UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Intelligenza Artificiale

Conoscenza Incerta e Ragionamento

a.a. 2022/2023

Outline

- Incertezza
- Probabilità
- Sintassi e Semantica
- Inferenza
- Indipendenza e regola di Bayes

Incertezza

Sia A_t = avviamoci all'aeroporto t minuti prima del volo

Mi permetterà A_t di giungere in tempo per il volo?

- Problemi:
  - osservabilità parziale (stato della strada, piani di altri autisti, etc.)
  - sensori rumorosi (sensori per il traffico)
  - incertezza nei risultati dell'azione (foratura gomma, etc.)
  - elevata complessità nella modellazione e nella predizione del traffico

Incertezza

- Pertanto, un approccio puramente logico
  - comporta rischio di falsità: "A_{25} mi porterà in tempo a destinazione", oppure
  - porta a conclusioni troppo deboli per il decision making:
    - "A_{25} mi porterà a destinazione in tempo a patto che non ci siano incidenti sul ponte, non piove, le mie gomme sono integre, etc etc."
    - (Ragionevolmente si può dire che A_{1440} mi porterebbe a destinazione in tempo, ma dovrei pernottare in aeroporto..)

Decisione razionale

- Un agente logico non è in grado di agire poiché non conosce con quali azioni raggiungere l'obiettivo
- L'informazione in possesso dell'agente non può garantire i possibili esiti di A_{90}, ma può fornire un grado di credenza sul loro raggiungimento
- La cosa giusta da fare dipende

1. Dall'importanza relativa dei vari obiettivi
2. Dalla probabilità e dalla misura del loro raggiungimento

Inadeguatezza dell'approccio logico

- Consideriamo un esempio di diagnosi medica

  $\forall$ p Sintomo(p,MalDiDenti) => Malattia(p, Carie)

- Sbagliato! Non tutti i pazienti che accusano mal di denti hanno carie

  $\forall$ p Sintomo(p,MalDiDenti) => Malattia(p, Carie) v Malattia(p, Gengivite) v Malattia(p, Ascesso)....

- Elenco lunghissimo di cause. Regola causale

  $\forall$ p Malattia(p, Carie) => Sintomo(p,MalDiDenti)

- Non tutte le carie causano dolore. Bisogna elencare tutte le cause del mal di denti sul lato sinistro

Probabilità

- Grado di credenza del modello di agente
- Date le evidenze disponibili:
  - A_{25} mi porterà in tempo a destinazione con probabilità 0.04
- Le asserzioni probabilistiche sintetizzano gli effetti di
  - pigrizia: mancata enumerazione di eccezioni, condizioni, etc., sia perché richiede troppo lavoro, sia perché le regole risulterebbero difficili da usare.
  - Ignoranza Teorica: assenza di fatti rilevanti. Es. la scienza medica non ha una teoria completa per il suo dominio.
  - Ignoranza Pratica: anche se conosciamo tutte le regole, potremmo essere incerti perché non sono state fatte tutte le misurazioni (es. accertamenti di un paziente).

Differenze con ontologie specifiche

- Probabilità soggettiva:
  - Le probabilità mettono in relazione proposizioni e stato della conoscenza dell'agente, cioè

    $P(A_{25} \mid \text{nessun incidente}) = 0.06$

- Queste non sono asserzioni sul mondo reale.
- Le probabilità di proposizioni cambiano con nuove evidenze, cioè:

    $P(A_{25} \mid \text{nessun incidente, alle 5 a.m.}) = 0.15$

- Il grado di credenza è diverso dal grado di verità. Le formule sono sempre *vere* o *false*. Un probabilità di 0.8 indica un grado di credenza nella verità dell'80% (abbastanza forte)

Prendere Decisioni in Incertezza

- Supponiamo che io abbia le seguenti convinzioni:
  - P(A_{25} mi porta in tempo a destinazione | …) = 0.04
  - P(A_{90} mi porta in tempo a destinazione | …) = 0.70
  - P(A_{120} mi porta in tempo a destinazione |…) = 0.95
  - P(A_{1440} mi porta in tempo a destinazione |…) = 0.9999
- Quale azione scegliere?
- Dipende dalle mie preferenze tra perdere il volo rispetto a passare del tempo ad attenderlo, etc.
  - La Teoria dell'Utilità viene usata per rappresentare ed inferire preferenze.
  - Teoria delle Decisioni = Teoria della Probabilità + Teoria dell'Utilità
  - ***Maximize expected utility*** : $a^* = argmax_a \sum_s P(s \mid a)\, U(s)$

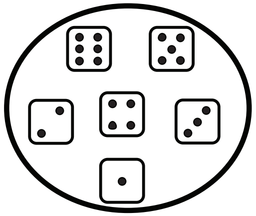
Decision-theoretic agent che seleziona azioni razionali

function DT-AGENT(*percept*) **returns** an *action*
  persistent: *belief_state*, probabilistic beliefs about the current state of the world
    action, the agent's action

  update *belief_state* based on *action* and *percept*
  calculate outcome probabilities for actions,
    given action descriptions and current *belief_state*
  select *action* with highest expected utility
    given probabilities of outcomes and utility information
  return *action*

