Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Mateáticas
Licenciatura en Matemáticas Algoritmicas

Teoría de Grafos

Porfirio Damián Escamilla Huerta

Teoría de Grafos

Porfirio Damián Escamilla Huerta

Agosto 2022

Índice

1. Nociones de combinatoria

1.1. Algunas definiciones básicas

Definición 1.1: Conjunto finito

Un conjunto X es finito si $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que hay una función biyectiva $f : x \mapsto [n]$ o bien $x = \varnothing$

Definición 1.2: Cardinalidad

Si X es finito. definimos

$$|X| = \begin{cases} 0 \text{ si } x = \varnothing. \\ \text{Único } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \exists f : x \mapsto [n] biyectiva. \end{cases}$$

Teorema 1.1

Si X y Y son conjuntos disjuntos, con $|X| = n$ y $|Y| = m$, entonces $|X \cup Y| = n + m$.

Demostración
Sean $f : x \mapsto [n]$ y $g : x \mapsto [m]$ ambas biyectivas, y sea $h : (X \cup Y) \mapsto [n+m]$ definida por

$$h(a) = \begin{cases} f(a) \text{ si } a \in X. \\ n + g(a) \text{ si } a \in Y. \end{cases}$$

TERMINAR...

Corolario 1.1

Si $X_1 \ldots, X_n$ son conjuntos finitos disjuntos por pares, entonces

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$$

Demostración
Por inducción sobre n.
Para $n = 1$ obvio.
Para $n = 2$ Es la proposición anterior.
Supongamos que se cumple para n; y sean $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ conjuntos disjuntos por pares. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i \right| &= \left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \mathbin{\dot\cup} X_{n+1} \right| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |X_i| + |X_{n+1}| \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} |X_i| \end{aligned}$$

$\square$

1.2. Principio de Inclusión-Exclusión

Teorema 1.2: Principio de inclusión-exclusión

Sean A y B conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Demostración
Los conjuntos $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$, son disjuntos por pares y $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, entonces

$$\begin{aligned}
|A \cup B| &= |(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)| \\
&= |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| \\
&= |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| + |A \cap B| - |A \cap B| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B|
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.3: Principio de inclusión-exclusión generalizado

Sea $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Entonces:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \cdots \\
+ (-1)^n \sum_{i_1 < \cdots \leq i_{n-1}} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}}\right| + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

Demostración I
nducción sobre n.

Para n=1 obvio.

Para n=2 Principio de inclusión-exclusión simple.

Supongamos que el enunciado es cierto para n, y sean $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ conjuntos finitos, entonces

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| &= |(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}| \\
&= |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \\
&= |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \cdots \\
&\quad + (-1)^n \sum_{i_1 < \cdots \leq i_{n-1}} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}}\right| + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \\
&\quad + |A_{n+1}| - \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{i<j\leq n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})| + \cdots \right. \\
&\quad \left. + (1)^n \sum_{i_1 < \cdots \leq i_{n-1}} (A_{i_1} \cap A_{n+1}) \cap \cdots \cap (A_{i_{n-1}} \cap A_{n+1}) + |(A_1 \cap A_{n+1}) \cap \ldots \cap (A_n \cap A_{n+1})| \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{i<j\leq n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k\leq n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots \\
&\quad + (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < \cdots \leq i_n} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}}\right| + (-1)^{n+2} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

$\square$

1.3. Conjunto potencia

Teorema 1.4

Si A y B son conjuntos finitos, entonces

$$|A \times B| = |A||B|$$

Demostración
Sea $n = |A|$, $m = |B|$ y $f : A \longmapsto [[n]]$, $g : B \longmapsto [[m]]$ funciones biyectivas. Sea

$$\begin{aligned} h : (A \times B) &\longmapsto [[nm]] \\ (a, b) &\longrightarrow f(a) + (g(b) - 1)n \end{aligned}$$

TERMINAR...

