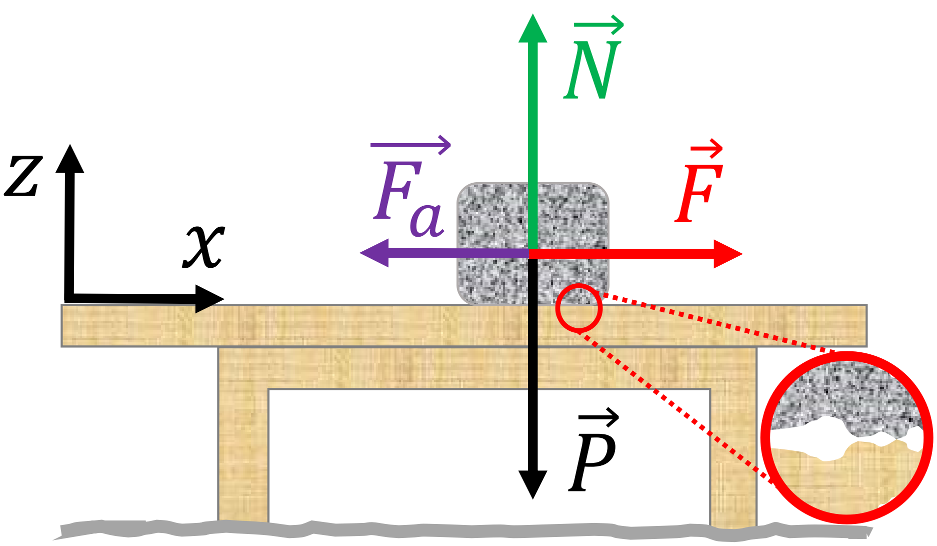
1. La forza d'attrito

Abbiamo visto come un piano costituisca un vincolo per il moto di un corpo poggiato su di esso. Il vincolo si manifesta come una forza, detta reazione vincolare normale, che impedisce al corpo di occupare alcune regioni dello spazio. Un corpo poggiato su un piano sperimenta anche azioni meccaniche tangenziali alla superficie. Queste ultime sono forze, dette genericamente *forze di attrito*, che si oppongono allo scivolamento del corpo sulla superficie di appoggio. A volte, per semplificare l'analisi di una data situazione reale, si ammette che l'influenza dell'attrito sia trascurabile. In questa situazione idealizzata si asserisce che la *superficie è liscia o priva di attrito*.

Le forze di attrito sono la manifestazione macroscopica della complessa interazione tra la superficie del piano d'appoggio e la porzione del corpo a contatto con essa. Per semplificare la trattazione, le forze di attrito sono modellate in vari modi a seconda della situazione in esame. Per i nostri scopi è sufficiente distinguere tra *attrito radente statico e dinamico*. *L'attrito radente è la forza che si oppone allo slittamento di un corpo su un piano*. Un'altra forma di attrito, che non esamineremo, è *l'attrito volvente* che contrasta il rotolamento di un corpo (ad esempio una ruota).



Presentiamo le caratteristiche dell'*attrito radente statico* o semplicemente *attrito statico*. Consideriamo un corpo di massa m poggiato su un piano orizzontale. Sia il piano non ideale (ruvido) e supponiamo di applicare una forza $\vec{F}$ al corpo. Osserviamo che se il modulo della forza applicata non supera un certo valore di soglia il corpo non si muove. Questa situazione ci è ben nota. Se proviamo a spingere un pesante armadio questo non si sposterà, nonostante i nostri sforzi, fin quando non saremo in grado di applicare una forza di sufficiente intensità. Inoltre il modulo della forza necessaria a vincere l'attrito è tanto maggiore quanto maggiore è la massa del corpo da spingere. La forza che si oppone al movimento è la forza di attrito statico. Uno studio sistematico della forza di attrito statico ne mette in luce le seguenti proprietà generali:

1) Il modulo della forza d'attrito statico dipende dalle proprietà dei materiali di cui sono fatte le superfici a contatto;

2) Il modulo della forza d'attrito statico non di pende dall'estensione della superficie di contatto.

Da un punto di vista microscopico, infatti, la forza d'attrito è determinata da microrugosità delle superfici e dalla loro saldatura per contatto. Queste saldature possono essere rimosse applicando una forza esterna di sufficiente intensità. La seconda proprietà si spiega osservando che i punti di contatto tra un corpo poggiato ed il piano d'appoggio sono in realtà relativamente pochi e in numero indipendente dall'estensione della superficie di contatto.

