Questi lucidi sono basati su una traduzione in italiano dei lucidi in inglese del Prof. Jeffrey D. Ullman

http://infolab.stanford.edu/~ullman/ialc/spr10/spr10.html#LECTURE%20NOTES

http://www-db.Stanford.edu/~Ullman/ialc.html

Il Pumping Lemma per i linguaggi context-free

Forma Normale di Chomsky

- Si dice che una CFG è in *Forma Normale di Chomsky* se ogni produzione è della forma:
  1. A -> BC (A, B, C variabili).
  2. A -> a (a terminale).
  3. S -> ϵ

  Inoltre se S -> ϵ è una produzione, B e C sono diversi da S.

Forma Normale di Chomsky

- Teorema: Per ogni grammatica context-free G esiste una grammatica equivalente in forma normale di Chomsky.
- Se L è un CFL, allora L ha una CFG in CNF.

Intuizione

- Ricordiamo il pumping lemma per i linguaggi regolari.
- Il lemma dice che se esiste in L una stringa abbastanza lunga da “creare” un ciclo nel DFA per L, allora noi potremmo “iterare il ciclo” e ottenere una sequenza infinita di stringhe che devono appartenere al linguaggio.

Intuizione

Per i CFL la situazione è un po’ più complicata.

- Noi possiamo sempre trovare due fattori di una qualsiasi stringa sufficientemente lunga da “iterare” in tandem.
  - Cioè: se noi iteriamo ciascuno dei due pezzi lo stesso numero di volte, otteniamo un’altra stringa nel linguaggio.

Enunciato del Pumping Lemma per i CFL

Per ogni linguaggio context-free L

Esiste un intero n, tale che

Per ogni stringa z in L con $|z| \geq n$

Esiste z = uvwxy tale che:

1. $|vwx| \leq n$.
2. $|vx| > 0$.
3. Per ogni $i \geq 0$, uv^iwx^iy è in L.

Prova del Pumping Lemma

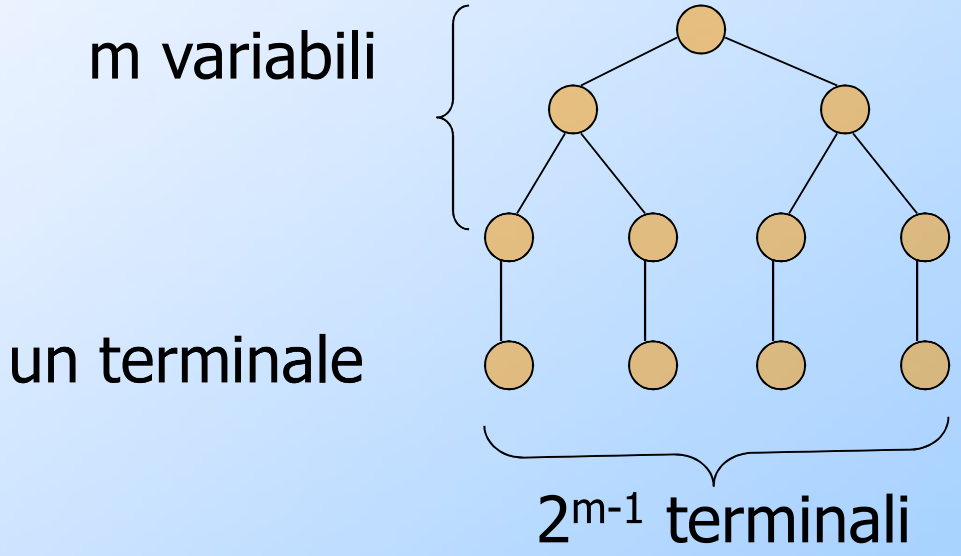
- G grammatica in CNF per L.
- Sia m il numero delle variabili della grammatica.
- Poniamo $n = 2^m$.
- Sia z in L con $|z| \geq n$.
- Affermiamo ("*Lemma 1* ") che un parse tree con prodotto z deve avere un cammino di lunghezza $\geq m+1$.

Prova del Pumping Lemma

- Affermiamo ("*Lemma 1*") che un parse tree con prodotto z deve avere un cammino di lunghezza $\geq$m+1.