Corolario 1.2

Si $A_1, \dots, A_n$ son conjuntos finitos, entonces

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

Demostración
Por inducción sobre n Para $n = 1$ fácil. Para $n = 2$ es el teorema anterior. Supongamos para n y sean $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ conjuntos finitos, entonces

$$\begin{aligned} |A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1}| &= |(A_1 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}| \\ &= |(A_1 \times \ldots \times A_n)||A_{n+1}| \\ &= \prod_{i=1}^{n} |A_i||A_{n+1}| \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} |A_i| \end{aligned}$$

$\square$

Definición 1.3: Conjunto potencia

Sea A un conjunto $\wp(A) = \{x | x \subseteq A\}$

Teorema 1.5

Sea A un conjunto finito, entonces

$$|\wp(A)| = 2^{|A|}$$

Demostración

Supongamos que $|A| = n$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, Notemos que la función

$$f : (\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}) \longmapsto \wp(A)$$

es biyectiva. Por lo tanto

$$|\wp(A)| = |\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}| = 2^n$$

$\square$

1.4. Permutaciones

Definición 1.4: Permutación

Sea A un conjunto finito tal que $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$S_A = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_j}, \dots, a_{i_n}) | i_j \neq i_k \text{ si } j \neq k\}$$

Teorema 1.6

Si A es un conjunto finito y $|A| = n$, entonces $|S_A| = n!$

Demostración
Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, procedamos por inducción sobre n. Nuestra base de inducción es $|S_0| = |S_1| = 1$. Ahora, supongamos que para S_n se cumple $|S_n| = n!$. S_{n+1} tiene posiciones $n+1$, por lo que hay $n+1$ nuevas posibilidades, entonces

$$|S_{n+1}| = n + 1|S_n| = (n+1)!$$

1.5. Coeficiente binomial

Definición 1.5: Coeficiente binomial

Dados $K, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $k \leq n$, se define

$$\binom{n}{k} = |\{x \in \wp(A) || x| = k\}| \text{ donde } |A| = n$$

Teorema 1.7

El número de k combinaciones en n objetos es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Demostración
TERMINAR

Teorema 1.8: Teorema del binomio (Binomio de Newton)

Para cualesquiera números a y b, y para cualquier número natural n, tenemos

$$(a+b)^n = \sum_{i=}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Un caso especial de esto es

$$(1+a)^n = \sum_{i=0}^{n} a^i$$

Demostración
TERMINAR...

Corolario 1.3

Para cualquier número natural n, tenemos

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

1.5.1. Propiedades del coeficiente binomial

Propiedad 1.1: (a)

$$\binom{n}{0} = 1$$

Demostración (a)
TERMINAR...TERMINAR...

Propiedad 1.2: (b)

$$\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$$

Demostración (b)
TERMINAR...

Propiedad 1.3: (c)

$$\binom{n}{2} = 1 + 2 + \cdots + n$$

Demostración (c)
TERMINAR...

Propiedad 1.4: (d)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Demostración (d)
TERMINAR...

1.5.2. Pascal

Teorema 1.9: Fórmula de Pascal

Para cualesquiera n y k con $0 \leq k \leq n$ se tiene

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Demostración
TERMINAR...

1.5.3. Piramide de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \binom{n}{n} & & \\
 & \binom{n+1}{k} & & \binom{n+1}{k+1} & \\
\binom{n+2}{k} & & \binom{n+2}{k+2} & & \binom{n+2}{k+2}
\end{array}
$$

1.6. Principio de Dirichlet (del palomar, de las cajas o de las pichoneras)

Teorema 1.10: Principio del palomar

Si A y B son conjuntos finitos y $|A| > |B|$ entonces ninguna función $f : A \longmapsto B$ puede ser inyectiva inyectiva.

Demostración
TERMINAR...

Teorema 1.11: Principio del palomar generalizado

Si A y B son conjuntos finitos y $|A| > k|B|$ entonces $\forall \quad f : A \longmapsto B \quad \exists b \in B$ tal que $|\{a \in A | f(a) = b\}| = b$.

Demostración
TERMINAR...

2. Teoría de grafos

2.1. Conceptos básicos

Definición 2.1: Grafo

Un grafo es una terna ordenada (V, E, φ) tal que:

V Es un conjunto de vértices tal que $V \neq \varnothing$.

E Es un conjunto de aristas tales que $E \cap V \neq \varnothing$.

φ Es una función tal que $\varphi : E \longmapsto \{A \subset V | 0 \leq |A| \leq 2\}$.