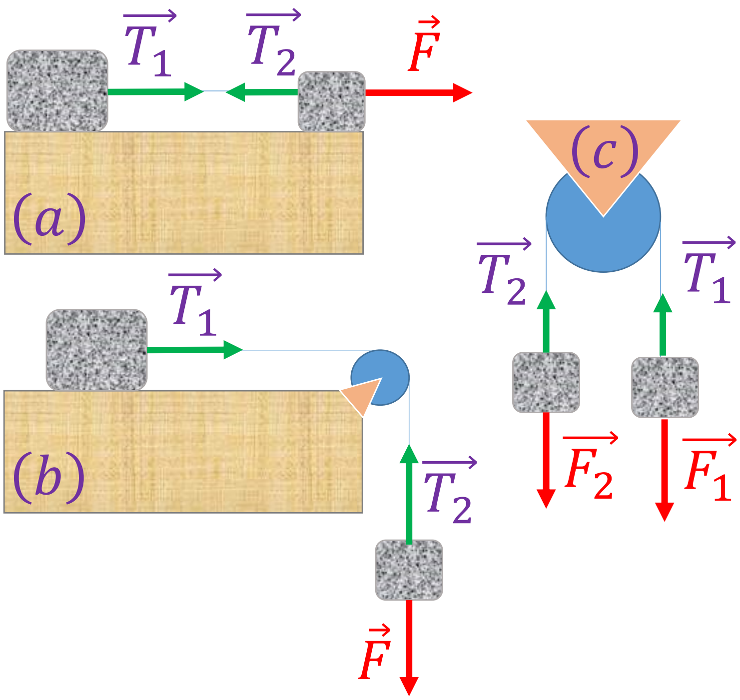
La precedente discussione delinea una serie di proprietà della forza di attrito statico.

1) La forza di attrito statico si oppone all'azione di forze che promuovono lo slittamento di un corpo su una superficie e non opera in assenza di tali forze. La direzione della forza di attrito coincide con quella della forza applicata, mentre il verso è opposto ad essa.
2) Detto f_s il modulo della forza di attrito statico vale la relazione $f_s \leq \mu_s|\vec{N}|$, dove $|\vec{N}|$ rappresenta il modulo della reazione vincolare normale al piano (che dipende dall'inclinazione del piano rispetto all'orizzontale) mentre μ_s è un numero puro detto coefficiente di attrito statico. Il coefficiente di attrito statico dipende dalla coppia di materiali a contatto.

La relazione $f_s \leq \mu_s|\vec{N}|$ mostra come la forza di attrito statico sia in grado di equilibrare forze di modulo massimo $\mu_s|\vec{N}|$. Pertanto, un corpo non si muove sotto l'azione simultanea della forza d'attrito e della forza applicata $\vec{F}$ se $|\vec{F}| \leq \mu_s|\vec{N}|$. Nel momento in cui il modulo della forza applicata supera il valore di soglia $\mu_s|\vec{N}|$, la forza d'attrito statico non è più in grado di equilibrare il sistema e il corpo inizia a muoversi.

Il regime dinamico, ossia la situazione in cui il corpo è in movimento, è caratterizzato dalla presenza di una *forza di attrito dinamico*. Questa forza è collineare alla forza applicata, ha verso opposto e modulo pari a $f_d = \mu_d|\vec{N}|$, dove $\mu_d < \mu_s$ è il coefficiente di attrito dinamico. La forza di attrito dinamico, inoltre, non dipende dalla velocità con la quale il corpo trasla. Dalle precedenti si evince facilmente che il modulo della forza di attrito dinamico è inferiore a quello della forza di attrito statico.
L'esperienza ci conferma che per mettere in moto un pesante armadio occorre sforzarsi maggiormente di quanto occorra fare per tenere l'armadio in movimento una volta avviato.

