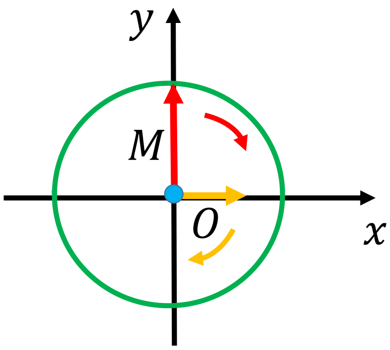


Esercizio

Le lancette di un orologio indicano le ore tre. Dopo quanto tempo le lancette si ritroveranno per la prima volta ad angolo retto?

Il movimento delle lancette è descritto dal moto circolare uniforme. Ciascuna lancetta è dotata di un differente valore della velocità angolare. Siano ω_O e ω_M i valori della velocità angolare della lancetta delle ore e dei minuti, rispettivamente. Per la soluzione del problema, definiamo i versori associati alla posizione delle lancette. Siano essi

$$\hat{r}_M = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_M t\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega_M t\right)\right).$$
$$\hat{r}_O = (\cos(-\omega_O t), \sin(-\omega_O t))$$

Nello scrivere le precedenti abbiamo tenuto conto della rotazione oraria delle lancette, contraria al verso antiorario scelto come positivo. La condizione di ortogonalità si scrive nella forma $\hat{r}_M \cdot \hat{r}_O = 0$. Tale condizione prende la seguente forma esplicita:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_M t\right)\cos(-\omega_O t) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega_M t\right)\sin(-\omega_O t) = 0.$$

Dalla trigonometria sappiano che valgono le seguenti formule di addizione/sottrazione per il coseno

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Utilizzando le precedenti, la condizione di ortogonalità si può riscrivere come segue:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_M t + \omega_O t\right) = 0.$$

Il coseno è nullo quando il suo argomento vale $\frac{\pi}{2} + n\pi$, con n un intero relativo. Da questa osservazione ricaviamo la condizione:

$$\frac{\pi}{2} - \omega_M t + \omega_O t = \frac{\pi}{2} + n\pi \rightarrow t^* = \frac{n\pi}{\omega_O - \omega_M}.$$

Essendo $\omega_O - \omega_M < 0$, occorre scegliere $n < 0$ affinché risulti $t^* > 0$. Con questa scelta, l'intervallo di tempo necessario alle lancette per riposizionarsi ad angolo retto si ricava selezionando il valore $n = -1$. Procedendo in questo modo si ottiene

$$t^* = \frac{\pi}{\omega_M - \omega_O}.$$

Il precedente risultato può essere espresso in termini del periodo di rotazione delle lancette osservando che valgono le relazioni

$$\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}.$$
$$\omega_O = \frac{2\pi}{T_O}$$

Con le precedenti, possiamo riscrivere il nostro risultato nella forma:

$$t^* = \frac{\pi}{\omega_M - \omega_O} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_O}} = \frac{T_M T_O}{2(T_O - T_M)}.$$

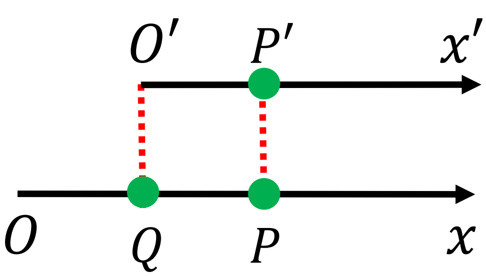
Inoltre, la lancetta dei minuti compie un giro un'ora, mentre quella delle ore in dodici ore. Abbiamo quindi $T_O = 12\ h$ e $T_M = 1\ h$. Otteniamo pertanto il risultato

$$t^* = \frac{6}{11} h \approx 1964\ s,$$

corrispondente a circa 32'43''.

1. Moti relativi in una dimensione

Le grandezze cinematiche posizione, velocità ed accelerazione dipendono in generale dal sistema di riferimento scelto per la loro descrizione. Questa osservazione pone il problema di quale sia la relazione tra le osservazioni cinematiche effettuate da osservatori solidali con sistemi di riferimento differenti.



