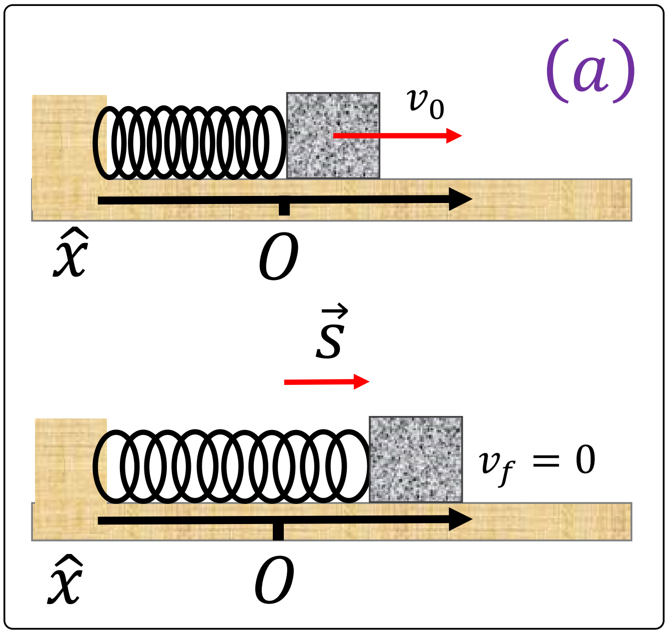
1. Il lavoro compiuto dalla forza elastica

In figura è mostrato un corpo di massa m soggetto all'azione della forza elastica e poggiato su un piano liscio. Supponiamo di voler descrivere la situazione riportata in figura alla luce dei nuovi concetti di *lavoro* ed *energia cinetica*. All'istante iniziale (pannello superiore) la molla, di costante elastica k, non è deformata e non esercita alcuna azione sul corpo. Inoltre l'energia cinetica iniziale del corpo vale



$$E_c^i = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Trascorso un opportuno intervallo di tempo (pannello inferiore), il corpo si ferma prima di invertire il suo moto e lo spostamento totale effettuato è individuato dal vettore $\vec{s}$. L'energia cinetica finale è nulla essendo tale la velocità finale $\vec{v}_f$.

Saremmo tentati di affermare che, essendo negativa la variazione di energia cinetica, la forza elastica compie lavoro resistente sul sistema. Alla fine del nostro ragionamento confermeremo la correttezza di questa affermazione. Per il momento però dobbiamo limitarci ad osservare che la situazione allo studio richiede una generalizzazione della teoria fin qui esposta. La forza elastica presenta infatti intensità variabile con la posizione e quindi non saremmo autorizzati ad utilizzare i risultati ottenuti nell'ipotesi di forza costante.

Prima di procedere ci occorre quindi dimostrare la validità del teorema dell'energia cinetica nel caso di forza variabile. Restringiamo ancora una volta le nostre considerazioni al caso unidimensionale.

Abbiamo dimostrato nel caso di forza costante che vale la seguente importante relazione:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = E_c^f - E_c^i.$$

Supponiamo adesso che la forza vari con la posizione. Sia $\vec{s}$ lo spostamento totale che si vuole considerare nel calcolo del lavoro. Suddividiamo lo spostamento totale in un numero di spostamenti elementari $\overrightarrow{s_k}$ in modo che risulti $\vec{s} = \overrightarrow{s_1} + \cdots + \overrightarrow{s_N}$. Se il numero N in cui risulta partizionato lo spostamento totale è sufficientemente grande la variazione della forza all'interno di ciascuno spostamento elementare risulta trascurabile. Pertanto ad ogni intervallo elementare è applicabile, almeno in forma approssimata, il nostro risultato valido nel caso di forza costante. Sia $\vec{F}_k$ il valore circa costante che la forza assume nel k-esimo spostamento elementare. Risulta quindi:

$$L_N \approx \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{s_1} + \cdots + \overrightarrow{F_N} \cdot \overrightarrow{s_N} = \sum_{k=1}^{N} \overrightarrow{F_k} \cdot \overrightarrow{s_k},$$

dove abbiamo indicato con L_N il lavoro determinato suddividendo in N parti lo spostamento totale. Ci aspettiamo che all'aumentare di N la stima del lavoro compiuto della forza variabile diventi sempre più accurata. Matematicamente questo richiede un processo di limite dal quale segue la definizione generale di lavoro di una forza:

$$L = \lim_{N\to\infty} L_N = \int_i^f \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}.$$

