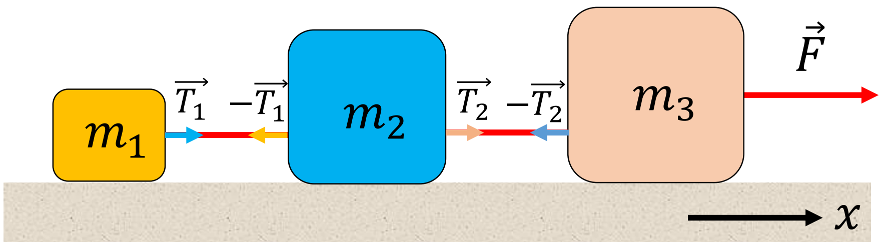
Esercizio 1

Tre blocchi, collegati da funi ideali, sono messi in movimento su un piano liscio da una forza avente modulo pari a $|\vec{F}| = 65{,}0\ N$. Se $m_1 = 12{,}0\ kg$, $m_2 = 24{,}0\ kg$ e $m_3 = 31{,}0\ kg$, calcolare l'accelerazione del sistema e le tensioni delle funi.



Scriviamo le equazioni della dinamica per le masse che costituiscono il sistema:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T_1 \\ m_2 a_2 = T_2 - T_1. \\ m_3 a_3 = F - T_2 \end{cases}$$

Osserviamo che l'azione vincolante delle funi ideali (inestensibili) impone che l'accelerazione delle tre masse sia identica. Pertanto sia $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Sotto tale ipotesi, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} m_1 a = T_1 \\ m_2 a = T_2 - T_1. \\ m_3 a = F - T_2 \end{cases}$$

Sommando membro a membro le precedenti otteniamo immediatamente il valore dell'accelerazione del sistema:

$$m_1 a + m_2 a + m_3 a = T_1 + (T_2 - T_1) + (F - T_2)$$

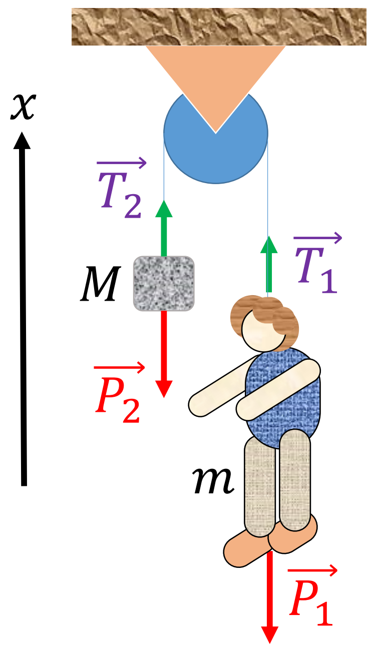
$$\rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} \rightarrow a = \left(\frac{65{,}0}{12{,}0 + 24{,}0 + 31{,}0}\right)\frac{m}{s^2} = 0{,}970\,\frac{m}{s^2}.$$

Per quanto riguarda le tensioni si ha:

$$T_1 = m_1 a = 12{,}0 \cdot 0{,}970\ N = 11{,}6\ N$$
$$T_2 = T_1 + m_2 a = 11{,}6\ N + 24{,}0 \cdot 0{,}970\ N = 34{,}9\ N.$$

Esercizio 2

Un uomo di massa $m = 85\ kg$ si lascia cadere da un'altezza di $h = 10{,}0\ m$ tenendosi ad una fune che, scorrendo su una puleggia, regge un contrappeso di massa pari a $M = 65\ kg$. Partendo da fermo, con quale velocità toccherà il suolo?



