

1. Cenni di analisi circuitale

Fino a questo punto abbiamo analizzato circuiti a una maglia. Per questa speciale classe di circuiti l'applicazione delle leggi di Kirchhoff è immediata e consente di determinare tutte le grandezze circuitali di interesse (correnti e tensioni). Talvolta, come abbiamo visto nel caso di resistori in parallelo, siamo riusciti a ricondurre un circuito a due maglie ad uno equivalente contenente un'unica maglia. Questo è stato possibile ricorrendo al concetto di resistenza equivalente. Tuttavia questa procedura non è sempre utilizzabile. Scopo dei successivi paragrafi è mostrare un esempio molto semplice in cui è necessario far ricorso ad un metodo più generale di soluzione.

2. Metodo delle correnti di maglia

Nell'analisi circuitale è talvolta conveniente utilizzare il *metodo delle correnti di maglia*. Esso può essere implementato effettuando i seguenti passi:

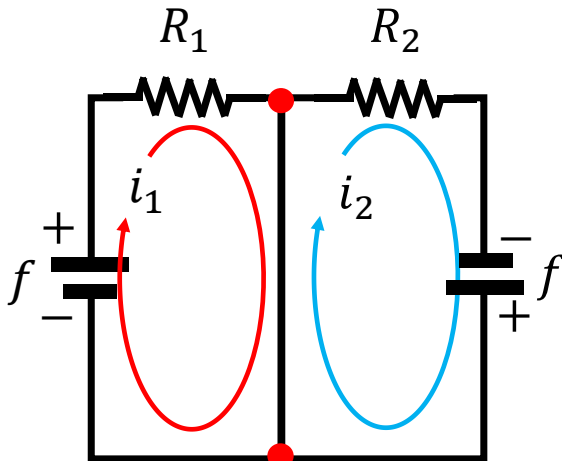
- a) Dato un circuito di complessità arbitraria si individuano un certo numero di percorsi chiusi (maglie) realizzati con i rami della rete avendo cura di rispettare le seguenti prescrizioni. (i) Ogni ramo della rete deve essere presente in almeno una delle maglie scelte. (ii) Le equazioni per le maglie scelte devono dar luogo ad equazioni indipendenti. A tal riguardo, si dimostra che il numero di maglie indipendenti di una rete è dato dalla relazione: $\text{Maglie indipendenti} = \text{Rami} - \text{Nodi} + 1$. Nella pratica maglie indipendenti differiscono per almeno un ramo.
- b) Si assegna un verso positivo di natura convenzionale ad ogni maglia e vi si associa una corrente di maglia (fittizia).
- c) Si applicano alle maglie le leggi di Kirchhoff.
- d) Si ricavano le correnti di maglia risolvendo il sistema di equazioni lineari associato alle grandezze circuitali. Valori negativi di una o più correnti di maglia segnalano che le correnti scorrono in verso opposto a quello arbitrariamente fissato all'inizio come positivo.

Dizionario

Maglia: *percorso chiuso formato mediante rami della rete allo studio.*

Ramo: *porzione circuitale compresa tra due nodi.*

Nodo: *punto di intersezione di più rami.*



convincersi del fatto che la rete presenta **3 rami** e **2 nodi**. Ne segue il numero di maglie indipendenti vale:

$$\text{Maglie Indip.} = \text{Rami} - \text{Nodi} + 1 = 3 - 2 + 1 = 2.$$

A questo punto abbiamo varie opzioni per la scelta delle maglie indipendenti. Esaminiamone due.

Scelta 1

Supponiamo di voler conoscere la corrente che scorre nel ramo comune alle due maglie considerate (vedi figura precedente). Scegliamo le maglie indicate in figura. Applichiamo le leggi di Kirchhoff:

$$\text{maglia 1: } f - i_1 R_1 = 0$$

$$\text{maglia 2: } f - i_2 R_2 = 0$$

Dalle precedenti otteniamo il valore delle correnti di maglia:

$$i_1 = \frac{f}{R_1}, \quad i_2 = \frac{f}{R_2}.$$

La corrente che scorre nel ramo comune alle due maglie vale:

$$i = i_1 - i_2 = f \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = f \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2},$$

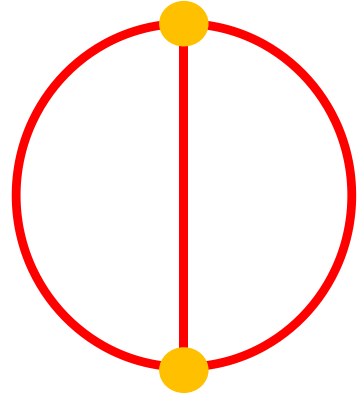
cosa che implica $i = 0$ se $R_1 = R_2$.

