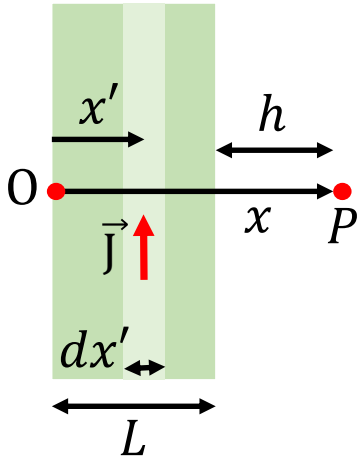


Esercizio (campo magnetico generato da un nastro percorso da corrente)

Supponiamo di avere un conduttore percorso da densità di corrente uniforme \vec{J} . Supponiamo che il conduttore abbia una dimensione infinita, larghezza L e spessore W (non mostrato in figura). La corrente totale che circola nel conduttore vale quindi $i = JWL$, essendo WL la sezione trasversa del conduttore. Si vuole calcolare il campo generato nel punto P . Il campo è entrante nel foglio e risulta ad esso ortogonale. Non resta che valutarne il modulo. Utilizziamo il principio di sovrapposizione. Sappiamo che il modulo del campo generato a distanza R da un filo percorso da corrente i vale:



$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}.$$

Utilizziamo questo risultato. Possiamo partizionare il sistema in nastri conduttivi di larghezza infinitesima. Ogni nastro di spessore dx' genera un contributo infinitesimo al campo della forma:

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi (x - x')} di,$$

dove $di = JW dx' = \frac{i}{L} dx'$. Di qui, sommando su tutti i contributi, si ha:

$$B = \int_0^L dB = \frac{\mu_0 i}{2\pi L} \int_0^L \frac{dx'}{(x - x')} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi L} \int_0^L \frac{dx'}{(x' - x)}.$$

Occupiamoci adesso dell'integrale. Effettuiamo la sostituzione seguente:

$$\begin{aligned} r &= x' - x \\ dr &= dx' \end{aligned}$$

Con questa posizione otteniamo:

$$\int_0^L \frac{dx'}{(x' - x)} \rightarrow \int_{-x}^{L-x} \frac{dr}{r} = \ln\left(\frac{L-x}{-x}\right) = \ln\left(\frac{x-L}{x}\right).$$

Raccordando tutti i risultati parziali fin qui derivati possiamo scrivere:

$$B = -\frac{\mu_0 i}{2\pi L} \ln\left(\frac{x-L}{x}\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi L} \ln\left(\frac{x}{x-L}\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi L} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{L}{x}}\right).$$

Osserviamo esplicitamente che vale la relazione $x = h + L$ mediante la quale è possibile riscrivere l'argomento del logaritmo. Operando in questo modo otteniamo:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi L} \ln\left(1 + \frac{L}{h}\right).$$

Quando $h \gg L$, ossia a grande distanza dal filo, la quantità $\frac{L}{h}$ tende a divenire molto minore di 1. Questo consente di sviluppare in serie il logaritmo al primo ordine non nullo:

$$\ln\left(1 + \frac{L}{h}\right) \approx \frac{L}{h}.$$

Con questa approssimazione il valore del campo tende a

$$B \approx \frac{\mu_0 i}{2\pi h},$$

cioè al valore del campo che produrrebbe un filo unidimensionale di lunghezza infinita a distanza h . L'esempio mostra come alcuni dettagli relativi alla geometria della sorgente contino poco all'aumentare della distanza.

Esercizio (campo magnetico generato sull'asse di un solenoide)

Un solenoide è un conduttore costituito da un'elica cilindrica di passo costante. Ogni avvolgimento può essere considerato con buona approssimazione (filo sottile) come una spira di raggio R percorsa dalla medesima corrente i , cosicché il sistema può essere pensato come una successione di spire coassiali avente un fissato numero di spire n per unità di lunghezza. Sia L la lunghezza del solenoide. Si vuole determinare, assumendo che il sistema sia immerso nel vuoto, il campo di induzione magnetica sull'asse del solenoide.