Scriviamo le equazioni della dinamica del blocco e dell'uomo nel sistema di riferimento mostrato. Tali equazioni assumono la forma seguente:

$$\begin{cases} ma_1 = T - mg \\ Ma_2 = T - Mg \end{cases}.$$

Osserviamo poi che vale la seguente relazione tra le accelerazioni dei due corpi $a_2 = -a_1 = a > 0$. Tenendo conto del precedente vincolo, possiamo scrivere quanto segue:

$$\begin{cases} -ma = T - mg \\ Ma = T - Mg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ma = -T + mg \\ Ma = T - Mg \end{cases} \rightarrow a = \left(\frac{m-M}{m+M}\right) g.$$

Dalla precedente relazione si ha che l'accelerazione dell'uomo risulta essere:

$$a_1 = -a = -\left(\frac{m-M}{m+M}\right) g.$$

Le equazioni della cinematica dell'uomo sono pertanto le seguenti:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2 + h \\ v(t) = a_1 t \end{cases}.$$

L'uomo giungerà al suolo al tempo t^* tale che $x(t^*) = 0$. Risolvendo l'equazione precedente si ottiene:

$$t^* = \sqrt{-\frac{2h}{a_1}} = \sqrt{\frac{2h}{a}}.$$

Pertanto la velocità con la quale l'uomo giunge al suolo vale:

$$v(t^*) = a_1 t^* = -at^* = -a\sqrt{\frac{2h}{a}} = -\sqrt{2gh\left(\frac{m-M}{m+M}\right)}.$$

Notiamo esplicitamente che se non ci fosse il contrappeso ($M = 0$) l'uomo giungerebbe al suolo con velocità pari a $v_{cl} = -\sqrt{2gh}$, che rappresenta la velocità di caduta libera. La velocità di caduta libera vale

$$v_{cl} = -\sqrt{2gh} = -\sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 10,0}\,\frac{m}{s} = -14\,\frac{m}{s},$$

pari a una velocità di circa 50 km/h. In presenza del contrappeso la velocità finale vale

$$v(t^*) = -\sqrt{2gh\left(\frac{m-M}{m+M}\right)} = v_{cl}\sqrt{\frac{m-M}{m+M}}.$$

Il fattore di attenuazione dovuto al contrappeso può essere valutato e si ha

$$\sqrt{\frac{m-M}{m+M}} = \sqrt{\frac{85-65}{85+65}} = \sqrt{\frac{20}{150}} = \sqrt{\frac{2}{15}} \approx 0{,}365.$$

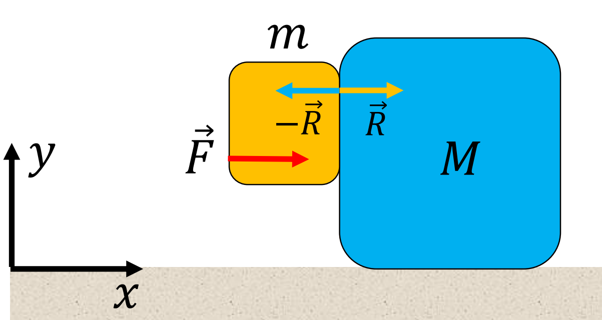
Dalla precedente otteniamo il risultato finale:

$$v(t^*) = -14 \cdot 0{,}365\,\frac{m}{s} = -5{,}1\,\frac{m}{s},$$

pari ad una velocità finale di circa 18 km/h.

Esercizio 3

I due blocchi, di massa $m = 16\ kg$ e $M = 88\ kg$, sono a contatto come mostrato in figura. Il corpo di massa maggiore è poggiato su un piano orizzontale, mentre quello di massa minore è libero di traslare in direzione y. Il coefficiente di attrito statico fra le superfici dei due corpi è $\mu = 0{,}38$, mentre il piano d'appoggio è liscio. Determinare la forza $\vec{F}$ di intensità minima necessaria ad evitare che il corpo di massa m cada al suolo.



