



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas Algorítmicas



Teoría de Grafos

Porfirio Damián Escamilla Huerta



Teoría de Grafos

Porfirio Damián Escamilla Huerta

Agosto 2022

Índice

1. Nociones de combinatoria	4
1.1. Algunas definiciones básicas	4
1.2. Principio de Inclusión-Exclusión	4
1.3. Conjunto potencia	6
1.4. Permutaciones	7
1.5. Coeficiente binomial	7
1.5.1. Propiedades del coeficiente binomial	8
1.5.2. Pascal	8
1.6. Principio de Dirichlet (del palomar, de las cajas o de las pichoneras)	8

1. Nociones de combinatoria

1.1. Algunas definiciones básicas

Definición 1.1: Conjunto finito

Un conjunto X es finito si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que hay una función biyectiva $f : x \mapsto [n]$ o bien $x = \emptyset$

Definición 1.2: Cardinalidad

Si X es finito, definimos

$$|X| = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \emptyset. \\ \text{Único } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \exists f : x \mapsto [n] \text{ biyectiva.} \end{cases}$$

Teorema 1.1

Si X y Y son conjuntos disjuntos, con $|X| = n$ y $|Y| = m$, entonces $|X \cup Y| = n + m$.

Demostración

Sean $f : x \mapsto [n]$ y $g : x \mapsto [m]$ ambas biyectivas, y sea $h : (X \cup Y) \mapsto [n + m]$ definida por

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in X. \\ n + g(a) & \text{si } a \in Y. \end{cases}$$

TERMINAR...

Corolario 1.1

Si X_1, \dots, X_n son conjuntos finitos disjuntos por pares, entonces

$$\left| \bigcup_{i=1}^n X_i \right| = \sum_{i=1}^n |X_i|$$

Demostración

Por inducción sobre n .

Para $n = 1$ obvio.

Para $n = 2$ Es la proposición anterior.

Supongamos que se cumple para n ; y sean X_1, \dots, X_n, X_{n+1} conjuntos disjuntos por pares. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i \right| &= \left| \bigcup_{i=1}^n X_i \cup X_{n+1} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n |X_i| + |X_{n+1}| \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} |X_i| \end{aligned}$$

□

1.2. Principio de Inclusión-Exclusión

Teorema 1.2: Principio de inclusión-exclusión

Sean A y B conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Demostración

Los conjuntos $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$, son disjuntos por pares y $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, entonces

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)| \\ &= |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| \\ &= |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| + |A \cap B| - |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3: Principio de inclusión-exclusión generalizado

Sea A_1, \dots, A_n conjuntos finitos. Entonces:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \dots \\ &\quad + (-1)^n \sum_{i_1 < \dots < i_{n-1}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{n-1}}| + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

Demostración I

Inducción sobre n .

Para $n=1$ obvio.

Para $n=2$ Principio de inclusión-exclusión simple.

Supongamos que el enunciado es cierto para n , y sean A_1, \dots, A_n, A_{n+1} conjuntos finitos, entonces

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| &= |(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}| \\ &= |A_1 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \\ &= |A_1 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \dots \\ &\quad + (-1)^n \sum_{i_1 < \dots < i_{n-1}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{n-1}}| + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| \\ &\quad + |A_{n+1}| - \left(\sum_{i=1}^n |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{i < j \leq n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})| + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \sum_{i_1 < \dots < i_{n-1}} |(A_{i_1} \cap A_{n+1}) \cap \dots \cap (A_{i_{n-1}} \cap A_{n+1})| + |(A_1 \cap A_{n+1}) \cap \dots \cap (A_n \cap A_{n+1})| \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{i < j \leq n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k \leq n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < \dots < i_n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}| + (-1)^{n+2} |A_1 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

□

1.3. Conjunto potencia

Teorema 1.4

Si A y B son conjuntos finitos, entonces

$$|A \times B| = |A||B|$$

Demostración

Sea $n = |A|$, $m = |B|$ y $f : A \mapsto [[n]]$, $g : B \mapsto [[m]]$ funciones biyectivas. Sea

$$\begin{aligned} h : (A \times B) &\mapsto [[nm]] \\ (a, b) &\longrightarrow f(a) + (g(b) - 1)n \end{aligned}$$

TERMINAR...

Corolario 1.2

Si A_1, \dots, A_n son conjuntos finitos, entonces

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|$$

Demostración

Por inducción sobre n Para $n = 1$ fácil. Para $n = 2$ es el teorema anterior. Supongamos para n y sean A_1, \dots, A_n, A_{n+1} conjuntos finitos, entonces

$$\begin{aligned} |A_1 \times \dots \times A_n \times A_{n+1}| &= |(A_1 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}| \\ &= |(A_1 \times \dots \times A_n)| |A_{n+1}| \\ &= \prod_{i=1}^n |A_i| |A_{n+1}| \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} |A_i| \end{aligned}$$

□

Definición 1.3: Conjunto potencia

Sea A un conjunto $\wp(A) = \{x | x \subseteq A\}$

Teorema 1.5

Sea A un conjunto finito, entonces

$$|\wp(A)| = 2^{|A|}$$

Demostración

Supongamos que $|A| = n$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, Notemos que la función

$$f : (\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}) \mapsto \wp(A)$$

es biyectiva. Por lo tanto

$$|\wp(A)| = |\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}| = 2^n$$

□

1.4. Permutaciones

Definición 1.4: Permutación

Sea A un conjunto finito tal que $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$S_A = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_j}, \dots, a_{i_n}) | i_j \neq i_k \text{ si } j \neq k\}$$

Teorema 1.6

Si A es un conjunto finito y $|A| = n$, entonces $|S_A| = n!$

Demostración

Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, procedamos por inducción sobre n . Nuestra base de inducción es $|S_0| = |S_1| = 1$. Ahora, supongamos que para S_n se cumple $|S_n| = n!$. S_{n+1} tiene posiciones $n+1$, por lo que hay $n+1$ nuevas posibilidades, entonces

$$|S_{n+1}| = n+1 |S_n| = (n+1)!$$

1.5. Coeficiente binomial

Definición 1.5: Coeficiente binomial

Dados $K, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $k \leq n$, se define

$$\binom{n}{k} = |\{x \in \wp(A) | |x| = k\}| \text{ donde } |A| = n$$

Teorema 1.7

El número de k combinaciones en n objetos es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Demostración

TERMINAR

Teorema 1.8: Teorema del binomio (Binomio de Newton)

Para cualesquiera números a y b , y para cualquier número natural n , tenemos

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Un caso especial de esto es

$$(1+a)^n = \sum_{i=0}^n a^i$$

Demostración

Corolario 1.3

Para cualquier número natural n , tenemos

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

1.5.1. Propiedades del coeficiente binomial

Propiedad 1.1: (a)

$$\binom{n}{0} = 1$$

Demostración (a)

Propiedad 1.2: (b)

$$\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$$

Demostración (b)

Propiedad 1.3: (c)

$$\binom{n}{2} = 1 + 2 + \cdots + n$$

Demostración (c)

Propiedad 1.4: (d)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Demostración (d)

1.5.2. Pascal

Teorema 1.9: Fórmula de Pascal

1.6. Principio de Dirichlet (del palomar, de las cajas o de las pichoneras)