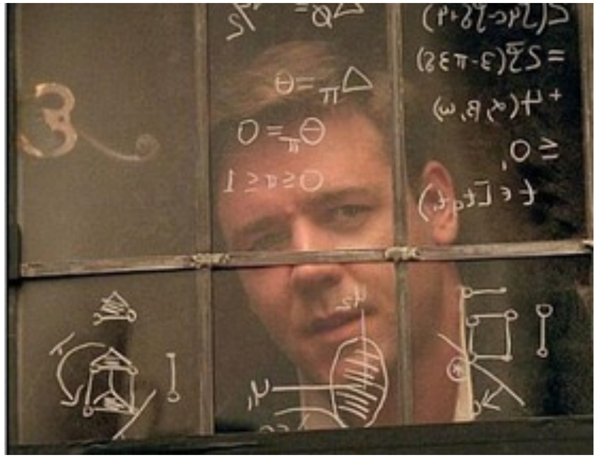
Intro. alla Teoria dei Giochi – Prima Parte

Christian Esposito

Dipartimento di Informatica
Università di Salerno

esposito@unisa.it



Roadmap

- Introduzione alla Teoria dei Giochi;
- Teorema Minimax;
- Giochi Non-cooperativi;
- Equilibri di Nash – Esistenza e Determinazione;
- Esempi Giochi Non-cooperativi;
- Giochi di Stackelberg;
- Giochi Competitivi Dinamici;
- Giochi Ripetitivi.

Introduzione – 1/8

- La <u>teoria dei giochi</u> rappresenta una branca della matematica applicata per studiare le interazioni complesse tra una moltitudine di decisori con obbiettivi diversi, certe volte contrastanti.
- Recentemente ha incontrato un sempre più crescente favore per lo sviluppo di algoritmi distribuiti efficienti, che devono tollerate eventuali situazioni di incertezza.
- Alcune situazioni dove la sicurezza è richiesta possono essere modellate come giochi dove alcuni decisori hanno intenti malevoli.

Introduzione – 2/8

- L'assunzione alla base della teoria dei giochi è che
  - I decisori, detti giocatori o players, perseguono degli obiettivi esogeni ben definiti (così da essere razionali);
  - I giocatori considerano la loro conoscenza, o aspettative, del comportamento degli altri giocatori (così da agire strategicamente).

- Un gioco è inteso come la descrizione delle interazioni strategiche, che include i vincoli sulle azioni che i giocatori possono prendere, e gli interessi che guidano le decisioni dei giocatori.

Introduzione – 3/8

- Nella teoria classica dei giochi si assume la piena razionalità dei giocatori, nel senso che essi sono consci delle varie azioni alternative che possono intraprendere, delle aspettative degli esiti, di preferenze tra le varie azioni e di prendere una scelta a valle di un processo di ottimizzazione:
  - Un insieme A di possibili azioni da intraprendere:
  - Un insieme C di conseguenze per ogni azione;
  - Una funzione di conseguenza $g: A \longrightarrow \mathbf{C}$ che associa una conseguenza ad ogni azione;
  - Una relazione di preferenza sull'insieme C, indicata con $\succsim$.

Introduzione – 4/8

- Le preferenze dei giocatori sono specificati per mezzo di una funzione di utilità $U: C \longrightarrow \mathbb{R}$, che definisce una relazione di preferenza $\gtrsim$ con la condizione che $x \gtrsim y$ se e solo se $U(x) \geq U(y)$.
- Dato un sottoinsieme $B \subseteq A$ di azioni che sono idonee per una data situazione, un giocatore razionale sceglie un'azione a* che appartiene a B e che è ottimale nel senso che l' utilità della sua conseguenza è sempre maggiore di quella di ogni altro membro di B, risolvendo

$$\max_{a \epsilon B} U(g(a))$$

Introduzione – 5/8

- La soluzione di un gioco è la descrizione sistematica dei risultati che possono emergere, e le loro proprietà.
- In questa letteratura, esistono vari modelli:
  - I giochi strategici;
  - I giochi estesi con o senza perfetta informazione;
  - I giochi di coalizione.
- Questa classificazione è effettuata secondo tre dimensioni.

Introduzione – 6/8

- L'attore principale in tutti i giochi è il giocatore, che può essere interpretato come un individuo, o anche un gruppo di individui, che prende una decisione.
- Se il gioco coinvolge le azioni di individui giocatori, con assenza o scarsa interazione tra loro, si parla di <u>giochi non cooperativi</u>.
- Se l'attenzione è su gruppi di individui che collaborano tra loro, allora si parla di <u>giochi cooperativi o di coalizione</u>.

Introduzione – 7/8

- Se i giocatori decidono allo stesso tempo l'azione da intraprendere durante il gioco, che ha una sola giocata determinata all'inizio del gioco, si parla di un <u>gioco strategico</u>.

- Se le giocate dei vari giocatori non sono simultanei, e le decisioni vengono prese in itinere, si parla di un <u>gioco esteso</u>.

Introduzione – 8/8

- Se i giocatori sono perfettamente informati delle caratteristiche degli altri e delle loro mosse, si parla di giochi a perfetta informazione.

- Se, invece, i giocatori sono parzialmente o anche imperfettamente informati, si parla di giochi a imperfetta informazione.

Teorema minimax – 1/6

- Prima di entrare nel dettaglio dei vari giochi, bisogna introdurre un teorema che è fondamentale.

- DEFINIZIONE: Siano dati un insieme qualunque D ed una funzione f: $D \longrightarrow \mathbb{R}$, l'estremo superiore di f su D è il più piccolo tra i numeri S tali che

$$f(x) \leq S, \qquad \forall x \in D$$

e viene indicato con $sup_{x \in D} f$.

- Se non esiste alcun numero S, allora la funzione f viene definita illimitata superiormente.

Teorema minimax – 2/6

- Ciò viene indicato con $sup_{x \in D} f = +\infty$.
- Analogo discorso vale per il limite inferiore della funzione f, indicato con $inf_{x \in D} f$, assumendo il valore $-\infty$ nel caso di una funzione non limitata inferiormente.

- Se esiste un punto x^* tale che il valore $f(x^*)$ corrisponde al limite superiore della funzione, allora x^* è un punto di massimo per f su D:

$$f(x^*) = \max_{x \in D} f$$

Teorema minimax – 3/6

- Analogo discorso vale per un punto x^{**} tale che il valore $f(x^{**})$ corrisponde al limite inferiore della funzione, allora x^* è un punto di minimo per f su D:

$$f(x^{**}) = \min_{x \epsilon D} f \; se \; f(x^{**}) = inf_{x \epsilon D} f$$

- DEFINIZIONE: Siano dati due insiemi X e Y, e una funzione f: $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ un punto $(x^*, y^*) \epsilon \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ è un punto di sella della funzione f sul dominio se risulta

$$f(x^*, y) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x, y^*)\,, \quad \forall x \,\epsilon\, X, \forall y \,\epsilon\, Y$$

Teorema minimax – 4/6

- Non tutte le funzioni sono caratterizzate da un punto di sella, ma è possibile fare assunzioni affinché una data funzione ne abbia almeno uno.
- LEMMA: Siano dati due insiemi qualunque X e Y e una funzione f: $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$, risulta sempre

$$\sup_y \inf_x f(x, y) \leq \inf_x \sup_y f(x, y)$$

dove il limite inferiore (o superiore) di f della sola x è una funzione in y che associa ad ogni fissata y l'estremo superiore rispetto a x di f.

Teorema minimax – 5/6

- TEOREMA: Siano dati due insiemi qualunque X e Y e una funzione f: $X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$, f ha un punto di sella se e solo se
  - nel precedente lemma $\sup_y$ e $\inf_x$ siano effettivamente raggiunti:

$$\inf_x \sup_y f(x,y) = \min_x \sup_y f(x,y) = \sup_y f(x^*,y)$$
$$\sup_y \inf_x f(x,y) = \max_y \inf_x f(x,y) = \inf_x f(x^*,y)$$

  - e vale la seguente uguaglianza:

$$\max_y \inf_x f(x,y) = \min_x \sup_y f(x,y) \Rightarrow \inf_x f(x^*,y) = \sup_y f(x^*,y)$$

Teorema minimax – 6/6

- COROLLARIO: Nell'ipotesi del Teorema Minimax, supponiamo che (x^a,y^a) e (x^b, y^b) siano due punti di sella, allora anche (x^a,y^b) e (x^b, y^a) sono punti di sella.
- Questo corollario mette in evidenza la cosiddetta "proprietà rettangolare" dei punti di sella.