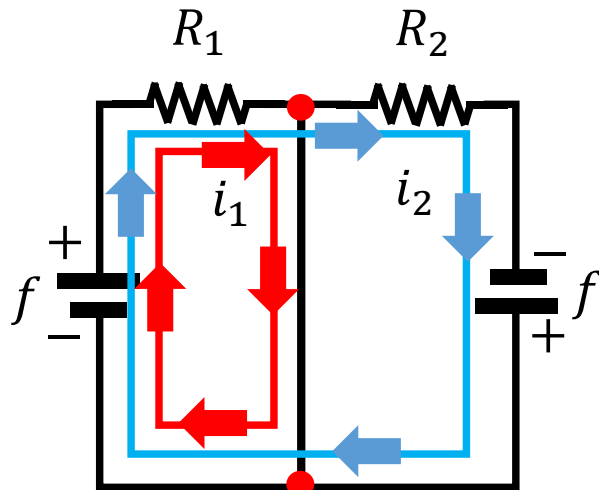
Scelta 2

Ripetiamo l'analisi con la scelta delle maglie indicata in figura. Applichiamo le leggi di Kirchhoff:

3. Concetti in pratica

Vogliamo applicare il metodo sopra descritto all'analisi del circuito a due maglie proposto in figura. La presenza di due generatori ci impedisce di ricondurre questa situazione a quella di un circuito equivalente ad una maglia. Determiniamo il numero di maglie indipendenti esaminando le proprietà topologiche della rete. Da questa analisi è facile





$$\text{maglia 1: } f - i_1 R_1 - i_2 R_1 = 0$$

$$\text{maglia 2: } f - i_2 R_1 - i_1 R_1 - i_2 R_2 + f = 0$$

Dalle precedenti otteniamo:

$$f - (i_1 + i_2) R_1 = 0$$

$$2f - (i_1 + i_2) R_1 - i_2 R_2 = 0.$$

A questo punto si verifica facilmente quanto segue:

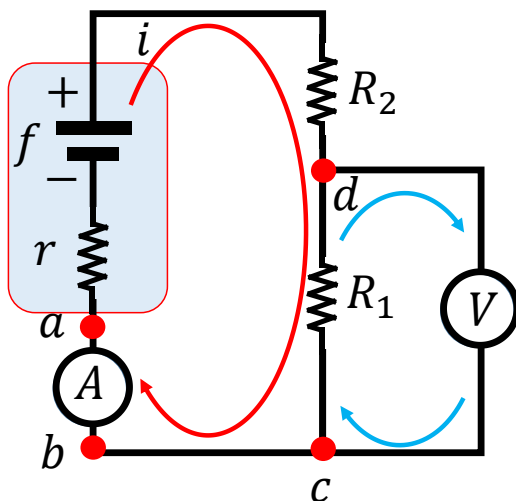
$$i_2 = \frac{f}{R_2}, i_1 = f \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Notiamo che la corrente i prima determinata è adesso data proprio da i_1 . Inoltre la corrente che scorre attraverso il resistore R_2 è proprio i_2 . D'altra parte la corrente che scorre nel resistore R_1 non è i_1 , ma è la somma delle correnti di maglia $i_1 + i_2$. Si ha quindi $i_1 + i_2 = f/R_1$. Queste considerazioni mostrano l'equivalenza dei due metodi.

