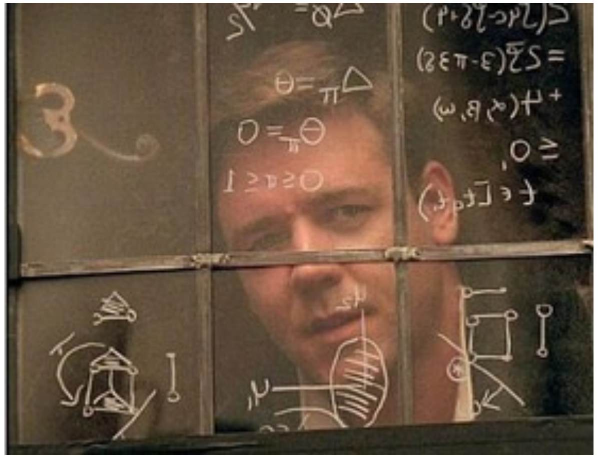
Intro. alla Teoria dei Giochi – Seconda Parte

Christian Esposito

Dipartimento di Informatica
Università di Salerno

esposito@unisa.it



Roadmap

- Giochi Bayesiani
- Giochi Cooperativi
  - Problemi di Contrattazione
  - Problemi di Coalizione

Giochi Bayesiani – 1/10

- In molte situazioni è poco verosimile avere una completa informazione sugli elementi di un gioco, come lo spazio delle azioni e i payoff dei giocatori.

- Questo perché ogni giocatore può decidere di tenere le proprie informazioni private.

- Un modo per indirizzare questa incertezza è ricorrere alla formulazione dei cosiddetti giochi Bayesiani.

Giochi Bayesiani – 2/10

- DEFINIZIONE: si intende per tipo di un giocatore in un gioco Bayesiano tutta l'informazione che è rilevante per le decisioni di tale giocatore e che non è conoscenza comune tra tutti i giocatori.

- Nei giochi Bayesiani, sussiste una forte differenza tra azione e strategia:
  - un'azione per il giocatore i-esimo è un elemento di C_i, ovvero l'insieme delle azioni a sua disposizione per rispondere agli avversari;
  - una strategia è una funzione del tipo del giocatore e null'altro, $s_i : T_i \rightarrow C_i$.

Giochi Bayesiani – 3/10

- L'opinione per l'i-esimo giocatore è definita come una funzione di probabilità condizionale dei tipi di tutti gli altri giocatori, dato il proprio: $Pr_i(t_{-i}|t_i)$. Tale opinione cattura l'incertezza del gioco, ed è alla base della formulazione di un gioco a conoscenza incompleta.
- In un gioco Bayesiano:
  - la natura assegna i tipi ai vari giocatori;
  - i giocatori osservano il proprio tipo, noto solo ad essi;
  - I giocatori simultaneamente scelgono la propria azione, sulla base della propria opinione verso gli altri;
  - I giocatori ricevono il payoff risultante.

Giochi Bayesiani – 4/10

- Esempio: consideriamo un gioco statico Bayesiano dove un giocatore ha un tipo noto, mentre il secondo può assumere due possibili tipi, in maniera trasparente rispetto al primo giocatore.

$I \backslash II^1$	A	B
A'	(1, 2)	(0, 1)
B'	(0, 4)	(1, 3)

$I \backslash II^2$	A	B
A'	(1, 3)	(0, 4)
B'	(0, 1)	(1, 2)

  - I payoff dipendono non solo dall'azione di giocata, ma anche dal tipo del giocatore;
  - Insieme dei tipi dei giocatori: $T_1=\{I\}$ e $T_2=\{II^1;II^2\}$
  - Insieme delle azioni $C_I=\{A';B\}$ e $C_{II}=\{A;B\}$.

Giochi Bayesiani – 5/10

- DEFINIZIONE: Una soluzione appropriata di un gioco Bayesiano prende il nome di <u>equilibrio di Nash Bayesiano</u>, definito come la strategia s* che soddisfa la seguente condizione per tutti i giocatori:

$$s_i^* = \max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in \mathrm{T}_{-i}} u_i(s_1^*(t_1), \dots, s_{-i}^*, a_i, s_{i+1}^*(t_{i+1}), \dots, s_N^*(t_N); t) \mathrm{Pr}(t_{-i}|t_i)$$

- Ovvero, ogni tipo del giocatore sceglie una strategia che massimizza l'utilità attesa date le azioni di tutti i tipi degli altri giocatori e l'opinione del giocatore sui tipi degli altri.

Giochi Bayesiani – 6/10

Gioco dello sceriffo

- Uno sceriffo deve fronteggiare un sospetto armato. Entrambi devono simultaneamente decidere se sparare o meno.
- Il sospetto può essere del tipo "criminale" o "civile", mentre lo sceriffo ha solo un tipo. Il sospetto conosce il tipo dello sceriffo e il proprio, ma lo sceriffo non conosce il tipo del sospetto:
  - sussiste una probabilità p che il sospetto sia un criminale, nota ad entrambi.

Giochi Bayesiani – 7/10

- Lo sceriffo vorrebbe difendersi e sparare se il sospetto sparasse, o non sparare se il sospetto non lo facesse (anche se è un criminale). Il sospetto vorrebbe sparare se fosse un criminale, anche se lo sceriffo non fosse disposto a sparare. Se il sospetto fosse un civile, preferirebbe non sparare, anche se lo sceriffo lo facesse.

Sos\Scer	S	N
S	(-3, -1)	(-1, -2)
N	(-2, -1)	(0, 0)

Tipo = "Civile" [1-p]

Sos\Scer	S	N
S	(0, 0)	(2, -2)
N	(-2, -1)	(-1, 1)

Tipo = "Criminale" [p]

Giochi Bayesiani – 7/10

- Lo sceriffo vorrebbe difendersi e sparare se il sospetto sparasse, o non sparare se il sospetto non lo facesse (anche se è un criminale). Il sospetto vorrebbe sparare se fosse un criminale, anche se lo sceriffo non fosse disposto a sparare. Se il sospetto fosse un civile, preferirebbe non sparare, anche se lo sceriffo lo facesse.