Sintassi di Proposizioni

- Elemento di base: variabile casuale
- Simile alla logica proposizionale: possibili mondi definiti attraverso l'assegnamento di valori a variabili casuali. Il mondo dei Dadi



- Variabili casuali Booleane
  - es., *Carie*(Ho una carie?), con valore vero o falso
- Variabili casuali discrete
  - es., Il Tempo atmosferico è una variabile casuale che assume un valore tra <soleggiato, piovoso, nuvoloso, neve>
- Variabili casuali continue
  - es., Esprimono una distribuzione come una funzione parametrizzata di valori.
- Valori del dominio esaustivi e mutuamente esclusivi
- Proposizioni elementari costruite assegnando un valore ad una variabile casuale, es. *Tempo = soleggiato, Carie= Falso* ($\neg$carie)
- Proposizioni complesse formate da proposizioni elementari e connettivi logici standard es., *Tempo= soleggiato* $\vee$ *Carie = falso*

Sintassi di Proposizioni

- Evento atomico: Una specifica completa del mondo dell'agente che è incerto
  - Se il mondo consiste solo di 2 variabili Booleane *Carie* e *MalDiDenti*, allora ci sono 4 eventi atomici distinti:

$$Carie = falso \vee MalDiDenti = falso$$
$$Carie = falso \vee MalDiDenti = vero$$
$$Carie = vero \vee MalDiDenti = falso$$
$$Carie = vero \vee MalDiDenti = vero$$

- Gli eventi atomici sono mutuamente esclusivi (massimo 1 si verifica) ed esaustivi (almeno 1).

Probabilità a Priori

- Probabilità a Priori o Probabilità Incondizionate di proposizioni
  - es., *P(Carie = vero)* = 0.1 o P(*Tempo = soleggiato*) = *0.72* corrisponde alla confidenza prima dell'arrivo di qualunque (nuova) evidenza
- Ogni possibile mondo ω è associato con un valore di probabilità tale che:
  - $0 \leq P(\omega) \leq 1$
  - $\Sigma_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$
- Esempio: Se lanciamo due dadi (distinguibili) ci sono 36 possibili mondi da considerare: (1,1), (1,2),…, (6,6) $P(\omega) = 1/36$
- Una distribuzione di probabilità fornisce valori per tutti i possibili assegnamenti:
  - es. **P**(*Tempo*) = <*0.72,0.1,0.08,0.1*> (normalizzata, i.e., somma a 1)
  - **P**(Dadi) = <1/36,…,1/36>

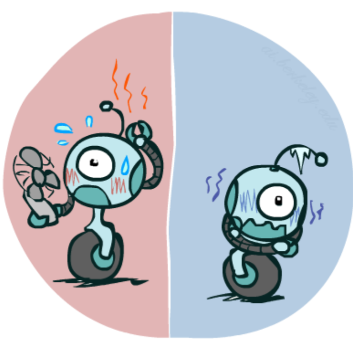
Distribuzioni di probabilità

- Associa una probabilità ad ogni valore; somma ad 1

  - Temperature:

$P(T)$

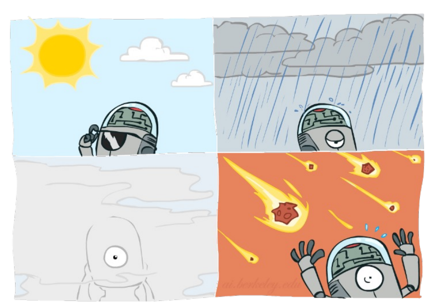
T	P
hot	0.5
cold	0.5



  - Weather:

$P(W)$

W	P
sun	0.6
rain	0.1
fog	0.3
meteor	0.0



  - ***Joint distribution***

$P(T,W)$

		Temperature	
		hot	cold
Weather	sun	0.45	0.15
	rain	0.02	0.08
	fog	0.03	0.27
	meteor	0.00	0.00

Probabilità a Priori

- Una distribuzione di probabilità congiunta per un insieme di variabili casuali fornisce la probabilità di ogni evento atomico di tali variabili
  - es. $\mathbf{P}(Tempo, Carie)$ = una matrice 4×2 con valori:

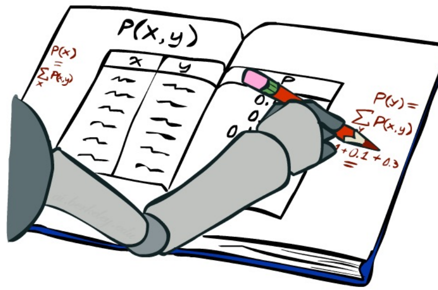
***Tempo* =**	**soleggiato**	**piovoso**	**nuvoloso**	**neve**
Carie = vero	0.144	0.02	0.016	0.02
Carie = falso	0.576	0.08	0.064	0.08

