Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Mateáticas
Licenciatura en Matemáticas Algoritmicas

TeorÃŋa de Grafos

Porfirio Damián Escamilla Huerta

TeorÃŋa de Grafos

Porfirio DamiÃąn Escamilla Huerta

Agosto 2022

Índice

1. Nociones de combinatoria

1.1. Algunas definiciones bÃąsicas

DefiniciÃşn 1.1: Conjunto finito

Un conjunto X es finito si $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que hay una funciÃşn biyectiva $f : x \mapsto [n]$ o bien $x = \varnothing$

DefiniciÃşn 1.2: Cardinalidad

Si X es finito. definimos

$$|X| = \begin{cases} 0 \text{ si } x = \varnothing. \\ \text{ÃŽnico } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \exists f : x \mapsto [n] biyectiva. \end{cases}$$

Teorema 1.1

Si X y Y son conjuntos disjuntos, con $|X| = n$ y $|Y| = m$, entonces $|X \cup Y| = n + m$.

Demostración
Sean $f : x \mapsto [n]$ y $g : x \mapsto [m]$ ambas biyectivas, y sea $h : (X \cup Y) \mapsto [n + m]$ definida por

$$h(a) = \begin{cases} f(a) \text{ si } a \in X. \\ n + g(a) \text{ si } a \in Y. \end{cases}$$

TERMINAR...

Corolario 1.1

Si $X_1 \ldots , X_n$ son conjuntos finitos disjuntos por pares, entonces

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$$

Demostración
Por inducciÃşn sobre n.
Para $n = 1$ obvio.
Para $n = 2$ Es la proposiciÃşn anterior.
Supongamos que se cumple para n; y sean $X_1, \ldots , X_n, X_{n+1}$ conjuntos disjuntos por pares. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i \right| &= \left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \mathbin{\dot\cup} X_{n+1} \right| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |X_i| + |X_{n+1}| \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} |X_i| \end{aligned}$$

$\square$

1.2. Principio de InclusiÃşn-ExclusiÃşn

Teorema 1.2: Principio de inclusiÃşn-exclusiÃşn

Sean A y B conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Demostración
Los conjuntos $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$, son disjuntos por pares y $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, entonces

$$\begin{aligned}
|A \cup B| &= |(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)| \\
&= |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| \\
&= |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| + |A \cap B| - |A \cap B| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B|
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.3: Principio de inclusiÃşn-exclusiÃşn generalizado

Sea $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Entonces:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \cdots \\
+ (-1)^n \sum_{i_1 < \cdots \leq i_{n-1}} \left| A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}} \right| + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

Demostración I
nducciÃşn sobre n.

Para n=1 obvio.

Para n=2 Principio de inclusiÃşn-exclusiÃşn simple.

Supongamos que el enunciado es cierto para n, y sean $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ conjuntos finitos, entonces

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| &= |(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}| \\
&= |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \\
&= |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \cdots \\
&\quad + (-1)^n \sum_{i_1 < \cdots \leq i_{n-1}} \left| A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}} \right| + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \\
&\quad + |A_{n+1}| - \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{i<j\leq n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})| + \cdots \right. \\
&\quad \left. + (1)^n \sum_{i_1 < \cdots \leq i_{n-1}} (A_{i_1} \cap A_{n+1}) \cap \cdots \cap (A_{i_{n-1}} \cap A_{n+1}) + |(A_1 \cap A_{n+1}) \cap \ldots \cap (A_n \cap A_{n+1})| \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{i<j\leq n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k\leq n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots \\
&\quad + (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < \cdots \leq i_n} \left| A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}} \right| + (-1)^{n+2} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

$\square$

1.3. Conjunto potencia

Teorema 1.4

Si A y B son conjuntos finitos, entonces

$$|A \times B| = |A||B|$$

Demostración

Sea $n = |A|$, $m = |B|$ y $f : A \longmapsto [[n]]$, $g : B \longmapsto [[m]]$ funciones biyectivas. Sea

$$\begin{aligned} h : (A \times B) &\longmapsto [[nm]] \\ (a, b) &\longrightarrow f(a) + (g(b) - 1)n \end{aligned}$$

TERMINAR...

Corolario 1.2

Si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos, entonces

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

Demostración

Por inducciÃşn sobre n Para $n = 1$ fÃącil. Para $n = 2$ es el teorema anterior. Supongamos para n y sean $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ conjuntos finitos, entonces

$$\begin{aligned} |A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1}| &= |(A_1 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}| \\ &= |(A_1 \times \ldots \times A_n)||A_{n+1}| \\ &= \prod_{i=1}^{n} |A_i||A_{n+1}| \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} |A_i| \end{aligned}$$

□

DefiniciÃşn 1.3: Conjunto potencia

Sea A un conjunto $\wp(A) = \{x | x \subseteq A\}$

Teorema 1.5

Sea A un conjunto finito, entonces

$$|\wp(A)| = 2^{|A|}$$

Demostración

Supongamos que $|A| = n$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, Notemos que la funciÃşn

$$f : (\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}) \longmapsto \wp(A)$$

es biyectiva. Por lo tanto

$$|\wp(A)| = |\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}| = 2^n$$

□

1.4. Permutaciones

DefiniciÃşn 1.4: PermutaciÃşn

Sea A un conjunto finito tal que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$$S_A = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_j}, \ldots, a_{i_n}) | i_j \neq i_k \text{ si } j \neq k\}$$

Teorema 1.6

Si A es un conjunto finito y $|A| = n$, entonces $|S_A| = n!$

Demostración
Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, procedamos por inducciÃşn sobre n. Nuestra base de inducciÃşn es $|S_0| = |S_1| = 1$. Ahora, supongamos que para S_n se cumple $|S_n| = n!$. S_{n+1} tiene posiciones $n+1$, por lo que hay $n+1$ nuevas posibilidades, entonces

$$|S_{n+1}| = n + 1|S_n| = (n+1)!$$

1.5. Coeficiente binomial

DefiniciÃşn 1.5: Coeficiente binomial

Dados $K, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $k \leq n$, se define

$$\binom{n}{k} = |\{x \in \wp(A) | |x| = k\}| \text{ donde } |A| = n$$

Teorema 1.7

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$