4. Collegamento degli strumenti di misura (cenni)

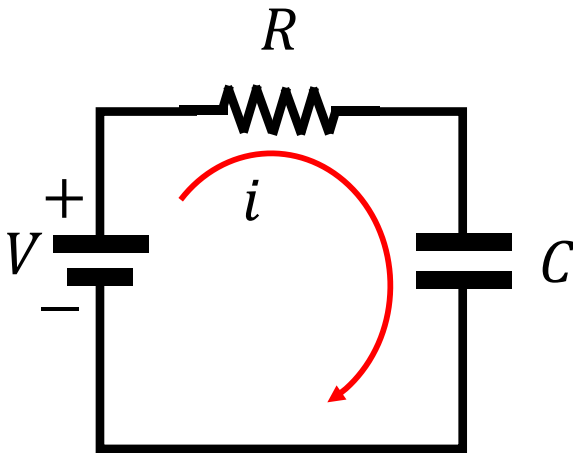
La misura delle grandezze elettriche in un circuito è fatta attraverso strumenti che concettualmente introducono una perturbazione nel sistema. Una corretta operazione di

misura consiste nel minimizzare la perturbazione che il misuratore induce sul circuito da caratterizzare.



La **misura di corrente** viene fatta attraverso l'**Amperometro**. L'amperometro misura il flusso di carica attraverso una data sezione del circuito. Questo strumento deve essere attraversato dalla corrente da misurare e per questo motivo esso deve essere caratterizzato da una resistenza interna trascurabile rispetto a tutte quelle presenti nel sistema. Lo strumento viene collegato in serie.

Il **Voltmetro** è un misuratore di **tensione**. Questa misura richiede di perturbare il circuito in due punti. Lo strumento va quindi collegato in parallelo. Affinché la misura non perturbi il sistema da testare occorre che la resistenza interna dello strumento sia molto maggiore di tutte le resistenze presenti nel circuito.



5. Il circuito RC (caso generale)

Siamo pronti a trattare il circuito RC mostrato in figura alla luce di quanto fin qui esposto. Vogliamo analizzare in maggiore dettaglio il fenomeno della carica di un condensatore. L'equazione per la corrente di maglia si scrive nella forma seguente:

$$V - iR - \frac{q}{C} = 0.$$

Inoltre la relazione tra la corrente di maglia e la carica accumulata sull'armatura positiva del condensatore si scrive come segue:

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Dalle precedenti otteniamo l'equazione di evoluzione della carica depositata sull'armatura positiva del condensatore nella forma di una equazione differenziale del primo ordine lineare a coefficienti costanti e non omogenea:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = \frac{V}{R}.$$

Per descrivere il processo di carica del condensatore occorre studiare la soluzione della precedente con la condizione iniziale $q(t = 0) = 0$. Abbiamo già studiato la soluzione dell'equazione omogenea nel problema della scarica del condensatore. L'equazione omogenea prende la forma

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = 0,$$

ed ha soluzione del tipo:

$$q(t) = A \exp(-t/\tau).$$

La soluzione generale del problema è data dalla somma della soluzione dell'omogenea e della soluzione particolare. La soluzione cercata è del tipo:

$$q(t) = A \exp(-t/\tau) + B.$$

Sostituendo la precedente nell'equazione differenziale otteniamo $B = CV$. Inoltre la condizione di carica nulla al tempo zero implica $A + B = 0$ e pertanto $A = -CV$. Dalle precedenti otteniamo la soluzione cercata:

$$q(t) = CV[1 - \exp(-t/\tau)].$$

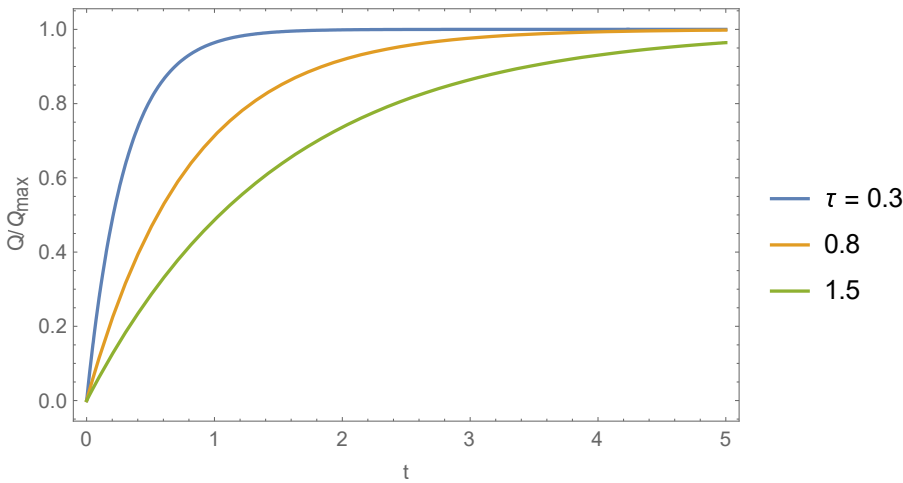
Per tempi $t \ll \tau$, l'esponenziale può essere approssimato come $\exp(-t/\tau) \approx 1 - t/\tau$. In