Sos\Scer	S	N
S	(-3, -1)	(-1, -2)
N	(-2, -1)	$\boxed{(0, 0)}$

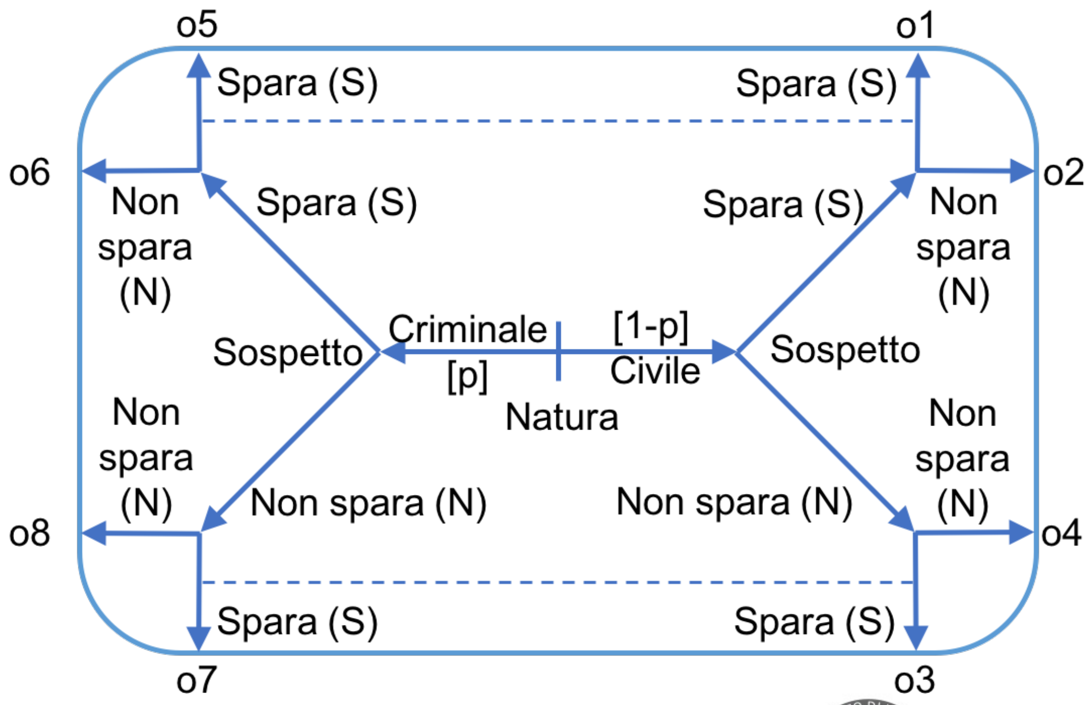
Tipo = "Civile" [1-p]

Sos\Scer	S	N
S	$\boxed{(0, 0)}$	(2, -2)
N	(-2, -1)	(-1, 1)

Tipo = "Criminale" [p]

Giochi Bayesiani – 8/10

- Per poter determinare la strategia migliore è considerare l'opinione dello sceriffo. Adottiamo una rappresentazione diversa:
- Data la matrice di payoff, bisogna calcolare l'utilità di ogni azione a_i.
- Poniamo il gioco in <u>forma Bayesiana normale</u>.



Giochi Bayesiani – 9/10

		(S, S)	(S, N)	(N, S)	(N, N)
Sceriffo	(S, S)	(p-1, 3(p-1))	(-p-1, 5p-3)	(2(p-1), p-1)	(-2, 3p-1)
	(S, N)	(-1, p-3)	(2p-1, 2p-3)	(-2, -p-1)	(3p-2, -1)
	(N, S)	(p-1, 2(p-1))	(-p-1, 4p-2)	(0, 0)	(-2p, 2p)
	(N, N)	(-1, -2)	(2p-1, p-2)	(-p, -2p)	(p, -p)

- Il primo elemento corrisponde al tipo "criminale".

Giochi Bayesiani – 9/10

		(S, S)	(S, N)	(N, S)	(N, N)
Sceriffo	(S, S)	(p-1, 3(p-1))	(-p-1, 5p-3)	(2(p-1), p-1)	(-2, 3p-1)
	(S, N)	(-1, p-3)	(2p-1, 2p-3)	(-2, -p-1)	(3p-2, -1)
	(N, S)	(p-1, 2(p-1))	(-p-1, 4p-2)	(0, 0)	(-2p, 2p)
	(N, N)	(-1, -2)	(2p-1, p-2)	(-p, -2p)	(p, -p)

- Il primo elemento corrisponde al tipo "criminale".
- Il secondo elemento corrisponde al tipo "civile".

Giochi Bayesiani – 9/10

		(S, S)	(S, N)	(N, S)	(N, N)
Sceriffo	(S, S)	(p-1, 3(p-1))	(-p-1, 5p-3)	(2(p-1), p-1)	(-2, 3p-1)
	(S, N)	(-1, p-3)	(2p-1, 2p-3)	(-2, -p-1)	(3p-2, -1)
	(N, S)	(p-1, 2(p-1))	(-p-1, 4p-2)	(0, 0)	(-2p, 2p)
	(N, N)	(-1, -2)	(2p-1, p-2)	(-p, -2p)	(p, -p)

- Il primo elemento corrisponde al tipo “criminale”.
- Il secondo elemento corrisponde al tipo “civile”.
- Il primo elemento di utilità è assegnato allo sceriffo, il secondo al sospetto.

