MATEMATICĂ DE TRECERE



MATERIAL ELABORAT CORESPUNZÂND CERINȚELOR DE BACALAUREAT 2016

© 2016 PRESSTERN SOLUTIONS

Cuprins

1. Operații cu numere reale	1
1.1. Radicali, puteri	1
1.1.1. Puteri	1
1.1.2. Radicali	1
1.2. Identități	2
1.3. Inegalități	3
2. Funcții	4
2.1. Noțiunea de funcții	4
2.2. Funcții injective, surjective, bijective	5
2.3. Compunerea funcțiilor	5
2.4. Funcția inversă	6
3. Ecuații și inecuații de gradul întâi	7
3.1. Ecuații de gradul întâi	7
3.2. Inecua¸tii de gradul întâi	8
3.3. Modul unui număr real	9
4. Numere complexe	10
4.1. Forma algebrică	11
4.2. Puterile numărului i	11
4.3. Conjugatul lui z	11
4.4. Modulul unui număr complex	12
4.5. Forma trigonometrică	13
4.6. Formula lui Moivre	
4.7. Forma exponențială	14
4.8. Ecuația binomă	15
5. Progresii	15
5.1. Progresiile aritmetice	15
5.2. Progresiile geometrice	16
6. Logaritmi	17
6.1. Ecuații și inecuații logaritmice fundamentale	18
6.2. Ecuații și inecuații exponențiale fundamentale	19

7. Geometrie	19
7.1. Vectori	19
7.2. Adunarea vectorilor	21
7.3. Teoreme cu vectori	26
7.4. Geometrie analitică în plan și în spațiu	28
7.4.1. Plan determinat de un punct și doi vectori necolinari paraleli cu planul	29
7.4.2. Plan determinat de trei puncte necolinare	
7.4.3. Ecuația planului prin tăieturi	32
7.4.4. Ecuația generală a planului	32
7.4.5. Poziția planelor	33
7.5. Ecuația dreptei	34
7.5.1. Ecuația dreptei determinat de un punct și de un vector paralel cu dreapta	34
7.5.2. Ecuația dreptei determinat de două puncte diferite	35
7.5.3. Ecuația generală a dreptei	35
7.5.4. Ecuația dreptei în plan	36
7.5.5. Ecuația dreptei determinat de două puncte diferite	37
7.5.6. Unghul determinat de două drepte	37
7.6. Distanța la un punct la o dreaptă (în plan)	38
7.6.1. Ecuația bisectoarei (în plan)	38
7.7. Distanța la un punct la o dreaptă (în spațiu)	39
7.8. Cercul	39
7.9. Elipsa	40
7.10. Hiperbola	41
7.11. Parabola	42
7.12. Alte aplicații cu vectori	43
8. Metoda inducției matematice	44
8.1. Axioma de recurență a lui Peano	
8.2. Metoda unducției matematice	
8.3. Variantă a metodei inducției matematice	44
9. Analiză combinatorie	44
9.1. Permutări	44
9.2. Aranjamente	
9.3. Combinări	45
9.4. Binomul lui Newton	
9.5. Suma puterilor asemenea ale primelor n numere naturale	
10. Polinoame	47
10.1. Forma algebrică a unui polinom	47

10.2. Divizibilitatea polinoamelor	47
10.3. Rădăcinile polinoamelor	48
10.4. Ecuații algebrice	49
10.5. Polinoame cu coeficienți din R, Q, Z	49
11. Permutări, matrici, determinanți	50
11.1. Permutări	
11.2. Matrici	51
11.3. Determinanţi	53
11.4. Inversa unei matrici	54
11.4.1. Tr(A)	54
11.4.2. Determinantul și rangul	55
12. Sisteme liniare	57
12.1. Notații	57
12.2. Compatibilitatea	57
12.3. Sisteme omogene (b _i =0)	58
13. Trigonometrie	58
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie	
14. Analiză matematică	62
14.1. Recurențe	62
14.1.1. Recurențe de ordin 1	62
14.1.2. Recurențe de ordin al doilea	
14.2. Limita de şiruri	62
14.2.1. Limite generale, criterii de convergență	63
14.3. Limite de funcții	66
14.3.1. Operații cu limite de funcții	67
14.3.2. Limite tip	67
14.4. Continuitatea funcțiilor	69
14.4.1. Teoreme pentru continuitatea funcțiilor	69
14.5. Funcții derivabile	71
14.5.1. Definiția derivatei într-un punct	71
14.5.2. Reguli de derivare	
14.5.3. Derivatele funcțiilor elementare	72
14.5.4. Derivatele funcțiilor compuse	
14.5.5. Derivatele de ordin superior ale unor funcții elementare.	
14.5.6. Proprietăți ale funcțiilor derivabile	
14.6. Integrale	75
14.6.1. Primitive	75