Scriviamo le equazioni della dinamica per i due blocchi in direzione x:

$$\begin{cases} ma_1 = F - R \\ Ma_2 = R \\ a_1 = a_2 = a \end{cases}.$$

Da queste si ottiene:

$$\begin{cases} ma = F - R \\ Ma = R \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{F}{m+M} \\ R = \dfrac{M\,F}{m+M} \end{cases}.$$

Analizziamo adesso il moto del corpo di massa minore in direzione y. Affinché il corpo non cada al suolo occorre che la forza peso e la forza di attrito si equilibrino. Occorre quindi che $f_a \geq mg$. D'altra parte il modulo della forza d'attrito vale $f_a \leq \mu R$ e quindi si ha la relazione $mg \leq f_a \leq \mu R$ che implica anche $mg \leq \mu R$. Dalla precedente risulta

$$mg \leq \mu R \rightarrow R \geq \frac{mg}{\mu} \rightarrow \frac{M F}{m+M} \geq \frac{mg}{\mu} \rightarrow F \geq \frac{mg}{\mu}\left(\frac{m+M}{M}\right).$$

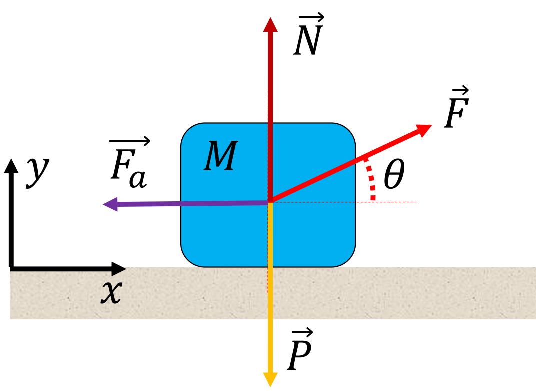
La forza minima necessaria ad equilibrare il corpo di massa minore in direzione y vale

$$F^{min} = \frac{mg}{\mu}\left(\frac{m+M}{M}\right) = \frac{16 \cdot 9{,}8}{0{,}38}\left(1+\frac{16}{88}\right) N \approx 487{,}66\, N \rightarrow 490\, N,$$

dove il precedente risultato è espresso con due cifre significative.

Esercizio 4

Occorre spostare a velocità costante una cassa di massa M che poggia su un piano orizzontale avente coefficiente di attrito dinamico μ. Determinare modulo, direzione e verso della forza di intensità minima necessaria a compiere tale operazione.



La condizione di corpo poggiato richiede che valga la relazione:

$$N + F \sin\theta - Mg = 0,$$

dalla quale si ottiene il valore della reazione vincolare normale al piano di appoggio:

$$N = Mg - F\sin\theta.$$

Scriviamo adesso il secondo principio della dinamica proiettandolo in direzione x:

$$Ma = F\cos\theta - \mu N.$$

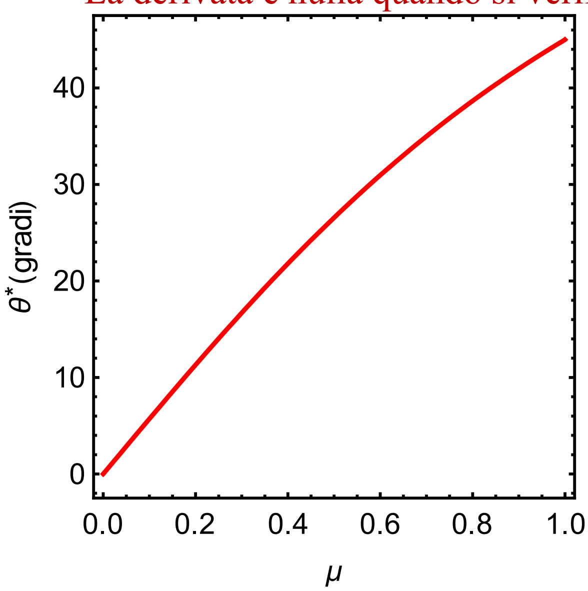
Imponendo la condizione $a = 0$, richiesta affinché il moto risulti rettilineo uniforme, possiamo scrivere la seguente relazione:

$$F\cos\theta - \mu N = 0 \rightarrow F\cos\theta - \mu(Mg - F\sin\theta) = 0 \rightarrow F(\cos\theta + \mu\sin\theta) = \mu Mg$$
$$\rightarrow F = \frac{\mu M g}{\cos\theta + \mu\sin\theta}.$$

