MATEMATICĂ

DE TRECERE



MATERIAL ELABORAT CORESPUNZÂND CERINTELOR DE BACALAUREAT 2016

© 2016 PRESSTERN SOLUTIONS

Cuprins

1. Operații cu numere reale	1
1.1. Radicali, puteri	
1.1.1. Puteri	1
1.1.2. Radicali	1
1.2. Identități	2
1.3. Inegalități	3
2. Funcții	6
2.1. Notiunea de functii	
2.2. Funcții injective, surjective, bijective	6
2.3. Compunerea funcțiilor	7
2.4. Funcția inversă	8
3. Ecuații și inecuații de gradul întâi	
3.1. Ecuații de gradul întâi	
3.2. Inecua tii de gradul întâi	
3.3. Modul unui număr real	
4. Numere complexe	12
4.1. Forma algebrică	
4.2. Puterile numărului i	
4.3. Conjugatul lui z	
4.4. Modulul unui număr complex	
4.5. Forma trigonometrică	
4.6. Formula lui Moivre	16
4.7. Forma exponențială	17
4.8. Ecuația binomă	18
5. Progresii	18
5.1. Progresiile aritmetice	
5.2. Progresiile geometrice	
6. Logaritmi	20
6.1. Ecuații și inecuații logaritmice fundamentale	
6.2. Ecuații și inecuații exponențiale fundamentale	

7. Geometrie	. 23
7.1. Vectori	23
7.2. Adunarea vectorilor	25
7.3. Teoreme cu vectori	30
7.4. Geometrie analitică în plan și în spațiu	34
7.4.1. Plan determinat de un punct și doi vectori necolinari paraleli cu planu	1.34
7.4.2. Plan determinat de trei puncte necolinare	36
7.4.3. Ecuația planului prin tăieturi	37
7.4.4. Ecuația generală a planului	37
7.4.5. Poziția planelor	38
7.5. Ecuația dreptei	
7.5.1. Ecuația dreptei determinat de un punct și de un vector paralel cu dreapta	39
7.5.2. Ecuația dreptei determinat de două puncte diferite	
7.5.3. Ecuația generală a dreptei	
7.5.4. Ecuația dreptei în plan	
7.5.5. Ecuația dreptei determinat de două puncte diferite	
7.5.6. Unghul determinat de două drepte	
7.6. Distanța la un punct la o dreaptă (în plan)	
7.6.1. Ecuația bisectoarei (în plan)	
7.7. Distanța la un punct la o dreaptă (în spațiu)	
7.8. Cercul	
7.9. Elipsa	
7.10. Hiperbola	
7.11. Parabola	
7.12. Alte aplicații cu vectori	50
8. Metoda inducției matematice	51
8.1. Axioma de recurentă a lui Peano	
8.2. Metoda unducției matematice	
8.3. Variantă a metodei inducției matematice	
,	
9. Analiză combinatorie	. 52
9.1. Permutări	52
9.2. Aranjamente	52
9.3. Combinări	53
9.4. Binomul lui Newton	
9.5. Suma puterilor asemenea ale primelor n numere naturale	55

