Model-checking simbolico

Approcci al model-checking (MC)

- Explicit-State MC: algoritmo esplora gli stati individualmente
  - automa di Büchi costruito on-the-fly durante esplorazione
  - Model-checker esplicito: SPIN
  - performance ottenuta con una serie di ottimizzazioni (partial order reduction, state compression, etc.)
- Symbolic MC: algoritmo esplora insiemi di stati rappresentati simbolicamente (formula logica)
  - L'insieme di successori di un insieme di stati è calcolato dalla rappresentazione dell'insieme e la rappresentazione delle transizioni
- Bounded MC: riduzione a soddisfacibilità di formule Booleane (SAT)
  - Limite sul numero di passi codificati

Algoritmo simbolico per raggiungibilità

- $A = (\Sigma, Q, Q\_in, \delta)$ macchina a stati finiti
- T: insieme target
- algoritmo manipola insiemi di stati (forward reachability):
  - Inizializzazione: $Q_0 = Q\_in$
  - Passo: $Q_{i+1} = Q_i \cup \{ q' \mid \exists q \in Q_i, (q, a, q') \in \delta\}$
  - Terminazione:

    Se $Q_i \cap T \neq \emptyset$, termina con risposta positiva

    Se $Q_{i+1} == Q_i$ termina con risposta negativa

  (cattura visita breadth-first seach)
- si può ottenenere un altro algoritmo (backward reachability) partendo dal target T e visitando gli stati a ritroso fino a raggiungere stato iniziale oppure completata esplorazione stati raggiungibili

Insiemi di stati come formule booleane

- per implementare efficientemente algoritmi simbolici occorre una struttura dati efficiente per
  - rappresentare in maniera compatta insiemi di stati
  - facilitare le tipiche operazioni su insiemi (unione, intersezione, test uguaglianza, test vuoto, etc.)

- Insiemi di stati possono essere rappresentati come formule booleane
  - stati sono rappresentati da vettori binari (corrispondenti a valutazioni delle variabili)
  - uno stato appartiene ad un insieme rappresentato da formula φ se corrisponde a valutazione soddisfacente φ

Visita simbolica con formule

- $R_0(X) \;\; = Q_{in}(X)$
- $R_{i+1}(X) = R_i(X) \;\vee\; \exists Z.\ (R_i\ (Z) \wedge T(Z,X))$

  dove:
  - X,Z sono vettori binari,
  - R_j con $j \geq 0$, e sono Q_{in} sono predicati sui vettori (insiemi) e
  - T è una relazione binaria su vettori (relazione di transizione)

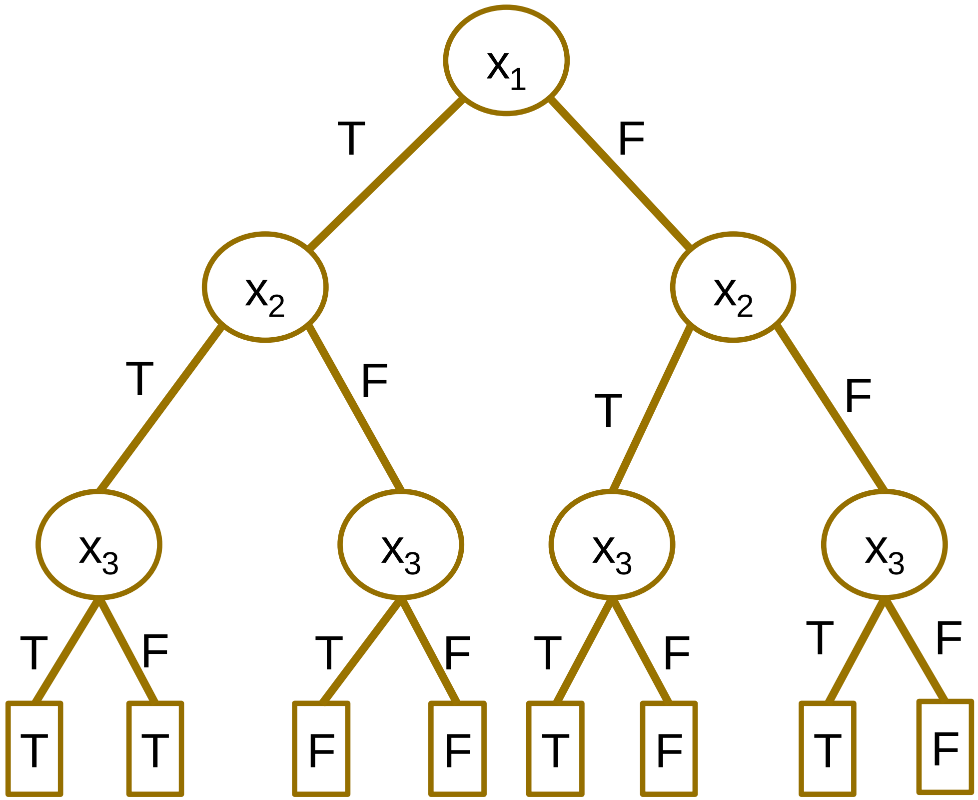
Rappresentazione compatta di formule

- formula $\varphi = (x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_3)$
- una formula può essere vista come una funzione booleana e quindi definita attraverso una tavola di verità:

x_1	x_2	x_3	φ
F	F	F	F
F	F	T	T
F	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	F
T	F	T	F
T	T	F	T
T	T	T	T

- ridondante:
  - formula vera se entrambi x_1 e x_2 veri oppure x_1 falso e x_3 vero
- utilizziamo un albero di decisione binario

Albero di decisione binario



- corrisponde alla tavola di verità
- ogni livello (eccetto foglie) corrisponde ad una variabile
- archi uscenti etichettate con valore variabile
- valutazioni corrispondono a cammini dalla radice alle foglie
- valore foglie = valore formula

Diagramma di decisione binario

- possiamo compattare ridondanze
- ad es., non servono tutte le foglie
  - basta solo un rappresentante per T e uno per F

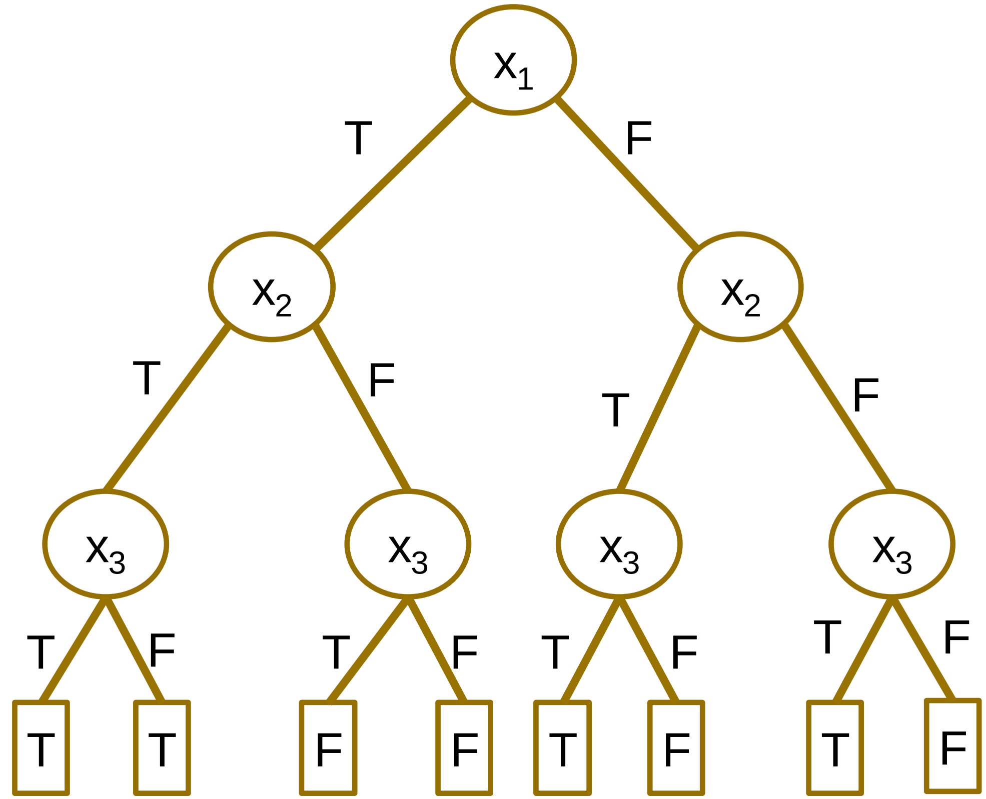


Diagramma di decisione binario

- possiamo compattare ridondanze
- ad es., non servono tutte le foglie
  - basta solo un rappresentante per T e uno per F