Vogliamo sfruttare il principio di sovrapposizione avendo noi già ricavato il campo sull'asse di una spira nella forma seguente:

$$\vec{B}(z) = \hat{z} \left(\frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

dove la precedente è stata ricavata nell'ipotesi che la spira sia collocata nel piano xy . Dalla precedente si ricava che il campo infinitesimo generato da una spira realizzata da un

conduttore di sezione trasversa infinitesima collocata nel generico piano ortogonale all'asse z di equazione $z = z'$ vale:

$$d\vec{B}(z) = \hat{z} \left(\frac{\mu_0 i n dz'}{2} \frac{R^2}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \right)$$

Il campo totale si ottiene integrando su tutta la lunghezza del sistema:

$$\vec{B}(z) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d\vec{B}(z) = \hat{z} \left(\frac{\mu_0 i R^2 n}{2} \right) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz'}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}}.$$

Trattiamo l'integrale. Procedendo per sostituzione di variabili si ottiene:

$$\begin{aligned} \xi &= z' - z \\ d\xi &= dz' \end{aligned}$$

Da questa posizione segue:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz'}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} &\rightarrow \int_{-\frac{L}{2}-z}^{\frac{L}{2}-z} \frac{d\xi}{(\xi^2 + R^2)^{3/2}} = \left[\frac{\xi}{R^2 \sqrt{R^2 + \xi^2}} \right]_{-\frac{L}{2}-z}^{\frac{L}{2}-z} = \\ &= \frac{\frac{L}{2} - z}{R^2 \sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} - z\right)^2}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{R^2 \sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} + z\right)^2}}. \end{aligned}$$

Dalla precedente otteniamo:

$$\vec{B}(z) = \hat{z} \left(\frac{\mu_0 i n}{2} \right) \left[\frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} - z\right)^2}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} + z\right)^2}} \right].$$

Il campo al centro del solenoide, ossia per $z = 0$, vale:

$$\vec{B}(z = 0) = \hat{z} \left(\frac{\mu_0 i n}{2} \right) \left[\frac{L}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} \right],$$

valore che nel limite $L \gg R$ diviene:

$$\vec{B}(z=0) \approx \mu_0 i n \hat{z}.$$

Studiamo adesso la relazione funzionale trova nel caso generale. Scriviamola in variabili adimensionali:

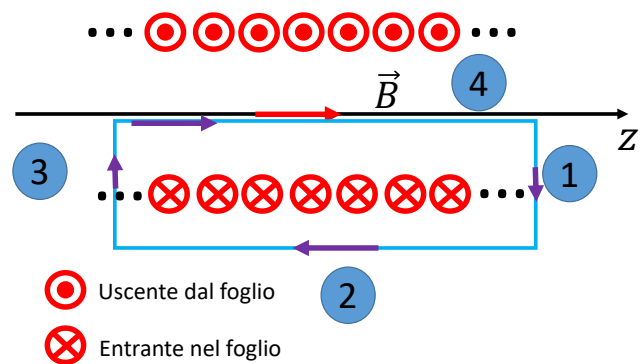
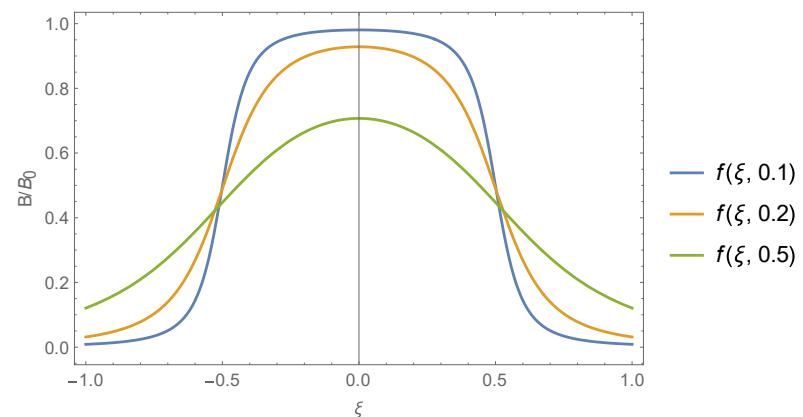
$$\vec{B}(\xi) = \hat{z} \left(\frac{\mu_0 i n}{2} \right) \left[\frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} - z\right)^2}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} + z\right)^2}} \right] \equiv \hat{z} B_0 f(\xi, \eta),$$