Prova del Lemma 1

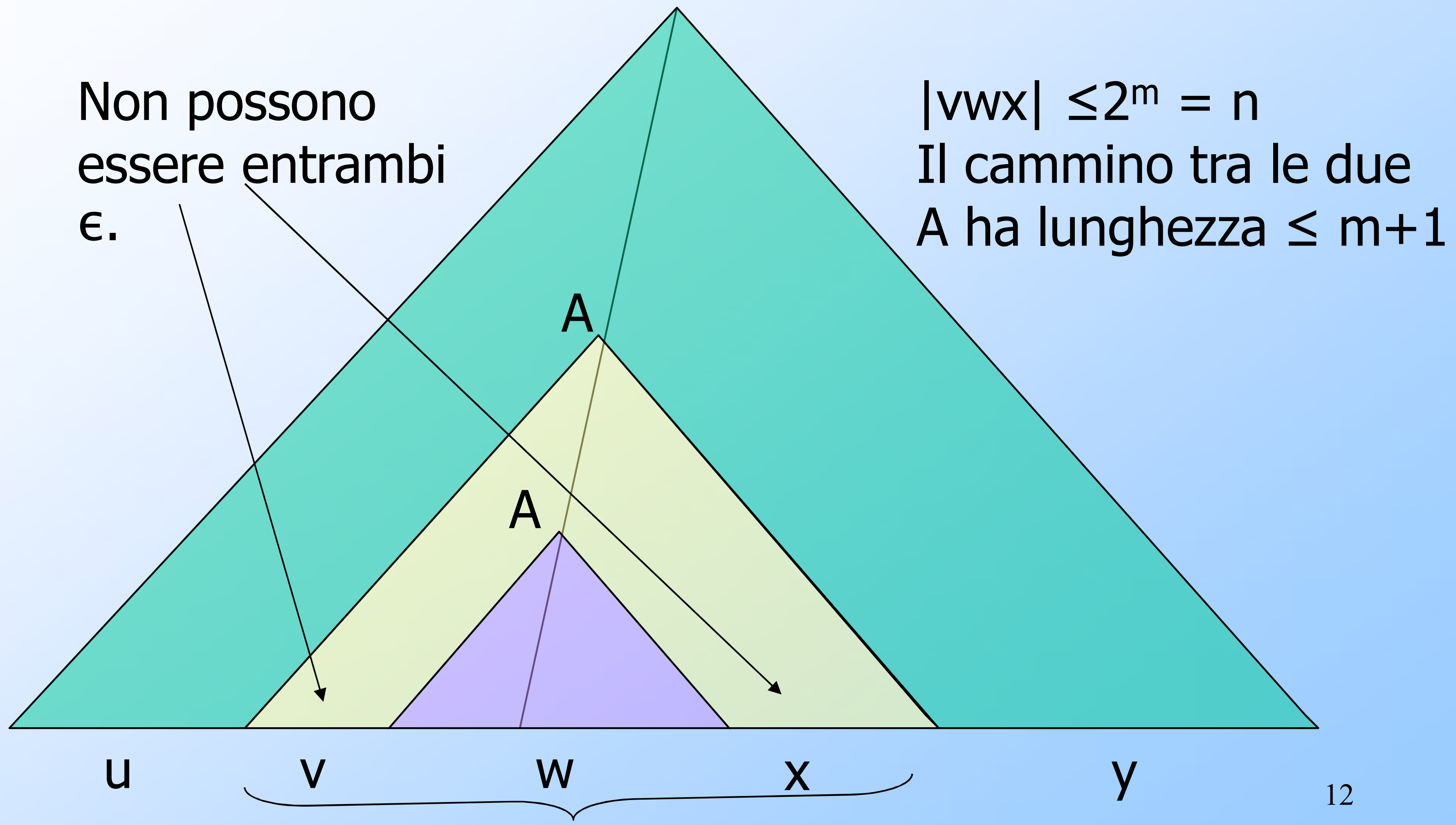
Se tutti i cammini nel parse tree di una grammatica in CNF hanno lunghezza $\leq$ m, allora il più lungo prodotto ha lunghezza 2^{m-1}, come in:



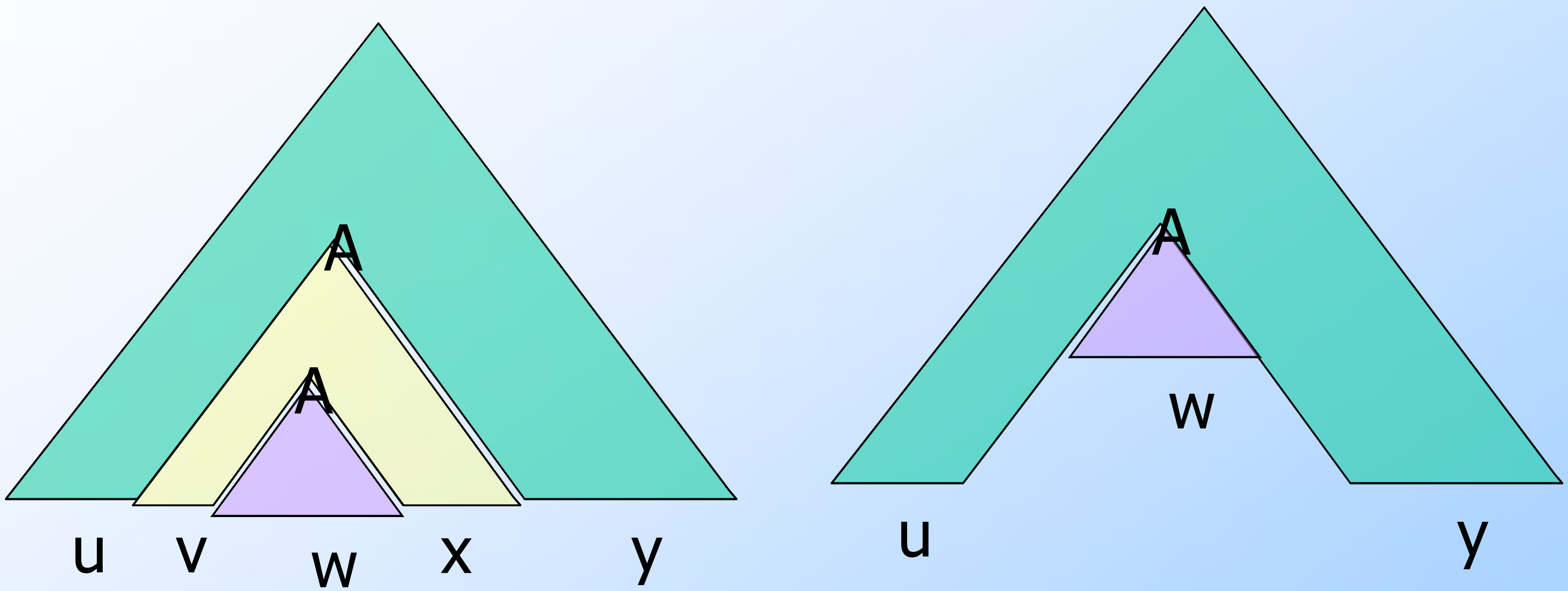
Torniamo alla Prova del Pumping Lemma

- Sappiamo che il parse tree per z ha un cammino con almeno m+1 variabili.
- Consideriamo il cammino più lungo.
- Ci sono solo m variabili distinte, quindi tra le m+1 più in basso possiamo trovare due nodi con la stessa etichetta, diciamo A.
- Il parse tree ha allora la forma:

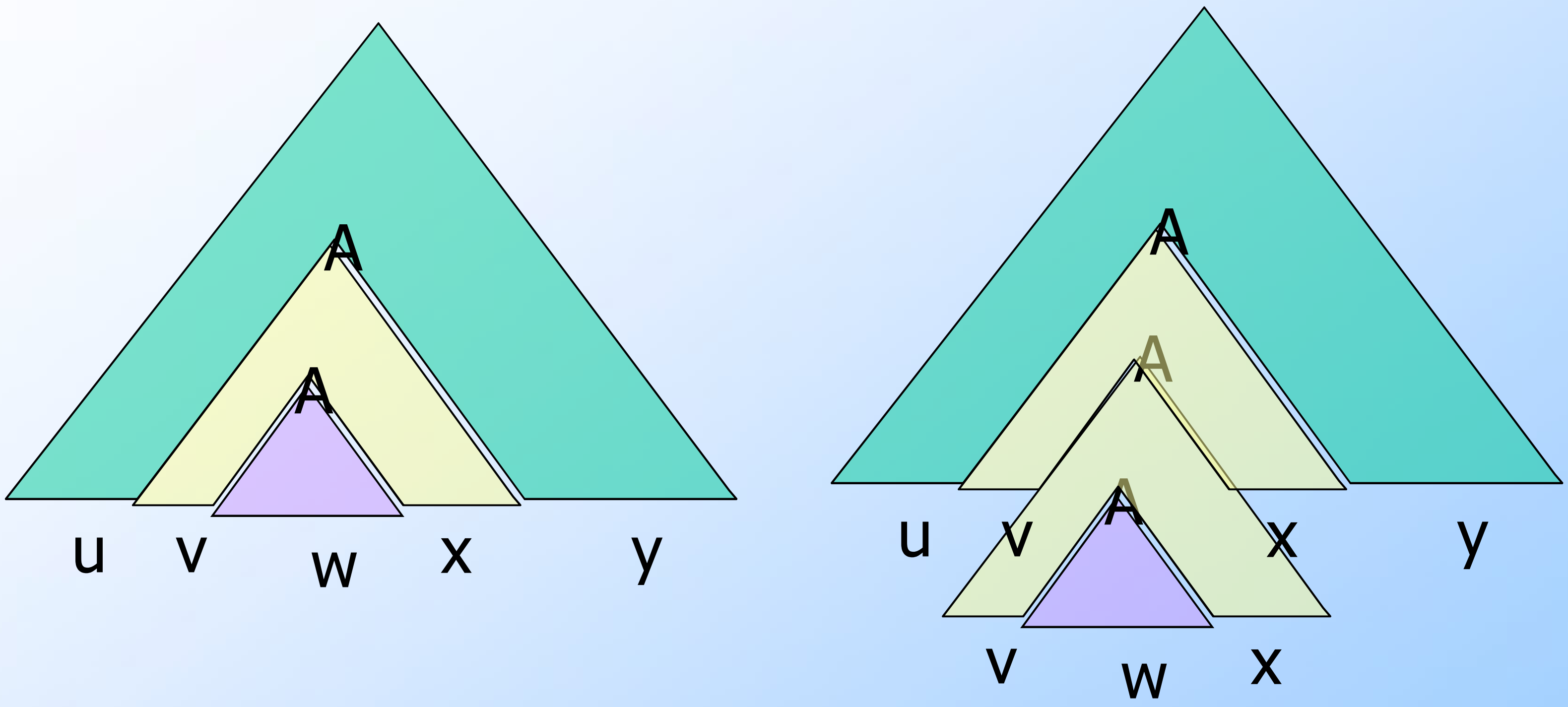
Parse Tree nella Prova del Pumping Lemma