10. Polinoame	56
10.1. Forma algebrică a unui polinom	56
10.2. Divizibilitatea polinoamelor	56
10.3. Rădăcinile polinoamelor	57
10.4. Ecuații algebrice	
10.5. Polinoame cu coeficienți din R, Q, Z	58
11. Permutări, matrici, determinanți	59
11.1. Permutări	
11.2. Matrici	
11.3. Determinanţi	62
11.4. Inversa unei matrici	63
11.4.1. Tr(A)	63
11.4.2. Determinantul şi rangul	64
12. Sisteme liniare	66
12.1. Notații	66
12.2. Compatibilitatea	67
12.3. Sisteme omogene (b _i =0)	67
13. Trigonometrie	68
13. Trigonometrie	 68
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie	71
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie	71 74
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie	71 74 74
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie	717474
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie	71747474
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie	7174747474
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie 14. Analiză matematică	71747474747474
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie 14. Analiză matematică	7174747474747680
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie 14. Analiză matematică	717474747476808081
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie 14. Analiză matematică	71747474747476808183
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie 14. Analiză matematică 14.1. Recurențe 14.1.1. Recurențe de ordin 1 14.1.2. Recurențe de ordin al doilea 14.2. Limita de șiruri 14.2.1. Limite generale, criterii de convergență 14.3. Limite de funcții 14.3.1. Operații cu limite de funcții 14.3.2. Limite tip 14.4.2. Limite tip 14.4. Teoreme pentru continuitatea funcțiilor	71747474747476808183
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie 14. Analiză matematică 14.1. Recurențe 14.1.1. Recurențe de ordin 1 14.1.2. Recurențe de ordin al doilea 14.2. Limita de șiruri 14.2.1. Limite generale, criterii de convergență 14.3. Limite de funcții 14.3.1. Operații cu limite de funcții 14.3.2. Limite tip 14.4. Continuitatea funcțiilor 14.4. I. Teoreme pentru continuitatea funcțiilor 14.5. Funcții derivabile	7174747474747680818384
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie 14. Analiză matematică	717474747476808183848686
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie 14. Analiză matematică 14.1. Recurențe 14.1.1. Recurențe de ordin 1 14.1.2. Recurențe de ordin al doilea 14.2. Limita de șiruri 14.2.1. Limite generale, criterii de convergență 14.3. Limite de funcții 14.3.1. Operații cu limite de funcții 14.3.2. Limite tip 14.4. Continuitatea funcțiilor 14.4. I. Teoreme pentru continuitatea funcțiilor 14.5. Funcții derivabile	71 74 74 74 74 74 74 74 76 80 80 80 80 81 81 83 84 86 86

14.5.4. Derivatele funcțiilor compuse	88
14.5.5. Derivatele de ordin superior ale unor funcții elementare	90
14.5.6. Proprietăți ale funcțiilor derivabile	91
14.6. Integrale	91
14.6.1. Primitive	9
15. Primitivele funcțiilor	92
15.1. Reguli pentru integrarea generală a funcțiilor	
15.2. Primitivele functiilor rationale	93
15.3. Integrale cu r= $(x^2+a^2)^{1/2}$	96
15.4. Integrale cu s=(x²-a²)1/2	99
15.5. Integrale cu $t=(a^2-x^2)^{1/2}$	100
15.6. Integrale cu $R^{1/2} = (ax^2 + bx + c)^{1/2}$	101
15.7. Integrale de funcții trigonometrice ce conțin numai sin	103
15.8. Integrale cu funcții trigonometrice ce conțin numai cos	105
15.9. Integrale cu funcții trigonometrice ce conțin numai tan	
 15.10. Integrale cu funcții trigonometrice ce conțin atât sin cât și cos. 	
15.11. Funcții logaritmice	
15.11.1. Proprietăți ale integralei definite	
15.11.2. Teorema Fundamentală	
15.11.3. Inegalități	
15.12. Alte teoreme	
15.12.1. Funcții primitivabile	
15.12.2. Funcții integrabile	
15.12.3. Arii	11
16. Structuri algebrice	118
16.1. Grupul	118
16.1.1. Proprietăți și teoreme	
16.2. Monoid	
16.3. Inel	
16.4. Corpuri	122
17. Spații vectoriale	124

Operatii cu numere reale

Radicali, Puteri

1.1.1 Puteri

1.
$$a^{m \cdot n} = a^m \cdot a^n$$

2. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

$$2. \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

3.
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

4. $a^m : b^m = (a : b)^m$

4.
$$a^m : b^m = (a : b)^m$$

5.
$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

6.
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Puterile numerelor reale se extiind atât pentru exponenți raționali pozitivi sau negativi, cât și pentru puterile reale fiind definite cu ajutorul sirurilor de puteri rationale. Aceste puteri au proprietăti identice cu exponenti numere naturale.

1.1.2 Radicali

1.
$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, a > 0;$$

2.
$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{m}};$$

3.
$$(\sqrt[n]{a})^n = a;$$

4.
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$
;

5.
$$(\sqrt[n]{\frac{1}{a}})^n = \frac{1}{a};$$

6.
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$$
;

7.
$$\sqrt[n]{a}$$
: $\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$;

8.
$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$$
;

9.
$$\sqrt[m]{a}$$
: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^{n-m}}$;

10.
$$\sqrt[n]{a^{nm}} = a^m;$$

11.
$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$
;

12.
$$\sqrt[mn]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^p};$$

13.
$$\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[nm]{a^{pn} \cdot b^{qm}};$$

14.
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a};$$

15.
$$\sqrt{a^2} = |a|$$
;