Il vettore $\overrightarrow{ds}$ rappresenta lo spostamento infinitesimo avente la proprietà:

$$\vec{s} = \int_i^f \overrightarrow{ds}.$$

D'altra parte il limite precedente può essere espresso in forma alternativa osservando che

$$L = \lim_{N\to\infty} \left(\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{s_1} + \cdots + \overrightarrow{F_N} \cdot \overrightarrow{s_N}\right).$$

Per ogni addendo della precedente vale il teorema dell'energia cinetica derivato nel caso di forza costante nella forma:

$$\overrightarrow{F_k} \cdot \overrightarrow{s_k} = E_f^k - E_i^k,$$

dove E_f^k e E_i^k rappresentano l'energia cinetica finale ed iniziale nel k-esimo spostamento elementare. Inoltre vale la relazione $E_f^k = E_i^{k+1}$, dalla quale otteniamo:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{s_1} + \cdots + \overrightarrow{F_N} \cdot \overrightarrow{s_N} &= \left(E_f^1 - E_i^1\right) + \left(E_f^2 - E_i^2\right) + \left(E_f^3 - E_i^3\right) + \cdots \left(E_f^N - E_i^N\right) \\ &= E_f^N - E_i^1.\end{aligned}$$

Il precedente risultato è determinato dalla cancellazione dei termini intermedi della somma e non dipende dal numero di partizioni dello spostamento totale. Esso vale quindi anche per $N \to \infty$. Da questa osservazione troviamo la relazione:

$$L = \int_i^f \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = E_c^f - E_c^i,$$

che generalizza al caso di forza variabile il precedente risultato.

Notiamo che la formulazione generale descrive, come caso particolare, la situazione di forza costante discussa inizialmente. Si ha infatti:

$$\int_i^f \vec{F}\cdot\overrightarrow{ds} = \vec{F}\cdot\left(\int_i^f \overrightarrow{ds}\right) = \vec{F}\cdot\vec{s}.$$

Nella precedente il verso dello spostamento infinitesimo è determinato dagli estremi di integrazione, mentre la direzione è fissata dal versore $\hat{x}$ che interviene nella scrittura dello spostamento infinitesimo $\overrightarrow{ds} = \hat{x}\,dx$. La nostra notazione vettoriale è qui ancora limitata a situazioni unidimensionali. Nel seguito ci preoccuperemo di estendere la validità del teorema alle tre dimensioni.

Abbiamo adesso lo strumento concettuale per analizzare la situazione proposta inizialmente. Calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza elastica per compiere lo spostamento totale $\hat{x}\,d$. Il calcolo esplicito mostra quanto segue:

$$L = \int_i^f \overrightarrow{F_e}\cdot\overrightarrow{dx} = \int_0^d (-kx\,\hat{x})\cdot(\hat{x}\,dx) = \int_0^d -kx\,dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_0^d = -\frac{1}{2}kd^2 < 0.$$

Abbiamo la conferma del fatto che, nella situazione descritta, la forza elastica compie lavoro resistente. D'altra parte sappiamo che la variazione di energia cinetica vale:

$$E_c^f - E_c^i = -E_c^i = -\frac{1}{2}mv_0^2.$$

Dovendo valere il teorema dell'energia cinetica, otteniamo la relazione:

$$-\frac{1}{2}kd^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2 \rightarrow \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