2. Funi e carrucole ideali

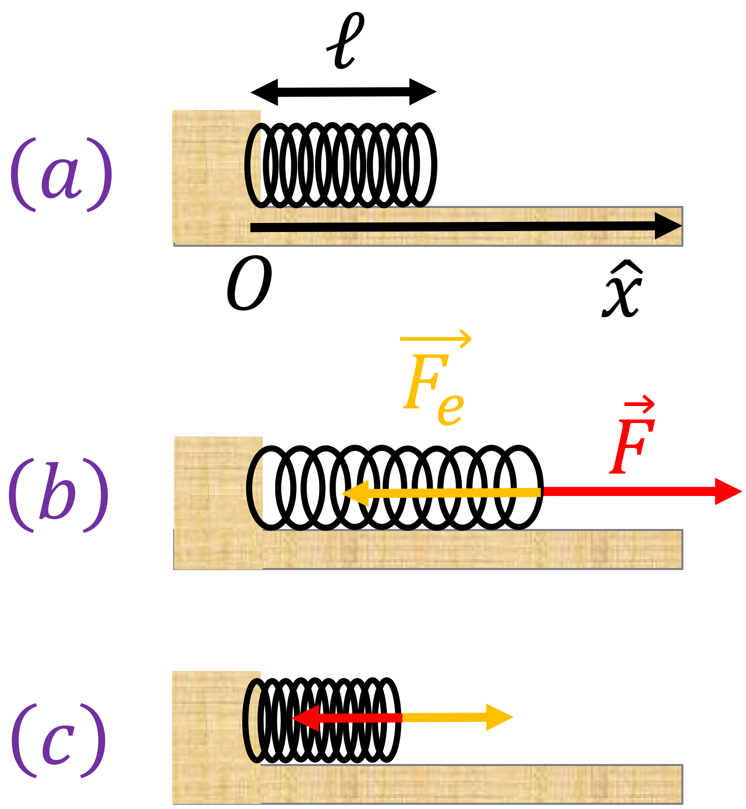


Una fune ideale è un elemento lineare inestensibile e di massa irrilevante capace di esercitare azioni meccaniche sui corpi ad essa collegati. Un tale elemento vincola i corpi a cui è collegata a non poter eccedere una distanza pari alla sua lunghezza. Le forze che una fune ideale può applicare sono forze di trazione. In altre parole una fune ideale può tirare un corpo, ma non può spingerlo. Di conseguenza una fune ideale si comporta come un particolare tipo di vincolo. Tale vincolo non può impedire che due corpi si collochino a distanza minore della lunghezza della fune. Quando una fune è fissata ad un corpo ed è in trazione si dice che essa è in *tensione*. La fune esercita sul corpo una forza il cui punto di applicazione è il punto di fissaggio. Tale forza è collineare alla direzione individuata dalla fune ed ha verso uscente dal corpo. La tensione della fune è il modulo della forza di trazione. Le forze applicate alle estremità della fune hanno uguale modulo. Tali proprietà derivano dall'idealità della fune e sono dirette conseguenze del terzo principio della dinamica. Nelle situazioni presentate in figura (a)-(c) si considerano funi e carrucole ideali. Una carrucola ideale può ruotare senza alcun attrito ed è priva di massa. Queste due proprietà la rendono un elemento meccanico idealizzato in grado ridirezionare le forze di tensione presenti ai capi di una fune ideale. In tutte le situazioni mostrate in figura vale la relazione $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$.

3. La forza elastica

Esistono corpi che subiscono deformazioni reversibili quando sono sottoposti ad azioni meccaniche di opportuna entità. Una deformazione reversibile è una variazione della geometria del corpo non più osservabile quando la causa della deformazione cessi di operare. I corpi deformabili in modo reversibile si dicono *elastici*. Quando un corpo elastico viene deformato si generano forze di risposta alla deformazione che tendono a riportare il sistema all'iniziale geometria.

Un semplice sistema elastico unidimensionale è costituito da una molla ideale. Se si sollecita l'estremo libero della molla, questa genererà una forza elastica collineare alla



forza deformante ed avente verso opposto. Il modulo della forza elastica risulta proporzionale all'entità della deformazione. Questa fenomenologia è sintetizzata dalla legge di Hooke

$$\overrightarrow{F_e} = -k(x - \ell)\,\hat{x},$$

dove k viene detta costante elastica, ℓ rappresenta la lunghezza a riposo della molla, mentre $x\,\hat{x}$ rappresenta il vettore posizione dell'estremo libero della molla. La forza elastica agente sull'estremo libero della molla è nulla in assenza di deformazioni ($x = \ell$). Se la molla viene allungata portando l'estremo libero in $x > \ell$, la reazione elastica ha verso opposto a quello di $\hat{x}$. Se la molla viene compressa ($x < \ell$) la reazione elastica sarà concorde con $\hat{x}$.