15. Primitivele funcțiilor	75
15.1. Reguli pentru integrarea generală a funcțiilor	75
15.2. Primitivele funcțiilor raționale	75
15.3. Integrale cu $r=(x^2+a^2)^{1/2}$	76
15.4. Integrale cu $s=(x^2-a^2)^{1/2}$	77
15.5. Integrale cu $t=(a^2-x^2)^{1/2}$	78
15.6. Integrale cu $R^{1/2}=(ax^2+bx+c)^{1/2}$	79
15.7. Integrale cu R ^{1/2} =(ax+b) ^{1/2}	79
15.8. Integrale de funcții trigonometrice ce conțin numai sin	79
15.9. Integrale cu funcții trigonometrice ce conțin numai cos	80
15.10. Integrale cu funcții trigonometrice ce conțin numai tan	81
15.11. Integrale cu funcții trigonometrice ce conțin atât sin cât și cos	81
15.12. Funcții logaritmice	82
15.12.1. Proprietăți ale integralei definite	82
15.12.2. Teorema Fundamentală	85
15.12.3. Inegalități	85
15.13. Alte teoreme	87
15.13.1. Funcții primitivabile	87
15.13.2. Funcții integrabile	88
15.13.3. Arii	88
16. Structuri algebrice	89
16.1. Grupul	89
16.1.1. Proprietăți și teoreme	90
16.2. Monoid	91
16.3. Inel	92
16.4. Corpuri	92
17. Spaţii vectoriale	93

1 Operații cu numere reale

1.1 Radicali, Puteri

1.1.1 Puteri

- 1. $a^{m \cdot n} = a^m \cdot a^n$
- $2. \ a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
- 3. $a^m : a^n = a^{m-n}$
- 4. $a^m : b^m = (a : b)^m$
- 5. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- 6. $(a^m)^n = a^{mn}$

Puterile numerelor reale se extiind atât pentru exponenți raționali pozitivi sau negativi, cât și pentru puterile reale fiind definite cu ajutorul șirurilor de puteri raționale. Aceste puteri au proprietăți identice cu exponenți numere naturale.

1.1.2 Radicali

- 1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, a > 0;$
- 2. $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{m}};$
- $3. \ (\sqrt[n]{a})^n = a;$
- 4. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;
- 5. $(\sqrt[n]{\frac{1}{a}})^n = \frac{1}{a};$
- 6. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$;
- 7. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$
- 8. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}};$
- 9. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^{n-m}};$
- $10. \ \sqrt[n]{a^{nm}} = a^m;$
- $11. \quad \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}};$
- $12. \quad \sqrt[m_n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^p};$
- 13. $\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[nm]{a^{pn} \cdot b^{qm}};$
- 14. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a};$

15.
$$\sqrt{a^2} = |a|$$
;

16.
$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a};$$

17.
$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}, c^2 = a^2 - b;$$

1.2 Identități

Oricare ar fi $x, y, z, t, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$ avem:

1.
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

2.
$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (ay + bx)^2$$

3.
$$a^b - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

4.
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

5.
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

6.
$$a^b + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

7.
$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

8.
$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - ab\sqrt{2})(a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})$$

9.
$$a^5 - b^5 = (a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

10.
$$a^6 + b^6 = (a^3 - 2ab^2)^2 + (b^3 - 2a^2b)^2$$

11.
$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

12.
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^2n - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$$

13.
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

14.
$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right)^2 = \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i x_j - a_j x_i)^2$$

15. (Hermite)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] = [nx],$$

cu $[\cdot]$ notăm partea întreagă. Fie x un număr real. Se numește parte întreagă a lui x, cel mai apropiat întreg mai mic sau egal cu x. Se numește parte fracționară a lui x, diferența dintre număr și partea lui întreagă. Definiția este sugerată de Axioma lui Arhimede : Pentru orice numar real x, există un număr întreg n, unic, astfel incat $n \leq x < n+1$.