Ogni domanda su un dominio può essere risposta con una distribuzione congiunta

Distribuzioni Marginali

- Le distribuzioni marginali sono sottotabelle che eliminano variabili
- ***Marginalizzazione***: Collassare una dimensione aggiungendo

$$P(X{=}x) = \sum_y P(X{=}x, Y{=}y)$$

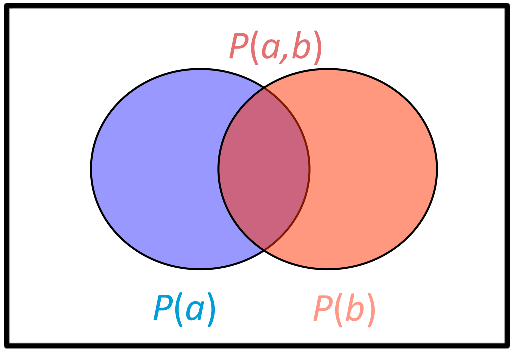


		Temperature		
		hot	cold	$P(W)$
Weather	sun	0.45	0.15	0.60
	rain	0.02	0.08	0.10
	fog	0.03	0.27	0.30
	meteor	0.00	0.00	0.00
	$P(T)$	0.50	0.50	

Probabilità Condizionate

- Una semplice relazione tra probabilità congiunte e condizionate
- Infatti, questa è considerata la definizione di una probabilità condizionata

$$P(a \mid b) = \frac{P(a, b)}{P(b)}$$



$P(T,W)$

		Temperature	
		hot	cold
Weather	sun	0.45	0.15
	rain	0.02	0.08
	fog	0.03	0.27
	meteor	0.00	0.00

$$P(W{=}s \mid T{=}c) = \frac{P(W{=}s, T{=}c)}{P(T{=}c)} = 0.15/0.50 = 0.3$$

$= P(W{=}s,T{=}c) + P(W{=}r,T{=}c) + P(W{=}f,T{=}c) + P(W{=}m,T{=}c)$

$= 0.15 + 0.08 + 0.27 + 0.00 = 0.50$

Normalizzare una distribuzione

- (Dizionario) Per riportare o ripristinare una condizione normale

Tutte le entries si sommano a UNO

- Procedura:
  - Moltiplicare ogni entry per α = 1/(sum over all entries)

$P(W,T)$

		Temperature	
		hot	cold
Weather	sun	0.45	0.15
	rain	0.02	0.08
	fog	0.03	0.27
	meteor	0.00	0.00

$P(W,T=c)$

0.15
0.08
0.27
0.00

Normalize

α = 1/0.50 = 2

$P(W \mid T=c) = P(W,T=c)/P(T=c)$
$= \alpha\, P(W,T=c)$

0.30
0.16
0.54
0.00

Probabilità Condizionata

- Definizione di Probabilità Condizionata:
  - $P(a \mid b) = P(a \wedge b) / P(b)$ if $P(b) > 0$

$$P(doubles \mid Die_1 = 5) = \frac{P(doubles \wedge Die_1 = 5)}{P(Die_1 = 5)}$$

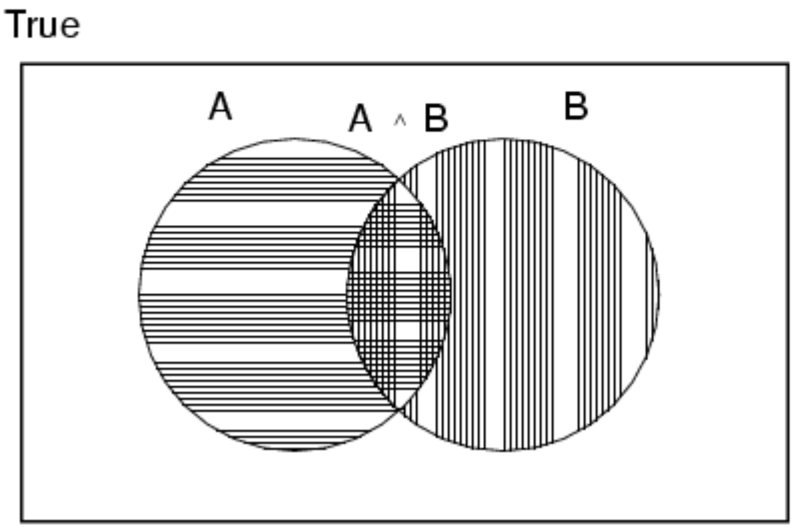
- La Regola del Prodotto offre una formulazione alternativa:
  - $P(a \wedge b) = P(a \mid b)\, P(b) = P(b \mid a)\, P(a)$
- Una versione generale vale per l'intera distribuzione, cioè
  - P(*Tempo, Carie*) = P(*Tempo* | *Carie*) P(*Carie*)

  (Vista come un insieme di 4 × 2 equazioni, non una matrice multipla)
- La Chain rule è derivata attraverso successive applicazioni della regola del prodotto

$$
\begin{aligned}
P(X1, \ldots, Xn) &= P(X1,\ldots,Xn-1)\, P(Xn \mid X1,\ldots,Xn-1) \\
&= P(X1,\ldots,Xn-2)\, P(Xn-1 \mid X1,\ldots,Xn-2)\, P(Xn \mid X1,\ldots,Xn-1) \\
&= \ldots \\
&= \pi_{i=1}\text{^}n\, P(Xi \mid X1, \ldots, Xi-1)
\end{aligned}
$$

