von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \mapsto x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\nu_n} = \pi_1(x)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot \pi_n(x)^{\nu_n}$, $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{N}_0$, also lässt sich p in der Form

$$p(x) = \sum_{\substack{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}_0^n \\ \nu_1+\cdots+\nu_n\leqslant d}} a_{\nu_1,\cdots,\nu_n} x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$$

darstellen, wobei $(\nu_1, \cdots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $d \in \mathbb{N}_0$ geeignet. (Gibt es ein $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\mu_1 + \cdots + \mu_n = d$ und $a_{\mu_1,\ldots,\mu_n} \neq 0$, so heißt d der *Grad* des Polynoms.) Nach (4.2) und (4.4) ist p stetig.
b) Eine *rationale Funktion* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$, ist gegeben durch $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei $P(x), Q(x)$ Polynomfunktionen sind und $Q(x) \neq 0$ für alle $x \in M$. Dann ist f nach a) und (4.4) stetig.
c) Eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist stetig. Um das nachzuweisen, setzt man

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} a_{ij}^2} \quad \text{für } A = (a_{ij}).$$

Es gilt dann

$$\|A \cdot x\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(Dies ist eine Variante der sog. Cauchy-Schwarz-Ungleichung, die in der Veranstaltung „Lineare Algebra“ bewiesen wird. Wir glauben sie hier einfach.)
Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt damit

$$\|A \cdot x - A \cdot y\| = \|A \cdot (x - y)\| \leqslant \|A\| \cdot \|x - y\|.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann folgt $\|Ax - Ay\| < \varepsilon$ für alle x, y mit $\|x - y\| < \delta := \varepsilon/(\|A\| + 1)$.
d) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto e^{x_1+x_2} \cdot \sin x_1 + \ln(1 + (x_1x_2)^2)$ ist nach (4.2) und (4.4) und Kapitel VI stetig.

(4.6) Bemerkung. Zum Nachweis, dass eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ offen ist, hilft oft folgendes Kriterium, das wir ohne Beweis angeben: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, so sind die Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) > 0\}, \\ M_2 &:= \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) < 0\} \quad \text{sowie} \\ M_3 &:= \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \neq 0\} \end{aligned}$$

offen. Zum Beispiel ist also

$$\{x \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + x_2 + x_3 < 1\}$$

offen. (Setze $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1 + x_2 + x_3 - 1$.)

§5. Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Zunächst betrachten wir einen Begriff, der – nach Festlegen einer “Richtung” – Differenzierbarkeit auf den bekannten Fall einer Variablen zurückführt.

(5.1) Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$; weiter $a \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Gibt es ein $\rho > 0$ derart, dass $\{a + tv;\ |t| < \rho\} \subset U$, so definiere (die Kurve)

$$\varphi_{a,v} : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}^m; \quad \varphi_{a,v}(t) := f(a + tv).$$

Wenn dann

$$D_v f(a) := \varphi'_{a,v}(0) \quad \left(= \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h}(f(a + hv) - f(a)) \right)$$

existiert, so heißt dieser Grenzwert die *Richtungsableitung* von f im Punkt a in Richtung v.

(5.2) Beispiele. a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1 e^{x_2} - \sin(x_1^2 x_2^3)$.