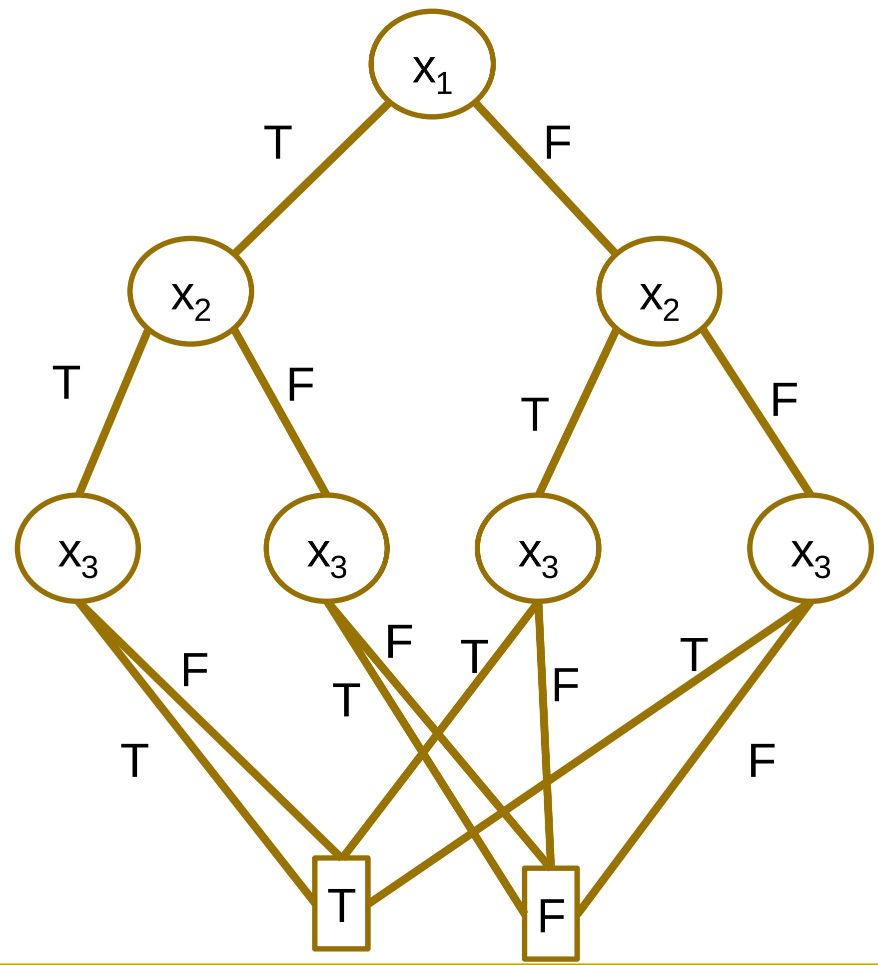


Diagramma di decisione binario

- nodo x_3 più a sinistra collegato a foglia T indipendentemente dal valore assegnato
- stesso per secondo nodo stesso livello
- possiamo rimuoverli e collegare archi da x_2 direttamente alle foglie

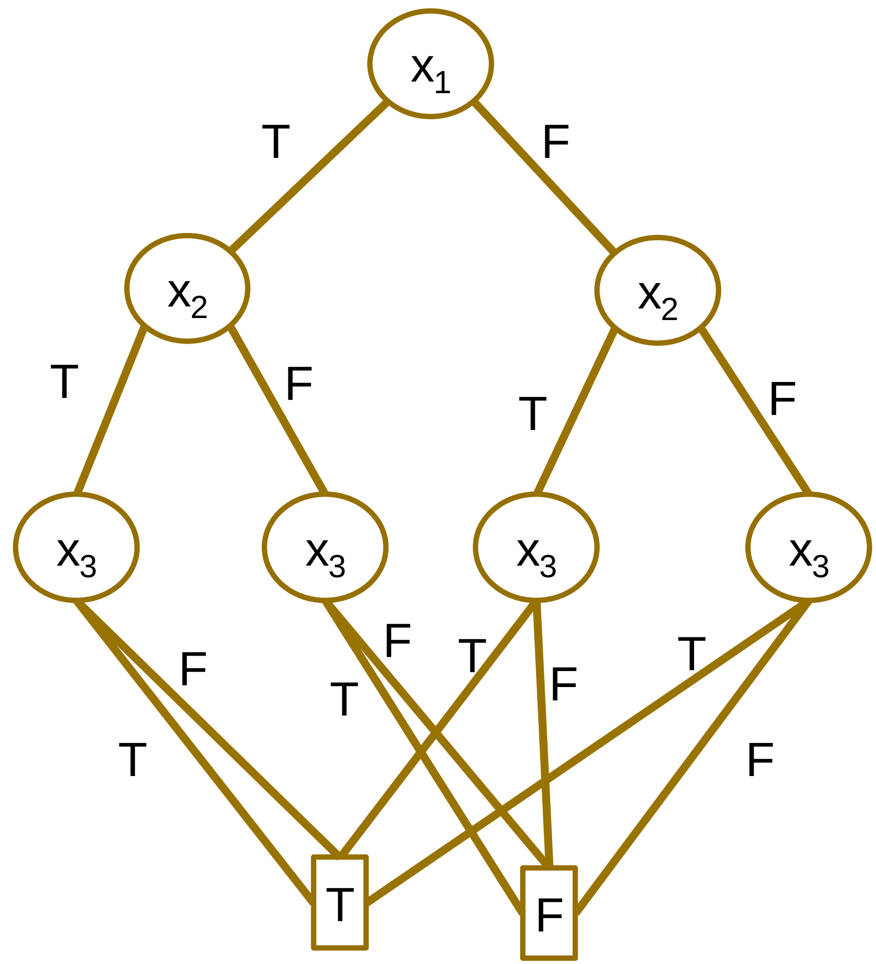


Diagramma di decisione binario

- nodo x_3 più a sinistra collegato a foglia T indipendentemente dal valore assegnato
- stesso per secondo nodo stesso livello

- possiamo rimuoverli e collegare archi da x_2 direttamente alle foglie

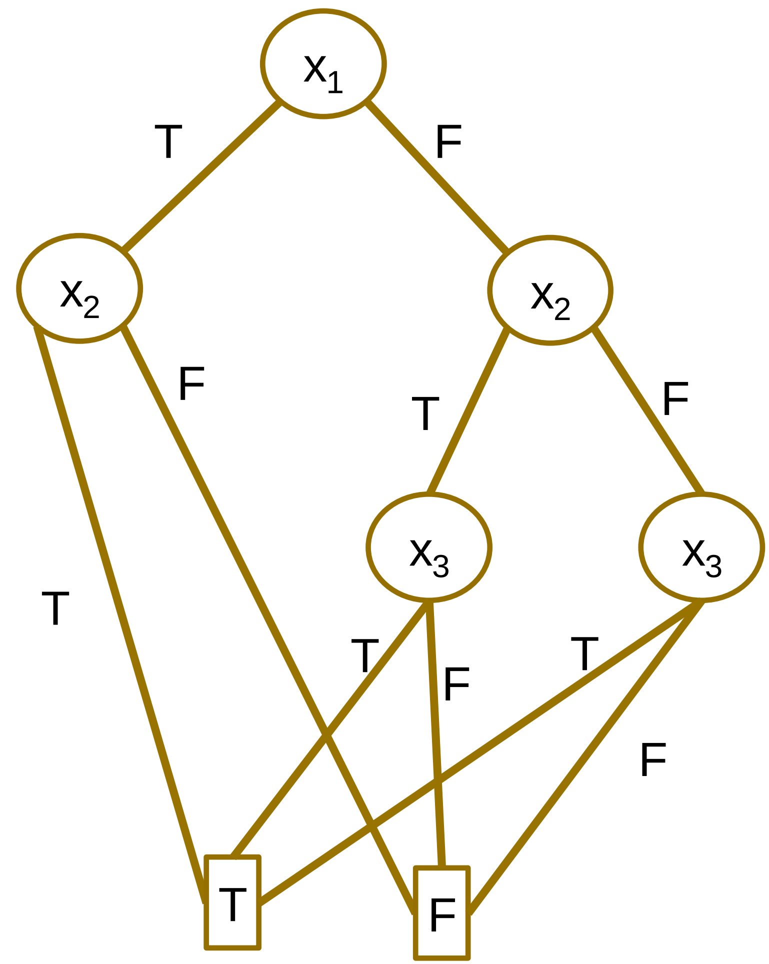


Diagramma di decisione binario

- i sottografi radicati in x_3 coincidono
- possiamo accorparli in un unico sottografo

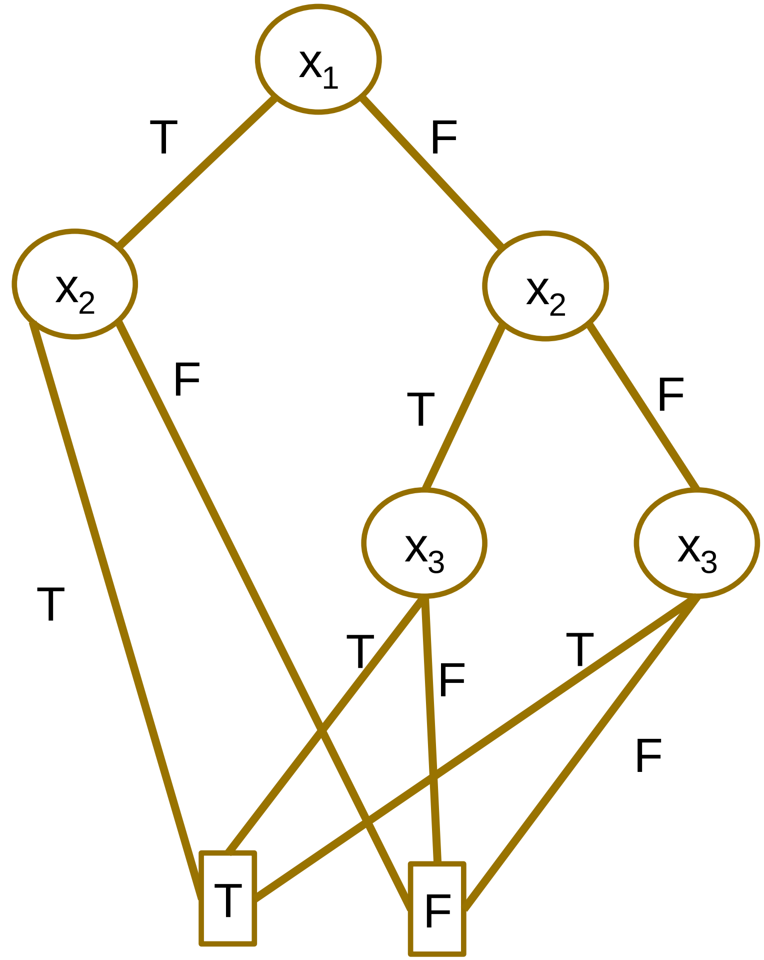


Diagramma di decisione binario

- i sottografi radicati in x_3 coincidono
- possiamo accorparli in un unico sottografo