Definición 2.2: Incidencia

Sea $G = (V, E, \varphi)$ un grafo. Si $v \in V$ y $e \in E$, entonces decimos que v incide en e y e incide en v si $v \in \varphi(e)$.

Definición 2.3: Extremos de una arista

Sea $e \in E$, entonces a los elementos de $\varphi(e)$ los llamamos los extremos de e.

Definición 2.4: Vértices adyacentes

Sean $u, v \in V$ decimos que u y v son adyacentes si $\exists\, e \in E$ tal que $\varphi(e) = \{u, v\}$.

Definición 2.5: Aristas adyacentes

Sean $e, e' \in E$ decimos que e y e' son adyacentes si $\varphi(e) \cap \varphi(e') \neq \varnothing$.

Definición 2.6: Bucle (Loop)

Sea $e \in E$, e es un bucle si $|\varphi(e)| = 1$.

Definición 2.7: Aristas múltiples

Sea $e \in E$, e es una arista múltiple si $\exists\, e' \in E$ con $e \neq e'$ tal que $\varphi(e) = \varphi(e')$. De lo contrario es una arista simple.

Definición 2.8: Grafo simple

Un grafo es simple si no tiene bucles ni asistas múltiples.
Sea $G = (V, E, \varphi)$ un grafo simple, satisface:

$$\varphi : E \longmapsto \{A \subseteq V | |A| = 2\},\ \varphi \text{ es inyectiva}$$

Definición 2.9: Isomorfismo

Un isomorfismo entre las gráficas $G = (V, E, \varphi)$ y $G' = (V', E', \varphi)$ es un par de funciones ψ_V y ψ_E:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_V : V \longmapsto V' \\ \psi_E : E \longmapsto E' \end{array}\right\} \text{Ambas biyectivas}$$

tales que $\forall\, e \in E$, si $\varphi(e) = \{u, v\}$, entonces $\varphi(\psi_E(e)) = \{\psi_V(u), \psi_V(v)\}$

2.2. Clases especiales de grafos

Definición 2.10: Grafos K_n

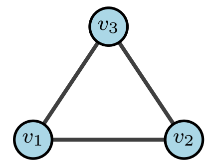
Sea $n \in \mathbb{N}$, se denota K_n a los grafos simples con n vértices, cualesquiera dos de ellos adyacentes.

El grafo K_n tiene $\binom{n}{2}$ aristas.