Giochi non-cooperativi – 1/9

- Un gioco strategico è un modello di interazione tra giocatori che decidono le loro azioni inizialmente e in maniera simultanea.
- È caratterizzato da un numero finito di giocatori, indicato con N, ognuno avente un insieme non-vuoto di azioni A_i, e una relazione di preferenza tra essi.
- Il gioco è finito se gli insiemi A_i sono finiti.
- Le azioni intraprese dai giocatori hanno delle conseguenze, che determinano un guadagno (payoff) o utilità per i giocatori.

Giochi non-cooperativi – 2/9

- La relazione di preferenza è definita da una funzione di utilità delle conseguenze delle azioni, o direttamente in base alle azioni.
- Può sussistere un costo associato alle azioni da intraprendere, pertanto il guadagno del giocatore spesso è inteso come la differenza dell' utilità e del costo dell'azione intrapresa.
- I giocatori scelgono l'insieme delle azioni da intraprendere, generando così una soluzione, in base alle rispettive relazioni d'ordine definite sui payoff e costi attesi, senza cooperazione tra loro.

Giochi non-cooperativi – 3/9

- Un *gioco* è definito non-cooperativo o competitivo se i *giocatori* non possono accordarsi tra loro sulle azioni che possono intraprendere, e quindi ogni giocatore procede autonomamente alla determinazione della propria risposta rispetto a quella degli altri.

- Quando un *giocatore* conosce il numero e le caratterizzazioni degli altri *giocatori* (ovvero il loro insieme di azioni A_i e relativi payoff), si ha un *gioco* a completa informazione.

Giochi non-cooperativi – 4/9

- Come viene determinata una soluzione ad un gioco?

Giochi non-cooperativi – 4/9

- Come viene determinata una soluzione ad un gioco?

- Intuitivamente, un giocatore cerca di scegliere la soluzione che implica il costo minore (o il guadagno maggiore).
- Siccome il suo costo (o guadagno) dipende dalle giocate degli altri, si crea una situazione di conflitto. Ciò rende complesso stabilire come decidere se una determinata azione è quella "ottima".

Giochi non-cooperativi – 5/9

- DEFINIZIONE: il più noto concetto di soluzione è:
  - un Equilibrio di Nash di un gioco strategico $< N, (A_i), \gtrsim_i >$ è un profilo di azioni $a^* \epsilon A$ con la proprietà che per ogni giocatore $\mathrm{i} \epsilon N$ si ha che

    $(a^*_{-i}, a^*_i) \gtrsim_i (a^*_{-i}, a_i)$, per ogni $a_i \epsilon A$

    dove si indica con a_{-i} l'insieme delle azioni intraprese dagli altri giocatori.
- Informalmente, un equilibrio di Nash rappresenta la situazione in cui nessun giocatore può ulteriormente ridurre il suo costo (o aumentare il suo guadagno) deviando unilateralmente dalla strategia dell'equilibrio.

Giochi non-cooperativi – 6/9

- Per un determinato gioco è possibile avere uno o più equilibri di Nash, e sorge il problema di selezionare quello più conveniente, a tal fine sono stati proposti dei raffinamenti, identificando dei criteri aggiuntivi alla definizione di equilibrio.

- DEFINIZIONE: Sia dato un gioco strategico caratterizzato $C_i: A_i \longrightarrow \mathbb{R}$ dalla funzione di costo per un i-esimo giocatore, il minimo virtuale del giocatore è

$$\mu_i \equiv \inf_{x \epsilon A_i} C$$

Giochi non-cooperativi – 7/9

- Se per caso esistesse un unico $x^* \epsilon\ A_i$ tale che
$$\mu_i = \inf_{x \in A_i} C_i(x)$$
questo punto sarebbe un'ottima soluzione del gioco e un suo punto di equilibrio di Nash.

- DEFINIZIONE: Per ogni i-esimo giocatore del gioco strategico $< N, (A_i), \gtrsim_i >$ definiamo la funzione
$$\widetilde{C}_i(x_i) = \sup_{x_{-i} \in A_{-i}} C_i(x_i, x_{-i})$$
Una strategia $\widetilde{x}_i \epsilon\ A_i$ è <u>conservativa o minimax</u> per l'esimo giocatore se risulta:

Giochi non-cooperativi – 8/9

$$C_i(\tilde{x}_i) = \inf_{x_{-i} \in A_{-i}} \widetilde{C}_i(x_i)$$

- La scelta della strategia conservativa consiste nel minimizzare il costo nel caso peggiore, e ha la particolarità di garantire all'i-esimo giocatore di non pagare più del costo $\widetilde{C}_i(\tilde{x}_i)$.

- DEFINIZIONE: Sia dato un gioco strategico, una strategia $\hat{x} \in A$ è un <u>ottimo (debole) di Pareto</u> per il gioco, se non esiste altra strategica x tale che

$$C_i(x) < C_i(\hat{x})$$

Giochi non-cooperativi – 9/9

- In generale, una soluzione di equilibrio di Nash è stabile per gli individui, mentre un ottimo di Pareto è stabile collettivamente. Se una soluzione è allo stesso tempo un equilibrio di Nash e un ottimo di Pareto, è un buon candidato alla soluzione del gioco.
- Tale situazione si verifica raramente e di solito esiste una differenza tra la "bontà" dell'equilibrio di Nash e l'ottimo di Pareto, che prende il nome di <u>Price of Anarchy (PoA)</u>.

Esistenza Equilibri di Nash – 1/11

- Consideriamo un <u>gioco finito a somma-zero</u>, ovvero un gioco strategico non-cooperativo dove il guadagno o la perdita di un giocatore è perfettamente bilanciato da una corrispondente perdita o un guadagno di un altro. Ovvero abbiamo che $C_1 = -C_2$.
- Il nome deriva dal fatto che se alla somma totale dei guadagni dei giocatori si sottrae la somma totale delle perdite, si ottiene zero. In questi giochi si ha la garanzia che qualsiasi risultato è un ottimo di Pareto.

Esistenza Equilibri di Nash – 2/11

- Se riprendiamo la definizione di equilibrio di Nash per un gioco a somma zero a due giocatori si ha che (x_1^*, x_2^*) un equilibrio di Nash se e solo se:

$$C(x_1^*, x_2) \leq C(x_1^*, x_2^*) \leq C(x_1, x_2^*)$$

ovvero se la strategia è un punto di sella della funzione C.

- TEOREMA: Dato un gioco finito e a somma zero, esiste un equilibrio di Nash se e solo se risulta che:

$$\max_{x_2} \min_{x_1} C(x_1, x_2) = \min_{x_1} \max_{x_2} C(x_1, x_2)$$

Esistenza Equilibri di Nash – 3/11

- Consideriamo adesso la classe dei giochi strettamente competitivi, in cui un risultato positivo per un giocatore corrisponde necessariamente ad uno negativo per l'altro. Tale caratterizzazione è espressa come segue:

$$C_1(x^a) \leq C_1(x^b) \Longrightarrow C_2(x^a) \geq C_2(x^b), \qquad \forall x^a, x^b \in A$$

- È ovvio che un ogni gioco a somma zero sia necessariamente anche strettamente competitivo.

Esistenza Equilibri di Nash – 4/11

- TEOREMA: Dato un gioco strettamente competitivo.
  - Esistono equilibri di Nash se e solo se esistono strategie conservative per il primo ed il secondo giocatore, e se indichiamo tali strategie con (x_1^*, x_2^*) risulta:

$$\inf_{x_1} C(x_1, x_2^*) = \sup_{x_2} C(x_1^*, x_2)$$

  - Se esistono equilibri di Nash, (x_1^*, x_2^*) è uno di essi se e solo se il primo termine rappresenta una strategia conservativa del primo giocatore, mentre il secondo termine lo è per il secondo giocatore.