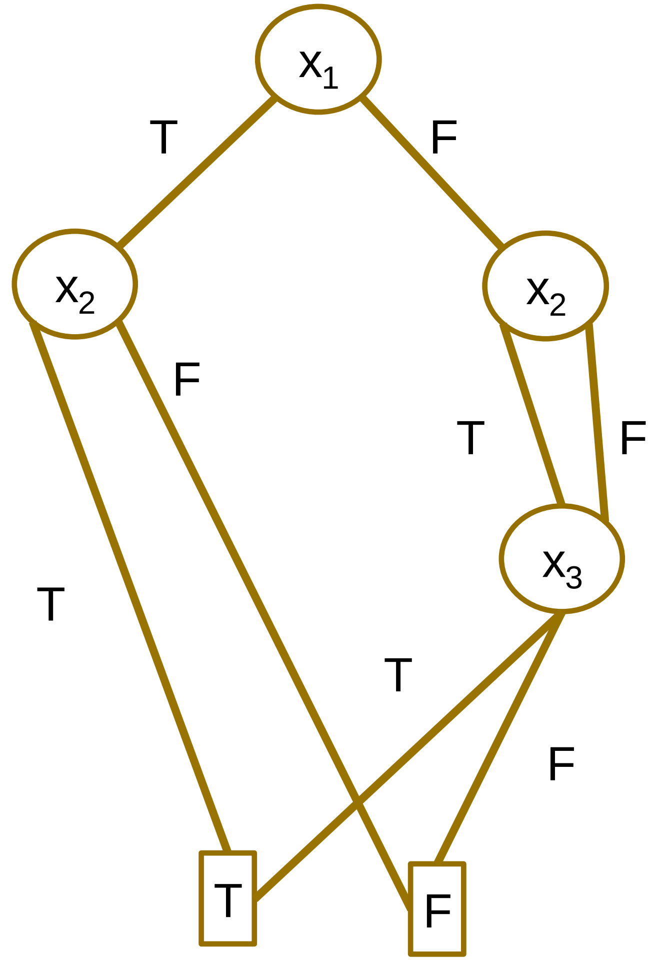


Diagramma di decisione binario

- archi uscenti da nodo x_2 più a destra entrano nello stesso nodo
- possiamo rimuovere questo nodo

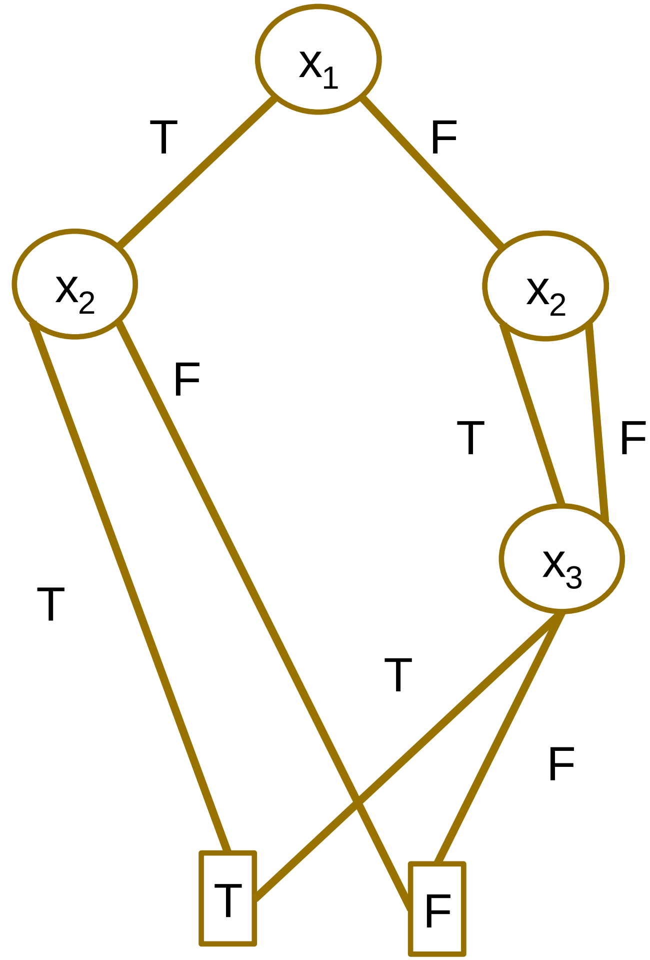


Diagramma di decisione binario

- archi uscenti da nodo x_2 più a destra entrano nello stesso nodo
- possiamo rimuovere questo nodo
- non sono possibili altre semplificazioni
- diagramma finale ha solo 5 nodi contro i 15 di quello iniziale

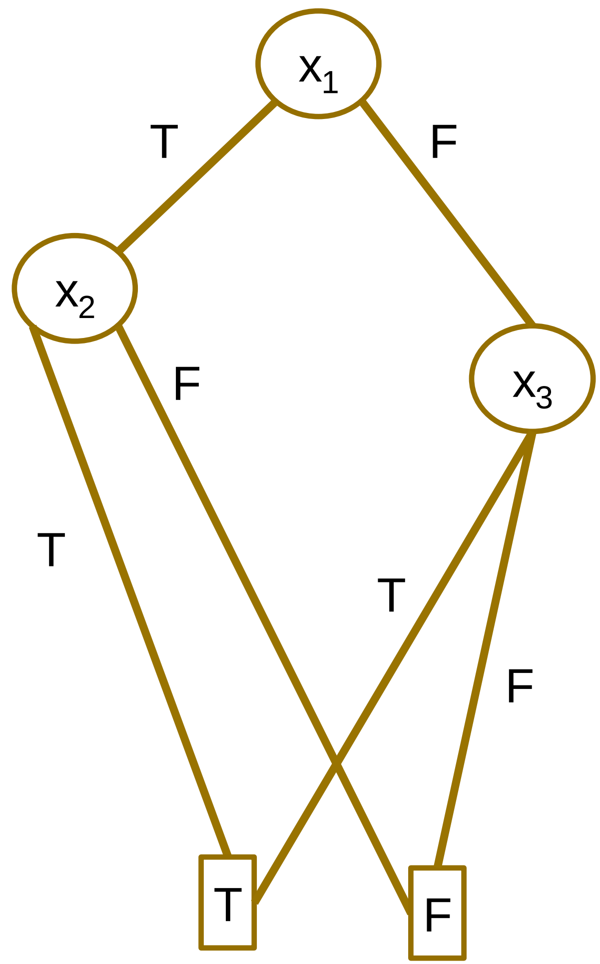


Diagramma di decisione binario (BDD)

- BDD: grafo aciclico direzionato (DAG) t.c.
  - nodi pozzo (foglie) sono etichettati con T (true) e F (false)
  - gli altri nodi (nodi interni) con variabili booleane
  - esiste un unico nodo sorgente (radice)
  - ogni nodo interno ha due archi uscenti:
    - uno etichettato con T (T-arco) e l'altro con F (F-arco)
  - su ogni cammino dalla radice alle foglie, le variabili sono incontrate sempre nello stesso ordine (ordinamento delle variabili fissato per ogni BDD)
- Nota: cammini di un BDD corrispondono a funzioni di assegnamento delle variabili

Notazione

- Sia V = < v_1, v_2 , … v_n > una sequenza ordinata di variabili
- Una tupla (v_n,C,D) denota un BDD B su < v_1, v_2 , … v_n > t.c. :
  - la radice di B è etichettata con v_n
  - C è il BDD su < v_1, v_2 , … v_{n-1} > la cui radice è collegata alla radice di B con un F-arco
  - D è il BDD su < v_1, v_2 , … v_{n-1} > la cui radice è collegata alla radice di B con un T-arco

  Nota che C e D non sono necessariamente disgiunti (in un BDD minimale hanno sicuramente in comune almeno le foglie)
- dim(B)=n
- f_B denota una formula corrispondente a B

Definizione induttiva dei BDD

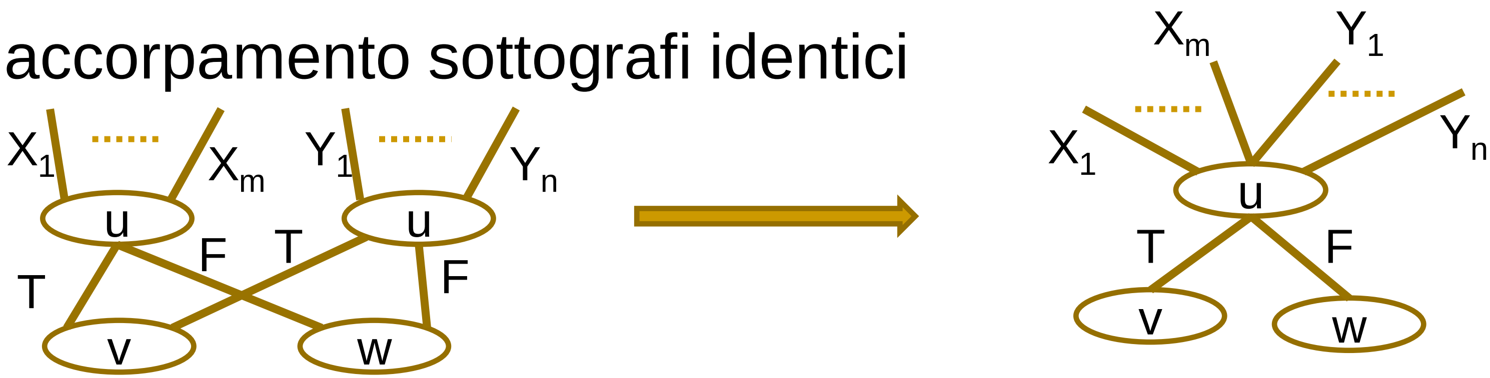
- Sia $V = < v_1, v_2 , \ldots v_n >$ una sequenza ordinata di variabili

- Un BDD è :
  - un nodo singolo F (rappresenta la formula false)
  - un nodo singolo T (rappresenta la formula true)
  - se B and C sono due BDD sulla sequenza $< v_1, v_2 , \ldots v_{i-1} >$ allora il DAG $D=(v_i, B, C)$ è un BDD su $< v_1, v_2 , \ldots v_i >$ e rappresenta la formula:

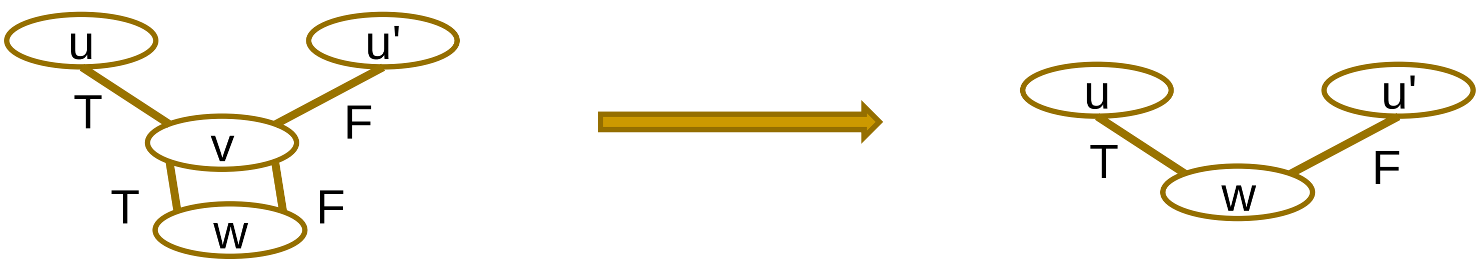
$$(\neg v_i \wedge f_B) \vee (v_i \wedge f_C)$$

BDD minimali: riduzione e canonicità

- Fissato l'ordine delle variabili, per ogni funzione booleana esiste un unico BDD corrispondente e si può ottenere applicando le seguenti regole:
  - rimpiazzare foglie con unico rappresentante per T e per F
  - iterativamente a partire dalle foglie (fino a saturazione):
    - accorpamento sottografi identici



    - eliminazione nodi interni superflui



AND di BDD

- Dati due BDD B and C, il BDD $D=B\otimes C$ per $f_B \wedge f_C$ si ottiene ricorsivamente:
  - se dim(B) = dim(C)=0, allora dim(D)=0 e D è il singolo nodo T se e solo se B e C sono entrambi T
  - se dim(B) = dim(C)>0, $B = (v_i, l_B, r_B)$ e $C = (v_i, l_C, r_C)$ allora $D=(v_i, l_B \otimes l_C, r_B \otimes r_C)$
  - se dim(B) > dim(C) e $B = (v_i, l_B, r_B)$ allora
    $D=(v_i, l_B \otimes C, r_B \otimes C)$

Nota che $B\otimes C$ è in genere non minimale anche se B e C sono minimali

OR di BDD

- Dati due BDD B and C, il BDD $D=B \oplus C$ per $f_B \vee f_C$ si ottiene ricorsivamente:
  - se dim(B) = dim(C)=0, allora dim(D)=0 e D è il singolo nodo F se e solo se B e C sono entrambi F
  - se dim(B) = dim(C)>0, $B = (v_i, l_B, r_B)$ e $C = (v_i, l_C, r_C)$ allora $D=(v_i, l_B \oplus l_C, r_B \oplus r_C)$
  - se dim(B) > dim(C) e $B = (v_i, l_B, r_B)$ allora

$$D=(v_i, l_B \oplus C, r_B \oplus C)$$

Nota che $B \oplus C$ è in genere non minimale anche se B e C sono minimali

NOT e Complessità AND e OR

- Per calcolare, il BDD per la negazione di una formula basta scambiare le etichette delle foglie (T diventa F e F diventa T)
  - richiede tempo costante
- Utilizzando programmazione dinamica, AND e OR di BDD possono essere fatti risolvendo O(|B|.|C|) sottoproblemi
  - per ogni nodo u in B e v in C, (u,v) è risolto una volta
  - si mantengono i risultati per ogni coppia (r,s)
- Quindi, l'algoritmo richiede tempo O(|B|.|C|) e il BDD ottenuto ha taglia O(|B|.|C|).

Restrizione di una variabile a un valore

Per una formula f con n variabili,

$f\downarrow_{(x=b)}$ è la formula con n-1 variabili ottenuta da f assegnando x con b

Dato un BDD per f, calcola il BDD per $f\downarrow_{(x=b)}$ come segue:

- visita BDD per f
- redireziona ogni arco che punta a un nodo v etichettato x al nodo u tale che (v,u) è un b-arco

Quantificazione

Si consideri una formula f.

- Quantificazione esistenziale:

  $$\exists\, v.f = f\downarrow_{(v=F)} \vee f\downarrow_{(v=T)}$$

  dato un BDD per f, possiamo calcolare un BDD for $\exists\, v.f$ in tempo O(n^2)

- Quantificazione universale (duale):

  $$\forall\, v.f = f\downarrow_{(v=F)} \wedge f\downarrow_{(v=T)}$$

  dato un BDD per f, possiamo calcolare un BDD for $\forall\, v.f$ in tempo O(n^2)

AndExists

- nell'algoritmo simbolico che risolve la reachability occorre calcolare

$$\exists Z. \, (R_i \, (Z) \wedge T(Z,X) \,)$$

- possiamo combinare gli algoritmo per il calcolo dell'AND e della quantificazione esistenziale così che i BDD da memorizzare hanno solo |X| variabili (invece di 2|X| variabili)
  - T è la relazione di transizione data, è costante
  - si devono calcolare BDD che rappresentano insiemi di stati raggiungibili

Model-checking con BDD

```
Reachability( X, Q_in(X), T(X,X'), F(X)){
   // X - vars; Q_in, T(X,X') e F sono BDD

   R:=0; R'= Q_in;
   while (R≠R'  and  R'∧F = ∅) {
         R = R';
         R' = R ∨  ∃ Z. ( R(Z) ∧ T(Z,X) ) ;
    }

   if (R'∧F = ∅)
            return "unreachable"
   else
            return "reachable";
}
```

Model-checking con BDD

```
Safety( X, Q_in(X),  T(X,X'),  F(X)){
   // X - vars; Q_in, T(X,X') e F sono BDD

   R:=0; R'= Q_in;
   while (R≠R'  and  R'∧F = ∅) {
          R = R';
          R' = R ∨  ∃ Z. ( R (Z) ∧ T(Z,X) ) ;
   }

  if (R'∧F = ∅)
       return "safe"
   else
       return "unsafe";
}
```

Modifichiamo reachability

```
ReachableSet( X, Q_in(X), T(X,X')){
   // X - vars; Q_in e T(X,X') sono BDD
  R:=0;

  R'= ∃ Z.(Q_in(Z) ∧ T(Z,X) ) ;
 // stati iniziali compaiono in R solo se possono essere
// raggiunti nuovamente

  while (R≠R') {
           R = R';
           R' = R ∨  ∃ Z. ( R(Z) ∧ T(Z,X) ) ;
   }

  return R';
}
```

Model-checking con BDD

```
Buchi( X, Gin(X),  T(X,X′),  F(X)){
  // X - vars; Gin , T(X,X′) e F sono BDD

  F' = F ∧ ReachableSet(X, Q_in(X), T(X,X′);

  do {
          F = F′;
          F′  = F ∧ ReachableSet(X,F(X),T(X,X′);
  } while (F≠F′);


  if (F = ∅)
      return "unsatisfied"
  else
      return "satisfied";
}
```

Implementazione di BDD

Alcuni BDD packages disponibili:

- CuDD --- Fabio Somenzi, Colarado Univ.
- VIS --- Colorado, Berkeley

Numerose euristiche implementate in pratica:

- Forward/Backward
- Ordinamento delle variabili
- Supporto diretto per domini finiti (MDD)
- Partizionamento delle transizioni/ della rete
- Scelta frontiere

Ordinamento delle variabili

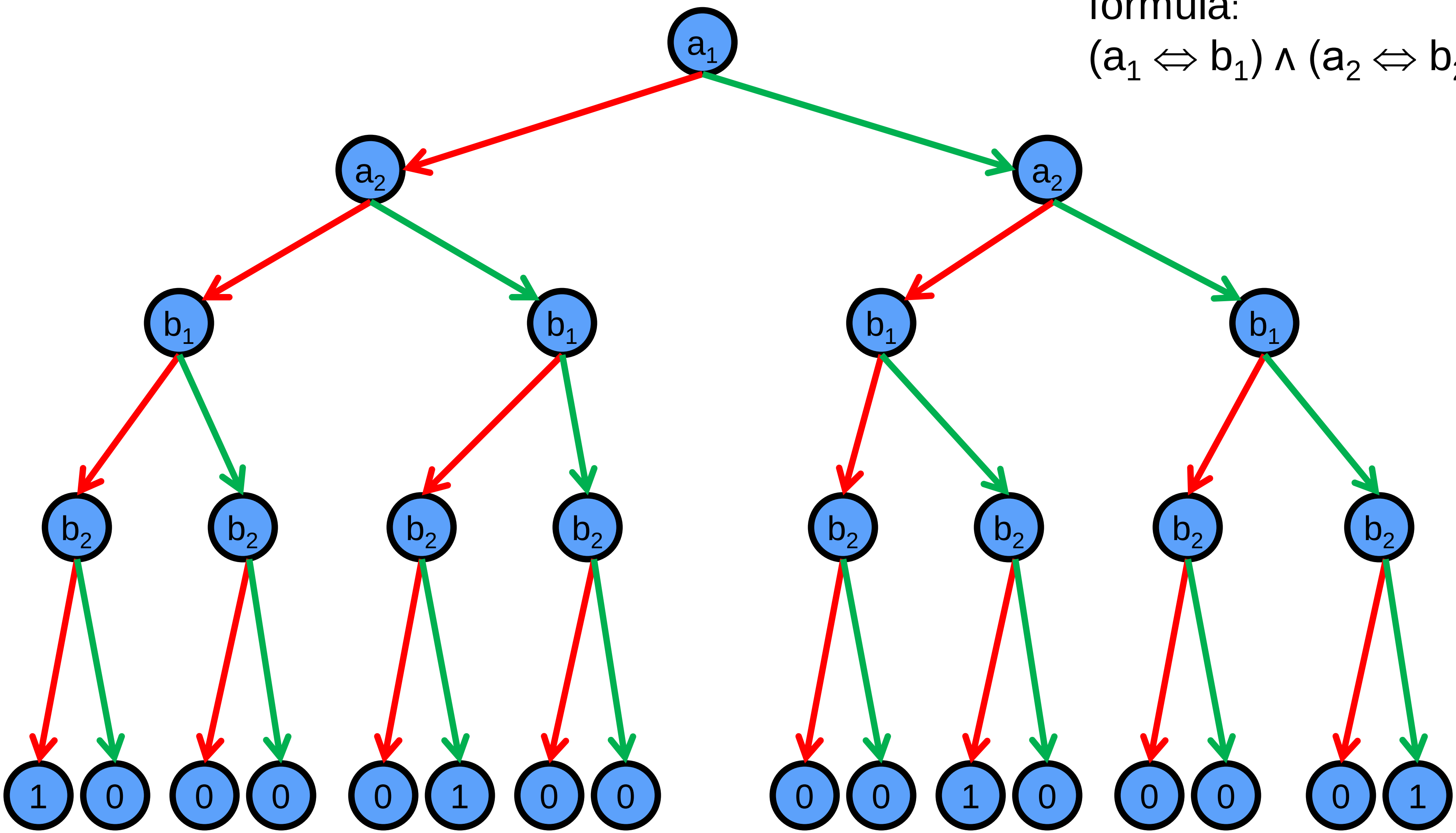
- aspetto cruciale per la prestazione di algoritmi che usano BDD
- influenza sensibilmente la taglia dei BDD
  - scegliendo il giusto ordinamento, taglia BDD può essere esponenzialmente più succinto
    - Es. $(x_1 \vee y_1) \wedge \ldots. \wedge (x_n \vee y_n)$

