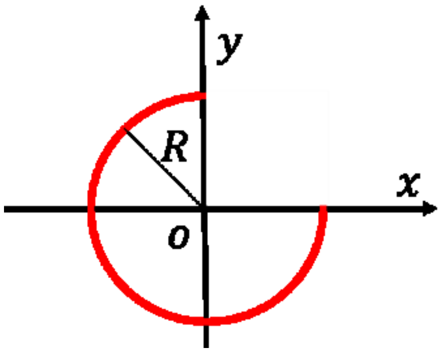
Esempio 1



Una carica positiva è uniformemente distribuita secondo la geometria indicata in figura. Sia λ la densità lineare di carica. Sia il sistema posto nel vuoto. Determinare:

a) La carica totale distribuita sul sistema.
b) La componente x del campo elettrico nell'origine del sistema di riferimento.
c) La componente y del campo elettrico nell'origine del sistema di riferimento.

Svolgimento

La lunghezza del segmento circolare su cui è distribuita la carica vale $L = \frac{3}{2}\pi R$. Pertanto la carica totale vale $Q = \lambda L = \frac{3\lambda}{2}\pi R$.

Il campo elettrico prodotto da una porzione infinitesima dl della sorgente è dato dall'espressione seguente:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}(\vec{r} - \vec{r}').$$

Siamo interessati a determinare il campo nell'origine e pertanto basta considerare $\vec{r} = 0$, mentre l'elemento di linea $dl = Rd\theta$ è descritto dal vettore posizione:

$$\vec{r}' = R(cos\theta, sin\theta).$$

Utilizzando queste informazioni possiamo scrivere:

$$d\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rd\theta}{R^3}R(cos\theta, sin\theta) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\theta}{R}(cos\theta, sin\theta).$$

Il campo elettrico totale si ottiene integrando sulla variabile angolare su un opportuno dominio:

$$\vec{E} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\,(cos\theta, sin\theta)$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(sin\theta_1 - sin\theta_2, cos\theta_2 - cos\theta_1).$$

Nel caso specifico $\theta_1 = \pi/2$ e $\theta_2 = 2\pi$. Pertanto otteniamo:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(1, 1).$$

Esempio 2

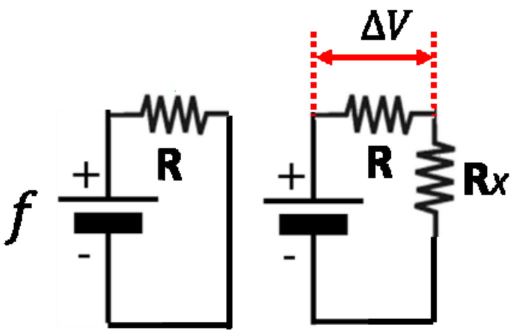


Fig. 3a Fig. 3b

Un dispositivo elettronico ammette la rappresentazione circuitale mostrata in Fig. 3a. Con il passare del tempo alcune parti del sistema sono soggette a processi di natura ossidativa che introducono nel circuito una resistenza incognita R_X, il cui valore può aumentare nel tempo. Il circuito equivalente per questa situazione è mostrato in Fig. 3b. Sapendo che la forza elettromotrice che alimenta il sistema vale $f = 3.00\,V$ e che la resistenza interna del componente elettronico vale $R = 1.00\,k\Omega$, si determini:

a) La corrente circolante nella situazione di Fig. 3a.
b) Con riferimento al precedente punto, determinare la potenza erogata dal generatore e quella dissipata dal componente di resistenza interna R.
c) Con riferimento a Fig. 3b, viene misurata con un voltmetro la tensione ai capi di R. Essa vale $\Delta V = 2.50\,V$. Si determini il valore della resistenza R_X dovuta all'ossidazione di una parte del circuito.
d) Con riferimento al precedente punto, si determini la corrente circolante nel circuito e la potenza dissipata dalla resistenza parassita R_X.
e) Dalla scheda tecnica del dispositivo è noto che il componente di resistenza interna R smette di funzionare se la tensione ΔV ai suoi capi è inferiore al valore $V_c = 2.00\,V$. Determinare il valore minimo di R_X per il quale il sistema smette di funzionare per effetto dei processi ossidativi.