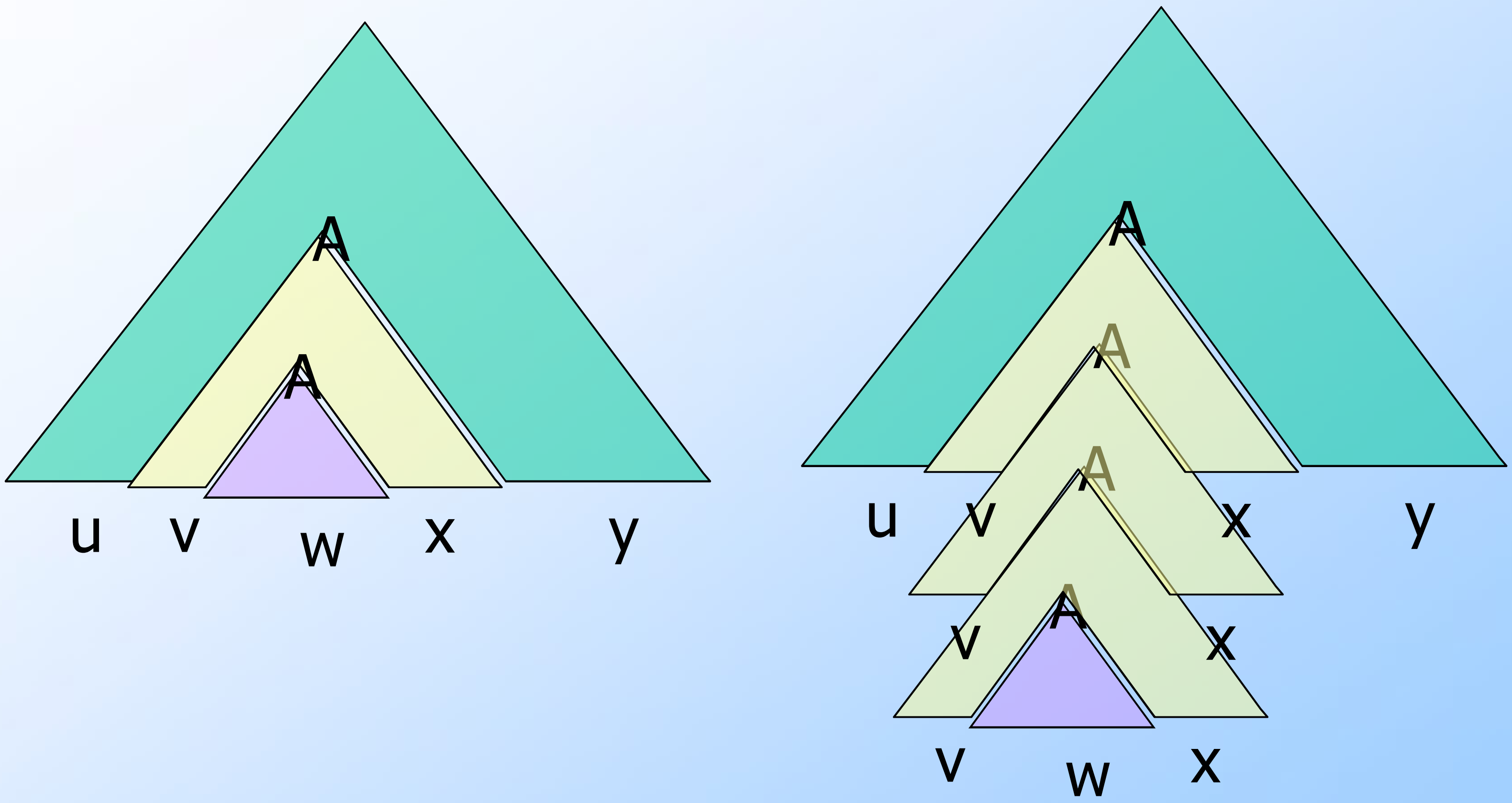
“Pump” Zero Volte



Iteriamo due volte



Iteriamo tre volte Ecc., Ecc.



Uso del Pumping Lemma

- $\{0^i10^i \mid i \geq 1\}$ è un CFL.
- Ma $L = \{0^i10^i10^i \mid i \geq 1\}$ non lo è.
- Lo proviamo usando il pumping lemma.
- Supponiamo che L sia un CFL.
- Sia n la costante del pumping lemma per L.

Uso del Pumping Lemma

- Consideriamo $z = 0^n10^n10^n$.
- Scriviamo $z = uvwxy$, dove $|vwx| \leq n$ e $|vx| \geq 1$.
- Caso 1: vx non ha occorrenze di 0.
  - Almeno uno tra v e x è 1 e uwy ha al più un 1, ma nessuna stringa in L ha questa proprietà.

Uso del Pumping Lemma

- Consideriamo ancora $z = 0^n10^n10^n$.
- Caso 2: vx ha almeno uno 0.
  - vwx è troppo corta (lunghezza $\leq n$) per essere fattore di tutti e tre i blocchi di 0 in $0^n10^n10^n$.
  - Allora uwy ha almeno un blocco di n zeri e almeno un blocco con meno di n zeri.
  - Quindi, uwy non appartiene a L.