Quanto vale la deformazione della molla quando viene applicata la forza $\vec{F} = F\,\hat{x}$ al suo estremo libero?

L'estremo libero sarà in equilibrio quando viene raggiunta la condizione

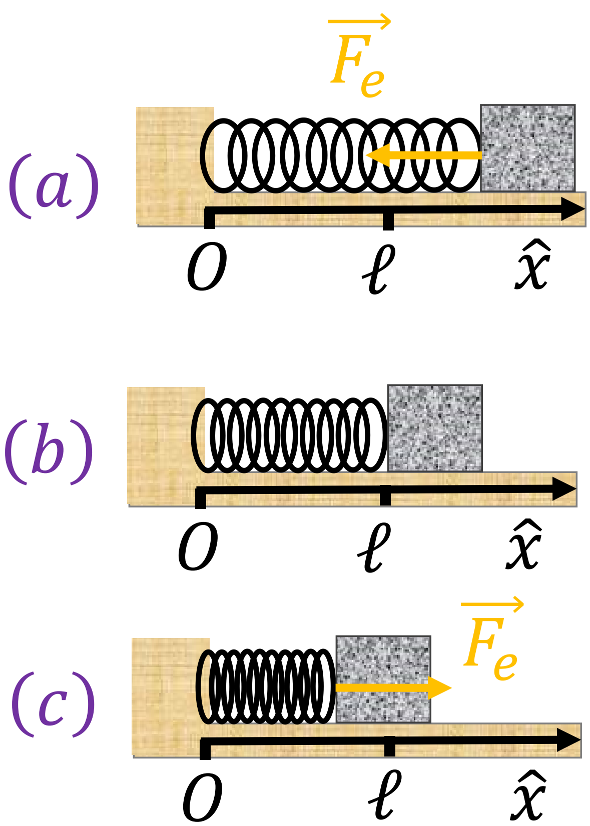
$$\vec{F} + \overrightarrow{F_e} = 0,$$

dalla quale segue

$$\hat{x}\big(F - k(x - \ell)\big) = 0 \rightarrow (x - \ell) = \frac{F}{k}.$$

Notiamo esplicitamente che la deformazione $(x - \ell)$ indotta dalla forza applicata è tanto più piccola quanto maggiore risulta essere la costante elastica k. Nel SI l'unità di misura della costante elastica è il N/m.

La relazione di proporzionalità diretta tra il modulo della forza applicata e la deformazione subita dalla molla può essere utilizzata per costruire *strumenti che misurino l'intensità delle forze*. La costruzione di tali strumenti richiede *la taratura della molla*, operazione che consiste nel determinare il regime elastico e la costante elastica ad esso associata. Questi strumenti si chiamano *dinamometri*.



Vogliamo adesso descrivere il moto di un corpo di massa m soggetto alla sola forza elastica. Supponiamo tale corpo poggiato su un piano orizzontale privo di attrito. Dal secondo principio della dinamica sappiamo che il moto del corpo è determinato dall'equazione differenziale:

$$m\,\vec{a} = -k(x-\ell)\,\hat{x},$$

con $\vec{a} = a\,\hat{x}$. La precedente può scriversi nella forma seguente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x-\ell) \;\rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}(x-\ell) = 0$$

$$\rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(x-\ell) = 0,$$

dove abbiamo introdotto la pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$. La precedente può scriversi rispetto alla posizione di equilibrio del corpo introducendo la nuova variabile $\xi = x - \ell$. Notiamo che vale la relazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

Pertanto l'equazione della dinamica assume la forma seguente:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi = 0,$$

che è l'equazione di un moto armonico. La soluzione generale dell'equazione

$$\xi(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

è parametrizzata da due costanti A e B che sono determinate in modo univoco assegnando due condizioni iniziali. Queste sono la posizione e la velocità iniziale. Siano le condizioni iniziali date nella forma $\xi(0) = \xi_0$ e $\xi'(0) = 0$. Dalle condizioni iniziali seguono le relazioni

$$\xi(0) = A\sin(0) + B\cos(0) = B \rightarrow B = \xi_0$$
$$\xi'(0) = A\omega\cos(0) - B\omega\sin(0) = A\omega \rightarrow A = 0.$$