La funzione $f(\xi, \eta)$ che vogliamo studiare assume la forma:

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2} - \xi}{\sqrt{\eta^2 + \left(\frac{1}{2} - \xi\right)^2}} + \frac{\frac{1}{2} + \xi}{\sqrt{\eta^2 + \left(\frac{1}{2} + \xi\right)^2}} \right),$$

con $\eta = R/L$ e $\xi = z/L$ e $B_0 = \mu_0 i n$. E' evidente (vedi figura) che solenoidi con rapporto raggio/lunghezza piccolo presentano un campo interno lungo l'asse pressoché indipendente da z e pari a $B_0 = \mu_0 i n$. E' inoltre possibile dimostrare che il campo esterno a un solenoide di lunghezza infinita è nullo. Sulla base di queste considerazioni potremmo applicare il teorema di Ampère per determinare il campo assiale in un solenoide di lunghezza infinita. Scegliamo un percorso amperiano come quello mostrato in figura. L'integrale sui percorsi parziali 1 e 3 è nullo in quanto il campo è nullo o ortogonale alla linea di integrazione. Sul percorso 2 il campo è nullo, mentre l'unico contributo viene dal percorso 4. Di qui segue:

$$B_0 L = \mu_0 i n L \rightarrow B_0 = \mu_0 i n.$$



1. Equazioni di Maxwell stazionarie e spunti di riflessione per il caso non stazionario

Vogliamo adesso trattare il caso in cui i campi elettrici e magnetici non presentano caratteristiche di stazionarietà. In questa condizione i campi dipendono, oltre che dalle coordinate spaziali, anche dal tempo. Per semplicità svilupperemo i nostri ragionamenti in assenza di materia (nel vuoto). Fino a questo momento disponiamo della seguente sintesi dei fenomeni elettromagnetici:

$$\begin{array}{ll} (I) & \Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ (II) & \Phi(\vec{B}) = 0 \\ (III) & \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ (IV) & \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \end{array}$$

Le precedenti, che descrivono l'elettrostatica e la magnetostatica, sono la *forma integrale* delle *equazioni di Maxwell nel caso stazionario*. L'analisi delle precedenti mostra come, almeno in apparenza, le equazioni per i campi \vec{E} e \vec{B} siano disaccoppiate. Questa situazione è alquanto insoddisfacente. Infatti la sorgente del campo di induzione magnetica è rappresentata da cariche in movimento, mentre il campo elettrostatico è generato da accumuli di cariche in quiete. I concetti di moto e quiete non sono tuttavia invarianti al variare del sistema di riferimento. Per questa ragione è possibile scegliere un riferimento in cui le cariche mobili risultano in quiete. In questo nuovo riferimento non sono presenti sorgenti del campo di induzione magnetica (che risulta quindi assente), mentre esistono accumuli di carica in quiete che danno origine a un campo elettrico.

Da questo semplice argomento intuiamo che deve esistere una forma di accoppiamento tra le equazioni e che i campi introdotti fin qui devono essere parte di un nuovo ente fisico. In questa prospettiva, il campo elettrico e il campo magnetico sono solo manifestazioni parziali di quest'ente. L'ente fisico di cui stiamo parlando è *il campo elettromagnetico*.

L'inadeguatezza delle equazioni sin qui derivate nel descrivere una situazione non stazionaria emerge da varie considerazioni. Prima di esporle, osserviamo che è un fatto sperimentalmente verificato che le equazioni (I) e (II) mantengono la loro validità anche nel caso non stazionario ed assumono la forma:

$$\Phi(\vec{E}(x, y, z, t)) = \frac{Q_{int}(t)}{\epsilon_0} \quad \Phi(\vec{B}(x, y, z, t)) = 0.$$

Non è questa la sorte della terza e della quarta equazione di Maxwell, che richiedono invece di essere modificate in condizioni non stazionarie.