11 Permutări, matrici, determinanți

11.1 Permutări

Definiție 11.1. Fie $A = \{1, 2, ..., n\}$, σ se numește **permutare de gradul** n dacă $\sigma: A \to A$ și bijectivă.

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(a) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{array}\right)$$

 S_n mulțimea permutărilor de grad n; $|S_n|=n!; 1_A=e$, permutarea identică $e=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}$; Compunerea permutărilor:

Fie $\sigma, \tau \in S_n$ atunci $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \cdots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix} \in S_n$.
Transpoziții:

Definiție 11.2. Fie $i, j \in A, i \neq j, \tau_{ij} \in S_n, \tau_{ij}$ se numește transpoziție dacă:

$$\tau_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & k & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

Observaţii:

- 1.) $(\tau_{ij})^{-1} = \tau_{ij}$;
- 2.) Numărul transpozițiilor de grad n este C_n^2 .

Signatura(semnul) unei permutări:

Definiție 11.3. Fie $(i,j) \in AxA, i < j, (i,j)$ se numește inversiune a lui σ dacă $\sigma(j) < \sigma(i)$. $m(\sigma)$ numărul inversiunilor a lui $\sigma: 0 \leq m(\sigma) \leq C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. $\epsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numește signatura lui σ .

Observații:

- 1.) Permutarea σ se numește pară dacă $\epsilon(\sigma) = 1$, respectiv impară dacă $\epsilon(\sigma) = -1;$
- 2.) Orice transpoziție este impară;

3.)
$$\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j};$$

4.) $\epsilon(\sigma \circ \tau) = \epsilon(\sigma) \cdot \epsilon(\tau).$

11.2 Matrici

Definiție 11.4. Fie $M = \{1, 2, ..., m\}$ și $N = \{1, 2, ..., n\}$. O aplicație A: $MxN o \mathbb{C}$, $A(i,j) = a_{ij}$ se numește matrice de tipul (m,n); cu m linii și ncoloane:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

și notăm $M_{m,n}(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor de tipul (m,n) cu elemente numere complexe.

Definiție 11.5. Dacă m = n atunci matricea se numește **pătratică** de prdinul n, iar mulțimea lor se notează $M_n(\mathbb{C})$.

Definiție 11.6. Două matrici

$$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$$

sunt egale dacă și numai dacă $a_{ij} = b_{ij}, \forall (i,j) \in MxN.$

Operații cu matrici:

1. (Adunarea:) Fie $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ atunci $C = A + B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, unde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ii},$

 $\forall (i,j) \in M \times N \text{ este suma lor.}$

Proprietăți: Pentru orice $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ avem că:

- (a) A + B = B + A
- (b) (A+B)+C=A+(B+C)
- (c) A + O = O + A = A(elementul neutru $O = O_{m,n}$ matricea nulă)
- (d) A + (-A) = (-A) + A = O (inversa lui A).
- 2. (Înmulţirea cu scalari): Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$ atunci $B = \lambda A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, unde $b_{ij} = \lambda a_{ij}, \forall (i,j) \in M \times N$ este produsul matricei A cu scalarul λ .

Proprietăți: Pentru $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și

 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ avem că:

- (a) $1 \cdot A = A$;
- (b) $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$;
- (c) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
- (d) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;
- (e) $\lambda(\mu A) = (\lambda \mu)A = \mu(\lambda A)$.
- 3. (Transpusa unei matrici): Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ atunci ${}^tA \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ unde ${}^ta_{ij} = a_{ji}, \forall (i,j) \in M \times N$.
- 4. (Înmulţirea matricelor): Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ atunci $C = A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbb{C})$, unde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \forall (i,j) \in M \times N$ este produsul lor. Proprietăți:
 - (a) (AB)C = A(BC);
 - (b) $AI_n = I_n$ (element neutru matricea unitate) $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ $\in M_{m,n}(\mathbb{C})$:

(c)
$$(A+B)C = AC + BC$$
;

(d)
$$A(B+C) = AB + AC$$
.

11.3 Determinanți

Fie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mulțimea matricilor pătrate de ordin n cu elemente din \mathbb{C} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C});$$

Definiție 11.7. Se nește **determinantul** matricii A numărul $\det A =$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(a)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

 $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$, unde A_{ij} este complementul algebric al elementului a_{ij} .