Giochi Bayesiani – 9/10

		(S, S)	(S, N)	(N, S)	(N, N)
Sceriffo	(S, S)	($\boxed{p-1}$, 3(p-1))	(-p-1, 5p-3)	(2(p-1), p-1)	(-2, $\boxed{3p-1}$)
	(S, N)	(-1, p-3)	($\boxed{2p-1}$, 2p-3)	(-2, -p-1)	(3p-2, $\boxed{-1}$)
	(N, S)	($\boxed{p-1}$, 2(p-1))	(-p-1, 4p-2)	($\boxed{0}$, 0)	(-2p, $\boxed{2p}$)
	(N, N)	(-1, -2)	($\boxed{2p-1}$, p-2)	(-p, -2p)	($\boxed{p}$, $\boxed{-p}$)

- Determiniamo il punto di equilibrio in questa matrice, come fatto precedentemente.
- Ho un punto di equilibrio in (N, N) in risposta a (N, N), che risulta la strategia dominante.

Giochi Bayesiani – 10/10

- Pertanto ho che se il sospetto non spara, la migliore risposta è quella di non sparare.

- Cosa deve fare lo sceriffo se il sospetto spara? L'analisi della dominanza non ci consente di dare una risposta, e devo ricorrere alle opinioni che lo sceriffo dispone sul tipo del sospetto.

- Nello specifico definisco una funzione x di opinione dello sceriffo per cui chi spara è il criminale, 1-x è l'opinione che il sospetto è un civile.

Giochi Bayesiani – 10/10

- Data x ho che l'utilità attesa è pari a:

- U(Spara | x) = U(Spara | "Criminale spara") + U(Spara | "Civile spara") = -(1 – x) = x - 1
- U(Non Spara | x) = U(Non Spara | "Criminale spara") + U(Non Spara | "Civile non spara") = -2x

- Lo sceriffo spara se:
- U(Spara | x) > U(Non Spara | x) => $x > 1/3$

I Giochi Cooperativi – 1/2

- Con la teoria dei giochi non-cooperativi, si analizzano le strategie e le scelte decisionali derivanti dall'interazione tra giocatori competitivi. Con la teoria dei giochi cooperativi, si studiano i comportamenti di giocatori razionali quando cooperano.

- In questo contesto, i giocatori possono effettuare degli accordi tra loro, che impattano sulle loro scelte strategiche, e l'utilità che ne consegue.

I Giochi Cooperativi – 2/2

- La teoria dei giochi cooperativi si divide in due branche principali:
  - La teoria di contrattazione – descrive le contrattazioni tra i giocatori che devono concordare sui termini di cooperazione.
  - I giochi di coalizione – analizza la formazioni di coalizioni tra i giocatori, che possono rafforzare la loro posizione nel gioco.

La Teoria della Contrattazione – 1/9

- Una contrattazione è definita come una situazione in cui due (o più) giocatori possono beneficiare mutuamente dal raggiungere un certo accordo ma anche degli interessi in conflitto circa i termini dell'accordo. Ovviamente, non è possibile imporre nessun accordo senza che le parti si accordino.

- La teoria della contrattazione studia ed analizza tali situazioni in una varietà di problemi, e coinvolge la risoluzione di una serie di problemi.

La Teoria della Contrattazione – 2/9

- Ogni problema di contrattazione è caratterizzato da una serie di proprietà chiave:
  - Efficienza – bisogna determinare l'accordo che è migliore per tutte le parti, identificando l'insieme dei risultati efficienti per le parti.
  - Distribuzione – Selezionare uno dei risultati efficienti come soluzione del problema.
  - Coordinamento delle strategie – Una volta che la soluzione è stata identificata, bisogna delineare le strategie che consentono il suo raggiungimento.
  - Rafforzamento dell'accordo – i termini dell'accordo devono essere trovati così da imporre l'implementazione delle strategie da parte dei negoziatori.

La Teoria della Contrattazione – 3/9

- Nella teoria della contrattazione, si distinguono due concetti chiave:
  - il processo di contrattazione – la procedura che i negoziatori devono seguire per raggiungere un accordo rispetto ad un determinato risultato della contrattazione;
  - il risultato della contrattazione – il risultato del processo di contrattazione.
- Nel suo lavoro fondamentale, Nash ha adottato un approccio assiomatico al processo di contrattazione, studiando il risultato della contrattazione che soddisfi delle proprietà "ragionevoli" rispetto a come i negoziatori raggiungono un accordo.

La Teoria della Contrattazione – 4/9

- Ipotizziamo due giocatori che stanno cercando di raggiungere un accordo rispetto ad un risultato in uno spazio X. Ogni i-esimo giocatore ha una funzione di utilità u_i, definita sullo spazio $X \cup \{D\}$, dove D è il risultato se i due giocatori falliscono di trovare un accordo, detto risultato del disaccordo.
- Si definisce lo spazio S come l'insieme di tutte le possibili utilità che possono ottenere i due giocatori:

$$S = \{(u_1(x_1), u_2(x_2)) | x = (x_1, x_2) \in X\}$$

La Teoria della Contrattazione – 5/9

- Definiamo la coppia $d=(d_1,d_2)$ con $d_1=u_1(D)$ e $d_2=u_2(D)$ come il punto di disaccordo o il punto di minaccia.
- Un problema di contrattazione è definito come la coppia (S, d) tale che
  - S è un insieme convesso e compatto;
  - Esiste $s \in S$ tale che $s > d$.
- Siamo interessati a una soluzione di contrattazione che è una funzione f che specifica il risultato unico $f(S, d) \in S$ per ogni problema di contrattazione (S, d).

La Teoria della Contrattazione – 6/9

- Nash ha stabilito 4 assiomi circa le proprietà assiomatiche che una soluzione di contrattazione deve avere:
  - Efficienza di Pareto – una soluzione di contrattazione $f(S, d)$ è efficiente secondo Pareto se non esiste un punto $(s_1, s_2) \in S$ tale che $s \geq f(S, d)$ e $s_i \geq f_i(S, d)$ per ogni i.
  - Simmetria – la soluzione di contrattazione non discrimina tra i negoziatori e solo indistinguibili: se $s_1 = s_2$ allora $f_1(S, d) = f_2(S, d)$.
  - Invarianza a rappresentazioni di utilità equivalenti – Se si trasforma un problema di contrattazione (S,d) in uno (S', d') con $s'_i = \alpha_i s_i + \beta_i$ e $d'_i = \alpha_i d_i + \beta_i$ con $\alpha_i > 0$, allora $f_i(S', d') = \alpha_i f_i(S, d) + \beta_i$.

