STRUMENTI FORMALI PER LA BIOINFORMATICA

Grammatiche e Linguaggi Context-free
Esercizi - Parte I(a)

Esercizio 2.3 - Sipser

Rispondere a ciascun punto per la seguente grammatica context-free G

$$\begin{array}{rcl} R & \rightarrow & XRX \mid S \\ S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\ T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\ X & \rightarrow & a \mid b \end{array}$$

Esercizio 2.3 - Sipser

- Quali sono le variabili di G?
- Quali sono i terminali di G?
- Qual è la variabile iniziale di G?
- Fornire tre stringhe in $L(G)$.
- Fornire tre stringhe *non* in $L(G)$.
- Vero o Falso: $T \Rightarrow aba$.
- Vero o Falso: $T \overset{*}{\Rightarrow} aba$.
- Vero o Falso: $T \Rightarrow T$.

Esercizio 2.3 - Sipser

- Vero o Falso: $T \overset{*}{\Rightarrow} T$.
- Vero o Falso: $XXX \overset{*}{\Rightarrow} aba$.
- Vero o Falso: $X \overset{*}{\Rightarrow} aba$.
- Vero o Falso: $T \overset{*}{\Rightarrow} XX$.
- Vero o Falso: $T \overset{*}{\Rightarrow} XXX$.
- Vero o Falso: $S \overset{*}{\Rightarrow} \epsilon$.
- Dare una descrizione (informale) di $L(G)$.

Soluzione :

$$
\begin{array}{rcl}
R & \rightarrow & XRX \mid S \\
S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\
T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\
X & \rightarrow & a \mid b
\end{array}
$$

Quali sono le variabili di G?

Soluzione :

Le variabili di G sono R, X, S, T.

Soluzione :

$$\begin{array}{rcl} R & \rightarrow & XRX \mid S \\ S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\ T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\ X & \rightarrow & a \mid b \end{array}$$

Quali sono i terminali di G?

Soluzione :

I terminali di G sono a e b.

Soluzione :

$$\begin{array}{rcl} R & \rightarrow & XRX \mid S \\ S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\ T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\ X & \rightarrow & a \mid b \end{array}$$

Qual è la variabile iniziale di G?

Soluzione :

La variabile iniziale di G è R.

Soluzione :

$$
\begin{array}{rcl}
R & \rightarrow & XRX \mid S \\
S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\
T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\
X & \rightarrow & a \mid b
\end{array}
$$

Fornire tre stringhe in $L(G)$.

Soluzione :

$$
\begin{aligned}
R &\Rightarrow S \Rightarrow aTb \Rightarrow ab \\
R &\Rightarrow S \Rightarrow bTa \Rightarrow ba \\
R &\Rightarrow S \Rightarrow bTa \Rightarrow bXa \Rightarrow bba
\end{aligned}
$$

Tre stringhe in $L(G)$: ab, ba, bba.

Soluzione :

$$
\begin{array}{rcl}
R & \rightarrow & XRX \mid S \\
S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\
T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\
X & \rightarrow & a \mid b
\end{array}
$$

Fornire tre stringhe *non* in $L(G)$.

Soluzione :

Tre stringhe non in $L(G)$: ϵ, a, b.

Soluzione :

$$
\begin{array}{rcl}
R & \rightarrow & XRX \mid S \\
S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\
T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\
X & \rightarrow & a \mid b
\end{array}
$$

Vero o Falso: $T \Rightarrow aba$.

Soluzione :

Falso. Per avere $T \Rightarrow aba$ dovremmo avere la produzione $T \rightarrow aba$. Ma $T \rightarrow aba$ non è una produzione in G.

Soluzione :

$$
\begin{array}{rcl}
R & \rightarrow & XRX \mid S \\
S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\
T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\
X & \rightarrow & a \mid b
\end{array}
$$

Vero o Falso: $T \stackrel{*}{\Rightarrow} aba$.

Soluzione :

Vero.

$$T \Rightarrow XTX \Rightarrow XXX \Rightarrow aXX \Rightarrow abX \Rightarrow aba.$$

Quindi $T \overset{*}{\Rightarrow} aba$.