questo limite otteniamo una crescita lineare della carica nel tempo secondo la relazione approssimata:

$$q(t) \approx CV \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \right] = \frac{CV}{\tau} t.$$

Per tempi lunghi, $t \gg \tau$, l'esponenziale tende a zero e vale la relazione:

$$q(t \rightarrow \infty) = CV,$$



che indica il raggiungimento della carica massima ($Q_{max} = CV$) sulle armature del condensatore. Il tempo necessario al raggiungimento della carica massima dipende dalla costante di tempo del circuito. La corrente di maglia per tempi arbitrari può essere ottenuta mediante derivata temporale della carica. Ne segue:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{CV}{\tau} \exp(-t/\tau),$$

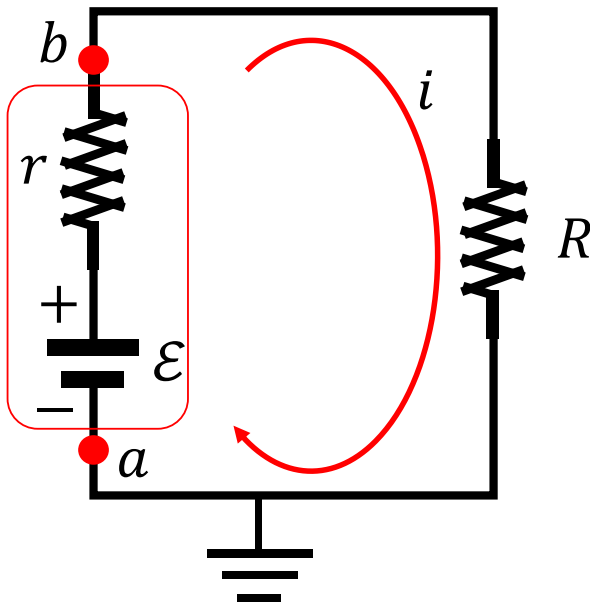
la quale tende asintoticamente a zero per tempi molto più lunghi della costante di tempo del circuito. La tensione ai capi del condensatore vale:

$$V_c = \frac{q(t)}{C} = V[1 - \exp(-t/\tau)].$$

Esercizio 1 (concetto di messa a terra)

Mettere a terra un circuito significa collegarlo al suolo mediante un percorso conduttivo. Il potenziale del punto del circuito collegato a terra è per definizione nullo (si ricordi che il potenziale coulombiano si annulla all'infinito). Analizziamo il circuito mostrato in figura nel quale abbiamo introdotto il simbolo di messa a terra. Siano $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, $R = 4,0 \, \Omega$ e $r = 2,0 \, \Omega$; si vuole determinare il potenziale V_b nel punto b .

Applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni abbiamo:



$$V_a + \mathcal{E} - ir = V_b \rightarrow V_b - V_a = \mathcal{E} - ir.$$

D'altra parte abbiamo:

$$V_b - V_a = \mathcal{E} - ir = iR.$$

Dalla precedente si ottiene la corrente di maglia:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Inoltre si ha:

$$V_b - V_a = \mathcal{E} - ir = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E} r}{R + r} = \frac{\mathcal{E} R}{R + r}.$$

Se il punto a è messo a terra, allora $V_a = 0$ e di qui segue:

$$V_b = \frac{\mathcal{E} R}{R + r} \rightarrow V_b = \frac{12 \cdot 4,0}{6,0} V = 8,0 V$$

Notiamo inoltre che la potenza dissipata internamente al generatore vale:

$$P_i = i^2 r.$$

Infatti la potenza netta fornita dal generatore ai portatori di carica vale:

