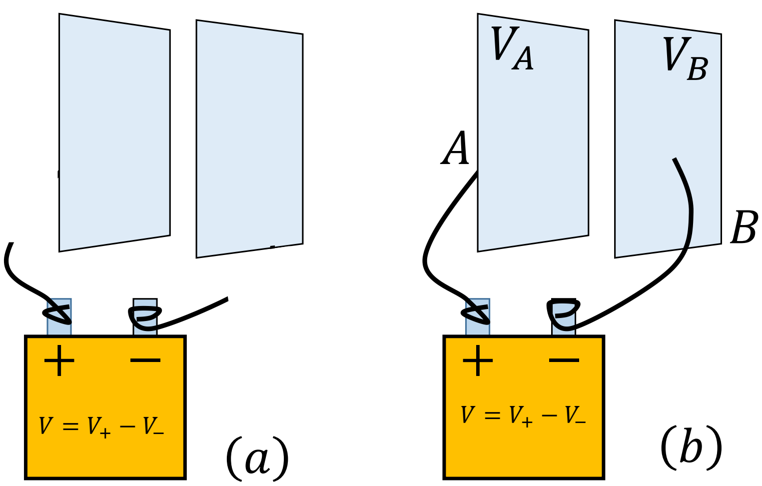
1. Circuito di carica di un condensatore

Abbiamo detto in precedenza che per poter ottenere una distribuzione di carica sulle armature di un condensatore piano è necessaria l'azione di un agente esterno che compia lavoro contro le forze del campo elettrico.

Questo agente esterno è un dispositivo che viene detto *generatore di tensione*. Un generatore di tensione (*batteria*) è un dispositivo che mantiene una fissata differenza di potenziale (*tensione*) tra due punti detti *poli del generatore*. La differenza di potenziale è mantenuta costante a spese dell'energia chimica delle reazioni che avvengono all'interno del generatore. I poli del generatore sono delle regioni conduttive a differente potenziale. Il *polo a potenziale maggiore viene detto polo positivo*, mentre quello *a potenziale minore è detto polo negativo*.

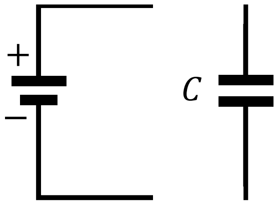


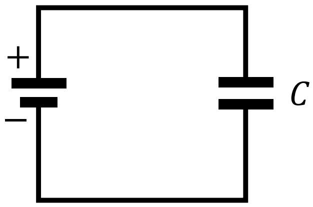
Il condensatore può essere caricato connettendolo ad un generatore di tensione mediante un *circuito elettrico*. Un circuito elettrico è un percorso conduttivo chiuso attraverso il quale le cariche elettriche possono spostarsi.

Analizziamo il *circuito capacitivo* mostrato in figura. Esso è costituito da un generatore di tensione collegabile tramite *fili conduttivi ideali* alle armature del condensatore. Supponiamo il condensatore inizialmente scarico. In questa condizione non è presente alcun accumulo di carica sulle armature. Nel momento in cui i fili conduttivi sono collegati alle armature del condensatore, gli elettroni sull'armatura A migrano verso il polo positivo del generatore, mentre un analogo numero di cariche negative va a depositarsi sull'armatura B abbandonando il polo negativo. Quando il circuito è costituito di fili conduttivi ideali, questo processo risulta essere istantaneo. Nei conduttori reali, esso dura un certo tempo e termina quando la tensione ai capi del condensatore eguaglia quella ai capi del generatore. Al termine del processo, l'armatura connessa al polo positivo ha accumulato la carica positiva

$$Q = C(V_A - V_B),$$

mentre $V_A - V_B$ eguaglia la tensione V ai capi del generatore. La carica $-Q$ è accumulata sull'armatura negativa.