Soluzione :

$$\begin{array}{rcl} R & \rightarrow & XRX \mid S \\ S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\ T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\ X & \rightarrow & a \mid b \end{array}$$

Vero o Falso: $T \Rightarrow T$.

Soluzione :

Falso. Non abbiamo in G la produzione $T \rightarrow T$.

Soluzione :

$$
\begin{array}{rcl}
R & \rightarrow & XRX \mid S \\
S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\
T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\
X & \rightarrow & a \mid b
\end{array}
$$

Vero o Falso: $T \stackrel{*}{\Rightarrow} T$.

Soluzione :

Vero. Per ogni stringa α di variabili e terminali risulta $\alpha \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$.

Soluzione :

$$\begin{array}{rcl} R & \rightarrow & XRX \mid S \\ S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\ T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\ X & \rightarrow & a \mid b \end{array}$$

Vero o Falso: $XXX \overset{*}{\Rightarrow} aba$.

Soluzione :

Vero.

$$XXX \Rightarrow aXX \Rightarrow abX \Rightarrow aba.$$

Quindi $XXX \stackrel{*}{\Rightarrow} aba$.

Soluzione :

$$\begin{array}{rcl} R & \rightarrow & XRX \mid S \\ S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\ T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\ X & \rightarrow & a \mid b \end{array}$$

Vero o Falso: $X \stackrel{*}{\Rightarrow} aba$.

Soluzione :

Falso. X genera solo le stringhe a e b.

Soluzione :

$$
\begin{array}{rcl}
R & \rightarrow & XRX \mid S \\
S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\
T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\
X & \rightarrow & a \mid b
\end{array}
$$

Vero o Falso: $T \stackrel{*}{\Rightarrow} XX$.

Soluzione :

Vero.

$$T \Rightarrow XTX \Rightarrow XX.$$

Quindi $T \stackrel{*}{\Rightarrow} XX$.

Soluzione :

$$
\begin{array}{rcl}
R & \rightarrow & XRX \mid S \\
S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\
T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\
X & \rightarrow & a \mid b
\end{array}
$$

Vero o Falso: $T \stackrel{*}{\Rightarrow} XXX$.

Soluzione :

Vero.

$$T \Rightarrow XTX \Rightarrow XXX.$$

Quindi $T \stackrel{*}{\Rightarrow} XXX$.

Soluzione :

$$\begin{array}{rcl} R & \rightarrow & XRX \mid S \\ S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\ T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\ X & \rightarrow & a \mid b \end{array}$$

Vero o Falso: $S \overset{*}{\Rightarrow} \epsilon$.

Soluzione :

Falso. Le produzioni con S sul lato sinistro, che vanno usate come primo passo in una derivazione da S, generano stringhe di terminali di lunghezza maggiore o uguale a due.

Soluzione :

$$\begin{array}{rcl} R & \rightarrow & XRX \mid S \\ S & \rightarrow & aTb \mid bTa \\ T & \rightarrow & XTX \mid X \mid \epsilon \\ X & \rightarrow & a \mid b \end{array}$$

Dare una descrizione (informale) di $L(G)$.

Soluzione :

$$\begin{aligned} R &\rightarrow XRX \mid S, \quad S \rightarrow aTb \mid bTa \\ T &\rightarrow XTX \mid X \mid \epsilon, \quad X \rightarrow a \mid b \end{aligned}$$

La grammatica G', con simbolo iniziale T e produzioni

$$T \rightarrow XTX \mid X \mid \epsilon, \quad X \rightarrow a \mid b$$

genera $\{a, b\}^*$.

La grammatica G', con simbolo iniziale T e produzioni

$$T \to XTX \mid X \mid \epsilon, \quad X \to a \mid b$$

genera $\{a, b\}^*$.

La grammatica G', con simbolo iniziale T e produzioni

$$T \to XTX \mid X \mid \epsilon, \quad X \to a \mid b$$

genera $\{a, b\}^*$.

Perché?

La grammatica G', con simbolo iniziale T e produzioni

$$T \to XTX \mid X \mid \epsilon, \quad X \to a \mid b$$

genera $\{a, b\}^*$.