La Teoria della Contrattazione – 7/9

- Indipendenza alle alternative irrilevanti - Se la contrattazione in S ha una soluzione nel sottoinsieme S' di S, allora una ipotetica contrattazione in S' ha lo stesso risultato. Dati due problemi di contrattazione (S, d) e (S', d) tale che S' ⊆ S, se f(S, d) ∈S' allora f(S', d) = f(S, d).
- TEOREMA: Esiste una sola soluzione di contrattazione capace di soddisfare i 4 assiomi di Nash, e tale soluzione è la coppia di utilità (s^*_1, s^*_2) che risolve la seguente ottimizzazione:

$$\max_{(s_1,s_2)} (s_i - d_1)(s_2 - d_2), s.t. (s_1, s_2) \in S, (s_1, s_2) \geq (d_1, d_2)$$

(s^*_1, s^*_2) prende il nome di <u>soluzione di contrattazione di Nash</u>.

La Teoria della Contrattazione – 8/9

- Uno degli aspetti chiavi della soluzione di contrattazione di Nash è la scelta del punto di minaccia, che spesso dipende dall'applicazione.
- Una regola empirica è di scegliere un punto che i giocatori possono migliorare come risultato della contrattazione.

- La nostra trattazione si è limitato al caso di giochi di contrattazione tra due giocatori, ma è facilmente estendibile a casi di più giocatori.

La Teoria della Contrattazione – 9/9

- La soluzione di contrattazione di Nash è affetta da varie limitazioni, come il richiedere la convessità dello spazio di utilità, che hanno portato all'emergere di altri concetti di soluzione per i problemi di contrattazione, come la soluzione di Kalai-Smorodinsky o la soluzione di contrattazione egualitaria.

Esempi di Contrattazione – 1/5

- Due giocatori stanno negoziando per la suddivisione di una torta di dimensione 1. Indichiamo con x la porzione di torta che il giocatore 1 riceverà, così che la porzione della torta per il giocatore 2 sarà pari a $1 - x$. Denotiamo con $u_1(x)$ e $u_2(x)$ le utilità dei due giocatori, rispettivamente.

- La soluzione di contrattazione di Nash è la porzione x^* che massimizza il prodotto $(u_1(x) - d_1)(u_2(x) - d_2)$, dove $x \in [0, 1]$ e (d_1, d_2) sono le utilità nel punto di disaccordo.

Esempi di Contrattazione – 2/5

- Se si sceglie che $u_1(x) = x$ e $u_2(x) = 1 - x$, con $d_1 = d_2$, allora si ha che la soluzione di contrattazione di Nash impone che i giocatori dividano la torta in parti uguali, ovvero $x^* = 0,5$.

Esempi di Contrattazione – 3/5

- Consideriamo due uomini, uno ricco e uni povero, che incontrano un genio per la strada. Il genio offre loro \$100 a condizione che i due si accordino su come dividerli. Il problema esprime una comune situazione di contrattazione in cui due individui hanno un incentivo a cooperare ma devono negoziare su come farlo.

- Ipotizziamo che il ricco ha un conto in banca con un saldo pari a $w_1 = \$10^{10}$, mentre il povero ha un conto con il saldo pari a $w_2 = \$10$.

Esempi di Contrattazione – 4/5

- Per formulare questo problema come una contrattazione, bisogna definire lo spazio S e il punto di disaccordo d. Si consideri le utilità logaritmiche, e si scelga come punto di disaccordo i saldi iniziali dei conti in banca dei due giocatori: $d_1 = \log w_1$ e $d_2 = \log w_2$.
- Se indichiamo con x la porzione dei $100 che il ricco ottiene, allora la sua utilità sarà pari a $u_1 = \log(10^{10} + x)$, mentre per il povero abbiamo $u_2 = \log(10 +(100 - x))$.

Esempi di Contrattazione – 5/5

- Risolvendo la massimizzazione del prodotto $(u_1(x) - d_1)\ (u_2(x) - d_2)$ con $x \in [0, 100]$, la soluzione di contrattazione di Nash è pari a $x^* \approx 66$.
- Questa soluzione è possibile trovarla graficamente intersecando i confini della regione di utilità con l'iperbole definita da $(u_1(x) - d_1)\ (u_2(x) - d_2) = m$.

I Giochi di Coalizione – 1/5

- I giochi di coalizione coinvolgono un insieme di giocatori, denominato N, che cercano di formare dei gruppi cooperativi, ovvero coalizioni, così da rafforzare la propria posizione in una certa situazione. Ogni coalizione $S \subseteq N$ rappresenta un accordo tra i giocatori di S per agire come una singola entità.
- Il valore di coalizione, denominato con v, quantifica la valenza di una coalizione in un gioco. La definizione di questo valore determina la forma e il tipo del gioco.

I Giochi di Coalizione – 2/5

- DEFINIZIONE: Un gioco di coalizione è definito dalla coppia (N, v), dove N è l'insieme dei giocatori, e v è la corrispondenza che determina i payoff che i giocatori ricevono dal gioco.

- La forma più comune di un gioco di coalizione è la forma caratteristica, dove il valore di coalizione S dipende solamente dai membri della coalizione e non ha alcuna dipendenza su come i membri in N\S sono strutturati.

I Giochi di Coalizione – 3/5

- Possiamo distinguere tra varie classi di giochi di coalizione:
  - Quelli ad utilità trasferibile (TU) – v è una funzione che assegna ad ogni coalizione un numero reale che ne quantifica il guadagno, che viene diviso opportunamente tra i membri della coalizione con una regola di fairness. La quantità ricevuta dall'i-esimo giocatore risultante dalla divisione di v(S) costituisce il suo payoff, ed è denotato con x_i. Il vettore x rappresenta l'allocazione del payoff.
  - Quelli ad utilità non trasferibile (NTU) – quando non è possibile assegnare un reale o sussistono restrizione sulla sua allocazione. Il payoff di un giocatore dipende dalle azioni comuni dei membri della coalizione.

