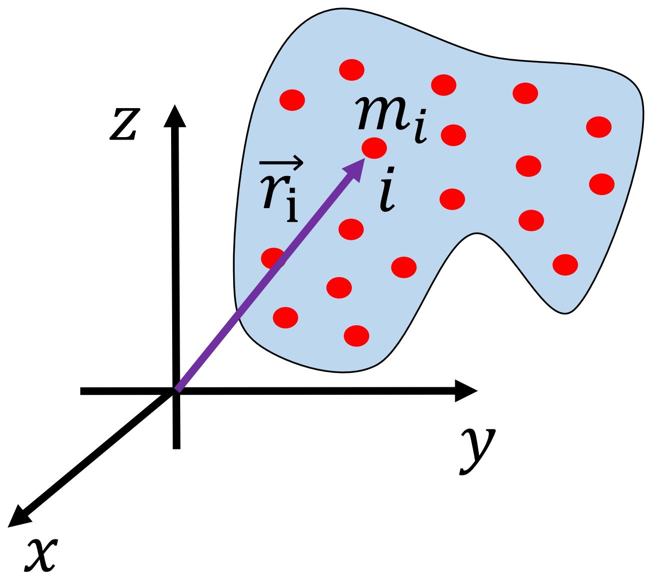
1. Dinamica dei sistemi di punti materiali

Fino ad ora abbiamo utilizzato il concetto di punto materiale come utile astrazione per lo sviluppo della teoria. I corpi reali sono tuttavia sistemi estesi che richiedono una generalizzazione dei concetti fin qui sviluppati.



Possiamo immaginare un corpo esteso come un insieme di punti materiali. La dinamica di ciascun punto del sistema può essere descritta mediante il secondo principio della dinamica. Quando ciò viene fatto l'equazione della dinamica dell'i-esimo punto materiale si scrive nella forma seguente:

$$m_i\vec{a_i} = \vec{F_i^e} + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N} \vec{F_{ij}^i}.$$

$$i \in \{1, \dots, N\}$$

Nella precedente la quantità $\vec{F_i^e}$ rappresenta la risultante delle forze esterne al sistema agenti sul i-esimo punto materiale, mentre $\vec{F_{ij}^i}$ rappresenta la forza interna al sistema generata dall'interazione del j-esimo punto con l'i-esimo. Ci chiediamo se esista un modo per individuare un punto rappresentativo del sistema nel quale si possa immaginare concentrata l'intera massa $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$. Per un tale punto varrebbe la dinamica dettata dal secondo principio così come lo conosciamo?

In effetti la cinematica assume come semplificazione che l'intera massa di un corpo sia concentrata in un solo punto. Abbiamo già discusso in quali limiti questa sia una accettabile approssimazione. Ci aspettiamo quindi che la domanda ammetta una risposta positiva. Verifichiamolo.

Sommando membro a membro le equazioni della dinamica dei punti del sistema otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i^e} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N} \vec{F_{ij}^i}.$$

L'equazione ottenuta sembra abbastanza brutta. Essa ha una struttura nella quale il primo membro contiene una combinazione lineare delle accelerazioni dei punti appartenenti al sistema. Il secondo membro è costituito dalla risultante delle forze esterne, $\overrightarrow{F^e} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i^e}$, e dalla risultante delle forze interne $\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \overrightarrow{F_{ij}^i}$. Quest'ultima quantità è però nulla per il terzo principio della dinamica. Infatti vale la relazione $\overrightarrow{F_{ij}^i} = -\overrightarrow{F_{ji}^i}$ essendo le forze interne coppie di forze di azione-reazione. Da queste considerazioni otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{F^e}.$$

La precedente può essere scritta in forma strutturalmente equivalente a quella del secondo principio della dinamica del punto materiale facendo comparire al primo membro la massa totale del sistema:

$$M\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{a_i}\right) = \overrightarrow{F^e}.$$

La precedente suggerisce che la quantità in parentesi tonda sia l'accelerazione del punto speciale che rappresenta la dinamica traslazionale dell'intero sistema. Questo ci consente di scrivere:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{a_i},$$

e quindi

$$M\vec{a}_{cm} = \overrightarrow{F^e}.$$

Abbiamo quindi ritrovato la struttura del secondo principio nella forma a noi nota. Non abbiamo però ancora capito chi sia il punto che rappresenta l'intero sistema. Per determinarne la posizione osserviamo quanto segue:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{a_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\overrightarrow{r_i}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{r_i}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_{cm}.$$