La precedente è una relazione tra il modulo della forza da applicare e la sua direzione rispetto all'orizzontale. Vista la precedente, ha senso chiedersi quale sia la forza di intensità minima che rispetti i vincoli del problema dato. Ci basta imporre la condizione di stazionarietà della derivata di F rispetto a θ, con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$. Procedendo in questo modo otteniamo:

$$\frac{dF}{d\theta} = \mu Mg \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta + \mu \sin\theta}\right) = \mu Mg \left[-\frac{-\sin\theta + \mu\cos\theta}{(\cos\theta + \mu\sin\theta)^2}\right]$$
$$= \mu Mg \left[\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{(\cos\theta + \mu\sin\theta)^2}\right].$$

La derivata è nulla quando si verifica la condizione



$$\sin\theta - \mu\cos\theta = 0$$
$$\rightarrow \tan\theta^* = \mu.$$

La precedente implica che la funzione $F(\theta)$ ha un estremo in $\theta = \theta^*$. L'analisi del segno della derivata mostra che si tratta di un minimo relativo. Ne concludiamo che per $\theta = \theta^*$ il modulo della forza risulta minimo. Pertanto abbiamo:

$$F^{min} = \frac{\mu Mg}{\cos\theta^* + \mu\sin\theta^*}.$$

Calcoliamo le componenti della forza:

$$F_x = F^{min}\cos\theta^* = \frac{\mu Mg\cos\theta^*}{\cos\theta^* + \mu\sin\theta^*} = \frac{\mu Mg}{1 + \mu\tan\theta^*} = Mg\mu\left(\frac{1}{1+\mu^2}\right)$$
$$F_y = F^{min}\sin\theta^* = \frac{\mu Mg\sin\theta^*}{\cos\theta^* + \mu\sin\theta^*} = \frac{\mu Mg\tan\theta^*}{1 + \mu\tan\theta^*} = Mg\mu\left(\frac{\mu}{1+\mu^2}\right).$$

Inoltre, il modulo della forza vale

$$\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2} = Mg\mu\sqrt{\left(\frac{1}{1+\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{1+\mu^2}\right)^2} = Mg\mu\sqrt{\frac{1+\mu^2}{(1+\mu^2)^2}} = \frac{Mg\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

1. Il lavoro di una forza

Immaginiamo di dover spostare una pesante cassa spingendola lungo un tragitto pianeggiante di assegnata lunghezza. Supponiamo di voler quantificare, utilizzando un valore numerico, lo sforzo richiesto per compiere questa operazione.

Che caratteristiche dovrebbe avere la quantità fisica che quantifica lo *sforzo* da compiere?

Anzitutto vorremmo che la quantità in questione fosse uno scalare. Intuitivamente la grandezza cercata dovrebbe dipendere dalla forza richiesta e dalla lunghezza del percorso.

Essendo la forza e lo spostamento grandezze fisiche vettoriali, il modo più semplice di comporle, ottenendo uno scalare, è considerare il loro prodotto scalare.

Da quanto detto sembrerebbe ragionevole misurare lo sforzo da compiere mediante la relazione $\vec{F} \cdot \vec{s}$, dove $\vec{F}$ è la forza *supposta costante* richiesta a compiere lo spostamento descritto da $\vec{s}$.

La quantità appena introdotta è il *lavoro* compiuto dalla forza costante $\vec{F}$ per spostare il suo punto di applicazione di $\vec{s}$. Il punto di applicazione della forza può essere un punto materiale o un punto assegnato di un corpo esteso.