- Für $a = \binom{0}{0}$, $v = \binom{1}{2}$ ist $\varphi_{a,v}(t) = f(a + tv) = te^{2t} - \sin(8t^5)$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit
$$\varphi'_{a,v}(t) = e^{2t} + 2te^{2t} - \cos(8t^5) \cdot 40t^4, \quad \varphi'_{a,v}(0) = 1.$$
Also $D_v f\big(\binom{0}{0}\big) = 1$.
- Für beliebiges $a = \binom{a_1}{a_2} \in \mathbb{R}^2$ und $v = e_1 = \binom{1}{0}$ gilt
$$\begin{aligned} \varphi_{a,e_1}(t) &= (a_1 + t)e^{a_2} - \sin\big((a_1 + t)^2 a_2^3\big), \\ \varphi'_{a,e_1}(t) &= e^{a_2} - \cos\big((a_1 + t)^2 a_2^3\big) \cdot 2(a_1 + t)a_2^3, \end{aligned}$$
somit
$$D_{e_1} f(a) = e^{a_2} - 2a_1 a_2^3 \cos(a_1^2 a_2^3).$$
- Für beliebiges $a = \binom{a_1}{a_2} \in \mathbb{R}^2$ und $v = e_2 = \binom{0}{1}$ gilt
$$\begin{aligned} \varphi_{a,e_2}(t) &= a_1 e^{a_2 + t} - \sin\big(a_1^2 (a_2 + t)^3\big), \\ \varphi'_{a,e_2}(t) &= a_1 e^{a_2 + t} - \cos\big(a_1^2 (a_2 + t)^3\big) \cdot a_1^2 \cdot 3(a_2 + t)^2, \end{aligned}$$
somit
$$D_{e_2} f(a) = a_1 e^{a_2} - \cos(a_1^2 a_2^3) \cdot 3a_1^2 a_2^2.$$

b) *Ein seltsames Beispiel:* Setze $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $a = 0$ und $v = e_1$ ist dann $a + tv = \binom{t}{0}$, also $\varphi_{a,e_1}(t) = 0$ für alle t und $D_{e_1} g(0) = 0$. Ebenso berechnet man $D_{e_2} g(0) = 0$.
Diese beiden Richtungsableitungen existieren also, obwohl g in 0 nicht einmal stetig ist.

(5.3) Bemerkung. Betrachtet man nochmal das Beispiel aus (5.2) a), mit

$$f(x) = x_1 e^{x_2} - \sin(x_1^2 x_2^3),$$

so gibt es folgende Alternative zur Berechnung der Richtungsableitungen mit $v = e_1$ bzw. $v = e_2$ bei $a \in \mathbb{R}^2$:

- Für festen „Parameter“ x_2 leite die Funktion

  $$x_1 \mapsto x_1 e^{x_2} - \sin(x_1^2 x_2^3)$$

  der Variablen x_1 ab (Ergebnis $e^{x_2} - \cos(x_1^2 x_2^3) \cdot 2x_1 x_2^3$) und ersetze x durch a. Dies liefert $D_{e_1} f(a)$.

- Für festen „Parameter“ x_1 leite die Funktion

  $$x_2 \mapsto x_1 e^{x_2} - \sin(x_1^2 x_2^3)$$

  der Variablen x_2 ab (Ergebnis $x_1 e^{x_2} - \cos(x_1^2 x_2^3) \cdot 3x_1^2 x_2^2$) und ersetze x durch a. Dies liefert $D_{e_2} f(a)$.

Dahinter steckt ein allgemeines Prinzip, auf das wir gleich zurückkommen.

Im Folgenden sei stets

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$. Man nennt nun die Richtungsableitung in Richtung e_k auch die *partielle Ableitung* bezüglich der Variablen x_k. Genauer:

(5.4) Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a = (a_1, \ldots, a_n)^{tr} \in U$ und $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.
a) F heißt in a *partiell differenzierbar bezüglich der k-ten Koordinate*, wenn $1 \leqslant k \leqslant n$ und

$$\begin{aligned} D_k F(a) :&= \frac{\partial F}{\partial x_k}(a) := D_{e_k} F(a) \\ &= \lim_{x \to a_k} \frac{1}{x - a_k} \left[F((a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n)^{tr}) - F(a) \right] \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (F(a + te_k) - F(a)) \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

existiert.
b) $F : U \to \mathbb{R}^m$ heißt *partiell differenzierbar*, wenn $D_kF(a)$ für alle $a \in U$ und alle $k = 1, \dots, n$ existiert. Die $D_kF : U \to \mathbb{R}^m$ nennt man die *partiellen Ableitungen* (oder die *partiellen Ableitungsfunktionen*) von F. Existieren alle partiellen Ableitungen auf U, so setzt man

$$DF(x) := (D_1F(x), \dots, D_nF(x)) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

für $x \in U$. Man nennt $DF(x)$ auch *Funktionalmatrix*, oder *Jacobi-Matrix*, oder *Differential* von F an der Stelle x.
c) $F : U \to \mathbb{R}^m$ heißt *stetig partiell differenzierbar*, wenn F partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen $D_kF : U \to \mathbb{R}^m$ für $k = 1, \dots, n$ stetig sind.