Esistenza Equilibri di Nash – 5/11

- Il valore della funzione di costo del primo giocatore in un qualunque equilibrio di Nash è lo stesso. Analogamente avviene per il secondo giocatore.
- Dati due punti di equilibrio del gioco, allora essi sono due equilibri di Nash.

- Notiamo che l'unica differenza tra i giochi a somma zero e quelli strettamente competitivi è che non si è supporto finiti gli insiemi delle possibili strategie.

Esistenza Equilibri di Nash – 6/11

- Consideriamo il caso più generale di gioco, quelli non finiti ed introduciamo alcuni concetti.

- DEFINIZIONE: la funzione punto-insieme, che fa corrispondere ad ogni punto dell'insieme U un sottoinsieme di $\mathbb{R}^t$, $\Phi: U \subseteq \mathbb{R}^s \rightrightarrows \mathbb{R}^t$ è detta chiusa nel punto y di U se

$$\left.\begin{array}{c} U \ni \{y^k\} \to y \\ \{z^k\} \to z \\ z^k \in \Phi(y^k) \end{array}\right\} \Longrightarrow z \in \Phi(y)$$

- La funzione è chiusa in U se lo è in ogni suo punto.

Esistenza Equilibri di Nash – 7/11

- TEOREMA di Kakutani: Sia dato un insieme $U \subseteq \mathbb{R}^s$ convesso e compatto, e sia data una funzione punto-insieme $\Phi: U \rightrightarrows U$ chiusa su U e che per ogni punto di U si ha che $\Phi(y)$ sia un sottoinsieme chiuso e convesso di U, allora esiste un punto fisso Φ.

- Definiamo in un gioco non finito l'insieme $S_i(x_{-i})$ delle reazioni ottime di un giocatore agli altri è:

$$S_i(x_{-i}) \equiv arg \min_{x_i} C_i(x_i, x_{-i})$$

- Consideriamo la funzione

$$S(x): X \ni x \rightrightarrows S_1(x) \times S_2(x) \times \cdots \times S_N(x)$$

Esistenza Equilibri di Nash – 8/11

- TEOREMA: Sia dato un gioco non finito, supponiamo che
  - gli insiemi delle strategie per i giocatori siano convessi e compatti;
  - la funzione punto-insieme $S(x): X \rightrightarrows X$ sia chiusa e S(X) sia un insieme chiuso e convesso

  allora si ha almeno un equilibrio di Nash.

- TEOREMA: Sia dato un gioco non finito e la prima condizione sia verificata, se almeno una delle seguenti condizioni è vera, lo è anche la seconda:

Esistenza Equilibri di Nash – 9/11

- le funzioni di costo per ogni giocatore sono continue e per ogni $x_{-i} \in X_{-1}$ fissato, la funzione $C_i(x_i, x_{-i})$ è quasi convessa in x_i;
- le funzioni di costo sono continue in x e per ogni $x_{-i} \in X_{-1}$ il seguente problema ha un'unica soluzione (globale):

$$\min_{x_i \in X_i} C_i(x_i, x_{-i})$$

Esistenza Equilibri di Nash – 10/11

- La strategia di un giocatore è un completo piano d'azione nel gioco in risposta agli altri giocatori, ovvero un algoritmo per giocare, nel quale un giocatore decide che cosa fare per ogni possibile situazione in tutta la partita.
- Una <u>strategia pura</u> fornisce una definizione completa del modo in cui un giocatore gioca una partita.
- Una <u>strategia mista</u> per un giocatore è una distribuzione di probabilità sull'insieme delle strategie pure che costui ha a disposizione.

Esistenza Equilibri di Nash – 11/11

- TEOREMA: ogni gioco finito competitivo ha sempre un equilibrio di Nash in strategie miste.

- In alcuni casi non è possibile determinare un equilibrio di Nash in strategie pure. Ciò non significa che non esista nessun equilibrio. In questi casi un equilibrio di Nash è possibile sulla base di un comportamento stocastico. È necessario individuare la probabilità delle diverse situazioni strategiche utilizzando delle strategie miste.

Esempi di Giochi Competitivi – 1/15

- Al fine di poter analizzare giochi competitivi o non-cooperativi in forma strategica è necessario:
  - specificare i giocatori, le loro strategie e i loro payoff potenziali.
- Un modo comune per rappresentare un gioco con due giocatori è la forma matriciale, dove
  - ogni riga rappresenta una strategia del primo giocatore
  - ogni colonna rappresenta una strategia del secondo giocatore;
  - ogni elemento della matrice è la coppia (x, y), dove x rappresenta il payoff per il primo giocatore, mentre y quello del secondo.

Esempi di Giochi Competitivi – 2/15

Dilemma del Prigioniero

- Due sospetti sono stati arrestati per un crimine, e posti in isolamento. Ognuno deve decidere se confessare ed incolpare l'altro o meno.
- Le regole del gioco sono le seguenti:
  - se nessuno confessa, passeranno 2 anni in galera;
  - se entrambi confessano, allora andranno entrambi in galera per 4 anni;
  - Se solo uno confessa e l'altro no, chi ha confessato sarà libero, mentre l'altro sarà condannato a 5 anni di galera.

Esempi di Giochi Competitivi – 3/15

Dilemma del Prigioniero

- In questo gioco, i due sospetti sono i giocatori, che hanno a disposizione due strategie, confessare (strategia C) e non confessare (strategia NC). L'utilità della strategia è data dagli anni di carcere:

	Confessare (C)	Non Confessare (NC)
Confessare (C)	(4, 4)	(0, 5)
Non Confessare (NC)	(5, 0)	(2, 2)

Esempi di Giochi Competitivi – 4/15

Dilemma del Prigioniero

- Per ogni giocatore, fissiamo una strategia e vediamo quando si ottiene l'utilità maggiore al variare delle decisioni dell'altro giocatore.

	Confessare (C)	Non Confessare (NC)
Confessare (C)	(4, 4)	(0, 5)
Non Confessare (NC)	(5, 0)	(2, 2)

Esempi di Giochi Competitivi – 4/15

Dilemma del Prigioniero

- Per ogni giocatore, fissiamo una strategia e vediamo quando si ottiene l'utilità maggiore al variare delle decisioni dell'altro giocatore.

	Confessare (C)	Non Confessare (NC)
Confessare (C)	(4, 4)	(0, 5)
Non Confessare (NC)	(5, 0)	(2, 2)

Esempi di Giochi Competitivi – 4/15

Dilemma del Prigioniero

- Per ogni giocatore, fissiamo una strategia e vediamo quando si ottiene l'utilità maggiore al variare delle decisioni dell'altro giocatore.

	Confessare (C)	Non Confessare (NC)
Confessare (C)	(4, 4)	(0, 5)
Non Confessare (NC)	(5, 0)	(2, 2)

Esempi di Giochi Competitivi – 5/15

Dilemma del Prigioniero

- Il gioco ha quindi un solo equilibrio di Nash, quando entrambi decidono di confessare.

	Confessare (C)	Non Confessare (NC)
Confessare (C)	(4, 4)	(0, 5)
Non Confessare (NC)	(5, 0)	(2, 2)

Esempi di Giochi Competitivi – 5/15

Battaglia dei Sessi

- Un marito ed una moglie devono decidere tra due alternative per l'uscita domenicale: assistere ad un incontro di pugilato, oppure andare all'opera. Il marito preferisce la box, mentre la moglie l'opera. Entrambi vorrebbero andare insieme ad uno dei due eventi, invece di separarsi.

Esempi di Giochi Competitivi – 6/15

Battaglia dei Sessi

- Modelliamo il tutto come un gioco competitivo simultaneo, dove i due giocatori sono la moglie (righe) e il marito (colonne). I payoff sono nulli se le decisioni divergono, non nulli se convergono. È maggiore il payoff della decisione preferita del giocatore.

	Box (B)	Opera (O)
Box (B)	(1, 2)	(0, 0)
Opera (O)	(0, 0)	(2, 1)

Esempi di Giochi Competitivi – 7/15

Battaglia dei Sessi

- Analizziamo la migliore decisione per ogni giocatore, come fatto in precedenza.
- Vediamo che si hanno due Equilibri di Nash, lungo la diagonale maggiore della matrice, entrambi inefficienti.