Assiomi di Probabilità

- Per ogni coppia di proposizioni *A, B*
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(true) = 1$ and $P(false) = 0$
  - $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$



Inferenza Probabilistica

- Inferenza probabilistica: calcola una probabilità desiderata da un modello di probabilità
- Tipicamente per una variabile ***query*** date le ***evidenze***
  - Es., P(airport on time | no accidents) = 0.90
  - Questi rappresentano le convinzioni dell'agente date le prove

- Le probabilità cambiano con nuove prove:
  - P(airport on time | no accidents, 5 a.m.) = 0.95
  - P(airport on time | no accidents, 5 a.m., raining) = 0.80
  - L'osservazione di nuove prove fa sì che le convinzioni vengano **aggiornate**

Inferenza tramite Enumerazione

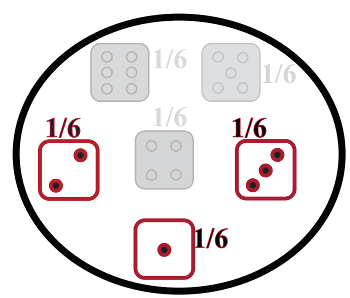
- Inizia con la distribuzione congiunta di probabilità :

	maldidenti		¬ *maldidenti*	
	prende	¬ *prende*	*prende*	¬ *prende*
carie	**.108**	**.012**	**.072**	**.008**
¬ *carie*	**.016**	**.064**	**.144**	**.576**

- La probabilità di una proposizione ϕ è data dalla somma degli eventi atomici ω su cui ϕ diventa vera:

$$P(\phi) = \Sigma_{\omega:\omega \models \phi} P(\omega)$$

- *P*(*dado* < *4*) = *P*(1) + *P*(2) + *P*(3) = 1/2



Inferenza tramite Enumerazione

- Inizia con la distribuzione congiunta di probabilità:

	maldidenti		¬ maldidenti	
	prende	¬ prende	prende	¬ prende
carie	.108	.012	.072	.008
¬ carie	.016	.064	.144	.576

- Per ogni proposizione ϕ, somma gli eventi atomici laddove diventa vera: $P(\phi) = \Sigma_{\omega:\omega \models \phi} P(\omega)$

P(*maldidenti*) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2

Probabilità marginale

Inferenza tramite Enumerazione

- Inizia con la distribuzione congiunta di probabilità:

	maldidenti		$\neg$ *maldidenti*	
	prende	$\neg$ *prende*	*prende*	$\neg$ *prende*
carie	.108	.012	.072	.008
$\neg$ ***carie***	.016	.064	.144	.576

- Spesso siamo interessati a calcolare le probabilità condizionali di alcune variabili, date le evidenze su altre.
- $P(carie \mid maldidenti) = P(carie \land maldidenti) / P(maldidenti)$
  $= (0.108 + 0.012) / (0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064) = 0.6$
- $P(\neg carie \mid maldidenti) = P(\neg carie \land maldidenti) / P(maldidenti) = 0.4$

Normalizzazione

- Inizia con la distribuzione congiunta di probabilità:

	maldidenti		¬ *maldidenti*	
	prende	¬ *prende*	*prende*	¬ *prende*
carie	**.108**	**.012**	**.072**	**.008**
¬ *carie*	**.016**	**.064**	**.144**	**.576**

- Il Denominatore può essere visto coma una costante di normalizzazione α

P(*Carie* | *maldidenti*) = α **P**(*Carie,maldidenti*)

= α [**P**(*Carie,maldidenti,prende*) + **P**(*Carie,maldidenti,*¬ *prende*)]

= α [<0.108,0.016> + <0.012,0.064>]

= α <0.12,0.08> = <0.6,0.4> **Non ci serve conoscere P(maldidenti)!**

- Idea generale: calcolare la distribuzione sulla variabile di query fissando variabili di evidenze (maldidenti) e sommando variabili nascoste (prende)

Inferenza per enumerazione, contd.

- In genere, siamo interessati a
  - la distribuzione congiunta a posteriori delle variabili di query **X** (*Carie* nell'esempio)
  - dati valori specifici **e** per le variabili di evidenza **E** (*MalDiDenti* nell'esempio)

- Siano le variabili nascoste **H** = **Y** - **X** - **E**

- Il risultato richiesto è ottenuto sommando le variabili nascoste:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \mid \mathbf{E} = \mathbf{e}) = \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{E} = \mathbf{e}) = \alpha \sum_{h} \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{E} = \mathbf{e}, \mathbf{H} = \mathbf{h})$$

- I termini nella sommatoria rappresentano entry congiunte, perché **X**, **E** e **H** insieme esauriscono l'insieme di variabili casuali

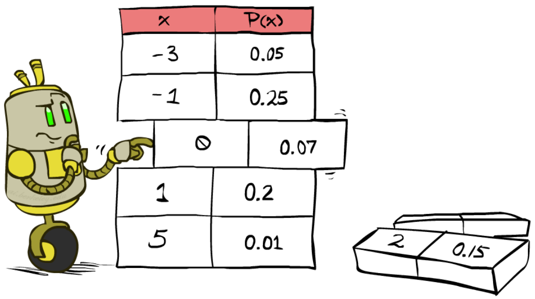
Inferenza per enumerazione, contd.