Svolgimento

Nella situazione di Fig. 3a la corrente circolante si deduce dall'equazione circuitale per l'unica maglia presente. Tale equazione prende la forma $f - iR = 0$, da cui segue:

$$i = \frac{f}{R} \rightarrow 3.00\,mA.$$

La potenza erogata dal generatore vale $P_G = fi \rightarrow 9.00\,mW$, potenza quest'ultima integralmente dissipata dal resistore R (si ha infatti $P_G + P_R = 0$, dove P_R rappresenta la potenza dissipata dal resistore). I ragionamenti precedenti rispondono ai punti (a)-(b). Nella situazione di Fig. 3b l'equazione della corrente di maglia si scrive nella forma $f - i(R + R_X) = 0$. Sappiamo inoltre che $\Delta V = iR$. Le due precedenti costituiscono un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite i e R_X. Dalla soluzione otteniamo:

$$i = \frac{\Delta V}{R} \to 2.50\ mA,$$

$$R_X = \left(\frac{f - \Delta V}{\Delta V}\right) R \to 200\ \Omega.$$

Inoltre la potenza dissipata su R_X vale $P_X = i^2 R_X \to 1.25\ mW$. Le precedenti rispondono ai punti (c)-(d). Per rispondere al punto (e) ragioniamo sul circuito di Fig. 3b. Dall'equazione della corrente di maglia precedentemente derivata otteniamo la relazione:

$$\Delta V = \frac{f}{\frac{R_X}{R} + 1},$$

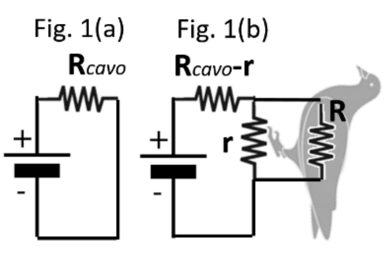
che lega la caduta di potenziale ai capi di R al valore della resistenza parassita R_X. Ci chiediamo per quali valori della resistenza parassita R_X si verifica la condizione $\Delta V < V_c$, sotto la quale il sistema smette di funzionare. Risolvendo la disequazione otteniamo la condizione:

$$R_X > \left(\frac{f - V_c}{V_c}\right) R.$$

Ne segue che il valore minimo della resistenza parassita per il quale il sistema smette di funzionare vale:

$$R_X^{min} = \left(\frac{f - V_c}{V_c}\right) R \to 500\ \Omega.$$

Esempio 3



Un cavo dell'alta tensione, lungo $800\ m$ ed avente resistenza elettrica per unità di lunghezza pari a $55.0\ \Omega/km$, è alimentato da una forza elettromotrice di $20.0\ kV$. Un piccione, avente resistenza elettrica pari a $R = 1.50\ k\Omega$, si posa sul cavo poggiando le zampe in due punti distanti $5\ cm$, essendo r la resistenza del tratto di cavo compreso tra le zampe dell'animale.

Adottando l'approssimazione di elettrodotto in corrente continua, si determini:

a) La corrente circolante nel cavo prima che il piccione vi si posi (Fig. 1(a)).
b) La corrente passante nel cavo dopo che il piccione vi si è posato (Fig. 1(b)).
c) Sapendo che una corrente di $50.0\ mA$ risulterebbe fatale per il piccione, calcolare la corrente che lo attraversa e dire se essa è di nocumento per l'animale.
d) La tensione applicata al piccione e la potenza da esso assorbita.
e) L'avifauna, quando bagnata dalla pioggia, può essere a rischio di folgorazione quando si posa su elettrodotti ad alta tensione. Quanto dovrebbe valere la resistenza interna di un uccello affinché, sotto le ipotesi sopra descritte, sia attraversato dalla corrente letale di $50.0\ mA$?