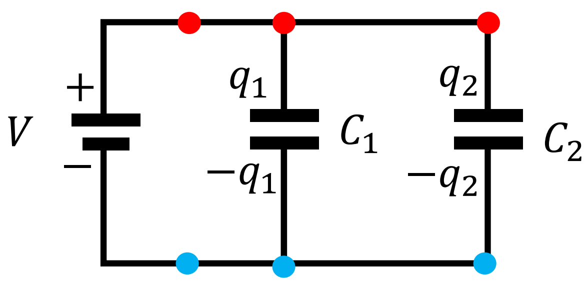


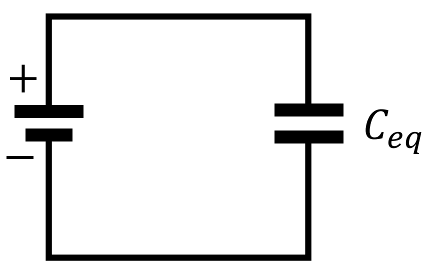


2. Collegamento di condensatori in serie e parallelo

Il circuito analizzato per la carica di un condensatore ammette una semplice rappresentazione circuitale nella quale il generatore, il condensatore ed i fili conduttivi ideali sono rappresentati mediante simboli convenzionali. Quando in un circuito puramente capacitivo sono presenti più condensatori ha senso chiedersi quale sia la tensione ai capi di questi elementi circuitali e quale sia la carica depositata sulle armature di detti componenti. La risposta a queste domande dipende da vari fattori ed in particolare dal tipo di connessione degli elementi circuitali. Si osserva inoltre che il collegamento di condensatori secondo assegnate geometrie si comporta come un condensatore equivalente di opportuna capacità elettrica. Analizziamo alcuni esempi rilevanti.

Collegamento di condensatori in parallelo





Supponiamo di voler analizzare il circuito capacitivo in figura. Esso è formato dal collegamento in parallelo di due capacitori aventi capacità elettrica C_1 e C_2, rispettivamente. A causa dell'idealità dei fili di collegamento, i punti segnati con lo stesso colore si trovano allo stesso valore di potenziale elettrico. Da questo segue che la differenza di potenziale ai capi dei due condensatori assume lo stesso valore ed è pari alla tensione V ai capi del generatore. La carica accumulata sulle armature positive dei condensatori vale:

$$q_1 = C_1 V$$
$$q_2 = C_2 V.$$

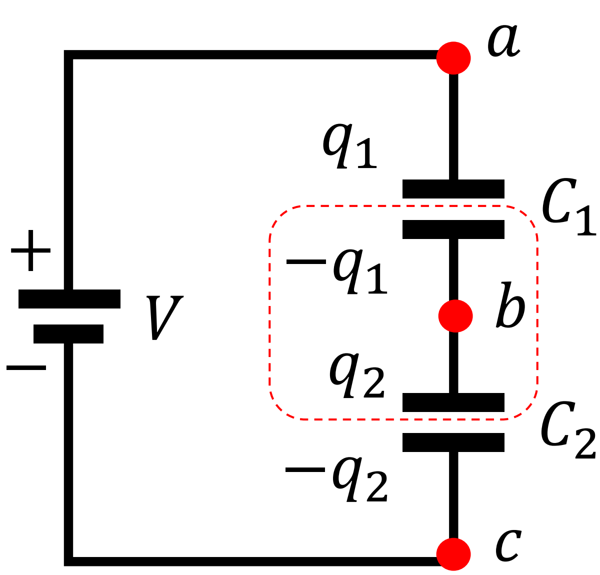
Sommando membro a membro le precedenti otteniamo la relazione:

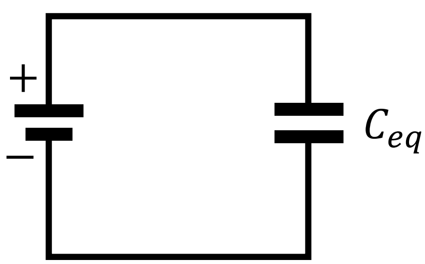
$$q_1 + q_2 = C_1 V + C_2 V.$$

Osservando che $q = q_1 + q_2$ è la carica totale positiva accumulata sulle armature dei due condensatori, è possibile riscrivere la precedente nella forma:

$$q = C_{eq} V,$$

dove $C_{eq} = C_1 + C_2$. Dalla precedente segue che il collegamento di condensatori in parallelo può essere sostituito da un circuito equivalente contenente un unico condensatore di capacità pari alla somma delle capacità dei singoli condensatori. Il discorso può essere generalizzato al parallelo di un numero qualsiasi di capacitori di capacità $C_1, \ldots, C_N$. La capacità equivalente in questo caso sarà data dalla relazione $C_{eq} = C_1 + \cdots + C_N$.





Collegamento di condensatori in serie

Le equazioni che definiscono le grandezze elettriche del circuito mostrato in figura sono le seguenti:

$$\begin{gathered} q_1 = C_1(V_a - V_b) \\ q_2 = C_2(V_b - V_c) \\ q_2 - q_1 = 0 \\ V = (V_a - V_b) + (V_b - V_c) \end{gathered}.$$

Le prime due equazioni rappresentano le relazioni carica-tensione dei due condensatori. La terza implica che la regione tratteggiata, se inizialmente neutra, deve permanere in uno stato neutro. L'ultima relazione prescrive che la somma delle cadute di potenziale ai capi dei condensatori deve eguagliare la caduta di potenziale totale. Quest'ultima deve poi risultare uguale alla tensione ai capi del generatore.

Osservando che $q_2 = q_1$, possiamo scrivere le due relazioni:

$$\begin{cases} q_1 = C_1(V_a - V_b) \\ q_1 = C_2(V_b - V_c) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_a - V_b = \dfrac{q_1}{C_1} \\ V_b - V_c = \dfrac{q_1}{C_2} \end{cases}$$

mentre $V = V_a - V_c$. Sommando membro a membro le precedenti otteniamo:

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1}{C_2} = V_a - V_b + V_b - V_c = V.$$

La precedente si riscrive nella forma:

$$q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = V \rightarrow \frac{q_1}{C_{eq}} = V \rightarrow q_1 = C_{eq}V,$$

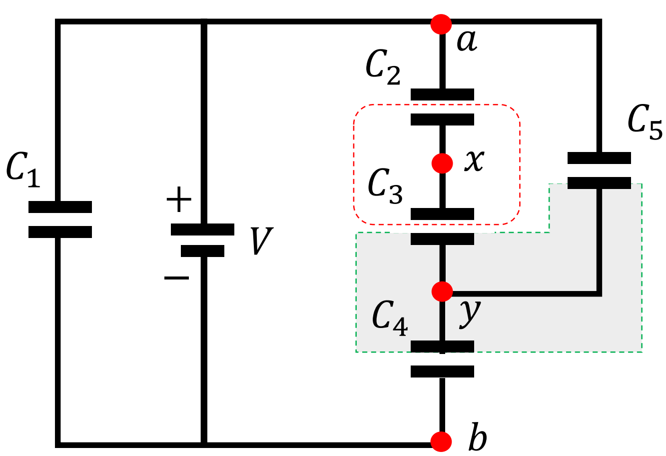
dove la capacità del circuito equivalente vale:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Il discorso può essere generalizzato al collegamento in serie di un numero qualsiasi di capacitori di capacità $C_1, \dots, C_N$. La capacità equivalente in questo caso sarà data dalla relazione