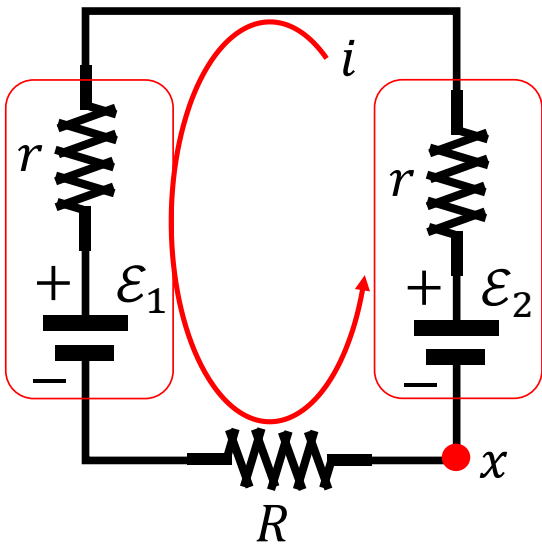
$$P = i(V_b - V_a) = i(\mathcal{E} - ir) = i\mathcal{E} - i^2 r \equiv P_{fem} - P_i,$$

dove $P_{fem} = i\mathcal{E}$ rappresenta la potenza che erogherebbe un generatore ideale di forza elettromotrice.

Esercizio 2

Consideriamo il circuito in figura caratterizzato dalle seguenti grandezze elettriche: $\mathcal{E}_1 = 2,0 V$, $\mathcal{E}_2 = 3,0 V$, $r = 3,0 \Omega$. Quanto vale R se nel circuito scorre una corrente pari a $i = 1,0 mA$? Quanto vale la potenza dissipata in R ?

Applichiamo la legge di Kirchhoff per le tensioni a partire dal punto x seguendo il verso della corrente di maglia. Ne risulta la seguente relazione:



$$\mathcal{E}_2 - ir - ir - \mathcal{E}_1 - iR = 0$$

$$\rightarrow R = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{i} - 2r$$

$$\rightarrow R = \frac{3,0 - 2,0}{1,0 \cdot 10^{-3}} \Omega - 6,0 \Omega = 1,0 \cdot 10^3 \Omega - 6,0 \Omega = 9,9 \cdot 10^2 \Omega.$$

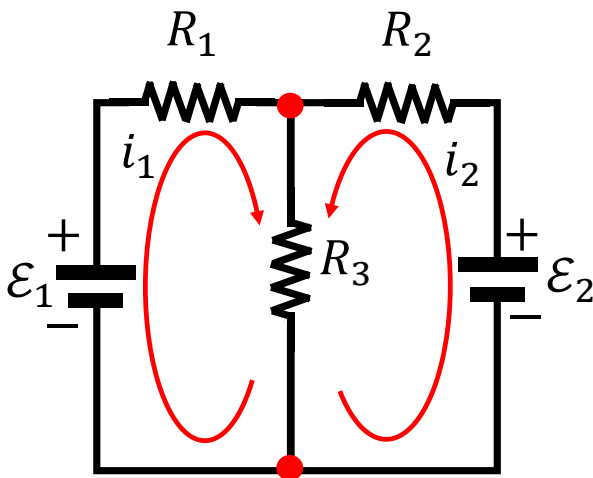
La potenza dissipata in R vale:

$$P = i^2 R \rightarrow P = (1,0 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 9,9 \cdot 10^2 \text{ W} = 9,9 \cdot 10^{-4} \text{ W}.$$

La potenza dissipata nel resistore si trasforma in calore e questo fenomeno è noto come effetto Joule. Ad esempio, le lampadine a incandescenza generano calore per effetto Joule.

Esercizio 3

Dato il circuito in figura determinare la corrente passante attraverso R_2 e R_3 . Le grandezze circuitali sono le seguenti: $\mathcal{E}_1 = 10,0 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 5,00 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = R = 4,00 \Omega$.