2. Terza equazione di Maxwell per il caso non stazionario

La necessità di modificare la (III) equazione di Maxwell emerge chiaramente da una serie di fatti sperimentali che ci accingiamo a descrivere.

Consideriamo un circuito privo di generatore e munito di galvanometro, strumento in grado di misurare l'eventuale passaggio di corrente nel circuito. Se il circuito sopra descritto, che chiamiamo circuito misuratore, non viene perturbato il galvanometro non misurerà alcun passaggio di corrente. Una corrente è invece rilevata nelle seguenti circostanze.

- Quando il circuito misuratore si trova nelle vicinanze di un secondo circuito nel quale scorre una corrente variabile nel tempo.
- Quando il circuito misuratore si trova nelle vicinanze di un secondo circuito in moto relativo rispetto ad esso.
- Quando viene avvicinato o allontanato un magnete permanente al circuito misuratore.
- Quando il circuito misuratore viene deformato in presenza di un campo di induzione magnetica.

In tutte queste circostanze si genera nel circuito misuratore (dotato di galvanometro) una corrente. L'assenza di un generatore di forza elettromotrice che spieghi l'origine della corrente misurata porta a concludere che in tutte le menzionate situazioni viene generata una *forza elettromotrice indotta*. Quest'ultima deve essere generata dalle azioni che vengono effettuate nelle immediate vicinanze del circuito misuratore. Se questa è la situazione non potrà che essere:

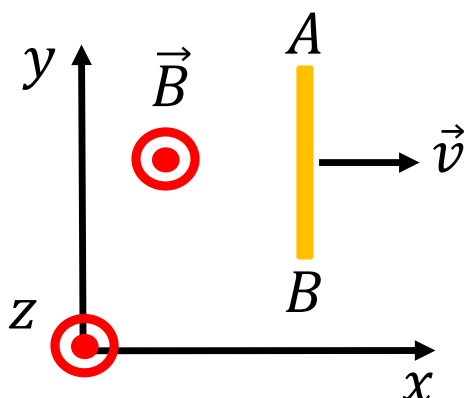
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0,$$

cosa che immediatamente invalida la (III). Questo implica che il campo elettrico perde la sua natura conservativa in condizioni non stazionarie. Nonostante abbiamo riconosciuto

gli effetti di una *forza elettromotrice indotta*, non abbiamo tuttavia precisato quale sia l'origine di quest'ultima. Cerchiamo di chiarire questo aspetto nel successivo paragrafo.

3. Una situazione istruttiva

Supponiamo di voler descrivere i fenomeni elettromagnetici che hanno luogo in una barretta conduttiva che trasla con velocità $\vec{v} = v \hat{x}$ in un



campo di induzione magnetica $\vec{B} = B \hat{z}$ perpendicolare al piano xy (in cui avviene in moto della barretta) e da esso uscente. Sia \vec{v} costante nel tempo.

Gli elettroni di conduzione nella barretta, essendo ad essa solidali, subiscono una forza di Lorentz pari a

$$\vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

dove $e > 0$, mentre abbiamo assunto che la velocità media degli elettroni coincida con \vec{v} . Tale forza risulta parallela alla barretta conduttrice e diretta da B verso A , ossia $\vec{F}_L = evB \hat{y}$. Sotto l'azione della forza di Lorentz gli elettroni liberi migrano da B verso A , determinando un accumulo di cariche negative in A ed un eccesso di cariche positive in