Perché?

Certamente G' genera ϵ, a, b, usando la produzione $T \to \epsilon$ oppure $T \to X$ e poi le produzioni di X.

La grammatica G', con simbolo iniziale T e produzioni

$$T \to XTX \mid X \mid \epsilon, \quad X \to a \mid b$$

genera $\{a, b\}^*$.

Perché?

Certamente G' genera ϵ, a, b, usando la produzione $T \to \epsilon$ oppure $T \to X$ e poi le produzioni di X.

La generazione delle altre stringhe inizia sempre con la derivazione $T \stackrel{*}{\Rightarrow} X^k T X^k$.

La grammatica G', con simbolo iniziale T e produzioni

$$T \to XTX \mid X \mid \epsilon, \quad X \to a \mid b$$

genera $\{a, b\}^*$.

Perché?

Certamente G' genera ϵ, a, b, usando la produzione $T \to \epsilon$ oppure $T \to X$ e poi le produzioni di X.

La generazione delle altre stringhe inizia sempre con la derivazione $T \overset{*}{\Rightarrow} X^k T X^k$.

Quindi, per ogni n esiste la derivazione $T \overset{*}{\Rightarrow} X^n$ in G'.

La grammatica G', con simbolo iniziale T e produzioni

$$T \to XTX \mid X \mid \epsilon, \quad X \to a \mid b$$

genera $\{a, b\}^*$.

Perché?

Certamente G' genera ϵ, a, b, usando la produzione $T \to \epsilon$ oppure $T \to X$ e poi le produzioni di X.

La generazione delle altre stringhe inizia sempre con la derivazione $T \overset{*}{\Rightarrow} X^k T X^k$.

Quindi, per ogni n esiste la derivazione $T \overset{*}{\Rightarrow} X^n$ in G'.

Ogni stringa w può essere generata. Se $|w| = h$, usando le produzioni di X si ha:

$$T \overset{*}{\Rightarrow} X^h \overset{*}{\Rightarrow} w$$

Soluzione :

$$\begin{aligned} R &\rightarrow XRX \mid S, \quad S \rightarrow aTb \mid bTa \\ T &\rightarrow XTX \mid X \mid \epsilon, \quad X \rightarrow a \mid b \end{aligned}$$

Una qualsiasi derivazione di una stringa w di terminali è necessariamente una delle seguenti due derivazioni:

$$R \stackrel{*}{\Rightarrow} X^n R X^n \Rightarrow X^n S X^n \Rightarrow X^n aTb X^n \stackrel{*}{\Rightarrow} w, \quad n \geq 0$$

$$R \stackrel{*}{\Rightarrow} X^n R X^n \Rightarrow X^n S X^n \Rightarrow X^n bTa X^n \stackrel{*}{\Rightarrow} w, \quad n \geq 0$$

Soluzione :

$L(G)$ consiste di tutte le stringhe su a e b che non sono palindrome.

$$L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \neq w^R\}.$$

Esercizio 5.1.1- a)

Fornire una grammatica context-free che generi il linguaggio $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$.

Soluzione :

Definizione ricorsiva di $S = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$:

Soluzione :

Definizione ricorsiva di $S = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$:

PASSO BASE: $ab \in S$.

Soluzione :

Definizione ricorsiva di $S = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$:

PASSO BASE: $ab \in S$.

PASSO RICORSIVO: Se x è una parola in S allora anche axb appartiene a S.

Soluzione :

Risulta $L = L(G)$ con $G = (V, T, P, S)$, $V = \{S\}$, $T = \{a, b\}$ e

$$P = \{S \to aSb,\ S \to ab\}$$

Esercizio 5.1.7:

Consideriamo la grammatica context-free G definita dalle produzioni

$$S \to aS \mid Sb \mid a \mid b$$

- Dimostrare per induzione sul numero di passi di derivazione (sul libro: induzione sulla lunghezza della stringa) che nessuna stringa in $L(G)$ ha ba come sottostringa.
- Descrivere $L(G)$ (in termini informali) e giustificare la risposta servendosi (anche) della proprietà precedente.

