Construcción Matemática

Modelación Matemática

> Definición: Modelo

```
Representación simplificada de la realidad.

Ejemplos:
- Mapas
- Pinturas
```

> Definición: Modelo Matemático

```
Representación de un objeto o fenómeno utilizando un lenguaje simplificado
(matemático).

Características:
- Identificación del problema.
- Formulación de un objetivo.
- Determinación de las herramientas matemáticas para resolverlo.
- Validación y verificación del modelo.
```

Tipos de modelos

Clasificación de los modelos matemáticos

- Estáticos $\longrightarrow$ Cantidades que no cambian (Determinista)
- Dinámicos $\longrightarrow$ Cantidades que cambian (Probabilista)

¿Cuál sería el mejor modelo?

Aquel modelo más simple posible que reproduzca los resultados.

Modelación y Simulación

- Definición del problema que será resuelto.
- Definición del sistemma (parte de la "realidad") qué está involucrado en el problema.

Análisis del sistema

- Identificación de las partes del sistema que son relevantes para resolver el problema.

Simulación

- Aplicación del modelo en cuestión.

- Elaboración de una estrategia para resolver el problema.

Validación

- Hacemos las siguientes preguntas.
    - ¿La simulación resuelve el problema?
    - ¿Reproduce alguna parte de la realidad?
    - ¿El modelo reproduce los resultados del sistema?

> Definición: Simmulación

```
Es la aplicación del modelo con el objetivo de comparar sus resultados o
predicaciones con el fenómeno en cuestión.
```

> Definición: Sistema

```
El objeto o conjunto de ojetos que queremos estudiar.
```

Sistema de Entrada-Salida

$$\text{Entrada}\longrightarrow\text{Sistema}\longrightarrow\text{Salida}$$

> Definición: Modelo matemático

```
Un modelo matemático es una tupla (S, Q, M), donde S es un sistemma, Q es
una pregunta o cuestión que se hace acerca del sistema S, y M es un
conjunto de formulas matemáticas que se usan para responder a Q.
```

Ecuaciones diferenciales

P: número de habitantes (Miles o Millones).

t: Tiempo (Años).

$\frac{dP}{dt}$: Razón de cambio, velocidad de crecimiento.

$P(t)$: Número de habitanntes en el tiempo t.

$P(2)=30$: "Pasados dos años hay treinta mil habitantes".

$P'(5)=6$: "Al quinto año, la velocidad de crecimiento es de seis mil habitantes por año ($6\frac{hab}{año}$)".

Esa información la da el experimento

Decimos que A es directamente proporcional a B si y solo si $A\propto B$, $A=KB$.

$$\frac{dP}{dt}=kP(t) \text{ Ecuación diferencial ordinaria separable}$$

Decimos que A es inverdamente proporcional a B si y solo si $A=\frac{k}{B}$.

Diferencias entre $dy,:dx$ y $\Delta y,:\Delta x$

Aproximación	Cambios (Valores exactos)
$dy,:dx$	$\Delta y,:\Delta x$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\text{ pendiente}$$

A estos los une un límite

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to0}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

> Definición:

```
Una ecuación diferencial ordinaria de dice separable si tiene la forma de.
```

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$ $$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

Teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

> Ordinarias:

```
"Solo hay una variable independiente".
```

> Definición: Orden de una EDO

```
Es el orden de la derivada mayor.
```

> Definición: Grado de una EDO

```
Es la potenciaque tenga la derivada de mayor orden.
```

Una EDO lineal de orden n se escribe como: $$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dotsb+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Solución a una EDO de orden y grado uno

Sea $a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$, procedemos a anular el coeficiente a_1.

$$\frac{a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)}{a_1(x)}$$ $$y'+\frac{a_0(x)}{a_1(x)}y=\frac{g(x)}{a_1(x)}$$ $$y'+P(x)y=Q(x) \text{...(1)}$$

Ahora multiplicamos por el factor integrante $\mu(x)$ $$\mu(x)y'+\mu(x)P(x)y=\mu(x)Q(x) \text{...(2)}$$ Buscamos que $$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right)=\mu(x)y'+\mu(x)'y$$ Sumamos y restamos $\mu(x)'y$ en la ecuación (2) $$\mu(x)y'+\mu(x)P(x)y+\mu(x)'y-\mu(x)'y=\mu(x)Q(x)$$ $$\mu(x)P(x)y-\mu(x)'y=0$$ $$y(\mu(x)P(x)-\mu(x)')=0$$ $$\mu(x)P(x)-\mu(x)'=0\text{ Pues y no puede ser 0}$$ $$\mu(x)P(x)-\frac{d\mu}{dx}=0$$ $$\mu(x)P(x)=\frac{d\mu}{dx}$$ $$P(x)dx=\frac{d\mu}{\mu(x)}$$ Integramos $$\int{P(x)dx}=ln(\mu(x))$$ $$exp\left(\int{P(x)dx}\right)=\mu(x)$$ Por lo tanto $$\mu(x)=e^{\int{P(x)dx}}$$ Luego $$(\mu(x)y)'=Q(x)\mu(x)$$ $$\frac{d(\mu(x)y)}{dx}=Q(x)\mu(x)$$ $$yd\mu(x)=Q(x)\mu(x)dx$$ Integramos $$y\int{d\mu(x)}=\int{Q(x)\mu(x)dx}$$ Por lo tanto $$y=\frac{\int{Q(x)\mu(x)dx}}{\mu(x)}$$ $$y=\frac{\int{Q(x)e^{\int{P(x)dx}}dx}}{e^{\int{P(x)dx}}}$$