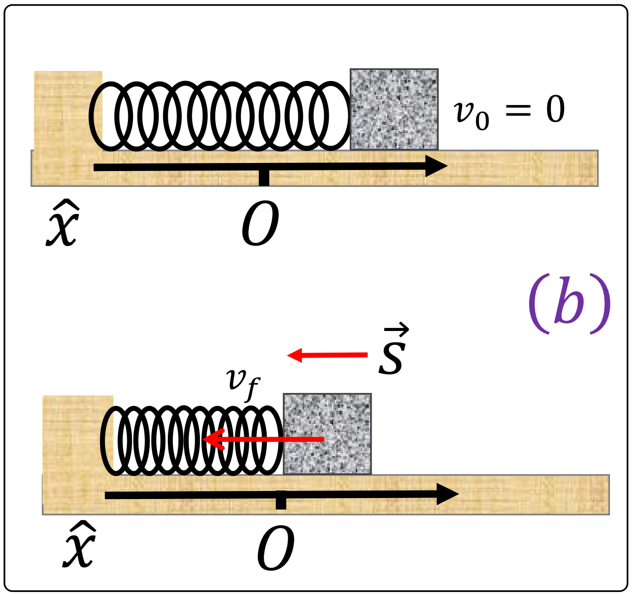
La precedente ci consente immediatamente di calcolare la deformazione subita dalla molla nell'istante finale:

$$d = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_0.$$

Analizziamo la situazione mostrata in (b) ed in particolare calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza elastica per riportare il corpo nella posizione di partenza di figura (a):

$$L = \int_i^f \overrightarrow{F_e}\cdot\overrightarrow{dx} = \int_d^0 (-kx\,\hat{x})\cdot(\hat{x}\,dx) = \int_d^0 -kx\,dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_d^0 = \frac{1}{2}kd^2 > 0,$$

cosa che implica che la forza elastica compie lavoro motore. Inoltre la variazione di energia cinetica vale:



$$E_c^f - E_c^i = E_c^f = \frac{1}{2} m v_f^2.$$

Dal teorema dell'energia cinetica otteniamo la relazione

$$\frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} m v_f^2,$$

dalla quale risulta che

$$|v_f| = \sqrt{\frac{k}{m}}\, d.$$

Si verifica poi facilmente che $|v_f| = v_0$. L'analisi condotta ha mostrato che il lavoro della forza elastica vale

$$\begin{aligned} (a):\quad & L = -\frac{1}{2} k d^2 \quad resistente \\ (b):\quad & L = \frac{1}{2} k d^2 \quad motore \end{aligned}.$$

La somma del lavoro compiuto nelle due circostanze è nullo.

2. Teorema dell'energia cinetica

Dimostriamo il teorema dell'energia cinetica nella sua forma più generale. Scriviamo il secondo principio della dinamica in forma differenziale:

$$\vec{F} dt = m\, d\vec{v},$$

dove $\vec{F}$ rappresenta la risultante delle forze applicate al punto materiale di massa m nell'intervallo di tempo compreso tra t e $t + dt$. Moltiplichiamo scalarmente ambo i membri per $\vec{v}$, cosa che ci porta a scrivere la relazione:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v}.$$

Riconosciamo lo spostamento infinitesimo $\overrightarrow{ds} = \vec{v} dt$ e il contributo elementare al lavoro della forza nella forma:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = dL.$$

Integrando su un assegnato percorso nello spazio avente inizio in A e fine in B, otteniamo:

$$L = \int_A^B dL = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_A^B m\vec{v} \cdot d\vec{v}.$$

L'ultimo integrale può essere risolto a vista osservando che:

$$d\left(\frac{1}{2} m\, \vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \frac{1}{2} m\, d(\,\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} m\, d\left(\, v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$
$$= \frac{1}{2} m \left(2\, v_x\, dv_x + 2\, v_y\, dv_y + 2\, v_z\, dv_z\right) = m\, \vec{v} \cdot d\vec{v}.$$