Scriviamo le leggi di Kirchhoff per le due maglie:

$$\mathcal{E}_1 - i_1 R - (i_1 + i_2) R = 0$$

$$\mathcal{E}_2 - i_2 R - (i_1 + i_2) R = 0$$

Sommando membro a membro si ottiene:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - 3R(i_1 + i_2) = 0,$$

dalla quale segue:

$$i_1 + i_2 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{3R}.$$

Quella appena ottenuta è la corrente passante attraverso R_3 . Numericamente abbiamo:

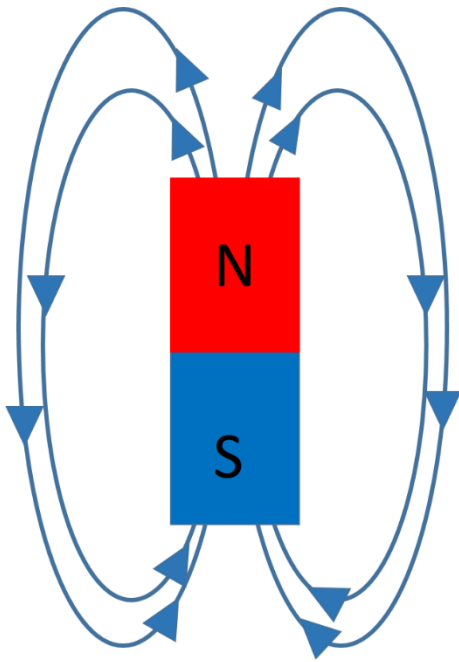
$$i_1 + i_2 = \frac{15,0}{12,0} \text{ A} = 1,25 \text{ A}.$$

La corrente che attraversa R_2 è i_2 . Dalle precedenti otteniamo:

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R} - (i_1 + i_2) \rightarrow i_2 = \frac{5,00}{4,00} A - \frac{15,0}{12,0} A = 0,00 A.$$

FENOMENI MAGNETICI STAZIONARI NEL VUOTO

6. Fenomenologia del magnetismo



Esistono materiali noti sin dall'antichità che godono della proprietà abbastanza stupefacente di attrarre piccoli oggetti di ferro. Questi materiali, come ad esempio la magnetite, hanno proprietà **magnetiche**. Come le forze di natura elettrostatica studiate in precedenza, le forze di natura magnetica esercitano *azioni a distanza* e sono descrivibili mediante il concetto fisico-matematico di *campo di forze*, il *campo magnetico*. Il magnetismo dei minerali sopra menzionati è la manifestazione macroscopica della struttura quantistica della materia. I fenomeni magnetici sono molto diversi da quelli fin qui studiati. Infatti, mentre la materia si presenta ordinariamente in forma elettricamente neutra, la magnetizzazione permanente è una caratteristica peculiare di alcuni materiali (ferromagneti).

Prima di esaminare le proprietà dei materiali ferromagnetici (quelli che costituiscono le calamite) diamo alcuni cenni sulle proprietà magnetiche della materia.

I materiali si dividono a seconda del loro comportamento magnetico in almeno tre classi.

1) Materiali ferromagnetici

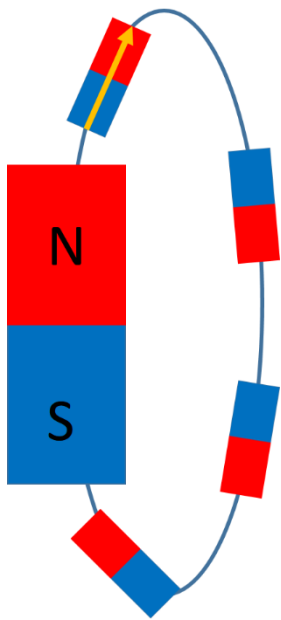
Sono materiali in cui il magnetismo è una proprietà spontaneamente posseduta. A temperatura ambiente sono ferromagnetici Fe, Co, Ni e loro leghe.

2) Materiali diamagnetici

Sono materiali che non presentano magnetizzazione spontanea. Se immersi in campo magnetico sviluppano un campo magnetico abbastanza debole che tende ad opporsi al campo magnetico in cui sono immersi.

3) Materiali paramagnetici

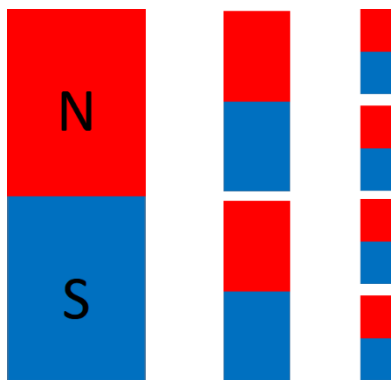
Sono materiali che non presentano magnetizzazione spontanea. Se immersi in campo magnetico sviluppano un campo magnetico che tende ad allinearsi al campo magnetico in cui sono immersi. La magnetizzazione acquisita permane per un certo tempo anche dopo che il campo forzante è stato rimosso.