Il lavoro, $L = \vec{F} \cdot \vec{s}$, dipende dalla componente della forza parallela allo spostamento. Si intuisce immediatamente che se la forza è ortogonale allo spostamento il lavoro è nullo e si dice che *la forza non compie lavoro*. La precedente deduzione è supportata dalla seguente scrittura

$$L = \left|\vec{F}\right| |\vec{s}| \cos \varphi,$$

dove φ rappresenta l'angolo formato tra le direzioni della forza e dello spostamento.

Vogliamo capire qualcosa in più sul concetto di lavoro appena introdotto. Abbiamo imparato che una forza costante applicata ad un corpo di massa m produce un'accelerazione pari a $\vec{a} = \vec{F}/m$. Inoltre il moto risultante è uniformemente accelerato.

Sviluppiamo per semplicità il ragionamento che segue in una dimensione. Sappiamo che in un moto rettilineo uniformemente accelerato vale la seguente relazione:

$$a(x - x_0) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2.$$

D'altra parte l'accelerazione $\vec{a} = a\,\hat{x}$ è prodotta dalla forza costante $\vec{F} = F\,\hat{x}$ da cui segue $a = F/m$. Di qui si ha la relazione:

$$\frac{F}{m}(x - x_0) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2.$$

Notiamo adesso che la quantità $F(x - x_0)$ non è altro che il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ per effettuare lo spostamento $\vec{s} = (x - x_0)\,\hat{x}$. Essendo la forza collineare allo spostamento, possiamo scrivere la catena di uguaglianze $L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F(x - x_0)$. Da questo segue la relazione:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

La precedente mostra che il lavoro compiuto dalla forza è pari alla variazione di una quantità dipendente dalla massa e dalla velocità del corpo. Tale quantità, pari a

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2,$$

viene detta *energia cinetica*. Così come suggerito dalla sua denominazione, si tratta di una forma di energia legata al movimento di un corpo. Essa risulta infatti nulla se il corpo è in quiete in un dato sistema di riferimento. L'energia cinetica è inoltre indipendente dal verso della velocità, ossia è invariante rispetto alla sostituzione $v \to -v$.

Il risultato appena derivato nel caso particolare di forza costante si può riscrivere nella forma:

$$L = E_c^f - E_c^i,$$

dove E_c^f e E_c^i rappresentano l'energia cinetica finale ed iniziale, rispettivamente. Quindi *il lavoro di una forza costante è pari alla variazione di energia cinetica*. Questo risultato, qui dimostrato sotto ipotesi alquanto restrittive, viene detto *teorema dell'energia cinetica*. Nel seguito vedremo come tale teorema valga in generale, cioè per forze variabili lungo il percorso ed in tre dimensioni.

Se il lavoro è legato ad una variazione di energia cinetica, esso deve essere a sua volta una forma di energia. D'altra parte il lavoro può essere una quantità positiva o negativa, visto che la forza in questione può esercitare un'azione accelerante o decelerante sul corpo. Se questa è la situazione che senso attribuire ad un valore negativo del lavoro?

Procediamo con ordine. Quando $L > 0$ (*lavoro motore*) la velocità finale del corpo è maggiore della velocità iniziale. Questo implica che la forza applicata è la causa dell'aumento dell'energia cinetica. Si può affermare che il corpo ha assorbito energia.

Nel caso opposto, ossia quando $L < 0$ (*lavoro resistente*), il corpo ha ceduto energia. In questa situazione, l'energia cinetica finale risulta minore di quella iniziale.

Nell'ultimo caso rimasto (che non è però attinente all'esempio qui discusso), quello in cui $L = 0$, non si ha variazione di energia cinetica e si dice che la forza non compie lavoro.