Dalla precedente possiamo immediatamente scrivere:

$$\int_A^B m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_A^B d\left(\frac{1}{2} m\, \vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \left[\frac{1}{2} m\, \vec{v} \cdot \vec{v}\right]_A^B = \frac{1}{2} m\, |\overrightarrow{v_B}|^2 - \frac{1}{2} m\, |\overrightarrow{v_A}|^2,$$

cosa che implica la relazione finale:

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{1}{2} m\, |\overrightarrow{v_B}|^2 - \frac{1}{2} m\, |\overrightarrow{v_A}|^2.$$

Notiamo che l'energia cinetica nel caso tridimensionale dipende dal modulo quadro del vettore velocità secondo la relazione:

$$E_c = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right).$$

Il teorema generale si enuncia nel modo seguente. *Il lavoro compiuto dalla risultante delle forze agenti su un punto materiale lungo un arco di traiettoria AB è pari alla variazione di energia cinetica sperimentata dal corpo tra i menzionati punti.*

E' qui importante precisare che il teorema vale per la risultante di tutte le forze applicate al punto materiale. Il lavoro della risultante dipende, in generale, dal particolare percorso nello spazio scelto per congiungere i punti A e B.

3. La potenza

La rapidità con la quale viene compiuto un certo lavoro meccanico prende il nome di potenza. Supponiamo che una forza generica $\vec{F}$ compia nel tempo Δt il lavoro L. La potenza media erogata vale:

$$\overline{P} = \frac{L_{A\to B}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_A^B \vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}.$$

Oltre alla potenza media è anche possibile definire la potenza istantanea. E' semplice intuire che la potenza istantanea è definita come segue:

$$P = \frac{dL}{dt}.$$

Questa relazione può essere scritta in forma differenziale come $dL = P\,dt$, dalla quale risulta che la potenza istantanea è il coefficiente di proporzionalità tra il lavoro elementare dL e l'intervallo di tempo infinitesimo dt nel quale esso viene compiuto. D'altra parte sappiamo che vale la relazione

$$dL = \vec{F}\cdot\vec{v}dt,$$

dalla quale immediatamente segue:

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v}.$$

Nel SI la potenza è misurata in watt (W), unità che corrisponde all'erogazione di $1\,J$ nel tempo di $1\,s$.

4. L'energia potenziale e l'energia meccanica totale

Torniamo ad analizzare il caso di un corpo soggetto alla forza elastica. In particolare, vogliamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elastica quando viene considerato un generico spostamento. Siano A e B il punto iniziale e finale dello spostamento considerato. Possiamo scrivere quanto segue:

$$L = \int_A^B \overrightarrow{F_e}\cdot\overrightarrow{dx} = \int_{x_A}^{x_B}(-kx\,\hat{x})\cdot(\hat{x}\,dx) = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_A}^{x_B} = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2.$$

Inoltre, dal teorema dell'energia cinetica sappiamo che vale la relazione:

$$L = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2.$$

Eguagliando i secondi membri delle precedenti otteniamo la relazione:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2,$$

la quale può essere riscritta nella forma:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kx_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}kx_A^2.$$

La precedente mostra che durante il moto la quantità

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

è conservata (cioè $E_A = E_B$ per ogni scelta di A e B). Questa quantità prende il nome di *energia meccanica totale* ed è costituita di due addendi. Il primo è l'energia cinetica del corpo in questione, mentre il secondo addendo è una forma di energia legata alla posizione assunta dal corpo nello spazio. Questa energia configurazionale viene detta *energia potenziale*.

Esprimiamo il lavoro della forza elastica in termini dell'energia potenziale ottenendo:

$$L = \int_A^B \overrightarrow{F_e} \cdot \overrightarrow{dx} = -\big(U(x_B) - U(x_A)\big),$$

dove abbiamo definito *l'energia potenziale elastica*

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Notiamo che il lavoro della forza elastica dipende separatamente da una funzione di x_B e di x_A, ma non dal percorso seguito. Nelle situazioni in cui questo accade, è possibile introdurre una funzione energia potenziale associata alla forza in esame. Le forze che ammettono un potenziale si dicono *forze conservative*. Chiaramente non tutte le forze sono conservative. Dalla definizione segue che *il lavoro di una forza conservativa su un percorso chiuso è nullo*. Un percorso si dice chiuso quando il punto iniziale coincide con quello finale. Nel caso unidimensionale un semplice percorso chiuso è del tipo $(A \rightarrow B) \cup (B \rightarrow A)$.