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_N}.$$

Esercizio

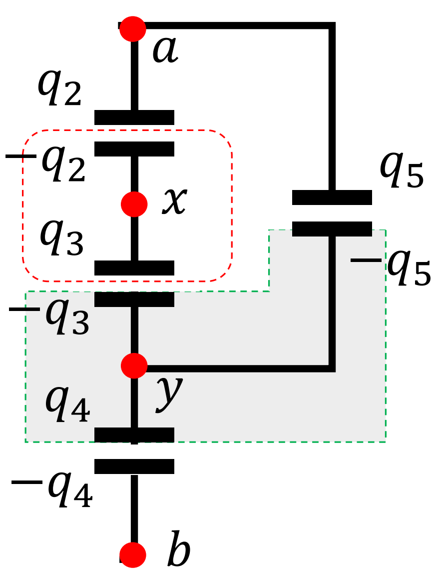


Nel circuito puramente capacitivo mostrato in figura un generatore mantiene una differenza di potenziale ai suo capi pari a $10{,}0\,V$. Tutti i condensatori hanno identica capacità elettrica pari a $10{,}0\,\mu F$. Quanto vale la carica su C_1 e su C_2?

La carica sul condensatore C_1 vale semplicemente:

$$q_1 = C_1 V \rightarrow 100\,\mu C.$$

Il calcolo della carica sul condensatore C_2 richiede maggiore attenzione. Le equazioni che caratterizzano le grandezze elettriche del circuito sono le seguenti:



$$\begin{aligned} q_2 &= C(V_a - V_x) \\ q_3 &= C(V_x - V_y) \\ q_4 &= C(V_y - V_b) \\ q_5 &= C(V_a - V_y) \end{aligned}.$$

Inoltre la neutralità delle regioni evidenziate in figura impone i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} -q_2 + q_3 &= 0 \\ -q_3 - q_5 + q_4 &= 0 \end{aligned}.$$

Abbiamo 6 equazioni in 6 incognite. Utilizzando le ultime due relazioni possiamo scrivere quanto segue:

$$\begin{cases} q_2 = C(V_a - V_x) \\ q_2 = C(V_x - V_y) \\ q_4 = C(V_y - V_b) \\ q_4 - q_2 = C(V_a - V_y) \end{cases},$$

che è un sistema di 4 equazioni in 4 incognite. Sommando le prime tre equazioni otteniamo:

$$2q_2 + q_4 = C(V_a - V_b).$$

La somma delle ultime due equazioni restituisce la relazione:

$$2q_4 - q_2 = C(V_a - V_b).$$

Le precedenti relazioni costituiscono un sistema di due equazioni e due incognite:

$$\begin{cases} 2q_2 + q_4 = C(V_a - V_b) \\ 2q_4 - q_2 = C(V_a - V_b) \end{cases}.$$

Moltiplicando la prima equazione per un fattore 2 e la seconda per -1 otteniamo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} 4q_2 + 2q_4 = 2C(V_a - V_b) \\ -2q_4 + q_2 = -C(V_a - V_b) \end{cases}.$$

Sommando membro a membro le precedenti otteniamo:

$$5q_2 = C(V_a - V_b) \rightarrow q_2 = \frac{C(V_a - V_b)}{5}.$$

Pertanto la carica q_2 vale:

$$q_2 = \frac{C(V_a - V_b)}{5} = \frac{(10{,}0 \cdot 10^{-6})(10{,}0)}{5} C = 20{,}0 \cdot 10^{-6} C = 20{,}0\ \mu C.$$

3. La corrente elettrica nei conduttori metallici

I circuiti puramente capacitivi sono sistemi elettrostatici nei quali le cariche risultano in equilibrio. Esistono tuttavia situazioni nelle quali si ha moto di cariche. In particolare abbiamo visto che un generatore di tensione può fare in modo che una certa carica elettrica si depositi sulle armature di un condensatore. Questo processo richiede che una certa quantità di carica si sposti attraversando la sezione del conduttore. *La quantità di carica che fluisce per unità di tempo attraverso una data sezione del conduttore è detta corrente elettrica.* In particolare quando la carica infinitesima dQ attraversa la sezione del conduttore in un intervallo di tempo infinitesimo dt si dice che il conduttore è attraversato dalla corrente elettrica

$$i = \frac{dQ}{dt}.$$

Nel SI l'unità di misura della corrente elettrica è l'Ampère (A) definito dall'equazione dimensionale:

$$1A = \frac{1C}{1s}.$$

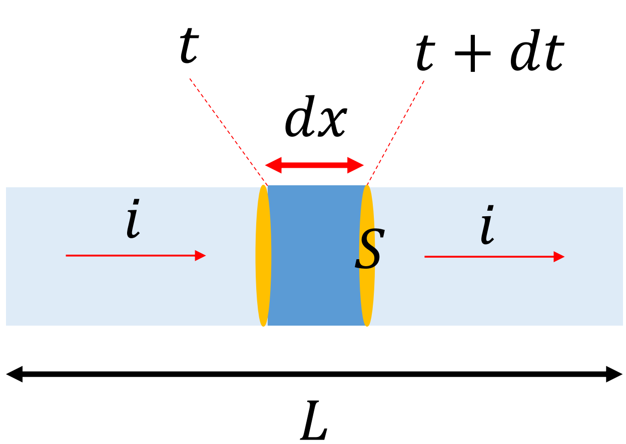
La densità di corrente (supposta uniforme) che attraversa una sezione S di un conduttore è definita come:

$$J = \frac{i}{S}.$$

Ci chiediamo quale sia la natura microscopica della corrente elettrica sopra definita. Per rispondere a questa domanda, supponiamo che i portatori di carica (elettroni) abbiano una densità pari a

$$n = \frac{N}{V},$$

dove N rappresenta il numero di portatori contenuti nel conduttore di volume V del conduttore. Sia inoltre $V = SL$, dove S è la sezione del conduttore ed L la sua lunghezza (conduttore cilindrico). Supponiamo che i portatori procedano con *velocità di deriva* costante v_d parallela all'asse del conduttore. In un intervallo infinitesimo dt verrà percorso lo spazio $dx = v_d\, dt$. Pertanto il numero di portatori che attraversa la sezione S in dt è pari alla quantità:



$$dN = nS\, dx = nSv_d\, dt.$$

Inoltre la carica infinitesima che attraversa S vale:

$$dQ = q\, dN = q\, nSv_d\, dt.$$

Dalla precedente segue immediatamente:

$$\frac{dQ}{dt} = q\, nSv_d \equiv i,$$

dove q rappresenta la carica dei portatori. Inoltre la densità di corrente vale $J = nqv_d$. In termini più rigorosi, la densità di corrente è il vettore $\vec{J} = nq\vec{v}_d$, mentre la corrente è il flusso di tale vettore attraverso la sezione orientata secondo la relazione:

$$i = \vec{J} \cdot \vec{S},$$

con $\vec{S} = S\,\hat{n}$. Se la densità di corrente non è uniforme sulla sezione del conduttore, la precedente deve essere generalizzata e si ha:

$$i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

Abbiamo quindi dimostrato che la corrente elettrica è legata alla velocità dei portatori di carica ed alla loro densità. Inoltre, in condizioni elettrostatiche, si ha $J = 0$ in quanto $v_d = 0$.

Infatti, da un punto di vista microscopico ed in condizioni di equilibrio, il moto dei portatori di carica è completamente casuale, cosa che rende la velocità media v_d dei portatori nulla.

Occorre quindi capire cosa origini una velocità dei portatori diversa da zero. Abbiamo fatto esperienza del fatto che una differenza di potenziale genera una corrente, almeno *transiente*, nei circuiti capacitivi. Inoltre, una differenza di potenziale origina un campo elettrico. Potremmo quindi ipotizzare che v_d sia originata dalla presenza di un campo elettrico all'interno del conduttore. Tale campo non è originato da cariche statiche (abbiamo visto che in quel caso il campo interno a un conduttore deve essere nullo) ma è prodotto dal generatore di tensione a spese delle reazioni elettrochimiche che hanno luogo al suo interno.