	Box (B)	Opera (O)
Box (B)	($\boxed{1}$, $\boxed{2}$)	(0, 0)
Opera (O)	(0, 0)	($\boxed{2}$, $\boxed{1}$)

Esempi di Giochi Competitivi – 7/15

Battaglia dei Sessi

- Questo gioco ha anche una formulazione a strategie miste, dove un giocatore ha maggiore probabilità, 3/5, di scegliere l'evento che preferisce. La randomizzazione serve a confondere l'altro giocatore. In questo caso i punti di Equilibrio non cambiano.

	Box (B)	Opera (O)
Box (B)	(1, 2)	(0, 0)
Opera (O)	(0, 0)	(2, 1)

Esempi di Giochi Competitivi – 8/15

Gioco del Pollo

- Consideriamo due piloti che stanno guidando uno contro l'altro in un gioco di collisione. Uno dei due deve sterzare, altrimenti moriranno in un impatto frontale. Però, chi sterza viene schernito e chiamato pollo o codardo.

Esempi di Giochi Competitivi – 9/15

Gioco del Pollo

- I due piloti sono i due giocatori, e le strategie sono Sterzare (S) e Proseguire (P). Il giocatore che prosegue mentre l'altro sterza vince un punto. Chi sterza perde un punto (a meno che l'altro non abbia sterzato). Se entrambi proseguono, perdono tutto.

	Sterzare (S)	Proseguire (P)
Sterzare (S)	(0, 0)	(-1, 2)
Proseguire (P)	(2, -1)	(-5, -5)

Esempi di Giochi Competitivi – 10/15

Gioco del Pollo

- Analizziamo le utilità. Sembrerebbe che in questo caso il punto di equilibrio sarebbe (S, S), ma non è questo il caso, perché non esiste una strategia dominante: se, qualunque decisione prenda l'altro pilota, fornisce il migliore risultato possibile.

	Sterzare (S)	Proseguire (P)
Sterzare (S)	(0, 0)	(-1, 2)
Proseguire (P)	(2, -1)	(-5, -5)

Esempi di Giochi Competitivi – 11/15

Gioco del Pollo

- Decidere di sterzare è la scelta ottimale solo se il mio avversario va dritto, in quanto mi risparmia da morte certa, ma non nel caso in cui anche l'altro pilota decida di sterzare, in quanto mi brucia la possibilità di uscirne vincitore.
- Sterzare non è quindi la strategia dominante, perché non è vero che sia la scelta più conveniente in qualunque caso: se l'altro pilota sterza la soluzione ottimale è proseguire dritto.

Esempi di Giochi Competitivi – 12/15

Gioco del Pollo

- La strategia di sterzare per evitare il peggio porta al pareggio, ma non è il punto di equilibrio perché ciascuno dei piloti può migliorare il proprio risultato unilateralmente a danno dell'altro: sterzare sapendo che razionalmente l'altro lo farà.

	Sterzare (S)	Proseguire (P)
Sterzare (S)	(0, 0)	(-1, 2)
Proseguire (P)	(2, -1)	(-5, -5)

Esempi di Giochi Competitivi – 13/15

Gioco del Pollo

- Esistono due punti di equilibrio: ogni giocatore usa una strategia opposta a quella dell'altro. Questi sono degli ottimi paretiani in quanto al migliorare della condizione di un giocatore (+2, eroe), peggiora quella dell'altro (-1, pollo).

	Sterzare (S)	Proseguire (P)
Sterzare (S)	(0, 0)	(-1, 2)
Proseguire (P)	(2, -1)	(-5, -5)

Esempi di Giochi Competitivi – 14/15

Gioco del Pollo

- Sono anche degli equilibri di Nash in quanto sono gli unici due pay-off per i quali nessun giocatore ha interesse ad essere l'unico a cambiare.

	Sterzare (S)	Proseguire (P)
Sterzare (S)	(0, 0)	$\boxed{(-1, 2)}$
Proseguire (P)	$\boxed{(2, -1)}$	(-5, -5)

Esempi di Giochi Competitivi – 15/15

Gioco senza Equilibrio di Nash

- È possibile avere un gioco senza equilibrio di Nash con strategie pure? Se si ammettono strategie miste?

I Giochi di Stackelberg – 1/9

- In molti giochi competitivi, può sussistere una gerarchia tra i giocatori, dove alcuni annunciano le proprie strategie prima degli altri.
- I giocatori che decidono prima sono in una posizione di vantaggio, siccome possono rafforzarsi a scapito degli altri che devono inseguire.
- I giocatori che decidono prima sono chiamati leaders, quelli che reagiscono in un secondo momento sono detti followers.

I Giochi di Stackelberg – 2/9

- Ipotizziamo di avere un gioco competitivo con due giocatori, di cui uno è il leader e l'altro il follower, ognuno con un insieme di strategie, denotati rispettivamente S_L e S_F.
- Si ha che il follower dispone di una serie di possibili risposte ottime ad ogni strategia del leader, rappresentata dall'insieme $R_F(s_L)$ dove s_L è membro di S_L:

$$R_F(s_L) = \{s_F \in S_F : u_F(s_L, s_F) \geq u_F(s_L, t), \qquad \forall t \in S_F\}$$

- $R_F(s_L)$ prende il nome di reaction set.

I Giochi di Stackelberg – 3/9

- DEFINIZIONE: In un gioco competitivo con due giocatori, uno leader e uno follower, una strategia $s_L^* \in S_L$ è chiamata di equilibrio di Stackelberg per il leader se:

$$\min_{s_F \in R_F(s_L^*)} u_L\left(s_L^*, s_F\right) = \max_{s_L \in S_L} \min_{s_F \in R_F(s_L)} u_L\left(s_L, s_F\right) \triangleq u_L^*$$

dove u_L^* è detta <u>utilità di Stackelberg</u> per il leader.

- TEOREMA, *Ogni gioco competitivo a due giocatori ammette una <u>strategia di Stackelberg</u> per il leader.*

I Giochi di Stackelberg – 4/9

- DEFINIZIONE: In un gioco competitivo con due giocatori, uno leader e uno follower, ogni strategia $s_F^* \in R_L(s_L^*)$che è in equilibrio con la strategia di Stackelberg del leader s_L^* è una strategia ottimale per il follower. Pertanto, la coppia (s_L^*, s_F^*) è una <u>soluzione di Stackelberg</u> for il gioco, e la coppia di utilità $(u_L(s_L^*, s_F^*), u_L(s_L^*, s_F^*))$ corrispondono al risultato dell'equilibrio di Stackelberg.

- Sussiste una differenza in qualità tra la soluzione in equilibrio di Nash e quella in equilibrio di Stackelberg.

I Giochi di Stackelberg – 5/9

- PROPOSIZIONE: In un gioco competitivo gerarchico a due, indichiamo con u_L^* e u_L^{NE} rispettivamente l'utilità ottenuta dal leader con la soluzione di Stackelberg e quella dell'equilibrio peggiore di Nash. Se il reaction set del follower è un singleton per ogni strategia del leader, si ha che

$$u_L^* \geq u_L^{NE}$$

ovvero, nel caso in cui il follower ha una sola reazione ottima, il leader realizza con la soluzione di Stackelberg una utilità paragonabile a quella dell'equilibrio di Nash, se non meglio.

I Giochi di Stackelberg – 6/9

Esempio

- Consideriamo un gioco a matrice di seguito, dove due giocatori hanno a disposizione rispettivamente due e tre strategie, e per ogni combinazione di giocate si hanno i seguenti payoff.

	U	D	M
U	(3, 3)	(2, 3)	(0, 2)
D	(1, 4)	(1, 3)	(4, 4)

I Giochi di Stackelberg – 7/9

Esempio

- Analizziamo le utilità, e vediamo che si hanno due punti di equilibrio di Nash, dove uno comporta maggiore utilità del secondo, ma entrambi identificano delle strategie dominanti.

	U	D	M
U	$\boxed{(3, 3)}$	(2, 3)	(0, 2)
D	(1, 4)	(1, 3)	$\boxed{(4, 4)}$

I Giochi di Stackelberg – 8/9

Esempio

- Ipotizziamo adesso una implementazione del gioco in ottica gerarchica con il giocatore di riga che funge da leader.
  - Se il leader decide U, il reaction set sarà pari a $R_F(U)$ = {U, D}, e all'equilibrio di Stackelberg ottiene 2 o 3.