- Dato il modello probabilistico $P(X_1, \dots, X_n)$
- Partiziona le variabili $X_1, \dots, X_n$ come segue:
  - Evidence variables: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}$
  - Query variables: $\boldsymbol{X}$
  - Hidden variables: $\boldsymbol{H}$

- Vogliamo:

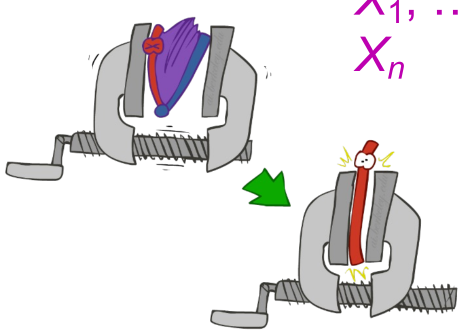
$$P(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{e})$$

- Step 1: Seleziona le entry coerenti con le evidenze



- Step 2: Somma **H** dal modello per ottenere l'unione di query e evidenze

$$P(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{e}) = \sum_h \underbrace{P(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{e})}_{X_1, \dots, X_n}$$



- Step 3: Normalizza

$$P(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{e}) = \alpha\, P(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{e})$$

Inferenza per enumerazione, contd.

- P(W)?

- P(W | winter)?

Season	Temp	Weather	P
summer	hot	sun	0.35
summer	hot	rain	0.01
summer	hot	fog	0.01
summer	hot	meteor	0.00
summer	cold	sun	0.10
summer	cold	rain	0.05
summer	cold	fog	0.09
summer	cold	meteor	0.00
winter	hot	sun	0.10
winter	hot	rain	0.01
winter	hot	fog	0.02
winter	hot	meteor	0.00
winter	cold	sun	0.15
winter	cold	rain	0.20
winter	cold	fog	0.18
winter	cold	meteor	0.00

Inferenza Probabilistica

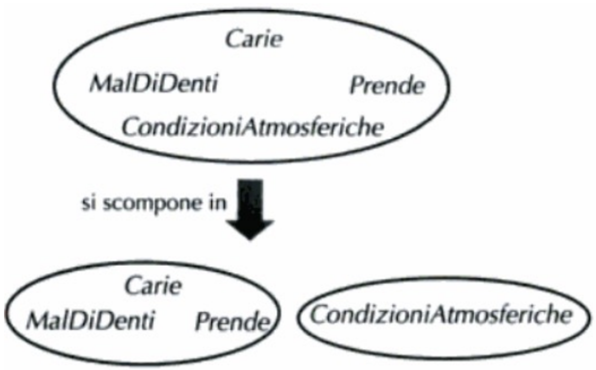
```
function ENUMERA-CONGIUNTA-ASK(X, e, P) returns una distribuzione su X
    inputs: X, la variabile della query
            e, i valori osservati per le variabili E
            P, una distribuzione congiunta sulle variabili {X} ∪ E ∪ Y
                                                   /* Y = variabili nascoste */
    Q(X) ← una distribuzione su X, inizialmente vuota
    for each valore x_i di X do
        Q(x_i) ← ENUMERA-CONGIUNTA(x_i, e, Y, [ ], P)
    return NORMALIZZA(Q(X))

function ENUMERA-CONGIUNTA(x, e, variabili, valori, P) returns un numero reale
    if VUOTA?(variabili) then return P(x, e, valori)
    Y ← PRIMO(variabili)
    return Σ_y ENUMERA-CONGIUNTA(x, e, RESTO(variabili), [y|valori], P)
```

Inferenza per enumerazione, contd.

- Problemi ovvi:
  1. Complessità di tempo nel caso peggiore $O(d^n)$, dove d è la più grande arità
  2. Complessità di spazio $O(d^n)$ per memorizzare la distribuzione congiunta
  3. Come trovare i numeri per $O(d^n)$ entry?

Indipendenza

- *A* e *B* sono indipendenti se e solo se
  P($A|B$) = **P**(A) or **P**($B|A$) = **P**(B) or **P**(A, B) = **P**(A) **P**(B)



P(*MalDiDenti, Prende, Carie, CondizioniAtmosferiche*)
= **P**(*MalDiDenti, Prende, Carie*) **P**(*CondizioniAtmosferiche*)

- 32 entry si riducono a 12; per *n* lanci di moneta indipendenti, $O(2^n) \rightarrow O(n)$

- L'indipendenza assoluta è molto potente ma rara nella realtà
- L'odontoiatria è una disciplina ampia con centinaia di variabili, nessuna delle quali indipendente. Cosa fare?