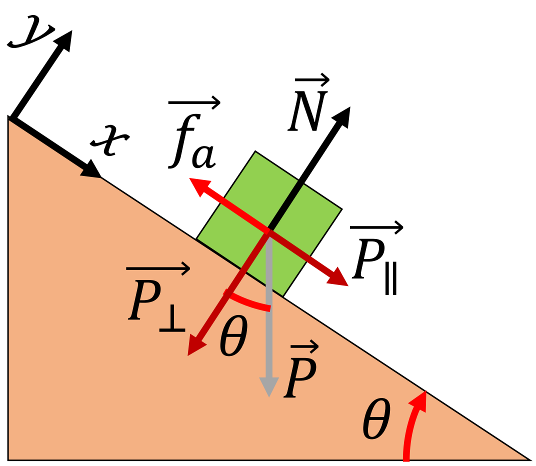
Pertanto la soluzione cercata assume la forma

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t)$$
$$\xi'(t) = -\omega\, \xi_0 \sin(\omega t)^{\cdot}$$

La soluzione trovata descrive una massa che oscilla indefinitamente sotto l'azione della forza elastica. Il perdurare nel moto nel tempo dipende dall'assenza di forze di attrito. Queste ultime, quando presenti, si oppongono istante per istante al moto e ne provocano l'estinzione, fenomeno questo che effettivamente si osserva nella realtà. Dalla forma delle quantità $\xi(t)$ e $\xi'(t)$ e ricordando la relazione trigonometrica fondamentale è facile rendersi conto della validità della seguente relazione

$$\left(\xi(t)\right)^2 + \left(\frac{\xi'(t)}{\omega}\right)^2 = (\xi_0)^2 \rightarrow k\, \xi(t)^2 + m\left(\xi'(t)\right)^2 = k(\xi_0)^2,$$

laddove la forma quadratica al primo membro rappresenta una *costante del moto*. Una costante del moto è una funzione della posizione e della velocità che rimane invariata nel tempo. La struttura matematica della costante del moto sarà ripresa nel seguito interpretandone il significato fisico.



Esempio 1

Sarebbe possibile determinare il coefficiente di attrito statico μ_s a partire da considerazioni sull'equilibrio di un corpo poggiato su un piano inclinato scabro?

Consideriamo l'equilibrio di un corpo nella situazione mostrata in figura. Sia il piano scabro ed inclinato dell'angolo θ. La condizione di equilibrio richiede il rispetto delle seguenti relazioni:

$$\hat{y}: N - mg\cos\theta = 0$$
$$\hat{x}: -f_a + mg\sin\theta = 0\,'$$

con $f_a \le \mu_s N$. L'equilibrio in direzione $\hat{x}$ sarà raggiunto se la forza di attrito statico potrà equilibrare la componente parallela al piano della forza peso. Supponiamo che l'inclinazione del piano possa essere variata con continuità e lentamente partendo da inclinazione nulla. Procedendo in questo modo si osserva che il corpo rimane in equilibrio fino a che non viene raggiunto un angolo massimo θ^*. Al superamento di questo angolo il corpo scivola lungo il piano inclinato. L'angolo θ^* è quello per il quale il modulo della forza di attrito statico risulta massimo. In questa condizione abbiamo $f_a^{max} = \mu_s mg\cos\theta^*$. Quindi l'equilibrio in direzione $\hat{x}$ si scrive nella forma

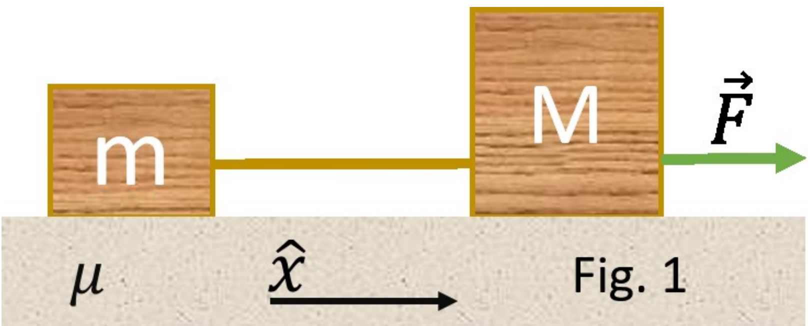
$$-\mu_s mg\cos\theta^* + mg\sin\theta^* = 0$$

dalla quale si ottiene immediatamente

$$\mu_s = \tan\theta^*.$$

Notiamo come la misura di θ^*consenta di determinare sperimentalmente il valore del coefficiente di attrito statico.