Pertanto il punto speciale che rappresenta l'intero sistema, detto centro di massa, ha vettore posizione dato dalla media pesata seguente:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{r_i}.$$

Con queste definizioni la dinamica traslazionale del sistema è retta dall'equazione:

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{cm} = \overrightarrow{F^e}.$$

Pertanto la dinamica del centro di massa di un sistema di punti materiali obbedisce alla precedente equazione nella quale le forze interne al sistema non giocano alcun ruolo. Quando la risultante delle forze esterne agenti sul sistema risulti nulla la precedente si scrive nella forma:

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{cm} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (M \vec{v}_{cm}) = 0,$$

cosa che implica che la quantità di moto del centro di massa è conservata. Ci chiediamo quanto valga la quantità di moto del centro di massa. Dalla definizione è facile intuire che

$$M \vec{v}_{cm} = M \frac{d}{dt} \vec{r}_{cm} = M \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i} \right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p_i},$$

che è la quantità di moto totale del sistema. Ne concludiamo che in assenza di forze esterne si conserva la quantità di moto totale del sistema.

Abbiamo utilizzato questa legge di conservazione nell'analisi degli urti. In quella sede abbiamo notato come le particelle interagenti tramite processi d'urto possano essere considerate parte di un sistema elementare.

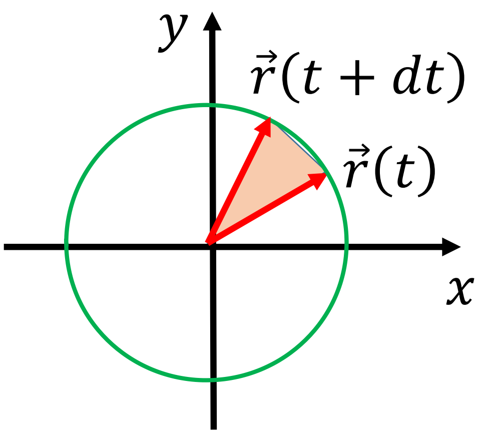
Quando le posizioni relative dei punti materiali che costituiscono un sistema non possano variare si parla di *corpi rigidi*. Il concetto di sistema qui presentato vale sia per i corpi rigidi che per quelli in cui le posizioni tra i punti materiali possano variare (come avviene negli urti). L'equazione

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{cm} = \overrightarrow{F^e}$$

qui introdotta viene detta *prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi*. Essa descrive la dinamica traslazionale del centro di massa sotto l'azione delle forze esterne. D'altra parte i corpi rigidi hanno anche una dinamica rotazionale. Appare quindi necessaria una seconda equazione che descriva la dinamica rotazionale del sistema.

2. Il momento angolare

Abbiamo detto della necessità di una equazione che descriva i moti rotazionali. Prima di poter determinare la forma di tale equazione (al momento incognita) occorre individuare una grandezza rilevante nei moti rotatori. Per far questo ragioniamo per analogia con quanto noto per i moti traslatori. In quell'ambito abbiamo notato che in assenza di forze risulta conservata la quantità di moto. Quando ciò avviene il moto che ne risulta è rettilineo ed uniforme.



Sembra ragionevole ammettere che i moti uniformi (da qualche punto di vista) conservino una specifica grandezza fisica. Supponiamo a tal riguardo che l'equivalente rotazionale del moto rettilineo uniforme sia il moto circolare uniforme. In base alla nostra ipotesi, occorre individuare la quantità conservata in tale moto.