Svolgimento

Per poter rispondere ai quesiti del problema occorre risolvere i circuiti equivalenti definiti in Figura 1(a)-(b). In particolare, detta $f = 20.0\ kV$ la forza elettromotrice, è possibile risolvere il circuito di Fig. 1(a) per determinare la corrente circolante nel cavo prima che il piccione vi si posi. L'equazione circuitale che ne risulta è la seguente:

$$f - iR_{cavo} = 0,$$

dove i rappresenta la corrente di maglia. Dalla precedente si ottiene:

$$i = \frac{f}{R_{cavo}} \rightarrow \frac{20 \cdot 10^3}{0.8 \cdot 55.0} A = 455\ A,$$

cosa che risponde al punto (a). Non appena il piccione si posa sul cavo cambia la geometria del circuito che diviene quella presentata in Fig. 1(b). Con la definizione delle correnti di maglia $i_{1,2}$, possiamo scrivere le equazioni del circuito nella forma seguente:

$$\begin{gathered} f - i_1(R_{cavo} - r) - r(i_1 - i_2) = 0 \\ -i_2 R - r(i_2 - i_1) = 0 \end{gathered}.$$

La soluzione delle precedenti consente di ricavare la corrente che circola nel cavo pari alla corrente di maglia i_1 nella forma:

$$i_1 = \frac{f}{R_{cavo} - \dfrac{r^2}{R + r}} \rightarrow 455\ A,$$

dove si è utilizzato $r = 2.75 \cdot 10^{-3}\Omega$. La precedente risponde al punto (b). La soluzione delle equazioni circuitali consente di calcolare anche la corrente che attraversa il piccione che è pari alla corrente di maglia i_2, che vale:

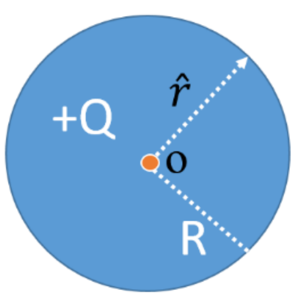
$$i_2 = \frac{r}{R+r}\left(\frac{f}{R_{cavo} - \frac{r^2}{R+r}}\right) \rightarrow 0.833\; mA,$$

quantità molto minore del valore letale di $50\; mA$ e pertanto innocua per l'animale. La precedente risponde al punto (c). La tensione ΔV applicata al piccione vale:

$$\Delta V = i_2 R \rightarrow 1.25\; V,$$

mentre la potenza assorbita è data da $P = i_2 \Delta V \rightarrow 1.04\; mW$. Le precedenti rispondono al punto (d). Dalla relazione simbolica per i_2, imponendo la condizione $i_2 = i^* = 50.0\; mA$ e ricavando il valore di R, si ottiene $R = 25.0\;\Omega$ che è il valore della resistenza che causerebbe il passaggio della corrente letale i^* attraverso il piccione, cosa che risponde al punto (e). Tale valore, molto piccolo, potrebbe essere raggiunto quando uccelli di appropriate dimensioni sono bagnati abbondantemente dalla pioggia, cosa che causerebbe un passaggio di corrente attraverso le parti inumidite (molto meno resistive).

Esempio 4



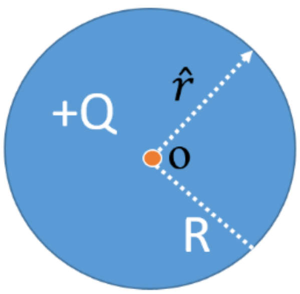
Un isolante sferico di raggio $R = 0.100\; m$ viene elettrizzato. Alla fine del processo di carica, il sistema risulta avere una carica totale positiva Q uniformemente distribuita nel volume del sistema con densità di carica costante ρ. Il modulo del campo elettrico alla distanza radiale $r = R/2$ dal centro della sfera vale $|\vec{E}| = 0.719\; N/C$.