Esempio 2



Un sistema meccanico è costituito da due corpi di massa $M = 2.00\ kg$ e $m = 1.00\ kg$ poggiati su un piano scabro e collegati da una fune ideale (Fig. 1). Il coefficiente di attrito dinamico tra il piano e i due corpi vale $\mu = 0.100$. Al corpo di massa maggiore viene applicata una forza parallela al piano, avente modulo pari a $|\vec{F}| = 6.00\ N$, che mette in tensione la fune. Il carico di rottura della fune, cioè la tensione massima che essa può sostenere senza rompersi, vale $T_{Max} = 5.00\ N$. Schematizzando il sistema come un sistema di punti materiali, si determini:

a) Il modulo della forza di attrito che agisce su ciascun corpo.
b) L'accelerazione del sistema.
c) La tensione a cui è sottoposta la fune.
d) Il modulo della forza di intensità massima applicabile al sistema senza provocare la rottura della fune.
e) Il modulo della forza da applicare al sistema affinché quest'ultimo si muova di moto rettilineo uniforme. Nella situazione descritta si calcoli inoltre la tensione della fune.

Soluzione

I moduli delle forze di attrito agenti rispettivamente sul corpo di massa M ed m valgono:

$$|\vec{F_a}| = \mu M g \to 1.96\ N$$
$$|\vec{f_a}| = \mu m g \to 0.981\ N.$$

Dal secondo principio della dinamica applicato alle due masse possiamo scrivere le equazioni:

$$\begin{cases} ma = T - \mu mg \\ Ma = F - T - \mu Mg' \end{cases}$$

che legano l'accelerazione del sistema, $\vec{a} = a\hat{x}$, e la tensione della fune, $\vec{T} = T\hat{x}$. La soluzione del precedente sistema di equazioni lineari si scrive nella forma:

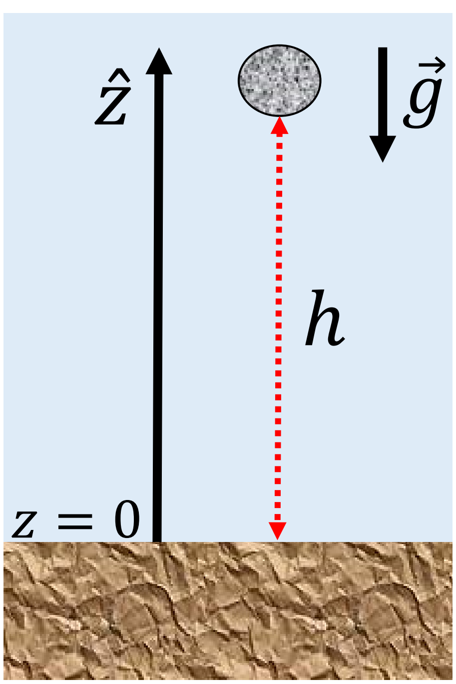
$$a = \frac{F - \mu g(m + M)}{m + M} \rightarrow 1.02\ m/s^2$$
$$T = \frac{m\,F}{m + M} \rightarrow 2.00\ N$$

Data la relazione fra la forza attiva $\vec{F} = F\,\hat{x}$ e la tensione, è possibile determinare il modulo della forza di intensità massima applicabile al sistema senza provocare la rottura della fune:

$$F_{max} = \frac{m + M}{m} T_{max} \rightarrow 15.0\ N.$$

Il sistema si muove di moto rettilineo uniforme quando la risultante delle forze globalmente agenti sul sistema è nulla. In questa condizione l'accelerazione del sistema è nulla. La condizione di accelerazione nulla si raggiunge quando $F = \mu g(m + M) \rightarrow 2.94\ N$. In questa circostanza la tensione vale $T = \mu mg \rightarrow 0.981\ N$.

Esempio 3



Un corpo che si muove in un fluido (come l'aria o l'acqua) è soggetto ad una forma di attrito detto *attrito del mezzo* (o resistenza del mezzo). Questa forma di attrito, assente nel vuoto, è originata dagli urti tra le molecole del fluido e il corpo in movimento. Per basse velocità la forza di attrito del mezzo prende la forma $\vec{R} = -\beta\,\vec{v}$, dove $\vec{v}$ rappresenta la velocità del corpo. Il coefficiente β dipende dalle proprietà del mezzo considerato e dalle caratteristiche geometriche del corpo. Per un corpo di forma sferica, avente raggio pari ad R, immerso in un fluido di viscosità η si ha $\beta = 6\pi\eta\ R$ (regime di Stokes).