Im Fall $n = m = 1$ stimmt der Begriff der partiellen Differenzierbarkeit also mit dem Differenzierbarkeitsbegriff einer Variablen überein. Wir halten noch eine Beobachtung fest, die direkt aus (5.1) folgt.

(5.5) Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a = (a_1, \dots, a_n)^{tr} \in U$, $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $F = (F_1, \dots, F_m)^{tr}$ und den Komponentenfunktionen $F_j : U \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, sowie $g : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $1 \leqslant k \leqslant n$.*
a) Die Funktion F ist genau dann in a bezüglich der k-ten Koordinate partiell differenzierbar, wenn jedes $F_j : U \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, in a bezüglich der k-ten Koordinate partiell differenzierbar ist. Dann gilt

$$D_kF(a) = (D_kF_1(a), \dots, D_kF_m(a))^{tr}.$$

b) Sei $\delta > 0$ und $\{a + te_k; |t| < \delta\} \subset U$. In diesem Fall ist g genau dann in a bezüglich der k-ten Koordinate partiell differenzierbar, wenn die Funktion

$$\varphi_k : (a_k - \delta, a_k + \delta) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto g((a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n)^{tr}),$$

in a_k differenzierbar ist. Dann gilt

$$D_kg(a) = \varphi_k'(a_k).$$

(5.6) Bemerkung. a) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in U$, so gilt für $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$D_{e_i}f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)\Big),$$

und dieser Grenzwert ist (nach bekannten Definitionen) genau die Ableitung der Funktion $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ einer Variablen x_i mit Parametern

$x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Dies war das „Rezept“ aus Bemerkung (5.3); es ist also allgemein gültig.

b) Gilt $F : U \to \mathbb{R}$ (also $m = 1$) und $a \in U$, so nennt man die Transponierte der Jacobi-Matrix $DF(a) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ auch den *Gradienten* von F in a; Bezeichnung

$$\nabla F(a) = DF(a)^{tr} = (D_1F(a), \dots, D_nF(a))^{tr}.$$

Betrachten wir noch weitere

(5.7) Beispiele. a) Sei $U = \{x \in \mathbb{R}^2;\ x_1 > 0\}$ und

$$g : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x_1 + x_2^2) + \ln(x_1 + \sin^2(x_1 - x_2)).$$

Dann

- (Halte x_2 fest):

$$D_1g(x) = \exp(x_1 + x_2^2) + \frac{1 + 2\sin(x_1 - x_2)\cos(x_1 - x_2)}{x_1 + \sin^2(x_1 - x_2)}$$

  sowie

- (Halte x_1 fest):

$$D_2g(x) = \exp(x_1 + x_2^2) \cdot 2x_2 + \frac{2\sin(x_1 - x_2)\cos(x_1 - x_2) \cdot (-1)}{x_1 + \sin^2(x_1 - x_2)}.$$

b) Wir betrachten

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\sin x)e^y \\ y^2z + z^2x \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der partiellen Ableitung nach x behandle y und z als konstante Parameter. Also

$$D_1F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos x)e^y \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

Analog ergibt die Berechnung der partiellen Ableitungen noch y bzw. z:

$$D_2F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sin x)e^y \\ 2yz \end{pmatrix}, \quad D_3F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 + 2zx \end{pmatrix}.$$

c) Nun untersuchen wir

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Für $1 \leqslant k \leqslant n$ und $x \neq 0$ gilt

$$D_k f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{-1/2} \cdot 2x_k = \frac{x_k}{\|x\|},$$

also auch

$$Df(x) = \frac{1}{\|x\|} x^t \quad \text{für } \; x \neq 0.$$

Aber f ist in $x = 0$ nicht partiell differenzierbar, denn es gilt für $t \neq 0$

$$\frac{f(te_k) - f(0)}{t} = \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \frac{|t|}{t}.$$

d) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ 0, & \text{falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