I Giochi di Coalizione – 4/5

- Quelli in forma di partizione – a differenza di quelli nella forma caratteristica, il valore di una coalizione S ha una forte dipendenza su come i *giocatori* in N\S sono strutturati. Se si definisce una collezione di coalizioni B = $\{B_1, \ldots, B_l\}$, tale che $\forall$ i $\neq$j, $B_i \cap B_j = \emptyset$ e $\bigcup^{l}_{i=1} B_i = N$, il valore della coalizione S $\in$ B è definito come v(S, B).

- In molti *giochi* di coalizione, i *giocatori* sono interconnessi e comunicano per mezzo di collegamenti bi-direzionali in un *grafo*. In queste situazioni il valore della coalizione può dipendere anche da come i membri di una coalizione sono collegati. Pertanto, sono stati introdotti i *giochi* in forma di *grafo*.

I Giochi di Coalizione – 5/5

- I giochi di coalizione si suddividono in tre classi:
  - Classe I: I giochi di coalizione canonica – dove la grande coalizione di tutti i giocatori è la struttura ottima e di maggiore importanza.
  - Classe II: I giochi di formazione di coalizioni – dove si studia come determinare un insieme di coalizione e la loro struttura ottimale;
  - Classe III: I giochi di grafi di coalizione – Dove viene investigata la struttura di rete a grafo per la determinazione della migliore coalizione e cooperazione.

I Giochi di Coalizione Canonici – 1/19

- I giochi di coalizione canonici sono giochi dove il valore di coalizione è considerato nella forma caratteristica e la cooperazione è sempre un beneficio per i giocatori.
- In questi giochi si assume che la formazione di grandi coalizioni comporti un guadagno superiore rispetto a che i giocatori si comportino in maniera competitiva. Questa caratteristica prende il nome di <u>super-additività</u>, dove la cooperazione non è mai un freno al payoff ottenibile dai giocatori, ma sempre un vantaggio.

I Giochi di Coalizione Canonici – 2/19

- Siccome i giochi canonici sono super-additivi per definizione, è sempre l'obbiettivo dei giocatori di formare la cosiddetta grand coalition N (ovvero la coalizione dove figurano tutti i giocatori), dal momento che v(N) è al più pari se non maggiore alla quantità ricevuta dai giocatori in ogni insieme disgiunto delle coalizioni che possono formare.

- Ciò implica che la loro risoluzione richiede di studiare le proprietà di questa grande coalizione.

I Giochi di Coalizione Canonici – 3/19

- I due aspetti chiave sono fondamentali nei giochi canonici:
  - trovare un'allocazione di payoff che garantisce che nessun gruppo di giocatori ha un incentivo per lasciare la grand coalition (ottenendo una stabile coalizione);
  - stimare i guadagni che la grand coalition può offrire conseguentemente i criteri di fairness da seguire per la distribuzione di questi guadagni (ottenendo una grand coalition che è "fair").
- Il concetto di soluzione più noto per i giochi di coalizione canonici è il core.

I Giochi di Coalizione Canonici – 4/19

- Il <u>core</u> di un gioco canonico è direttamente legato alla stabilità della grand coalition, per cui i giocatori hanno sempre un incentivo a formare data la proprietà di super-additività. Il core è l'insieme delle allocazioni di payoff garantendo che nessun gruppo di giocatori ha un incentivo a lasciare N per formare altre coalizioni $S \subset N$.
- DEFINIZIONE: Consideriamo un gioco TU, un vettore di payoff $x \in \mathbb{R}^N$ per suddividere v(N) è <u>razionale di gruppo</u> se

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

I Giochi di Coalizione Canonici – 5/19

- DEFINIZIONE: Consideriamo un gioco TU, un vettore di payoff $x \in \mathbb{R}^N$ è <u>individualmente razio-nale</u> se ogni giocatore può ottenere un bene-ficio non meno che agendo da solo $x_i \geq v(\{i\}), \forall i \in N$.

- DEFINIZIONE: Dato un gioco di coalizione canonico TU (N, v), il core è definito come l'insieme di imputazioni per cui nessuna coalizione S ⊂ N ha un incentivo a rigettare l'allocazione di payoff per N, deviare dalla grand coalition e formare S:

$$C_{TU} = \left\{ x: \sum_{i \in N} x_i = v(N), \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \forall S \subseteq N \right\}$$

I Giochi di Coalizione Canonici – 6/19

- Il core garantisce che i giocatori non hanno incentivi per deviare dalla grand coalition, perché ogni allocazione di payoff x che è nel core garantisce almeno una quantità di utilità uguale a v(S) per ogni $S \subset N$. Chiaramente, ogni volta che si è in grado di trovare un'allocazione di payoff che appartiene al core, allora la grand coalition è una soluzione stabile ed ottimale del gioco.
- Per risolvere i giochi canonici NTU usando il core, il valore v deve soddisfare le seguenti condizioni, per ogni coalizione S:

I Giochi di Coalizione Canonici – 7/19

- Il valore $v(S)$ di ogni coalizione S deve essere un sottoinsieme chiuso e convesso di $\mathbb{R}^S$.
- Il valore $v(S)$ deve essere comprensivo, ovvero se $x \in v(S)$ e $y \in \mathbb{R}^S$ sono tali che $y \leq x$, allora $y \in v(S)$.
- L'insieme $\{x \mid x \in v(S) \text{ e } x_i \geq z_i, \forall i \in S\}$ con $z_i = \max \{y_i \mid y \in v(\{i\})\} < \infty \ \forall i \in N$ deve essere un sotto-insieme limitato di $\mathbb{R}^S$.

- La comprensività implica che se una certa allocazione x è ottenibile dai membri della coalizione S, allora, cambiando le loro strategie, i membri di S ottengo ogni allocazione y dove $y \leq x$.