Per chiarire questo punto, limitiamo le nostre considerazioni ad una situazione unidimensionale e consideriamo due osservatori solidali con i due sistemi di riferimento Ox e $O'x'$ mostrati in figura.

Supponiamo che i due osservatori debbano descrivere la posizione del medesimo corpo in movimento. Il corpo ha vettore posizione $\vec{r} = \hat{x}\ P$ nel sistema Ox, mentre nel sistema $O'x'$ si ha $\vec{r}' = \hat{x}' P' = \hat{x}\ P'$. Detto $\vec{Q} = \hat{x}\ Q$ il vettore posizione di O' nel sistema di riferimento Ox, si ha la seguente relazione tra i vettori posizione prima introdotti: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{Q}$.

Se il vettore $\vec{Q}$ è indipendente dal tempo otteniamo

$$\begin{matrix} \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}'}{dt} \\ \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{d^2\vec{r}'}{dt^2} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \vec{v} = \vec{v}' \\ \vec{a} = \vec{a}' \end{matrix}$$

e questo implica che i due osservatori misureranno gli stessi valori di velocità e di accelerazione nei rispettivi sistemi di riferimento.

Nel caso in cui il vettore $\vec{Q}$ dipenda dal tempo, si ha la seguente regola di composizione delle velocità

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{Q}}{dt},$$

ossia la velocità misurata in Ox è pari alla velocità misurata in $O'x'$ aumentata della velocità con la quale l'origine O' è vista muoversi nel sistema di riferimento Ox. Se ne conclude che se gli osservatori sono solidali con sistemi di riferimento in moto relativo l'uno rispetto all'altro, essi misureranno valori differenti delle velocità di un corpo in moto.

Analoga conclusione vale per le accelerazioni. Per queste ultime vale la relazione

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} + \frac{d^2\vec{Q}}{dt^2}.$$

Nel caso particolare in cui i due sistemi traslano l'uno rispetto all'altro con moto rettilineo uniforme, si ha

$$\frac{d^2\vec{Q}}{dt^2} = 0,$$

cosa che implica che i due osservatori possono concordare sui valori di accelerazione misurati, mentre misurano valori differenti di velocità. Da queste osservazioni segue che l'accelerazione di un corpo è una quantità *invariante* per osservatori solidali con sistemi di riferimento che traslano a velocità costante l'uno rispetto all'altro. In questa situazione ogni osservatore vede l'origine dell'altro sistema di riferimento muoversi di moto rettilineo uniforme.

Nello sviluppo della nostra discussione abbiamo fatto l'implicita assunzione che gli osservatori possano sempre concordare sulla durata di un evento osservato dai rispettivi sistemi di riferimento ($t = t'$). Questa che sembra una assunzione più che ragionevole, è compatibile con gli sviluppi della fisica moderna (relatività di Einstein) solo se intesa come approssimazione.

Le conclusioni a cui siamo giunti sono valide anche nel caso di due e tre dimensioni.

2. Principio di relatività (Galilei)

Nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* del 1632, Galilei enuncia un importante principio. In una celebre pagina di questo importante trattato (in forma dialogica) si legge:

"*Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non piú gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder cosí, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma […]*"

In termini moderni, il *principio di relatività galileiano* può essere enunciato nella forma seguente:

Se due laboratori si muovono l'uno rispetto all'altro di moto traslatorio rettilineo uniforme, non esiste esperimento che dia risultati differenti nell'uno e nell'altro laboratorio.

Esaminiamo il significato fisico dell'asserto. Supponiamo che nel primo laboratorio valga la legge fisica $A = B$, con A e B grandezze fisiche definite in un riferimento solidale con il primo laboratorio.

Nel secondo laboratorio siano A' e B' le grandezze fisiche corrispondenti ad A e B. Sia $A' = B'$ la legge fisica scritta in un riferimento solidale con il secondo laboratorio. Secondo il principio di relatività galileiana, le relazioni

$$A = B$$
$$A' = B'$$

rappresentano la *stessa legge fisica* scritta nei due sistemi di riferimento. Le grandezze fisiche A e A', B e B' sono legate da leggi di trasformazione che formalmente possono scriversi come segue

$$\mathcal{L}: (A, B) \to (A', B'),$$

dove in generale $A \neq A'$ e $B \neq B'$. Notiamo che mentre la forma della legge fisica mantiene la sua validità nei due sistemi di riferimento, i membri dell'uguaglianza che ne definiscono la struttura matematica variano contemporaneamente per effetto della trasformazione $\mathcal{L}$. Per descrivere questa situazione, si usa parlare di *covarianza delle leggi fisiche*.