      BDD esponenziale in n se ordinamento $<x_{1,} \ldots., x_n, y_1, \ldots., y_n>$

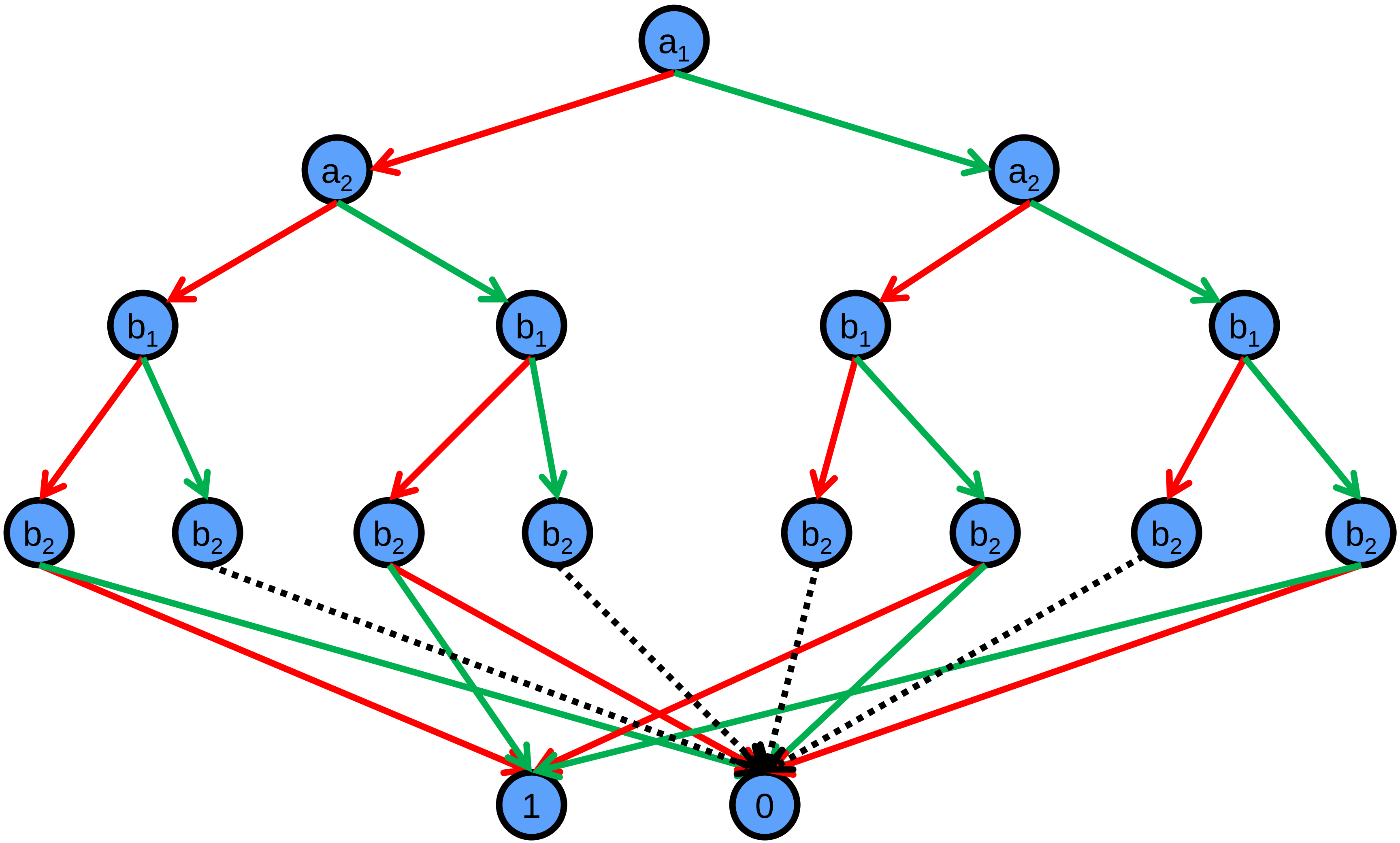
      lineare se ordinamento $<x_{1,}\ y_1, \ldots., x_n, y_n>$
  - non sempre è possibile avere BDD di taglia trattabile (esistono formule per le quali la taglia del BDD è esponenziale nel numero di variabili indipendentemente dall'ordinamento)

ROBDD and variable ordering

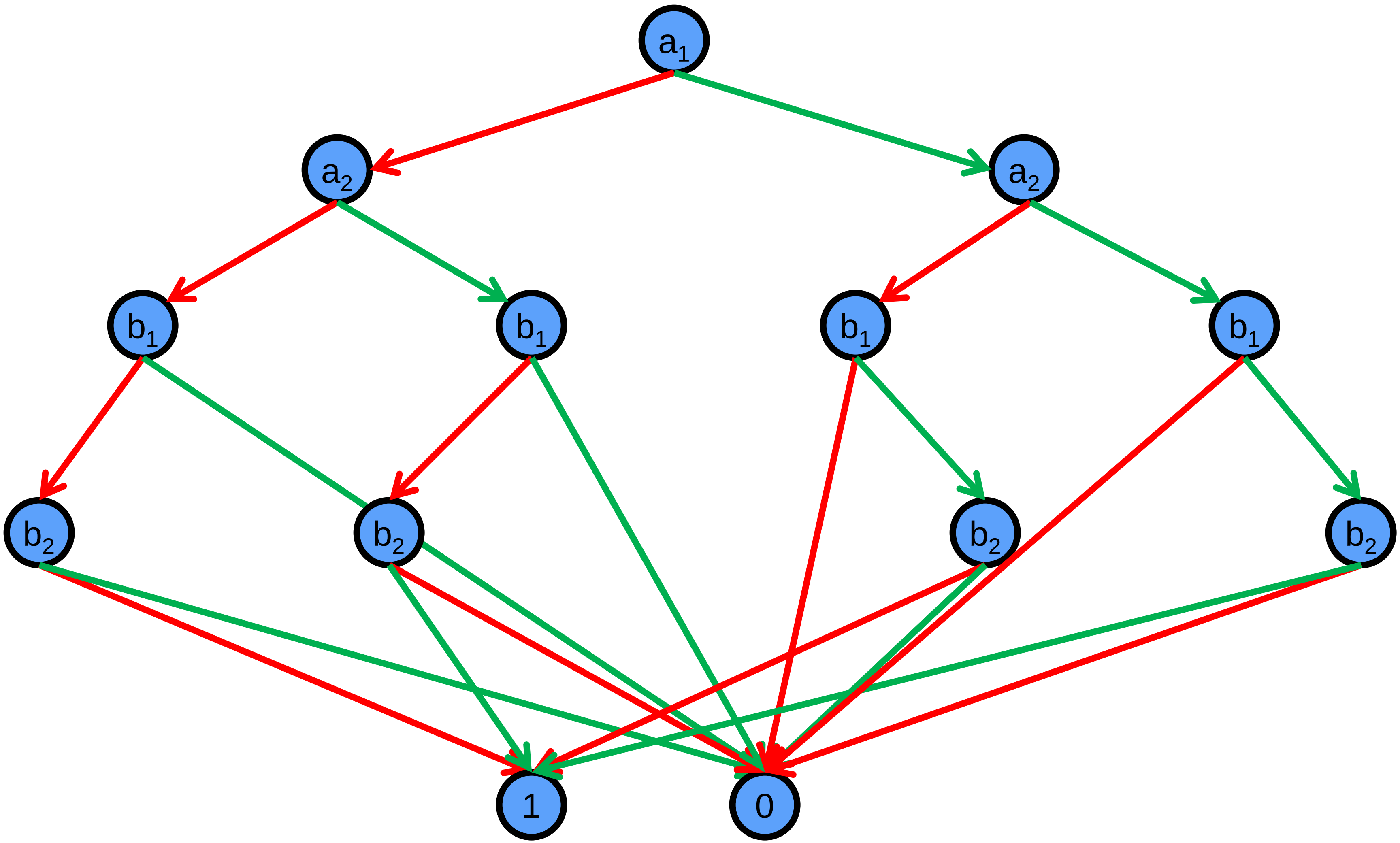
formula:
$(a_1 \Leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \Leftrightarrow b_2)$