Facendo opportuno uso del teorema di Gauss, determinare:

a) La densità di carica e la carica totale del sistema.
b) Il modulo del campo elettrico generato nel vuoto a distanza $d = 2R$ dal centro della sfera.
c) La dipendenza del campo elettrico al variare della distanza dal centro O, sia nella regione interna alla sfera che all'esterno.
d) L'intensità, direzione e verso del campo elettrico nelle immediate vicinanze della superficie esterna dell'isolante.

e) La velocità radiale minima che una particella massiva di carica negativa ($q = -1.60 \cdot 10^{-19} C$, $M = 0.911 \cdot 10^{-30} kg$) dovrebbe possedere per sfuggire al campo elettrostatico partendo dalla superficie esterna dell'isolante e giungendo ferma in un punto dello spazio a distanza infinita.

Svolgimento



Applicando il teorema di Gauss ed utilizzando una superficie gaussiana sferica concentrica con l'isolante considerato e di generico raggio r possiamo determinare il modulo del campo elettrico generato dalla distribuzione di carica positiva sia all'interno che all'esterno del sistema. Assumiamo che la carica totale sia uniformemente distribuita nel volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ della sfera di raggio R. Sotto tale ipotesi, detta $\rho = Q/V$ la densità di carica, possiamo scrivere:

$$E_r \cdot (4\pi r^2) = \frac{q(r)}{\varepsilon_0},$$

dove $q(r) = \rho \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$ rappresenta la carica racchiusa nella superficie gaussiana sferica di raggio $r \leq R$. Dalla precedente immediatamente si ottiene il modulo del campo elettrico interno alla sfera a distanza r nella forma:

$$E_r = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0},$$

mentre la direzione del campo è radiale ed uscente in modo tale che $\vec{E} = E_r \hat{r}$. Nella regione esterna alla sfera, si considera una superficie gaussiana sferica di raggio $r > R$ concentrica con la sfera isolante. Applicando il teorema di Gauss, si ottiene:

$$E_r \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

da cui segue:

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

che è indistinguibile dal campo generato da una carica puntiforme posta nell'origine. Da considerazioni di simmetria risulta inoltre $\vec{E} = E_r \hat{r}$. Quanto esposto risponde al punto (c). La densità di carica del sistema può essere calcolata a partire dall'espressione del campo elettrico interno. Procedendo in questo modo otteniamo la relazione:

$$\rho = \frac{3\varepsilon_0 E_r}{r}.$$

Dovendo la precedente valere per ogni valore di $r \leq R$, possiamo fissare $r = R/2$ e scrivere:

$$\rho = \frac{6\varepsilon_0 E_{R/2}}{R},$$

dove il secondo membro è ora espresso in termini di quantità assegnate. Dalla precedente, sostituendo i valori numerici, si ottiene $\rho = 3.82 \cdot 10^{-10} C/m^3$. La carica totale del sistema vale:

$$Q = \rho \cdot \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \rightarrow 10^7 e,$$

con $e = 1.60 \cdot 10^{-19} C$ la carica elementare. Queste valutazioni rispondono al punto (a). Il modulo del campo elettrico generato nel vuoto a distanza $d = 2R$ vale:

$$E_d = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2} \rightarrow 0.360 \frac{N}{C},$$

cosa che risponde al punto (b). L'intensità del campo elettrico nelle immediate vicinanze della superficie esterna del conduttore vale:

$$E_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \rightarrow 1.440 \frac{N}{C},$$

cosa che risponde al punto (d). La velocità radiale minima che consente ad una particella negativa ($q = -1.60 \cdot 10^{-19} C, M = 0.911 \cdot 10^{-30} kg$) di sfuggire al campo elettrostatico viene determinata mediante il teorema dell'energia cinetica dal quale risulta:

$$\int_R^\infty q E_r dr = -\frac{1}{2} M v_r^2.$$

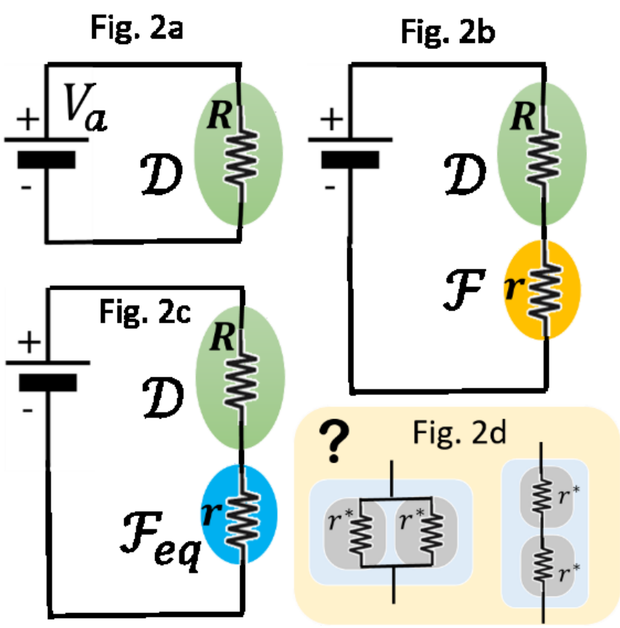
Dalla precedente otteniamo:

$$v_r = \sqrt{\frac{|q|}{M} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R}} \rightarrow 2.25 \cdot 10^5 \frac{m}{s}.$$

La velocità trovata è minore della velocità della luce. Nonostante il valore di v_r appena determinato sia enorme, l'energia richiesta per conferire tale velocità alla particella (elettrone) vale $0.230 \cdot 10^{-19} J$, cioè una frazione di elettronvolt ($1\ eV = 1.60 \cdot 10^{-19} J$).

Questa energia è tipicamente fornita nei processi di elettrizzazione. Quanto esposto risponde al punto (e).

Esempio 5



Il dispositivo $\mathcal{D}$ ha resistenza interna pari a $R = 1000\ \Omega$ ed è alimentato da un generatore che fornisce una forza elettromotrice pari a $V_a = 120\ V$ (Fig. 2a). Per evitare danni ed assicurare un corretto funzionamento, il dispositivo non deve essere attraversato da correnti superiori a $i_{max} = 0.130\ A$. Per proteggere il dispositivo da sbalzi di tensione, il costruttore raccomanda di montare in serie ad esso un fusibile $\mathcal{F}$ (Fig. 2b). Il fusibile è un componente elettronico che interrompe il passaggio di corrente quando viene attraversato per un tempo τ da correnti superiori al valore soglia i_s. Quando una corrente $i \geq i_s$ attraversa $\mathcal{F}$, esso fonde nel tempo τ necessario ad assorbire l'energia E_0 che, convertita in calore, causa la fusione dell'elemento circuitale e la conseguente apertura del circuito. Prima che fonda e durante la fase di fusione, il fusibile può essere schematizzato, in prima approssimazione, come un resistore di resistenza elettrica r. I valori E_0, i_s ed r sono dati caratteristici del particolare fusibile considerato. Se il costruttore raccomanda l'uso di un fusibile con parametri $E_0 = 0.333\ J$, $i_s = 0.130\ A$ ed $r = 200\ \Omega$, si determini:

a) La corrente circolante nel circuito in assenza del fusibile (Fig. 2a).
b) La corrente circolante nel circuito in presenza del fusibile (Fig. 2b) e la potenza dissipata dal fusibile e dal dispositivo $\mathcal{D}$, rispettivamente.
c) Qualche giorno dopo il montaggio del fusibile si verifica uno sbalzo di tensione di qualche secondo durante il quale V_a aumenta di $36\ V$. Dopo aver dimostrato che in questa situazione la corrente circolante eguaglia i_s, si determini il tempo τ che occorre al fusibile per fondere.
d) Con riferimento al precedente punto, si determini la potenza assorbita e l'energia dissipata nel fusibile nel tempo τ.
e) Per ripristinare il circuito, si vuole sostituire il fusibile danneggiato con uno di identiche caratteristiche. Ci si accorge però di poter disporre soltanto di due fusibili di identiche caratteristiche date da $E_0^* = 0.666\ J$, $i_s^* = 0.065\ A$ ed $r^* = 400\ \Omega$.