La fenomenologia del magnetismo così come accennata sembra abbastanza misteriosa e molto differente dal fenomeno a noi noto dell'elettrizzazione. In particolare la magnetizzazione non può essere indotta con facilità (strofinio).

Per compiere qualche progresso possiamo analizzare il comportamento dei magneti permanenti, i materiali ferromagnetici. Tali materiali, come accennato, presentano proprietà magnetiche permanenti di natura spontanea a temperatura ambiente.

Analizziamo quindi le proprietà di una barretta magnetica. Una barretta magnetica è la sorgente di un campo di forze nello spazio circostante. La natura di questo campo può essere sondata utilizzando un sistema fisico capace di reagire alle sollecitazioni del campo senza perturbarlo eccessivamente. Questa sonda può essere una barretta magnetica di dimensioni molto minori di quella che è la sorgente del campo da investigare (in analogia al concetto di carica di prova). Spostando la sonda in tutto lo spazio circostante il magnete è possibile tracciare le linee del campo. La sonda può essere pensata come l'ago magnetico di una bussola, capace di allinearsi al campo magnetico terrestre. Altro metodo per visualizzare le linee del campo è disporre limatura di ferro nello spazio circostante la sorgente. Conducendo questi esperimenti si arriva alle seguenti conclusioni.



- Una barretta magnetica esibisce proprietà fisiche distinte ai due estremi. Tali estremi vengono denominati poli. A ciascun polo si assegna il nome convenzionale di Nord e Sud.

- Poli opposti di due distinte barrette magnetiche tendono ad attrarsi, mentre poli uguali tendono a respingersi.

- Nell'interazione tra l'ago di una bussola e il campo

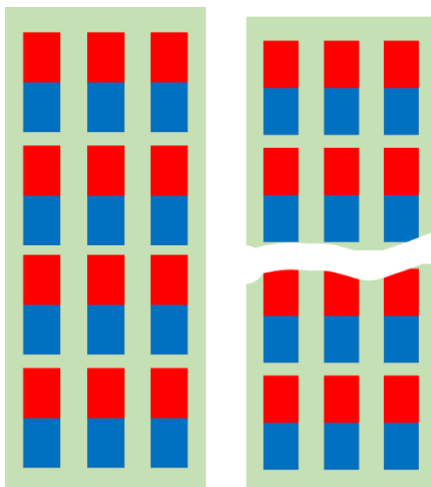
magnetico di una barretta si osserva che l'ago tende ad allinearsi al vettore campo magnetico nel punto considerato. In particolare l'ago della bussola rivolge il suo

polo S verso il polo N della sorgente del campo. In questo modo la bussola indica direzione e verso del campo magnetico da sondare.

- Il campo magnetico prodotto da una barretta ferromagnetica ha linee di campo chiuse uscenti dal polo nord ed entranti nel polo sud. Il campo ha caratteristiche simili al campo generato da un **dipolo elettrico**.

Alla luce delle precedenti osservazioni ci viene l'idea che i magneti permanenti siano costituiti di due tipi di *cariche magnetiche* opposte, chiamiamole *cariche N* e *cariche S*, opportunamente disposte nel materiale in egual numero. Alla luce di tale intuizione potremmo pensare di poter ottenere un magnete avente cariche di un solo tipo (solamente di tipo N o di tipo S).

Tagliando in due parti un magnete otteniamo due magneti che ancora presentano due poli opposti. Procedendo ripetutamente osserviamo che non è possibile separare le cariche N ed S. Tale fenomenologia lascia intendere che un magnete macroscopico sia formato *mesoscopicamente* da un gran numero di magnetini elementari ciascuno dotato di un polo N e di un polo S. Questo spiegherebbe come mai non si riesce ad ottenere un magnete avente un solo polo magnetico.



Arriviamo all'importante conclusione che il **dipolo magnetico** costituisce l'ente magnetico elementare. Quanto affermato sembra indicare che *non esistono monopoli magnetici* (l'analogo delle cariche elettriche positive o negative).