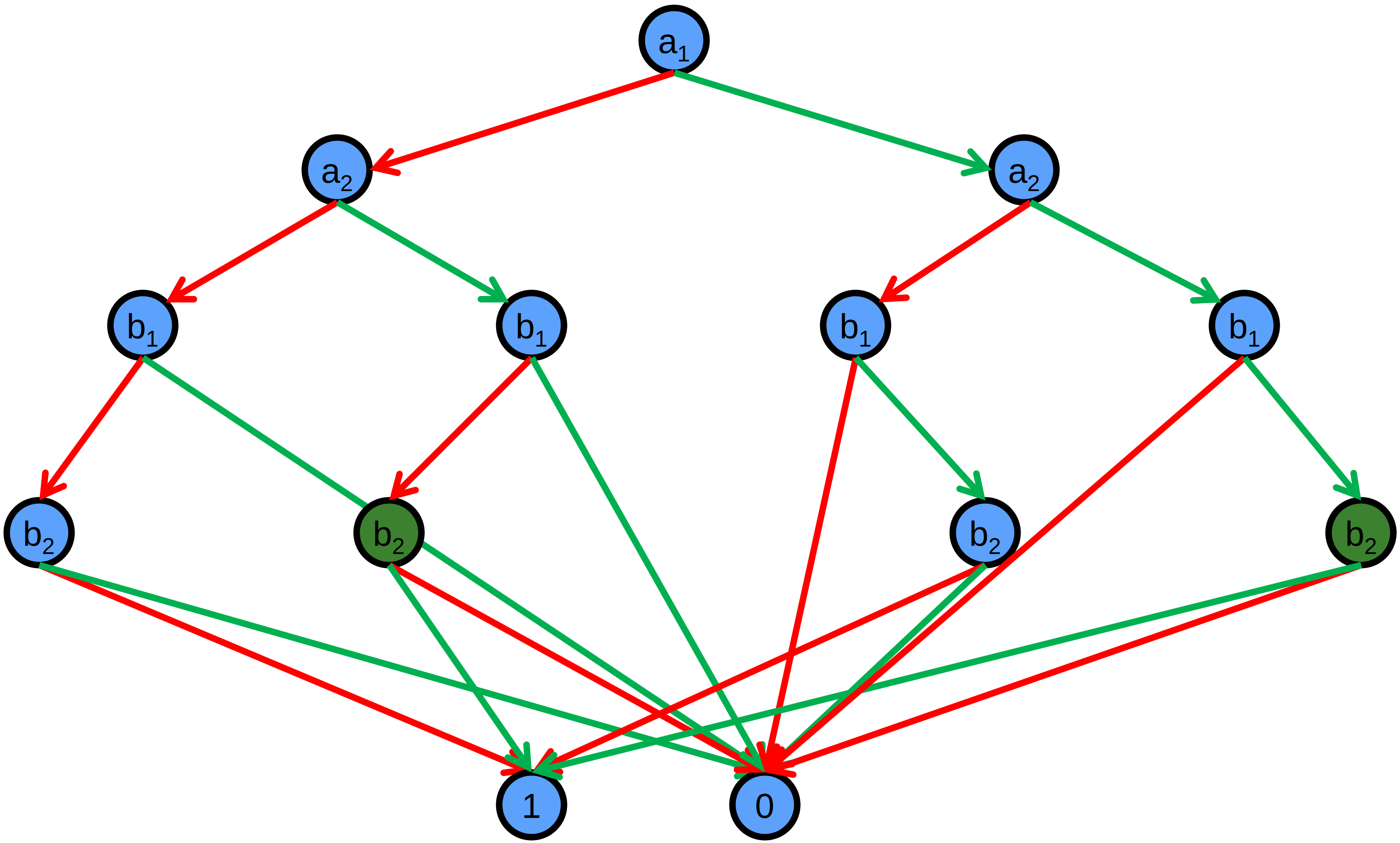
ROBDD and variable ordering



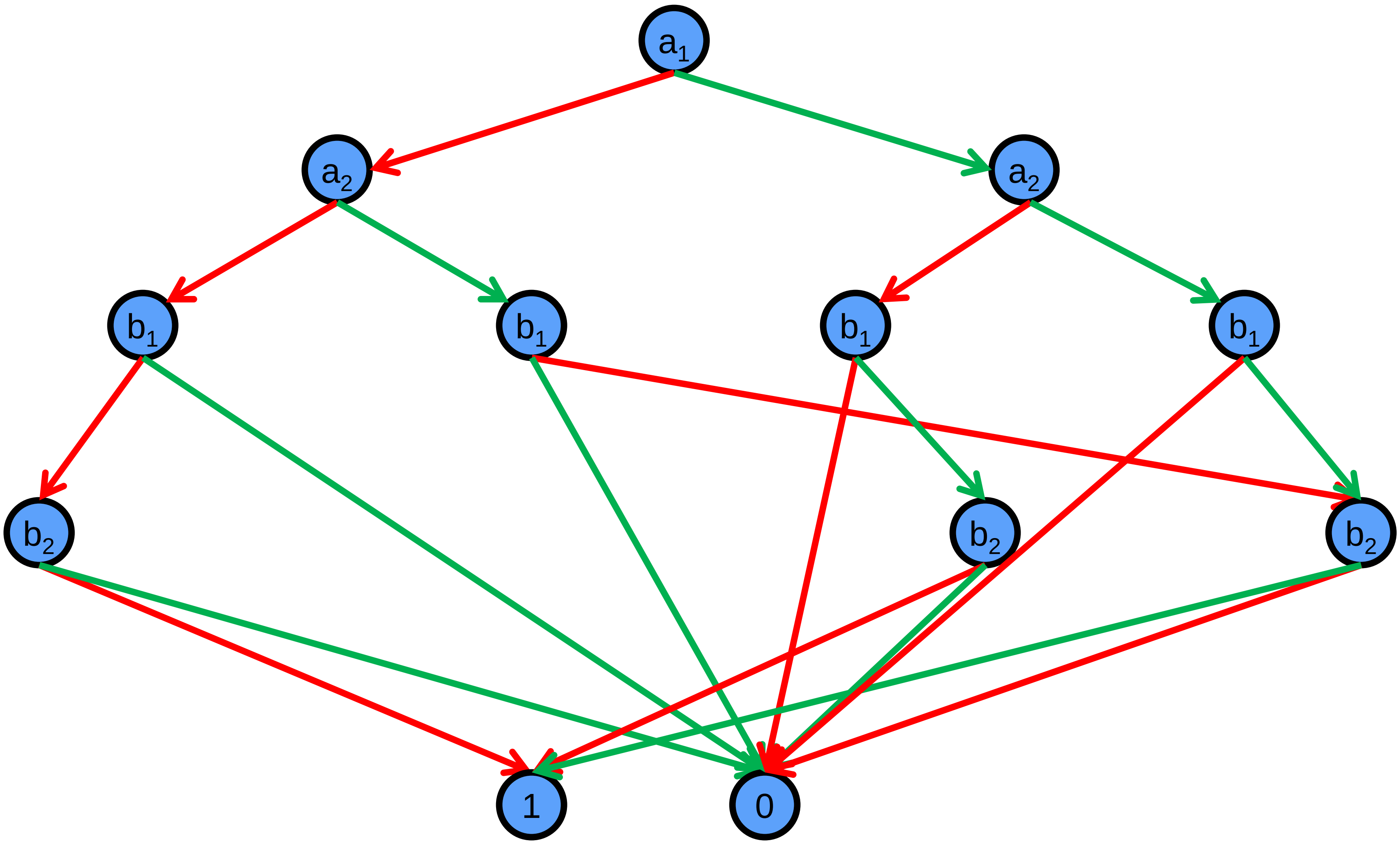
ROBDD and variable ordering



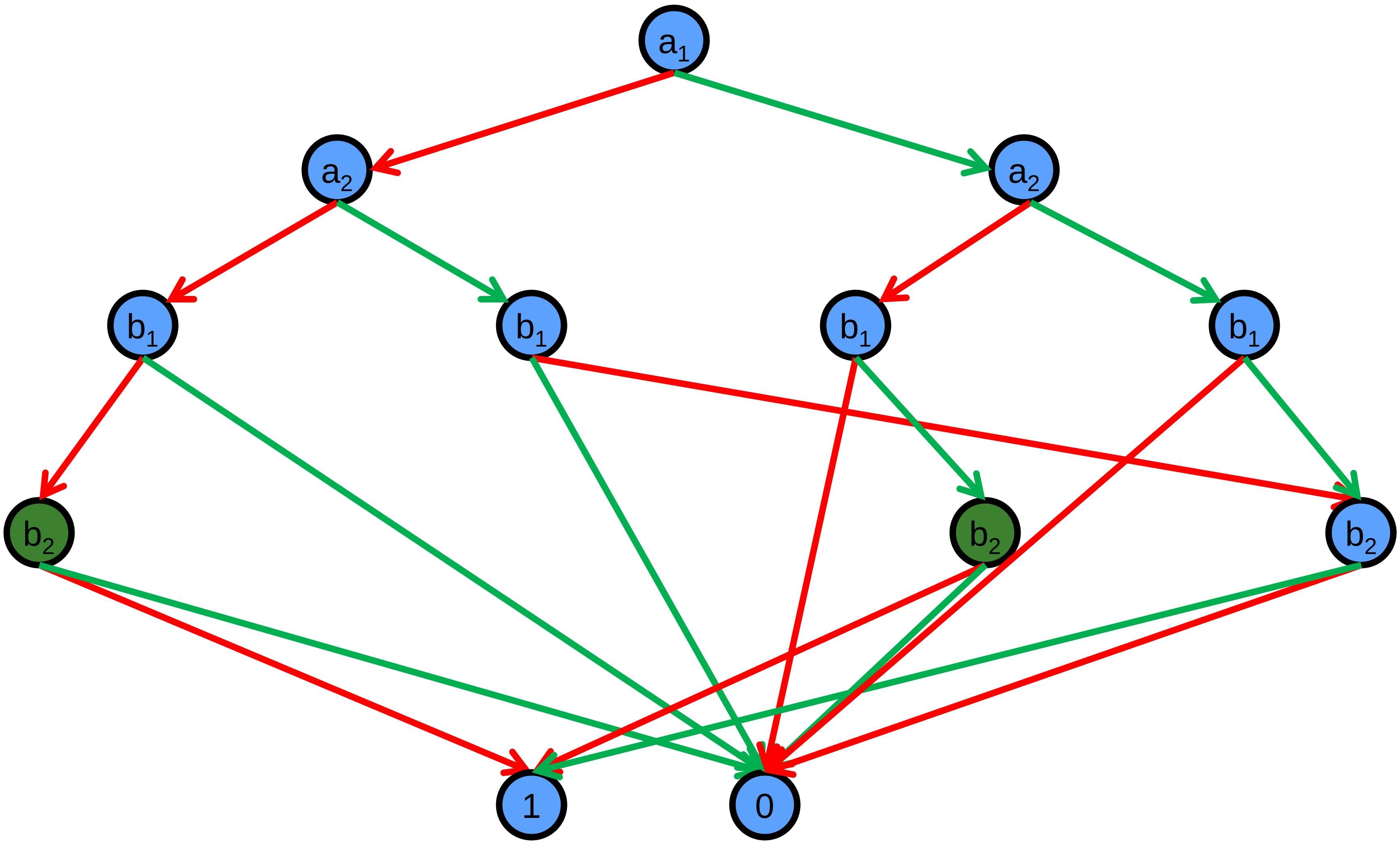
ROBDD and variable ordering



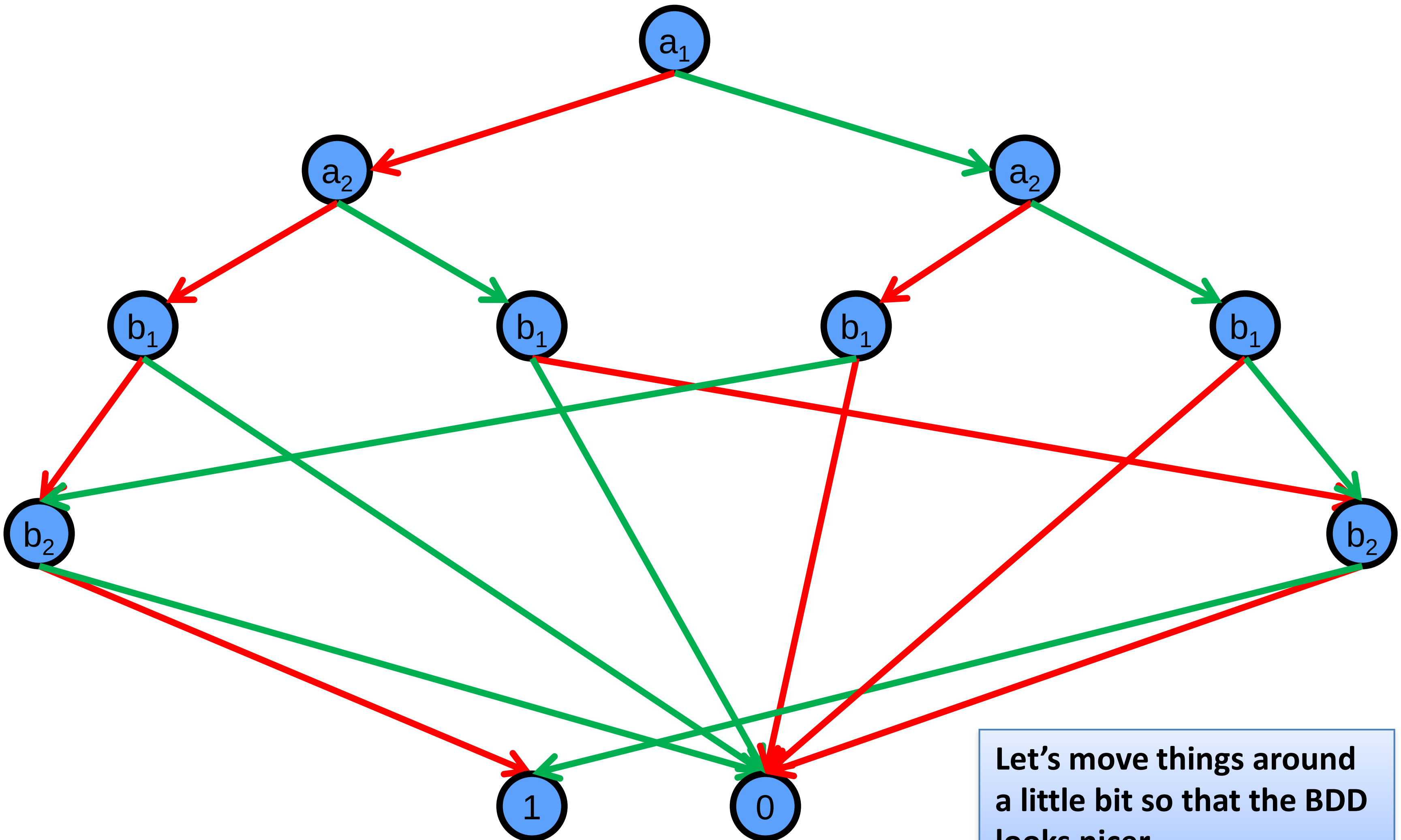