	U	D	M
U	$\boxed{(3, 3)}$	(2, 3)	(0, 2)
D	(1, 4)	(1, 3)	$\boxed{(4, 4)}$

I Giochi di Stackelberg – 9/9

Esempio

- Se il leader decide D, il reaction set sarà pari a $R_F(D)$ = {U, M}, e all'equilibrio di Stackelberg ottiene 1 o 4.
- Pertanto si hanno 4 punti di equilibrio di Stackelberg dove $u_L^* = 2$ se il leader sceglie U, altrimenti maggiore se sceglie D. Tale valore è minore dell'utilità della peggiore soluzione di Nash, (U, U), pari a 3.

	U	D	M
U	$\boxed{(3, 3)}$	$\boxed{(2, 3)}$	(0, 2)
D	$\boxed{(1, 4)}$	(1, 3)	$\boxed{(4, 4)}$

I Giochi Competitivi Dinamici – 1/7

- I giochi competitivi dinamici sono caratterizzati da una sequenza di scelte strategiche intraprese da parte dei giocatori, che condizionano fortemente il risultato del gioco, come le informazioni note dai giocatori sulle decisioni degli altri.

- I <u>giochi sequenziali</u> costituiscono un'ampia classe dei giochi dinamici in cui i giocatori prendono le loro decisioni secondo un ordine predefinito. In questi giochi, alcuni giocatori potevano osservare le mosse degli altri, ed agire di conseguenza.

I Giochi Competitivi Dinamici – 2/7

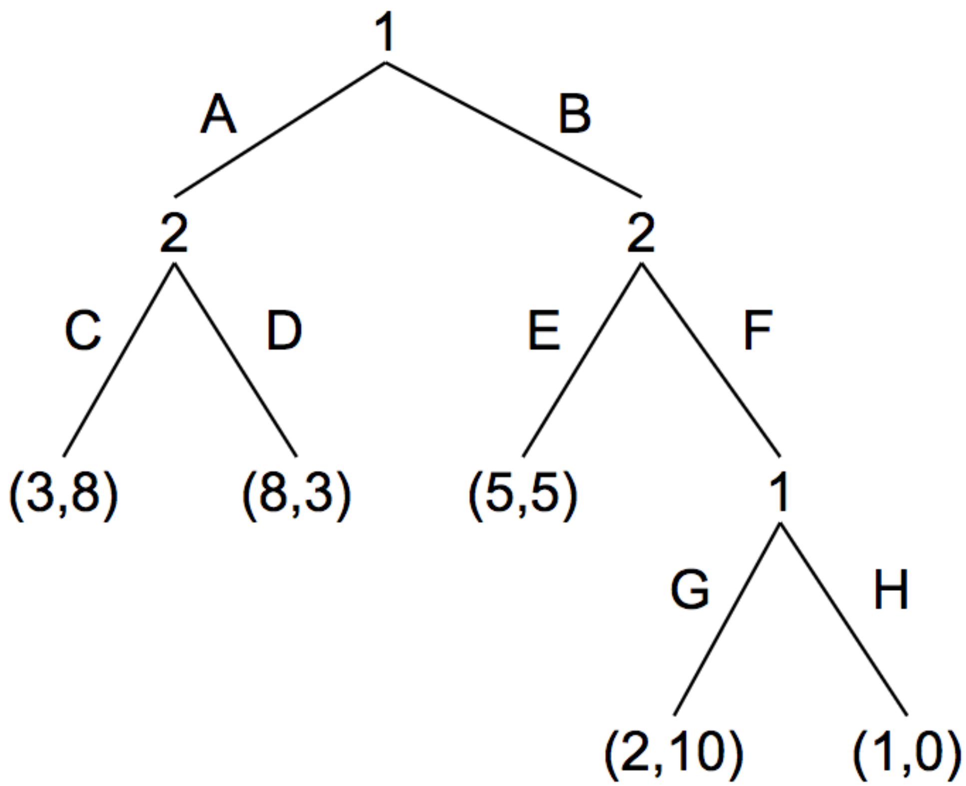
- Ogni giocatore può progettare la propria strategia, date le informazioni disponibili sulle azioni di chi ha giocato prima. Le informazioni giocano un ruolo chiave e possono essere di due tipi:
  - Perfette – se solo un giocatore muove per turno, e ogni giocatore conosce esattamente ogni azione di chi ha giocato prima.
  - Imperfette – se alcuni giocatori non conoscono le mosse che gli altri, o una parte di loro, hanno scelto nei turni precedenti.
- La conoscenza perfetta o imperfetta diverge da quella completa e incompleta.

I Giochi Competitivi Dinamici – 3/7

- Per conoscenza completa si intende che ogni giocatore possiede la visione completa dei parametri del gioco (spazio delle strategie, le funzioni di payoff).
- Per conoscenza perfetta si intende la visione che ogni giocatore ha delle azioni mosse dagli altri.

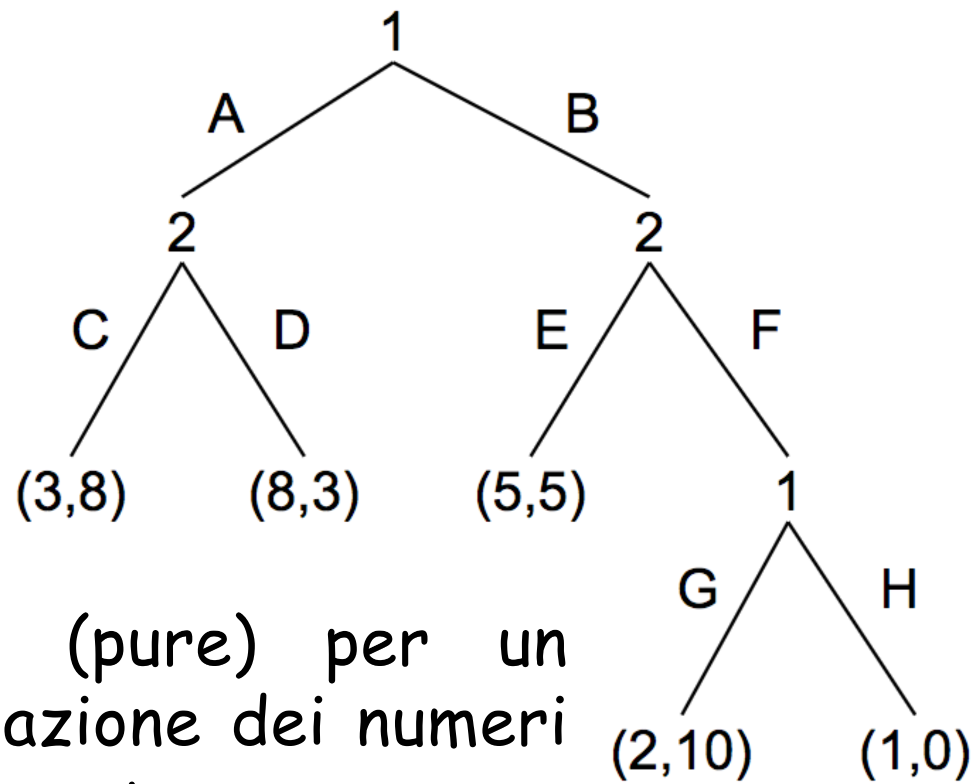
- Un modo di rappresentare questi giochi è la <u>forma estensiva</u> o game tree, che consente di rappresentare l'ordine di gioco in aggiunta alle altre caratteristiche del gioco.

I Giochi Competitivi Dinamici – 4/7



I Giochi Competitivi Dinamici – 4/7

- Possiamo convertire questa rappresentazione in quella a matrice.

