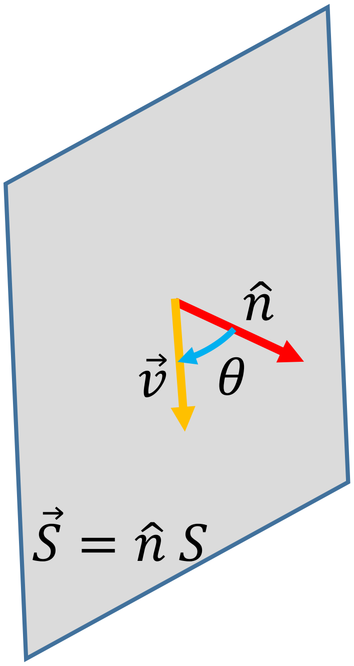
1. Flusso di un vettore attraverso una superficie

Uno degli strumenti matematici utili nella caratterizzazione di un campo vettoriale è il concetto matematico di *flusso di un vettore attraverso una superficie orientata*. Questo concetto, come vedremo, risulterà utile nello studio delle proprietà del campo elettrico generato da una assegnata sorgente.



Per tali fini è utile introdurre la nozione di flusso che di seguito dettagliamo. Sia $\vec{v}$ un vettore che rappresenta un campo vettoriale spazialmente uniforme. Sia $\vec{S} = \hat{n}\, S$ il *vettore area* costruito moltiplicando un versore $\hat{n}$ normale alla superfice per l'estensione S della stessa. Il flusso $\Phi_S(\vec{v})$ di $\vec{v}$ attraverso la superficie orientata è definito dalla quantità:

$$\Phi_S(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{S}.$$

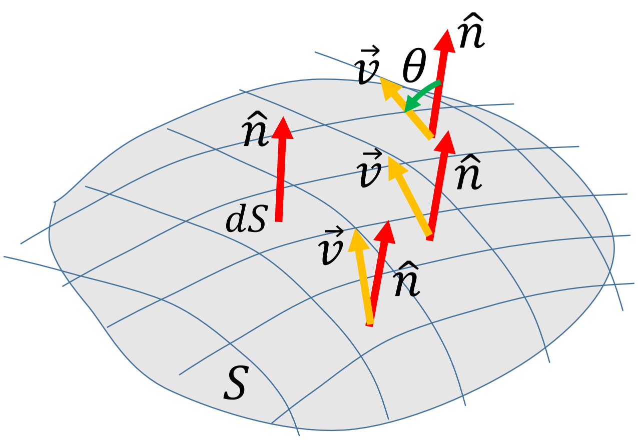
In effetti è bene notare che la scelta del versore normale ad una superficie non è univoca in quanto è possibile scegliere fra due orientamenti differenti. Nelle condizioni alquanto restrittive nelle quali ci siamo posti il vettore $\vec{v}$ è spazialmente uniforme e pertanto il suo valore è costante per ogni punto della superficie. Esso forma un angolo θ con la normale alla superficie. Il flusso del vettore attraverso la superficie può scriversi anche nella forma $\Phi_S(\vec{v}) = |\vec{v}| S \cos\theta$. Da queste considerazioni segue che a seconda dell'orientamento del vettore si possono avere valori del flusso positivi ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$), negativi ($\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$), o nulli ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Se $\vec{v}$ fosse il campo vettoriale delle velocità di un fluido che attraversa la sezione di una condotta, la quantità $\Phi_S(\vec{v})$ rappresenterebbe la portata di tale condotta. Quanto detto può essere compreso a livello intuitivo mediante l'analisi dimensionale. Infatti è semplice verificare quanto segue:

$$[\Phi_S(\vec{v})] = [|\vec{v}| S \cos\theta] = [|\vec{v}|][S] = \frac{L}{T} L^2 = \frac{L^3}{T}.$$

Nel SI l'unità di misura del flusso di un campo di velocità è il m^3/s, unità legata all'attraversamento della superficie di un dato volume di fluido per unità di tempo. Questo ci lascia intuire come il concetto matematico di flusso sia legato all'attraversamento di una superficie orientata.

Se la superficie attraverso la quale si voglia valutare il flusso non è una superficie piana, il versore normale non è globalmente definito. Per questa ragione la definizione di flusso sopra data deve essere rivista per includere questo caso generale. Tale definizione può però applicarsi localmente. Partizionando la superficie in porzioni infinitesime approssimabili con il piano tangente, è possibile individuare versori normali per ogni punto della superficie. Inoltre, in virtù di tale procedura, è anche possibile rimuovere l'ipotesi di campo vettoriale spazialmente uniforme.

Il concetto di flusso introdotto inizialmente deve essere applicato ad ogni porzione infinitesima della superficie che è localmente approssimabile come piana. Il flusso infinitesimo attraverso una di queste superfici elementari vale:



$$d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

Il flusso totale attraverso l'intera superficie si ottiene integrando:

$$\Phi_S(\vec{v}) = \int_S d\Phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

con $d\vec{S} = \hat{n}\, dS$ ed $\hat{n}$ un versore le cui componenti esplicitamente dipendono dal punto della superficie considerato.