ROBDD and variable ordering



ROBDD and variable ordering

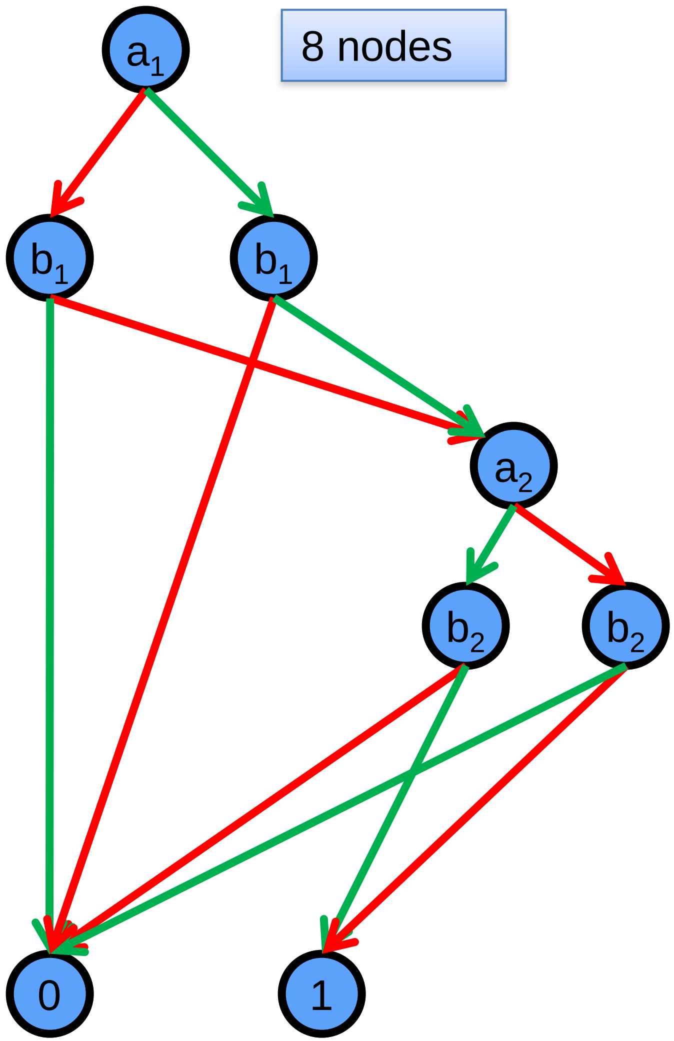


ROBDD and variable ordering

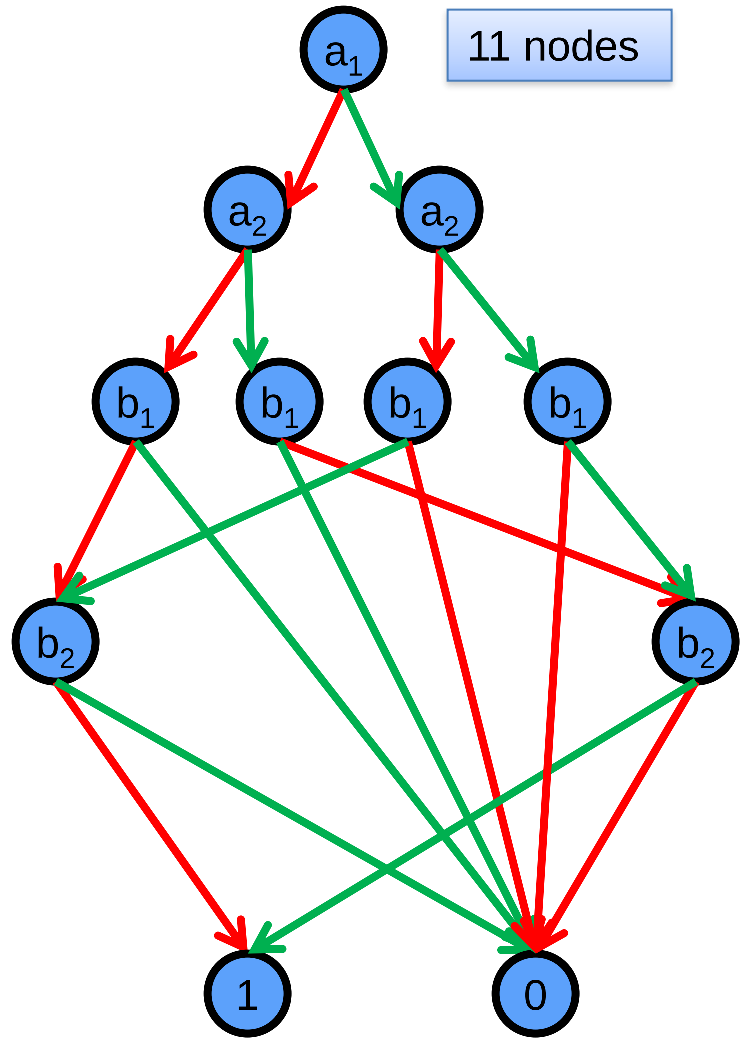


Let's move things around a little bit so that the BDD looks nicer.