Dacă C = AB, atunci det $C = \det A \cdot \det B(A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.

Determinantul de ordin 2:

$$\left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinantul de ordin 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}. \\$

$$\int_{a}^{b} (g(x) - f(x)) dx.$$

16 Structuri algebrice

16.1 Grupul

În matematică, un grup este o structură algebrică ce constă dintr-o mulțime și o operație care combină două elemente ale mulțimii pentru a forma un al treilea element al aceleiași mulțimi. Pentru a fi un grup, mulțimea și operația trebuie să satisfacă o serie de condiții, denumite axiomele grupurilor, și anume asociativitatea, elementul neutru și elementul simetric. Deși acestea sunt proprietăți cunoscute ale multor structuri matematice, cum ar fi mulțimile de numere-de exemplu, mulțimea numerelor întregi împreună cu operația de adunare formează un grup-formularea axiomelor este detașată de natura concretă a grupului și de operația respectivă. Aceasta permite manevrarea unor entități de origini matematice diferite într-o manieră flexibilă, păstrând în același timp aspecte structurale esențiale comune ale multor tipuri de obiecte. Omniprezența grupurilor în numeroase domenii-atât matematice cât și din afara matematicii-face din ele un principiu central de organizare în matematica contemporană.

Un (G, \circ) , format dintr-o mulțime G și o lege de compoziție internă \circ pe G, este grup dacă sunt satisfăcute axiomele:

Axioma închiderii: Oricare ar fix și ydin G, și rezultatul operației $x\circ y$ face parte din G

Axioma asociativității: Oricare ar fi
 x,y,z din $G,\,(x\circ y)\circ z=x\circ (y\circ z)$

Axioma elementului neutru Există un element e în G, astfel încât $e \circ x = x \circ e = x$, oricare ar fi x din G

Axioma elementelor simetrice: Oricare ar fixdinG,există y în Gcu proprietatea că $x\circ y=y\circ x=e$

Dacă este satisfăcută și axioma Axioma comutativității: Oricare ar fi x,y din $G,\ x\circ y=y\circ x$ atunci grupul (G,\circ) se numește grup comutativ sau belian.

16.1.1 Proprietăți și teoreme

Teoremă 16.1. (Grupul lui Lorenz) Fie a > 0, G = (-a, a), $x \circ y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{a^2}}$. Atunci (G, \circ) este grup Abelian.

Teoremă 16.2. Fie (G, \circ) şi fie $H \subset G$. Dacă $H \neq \emptyset$ şi pentru orice $x, y \in H$ avem $x \circ y \in H$, şi pentru orice $x \in H$ avem $x^{-1} \in H$, în acest caz H este subgroup a lui G și notăm cu $H \leq G$.

Teoremă 16.3. Fie (G, \circ) un group, atunci $\emptyset \neq H \subset G$ este subgrup a lui G, dacă și numai dacă, $e \in H$ (e elementul neutru a lui G) și pentru orice $x, y \in H$ avem $x \circ y^{-1} \in H$.

Teoremă 16.4. Fie (G, \circ) un group. Fie $\mathcal{Z}_G = \{x \in G : x \circ y = y \circ x, \forall y \in G\}$. Atunci \mathcal{Z}_G este grup abelian.

Teoremă 16.5. Fie (G, \cdot) un grup. Atunci $H = \{e, a, a^2, a^3, ..., a^n, ...\} \cup \{a^{-1}, a^{-2}, ...\}$ este subrup a lui G și senumește subrup generat de a care se notează cu $H = \langle a \rangle$.

Teoremă 16.6. Fie G un grup și $H, K \leq G$ atunci $(H \cap K) \leq G$.

Teoremă 16.7. Fie (G, \circ) şi (G', \cdot) grupuri. Spunem că grupurile G şi G' sun izomorfe dacă şi numai dacă există $f: G \to G'$ o funcție bijectiă , pentru care $f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2), \forall x_1, x_2 \in G$ şi f nu este bijectiă atunci f este morfism de grupuri. Dacă G = G' şi f este izomorfism, atunci f este automorfism.

Teoremă 16.8. Fie (G, \circ) şi (G', \cdot) grupuri, fie $f : G \to G'$ un morfism. Atunci $f(e_1) = e_2$, $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$, $x \in G$ şi $f(x^n) = [f(x)]^n \forall x \in G$.

