Construcción Matemática

Modelación Matemática

Definición: Modelo

```
Representación simplificada de la realidad.

Ejemplos:
- Mapas
- Pinturas
```

Definición: Modelo Matemático

```
Representación de un objeto o fenómeno utilizando un lenguaje simplificado (matemático).

Características:
- Identificación del problema.
- Formulación de un objetivo.
- Determinación de las herramientas matemáticas para resolverlo.
- Validación y verificación del modelo.
```

Tipos de modelos

Clasificación de los modelos matemáticos

- Estáticos $\longrightarrow$ Cantidades que no cambian (Determinista)
- Dinámicos $\longrightarrow$ Cantidades que cambian (Probabilista)

¿Cuál sería el mejor modelo?

Aquel modelo más simple posible que reproduzca los resultados.

Modelación y Simulación

- Definición del problema que será resuelto.
- Definición del sistemma (parte de la "realidad") qué está involucrado en el problema.

Análisis del sistema

- Identificación de las partes del sistema que son relevantes para resolver el problema.

Simulación

- Aplicación del modelo en cuestión.
- Elaboración de una estrategia para resolver el problema.

Validación

- Hacemos las siguientes preguntas.
  - ¿La simulación resuelve el problema?
  - ¿Reproduce alguna parte de la realidad?
  - ¿El modelo reproduce los resultados del sistema?

Definición: Simmulación

`Es la aplicación del modelo con el objetivo de comparar sus resultados o predicaciones con e`

Definición: Sistema

`El objeto o conjunto de ojetos que queremos estudiar.`

Sistema de Entrada-Salida

$$\text{Entrada} \longrightarrow \text{Sistema} \longrightarrow \text{Salida}$$

Definición: Modelo matemático

`Un modelo matemático es una tupla (S, Q, M), donde S es un sistemma, Q es una pregunta o cue`

Ecuaciones diferenciales

P: número de habitantes (Miles o Millones).

t: Tiempo (Años).

$\frac{dP}{dt}$: Razón de cambio, velocidad de crecimiento.

$P(t)$: Número de habitanntes en el tiempo t.

$P(2) = 30$: "Pasados dos años hay treinta mil habitantes".

$P'(5) = 6$: "Al quinto año, la velocidad de crecimiento es de seis mil habitantes por año ($6\frac{hab}{año}$)".

Esa información la da el experimento

Decimos que A es directamente proporcional a B si y solo si $A \propto B$, $A = KB$.

$$\frac{dP}{dt} = kP(t) \text{ Ecuación diferencial ordinaria separable}$$

Decimos que A es inverdamente proporcional a B si y solo si $A = \frac{k}{B}$.

Diferencias entre dy, dx y Δy, Δx

Aproximación	Cambios (Valores exactos)
dy, dx	Δy, Δx

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ pendiente}$$

A estos los une un límite

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Definición:

`Una ecuación diferencial ordinaria de dice separable si tiene la forma de.`

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Ordinarias:

`"Solo hay una variable independiente".`

Definición: Orden de una EDO

`Es el orden de la derivada mayor.`

Definición: Grado de una EDO

`Es la potenciaque tenga la derivada de mayor orden.`

Una EDO lineal de orden n se escribe como:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Solución a una EDO de orden y grado uno

Sea $a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$, procedemos a anular el coeficiente a_1.

$$\frac{a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)}{a_1(x)}$$

$$y' + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

$$y' + P(x)y = Q(x)...(1)$$

Ahora multiplicamos por el factor integrante $\mu(x)$

$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)...(2)$$

Buscamos que

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right) = \mu(x)y' + \mu(x)'y$$

Sumamos y restamos $\mu(x)'y$ en la ecuación (2)

$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y + \mu(x)'y - \mu(x)'y = \mu(x)Q(x)$$

$$\mu(x)P(x)y - \mu(x)'y = 0$$

$$y(\mu(x)P(x) - \mu(x)') = 0$$

$$\mu(x)P(x) - \mu(x)' = 0 \text{ Pues } y \text{ no puede ser } 0$$

$$\mu(x)P(x) - \frac{d\mu}{dx} = 0$$

$$\mu(x)P(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

$$P(x)dx = \frac{d\mu}{\mu(x)}$$

Integramos

$$\int P(x)dx = ln(\mu(x))$$

$$exp\left(\int P(x)dx\right) = \mu(x)$$

Por lo tanto

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Luego

$$(\mu(x)y)' = Q(x)\mu(x)$$

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = Q(x)\mu(x)$$

$$yd\mu(x) = Q(x)\mu(x)dx$$

Integramos

$$y\int d\mu(x) = \int Q(x)\mu(x)dx$$

Por lo tanto

$$y = \frac{\int Q(x)\mu(x)dx}{\mu(x)}$$

$$y = \frac{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}{e^{\int P(x)dx}}$$