Ogni singolo portatore soggetto a un campo elettrico $\vec{E} = E\,\hat{x}$ si muoverebbe di moto uniformemente accelerato con accelerazione pari a

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}.$$

D'altra parte, se questa fosse la situazione, la velocità dei portatori aumenterebbe nel tempo indefinitamente. Questo non succede nei materiali reali. Infatti il moto degli elettroni all'interno di un metallo è perturbato da interazioni casuali con variabili dinamiche legate al reticolo (vibrazioni reticolari). Possiamo pensare a queste interazioni come a processi di urto. In questi processi la memoria dello stato cinematico della particella prima dell'urto viene completamente persa, mentre risulta in media nulla la velocità con la quale l'elettrone emerge dal tipico evento di urto. Se il tempo medio che intercorre tra due urti successivi è pari a τ, allora la velocità di deriva sarà data dalla relazione $\vec{v}_d \approx \vec{a}\,\tau$. Queste considerazioni spiegano come mai la velocità degli elettroni in presenza del campo elettrico rimane limitata e non cresce indefinitamente nel tempo. Pertanto la densità di corrente può essere messa in relazione con il campo elettrico che la genera:

$$J = nqv_d = nq\,a\,\tau = nq\left(\frac{qE}{m}\right)\tau = \left(\frac{n\,q^2\tau}{m}\right)E.$$

Ripristinando i segni di vettore possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \vec{J} = \sigma\vec{E} \\ \sigma = \dfrac{n\,q^2\tau}{m}, \end{cases}$$

nella quale abbiamo introdotto la *conduttività elettrica* σ, mentre il suo inverso $\rho = 1/\sigma$ è detta *resistività*. Come intuibile, la conduttività (resistività) è una caratteristica intrinseca del materiale considerato. La conduttività di un materiale dipende dalla densità dei portatori, alla massa di questi e dal tempo medio tra due eventi di urto. Questo parametro dipende dalla temperatura. Nei metalli la conduttività diminuisce all'aumentare della temperatura. In termini della resistività possiamo scrivere:

$$\vec{E} = \rho\,\vec{J}.$$

La precedente è la forma locale della *legge di Ohm*. Essa mostra che un campo elettrico può esistere in un conduttore soltanto in presenza di una corrente, ossia in condizioni di *non equilibrio*. Inoltre, in condizioni elettrostatiche il campo elettrico interno ad un conduttore deve necessariamente essere nullo. I vettori $\vec{E}$ e $\vec{J}$ sono paralleli. D'altra parte la relazione che sussiste tra la velocità di deriva e il campo elettrico

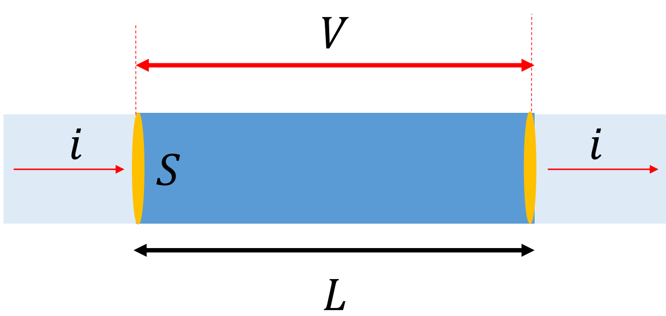
$$\vec{v}_d = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$$

mette in evidenza il fatto che portatori con carica negativa acquisiscono una velocità di deriva antiparallela al campo elettrico che la genera. In questa situazione, la velocità di deriva è anche antiparallela al vettore densità di corrente. Pertanto *il verso della corrente generata da un campo elettrico coincide con quello della velocità di una carica positiva che si muove sotto l'effetto di detto campo.* Pertanto la corrente scorre dal punto a potenziale maggiore a quello a potenziale minore.