Nel caso speciale in cui $A = A'$ e $B = B'$ si dice che A e B sono *invarianti* nei due sistemi.

A titolo di esempio, ricordiamo che nel precedente paragrafo abbiamo osservato come l'accelerazione di un corpo sia una quantità invariante per osservatori che si muovano di moto traslatorio rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.

3. Le leggi della dinamica di Newton

Abbiamo già anticipato che la dinamica si occupa della descrizione del moto di un corpo a partire dalle cause che lo generano. Note tali cause, denominate *forze*, il problema fondamentale della dinamica consiste nella previsione delle caratteristiche del moto.

La dinamica di Newton si fonda su *tre principi*, che sono posti a fondamento della teoria. Tali principi sono il risultato delle osservazioni sperimentali e delle deduzioni (tutt'altro che evidenti) di Galilei (1564-1642) e Newton (1642-1727).

La formulazione di tali principi ha richiesto un processo di astrazione e di idealizzazione dei risultati ottenuti in esperimenti condotti in condizioni necessariamente non ideali. Tali esperienze sono state effettuate studiando il moto di *corpi sufficientemente lenti* e pertanto la teoria risulta valida nel limite di bassa velocità. Il termine di confronto per stabilire la lentezza di un corpo è stato chiarito dalla relatività di Einstein soltanto all'inizio del secolo scorso.

Nel seguito forniremo una enunciazione assiomatica dei principi della dinamica. Infatti, la prova della correttezza di tali principi può soltanto essere rinvenuta nell'efficacia descrittiva e predittiva della teoria che ne risulta. Procediamo con una enunciazione ragionata dei tre principi della dinamica.

Primo principio (principio d'inerzia)

Un corpo non soggetto a forze o è in quiete o il suo moto traslatorio è rettilineo ed uniforme.

Un esperimento mentale ci mostra come il primo principio, così come formulato, non sia valido in *tutti* i sistemi di riferimento.

Supponiamo di poggiare sul tavolino di un treno fermo alla stazione un bicchiere. Il bicchiere risulta fermo e ne deduciamo che la risultante delle forze agenti su di esso è nulla. Siamo quindi nella situazione descritta dal primo principio.

Il bicchiere rimane nel suo stato di quiete se il treno procede di moto rettilineo uniforme.

Osserviamo però che se il treno effettua una brusca frenata, il bicchiere prende a muoversi e l'iniziale situazione di quiete lascia il posto ad un moto accelerato. In questa situazione **il moto del bicchiere non risulta riconducibile unicamente alle forze censite a treno fermo**. Infatti il treno in frenatura è dotato di moto accelerato rispetto ad un sistema di riferimento solidale con la stazione ferroviaria ed il principio di relatività galileiana non ci assicura l'equivalenza delle leggi fisiche nei due riferimenti.

Ne concludiamo che il sistema di riferimento solidale con il treno fermo è *equivalente* al sistema di riferimento solidale con il treno in moto rettilineo uniforme (qualsiasi sia il valore della velocità). Il sistema di riferimento solidale con il treno in frenatura *non è equivalente* a quello solidale con la stazione e con quello solidale con il treno in moto rettilineo uniforme.

I sistemi di riferimento in cui è valido il primo principio della dinamica sono detti *sistemi inerziali*. Trovato un sistema inerziale, tutti quelli in moto rettilineo uniforme rispetto a questo sono a loro volta inerziali. In particolare è inerziale (con buona approssimazione), il riferimento Copernicano avente l'origine nel sole e gli assi orientati verso le stelle fisse.

Sistemi che siano accelerati o in rotazione rispetto a sistemi inerziali si dicono *non inerziali*. In essi non è valido il primo principio della dinamica.