Soluzione :

Consideriamo la grammatica context-free G definita dalle produzioni

$$S \rightarrow aS \mid Sb \mid a \mid b$$

Proviamo che nessuna stringa in $L(G)$ ha ba come sottostringa.

Soluzione :

Sia $w \in \{a, b\}^*$ e $w \in L(G)$. Allora abbiamo uno dei seguenti quattro casi:

1. $S \Rightarrow w = a$, numero di passi di derivazione $= 1$;
2. $S \Rightarrow w = b$, numero di passi di derivazione $= 1$;
3. $S \Rightarrow aS \overset{*}{\Rightarrow} w$, numero di passi di derivazione $= n > 1$;
4. $S \Rightarrow Sb \overset{*}{\Rightarrow} w$, numero di passi di derivazione $= n > 1$.

Soluzione :

$$S \Rightarrow w = a, \text{ numero di passi di derivazione} = 1$$
$$S \Rightarrow w = b, \text{ numero di passi di derivazione} = 1$$

Ovviamente nel primo e nel secondo caso w non ha ba come sottostringa.

Soluzione :

Se $S \Rightarrow aS \overset{*}{\Rightarrow} w$, con numero di passi di derivazione $n > 1$, allora $w = ax$ e $S \overset{*}{\Rightarrow} x$ in un numero di passi $n - 1 \geq 1$.

Analogamente, se $S \Rightarrow Sb \overset{*}{\Rightarrow} w$, con numero di passi di derivazione $n > 1$, allora $w = xb$ e $S \overset{*}{\Rightarrow} x$ in un numero di passi $n - 1 \geq 1$.

Soluzione :

$S \Rightarrow aS \stackrel{*}{\Rightarrow} w$, numero di passi di derivazione $= n > 1$;

$S \Rightarrow Sb \stackrel{*}{\Rightarrow} w$, numero di passi di derivazione $= n > 1$.

Nel terzo caso, $w = ax$, con $S \stackrel{*}{\Rightarrow} x$ in un numero di passi $n - 1 \geq 1$. Per ipotesi induttiva, x non ha *ba* come sottostringa e quindi anche w non *ba* come sottostringa.

Analogamente, nel quarto caso, $w = xb$, con $S \stackrel{*}{\Rightarrow} x$ in un numero di passi $n - 1 \geq 1$. Per ipotesi induttiva, x non ha *ba* come sottostringa e quindi anche w non *ba* come sottostringa.

Soluzione :

Consideriamo la grammatica context-free G definita dalle produzioni

$$S \to aS \mid Sb \mid a \mid b$$

Descrivere $L(G)$ (in termini informali) e giustificare la risposta servendosi (anche) della proprietà precedente.

Soluzione :

Come descrivere il linguaggio delle stringhe non vuote sull'alfabeto $\{a, b\}$ che non contengono ba come sottostringa?

Soluzione :

Come descrivere il linguaggio delle stringhe non vuote sull'alfabeto $\{a, b\}$ che non contengono *ba* come sottostringa?

Il linguaggio delle stringhe non vuote sull'alfabeto $\{a, b\}$ che non contengono *ba* come sottostringa è

$$\{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n + m \neq 0\}$$

Soluzione :

Come descrivere il linguaggio delle stringhe non vuote sull'alfabeto $\{a, b\}$ che non contengono *ba* come sottostringa?
Il linguaggio delle stringhe non vuote sull'alfabeto $\{a, b\}$ che non contengono *ba* come sottostringa è

$$\{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n + m \neq 0\}$$

Proviamo che

$$L(G) = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n + m \neq 0\}$$

Soluzione :

$$L(G) = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n + m \neq 0\}$$

Infatti, se $w \in L(G)$ allora w non ha ba come sottostringa e $w \neq \epsilon$. Quindi $w = a^n b^m$, con $n, m \in \mathbb{N}$, $n + m \neq 0$.
Viceversa, sia $w = a^n b^m$, con $n, m \in \mathbb{N}$, $n + m \neq 0$. Se $n > 0$, allora

$$S \stackrel{*}{\Rightarrow} Sb^m \stackrel{*}{\Rightarrow} a^n b^m$$

Analogamente, se $m > 0$, allora

$$S \stackrel{*}{\Rightarrow} a^n S \stackrel{*}{\Rightarrow} a^n b^m.$$

Esercizio 5.1.8 (parziale):