Indipendenza Condizionale

- $\mathbf{P}(MalDiDenti, Prende, Carie)$ ha $2^3 - 1 = 7$ entry indipendenti

- Se ho una carie, la probabilità che lo strumento appuntito si blocca non dipende dal fatto che io abbia mal di denti:
  (1) $\mathbf{P}(prende \mid maldidenti, carie) = \mathbf{P}(prende \mid carie)$

- La stessa indipendenza vale se io non ho una carie:
  (2) $\mathbf{P}(prende \mid maldidenti, \neg carie) = \mathbf{P}(prende \mid \neg carie)$

- *Prende* *è* *condizionalmente indipendente* *da* *MalDiDenti* *data* *Carie*:
  $\mathbf{P}(Prende \mid MalDiDenti, Carie) = \mathbf{P}(Prende \mid Carie)$

- Affermazioni equivalenti:
  $\mathbf{P}(MalDiDenti \mid Prende, Carie) = \mathbf{P}(MalDiDenti \mid Carie)$
  $\mathbf{P}(MalDiDenti, Prende \mid Carie) = \mathbf{P}(MalDiDenti \mid Carie)\, \mathbf{P}(Prende \mid Carie)$

Indipendenza Condizionale

- Decomposizione della distribuzione congiunta completa tramite chain rule:

  P(*MalDiDenti, Prende, Carie*)

  = **P**(*MalDiDenti* | *Prende, Carie*) **P**(*Prende, Carie*)

  = **P**(*MalDiDenti* | *Prende, Carie*) **P**(*Prende* | *Carie*) **P**(*Carie*)

  = **P**(*MalDiDenti* | *Carie*) **P**(*Prende* | *Carie*) **P**(*Carie*)

  cioè 2 + 2 + 1 = 5 entry indipendenti
- Nella maggior parte dei casi, l'uso dell'indipendenza condizionale riduce la dimensione della rappresentazione della distribuzione congiunta da *esponenziale in n* a *lineare in n*.
- L'indipendenza condizionale è la nostra forma più semplice e solida di conoscenza di ambienti incerti.

Regola di Bayes

- Regola del prodotto $P(a \wedge b) = P(a \mid b)\, P(b) = \mathbf{P(b \mid a)\, P(a)}$
  $\Rightarrow$ Bayes' rule: $P(a \mid b) = P(b \mid a)\, P(a) / P(b)$
- o in forma distribuita

$$\mathbf{P}(Y|X) = \mathbf{P}(X|Y)\, \mathbf{P}(Y) / \mathbf{P}(X) = \alpha\, \mathbf{P}(X|Y)\, \mathbf{P}(Y)$$

- Perché è utile:
  - Costruiamo un condizionale dal suo inverso
  - Spesso un condizionale è complicato ma l'altro è semplice
  - Descrive un passaggio di "aggiornamento" dal precedente $P(a)$ al successivo $P(a \mid b)$
- Utile per valutare la probabilità diagnostica dalla probabilità causale:
  - $P(Cause|Effect) = P(Effect|Cause)\, P(Cause) / P(Effect)$
  - $P(Effect|Cause)$ descrive la direzione causale
  - $P(Cause|Effect)$ descrive la relazione diagnostica

Regola di Bayes: Diagnosi medica

- Dai casi passati sappiamo che

  P(symptoms|disease), P(disease), P(symptoms)

- Per un nuovo paziente conosciamo i sintomi e cerchiamo diagnosi

  P(disease|symptoms)

- Esempi:
  - la meningite provoca un torcicollo il 70% delle volte
  - la probabilità a priori di meningite è 1/50 000
  - la probabilità a priori di torcicollo è 1%
- **Qual è la probabilità che un paziente con un torcicollo abbia la meningite?**

$$P(m|s) = P(s|m) * P(m) / P(s) = 0.7 * 1/50000 / 0.01 = 0.0014$$

- **Perché la probabilità condizionale per la direzione diagnostica non viene memorizzata direttamente?**
  - la conoscenza diagnostica è spesso più fragile della conoscenza causale
  - per esempio, se c'è un'improvvisa epidemia di meningite, la probabilità incondizionata di meningite P (m) salirà, quindi anche P (m | s) dovrebbe salire mentre la relazione causale P (s | m) non è influenzata dall'epidemia, poiché riflette come funziona la meningite

Regola di Bayes e indipendenza condizionale

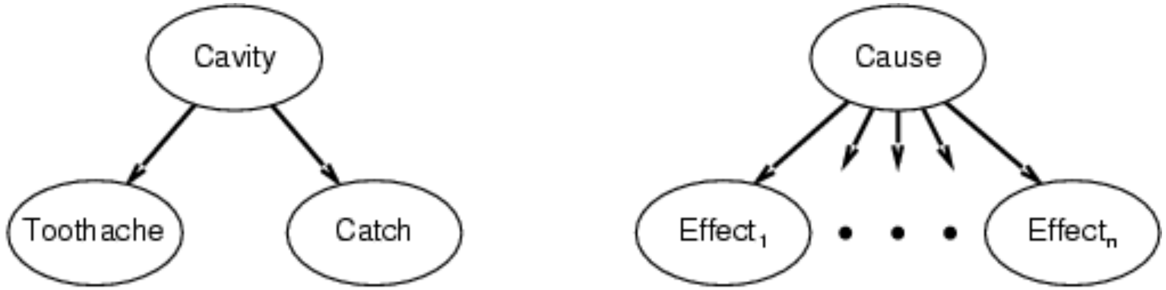
$\mathbf{P}(Carie \mid maldidenti \wedge prende)$