Dimostriamo, nel caso unidimensionale, che la conoscenza della funzione potenziale dà precise informazioni sulla forza conservativa ad essa associata. Sia $\vec{F}$ una generica forza conservativa e $U(x)$ il suo potenziale. Il lavoro infinitesimo di detta forza vale:

$$dL = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = -[U(x + dx) - U(x)].$$

Inoltre abbiamo:

$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = (F\,\hat{x}) \cdot (\hat{x}dx) = F\,dx,$$

che immediatamente implica

$$F\,dx = -[U(x+dx) - U(x)] = -\frac{dU}{dx}dx.$$

Uguagliando i primi membri otteniamo quanto cercato:

$$\vec{F} = \left(-\frac{dU}{dx}\right)\hat{x}.$$

Il potenziale di una forza conservativa è definito a meno di una costante additiva, in quanto in fisica sono rilevanti soltanto le differenze di potenziale. Per dimostrarlo basta introdurre due potenziali che differiscano soltanto per l'aggiunta della costante c. Siano essi $U_1(x) = U(x)$ e $U_2 = U(x) + c$. Si verifica facilmente che i due potenziali, sebbene differenti, danno luogo alla stessa forza:

$$\vec{F} = \left(-\frac{dU_1}{dx}\right)\hat{x} = \left(-\frac{dU_2}{dx}\right)\hat{x} = \left(-\frac{dU}{dx}\right)\hat{x}.$$

Nel corso della nostra esposizione abbiamo incontrato un'altra forza conservativa: la forza peso. Dimostriamo la conservatività di questa forza e determiniamone il potenziale. Sia la forza peso definita come $\vec{P} = -mg\,\hat{z}$. Calcoliamo il lavoro tra due generiche posizioni dell'asse z. Otteniamo quanto segue:

$$L = \int_A^B \vec{P}\cdot\overrightarrow{dz} = \int_{z_A}^{z_B}(-mg\,\hat{z})\cdot(\hat{z}\,dz) = -mg\int_{z_A}^{z_B}dz = [-mg\,z]_{z_A}^{z_B}$$
$$= -mg\,z_B + mgz_A = -(mg\,z_B - mgz_A).$$

Dalla precedente riconosciamo l'energia potenziale gravitazionale nella forma:

$$U(z) = mg\,z.$$

Utilizzando il teorema dell'energia cinetica otteniamo la conservazione dell'energia meccanica totale nella forma:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mg\,z_B + mgz_A \rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 + mg\,z_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A.$$

Pertanto durante il moto sotto l'azione della sola forza peso l'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mg\,z$$

risulta conservata.

Abbiamo quindi trovato che la forza elastica e la forza peso sono forze conservative. Esse ammettono una funzione potenziale che le identifica univocamente. Si ha infatti per la forza elastica:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$
$$\overrightarrow{F_e} = \left(-\frac{dU}{dx}\right)\hat{x} = -\hat{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx\,\hat{x}.$$

Per quanto riguarda la forza peso abbiamo:

$$U(z) = mg\,z$$
$$\vec{P} = \left(-\frac{dU}{dz}\right)\hat{z} = -\hat{z}\frac{d}{dz}(mgz) = -mg\,\hat{z}.$$

Inoltre, nota l'espressione di una assegnata forza conservativa $\vec{F}$ in una dimensione, se ne può determinare il potenziale utilizzando la relazione:

$$U(x) = -\int_{x_A}^{x}\vec{F}\cdot\overrightarrow{dx'} + U(x_A).$$

Un'analoga espressione vale in tre dimensioni.