Vogliamo studiare la caduta, dalla quota h, di un corpo di massa m nel campo della gravità terrestre tenendo conto della resistenza del mezzo. Sia nulla la velocità iniziale.

Scriviamo il secondo principio della dinamica:

$$m\vec{a} = \vec{R} + \vec{P} \rightarrow m\,\frac{d^2 z}{dt^2} = -\beta\,\frac{dz}{dt} - mg.$$

La precedente può anche scriversi in termini della velocità verticale nella forma seguente:

$$\begin{cases} v = \dfrac{dz}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} = -\gamma v - g \end{cases},$$

con $\gamma = \beta/m$. Dalla seconda delle precedenti otteniamo la relazione

$$dv = -(\gamma v + g)dt \rightarrow \frac{dv}{(\gamma v + g)} = -dt \rightarrow \int_0^{v(t)} \frac{dv'}{(\gamma v' + g)} = -\int_0^t dt'.$$

Trattiamo il primo integrale cambiando variabili di integrazione. Poniamo $s = \gamma v' + g$ e sia $ds = \gamma\, dv'$. Con questa posizione otteniamo

$$\begin{gathered} \int_0^{v(t)} \frac{dv'}{(\gamma v' + g)} = \int_g^{g+\gamma v(t)} \frac{ds}{\gamma s} = \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{g + \gamma v(t)}{g}\right) \\ -\int_0^t dt' = -t \end{gathered}.$$

Tenendo conto dei risultati precedenti possiamo quindi scrivere

$$\frac{g + \gamma v(t)}{g} = \exp(-\gamma t) \rightarrow v(t) = \frac{g}{\gamma}(\exp(-\gamma t) - 1)$$

$$\rightarrow v(t) = -\frac{mg}{\beta}(1 - \exp(-\gamma t)).$$

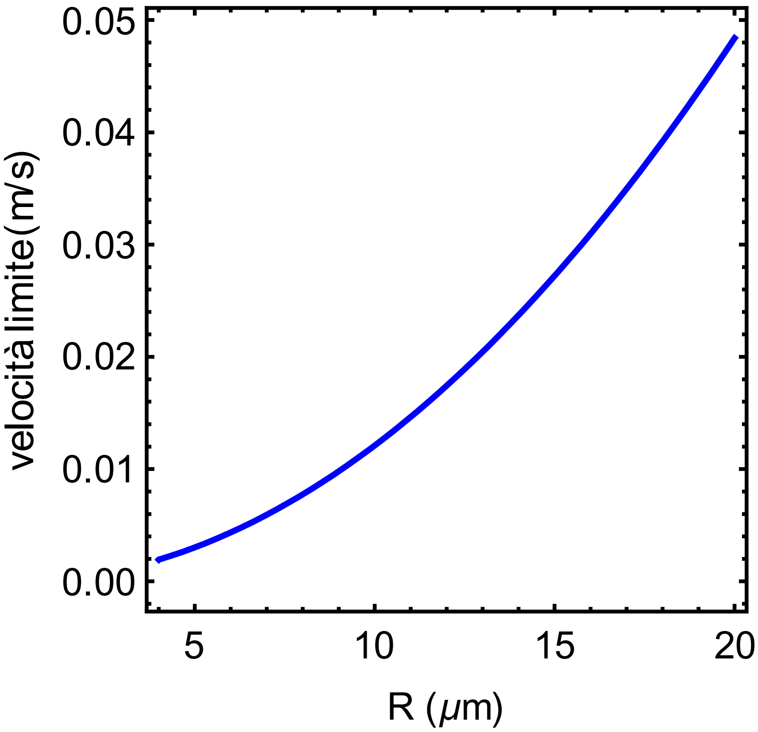
La precedente mostra l'effetto della resistenza del mezzo. Per tempi di caduta sufficientemente lunghi il corpo cessa di accelerare. In altre parole si raggiunge un equilibrio tra la forza peso e la resistenza del mezzo. In questa situazione il corpo si muove di moto rettilineo uniforme alla velocità limite data dalla relazione