16.
$$\sqrt{a} = |a|$$
,
16. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$;

17.
$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}},$$
$$c^2 = a^2 - b;$$

1.2 Identități

Oricare ar fi $x,y,z,t,a,b,c,d\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}$ avem:

1.
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

2.
$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (ay + bx)^2$$

3.
$$a^b - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

4.
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

5.
$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

6.
$$a^b + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

7.
$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

8.
$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - ab\sqrt{2})(a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})$$

9.
$$a^5 - b^5 = (a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

10.
$$a^6 + b^6 = (a^3 - 2ab^2)^2 + (b^3 - 2a^2b)^2$$

11.
$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

12.
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^2n - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$$

13.
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

14.
$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j}^{2}\right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_{j}^{2}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j} x_{j}\right)^{2}$$
$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{i} x_{j} - a_{j} x_{i})^{2}$$

15. (Hermite)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] = [nx],$$

cu $[\cdot]$ notăm partea întreagă. Fie x un număr real. Se numește parte întreagă a lui x, cel mai apropiat întreg mai mic sau egal cu x. Se numește parte fracționară a lui x, diferența dintre număr și partea lui întreagă. Definiția este sugerată de Axioma lui Arhimede : Pentru orice numar real x, există un număr întreg n, unic, astfel incat $n \leq x < n+1$.

1.3 Inegalități

1.
$$[E_1(x)]^2 + ... + [E_n(x)]^2 \ge 0;$$

2.
$$x^2 + y^2 \ge 2xy$$
, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

3.
$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le$$
$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

4.
$$(a+b)(b+c)(c+a) \le 8abc;$$

$$5. \ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$$

6.
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 9$$
,
 $a, b, c > 0$;

$$a, b, c > 0;$$

7. $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca;$

8.
$$a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc$$
;

9.
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \ge n;$$

10.
$$(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) \ge (ax + by)^2$$
;

11. (Bernoulli) Pentru orice
$$x \in [-1, \infty)$$
 şi $\alpha \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$ avem: $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$, dacă $\alpha \in (0,1)$ şi $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha \cdot x$ dacă $\alpha \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$.

12. Pentru orice $a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n}$ şi $b_k \in \{-1, 1\}$ avem că

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

- 13. Dacă $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Atunci şirul u_n este strict descrescător, adică: $u_n > u_{n+1}$.
- 14. Pentru orice $a_k \ge 0$ numere reale avem că:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

$$\geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \geq$$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Inegalitatea de mai sus, este numită, inegalitatea mediilor. Egalitatea se obține pentru $a_1 = ... = a_n$.

15.
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

16. (Cauchy-Buniakovsky-Schwarz) Dac
ă $a_k,b_k\in\mathbb{R}$ atunci

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \ge \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$

17. (Cebisev) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n}$ esetén

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_{k}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_{k}\right)\leq$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_{k}b_{k}\right).$$

Egalitatea se obține dacă $a_i = a_j$ și $b_i = b_j$ $i \neq j$.

18. (Huygens) Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ și
 $x_k\in\mathbb{R}_+$ avem că

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \ge (1 + \sqrt[n]{x_1 \dots x_n})^n$$

19. (Kantorovici) Fie $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ un interval, atunci dacă $x_k \in [a,b] \ k = \overline{1,n}$ avem

$$\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{x_k}\right) \le \frac{(a+b)^2}{4ab} \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)^2.$$

7.5.2 Ecuația dreptei determinat de două puncte diferite

Similar, folosim ecuatția de mai sus, pentru puntul M_1 , și pentru vectorul $\vec{M_1 M_2}$: $M_1 M_2$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$
 (23)

7.5.3 Ecuatția generelă a dreptei

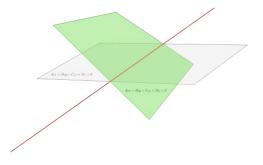
Teoremă 7.6. Sistemul:

$$\begin{cases}
A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\
A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0
\end{cases}$$
(24)

unde

$$\left(\begin{array}{ccc}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\A_2 & B_2 & C_2 & D_2\end{array}\right)=2.$$

reprezintă o dreaptă.