ROBDD and variable ordering

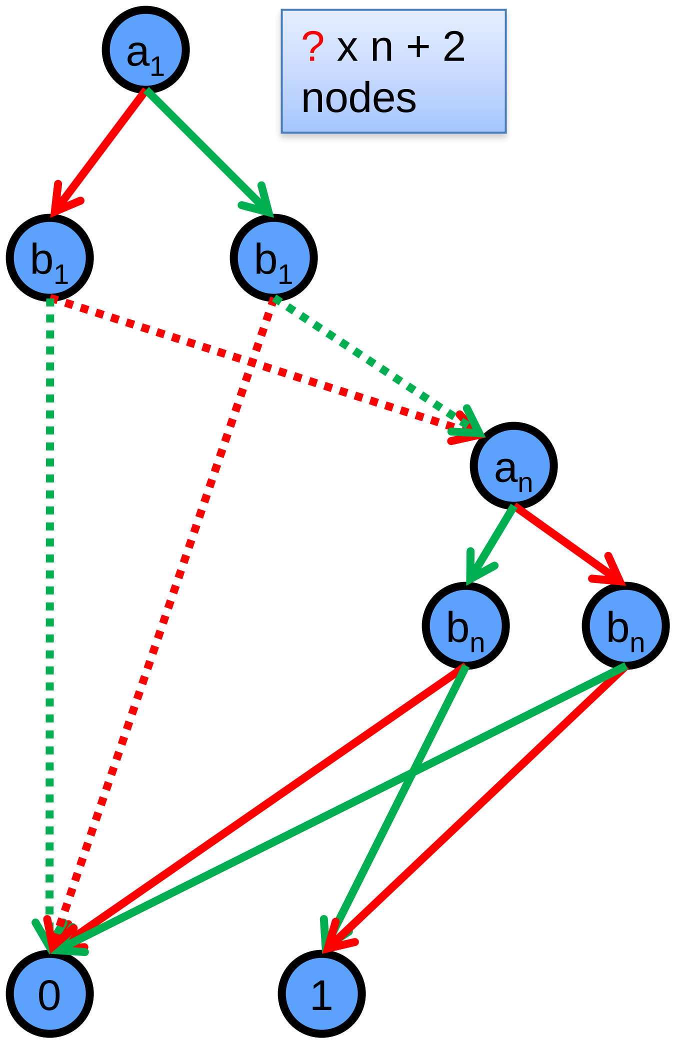


$a_1 < b_1 < a_2 < b_2$



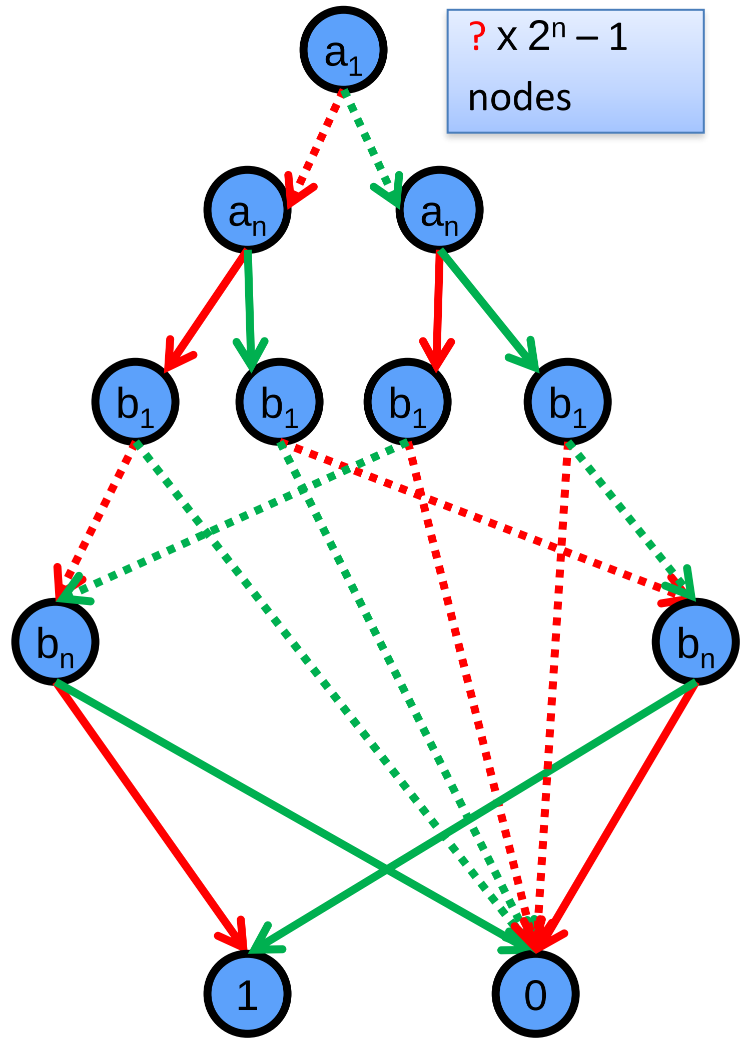
$a_1 < a_2 < b_1 < b_2$

ROBDD and variable ordering



? x n + 2 nodes

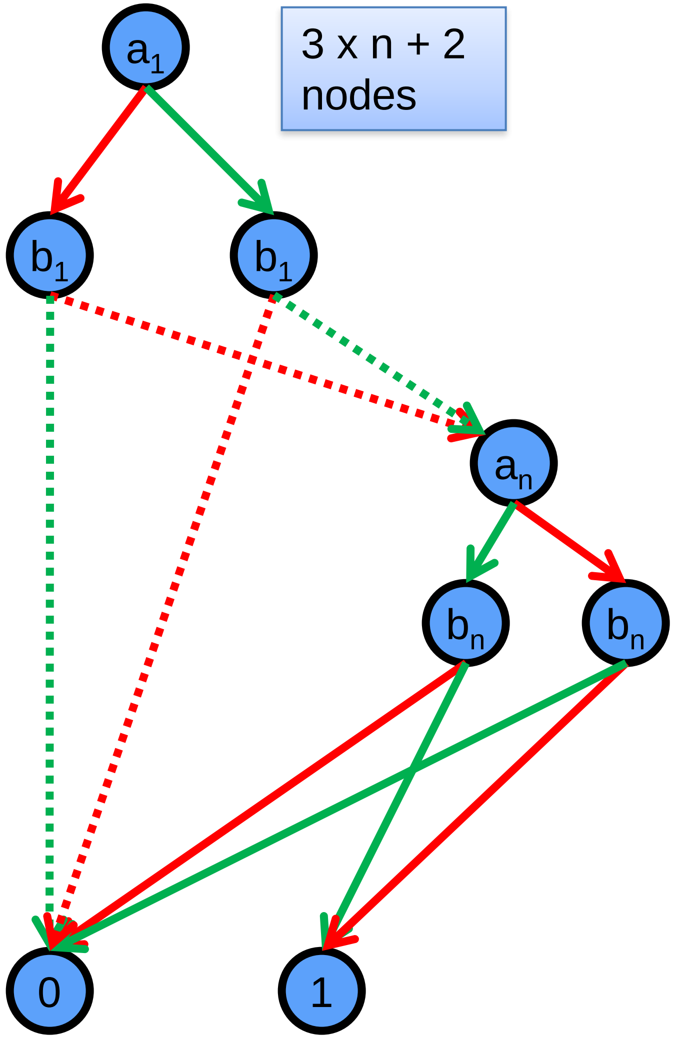
$a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n$



? x $2^n - 1$ nodes

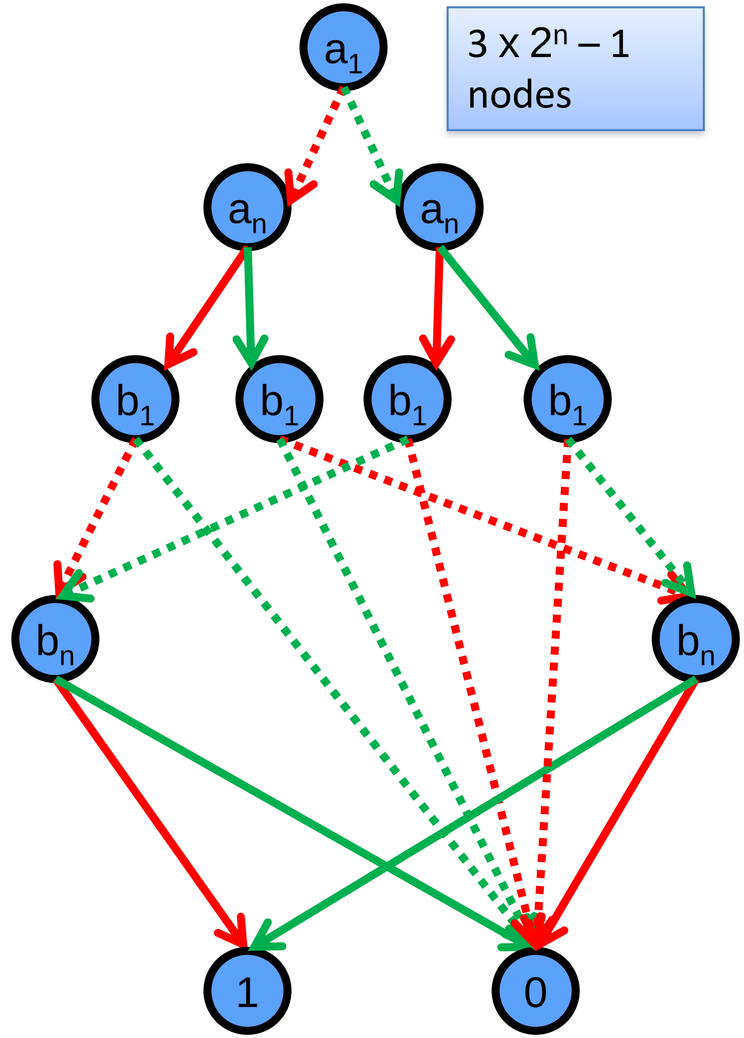
$a_1 < \ldots < a_n < b_1 < \ldots < b_n$

ROBDD and variable ordering



3 x n + 2 nodes

$a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n$



3 x 2^n – 1 nodes

$a_1 < \ldots < a_n < b_1 < \ldots < b_n$

Osservazioni

- Il model-checkig simbolico con BDD ha avuto molto successo nella verifica dell'hardware
- BDD non sono ampiamente usati nella verifica del software
  - difficili da combinare con partial-order reduction (insieme all'astrazione principale artefice dei successi in software verification)
  - difficile modellare l'allocazione dinamica della memoria
  - in software verification approccio simbolico fa uso di esecuzioni simboliche e vincoli (constraints)
- Model checker simbolico: nuSMV