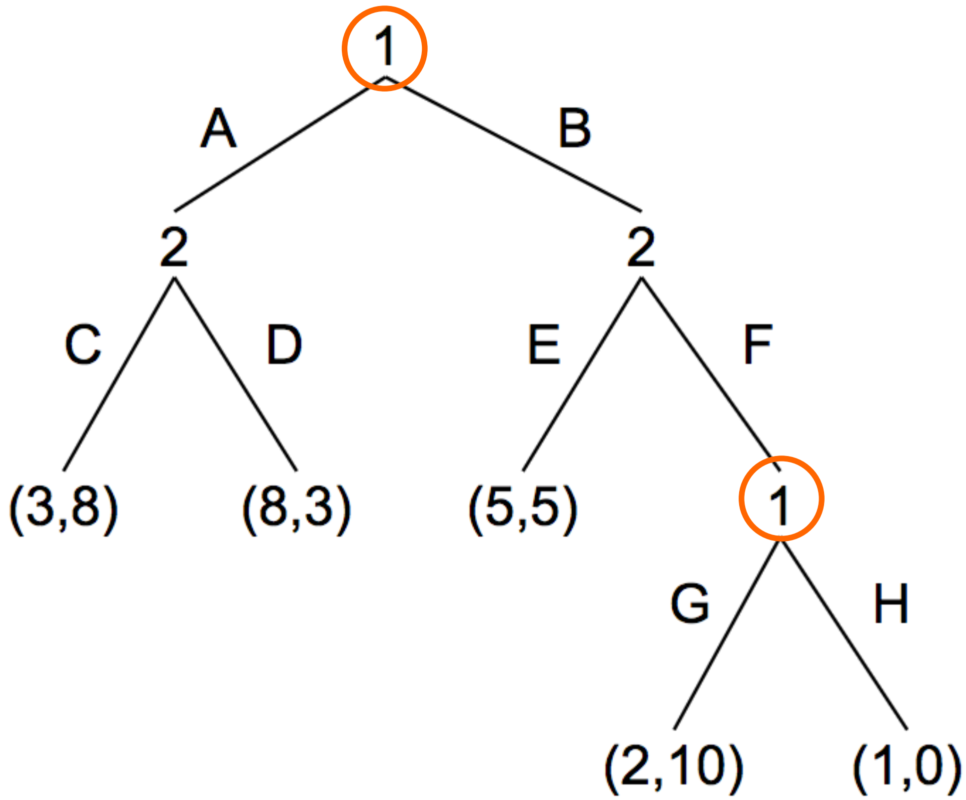


- Il numero di strategie (pure) per un giocatore sono la moltiplicazione dei numeri di azioni in ogni information set.

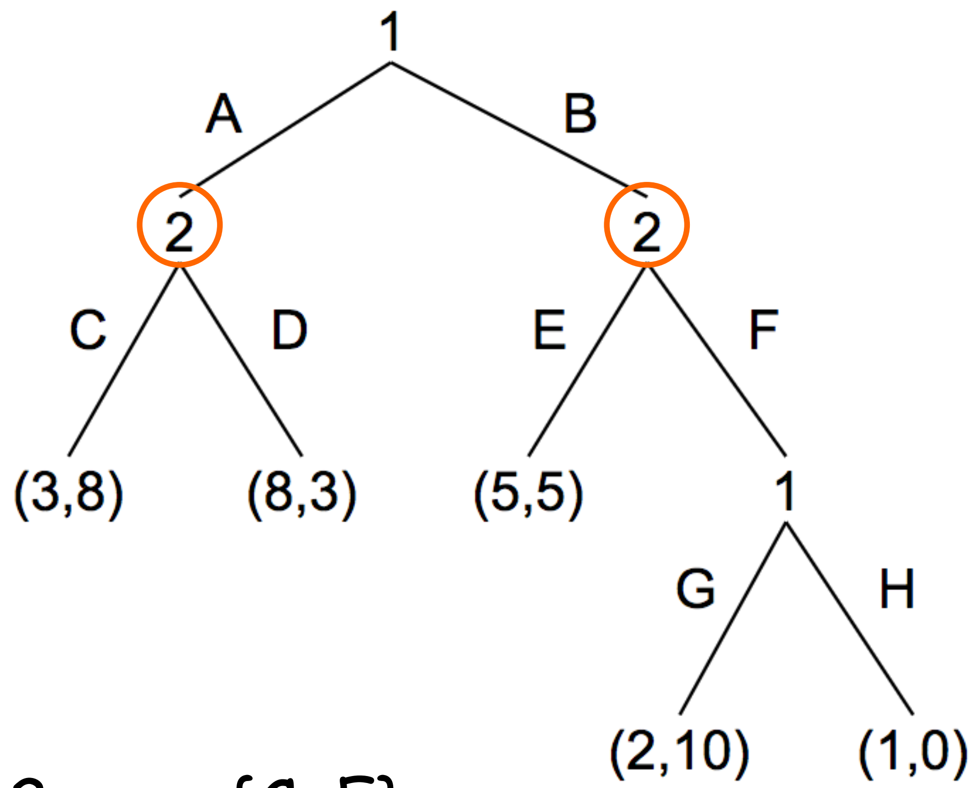
I Giochi Competitivi Dinamici – 4/7

- Possiamo convertire questa rappresentazione in quella a matrice.

- Le strategie del giocatore 1 sono {A, G}, {A, H}, {B, G} e {B, H}.



I Giochi Competitivi Dinamici – 4/7

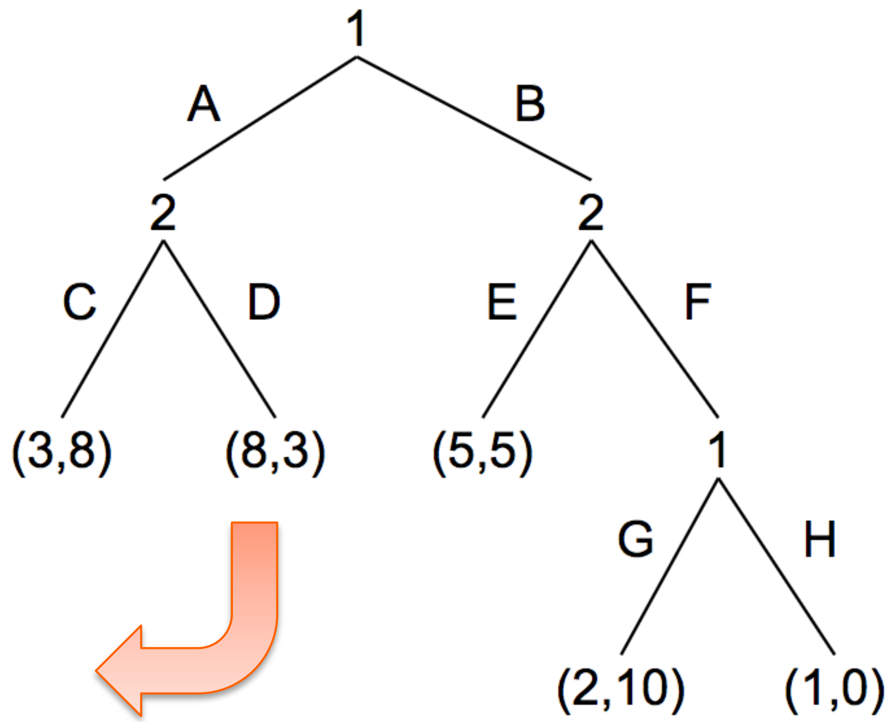


- Possiamo convertire questa rappresentazione in quella a matrice.
- Le strategie del giocatore 1 sono {A, G}, {A, H}, {B, G} e {B, H}.
- Le strategie del giocatore 2 sono {C, E}, {C, F}, {D, E} e {D, F}.