B . Gli accumuli di carica sugli estremi del conduttore sono sorgenti di un campo elettrico diretto lungo la barretta uscente dalle cariche positive ed entrante nelle negative. La forza dovuta a tale campo ed agente sugli elettroni vale $\vec{F}_C = -eE \hat{y}$ (con $E > 0$). Essa contrasta la forza di Lorentz. Infatti mentre la forza di Lorentz favorisce l'accumulo di carica agli estremi della barretta, proprio tali accumuli generano un campo elettrico di intensità crescente che tende ad annullare l'effetto della forza di Lorentz. In condizioni stazionarie le due forze si equilibrano e gli elettroni non risentono di alcuna forza netta. In questa situazione $|\vec{F}_L| = |\vec{F}_C|$, da cui segue:

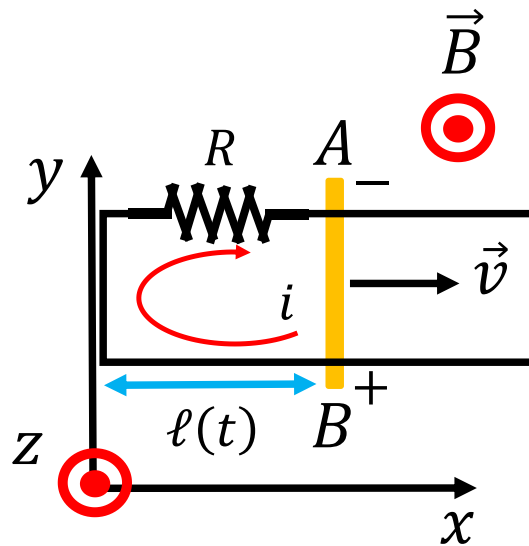
$$eE = evB \rightarrow E = vB.$$

In queste condizioni, si genera una differenza di potenziale agli estremi della barretta. Essa può essere valutata ricorrendo alla definizione:

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_B^A (vB \hat{y}) \cdot \hat{y} dy = -vBL, \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con L la lunghezza della barretta. Qui notiamo esplicitamente che la precedente è scritta in condizioni elettrostatiche (cariche ferme nel sistema solidale con la barretta).

Supponiamo adesso che la barretta sia il lato mobile del circuito resistivo mostrato in figura. Per effetto della differenza di potenziale tra A e B nel circuito scorrerà la corrente i indotta dalla forza elettromotrice generata dalla



forza di Lorentz. Da questa considerazione ricaviamo che la *forza elettromotrice indotta* f vale:

$$f = -BvL.$$

Detta $\ell(t)$ la lunghezza del ramo contenente il resistore, possiamo scrivere:

$$\ell(t) = \ell_0 + vt.$$

Notiamo poi che l'area definita dalla maglia del circuito vale:

$$\mathcal{A}(t) = L(\ell_0 + vt).$$

A questo punto è anche evidente che:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(t) = vL.$$

Alla luce di queste valutazioni potremmo anche scrivere:

$$f = -BvL = -B \frac{d}{dt}\mathcal{A}(t) = -\frac{d}{dt}(B\mathcal{A}(t)).$$

Essendo $f = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$, si è quindi ottenuto:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}(B\mathcal{A}(t)).$$

La fenomenologia sopra richiamata suggerisce che la forza elettromotrice indotta possa essere legata alla variazione temporale del flusso del campo di induzione magnetica. Questa idea ci fa interpretare la quantità $B\mathcal{A}(t)$ come il flusso del campo attraverso una arbitraria superficie (non chiusa) che abbia come bordo il circuito di area variabile. Da queste considerazioni saremmo tentati di scrivere, con un volo pindarico, la seguente relazione:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}(\Phi_{\Sigma(t)}(\vec{B})),$$

dove abbiamo introdotto il flusso attraverso una superficie variabile nel tempo:

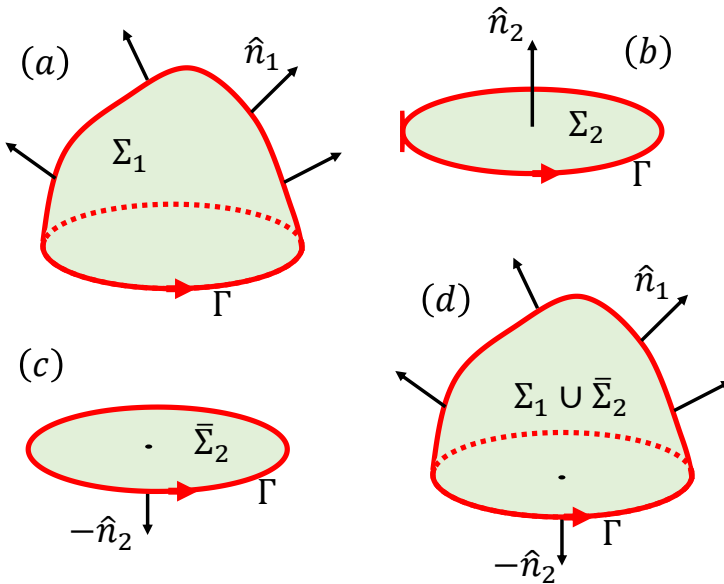
$$\Phi_{\Sigma(t)}(\vec{B}) = \int_{\Sigma(t)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \hat{z} \int_{\Sigma(t)} dS = \vec{B} \cdot \hat{z} \mathcal{A}(t).$$

Quella appena derivata è la *legge di Lenz-Neumann-Faraday del fenomeno dell'induzione elettromagnetica*. La validità generale della relazione trovata può essere dimostrata rigorosamente. E' interessante notare come il flusso del campo di induzione magnetica

possa variare nel tempo per differenti ragioni (variazione temporale del campo, deformazione del circuito in campo uniforme, moto arbitrario del circuito in campo uniforme). Nonostante ciò la struttura dell'equazione integrale

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}(\Phi_{\Sigma}(\vec{B})),$$

resta preservata. Essa rappresenta quindi la forma integrale della (III) equazione di Maxwell in condizioni non stazionarie.



E' importante precisare che il flusso del campo magnetico $\Phi_{\Sigma}(\vec{B})$ è calcolato attraverso una qualsiasi superficie Σ che ha per bordo la linea su cui è calcolata la circuitazione. In questo modo, date le superfici orientate Σ_1 e Σ_2 aventi per bordo la stessa curva Γ , si ha $\Phi_{\Sigma_1}(\vec{B}) = \Phi_{\Sigma_2}(\vec{B})$.

Questa proprietà deriva dal fatto che il campo magnetico ha flusso nullo attraverso qualsiasi superficie chiusa.

Una superficie chiusa può essere

ottenuta invertendo il segno delle normali della superficie Σ_2 e considerando la superficie chiusa risultante dall'unione $\Sigma_1 \cup \bar{\Sigma}_2$, dove abbiamo indicato con $\bar{\Sigma}_2$ la superficie che si ottiene invertendo le normali di Σ_2 . In questo modo si ha:

$$0 = \Phi_{\Sigma_1 \cup \bar{\Sigma}_2}(\vec{B}) = \Phi_{\Sigma_1}(\vec{B}) + \Phi_{\bar{\Sigma}_2}(\vec{B}) = \Phi_{\Sigma_1}(\vec{B}) - \Phi_{\Sigma_2}(\vec{B}) \rightarrow \Phi_{\Sigma_1}(\vec{B}) = \Phi_{\Sigma_2}(\vec{B}),$$

dove abbiamo usato la proprietà $\Phi_{\bar{\Sigma}_2}(\vec{B}) = -\Phi_{\Sigma_2}(\vec{B})$. La precedente dimostra l'asserto.