Una proprietà importante del moto circolare uniforme può essere enunciata dicendo che il vettore posizione della particella rotante spazza aree uguali in tempi uguali. Equivalentemente si può dire che la velocità areolare è costante. Valutiamo l'area infinitesima spazzata dal vettore posizione nell'intervallo infinitesimo di estremi t e $t+dt$. L'area infinitesima vale:

$$dS = \frac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \vec{r}(t+dt)|.$$

Osserviamo che

$$\vec{r}(t+dt) \approx \vec{r}(t) + \frac{d\vec{r}(t)}{dt}dt.$$

Dalla precedente otteniamo l'espressione:

$$dS = \frac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \vec{r}(t+dt)| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt}dt\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|dt.$$

Dalla catena di uguaglianze precedenti abbiamo:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)|.$$

La velocità areolare, ossia la velocità con la quale varia l'area spazzata dal vettore posizione, è costante se è tale la quantità

$$|\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)|.$$

Anzitutto notiamo che nel moto circolare uniforme direzione e verso del vettore $\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$ risultano indipendenti dal tempo. In particolare se il moto circolare avviene nel piano $x - y$ detto vettore punterà nel verso positivo dell'asse z. Quanto detto si verifica facilmente. Si ha infatti

$$\vec{r}(t) = R(\cos\theta, \sin\theta, 0)$$
$$\vec{v}(t) = R\omega(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

e pertanto:

$$\vec{r}(t) \times \vec{v}(t) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \\ -R\omega\sin\theta & R\omega\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \hat{z}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\omega R^2 = \hat{z}\omega R^2.$$

Essendo ωR^2 costante nel moto circolare uniforme, possiamo dire che la velocità areolare è costante e quindi

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\omega R^2.$$

Pertanto la quantità cinematica $\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$ è un invariante del moto circolare uniforme. D'altra parte qualsiasi quantità proporzionale all'invariante trovato è a sua volta invariante. Definiamo quindi la quantità

$$\vec{L} = \vec{r}(t) \times m\vec{v}(t)$$

momento angolare o *momento della quantità di moto*. Per un moto circolare uniforme nel piano $x - y$ il momento angolare è un vettore indipendente dal tempo e vale $\vec{L} = \hat{z}mR^2\omega = \hat{z}\, mvR$.
La conservazione del momento angolare nel moto circolare uniforme si può anche scrivere nella forma:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

che esprime la conservazione di una quantità vettoriale. Esistono situazioni generali nelle quali il momento angolare non è conservato. Ci chiediamo quindi quale grandezza fisica sia responsabile della variazione del momento angolare. Sappiamo che la quantità di moto è alterata dall'applicazione di una forza. Ci chiediamo chi giochi il ruolo delle forze nei moti rotazionali. Per rispondere a questa domanda basta valutare la derivata temporale del momento angolare utilizzando la sua definizione:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(\vec{r}(t) \times m\vec{v}(t)\big) = \left(\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\right) \times m\vec{v}(t) + \vec{r}(t) \times m\left(\frac{d}{dt}\vec{v}(t)\right)$$
$$= \vec{v}(t) \times m\vec{v}(t) + \vec{r}(t) \times m\vec{a}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t).$$

Mediante la precedente catena di uguaglianze si arriva a stabilire quanto segue:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t).$$

La quantità responsabile della variazione del momento angolare, $\vec{M} = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t)$, viene detta *momento della forza* $\vec{F}(t)$ *rispetto all'origine*. Per un singolo punto materiale l'equazione della dinamica del momento angolare è essenzialmente equivalente al secondo principio della dinamica. La situazione è radicalmente differente per i sistemi di punti materiali.

Esempio

Valutiamo il momento della forza di attrazione esercitata dal sole sulla terra durante il moto orbitale. Utilizzando la definizione di momento di una forza otteniamo:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \left(-\frac{GMm}{|\vec{r}|^2}\hat{r}\right) \propto \vec{r} \times \hat{r} = 0.$$

La precedente implica che

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

nel moto orbitale della terra intorno al sole. Essendo $\vec{L}$ una quantità vettoriale dovrà essere conservata anche la sua direzione ed il suo verso. Questo implica che l'orbita della terra è contenuto nel piano ortogonale al vettore momento angolare.