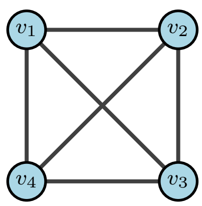
K_1

K_2

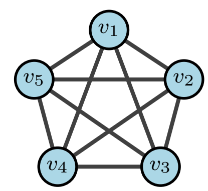
K_3



K_4



K_5



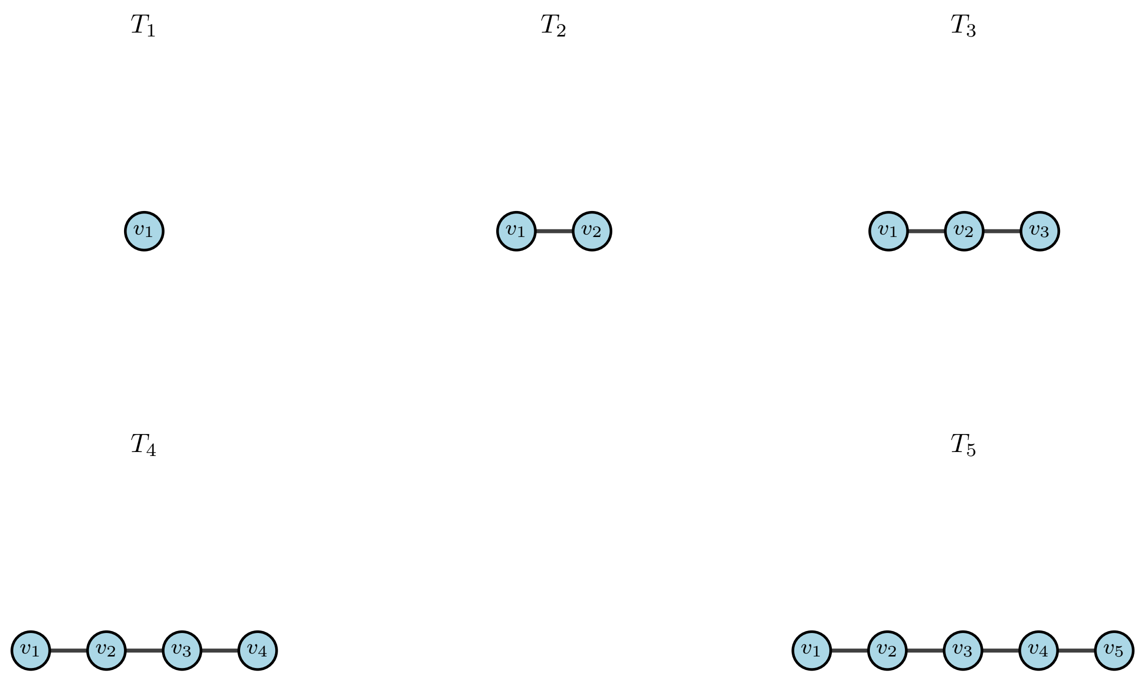
Cuadro 1: Grafos K_n

Definición 2.11: Grafos T_n

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $G = (V, E, \varphi)$ con $e_i \in E$, se denota T_n a los grafos simples con n vértices, con aristas de la forma:

$$E = \{e_i | \varphi(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\} \text{ con } 1 \leq i \leq n-1\}$$

El grafo T_n tiene $n-1$ aristas.



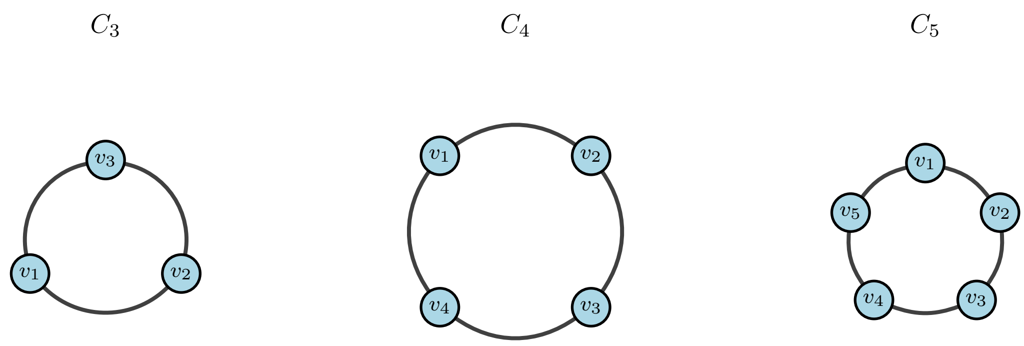
Cuadro 2: Grafos T_n

Definición 2.12: Grafos C_n

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $3 \leq n$, y $G = (V, E, \varphi)$ con $e_i \in E$, se denota C_n a los grafos simples con n vértices, con aristas de la forma:

$$E = \left\{ e_i \middle| \begin{array}{cl} \varphi(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\} & \text{con } 1 \leq i < n \\ \varphi(e_i) = \{v_i, v_1\} & \text{con } i = n \end{array} \right\}$$

El grafo C_n tiene n aristas.