4. Quarta equazione di Maxwell per il caso non stazionario

(Legge di Ampère-Maxwell)

Analizziamo una situazione sperimentale che mostra la necessità di rivedere la quarta equazione di Maxwell (teorema di Ampère) nel caso non stazionario. Consideriamo il circuito in figura che mostra il processo di carica di un condensatore. Sappiamo che tale

processo è caratterizzato dalla presenza di una corrente transiente ed è quindi una situazione non stazionaria (ad esempio, la corrente dipende dal tempo). Consideriamo la circuitazione per una linea amperiana che si concateni con la corrente entrante nel condensatore. In questa condizione sembrerebbe lecito scrivere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i,$$

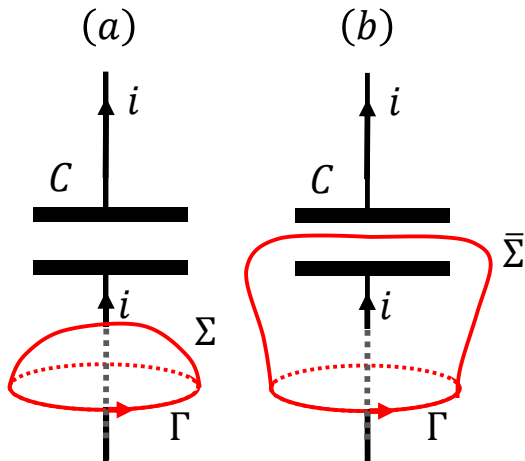
dove il campo \vec{B} , generato dalla corrente i variabile nel tempo, deve essere a sua volta variabile. Inoltre sappiamo che nel processo di carica del condensatore vale la relazione:

$$i = \frac{dq}{dt},$$

con q la carica che si deposita sull'armatura positiva del condensatore. D'altra parte la corrente i può essere anche vista come il flusso del vettore densità di corrente \vec{J} attraverso una arbitraria superficie che ha per bordo la linea amperiana scelta per il calcolo della circuitazione. Ossia

$$i = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

Data l'arbitrarietà della superficie, abbiamo la libertà di deformare Σ e trasformarla in $\bar{\Sigma}$ che non è attraversata dal conduttore in nessun punto. Con questa scelta, non essendo presente alcuna corrente densità di corrente tra le armature del condensatore, dovremmo ottenere in contrasto con il precedente risultato:



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{\bar{\Sigma}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Questo argomento mette in luce l'inadeguatezza della quarta equazione di Maxwell nel caso non stazionario in quanto dovrebbe valere la relazione:

$$\int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\bar{\Sigma}} \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

Per sanare questa inconsistenza della teoria servirebbe includere un ulteriore *termine di corrente* nel teorema di Ampère che *curi* il problema. Supponiamo che questo contributo aggiuntivo alla corrente sia fisicamente ammissibile e sia esso i_s . Questo termine dovrebbe entrare nella quarta equazione di Maxwell nel modo seguente:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(i + i_s).$$

In questo modo, considerando la superficie Σ , si avrebbe:

$$i + i_s = \int_{\Sigma} (\vec{J} + \vec{J}_s) \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} \equiv i,$$

mentre considerando la superficie $\bar{\Sigma}$ si dovrebbe avere:

$$i + i_s = \int_{\bar{\Sigma}} (\vec{J} + \vec{J}_s) \cdot d\vec{S} = \int_{\bar{\Sigma}} \vec{J}_s \cdot d\vec{S} \equiv i_s.$$

Pertanto la i_s , che gioca un ruolo rilevante tra le armature del condensatore, deve rispettare la relazione:

$$i_s = \int_{\bar{\Sigma}} \vec{J}_s \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

D'altra parte, osservando che vale la relazione $q = \varepsilon_0 |\vec{E}| S$, si ha:

$$\int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = i = \frac{dq}{dt} = \varepsilon_0 S \frac{d|\vec{E}|}{dt},$$

dalla quale immediatamente risulta:

$$i_s = \varepsilon_0 S \frac{d|\vec{E}|}{dt}.$$

La precedente è la forma particolare della più generale relazione:

$$i_s = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt},$$

che definisce le cosiddette *correnti di spostamento*. Tali correnti sono originate dalla variazione temporale del flusso del campo elettrico. Tale flusso è calcolato attraverso una qualsiasi superficie che abbia la linea di circuitazione come bordo. Otteniamo quindi la quarta equazione di Maxwell per il caso non stazionario nella forma:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(i + i_s) = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right).$$

La precedente è anche nota come equazione di Ampère-Maxwell.