Sarebbe possibile sostituire il fusibile raccomandato dal costruttore con un circuito fatto con i due fusibili a disposizione (Fig. 2c-d) e avente corrente di soglia equivalente pari a $i_s^{eq} = 0.130\ A$? Dopo aver dimostrato che un tale collegamento esiste, si dica in quanto tempo fonderebbe il fusibile equivalente $\mathcal{F}_{eq}$ nelle condizioni descritte al punto c)?

Svolgimento

In assenza del fusibile, la corrente circolante nel circuito di Fig. 2a è pari a $i = V_a/R \rightarrow 0.120\ A$. Dopo aver monatto il fusibile (Fig. 2b), la la resistenza del circuito aumenta e conseguentemente la corrente circolante vale $i = V_a/(R + r) \rightarrow 0.100\ A$. La potenza dissipata nel fusibile può essere ottenuta dalla relazione $P_f = i^2 r \rightarrow 2.00\ W$, mentre quella dissipata nel dispositivo è data da $P_D = i^2 R \rightarrow 10.0\ W$. Durante uno sbalzo di tensione la forza elettromotrice che alimenta il circuito prende il valore $V_a^* = 156\ V$. In questa condizione la corrente circolante assume il valore:

$$i = \frac{V_a^*}{R + r} \rightarrow 0.130\ A,$$

che è proprio pari alla corrente di soglia del fusibile i_s. Il fusibile fonde non appena ha assorbito l'energia E_0. Il tempo τ necessario affinché ciò avvenga rispetta l'equazione:

$$P_f \tau = E_0 \Rightarrow \tau = \frac{E_0}{P_f} = \frac{E_0}{i^2 r} \rightarrow 0.099\ s.$$

L'energia dissipata nel fusibile vale proprio E_0, mentre la potenza dissipata vale $P_f = E_0/\tau \rightarrow 3.36\ W$. Il punto (e) ha risposta positiva se si effettua un collegamento in parallelo dei due fusibili a disposizione. In questa configurazione la resistenza equivalente dei fusibili in parallelo vale:

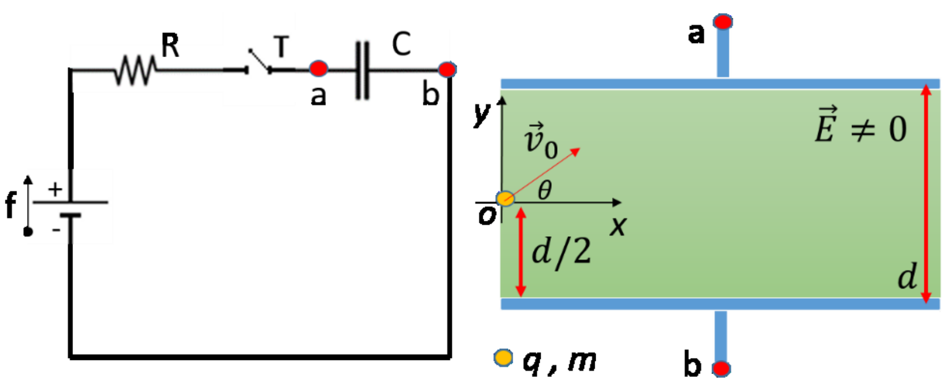
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{r^*} + \frac{1}{r^*} = \frac{2}{r^*} \Rightarrow R_{eq} = \frac{r^*}{2} \longrightarrow 200\ \Omega,$$

che è esattamente il valore di resistenza del fusibile raccomandato dal costruttore. La corrente di soglia dei due fusibili in parallelo è pari al doppio delle correnti di soglia dei fusibili componenti. L'asserto deriva dal fatto che la corrente in ingresso si ripartisce equamente tra i due fusibili. Di qui segue che il fusibile equivalente ottenuto dal parallelo dei due fusibili ha la stessa resistenza equivalente e la medesima corrente di soglia del fusibile originale. Tuttavia il parallelo dei due fusibili non è esattamente equivalente al fusibile di partenza. Infatti, il tempo di fusione in questo caso vale:

$$\tau^* = \frac{E_0^*}{r^*(i_s^*)^2} = \frac{2E_0}{(2r)\left(\frac{i_s}{2}\right)^2} = 4\frac{E_0}{r(i_s)^2} = 4\tau \rightarrow 0.396\ s.$$

Pertanto il fusibile ottenuto dal parallelo dei due fusibili a disposizione fonde in un tempo quadruplo rispetto al fusibile raccomandato dal costruttore. Questa considerazione rende sconsigliabile la sostituzione del fusibile originale con il circuito descritto nel testo.