$= \alpha\mathbf{P}(maldidenti \wedge prende \mid Carie)\, \mathbf{P}(Carie)$

$= \alpha\mathbf{P}(maldidenti \mid Carie)\, \mathbf{P}(prende \mid Carie)\, \mathbf{P}(Carie)$

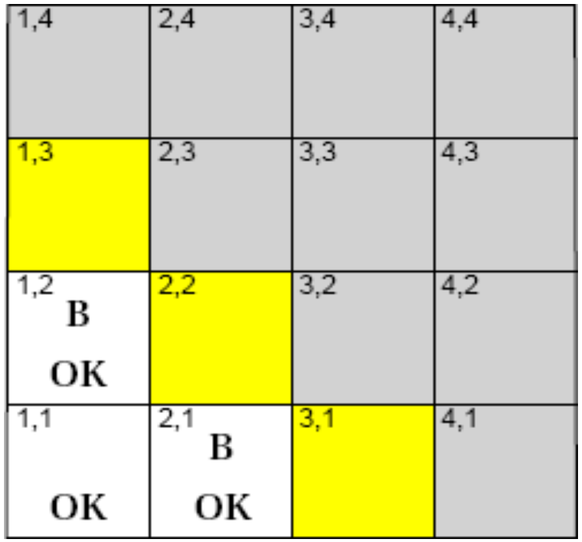
- Questo è un esempio di modello naïve Bayes :

$$\mathbf{P}(Cause, Effect_1, \ldots, Effect_n) = \mathbf{P}(Cause) \prod \mathbf{P}(Effect_i \mid Cause)$$



- Il numero totale di parametri è lineare in n

Il Mondo del Wumpus



Abbiamo un labirinto con pozzi che vengono rilevati nei quadrati vicini attraverso il segnale brezza (il Wumpus e l'oro non saranno considerati ora).

Ogni cella contiene un pozzo con probabilità 0.2 (eccetto (1,1)).

Dove dovrebbe andare l'agente, se c'è brezza a (1,2) e (2,1)?

La pura inferenza logica non può concludere nulla su quale quadrato sia più probabile che sia sicuro!

In quale casella dovrebbe andare l'agente?

Modello Probabilistico

Variabili casuali booleane:

$P_{i,j}$ – pozzo nella casella (i,j)

$B_{i,j}$ – brezza nella casella (i,j)
(solo per le caselle osservate $B_{1,1}$, $B_{1,2}$ e $B_{2,1}$)

1,4	2,4	3,4	4,4
1,3	2,3	3,3	4,3
1,2 B OK	2,2	3,2	4,2
1,1 OK	2,1 B OK	3,1	4,1

Distribuzione completa delle probabilità congiunte

$$\mathbf{P}(P_{1,2},\ldots,P_{4,4},B_{1,1},B_{1,2},B_{2,1})$$
$$= \mathbf{P}(B_{1,1},B_{1,2},B_{2,1} \mid P_{1,2},\ldots,P_{4,4},) * \mathbf{P}(P_{1,2},\ldots,P_{4,4})$$

Regola del prodotto

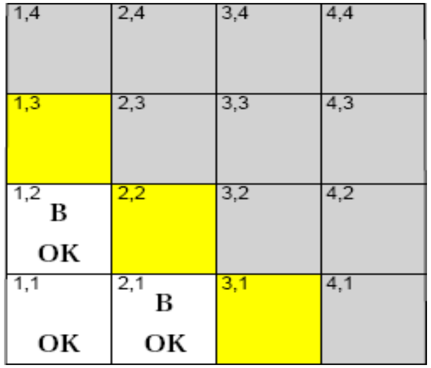
$$\mathbf{P}(P_{1,2},\ldots,P_{4,4}) = \Pi_{i,j}\ \mathbf{P}(P_{i,j})$$

I pozzi sono distribuiti indipendentemente

$$\mathbf{P}(P_{1,2},\ldots,P_{4,4}) = 0.2^{n} * 0.8^{16-n}$$

la probabilità di pozzi è 0,2 e ci sono n pozzi

Query e semplice ragionamento



- Assumiamo di **sapere** che:

  $b = \neg b_{1,1} \wedge b_{1,2} \wedge b_{2,1}$

  $known = \neg p_{1,1} \wedge \neg p_{1,2} \wedge \neg p_{2,1}$

Siamo interessati a rispondere a **query** come

$$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known, b).$$

La **risposta** può essere calcolata elencando l'intera distribuzione di probabilità congiunta.