3. La seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

Così come abbiamo definito la quantità di moto totale di un sistema di punti materiali è possibile definire il suo momento angolare totale nella forma:

$$\vec{L} = \sum_k \overrightarrow{r_k} \times m_k \overrightarrow{v_k}.$$

La derivata temporale della precedente ci consente di scrivere

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_k \vec{r_k} \times m_k \vec{v_k}\right) = \sum_k \vec{r_k} \times m_k \vec{a_k} = \sum_k \vec{r_k} \times \vec{F_k} = \sum_k \vec{r_k} \times \vec{F_k^e} = \vec{M^e}.$$

Nello scrivere la precedente abbiamo tenuto conto dell'irrilevanza dei momenti delle forze interne (terzo principio). Il lettore è invitato a verificare la precedente affermazione. La seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi assume quindi la forma

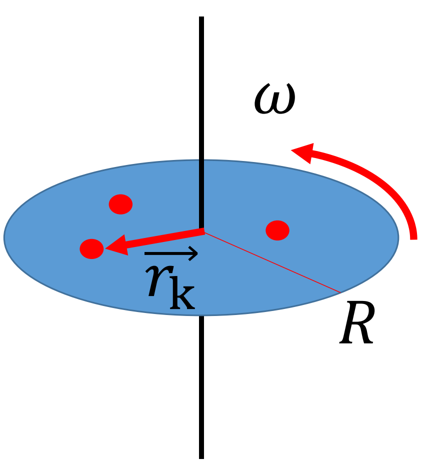
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M^e},$$

dove $\vec{M^e}$ è il momento delle sole forze esterne al sistema. Pertanto la dinamica dei sistemi di punti materiali è descritta dalle seguenti *due equazioni cardinali*:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F^e} \\ \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M^e} \end{cases}.$$

Esempio: momento angolare ed energia cinetica di un disco rotante con velocità angolare ω

Consideriamo un sistema di punti materiali che costituiscano un disco di raggio assegnato. Supponiamo che il sistema ruoti con velocità angolare costante attorno ad un asse ortogonale al disco e passante per il suo centro. Ogni punto del sistema si muove di moto circolare uniforme descrivendo un'orbita circolare di raggio pari a $|\vec{r_k}|$, essendo $\vec{r_k}$ il vettore posizione riferito al centro del disco del generico punto. Il momento angolare totale del sistema vale:



$$\vec{L} = \sum_k \vec{r_k} \times m_k \vec{v_k} = \hat{z} \sum_k m_k |\vec{r_k}|^2 \omega = \hat{z}\, I\omega,$$

dove abbiamo introdotto il *momento d'inerzia*:

$$I = \sum_k m_k |\vec{r_k}|^2.$$

L'energia cinetica rotazionale del sistema vale:

$$E_c = \sum_k \frac{1}{2} m_k |\vec{v_k}|^2 = \frac{1}{2} \sum_k m_k |\vec{r_k}|^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I\, \omega^2.$$

Dalla precedente si intuisce facilmente che il momento d'inerzia rappresenta l'inerzia rotazionale di un sistema rispetto ad un assegnato asse di rotazione.

4. Considerazioni sulla conservazione del momento angolare in sistemi isolati

Un sistema isolato non è soggetto a forze esterne e a momenti esterni. Risulta quindi, concentrandoci sulla sola dinamica rotazionale,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$

In questa condizione il momento angolare resta invariato indipendentemente dai cambiamenti che intervengono per effetto di cause interne al sistema.

Immaginiamo una pattinatrice in rotazione a braccia aperte ed avente velocità angolare pari a ω_i. La distribuzione spaziale delle masse attorno all'asse di rotazione sia descritta del momento di inerzia I_i. La pattinatrice ha quindi un momento angolare pari a

$$\vec{L_i} = I_i \omega_i \, \hat{z}.$$

Supponiamo che ad un certo istante di tempo la pattinatrice chiuda le braccia. In questo modo il momento d'inerzia diminuisce in quanto le masse in rotazione risultano globalmente meno distanti dall'asse di rotazione. Sia I_f il momento d'inerzia in questa configurazione. La variazione dell'assetto della pattinatrice è dovuto a forze interne al sistema e pertanto il momento angolare deve conservarsi. Detta ω_f la velocità angolare finale della pattinatrice, possiamo scrivere la seguente equazione di conservazione del momento angolare:

$$I_i \omega_i \, \hat{z} = I_f \omega_f \, \hat{z} \rightarrow \omega_f = \frac{I_i}{I_f} \omega_i > \omega_i,$$

dalla quale concludiamo che la pattinatrice ruoterà con velocità angolare maggiore di quella iniziale.