Un magnete macroscopico sarebbe idealmente costituito da *dipoli magnetici elementari* dispersi nel volume del materiale, sebbene non sia chiara a questo livello l'origine di tali strutture elementari.

Alla luce di queste osservazioni sulla fenomenologia del magnetismo possiamo estrarre alcune caratteristiche ulteriori delle sostanze *paramagnetiche e diamagnetiche* immerse in un campo magnetico esterno (ad esempio generato da uno dei poli di una barretta magnetica).

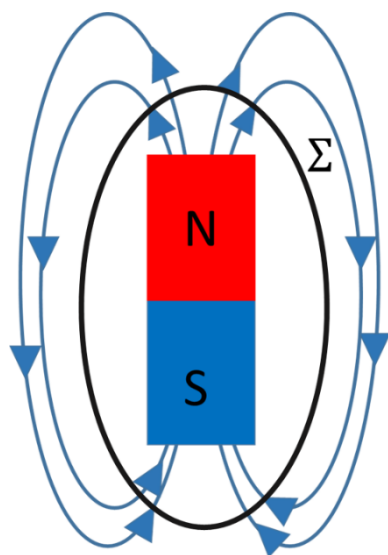
Si è detto che un **materiale diamagnetico** (ad esempio la materia vivente è diamagnetica) immerso in campo magnetico esterno acquisisce una piccola magnetizzazione avente verso opposto al campo inducente. Ricordando la natura repulsiva dell'interazione magnetica di poli uguali, è facile convincersi del fatto che un diamagnete in campo magnetico sperimenta una **forza magnetica repulsiva**.

Utilizzando lo stesso argomento per i **paramagneti** si osserva che essi sono invece **attratti dal campo inducente**, avendo essi la tendenza a sviluppare un campo magnetico parallelo a quello esterno.

7. Sorgenti del campo magnetico e proprietà del vettore \vec{B} .

Abbiamo detto che il campo di forze che si instaura nei dintorni di un magnete permanente può essere descritto mediante l'introduzione di un campo vettoriale che chiameremo campo magnetico \vec{B} . Le sorgenti di questo campo sono i dipoli magnetici elementari che riempiono il volume del materiale magnetico considerato. La natura di tali dipoli non è al momento specificabile ulteriormente. Abbiamo inoltre evidenziato l'analogia tra il campo generato da un dipolo elettrico e quello generato da un dipolo magnetico.

Volendo spingere queste analogie sino alle estreme conseguenze, data l'impossibilità di isolare monopoli magnetici, dovremmo avere che $\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = 0$, dove il flusso è calcolato attraverso una superficie gaussiana Σ che include completamente il magnete.

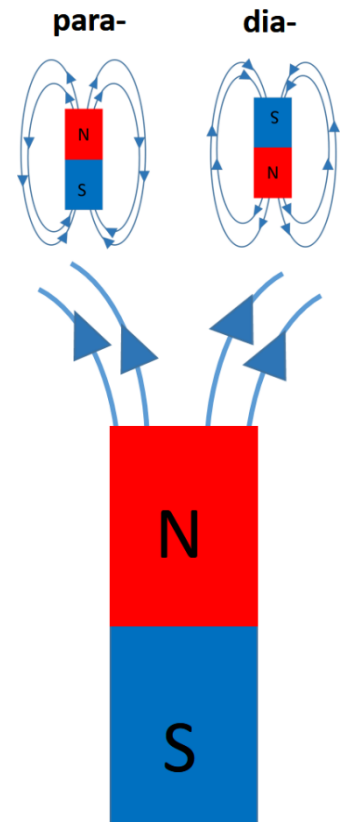


Dovremmo quindi aspettarci che una costruzione teorica dei fenomeni magnetici porti ad evidenziarne l'impossibilità di isolare cariche magnetiche singole (monopolo magnetico). La differenza rispetto al caso del campo elettrico emerge chiaramente dal confronto seguente:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = 0,$$

dal quale risulta evidente che le sorgenti dei campi occupano il membro destro delle equazioni. Nel caso magnetico tali



sorgenti sono dei dipoli magnetici aventi *carica magnetica totale nulla*. Le due equazioni acquisiscono una particolare simmetria in assenza di sorgenti del campo elettrico.