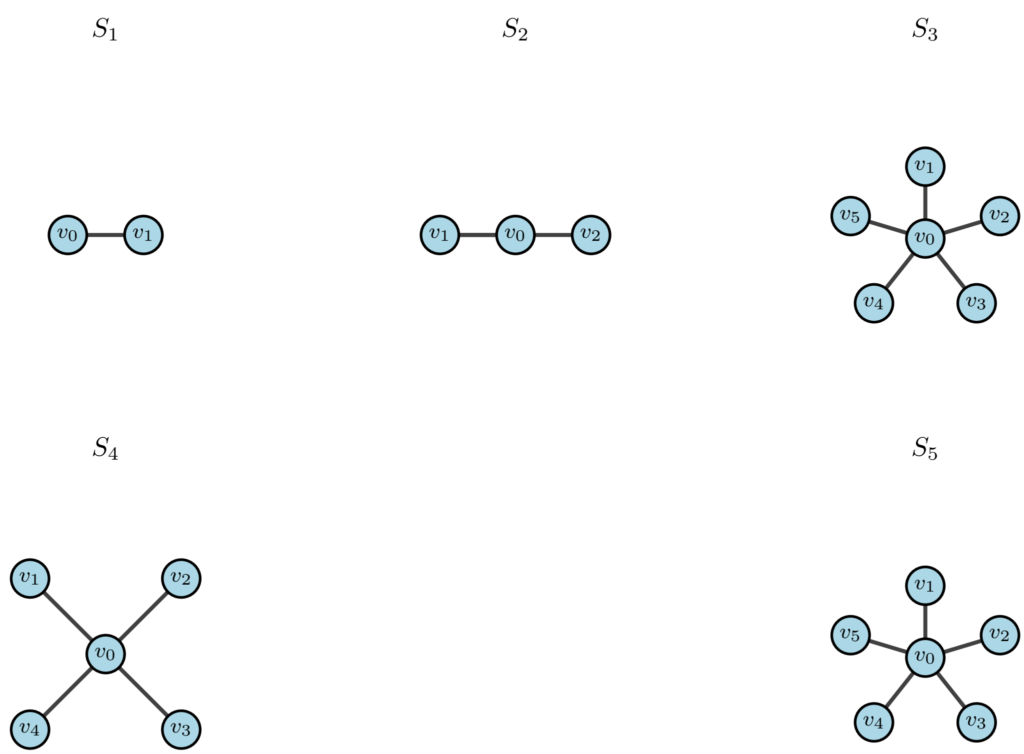
Cuadro 3: Grafos C_n

Definición 2.13: Grafos S_n

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $G = (V, E, \varphi)$ con $e_i \in E$, se denota S_n a los grafos simples con $n + 1$ vértices, con aristas de la forma:

$$E = \{e_i | \varphi(e_i) = \{v_0, v_i\} \text{ con } 1 \leq i \leq n\}$$

El grafo S_n tiene n aristas.



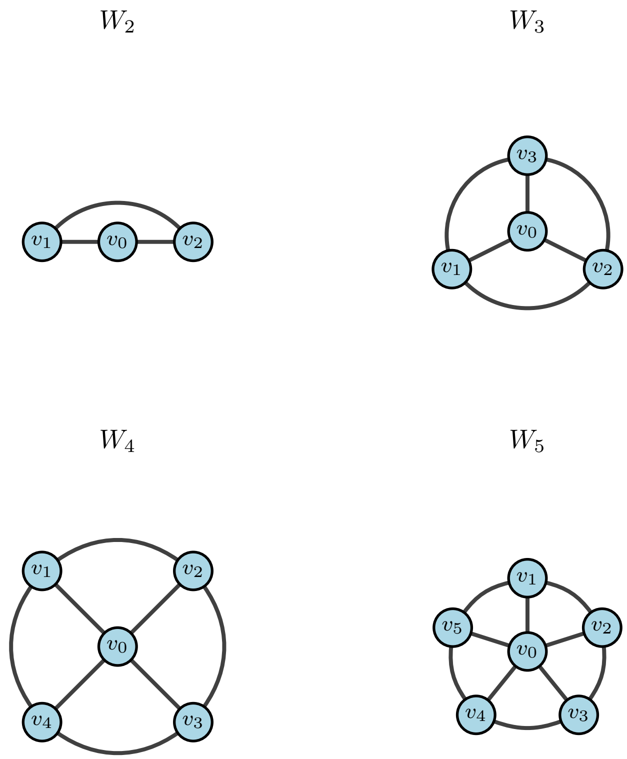
Cuadro 4: Grafos S_n

Definición 2.14: Grafos W_n

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $G = (V, E, \varphi)$ con $e_i \in E$, se denota W_n a los grafos simples con $n + 1$ vértices, con aristas de la forma:

$$E = \{e_i | \varphi(e_i) = \{v_0, v_i\} \text{ con } 1 \leq i \leq n\} \cup \left\{ e_i \middle| \begin{array}{ll} \varphi(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\} & \text{con } 1 \leq i < n \\ \varphi(e_i) = \{v_i, v_1\} & \text{con } i = n \end{array} \right\}$$

El grafo W_n tiene $2n$ aristas.



Cuadro 5: Grafos W_n