ist nicht stetig in $\binom{0}{0}$, da für alle $r \neq 0$ gilt

$$f\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,;$$

zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es also kein $\delta > 0$ so, dass $\left| f\binom{x}{y} - f\binom{0}{0} \right| < \frac{1}{2}$ für alle $\binom{x}{y}$ mit $\|\binom{x}{y}\| < \delta$. f ist aber in $\binom{0}{0}$ partiell differenzierbar mit

$$D_1 f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[f\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

und (analog)

$$D_2 f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Das letzte Beispiel zeigt, dass partielle Differenzierbarkeit (ohne weitere Eigenschaften) nicht „schön genug“ ist. Wir führen deshalb einen weiteren Begriff ein, die totale Differenzierbarkeit. Dieser bringt die Abhängigkeit von mehreren Variablen deutlicher zum Vorschein.

(5.8) Definition. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. F heißt *total differenzierbar* in a, wenn es eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und eine in a stetige Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$F(x) = F(a) + T \cdot (x - a) + \|x - a\| \cdot \varphi(x), \quad x \in U, \quad \varphi(a) = 0.$$

F heißt *total differenzierbar*, wenn F in allen Punkten $a \in U$ total differenzierbar ist.

Anders formuliert: F ist genau dann in a total differenzierbar, wenn es ein $T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gibt derart, dass

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\|x-a\|}\big(F(x)-F(a)-T(x-a)\big)=0.$$

Den Zusammenhang zwischen den Begriffen erläutert:

(5.9) Satz. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $F : U \to \mathbb{R}^m$.*
a) Es sei F total differenzierbar in a, also

$$F(x) = F(a) + T\cdot(x-a) + \|x-a\|\cdot\varphi(x), \quad \varphi(a)=0,$$

mit einer Matrix $T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und einer in a stetigen Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$. Dann ist F in a partiell differenzierbar. T ist eindeutig bestimmt und es gilt

$$T = (DF)(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1\leqslant i\leqslant m;1\leqslant j\leqslant n}.$$

b) Sei $F : U \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar sowie in a stetig partiell differenzierbar. Dann ist F in a total differenzierbar und insbesondere auch stetig.

Wir halten noch die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher fest:

(5.10) Satz. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar in $a \in U$ mit $F(U) \subset V$ sowie $G : V \to \mathbb{R}^p$ total differenzierbar in $b = F(a)$. Dann ist $H := G \circ F : U \to \mathbb{R}^p$ total differenzierbar in a mit*

$$(D(G\circ F))(a) = (DG)(F(a))\cdot(DF)(a),$$

d. h.

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G_i}{\partial y_k}(F(a))\cdot\frac{\partial F_k}{\partial x_j}(a), \quad 1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant n.$$

Wir wollen nun auf die Frage der Umkehrbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher eingehen. Dabei setzen wir stetige Differenzierbarkeit voraus. (Anderenfalls werden die Aussagen zu kompliziert.) Zunächst zur Orientierung:

(5.11) Bemerkung. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig differenzierbar mit $F(U) =: \widetilde{U}$ offen, und $H := F^{-1}$ sei differenzierbar auf $\widetilde{U}$. Dann gilt für alle $y \in \widetilde{U}$

$$DF(H(y))DH(y) = E_n \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Insbesondere ist $DF(H(y))$ invertierbar und

$$DH(y) = DF(H(y))^{-1}.$$

Wir kommen nun zum grundlegenden Ergebnis, das wir ohne Beweis angeben.

(5.12) Satz. *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : M \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $a \in M$, so dass $DF(a) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar ist. Dann existieren offene Teilmengen $U \subset M, a \in U$ und $V \subset f(M)$ mit $b := F(a) \in V$, so dass*

$$F\big|_U : U \to V$$

bijektiv ist und $DF(x)$ invertierbar ist für alle $x \in U$, und dass die Umkehrabbildung $H := \big(F\big|_U\big)^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar ist mit

$$(DH)(y) = (DF)(H(y))^{-1} \quad \textit{bzw.} \quad DH(F(x)) = DF(x)^{-1}.$$

Wir betrachten ein einfaches

(5.13) Beispiel. Gegeben ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\binom{x}{y} \mapsto \binom{x\cos y}{x \sin y}$. Offensichtlich ist F stetig differenzierbar mit

$$DF\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$$

und

$$\det DF\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x(\cos^2 y + \sin^2 y) = x$$