La legge di Ohm in forma locale può essere utilizzata per ricavare una relazione tra la tensione V tra due punti distanti L di un conduttore metallico e la corrente i che lo attraversa. Osserviamo che valgono le relazioni:

$$\begin{cases} J = \dfrac{i}{S} \\ |\vec{E}| = \dfrac{V}{L} \\ \vec{E} = \rho\,\vec{J} \end{cases}.$$

Utilizzando le prime due nella terza, si ottiene:



$$\frac{V}{L} = \rho\frac{i}{S} \rightarrow V = \left(\rho\frac{L}{S}\right) i.$$

Il risultato precedente può essere scritto nella forma seguente:

$$\begin{cases} V = Ri \\ R = \rho\dfrac{L}{S} \end{cases},$$

che è la forma più nota della legge di Ohm. Nei conduttori ohmici (quelli che obbediscono alla legge di Ohm) l'applicazione di una tensione genera una corrente ad essa proporzionale. La costante di proporzionalità R è detta *resistenza elettrica*. La resistenza elettrica, che dipende dalle caratteristiche geometriche del conduttore oltre che da quelle intrinseche, si misura in Ohm (Ω) e si ha l'equazione dimensionale:

$$1\Omega = \frac{1V}{1A}.$$

La resistenza elettrica dipende dalla temperatura tramite la resistività. Per temperature prossime a temperatura ambiente, la resistività aumenta linearmente con la temperatura. Infatti con l'aumentare della temperatura l'influenza delle vibrazioni reticolari sul moto dei portatori di carica aumenta e così il tempo medio τ fra due urti successivi diminuisce. All'aumentare della frequenza delle interazioni portatori-reticolo la velocità di deriva si riduce e così pure la corrente che attraversa il conduttore.

I conduttori possono essere caratterizzati in base al valore della loro resistività elettrica. Ottimi conduttori sono caratterizzati da bassi valori di resistività, mentre gli isolanti presentano alti valori di resistività.

Esistono materiali che al di sotto di una certa temperatura, detta *temperatura critica*, presentano valori di resistenza trascurabili. Questi materiali sono detti *superconduttori* e le loro proprietà discendono dalla meccanica quantistica. Questi materiali sono utilizzati per la creazione di *computer quantistici*.

4. Considerazioni energetiche sul moto dei portatori di carica in un conduttore ohmico

I portatori di carica soggetti all'azione del campo elettrico e all'interazione con il reticolo si muovono a velocità costante. Questo implica che i gradi di libertà reticolari originano azioni meccaniche di natura dissipativa. Questa visione può essere resa rigorosa modellando le azioni reticolari mediante una forza di attrito proporzionale alla velocità dei portatori (attrito del mezzo). Procedendo in questo modo, dal secondo principio della dinamica, otteniamo:

$$ma = -\frac{mv}{\tau} + qE.$$

La precedente equazione differenziale ammette una soluzione stazionaria. Infatti dopo un tempo dell'ordine di τ l'accelerazione diviene trascurabile e si ottiene la relazione asintotica:

$$-\frac{mv}{\tau} + qE \approx 0,$$

dalla quale si ha:

$$v_{eq} = \frac{q\tau E}{m}.$$

La velocità v_{eq} rappresenta proprio la velocità di deriva dei portatori di carica. Da queste considerazioni comprendiamo che il moto dei portatori di carica origina dal bilanciamento tra l'energia fornita dal campo elettrico e quella dissipata dalle azioni reticolari. Ci possiamo chiedere quale sia la potenza erogata dal campo elettrico per sostenere una certa corrente. Per fare questa valutazione ci basta considerare il lavoro elementare dL che il campo elettrico compie per spostare di dx la carica qN racchiusa in un volume SL. Il lavoro elementare sopra richiamato vale:

$$dL = qN\,E\,dx = qN\,E\,v_d\,dt = nqv_dE\,SLdt = JS\,EL\,dt = iV\,dt.$$

Dalla precedente riconosciamo immediatamente la potenza nella forma:

$$P = iV,$$

che rappresenta la potenza erogata dal generatore (responsabile del campo elettrico). Nel caso di un conduttore ohmico la precedente prende la forma:

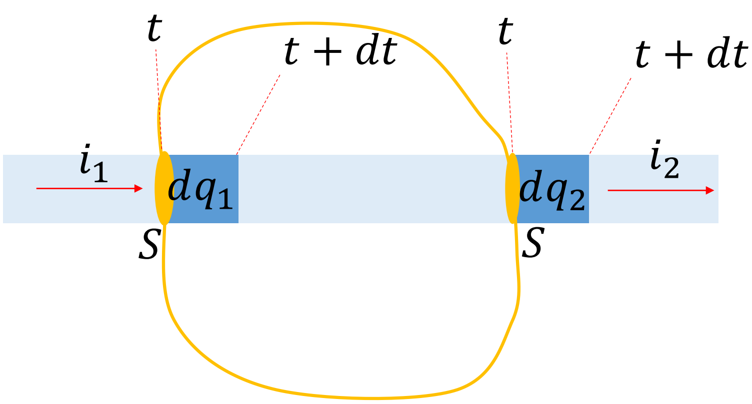
$$P = i^2 R = \frac{V^2}{R}.$$

La potenza erogata dal generatore è completamente dissipata dall'interazione tra i portatori di carica ed il reticolo cristallino del conduttore. La potenza dissipata è quindi pari a $-iV$.

L'energia erogata dal generatore in un certo intervallo di tempo Δt vale:

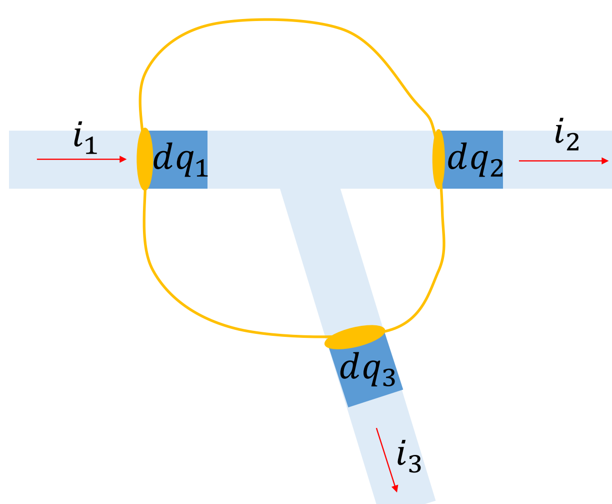
$$E = \int_0^{\Delta t} iV\, dt,$$

espressione che nel caso in cui le variabili risultino indipendenti dal tempo si riduce alla relazione $E = iV\, \Delta t$.



5. Conseguenze della conservazione della carica elettrica

Dimostriamo che la corrente che attraversa un conduttore rettilineo assume lo stesso valore in ogni punto del conduttore. Consideriamo una superficie chiusa che racchiuda una arbitraria porzione di conduttore. La superficie chiusa interseca il conduttore in due regioni di area uguale e pari ad S. Supponiamo che la corrente entrante sia i_1 mentre quella uscente sia i_2. Nell'intervallo infinitesimo dt la carica infinitesima entrante nella superficie chiusa vale $dq_1 = i_1\, dt$, mentre la carica uscente vale $dq_2 = i_2\, dt$. Non essendovi *pozzi o sorgenti di carica* nella regione considerata e assumendo una situazione stazionaria, deve necessariamente valere la condizione $dq_1 = dq_2$, che immediatamente implica che $i_1 = i_2$.



Consideriamo la situazione di un conduttore a forma di Y. Generalizzando gli argomenti prima esposti possiamo scrivere:

$$dq_1 = dq_2 + dq_3 \rightarrow i_1 = i_2 + i_3.$$

La precedente è una forma particolare della più generale *legge di Kirchhoff per le correnti*. Essa afferma che *la somma delle correnti entranti in un nodo eguaglia la somma delle correnti uscenti*. Questa relazione è di fondamentale importanza nell'analisi dei circuiti elettrici.