7.5.4 Ecuația dreptei în plan

Similar ca și în spacțiu. Fie e o drepată în plan atunci ecuatția canonică este:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} \tag{25}$$

Dacă e nu este paralel cu axa Oy atunci (adică $p \neq 0$), atunci pentru orice vector de direcție avem că $\frac{q}{p} = m$ este constantă. Numărul m este numită panta dreptei. Avem că

$$m = \operatorname{tg} \alpha,$$
 (26)

unde α este unghiul determinat de dreapta e cu axa Ox. În acest caz dacă dreapta trece prin punctul $A(x_0, y_0)$ și are panta m atunci ecuația dreptei este:

$$y - y_0 = m(x - x_0). (27)$$

Observație 7.3. Două drepte sunt parelele dacă și numai dacă panta dreptelor sunt egale.

Observație 7.4. Fie e_1 , e_2 două drepte perpendiculare. Fie $\vec{d}_1(p_1,q_1)$ și $\vec{d}_2(p_2,q_2)$ vectorii de direcție. Evident că $\vec{d}_1 \perp \vec{d}_2$, deci $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$. Cea ce înseamnă $p_1p_2 + q_1q_2 = 0$. Presupunem că dreptele nu sunt paralele cu axa Oy atunci

$$e_1 \perp e_2 \Longleftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1. \tag{28}$$

7.5.5 Ecuația dreptei determinat de două puncte diferite

Fie $M_1(x_1,y_1)$ și $M_2(x_2,y_2)$ două puncte în plan. Atunci ecuația dreptei care trece prin punctele M_1 și M_2 are

vectorul de direcție $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1)$, deci Ecuația canonică a dreaptei M_1M_2 este

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},\tag{29}$$

sau:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
 (30)

7.5.6 Unghul determinat de două drepte

Fie d_1 și d_2 două drepte. Atunci

$$\begin{split} m(\widehat{d_1,d_2}) &= \\ \left\{ \begin{array}{l} \arccos \frac{\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}}{||\vec{d_1}|| \cdot ||\vec{d_2}||}, \vec{d_1} \cdot \vec{d_2} \geq 0 \\ \pi - \arccos \frac{\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}}{||\vec{d_1}|| \cdot ||\vec{d_2}||}, \text{ altfel.} \end{array} \right. \end{split}$$

Dacă luăm în considerare că

$$\pi - \arccos x = \arccos(-x),$$

pentru orice $x \in [-1, 1]$ atunci avem că:

$$m(\widehat{d_1, d_2}) = \arccos \frac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{||\vec{d_1}|| \cdot ||\vec{d_2}||},$$
 (31)

sau:

$$\begin{split} \widehat{m(d_1,d_2)} &= \\ \arccos \frac{|p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}. \end{split}$$

13 Trigonometrie

1.
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
;
2. $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;
3. $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$;
4. $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;
5. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;
6. $\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;
7. $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;
8. $\tan x > x > \sin x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;
9. $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$;
10. $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$;
11. $\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$;
12. $\cot(x + y) = \frac{\cot(x)\cot(y) - 1}{\cot(x) + \cot(y)}$;
13. $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$;

14.
$$\cos(x - y) =$$

$$\cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y);$$

15.
$$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)};$$

16.
$$\cot(x - y) = \frac{\cot(x)\cot(y) + 1}{\cot(y) - \cot(y)};$$

$$17. \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

18.
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x =$$

$$1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

19.
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$
;

20.
$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$
;

$$21. \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}};$$

$$22. \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}};$$

23.
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos(x)}};$$

24.
$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos(x)}};$$

25.
$$\sin(p) + \sin(q) =$$

$$2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right);$$

26.
$$\sin(x) \cdot \cos(y) =$$

$$\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)];$$

27.
$$\sin(p) - \sin(q) =$$

$$2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p+q}{2}\right);$$

28.
$$\cos(p) + \cos(q) =$$

$$2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right);$$

$$29. \cos(x)\cos(y) =$$

$$\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)];$$

$$30. \cos(p) - \cos(q) =$$

$$-2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$
;

31.
$$\sin(x)\sin(y) =$$

$$\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)];$$

32.
$$\tan(p) \pm \tan(q) = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos(p) \cdot \cos(q)}$$
;

32.
$$\tan(p) \pm \tan(q) = \frac{\cos(p) \cdot \cos(q)}{\cos(p + q)}$$

33.
$$\cot(p) + \cot(q) = \frac{\sin(p+q)}{\sin(p)\sin q}$$

34.
$$\sin(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})};$$

35.
$$\cos(x) = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})};$$

36.
$$\tan(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})};$$

37.
$$\tan(\frac{x}{2}) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$
;