STRUMENTI FORMALI PER LA BIOINFORMATICA

Grammatiche e Linguaggi Context-free
Esercizi - Parte I(b)

Esercizio 5.1.2 :

La seguente grammatica genera il linguaggio dell'espressione regolare $0^*1(0+1)^*$:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & A1B \\ A & \rightarrow & 0A \mid \epsilon \\ B & \rightarrow & 0B \mid 1B \mid \epsilon \end{array}$$

Scrivere le derivazioni a sinistra e a destra delle seguenti stringhe:

- 00101
- 1001
- 00011

Soluzione :

$$S \rightarrow A1B, \quad A \rightarrow 0A \mid \epsilon, \quad B \rightarrow 0B \mid 1B \mid \epsilon$$

La grammatica definita da

$$B \rightarrow 0B \mid 1B \mid \epsilon$$

genera $(0+1)^*$.

Soluzione :

$$S \quad \rightarrow \quad A1B, \quad A \rightarrow 0A \mid \epsilon, \quad B \rightarrow 0B \mid 1B \mid \epsilon$$

La grammatica definita da

$$A \rightarrow 0A \mid \epsilon$$

genera 0^*.

Soluzione :

La seguente grammatica genera il linguaggio dell'espressione regolare $0^*1(0+1)^*$:

$$S \quad \to \quad A1B, \quad A \to 0A \mid \epsilon, \quad B \to 0B \mid 1B \mid \epsilon$$

Soluzione :

Le derivazioni a sinistra:

$$
\begin{aligned}
S &\underset{lm}{\Rightarrow} A1B \underset{lm}{\Rightarrow} 0A1B \underset{lm}{\Rightarrow} 00A1B \underset{lm}{\Rightarrow} 001B \underset{lm}{\Rightarrow} 0010B \\
&\underset{lm}{\Rightarrow} 00101B \underset{lm}{\Rightarrow} 00101 \\
S &\underset{lm}{\Rightarrow} A1B \underset{lm}{\Rightarrow} 1B \underset{lm}{\Rightarrow} 10B \underset{lm}{\Rightarrow} 100B \underset{lm}{\Rightarrow} 1001B \underset{lm}{\Rightarrow} 1001 \\
S &\underset{lm}{\Rightarrow} A1B \underset{lm}{\Rightarrow} 0A1B \underset{lm}{\Rightarrow} 00A1B \underset{lm}{\Rightarrow} 000A1B \underset{lm}{\Rightarrow} 0001B \\
&\underset{lm}{\Rightarrow} 00011B \underset{lm}{\Rightarrow} 00011
\end{aligned}
$$

Soluzione :

Le derivazioni a destra:

$$
\begin{aligned}
S &\underset{rm}{\Rightarrow} A1B \underset{rm}{\Rightarrow} A10B \underset{rm}{\Rightarrow} A101B \underset{rm}{\Rightarrow} A101 \underset{rm}{\Rightarrow} 0A101 \\
&\underset{rm}{\Rightarrow} 00A101 \underset{rm}{\Rightarrow} 00101 \\
S &\underset{rm}{\Rightarrow} A1B \underset{rm}{\Rightarrow} A10B \underset{rm}{\Rightarrow} A100B \underset{rm}{\Rightarrow} A1001B \underset{rm}{\Rightarrow} A1001 \underset{rm}{\Rightarrow} 1001 \\
S &\underset{rm}{\Rightarrow} A1B \underset{rm}{\Rightarrow} A11B \underset{rm}{\Rightarrow} A11 \underset{rm}{\Rightarrow} 0A11 \underset{rm}{\Rightarrow} 00A11 \\
&\underset{rm}{\Rightarrow} 000A11 \underset{rm}{\Rightarrow} 00011
\end{aligned}
$$

Esercizio 2.4

Fornire grammatiche context-free che generino i linguaggi seguenti. Per ognuno di essi l'alfabeto Σ è $\{0, 1\}$.

- $\{w \mid w$ contiene almeno tre simboli uguali a 1$\}$.
- $\{w \mid w$ inizia e termina con lo stesso simbolo$\}$.
- $\{w \mid$ la lunghezza di w è dispari$\}$.
- $\{w \mid$ la lunghezza di w è dispari e il suo simbolo centrale è uno 0$\}$.
- $\{w \mid w = w^R$, cioè w è palindroma$\}$.
- L'insieme vuoto.