I Giochi di Coalizione Canonici – 8/19

- L'ultima proprietà implica che, per ogni coalizione S, l'insieme dei vettori in v(S) in cui ogni giocatore in S riceve non meno che il massimo ottenibile in maniera non-cooperativa.
- Per un gioco canonico NTU (N, v), dove v soddisfa le precedenti proprietà, il core si definisce come
$$C_{NTU} = \{x \in v(N) | \, \forall S, \nexists y \in v(S) \colon \, y_i > x_i, \forall i \in S\}$$
- I core per giochi TU e NTU non sono sempre garantiti di esistere, e in molti giochi il core può essere vuoto. Ciò significa che la grand coalition non è stabile.

I Giochi di Coalizione Canonici – 9/19

- In generale, dato un gioco di coalizione TU (N, v) ed un'imputazione x ∈ $\mathbb{R}^N$, il core è trovato dal seguente problema lineare (PL):

$$\min_{x} \sum_{i \in N} x_i, s.t. \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subseteq$$

- L'esistenza del core è legata alla fattibilità di questo PL, la cui risoluzione, però, è NP-completo.

- Trovare l'esistenza del core e determinarne le allocazioni che sono al suo interno è possibile con vari approcci.

I Giochi di Coalizione Canonici – 10/19

- TEOREMA di Bondareva-Shapley: Il core di un gioco è non vuoto se e solo se il gioco è bilanciato.

- DEFINIZIONE: un gioco canonico TU (v, N) è definito <u>bilanciato</u> se e solo se la seguente disuguaglianza è soddisfatta per tutta la raccolta di pesi non negativi $\mu = (\mu(S))_{S \subseteq N}$ che hanno valori in [0, 1] assegnati ad ogni coalizione.

$$\sum_{S \subseteq N} \mu(S) v(S) \leq v(N)$$

I Giochi di Coalizione Canonici – 11/19

- Per giochi non-canonici NTU, due differenti definizioni esistono e sono basate sul fatto che il valore v in un gioco NTU è un insieme e non una funzione.

- Come soluzione, il core ha tre principali difetti:
  - Il core può essere vuoto;
  - Il core può essere abbastanza grande, così selezionare un'allocazione ottimale può essere difficile;
  - In molti scenari, le allocazioni che appartengono al core possono essere non corretti per uno o più giocatori.

I Giochi di Coalizione Canonici – 12/19

- Questi difetti hanno portato la ricerca a determinare il concetto di soluzione per associare ad ogni gioco di coalizione (v, N) un univo vettore di payoff noto come il valore del gioco. Tale soluzione è stata definita in maniera assiomatica da Shapley con un mapping unico ϕ, per soddisfare tali assiomi, noto come valore di Shapley.

- Tale mapping è essenzialmente definito per giochi TU, ma esistono estensioni anche per quelli NTU.

I Giochi di Coalizione Canonici – 13/19

- ϕ_i è il payoff che un giocatore ottiene dal valore di Shapley ϕ. Shapley ha definito quattro assiomi:
  - Assioma di efficienza:

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$$

  - Assioma di simmetria: dati due giocatori i e j tali che v(S U {i}) = v(S U {j}), per ogni coalizione S che non contiene i e j, allora $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.
  - Assioma Dummy: se il giocatore i è tale che v(S) = v(S U {i}) per ogni S che non contiene i, allora $\phi_i(v) = 0$.
  - Assioma di additività: Se u e v sono funzioni caratteristiche, allora $\phi(v + u) = \phi(u + v) = \phi(u) + \phi(v)$.

I Giochi di Coalizione Canonici – 14/19

- Shapley ha dimostrato che esiste un solo mapping, $\phi(v)$, dallo spazio di tutti i giochi di coalizione a $\mathbb{R}^N$, che soddisfano tutti e quattro gli assiomi.

- Il valore di Shapley ha anche un'interpretazione legata all'ordine di partecipazione. Nel caso in cui i giocatori partecipino in ordina casuale, il payoff allocato dal valore di Shapley al giocatore è pari al contributo marginale atteso del giocatore quando partecipa alla grand coalition:

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(N - |S| - 1)!}{N!} [v(S \cup \{i\} - v(S)]$$

I Giochi di Coalizione Canonici – 15/19

- In generale, il valore di Shapley non è legato al core, ma in alcune applicazioni è possibile dimostrare che il valore di Shapley appartiene al core. Questo è un risultato interessante, dato che combina la stabilità del core e gli assiomi e la fairness del valore di Shapley.

- Per i giochi convessi, il valore di Shapley appartiene al core.

I Giochi di Coalizione Canonici – 16/19

- Un altro preminente ed interessante concetto di soluzione per i giochi canonici è il nucleolus, che è stato introdotto per giochi TU e non formalizzato per quelli NTU. La motivazione alla base è quello di trovare l'allocazione che minimizzi l'insoddisfazione dei giocatori.
- DEFINIZIONE: La misura dell'insoddisfazione con una allocazione $x \in \mathbb{R}^N$ per una coalizione S è definita come l'eccesso e(x, S):

$$e(x,S) = v(S) - \sum_{j \in S} x_j$$

I Giochi di Coalizione Canonici – 17/19

- DEFINIZIONE: Il kernel di v è l'insieme di tutte le allocazioni $x \in \mathbb{R}^N$ tali che:

$$\max_{S \subseteq N \setminus \{j\},\, i \in S} e(x,S) = \max_{G \subseteq N \setminus \{i\},\, j \in S} e(x,G)$$

- Il kernel indica che se i giocatori i e j sono nella stessa coalizione, allora il più grande eccesso che i può ottenere nella coalizione senza j è pari al più grande eccesso che j avrebbe senza i nella coalizione.
- Un'allocazione x che garantisce la minimizzazione di tutti gli eccessi è una soluzione interessante e rappresenta la principale motivazione del nucleulus.