Consideriamo la grammatica context-free G definita dalle produzioni

$$S \to aSbS \mid bSaS \mid \epsilon$$

Provare che

$$L(G) \subseteq \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$$

Soluzione :

Per induzione sul numero di passi di derivazione. Sia $w \in L(G)$.

Se $w = \epsilon$, ovviamente $|w|_a = |w|_b = 0$.

Se $w \neq \epsilon$ abbiamo uno dei seguenti due casi:

1. $S \Rightarrow aSbS \overset{*}{\Rightarrow} w$, numero di passi di derivazione $= n > 1$;
2. $S \Rightarrow bSaS \overset{*}{\Rightarrow} w$, numero di passi di derivazione $= n > 1$.

Nel primo caso $w = axby$, nel secondo caso $w = bxay$, in entrambi i casi con x, y in $L(G)$ e $S \overset{*}{\Rightarrow} x$, $S \overset{*}{\Rightarrow} y$, con derivazioni più corte. Per ipotesi induttiva $|x|_a = |x|_b$ e $|y|_a = |y|_b$ e quindi:

$$|w|_a = |x|_a + |y|_a + 1 = |x|_b + |y|_b + 1 = |w|_b$$

Definizione

L'insieme Σ^* delle stringhe sull'alfabeto Σ è definito ricorsivamente come segue:

Definizione

L'insieme Σ^* *delle stringhe sull'alfabeto* Σ *è definito ricorsivamente come segue:*

PASSO BASE: $\epsilon \in \Sigma^*$ *(dove* ϵ *è la stringa vuota).*

Definizione

L'insieme Σ^* *delle stringhe sull'alfabeto* Σ *è definito ricorsivamente come segue:*

PASSO BASE: $\epsilon \in \Sigma^*$ *(dove* ϵ *è la stringa vuota).*

PASSO RICORSIVO: *Se* $w \in \Sigma^*$ *e* $x \in \Sigma$*, allora* $wx \in \Sigma^*$*.*

Definizione

L'insieme Σ^* delle stringhe sull'alfabeto Σ è definito ricorsivamente come segue:

PASSO BASE: $\epsilon \in \Sigma^*$ *(dove ϵ è la stringa vuota).*

PASSO RICORSIVO: *Se $w \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$, allora $wx \in \Sigma^*$.*

- **Nota.** *Se nel passo ricorsivo $w = \epsilon$, porremo $\epsilon x = x$.*

Fornire una grammatica context-free che generi $\{0,1\}^*$.

Soluzione :

$\{0,1\}^*$ è generato dalla grammatica definita da:

$$S \to S0 \mid S1 \mid \epsilon$$

Un'altra grammatica che genera $\{0,1\}^*$:

$$S \to 0S \mid 1S \mid \epsilon$$

Fornire una grammatica context-free che generi $S = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$, cioè l'insieme delle parole palindrome sull'alfabeto $\{0,1\}$.

Soluzione :

- Definizione ricorsiva di $S = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$:

Fornire una grammatica context-free che generi $S = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$, cioè l'insieme delle parole palindrome sull'alfabeto $\{0,1\}$.

Soluzione :

- Definizione ricorsiva di $S = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$:

  PASSO BASE: $\epsilon \in S$, $0 \in S$, $1 \in S$.

Fornire una grammatica context-free che generi $S = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$, cioè l'insieme delle parole palindrome sull'alfabeto $\{0,1\}$.

Soluzione :

- Definizione ricorsiva di $S = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$:

  PASSO BASE: $\epsilon \in S$, $0 \in S$, $1 \in S$.

  PASSO RICORSIVO: Se x è una parola in S allora anche $0x0$ e $1x1$ appartengono a S.