$$v_L = -\frac{mg}{\beta}.$$

Integrando la velocità istantanea si ottiene la posizione in funzione del tempo nella forma seguente

$$z(t) - h = v_L \int_0^t (1 - \exp(-\gamma t'))\, dt' \rightarrow z(t) = h + v_L t - v_L \int_0^t \exp(-\gamma t')\, dt'$$

$$\rightarrow z(t) = h + v_L t + \frac{v_L}{\gamma}(\exp(-\gamma t) - 1).$$



Il tempo di volo, ossia il tempo occorrente al corpo per giungere al suolo, è dato dalla soluzione dell'equazione

$$h + v_L t + \frac{v_L}{\gamma}(\exp(-\gamma t) - 1) = 0.$$

La precedente è un'equazione trascendente (non polinomiale) e può essere risolta per via numerica o in modo approssimato. Qualche progresso può essere fatto riorganizzando l'equazione per il tempo di volo nella forma seguente:

$$-\frac{h\gamma}{|v_L|} + \gamma t + (\exp(-\gamma t) - 1) = 0$$

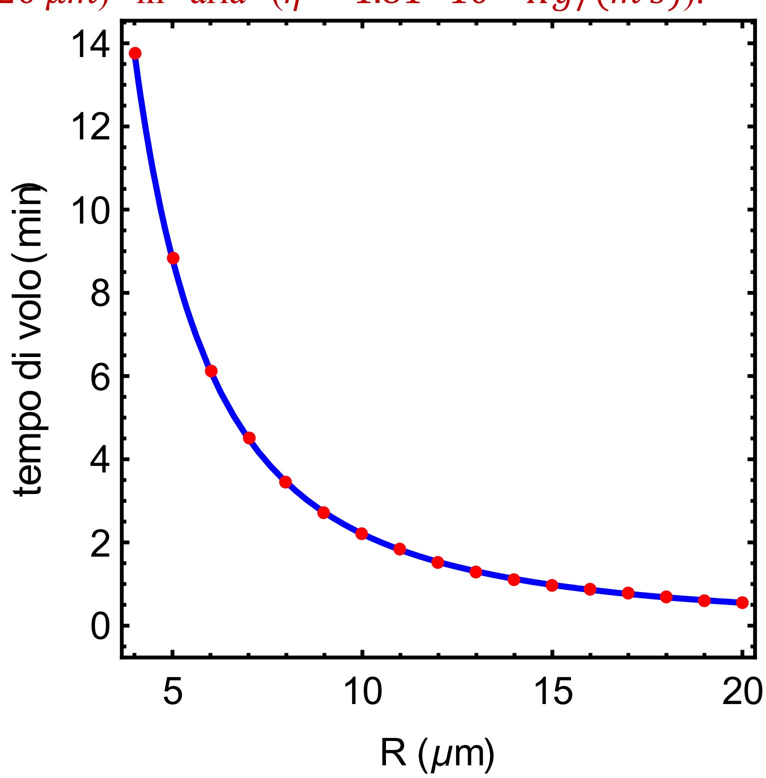
$$\rightarrow \gamma t + \exp(-\gamma t) = 1 + \frac{h\gamma}{|v_L|}.$$

Limitiamo la nostra attenzione al problema del tempo di caduta di una gocciolina d'acqua di raggio micrometrico ($R \approx 4\,\mu m - 20\,\mu m$) in aria ($\eta = 1.81 \cdot 10^{-5} Kg/(m\,s)$). Goccioline con queste caratteristiche sono continuamente emesse nella respirazione umana. In questa situazione, assumendo $h = 1.6\,m$, la quantità $\frac{h\gamma}{|v_L|}$ risulta molto maggiore di 1. Pertanto il tempo di volo prende la forma approssimata

$$t^* \approx \frac{h}{|v_L|}.$$

Tenendo conto che

$$|v_L| = \frac{2\rho g\, R^2}{9\eta},$$



si dimostra facilmente che esiste una relazione tra il tempo di caduta e il raggio delle goccioline. Tale relazione si scrive come segue:

$$t^* \approx \frac{9\,\eta\,h}{2\,\rho\,g\,R^2},$$

dove abbiamo introdotto la densità dell'acqua $\rho = 10^3\ Kg/m^3$. L'analisi numerica conferma la validità dei risultati approssimati qui presentati.