(vgl. (1.2)). Also ist $F\binom{a}{b}$ invertierbar für jedes $\binom{a}{b}$ mit $a \neq 0$. Nach Satz (5.12) existiert somit in einer Umgebung von $\binom{a}{b}$ eine Umkehrfunktion H von F; es gilt

$$DH\left(F\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = DF\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} a\cos b & a\sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

Im nächsten zentralen Satz geht es um eine Parametrisierung der Lösungsmenge einer Gleichung $F(x) = 0$.

(5.14) Satz über implizite Funktionen. *Seien $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ offen und*

$$F = (F_1, \ldots, F_n)^{tr} : M \to \mathbb{R}^n$$

stetig differenzierbar. Seien $z = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^{m+n}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $c = \binom{a}{b} \in M$, $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$F(c) = 0 \quad \textit{und} \quad (D_yF)(c) \quad \textit{invertierbar},$$

wobei $(D_yF)(z) := ((D_{m+1}F)(z), \ldots, (D_{m+n}F)(z)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann lässt sich die Gleichung

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

in einer Umgebung von c eindeutig nach y auflösen, d. h., es gibt Umgebungen U von a in $\mathbb{R}^m$ und V von b in $\mathbb{R}^n$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g: U \to V$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $U \times V := \{\binom{x}{y};\ x \in U,\ y \in V\} \subset M$.

(ii) $F\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} = 0$ *für alle* $x \in U$.

(iii) Aus $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U \times V$ *mit* $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ *folgt* $y = g(x)$.

(iv) $(Dg)(x) = -\left[(D_yF)\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}\right]^{-1}\left[(D_xF)\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}\right]$ *für alle* $x \in U$*, wobei*

$$(D_xF)(z) = ((D_1F)(z), \ldots, (D_mF)(z)) \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Insbesondere gilt

$$(Dg)(a) = -[(D_yF)(c)]^{-1}[(D_xF)(c)].$$

Wir illustrieren die Aussage an zwei Beispielen.

(5.15) Beispiele. a) Betrachte $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\binom{x}{y} \mapsto x^2 + xy + y^2 - 1$. Dann ist

$$D_xF = 2x + y, \quad D_yF = x + 2y.$$

Um (5.14) bei $c = \binom{a}{b}$ anwenden zu können, benötigen wir $D_yF(c) \neq 0$, also $a + 2b \neq 0$. Wähle $c = \binom{0}{1}$. Unter dieser Voraussetzung haben wir $F(c) = 0$ und in einer Umgebung U von $a = 0$ eine Auflösung, d. h. es gibt eine Funktion $g: U \to \mathbb{R}$ so, dass

$$F(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = g(x)$$

in einer Umgebung von c. Weiter gilt

$$g'(x) = -\frac{D_xF(x, g(x))}{D_yF(x, g(x))} = -\frac{2x + g(x)}{x + 2g(x)}$$

und speziell $g'(0) = -\frac{1}{2}$.
In diesem Beispiel könnte man mit der *pq*-Formel auch eine explizite Auflösung finden:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= y^2 + x \cdot y + (x^2 - 1) = 0 \\ &\Rightarrow y = g(x) = \frac{1}{2}\left(-x + \sqrt{x^2 - 4(x^2 - 1)}\right). \end{aligned}$$

(Wegen $g(0) = 1$ kommt nur „$+\sqrt{\cdots}$“ in Frage).