I Giochi Competitivi Dinamici – 4/7

- Matrice 4 x 4:

	(C, E)	(C, F)	(D, E)	(D, F)
(A, G)	(3, 8)	(3, 8)	(8, 3)	(8, 3)
(A, H)	(3, 8)	(3, 8)	(8, 3)	(8, 3)
(B, G)	(5, 5)	(2, 10)	(5, 5)	(2, 10)
(B, H)	(5, 5)	(1, 0)	(5, 5)	(1, 0)



I Giochi Competitivi Dinamici – 5/7

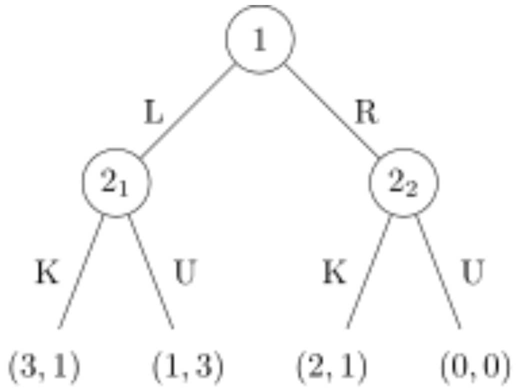
- Un utile metodo di risoluzione di questi giochi per la determinazione degli equilibri in forma estensiva con perfetta informazione è attraverso l'uso della backward induction:
  - si determina la soluzione ottimale per il giocatore che ha mosso per ultimo;
  - si determina la migliore mossa del giocatore precedente, data la mossa del giocatore successivo per data;
  - si procede fino a raggiungere la radice del game tree.
- TEOREMA: Ogni gioco finito in forma estesa con informazione perfetta ha un equilibrio di Nash a strategie pure.

I Giochi Competitivi Dinamici – 6/7

- Il metodo di backward induction non è applicabile al caso di giochi ad informazione imperfetta.
- Tali giochi necessitano di una soluzione di equilibrio che richiede che la strategia di ogni giocatore di essere ottimale non solo all'inizio del gioco, ma anche ad ogni suo step.
- DEFINIZIONE: Un sotto-gioco di un gioco dinamico competitivo consiste nella forma estensiva in un nodo singolo, e tutti i suoi successori fino ai nodi terminali. La caratterizzazione del sotto-gioco deriva dal gioco originario.

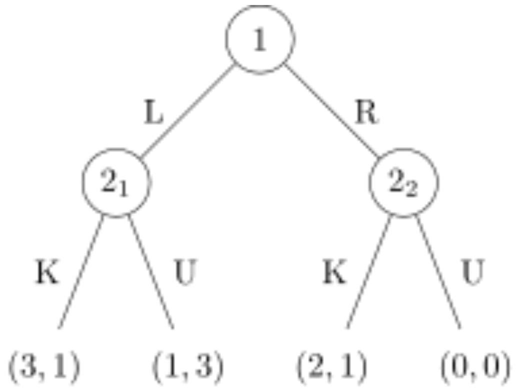
I Giochi Competitivi Dinamici – 7/7

- DEFINIZIONE: Un profilo di strategia per i giocatori di un gioco dinamico competitivo è un equilibrio perfetto nei sotto-giochi, se le strategie dei giocatori (ristrette a un sotto-gioco) costituiscono un equilibrio di Nash in ogni sotto-gioco del gioco iniziale.



I Giochi Competitivi Dinamici – 7/7

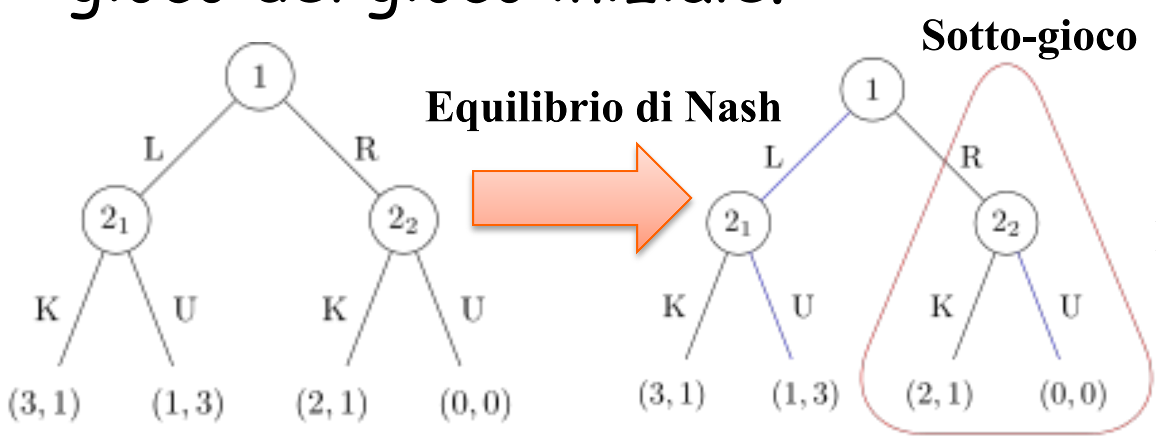
- DEFINIZIONE: Un profilo di strategia per i giocatori di un gioco dinamico competitivo è un equilibrio perfetto nei sotto-giochi, se le strategie dei giocatori (ristrette a un sotto-gioco) costituiscono un equilibrio di Nash in ogni sotto-gioco del gioco iniziale.



	(K, K)	(K, U)	(U,U)	(U, K)
L	($\boxed{3}$, 1)	($\boxed{3}$, 1)	$\boxed{(\boxed{1}, \boxed{3})}$	(1, $\boxed{3}$)
R	(2, $\boxed{1}$)	(0, 0)	(0, 0)	$\boxed{(\boxed{2}, \boxed{1})}$

I Giochi Competitivi Dinamici – 7/7

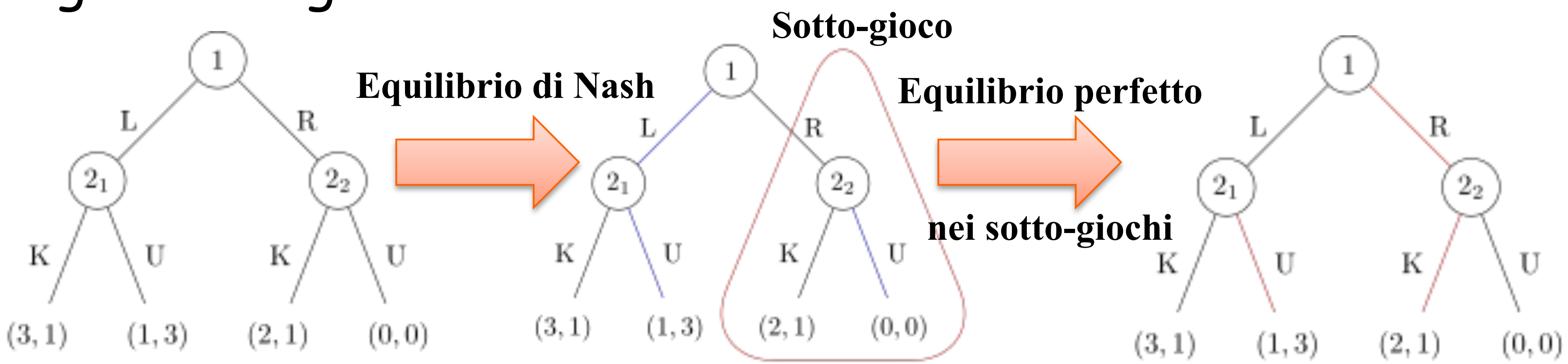
- DEFINIZIONE: Un profilo di strategia per i giocatori di un gioco dinamico competitivo è un equilibrio perfetto nei sotto-giochi, se le strategie dei giocatori (ristrette a un sotto-gioco) costituiscono un equilibrio di Nash in ogni sotto-gioco del gioco iniziale.



In questo sotto-gioco, U non è la scelta ottimale.

I Giochi Competitivi Dinamici – 7/7

- DEFINIZIONE: Un profilo di strategia per i giocatori di un gioco dinamico competitivo è un <u>equilibrio perfetto nei sotto-giochi</u>, se le strategie dei giocatori (ristrette a un sotto-gioco) costituiscono un equilibrio di Nash in ogni sotto-gioco del gioco iniziale.



I Giochi Competitivi Ripetitivi – 1/13

- Un'importante tipo di giochi dinamici sono i giochi ripetitivi, ovvero un gioco competitivo strategico che si ripete nel tempo. Ripetendosi nel tempo, e non essendo istantaneo, i giocatori apprendono le strategie degli altri e modificano le proprie.
- Nel dilemma del prigioniero, l'equilibrio di Nash è quando entrambi confessano.