Soluzione

Una strategia per alcuni dei linguaggi precedenti che sono non vuoti e regolari:

Soluzione

Una strategia per alcuni dei linguaggi precedenti che sono non vuoti e regolari:

- Determiniamo un'espressione regolare per il linguaggio in cui compaia $(0 + 1)^*$.

Soluzione

Una strategia per alcuni dei linguaggi precedenti che sono non vuoti e regolari:

- Determiniamo un'espressione regolare per il linguaggio in cui compaia $(0+1)^*$.
- Usiamo il fatto che la grammatica definita da

$$B \to 0B \mid 1B \mid \epsilon$$

genera $(0+1)^*$.

Soluzione

Vedremo una strategia molto più generale.

Soluzione

Vedremo una strategia molto più generale.

Infatti proveremo che ogni linguaggio regolare è context-free.

Soluzione

Vedremo una strategia molto più generale.

Infatti proveremo che ogni linguaggio regolare è context-free.

Vedremo come costruire una grammatica context-free che genera il linguaggio riconosciuto da un automa finito.

Soluzione

Vedremo una strategia molto più generale.

Infatti proveremo che ogni linguaggio regolare è context-free.

Vedremo come costruire una grammatica context-free che genera il linguaggio riconosciuto da un automa finito.

Vedremo come costruire una grammatica context-free che genera il linguaggio riconosciuto da un'espressione regolare.

Soluzione :

- $\{w \mid w$ contiene almeno tre simboli uguali a $1\}$ è rappresentato da $(0+1)^*1(0+1)^*1(0+1)^*1(0+1)^*$.

Soluzione :

- $\{w \mid w$ contiene almeno tre simboli uguali a $1\}$ è rappresentato da $(0+1)^*1(0+1)^*1(0+1)^*1(0+1)^*$.
- $\{w \mid w$ contiene almeno tre simboli uguali a $1\}$ è generato dalla grammatica definita da:

$$S \to X1X1X1X, \quad X \to 0X \mid 1X \mid \epsilon.$$

Soluzione :

- $\{w \mid w$ inizia e termina con lo stesso simbolo$\}$ è rappresentato da $0(0+1)^*0 + 1(0+1)^*1 + 0 + 1$.

Soluzione :

- $\{w \mid w$ inizia e termina con lo stesso simbolo$\}$ è rappresentato da $0(0+1)^*0 + 1(0+1)^*1 + 0 + 1$.
- $\{w \mid w$ inizia e termina con lo stesso simbolo$\}$ è generato dalla grammatica definita da:

$$S \to 0X0 \mid 1X1 \mid 0 \mid 1, \quad X \to 0X \mid 1X \mid \epsilon.$$

Soluzione :

- $\{w \mid$ la lunghezza di w è dispari$\}$ è rappresentato da $[(0+1)(0+1)]^*(0+1)$.

Soluzione :

- $\{w \mid$ la lunghezza di w è dispari$\}$ è rappresentato da $[(0+1)(0+1)]^*(0+1)$.
- $\{w \mid$ la lunghezza di w è dispari$\}$ è generato dalla grammatica definita da:

$$S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 0 \mid 1.$$

Soluzione :

$\{w \mid$ la lunghezza di w è dispari e il suo simbolo centrale è uno $0\}$
è generato dalla grammatica definita da:

$$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 0.$$

Soluzione :

- Definizione ricorsiva di $S = \{w \mid w = w^R\}$:

Soluzione :

- Definizione ricorsiva di $S = \{w \mid w = w^R\}$:
  PASSO BASE: $\epsilon \in S$, $0 \in S$, $1 \in S$.

Soluzione :

- Definizione ricorsiva di $S = \{w \mid w = w^R\}$:

  PASSO BASE: $\epsilon \in S$, $0 \in S$, $1 \in S$.

  PASSO RICORSIVO: Se x è una parola in S allora anche $0x0$ e $1x1$ appartengono a S.

Soluzione :

- Definizione ricorsiva di $S = \{w \mid w = w^R\}$:
  PASSO BASE: $\epsilon \in S$, $0 \in S$, $1 \in S$.
  PASSO RICORSIVO: Se x è una parola in S allora anche $0x0$ e $1x1$ appartengono a S.

- $\{w \mid w = w^R$, cioè w è palindroma$\}$ è generato dalla grammatica definita da:

$$S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1 \mid \epsilon.$$

Soluzione :

L'insieme vuoto è generato da $G = (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$, con $P = \emptyset$.