Teoremă 16.9. Fie $\ker(f) = \{x \in G : f(x) = e_2\}$, atunci $\ker \leq G$, respectiv $Im(f) \leq G'$.

Teoremă 16.10. Fie (G, \circ) un grup şi $H \leq G$ un subrup al lui G şi fie $xH = xh|h \in H$, $x \in G$. $x, y \in G$ atunci xH = yH, dacă şi numai dacă $y^{-1}x \in H$.

Teoremă 16.11. (Lagrange) Fie (G, \cdot) un grup finit și fie $H \leq G$ un subrup a lui G. Atunci |H||G|, unde |G| numărul elementelor a lui G.

Teoremă 16.12. Fie G un grup cu n elemente. Atunci ord(a)|n, unde $ord(a) = min\{k : a^k = e\}$.

Teoremă 16.13. Dacă (G, \cdot) este group cu |G| = p elemű csoport, unde p prim, atunci G ciclic.

Teoremă 16.14. Fie G, G' două grupuri ciclic cu acelasi ordin. Atunci $G \cong G'$.

Teoremă 16.15. (Cauchy) Fie (G, \cdot) este grup finit cu ordin p, unde p este prim, p||G|, atunci $\exists x \in G$, astfel încât ord(x) = p.

Definiție 16.1. Fie (G, \cdot) un grup și p un număr prim, astfel încât $|G| = p^m \cdot r$, $p \nmid r$, atunci un grup de ordin p^m care este subgrup a lui G, atunci subgrupul se numeste subgrup Sylow de oridn p.

Teoremă 16.16. (Feit-Thomson) Orice grup simplu cu ordin finit este abelian.

Teoremă 16.17. Fie $N_G(H) = \{g \in G | gHg^{-1} = H\}$. Dacă $H \leq G$, atunci $H \leq N_G(H)$.

Teoremă 16.18. Există un morfism $f: \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}$ surjectiv între (\mathbb{Q}_+^*, \cdot) și $(\mathbb{Q}, +)$

Teoremă 16.19. Fie p un număr prim și fie $|G| = p^2$. Atunci G este Abelian.

Teoremă 16.20. Dacă $G \cong \mathbb{Z}_n$, atunci G este un grup cu ordin n.

Teoremă 16.21. $Dacă |G| = p^3$, atunci $x^p \in Z(G)$.

16.2 Monoid

În matematică monoid este o structură algebrică formată dintr-o mulțime S și o lege de compoziție internă asociativă și cu element neutru. Astfel, un monoid este un semigrup cu element neutru.

Operația monoidului este adesea notată multiplicativ (de exemplu, *), adică rezultatul aplicării operației asupra perechii ordonate (x, y) este notat $x * y, x \cdot y$ sau chiar xy.

Reluând definiția, sunt îndeplinite următoarele reguli:

* Lege de compoziție internă * : $A \times A \to A$ sau oricare ar fi x și y două elemente din A, avem adevărată relația: $x \cdot y \in A$

(Asociativitate) Oricare ar fi $x,\,y$ și
 ztrei elemente din A,avem adevărată relația:
 x*(y*z)=(x*y)*z.

(Element neutru): Există e un element din A astfel încât: oricare ar fi x un element arbitrar din A, avem relațiile: e*x=x*e=x.

16.3 Inel

Structura $(A, +, \cdot)$ -t este inel dacă:

(A, +) este Abelian

 (A, \cdot) este monoid și

"·" distributiv față "+":

$$-x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

$$-(y+z)\cdot x = y\cdot x + z\cdot x \forall x, y, z \in A.$$

dacă $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in A$, atunci inelul este commutativ.

Exemple:

- 1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$;
- 2. $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ unde $\mathbb{Z}[i] = \{z = a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\}.$
- 3. $(\mathbb{R}_n, \oplus, \otimes)$;
- 4. $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$;
- 5. $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.

Fie $(A, \bot, *)$ şi (A', \triangle, \circ) inele:

Definiție 16.2. $f: A \to A'$ -et este morfism de inele dacă f este bijectivă şi $f(x \perp y) = f(x) \triangle f(y), f(x * y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in A.$

16.4 Corpuri

Fie $(K,+,\cdot)$ structură algebrică și
, $K\times K\to K, (x,y)\to x+y$, $K\times K\to K, (x,y)\to x\cdot y, K-$ nevidă;