Siano Unknown le variabili $P_{i,j}$ eccetto $P_{1,3}$ e Known:

$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known, b) = \Sigma_{unknown} \mathbf{P}(P_{1,3}, unknown, known, b)$

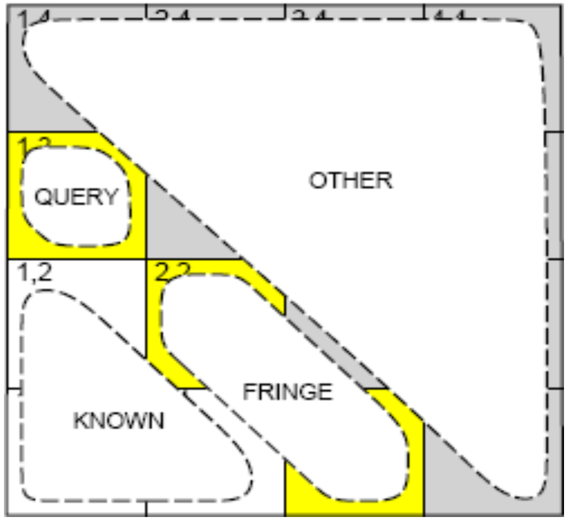
Ma significa esplorare tutti i possibili valori delle variabili sconosciute e ci sono 2^{12} =4096 termini (crescita esponenziale nel numero di stanze)!

Possiamo farlo meglio (più velocemente)?

Indipendenza condizionale

Osservazione:

Le brezze osservate sono condizionatamente indipendenti dalle altre variabili date le variabili note (bianco), di frontiera (giallo) e di query.



Dividiamo l'insieme delle variabili nascoste in frontiera e altre variabili:

Unknown = Fringe ∪ Other

Dall'indipendenza condizionale abbiamo:

$P(b \mid P_{1,3}, known, unknown) = P(b \mid P_{1,3}, known, fringe)$

Ora, sfruttiamo questa formula.

Reasoning

$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known, b)$

$= \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(P_{1,3}, known, unknown, b)$

product rule $\mathbf{P}(X,Y) = \mathbf{P}(X|Y)\ \mathbf{P}(Y)$

$= \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, known, unknown) * \mathbf{P}(P_{1,3}, known, unknown)$

$= \alpha \sum_{fringe}\sum_{other} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, known, fringe,other) * \mathbf{P}(P_{1,3}, known, fringe,other)$

$= \alpha \sum_{fringe}\sum_{other} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3},known, fringe) * \mathbf{P}(P_{1,3},known,fringe,other)$

$= \alpha \sum_{fringe} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3},known, fringe) * \sum_{other} \mathbf{P}(P_{1,3},known,fringe,other)$

$= \alpha \sum_{fringe} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3},known, fringe) * \sum_{other} \mathbf{P}(P_{1,3})P(known)P(fringe)P(other)$

$= \alpha\ P(known)\mathbf{P}(P_{1,3}) \sum_{fringe} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3},known, fringe)\ P(fringe) \sum_{other} P(other)$

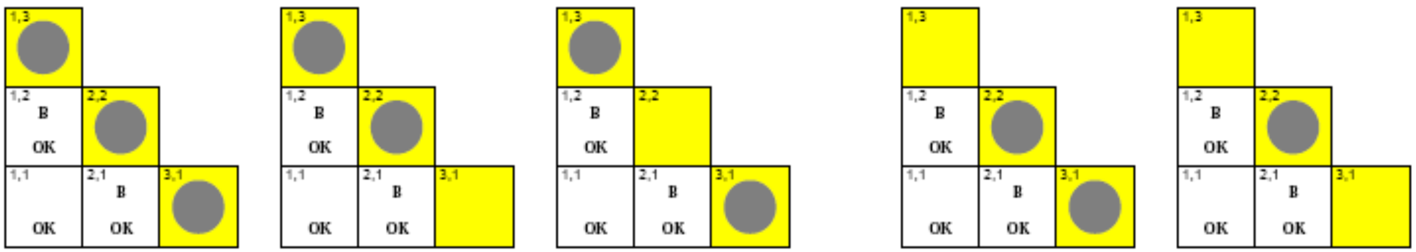
$= \alpha'\ \mathbf{P}(P_{1,3}) \sum_{fringe} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3},known, fringe)\ P(fringe)$

$\alpha' = \alpha.\ P(known)$ $\qquad \sum_{other} P(other) = 1$

Soluzione

$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known, b) = \alpha' \, \mathbf{P}(P_{1,3}) \, \Sigma_{fringe} \, \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, known, fringe) \, P(fringe)$

- Esploriamo possibili modelli (valori) di frontiera compatibili con l'osservazione b.



0.2 x 0.2 = 0.04   0.2 x 0.8 = 0.16   0.8 x 0.2 = 0.16   0.2 x 0.2 = 0.04   0.2 x 0.8 = 0.16

$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known, b)$

$= \alpha' \langle 0.2\,(0.04 + 0.16 + 0.16),\ 0.8\,(0.04 + 0.16) \rangle$

$= \langle 0.31, 0.69 \rangle$

$\mathbf{P}(P_{2,2} \mid known, b) = \langle 0.86, 0.14 \rangle$

Evitare assolutamente il quadrato (2,2)!

Sommario

- La probabilità è un formalismo rigoroso per conoscenza incerta
- La distribuzione di probabilità congiunta specifica la probabilità di ogni evento atomico
- È possibile rispondere alle query sommando gli eventi atomici
- Per i domini non banali, dobbiamo trovare un modo per ridurre le dimensioni congiunte
- Indipendenza e indipendenza condizionale forniscono gli strumenti