I Giochi di Coalizione Canonici – 18/19

- DEFINIZIONE: Un vettore $y = (y_1, \dots, y_k)$ è detto lessigraficamente minore del vettore $z = (z_1, \dots, z_k)$ (denotato con $y <_{lex} z$), se $\exists l \in \{1, \dots, k\}$ dove $y_1 = z_1$, $y_2 = z_2, \dots, y_{l-1} = z_{l-1}$, $y_l < z_l$.
- DEFINIZIONE: Indichiamo con $O(x)$ il vettore di tutti gli eccessi in un gioco canonico (v, N) sistemati in ordine decrescente. Un'imputazione $x \in \mathbb{R}^N$ è un <u>nucleolus</u> se, per ogni altra imputazione δ, $O(x) <_{lex} O(\delta)$. Quindi, il nucleolus è l'imputazione x che minimizza gli eccessi in ordine decrescente a partire con quello massimo.

I Giochi di Coalizione Canonici – 19/19

- In un gioco di coalizione canonico il nucleolus esiste ed è unico. Il nucleolus è ragionale di gruppo e di individuo, appartiene al kernel e soddisfa gli assiomi di simmetria e dummy di Shapley.

- Se il core è non nullo, il nucleolus è il core.

- Quindi, il nucleolus è la migliore allocazione rispetto al criterio min-max.

Esempi di Giochi di Coalizione Canonici - 1/6

- Consideriamo un gioco TU di votazione per maggioranza con tre giocatori. I giocatori singolarmente non hanno potere decisionale, quindi v({1}) = v({2}) = v({3}) = 0. Ogni coalizione con almeno due giocatori possiede i due terzi del potere decisionale, quindi = v({1,2}) = v({2,3}) = v({1,3}) = 2/3. La grand coalition ha la pienezza decisionale, quindi v({1,2,3}) = 1.
- Chiaramente è un gioco super-additivo ed è in forma caratteristica, quindi classificabile come canonico. Studiamone l'allocazione di payoff.

Esempi di Giochi di Coalizione Canonici - 2/6

- Il core di questo gioco si determina considerando le seguenti disuguaglianze:
  - $x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1,2,3\}) = 1 \Rightarrow x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$
  - $x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\}) = 2/3$, $x_2 + x_3 \geq v(\{2, 3\}) = 2/3$, $x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\}) = 2/3$.
- In base a queste relazioni, il core del gioco è l'univoco punto x = [1\3, 1\3, 1\3], che corrisponde con l'equa divisione tra i giocatori del potere decisionale

Esempi di Giochi di Coalizione Canonici - 3/6

- Un uomo ha tre mogli ed è obbligato a un contratto matrimoniale che specifica che loro debbano ricevere 100, 200 e 300 unità rispettivamente dopo la sua morte. Dato un totale di α unità lasciate in eredità, le tre mogli possono solo reclamare 100, 200, e 300 porzioni delle α unità. Se le unità lasciate non sono sufficienti a tale distribuzione, il Talmud raccomanda che:
  - Se α = 100, allora ogni moglie riceve la terza parte di α;
  - Se α = 200, la prima moglie riceve 50 e le altre 75;
  - Se α = 300, la prima moglie riceve 50, la seconda 100 e la terza 150.

Esempi di Giochi di Coalizione Canonici - 4/6

- Il Talmud non specifica altre allocazioni, ma se $\alpha \geq 600$, ogni moglie reclama quanto specificato nel contratto. La domanda posta è come mai il Talmud specifichi tale allocazione.

- Modelliamo questo dilemma come un gioco di coalizione canonico (v, N), dove N è l'insieme delle tre mogli, e v il valore definito per ogni coalizione $S \subseteq N$ come $v(S) = \max(0, \alpha - \sum_{i \in N \setminus S} c_i)$, dove $\alpha \in \{100, 200, 300\}$ è il totale delle unità lasciate in eredità, mentre ci è quanto la moglie reclama ($c_1 = 100$, $c_2 = 200$ e $c_3 = 300$).

Esempi di Giochi di Coalizione Canonici - 5/6

- Se α = 100, tutte le mogli pretendono la totalità delle unità disponibili, quindi la soluzione ottimale è la equi-ripartizione.

- Se α = 200, la prima moglie vuole tutto quello che le spetta visto che l'eredità riesce a soddisfare le sue richieste. Per questo il gioco presenta due coalizioni: da una parte la prima moglie e dall'altra le rimanenti due. Applicando la massimizzazione delle utilità, si ha che la prima moglie ottiene metà della sua richiesta e le restanti moglie si spartiscono equamente il rimanente.

Esempi di Giochi di Coalizione Canonici - 6/6

- Se α = 300, le tre mogli ricevono metà delle loro richieste, perché si formeranno tre coalizioni.

- Tali soluzioni rappresentano il nucleolus del gioco.

I Giochi di Formazione di Coalizione – 1/8

- I <u>giochi di formazione di coalizioni</u> sono caratterizzati da una struttura di rete e di un costo per la cooperazione tra i giocatori. Mentre nei giochi canonici l'obbiettivo è la stabilità della grand coalition, in questi la principale sfida è la struttura della rete di coalizione.
- Questi giochi non sono super-additivi e supportano sia modelli in forma caratteristica che quelli di partizione. Inoltre, formare delle coalizioni richiede una negoziazione o scambio dati con un costo, riducendo il beneficio di istaurare una coalizione.

I Giochi di Formazione di Coalizione – 2/8

- In generale, i giochi di formazione delle coalizioni si possono raggruppare secondo due tipi:
  - quelli di tipo statico – un fattore esterno impone una certa struttura di coalizione, e l'obbiettivo è di studiare le proprietà di questa struttura;
  - quelli dinamici – consistono nell'analizzare la formazione di una struttura di coalizione attraverso le interazioni tra i giocatori, e di studiarne le proprietà e l'adattattività al variare dei fattori ambientali.
- A differenza di quelli canonici, la risoluzione di questi giochi è abbastanza complesso.