Nel SI l'unità di misura del lavoro è il Joule (J) definito come il lavoro compiuto da una forza di 1 N che sposta di 1 m il suo punto di applicazione:

$$1\,J = 1N \cdot 1\,m = 1\,kg\,\frac{m^2}{s^2}.$$

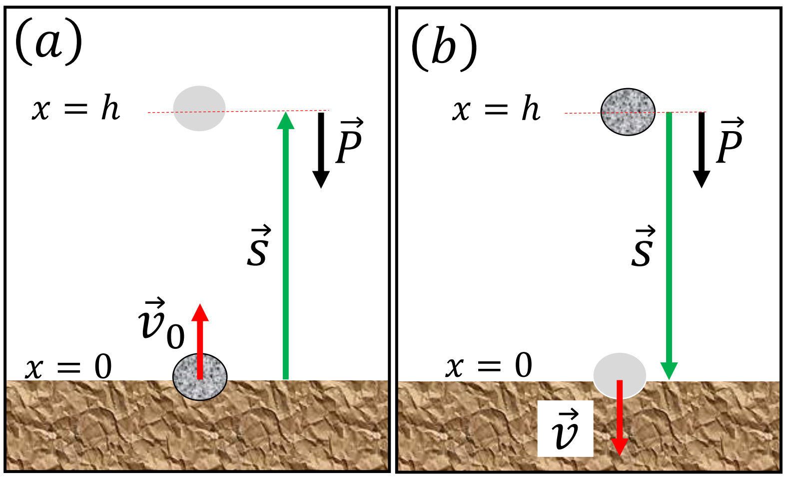
Evidentemente anche l'energia cinetica si misura in Joule.

2. Il lavoro della forza peso

La tipica forza costante è la forza peso. Applichiamo a questa importante forza le considerazioni fatte nel precedente paragrafo.

Supponiamo di lanciare un corpo di massa m verso l'alto con assegnata velocità verticale v_0. L'energia cinetica iniziale vale quindi:

$$E_c^i = \frac{1}{2} m v_0^2$$



Nel punto di quota massima la velocità del corpo si annulla, prima che il moto si inverta. In questo punto l'energia cinetica risulta nulla ($E_c^f = 0$). Da quanto detto otteniamo una variazione di energia cinetica negativa ($E_c^f - E_c^i = -E_c^i < 0$), cosa che implica che la forza peso fa perdere energia al sistema ($L < 0$).

Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza peso tra la posizione iniziale e finale?

Applichiamo la definizione:

$$L = \vec{P} \cdot \vec{s} = (-mg\hat{x}) \cdot (h\,\hat{x}) = -mgh < 0.$$

In questa situazione si dice che la forza peso compie lavoro negativo o resistente. Un importante sottoprodotto della precedente è l'importante relazione:

$$L = -\frac{1}{2} m v_0^2 \rightarrow -mgh = -\frac{1}{2} m v_0^2 \rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_0^2,$$

dalla quale si determina facilmente la quota massima in funzione della velocità iniziale:

$$h = \frac{v_0^2}{2g},$$

relazione quest'ultima derivata in precedenza per altra via.

Analizziamo adesso la fase di caduta e calcoliamo il lavoro tra il punto di quota massima e il momento in cui il corpo tocca terra. Il lavoro della forza peso in questa circostanza vale:

$$L = \vec{P} \cdot \vec{s} = (-mg\hat{x}) \cdot (-h\,\hat{x}) = mgh > 0.$$

La precedente mostra come la forza peso trasferisca energia al corpo in caduta. Una ulteriore implicazione del precedente risultato è la seguente relazione:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2,$$

dalla quale si ricava immediatamente la velocità di caduta al suolo nella forma $v = \sqrt{2gh}$.

Dalle considerazioni fin qui esposte segue che la somma del lavoro compiuto dalla forza peso nel tratto di salita e nel successivo tratto in caduta libera è nullo. Durante la fase di salita la forza peso compie lavoro resistente, mentre nel tratto in caduta libera compie lavoro motore.