Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Mateáticas
Licenciatura en Matemáticas Algoritmicas

Teoría de Grafos

Porfirio Damián Escamilla Huerta

Teoría de Grafos

Porfirio Damián Escamilla Huerta

Agosto 2022

Índice

1. Nociones de combinatoria

Definición 1.1: Conjunto finito

Un conjunto X es finito si $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que hay una función biyectiva $f : x \mapsto [n]$ o bien $x = \varnothing$

Definición 1.2: Cardinalidad

Si X es finito. definimos

$$|X| = \begin{cases} 0 \text{ si } x = \varnothing. \\ \text{Único } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \exists f : x \mapsto [n] biyectiva. \end{cases}$$

Teorema 1.1

Si X y Y son conjuntos disjuntos, con $|X| = n$ y $|Y| = m$, entonces $|X \cup Y| = n + m$.

Demostración
Sean $f : x \mapsto [n]$ y $g : x \mapsto [m]$ ambas biyectivas, y sea $h : (X \cup Y) \mapsto [n + m]$ definida por

$$h(a) = \begin{cases} f(a) \text{ si } a \in X. \\ n + g(a) \text{ si } a \in Y. \end{cases}$$

TERMINAR...

Corolario 1.1

Si $X_1 \ldots , X_n$ son conjuntos finitos disjuntos por pares, entonces

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$$

Demostración
Por inducción sobre n.
Para $n = 1$ obvio.
Para $n = 2$ Es la proposición anterior.
Supongamos que se cumple para n; y sean $X_1, \ldots , X_n, X_{n+1}$ conjuntos disjuntos por pares. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i \right| &= \left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \cup X_{n+1} \right| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |X_i| + |X_{n+1}| \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} |X_i| \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.2: Principio de inclusión exclusión

Sean A y B conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Demostración
Los conjuntos $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$, son disjuntos por pares y $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, entonces

$$\begin{aligned}
|A \cup B| &= |(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)| \\
&= |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| \\
&= |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| + |A \cap B| - |A \cap B| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B|
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.3: Principio de Inclusión-Exclusión generalizado

Sea $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Entonces:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = &\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \cdots \\
&+ (-1)^n \sum_{i_1<\cdots\leq i_{n-1}} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}}\right| + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

Demostración I
nducción sobre n.

Para n=1 obvio.

Para n=2 Principio de inclusión-exclusión simple.

Supongamos que el enunciado es cierto para n, y sean $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ conjuntos finitos, entonces

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| &= |(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}| \\
&= |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \\
&= |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \cdots \\
&\quad + (-1)^n \sum_{i_1<\cdots\leq i_{n-1}} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}}\right| + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \\
&\quad + |A_{n+1}| - \Bigg(\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{i<j\leq n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})| + \cdots \\
&\quad + (1)^n \sum_{i_1<\cdots\leq i_{n-1}} (A_{i_1} \cap A_{n+1}) \cap \cdots \cap (A_{i_{n-1}} \cap A_{n+1}) + |(A_1 \cap A_{n+1}) \cap \ldots \cap (A_n \cap A_{n+1})| \Bigg) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{i<j\leq n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k\leq n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots \\
&\quad + (-1)^{n+1} \sum_{i_1<\cdots\leq i_n} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}}\right| + (-1)^{n+2} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.4

Si A y B son conjuntos finitos, entonces

$$|A \times B| = |A||B|$$

Demostración
Sea $n = |A|$, $m = |B|$ y $f : A \longmapsto [[n]]$, $g : B \longmapsto [[m]]$ funciones biyectivas. Sea

$$\begin{aligned} h : (A \times B) &\longmapsto [[nm]] \\ (a, b) &\longrightarrow f(a) + (g(b) - 1)n \end{aligned}$$

TERMINAR...

Corolario 1.2

Si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos, entonces

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

Demostración
Por inducción sobre n Para $n = 1$ fácil. Para $n = 2$ es el teorema anterior. Supongamos para n y sean $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ conjuntos finitos, entonces

$$\begin{aligned} |A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1}| &= |(A_1 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}| \\ &= |(A_1 \times \ldots \times A_n)||A_{n+1}| \\ &= \prod_{i=1}^{n} |A_i||A_{n+1}| \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} |A_i| \end{aligned}$$

$\square$