I Giochi di Formazione di Coalizione – 3/8

- Nei giochi canonici, i vari concetti di soluzione assumono che la grand coalition viene formata a causa della proprietà di super-additività. In quelli di formazione di coalizione, la presenza di una struttura di coalizione influenza la definizione e l'uso di questi concetti.
- Consideriamo un gioco di coalizione TU con la presenza di una struttura di coalizione statica $B = \{B_1, \ldots, B_l\}$, dove ogni B_i è una coalizione, il gioco è definito dalla tripla (v, N, B), dove v è la funzione caratteristica.

I Giochi di Formazione di Coalizione – 4/8

- DEFINIZIONE: For un gioco di formazione di coalizioni (v, N, B), un vettore di allocazione $x \in \mathbb{R}^N$ è detto di soddisfare la proprietà di efficienza relativa se e solo se, per ogni coalizione $B_k \in B$, abbiamo che

$$\sum_{i \in B_k} x_i = v(B_k)$$

- Il valore totale disponibile per la coalizione B_k è diviso tra i suoi membri, mentre nei giochi canonici è il valore della grand coalition ad essere distribuito tra tutti i giocatori.

I Giochi di Formazione di Coalizione – 5/8

- In questi giochi, gli assiomi di Shapley rimangono validi, con la sola eccezione dell'assioma di efficienza che è sostituito da quella di efficienza relativa. Il valore di Shapley, riferito come il valore-B, ha una proprietà di restrizione, che implica che:
  - per trovare il valore-B, bisogna considerare il gioco di coalizione ristretto $(B_k, v|B_k)$ $\forall B_k \in B$, dove $v|B_k$ è il valore v del gioco originale definito sull'insieme dei giocatori (coalizione) B_k.
- Usando questa proprietà possiamo trovare il valore-B in due passi:

I Giochi di Formazione di Coalizione – 6/8

- Si considerino separatamente i giochi (B_k, $v|B_k$), con k = 1, …, l, e, per ognuno di questi giochi si trovi il valore di Shapley;
- Il valore-B del gioco di formazione di coalizioni è il vettore 1 x N dei payoff, indicato con ϕ, combinando le allocazioni per ogni gioco ristretto (B_k, $v|B_k$).

- Anche i concetti di core e nucleolus sono modificati sostituendo la razionalità di gruppo con l'efficienza relativa. Però, la proprietà di restrizione non è valida né per il core né per il nucleolus. Rendendo la loro determinazione più difficile.

I Giochi di Formazione di Coalizione – 7/8

- Mentre nei giochi statici le coalizioni sono già formate da un fattore esterno, in quelli dinamici il problema è determinare come formare una struttura di coalizione. In aggiunta, l'evoluzione di questa struttura in funzione dal variare di fattori ambientali o interni è importante. Lo scopo è
  - trovare la struttura che massimizza l'utilità totale se il gioco è del tipo TU;
  - determinare la struttura con la distribuzione di payoff ottima secondo Pareto per i giocatori se il gioco è NTU.
- Una soluzione centralizzata è possibile per risolvere questi problemi.

I Giochi di Formazione di Coalizione – 8/8

- La soluzione centralizzata consiste nell'analizzare tutte le possibili strutture di coalizione ottenibili dall'insieme dei giocatori. Tale ricerca ha una complessità esponenziale all'aumentare della dimensione dei giocatori, rendendo l'approccio centralizzato NP-completo.
- In molte applicazioni è preferibile una soluzione distribuita e in letteratura sono presenti vari approcci che spaziano dai metodi euristici alle catene di Markov fino a metodi della teoria degli insiemi e quelli di contrattazione o di negoziazione.

I Giochi di Grafi di Coalizione – 1/4

- Nei precedenti giochi, il valore di una coalizione non dipende da come i giocatori nella coalizione sono interconnessi. Un grafo rappresenta la connettività tra i giocatori e come i giocatori comunicano tra loro nella coalizione di appartenenza.
- Un gioco di grafo di coalizione può essere del tipo TU o NTU con la possibilità che il valore di una coalizione dipenda dalla struttura di rete esterna.
- Myerson ha introdotto la forma funzione-grafo per i giochi TU, e la ridefinizione del valore delle coalizioni a partire da quello di Shapley.

I Giochi di Grafi di Coalizione – 2/4

- Il nuovo valore è una funzione u che dipende dal grafo di interconnessione. Usando il nuovo valore u, un approccio assiomatico, simile al valore di Shapley, è disponibile per la risoluzione del gioco in forma funzione-grafo. Il valore di Myerson è definito come il valore di Shapley del gioco (u, N), dove u è il nuovo valore di coalizione che è funzione del grafo di connessione.
- Il problema di questa definizione è che il valore u dipende solo dai giocatori connessi nella coalizione, e non dalla struttura di coalizione.

I Giochi di Grafi di Coalizione – 3/4

- DEFINIZIONE: Consideriamo un gioco di grafo di coalizione (v, N) e indichiamo con G(S) l'insieme di tutti i possibili grafi con vertice nei giocatori di ogni coalizione $S \subseteq N$. Per ogni coalizione $S \subseteq N$, connesso da ogni grafo $G_s \in G(S)$, il valore v è definito come l'insieme $v(S, G_s) \subset \mathbb{R}^S$. Se il gioco è TU, allora $v(S, G_s) \in \mathbb{R}$ è un numero reale che rappresenta la bontà della coalizione S connessa dal grafo G_S.
- Questa definizione è migliore del valore di Myerson, ma anche più complessa da determinare.

I Giochi di Grafi di Coalizione – 4/4

- Un modo di risolvere la determinazione di questo valore è ricorrere alla teoria dei giochi non-cooperativi, che è stata molto impiegata per la formazione di grafi di rete.
- Una nuova categoria di giochi, detti di formazione di rete, sono stati proposto per studiare le interazioni all'interno del gruppo di giocatori che desiderano formare un grafo.

Bibliografia

- A Course in Game Theory

  by M.J. Osborne and A. Rubinstein (1994)
  - cap. 7, 11, 13, 14, 15
- Game Theory in Wireless and Communication Networks

  by Z. Han, D. Niyato, W. Saad, T. Başar and A. Hjørungnes (2011)
  - cap. 4, 7