Alla luce di quanto detto, il primo principio della dinamica e la definizione di sistema inerziale potrebbero essere enunciati nel modo seguente:

<u>Esiste una speciale classe di sistemi di riferimento in cui</u> un corpo non soggetto a forze o è in quiete o il suo moto traslatorio è rettilineo ed uniforme.

Si dicono sistemi inerziali i sistemi di riferimento appartenenti a detta classe.

Il contenuto del primo principio della dinamica è rivoluzionario. *Secondo Aristotele (IV secolo a.C.) lo stato naturale dei corpi è la quiete, ossia l'assenza di moto. Qualsiasi corpo in movimento tende a rallentare fino a fermarsi, a meno che non venga spinto a continuare il suo movimento.*

Il primo principio della dinamica riconosce, in contrapposizione con la fisica aristotelica, che i corpi tendono naturalmente o ad uno stato di quiete o ad una condizione di moto rettilineo uniforme. Tale naturale tendenza è ostacolata dalle forze d'attrito che tendono a frenare i corpi in movimento. L'eliminazione (o la forte attenuazione) dell'attrito mette in evidenza la tendenza dei corpi (aventi una velocità iniziale non nulla) a procedere indefinitamente di moto rettilineo uniforme.

Notiamo come l'enunciazione del primo principio non possa essere concettualmente scissa dalla definizione di sistema inerziale. Abbiamo infatti notato che qualsiasi grandezza cinematica è riferita ad un fissato sistema di riferimento e che, in generale, grandezze cinematiche riferite a sistemi differenti non risultano coincidenti. Pertanto nel formulare il primo principio, il cui enunciato allude alla velocità di un corpo, occorre specificare quale sia il riferimento in cui la velocità del corpo è misurata.

Dare una definizione di sistema inerziale indipendente dal primo principio non è concettualmente semplice senza incorrere in definizioni tautologiche. Leggendo tra le righe del primo principio, si potrebbe pensare che sono inerziali quei sistemi in cui la naturale tendenza dei corpi liberi (quelli non soggetti a forze) a permanere in uno stato di quiete o di moto rettilineo uniforme non è perturbata da cause legate alla specificità del sistema di riferimento scelto.

Nel precedente esempio lo stato di moto accelerato del sistema di riferimento rispetto ad un riferimento solidale con la stazione rappresenta una specificità del sistema che altera la naturale tendenza dei corpi, non soggetti a forze, a permanere in uno stato di quiete o a muoversi di moto rettilineo uniforme.

Le azioni meccaniche prodotte dalle specificità dei sistemi *non inerziali* impediscono di formulare le leggi della meccanica in tali sistemi senza considerare esplicitamente tali specificità. In questo modo le leggi fisiche verrebbero esplicitamente a dipendere dalla peculiarità del sistema di riferimento scelto.

Questa è una condizione non desiderabile in quanto si vorrebbe costruire una teoria condivisa da tutti gli osservatori o da un'intera classe di osservatori. Questo intento è perseguibile enunciando le leggi della meccanica newtoniana per tutti gli osservatori inerziali. Questi osservatori possono concordare sul fatto che un corpo è dotato di accelerazione nulla, essendo tale variabile cinematica una quantità invariante per tutti gli osservatori inerziali.

Il possedere accelerazione nulla è la condizione distintiva per individuare un corpo in quiete o in moto rettilineo uniforme. Chiaramente, ogni osservatore inerziale osserverà una differente velocità del corpo in moto con accelerazione nulla, essendo la velocità una quantità non invariante per gli osservatori inerziali.

Secondo principio

Nei sistemi di riferimento inerziali, vi è proporzionalità diretta tra l'accelerazione $\vec{a}$ *di un corpo e la risultante* $\vec{F}$ *delle forze ad esso applicate. La costante di proporzionalità* m *è detta massa inerziale e si ha*

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

La *massa inerziale* è una misura dell'inerzia opposta dal corpo al cambiamento di velocità. In linea di principio non esiste nessun motivo manifesto per il quale la massa inerziale debba coincidere con la quantità di materia di cui il corpo è costituito. Quest'ultima grandezza è detta *massa gravitazionale*. Nonostante i due concetti siano distinti, l'esperienza mostra che massa inerziale e massa gravitazionale di un corpo sono grandezze fisiche sperimentalmente indistinguibili. Pertanto, d'ora in avanti parleremo soltanto di *massa* senza ulteriori precisazioni.