Die Verwendung von (5.14) spart aber hier Rechenarbeit (zur Bestätigung bitte $g'(0)$ direkt ausrechnen), und allgemein ist (5.14) auch dann verwendbar, wenn es keine explizite Auflösung gibt.

b) Betrachte die stetig differenzierbare Funktion

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (e^{x_1} \sin x_2 + e^{x_2} \sin x_3 + e^{x_3} \sin x_1)\,,$$

mit

$$DF(x) = (e^{x_1} \sin x_2 + e^{x_3} \cos x_1, e^{x_1} \cos x_2 + e^{x_2} \sin x_3, e^{x_2} \cos x_3 + e^{x_3} \sin x_1)\,.$$

Dann ist $F(0) = 0$ und

$$DF(0) = (1, 1, 1).$$

Da die partielle Ableitung nach x_3 in $c = 0$ invertierbar ist, hat man in einer Nullumgebung eine Auflösung $F(x) = 0 \Leftrightarrow x_3 = g(x_1, x_2)$ mit einer differenzierbaren Funktion zweier Variablen. Es ist

$$Dg(x_1, x_2) = -D_3F(x_1, x_2, g(x_1, x_2))^{-1} \cdot \big(D_1F(\cdots), D_2F(\cdots)\big),$$

speziell

$$Dg(0, 0) = (-1) \cdot (1, 1) = (-1, -1).$$

§6. Gewöhnliche Differentialgleichungen: Existenz und Eindeutigkeit

Einige (einfache) Typen von gewöhnlichen Differentialgleichungen wurden schon in Kapitel VIII, §4 betrachtet. Hier wollen wir den allgemeinen Fall betrachten. Dabei interessiert zunächst weniger die Frage, wie man Lösungen „ausrechnet", sondern die Frage, was Lösungen sind, ob es Lösungen gibt und was man über sie sagen kann.

(6.1) Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto f(x, y)$ (wobei $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n$) eine stetige Funktion. Dann heißt

$$y' = f(x, y)$$

ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. (Für $n = 1$ spricht man natürlich von einer Differentialgleichung erster Ordnung.)
Eine Lösung dieser Gleichung ist eine Kurve $\phi : I \to \mathbb{R}^n$, die auf einem nichtausgearteten Intervall I definiert ist und Folgendes erfüllt:

(i) ϕ ist differenzierbar.

(ii) Für alle $x \in I$ ist $(x, \phi(x)) \in D$.

(iii) Für alle $x \in I$ ist $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$.

Falls $(x_0, y_0) \in D$ und $\phi(x_0) = y_0$, so nennt man ϕ eine Lösung des *Anfangswertproblems*

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

(6.2) Beispiele. a) $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = xy + y^2$.
Dies ist eine sog. Bernoulli-Differentialgleichung, die sich auf eine lineare Differentialgleichung zurückführen lässt.

b) $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot y$.
Man nennt dies eine autonome lineare Differentialgleichung; sie lässt sich mit Hilfsmitteln aus der Linearen Algebra lösen.

c) $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin y_1 \end{pmatrix}$.
Dies ist die Differentialgleichung des Fadenpendels.

d) $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2$.
Es ist keine „Lösungsformel“ für diese Gleichung bekannt.

e) $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, und (mit positiven Parametern σ, ρ, β):

$$y_1' = \sigma(y_2 - y_1)$$

$$y_2' = \rho y_1 - y_2 - y_1 y_3$$

$$y_3' = y_1 y_2 - \beta y_3$$

Diese autonome Differentialgleichung heißt *Lorenz-Gleichung*; sie wurde als ein Wettermodell vorgeschlagen. Für gewisse Parameterbereiche zeigen die Lösungen ein sehr „wildes“ Verhalten; man spricht von Chaos. („Lösungsformeln“ existieren für diese Gleichung nicht.)

Das Fundament zur Untersuchung von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist die folgende Aussage:

(6.3) Satz. *Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig. Wenn außerdem alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$, auf D existieren und stetig sind, dann besitzt jedes Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ mit $(x_0, y_0) \in D$ eine eindeutige Lösung auf einem geeigneten (von (x_0, y_0) abhängigen) Intervall I.*

Der Beweis dieses Satzes liegt jenseits unserer Möglichkeiten. Aber er ist sehr bequem in der Anwendung:

Für alle Beispiele in (6.2) sind seine Voraussetzungen erfüllt, wie man leicht nachprüft, und somit alle Anfangswertprobleme eindeutig lösbar.

Solche Existenz- und Eindeutigkeitssätze bilden auch ein Fundament für numerische Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Lösungen.

Symbolverzeichnis

Index