	Confessare (C)	Non Confessare (NC)
Confessare (C)	(4, 4)	(0, 5)
Non Confessare (NC)	(5, 0)	(2, 2)

I Giochi Competitivi Ripetitivi – 1/13

- Un'importante tipo di giochi dinamici sono i giochi ripetitivi, ovvero un gioco competitivo strategico che si ripete nel tempo. Ripetendosi nel tempo, e non essendo istantaneo, i giocatori apprendono le strategie degli altri e modificano le proprie.
- Se guardiamo però alla minimizzazione dell'utilità, è meglio che cooperino e non confessino.

	Confessare (C)	Non Confessare (NC)
Confessare (C)	(4, 4)	(0, 5)
Non Confessare (NC)	(5, 0)	(2, 2)

I Giochi Competitivi Ripetitivi – 2/13

- Se il dilemma del prigioniero fosse ripetitivo, allora il risultato desiderato da entrambi in cui entrambi i prigionieri non confessano in ogni periodo è stabile se ogni giocatore crede che una sua defezione, ovvero una confessione, terminerà la cooperazione, risultando in una conseguente perdita che compromette il guadagno ottenuto nel breve periodo.

	Confessare (C)	Non Confessare (NC)
Confessare (C)	(4, 4)	(0, 5)
Non Confessare (NC)	(5, 0)	(2, 2)

I Giochi Competitivi Ripetitivi – 3/13

- Nei giochi ripetitivi, il gioco strategico sarà denominato stage o gioco costituente. Le decisioni prese dai giocatori durante il gioco costituente, ad ogni ripetizione, sono denominate azioni, mentre le decisioni nel gioco ripetitivo sono dette strategie.
- DEFINIZIONE: data la ripetizione h, si definisce storia del gioco h(t) come l'insieme delle azioni dei giocatori nelle giocate precedenti a t:

$$h(0) = \emptyset, \qquad \forall t \geq o, h(t) = \{a(0), \ldots, a(t-1)\}$$

dove $a(z) = [a_1(z), \ldots, a_N(z)]$ sono le giocate in z di ogni giocatore.

I Giochi Competitivi Ripetitivi – 4/13

- La strategia del giocatore i-esimo alla t-esima ripetizione del gioco è definita come una funzione della storia nel tempo del gioco: $a_i(t) = s_i(h(t))$.
- Questo significa che stiamo considerando una classe di giochi con azioni osservabili e un monitoraggio perfetto delle giocate dei giocatori.
- Ipotizziamo di eseguire il dilemma del prigioniero come un gioco ripetitivo su un periodo di tempo T.

I Giochi Competitivi Ripetitivi – 5/13

- Per un gioco del dilemma del prigioniero ripetitivo possiamo identificare due giochi costituenti:
  - il primo è alla ripetizione t = 0, con l'iniziale azione del giocatore $a_i(0) = C$;
  - il secondo è alle ripetizione t = 1, con la strategia di confessare per ogni possibile storia h(1):

$$s_i\big(h(1)\big) = \begin{cases} C, & if\ h(1) = \{(C,C)\} \\ C, & if\ h(1) = \{(C,NC)\} \\ C, & if\ h(1) = \{(NC,NC)\} \\ C, & if\ h(1) = \{(NC,C)\} \end{cases}$$

- Lo spazio delle strategie possibili cresce all'aumentare delle ripetizioni.

I Giochi Competitivi Ripetitivi – 6/13

- Trovare un equilibrio di Nash facendo un'analisi in ogni ripetizione delle strategie di migliore risposta è molto complicato in questi giochi.

- DEFINIZIONE: Consideriamo un gioco strategico G e $\delta \in [0,1)$ come un fattore di sconto. Il gioco ripetuto, denotato come G(T, δ), consiste nella ripetizione di G per un numero di volte T + 1 da t = 0, a t = T. Per ogni giocatore definiamo la sua strategia come $s_i = [s_i(h(0)), \dots, s_i(h(T))]$ mentre la strategia degli avversari è $s_{-i} = [(s_j)_{j\in\mathbb{N}, j\neq i}]$.

I Giochi Competitivi Ripetitivi – 7/13

- Pertanto l'utilità per un giocatore i-esimo nel gioco ripetitivo è dato da:

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \sum_{t=0}^{T} \delta^t g_i(a_i(t), a_{-i}(t))$$

dove $a_i(t) = s_i(h(t))$ è l'azione dell'i-esimo giocatore nella t-esima ripetizione, con $g_i(a_i(t), a_{-i}(t))$ a rappresentare il payoff dell'i-esimo giocatore dal gioco costituente nella t-esima ripetizione. Se T va all'infinito, allora $G(\infty,\delta)$ è un gioco ripetitivo ad orizzonte infinto, altrimenti sarà finito.

I Giochi Competitivi Ripetitivi – 8/13

- Nei giochi ad orizzonte infinito, l'utilità scontata viene spesso normalizzata:

$$u_i(s_i, s_{-i}) = (1-\delta)\sum_{t=0}^{T} \delta^t g_i(a_i(t), a_{-i}(t))$$

così da garantire che sia espresso nella stessa unità di quello costituente.

- Consideriamo un gioco ripetitivo ad orizzonte finito come il dilemma del prigioniero, questo è risolvibile con la backward induction.

I Giochi Competitivi Ripetitivi – 9/13

- Siccome assumiamo che è un gioco a perfetta informazione con azioni osservabili e monitoraggio perfetto, allora i giocatori conoscono la fine del gioco.
- I giocatori possono concludere che alla fine del gioco, la migliore risposta è confessare. Andando a ritroso attraverso ogni ripetuta del gioco, giocare C in ogni sotto-gioco è un equilibrio perfetto nei sotto-giochi del dilemma del prigioniero ripetuto con orizzonte finito.
- Le cose cambiano con l'orizzonte infinito.

I Giochi Competitivi Ripetitivi – 10/13

- Se $1 > \delta \geq \frac{1}{2}$, allora il dilemma del prigioniero ripetuto ha un equilibrio perfetto nei sotto-giochi in cui (NC, NC) è giocato ad ogni ripetuta, ovvero non confessano e cooperano ad ogni ripetuta del gioco.
- Ovvero se i giocatori valutano sufficientemente i payoff futuri rispetto a quelli presenti, allora (NC, NC) è un risultato sostenibile.
- Ovviamente in base al valore assunto da δ altri equilibri sono possibili.

I Giochi Competitivi Ripetitivi – 11/13

- TEOREMA di Folk: Se **u** = (u_1, …, u_N) è un vettore dei payoff fattibili e strettamente razionali in maniera individuale, allora esiste un fattore di sconto $0 \leq \underline{\delta} < 1$ tale che per ogni $\delta > \underline{\delta}$ il gioco ripetivo con orizzonte infinito $G(\infty,\delta)$ ha un equilibrio di Nash (che è anche un equilibrio perfetto ai sotto-giochi) con vettore di payoff **u**.

- Se l'orizzonte è abbastanza lungo, il guadagno ottenuto dal deviare una volta è superiore della perdita futura, dove la perdita è a causa della strategia minmax degli altri giocatori.

I Giochi Competitivi Ripetitivi – 12/13

- Ciò significa che con una sufficiente attesa, il comportamento non cooperativo di un giocatore viene punito dal comportamento cooperativo degli altri. Di conseguenza un comportamento cooperativo viene premiato dalle decisioni future degli altri.

- Quindi nel lungo periodo, i giocatori, sebbene si comportino in maniera competitiva, sceglieranno un comportamento cooperativo così da ottenere un payoff che è meglio del valore min-max.

I Giochi Competitivi Ripetitivi – 13/13

- Come ottenere il payoff promesso dal teorema di Folk? Ovvero come definire una regola per ottenere migliori payoff premiando la cooperazione e punendo la competitività?

- Una strategia ben nota è Tit-for-Tat: un giocatore inizia cooperando, ma in una ripetuta risponde con la stessa strategia precedente del suo avversario.

- È dimostrato che questo approccio nel dilemma del prigioniero ripetuto porta a un equilibrio di Nash Pareto-ottimo.

Bibliografia

- A Course in Game Theory
  by M.J. Osborne and A. Rubinstein (1994)
  - cap. 1-3, 8
- Game Theory in Wireless and Communication Networks
  by Z. Han, D. Niyato, W. Saad, T. Başar and A. Hjørungnes (2011)
  - cap. 1