Il secondo principio della dinamica mostra quantitativamente quale sia l'effetto di una forza sulla cinematica di un corpo in movimento e completa l'informazione contenuta nel primo principio. Infatti nel primo principio ci si riferiva alla situazione ideale in cui un corpo non è soggetto ad alcuna forza. Questa idealizzazione (sistema isolato) è funzionale a mettere in evidenza quale sia la tendenza naturale dei corpi.

La conseguenza più immediata del secondo principio è l'assenza di accelerazione ($\vec{a} = 0$) nella cinematica di corpi soggetti a forze aventi risultante nulla ($\vec{F} = 0$). Pertanto la situazione nella quale un corpo è soggetto a forze con risultante nulla viene ad essere cinematicamente equivalente alla condizione di corpo libero, ossia un corpo non soggetto a forze. Pertanto nel secondo principio il primo membro va inteso nella forma

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{F_1} + \cdots + \overrightarrow{F_N},$$

dove $\overrightarrow{F_i}$ rappresenta l'i-esima forza agente sul corpo in esame. La struttura matematica del secondo principio della dinamica mostra inoltre che l'accelerazione subita dal corpo è collineare e concorde con la risultante delle forze agenti. Le forze, introdotte nel secondo principio, sono grandezze fisiche vettoriali. Nel SI le forze sono misurate in Newton (N). Una forza di 1 N è quella che imprime una accelerazione di $1m/s^2$ a un corpo di massa $1Kg$. Pertanto possiamo scrivere

$$1N = 1\ Kg \cdot \frac{m}{s^2}.$$

Terzo principio

Ad ogni forza $\vec{F}_{AB}$ *esercitata da un corpo A su un corpo B ne corrisponde istantaneamente un'altra* $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ *uguale in modulo e direzione, ma opposta in verso, causata dall'azione del corpo B su A.*

Usando le parole dello stesso Newton (1687, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Lex III*)

"Ad ogni azione corrisponde una reazione pari e contraria. Se qualcuno spinge una pietra col dito, anche il suo dito viene spinto dalla pietra. Se un cavallo tira una pietra legata ad una fune, anche il cavallo è tirato ugualmente verso la pietra: infatti la fune distesa tra le due parti, per lo stesso tentativo di allentarsi, spingerà il cavallo verso la pietra e la pietra verso il cavallo; e di tanto impedirà l'avanzare dell'uno di quanto promuoverà l'avanzare dell'altro. Se un qualche corpo, urtando in un altro corpo, in qualche modo avrà mutato con la sua forza il moto dell'altro, a sua volta, a causa della forza contraria, subirà un medesimo mutamento del proprio moto in senso opposto."

4. Le forze fondamentali

Fin qui abbiamo presentato una esposizione assiomatica dei principi della dinamica newtoniana. Nel seguito vedremo applicazioni rilevanti dei principi esposti. Prima di procedere per questa via, è utile specificare qualche dettaglio sulla natura delle forze di cui parlano i principi della dinamica. Tutte le forze in natura possono essere ricondotte a quattro categorie fondamentali:

Interazione gravitazionale: *interazione tra corpi massivi responsabile della caduta dei gravi e del moto dei pianeti introno al sole.*

Interazione elettromagnetica: *regola le interazioni tra corpi elettricamente carichi.*

Interazione nucleare debole: *meccanismo di interazione tra particelle subatomiche responsabile del decadimento radioattivo degli atomi. Il raggio di tale interazione è inferiore al diametro di un protone.*

Interazione nucleare forte: *interazione che confina i quarks all'interno di particelle quali il protone ed il neutrone. Media l'attrazione tra nucleoni. E' la forza più intensa tra quelle note ed il suo raggio d'azione è dell'ordine del fm (*$10^{-15} m$*).*

Questo corso tratterà in qualche dettaglio le prime due tra le interazioni fondamentali.