Esempio 6



Un condensatore è costituito da due piani conduttivi di forma quadrata di lato $L = 6.00 \cdot 10^{-3}\ m$ separati da una distanza $d = \sqrt{2} \cdot 10^{-3}\ m$, essendo fatto il vuoto tra le due armature. Il condensatore è collegato, mediante il circuito resistivo mostrato in figura, al generatore ideale capace di erogare una *f.e.m.* di $f = 6.00\ V$. All'istante iniziale l'interruttore *T* viene chiuso. Trascorso un tempo adeguato, Il circuito si porta nella condizione stazionaria nella quale non fluisce più corrente nella maglia ed una certa differenza di potenziale si instaura ai capi del condensatore. Una particella di massa $m = 1{,}00 \cdot 10^{-10}\ Kg$ e carica positiva $q = 1{,}00 \cdot 10^{-8}\ C$ è immessa nella regione interposta fra le armature del condensatore con modulo della velocità iniziale $|\vec{v}_0| = 20{,}0\ m/s$. La velocità iniziale della particella forma l'angolo $\theta = 45°$ con l'asse *x* (vedi figura).

Si determini:

a) La capacità elettrica del condensatore.
b) La carica elettrica accumulata in regime stazionario sulle armature del condensatore e il modulo, la direzione e il verso del campo elettrostatico $\vec{E}$ che si instaura tra le armature del condensatore.
c) L'equazione della traiettoria della particella carica e la quota massima $y_{Max} < d/2$ raggiunta dalla particella.
d) Le coordinate del punto in cui la particella colpisce una delle due armature.
e) Il tempo necessario alla particella per raggiungere una delle due armature.

Svolgimento

La capacità di un condensatore piano si calcola a partire dalla relazione:

$$C = \varepsilon_0 \frac{L^2}{d} \to C = \left(8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}\right) \cdot \frac{(6.00 \cdot 10^{-3}\, m)^2}{\sqrt{2} \cdot 10^{-3}\, m} = 225 \cdot 10^{-15} F = 0{,}225\, pF.$$

Dopo un transiente la tensione ai capi del condensatore eguaglia quella presente ai capi del generatore. In questa situazione una carica Q è accumulata sull'armatura positiva del condensatore. Vale quindi la relazione:

$$Q = Cf \to Q = (225 \cdot 10^{-15} F) \cdot (6{,}00\, V) = 1{,}35 \cdot 10^{-12} C.$$

Con la scelta del riferimento cartesiano mostrato in figura il campo elettrico, ortogonale alle armature e uscente dall'armatura positiva, prende la forma $\vec{E} = -E\hat{y}$ con

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 L^2} = \frac{Cf}{\varepsilon_0 L^2} = \left(\varepsilon_0 \frac{L^2}{d}\right)\left(\frac{f}{\varepsilon_0 L^2}\right) = \frac{f}{d} \to E = \frac{6{,}00\, V}{\sqrt{2} \cdot 10^{-3}\, m} = 4{,}24 \cdot 10^3 \frac{V}{m}.$$

La cinematica della particella discende dall'osservazione che l'unica forza agente sulla particella carica è quella originata dal campo elettrico uniforme. Esso agisce soltanto nella direzione y e pertanto, dal secondo principio della dinamica, otteniamo:

$$a_x = 0$$
$$a_y = -\frac{qE}{m}.$$

La particella sarà animata di moto uniformemente accelerato lungo l'asse y, mentre la proiezione del moto lungo l'asse x descriverà un moto rettilineo uniforme. Si ha quindi:

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = \frac{1}{2} a_y\, t^2 + v_{0y} t \end{cases},$$

dove $v_{0x} = v_{0y} = v_0/\sqrt{2}$. L'equazione della traiettoria prende quindi la forma:

$$y = -\frac{qE}{m v_0^2}\, x^2 + x.$$

Dalle indicazioni del problema sappiamo che la particella non incontra l'armatura superiore. Pertanto la quota massima si raggiunge nel punto di massimo relativo della traiettoria parabolica. Imponendo l'annullamento della derivata prima, abbiamo:

$$y' = 0 \to -\frac{2qE}{mv_0^2}\, x + 1 = 0 \to x^* = \frac{mv_0^2}{2qE}.$$

La quota massima vale $y_M = y(x^*)$, cosa che implica:

$$y_M = \frac{mv_0^2}{4qE} \to y_M = 0{,}236 \cdot 10^{-3} m < d/2.$$

Allo stesso risultato si può giungere utilizzando la legge di conservazione dell'energia totale del sistema. Il moto avviene sotto l'influenza di forze puramente conservative e quindi possiamo eguagliare l'energia totale all'istante iniziale con quella posseduta nel punto di quota massima. Questa condizione si scrive nella forma:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + U_i = \frac{1}{2}mv_{0x}^2 + U_f,$$

dove abbiamo introdotto l'energia potenziale del campo elettrico $U_{i/f} = qV_{i/f}$. Dalla precedente otteniamo:

$$\frac{1}{2}m(v_0^2 - v_{0x}^2) = q(V_f - V_i) \to \frac{1}{2}mv_0^2\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = q(V_f - V_i)$$

$$\to \frac{1}{4}mv_0^2 = q(V_f - V_i).$$

D'altra parte sappiamo che vale la relazione:

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left[(-E\hat{y}) \cdot (y_M\, \hat{y})\right] = Ey_M.$$

Pertanto:

$$\frac{1}{4}mv_0^2 = q(V_f - V_i) \to \frac{1}{4}mv_0^2 = qEy_M \to y_M = \frac{mv_0^2}{4qE}.$$

Sappiano che la particella non colpisce l'armatura positiva. Verifichiamo che essa colpisce quella negativa. Per fare questo occorre determinare il punto di impatto risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{qE}{mv_0^2}\, x^2 + x \\ y = -\dfrac{d}{2} \end{cases}.$$

Dalla precedente otteniamo:

$$-\frac{qE}{mv_0^2}\,x^2 + x = -\frac{d}{2} \rightarrow \frac{qE}{mv_0^2}\,x^2 - x - \frac{d}{2} = 0.$$

La soluzione positiva di questa equazione vale:

$$x^* = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2qEd}{mv_0^2}}}{\frac{2qE}{mv_0^2}}$$

Osserviamo che vale la relazione:

$$y_M = \frac{mv_0^2}{4qE} \rightarrow \frac{1}{2y_M} = \frac{2qE}{mv_0^2}.$$

Alla luce della precedente e sviluppando i calcoli, possiamo scrivere:

$$x^* = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{d}{2y_M}}}{\frac{1}{2y_M}} = 2y_M\left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{2y_M}}\right) \rightarrow x^* \approx d < L$$

Pertanto le coordinate del punto di impatto risultano essere $(d, -d/2)$. Il tempo t^*necessario alla particella per raggiungere l'armatura negativa può essere calcolato a partire dall'equazione del moto lungo l'asse x. Di qui si ha:

$$x^* = v_{0x}t^* \rightarrow t^* = \frac{x^*}{v_{0x}} \rightarrow t^* = \frac{\sqrt{2}\,x^*}{v_0} \rightarrow t^* = \frac{d\,\sqrt{2}}{v_0}$$

$$\rightarrow t^* = \frac{10^{-3}m}{20{,}0\ m/s} = 50{,}0 \cdot 10^{-6}s = 50{,}0\ \mu s.$$