Fornire una grammatica context-free che generi $S = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$, cioè l'insieme delle parole palindrome sull'alfabeto $\{0,1\}$.

Soluzione :

- Definizione ricorsiva di $S = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$:

  PASSO BASE: $\epsilon \in S$, $0 \in S$, $1 \in S$.

  PASSO RICORSIVO: Se x è una parola in S allora anche $0x0$ e $1x1$ appartengono a S.

- $\{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$ è generato dalla grammatica definita da:

$$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1 \mid \epsilon.$$

Fornire una grammatica context-free che generi
$T = \{y \in \{0,1\}^* \mid y = ww^R\}$, cioè l'insieme delle parole palindrome di lunghezza pari sull'alfabeto $\{0,1\}$.

Soluzione :

- Definizione ricorsiva di $T = \{y \in \{0,1\}^* \mid y = ww^R\}$:

Fornire una grammatica context-free che generi $T = \{y \in \{0,1\}^* \mid y = ww^R\}$, cioè l'insieme delle parole palindrome di lunghezza pari sull'alfabeto $\{0,1\}$.

Soluzione :

- Definizione ricorsiva di $T = \{y \in \{0,1\}^* \mid y = ww^R\}$:
  PASSO BASE: $\epsilon \in T$.

Fornire una grammatica context-free che generi $T = \{y \in \{0,1\}^* \mid y = ww^R\}$, cioè l'insieme delle parole palindrome di lunghezza pari sull'alfabeto $\{0,1\}$.

Soluzione :

- Definizione ricorsiva di $T = \{y \in \{0,1\}^* \mid y = ww^R\}$:

  PASSO BASE: $\epsilon \in T$.

  PASSO RICORSIVO: Se x è una parola in T allora anche $0x0$ e $1x1$ appartengono a T.

Fornire una grammatica context-free che generi $T = \{y \in \{0,1\}^* \mid y = ww^R\}$, cioè l'insieme delle parole palindrome di lunghezza pari sull'alfabeto $\{0,1\}$.

Soluzione :

- Definizione ricorsiva di $T = \{y \in \{0,1\}^* \mid y = ww^R\}$:

  PASSO BASE: $\epsilon \in T$.

  PASSO RICORSIVO: Se x è una parola in T allora anche $0x0$ e $1x1$ appartengono a T.

- $\{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$ è generato dalla grammatica definita da:

$$T \to 0T0 \mid 1T1 \mid \epsilon.$$

Esercizio 2.6 (c)

Fornire una grammatica context-free che generi il linguaggio

$$\{w\#x \mid w^R \text{ è una sottostringa di } x, \text{ con } w, x \in \{0,1\}^*\}.$$

Soluzione :

- Le stringhe da generare hanno la forma $w\#yw^Rz$, con $w, y, z \in \{0, 1\}^*$.

Soluzione :

- Le stringhe da generare hanno la forma $w\#yw^Rz$, con $w, y, z \in \{0, 1\}^*$.
- Ci serviamo della grammatica che genera $\{0, 1\}^*$

$$X \to 0X \mid 1X \mid \epsilon$$

per generare y e z.

Soluzione :

- Le stringhe da generare hanno la forma $w\#yw^Rz$, con $w, y, z \in \{0,1\}^*$.
- Ci serviamo della grammatica che genera $\{0,1\}^*$

$$X \to 0X \mid 1X \mid \epsilon$$

per generare y e z.
- Usiamo la grammatica che genera le stringhe ww^R

$$T \to 0T0 \mid 1T1 \mid \epsilon.$$

Soluzione :

- Le stringhe da generare hanno la forma $w\#yw^Rz$, con $w, y, z \in \{0, 1\}^*$.

Soluzione :

- Le stringhe da generare hanno la forma $w\#yw^Rz$, con $w, y, z \in \{0,1\}^*$.
- $\{w\#x \mid w^R$ è una sottostringa di x, con $w, x \in \{0,1\}^*\}$ è generato dalla grammatica definita da:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & TX \\ T & \rightarrow & 0T0 \mid 1T1 \mid \#X \\ X & \rightarrow & 0X \mid 1X \mid \epsilon \end{array}$$