Nel caso in cui la superficie attraverso la quale viene calcolato il flusso sia chiusa (frontiera bidimensionale di una regione tridimensionale) si usa la notazione:

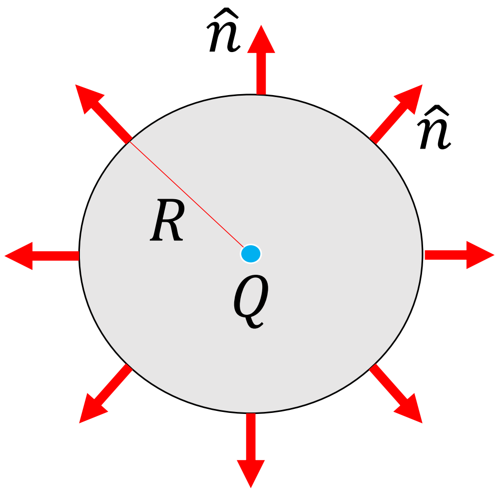
$$\Phi_S(\vec{v}) = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

che indica il flusso netto del campo attraverso la superficie orientata. In quest'ultimo caso si è soliti scegliere le normali uscenti dalla superficie.

Il concetto di flusso appena introdotto è in grado di mettere in evidenza una proprietà notevole del campo elettrico.

2. Flusso del campo elettrico prodotto da una sorgente puntiforme attraverso una superficie sferica

Vogliamo utilizzare il concetto di flusso per caratterizzare le proprietà del campo prodotto da una sorgente puntiforme. A tal riguardo supponiamo di disporre di una sorgente puntiforme con carica Q. Sia la carica posta nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano. In questo modo il campo elettrico generato nello spazio circostante prende la forma:



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|^2}\hat{r},$$

dove abbiamo introdotto il versore

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Calcoliamo il flusso del campo attraverso una superficie sferica di raggio R centrata nell'origine, laddove è posta anche la sorgente del campo. Il vettore area infinitesimo dipende dal punto considerato sulla superficie sferica ed ha direzione puramente radiale in ogni punto. Si ha quindi $d\vec{S} = \hat{r}\, dS$. Applichiamo la definizione di flusso del campo elettrico considerando la superficie sferica orientata sopra descritta:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\hat{r}\right)\cdot d\vec{S} = \oint_S \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\hat{r}\right)\cdot \hat{r}\, dS$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\int_S dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Nella derivazione del precedente risultato abbiamo esplicitamente notato che l'integrale restituisce la superficie totale della sfera:

$$\int_S dS = 4\pi R^2.$$

Si è inoltre osservato che il modulo del campo elettrico non dipende dal punto considerato sulla superficie sferica e vale

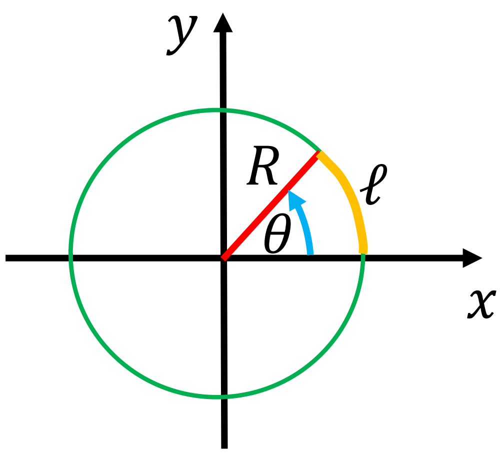
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{R^2}.$$

Siamo quindi giunti all'importante conclusione che, sotto le ipotesi fatte, vale la relazione:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

risultato quest'ultimo che non dipende dal raggio della superficie sferica considerata. Il valore del flusso risulta positivo o negativo a seconda del segno della carica Q.

Il risultato appena trovato può essere compreso più profondamente adottando un punto di vista differente. Questo richiede l'introduzione del concetto di angolo solido.

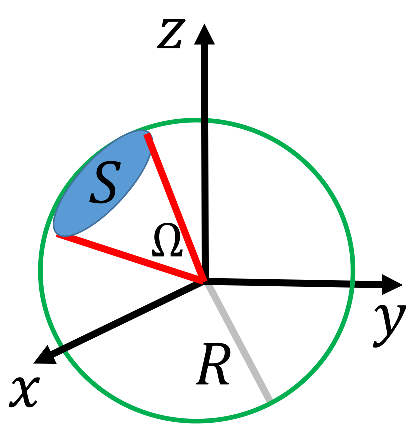


3. Cenni sul concetto di angolo solido

Nello studio della trigonometria piana viene introdotto il concetto di angolo. In particolare, l'angolo θ viene definito come il rapporto

$$\theta = \frac{\ell}{R},$$

con ℓ l'arco di circonferenza mostrato in figura. Alla luce della precedente è intuitivo osservare che l'angolo giro vale 2π radianti visto che in questo caso $\ell = 2\pi R$. La definizione di *angolo piano* sopra richiamata rimane indipendente dal valore di R.



Il concetto di angolo può essere generalizzato attraverso la nozione di *angolo solido*. Consideriamo a tal riguardo una superficie sferica di raggio R e su questa un'areola di estensione S. Definiamo angolo solido Ω sotto il quale è vista dall'origine tale areola la quantità indipendente dal raggio:

$$\Omega = \frac{S}{R^2}.$$

Essendo $4\pi R^2$ l'intera superficie della sfera, l'angolo solido totale vale 4π steradianti. Quando la superficie considerata è infinitesima, essa sottende un angolo solido infinitesimo e vale la relazione:

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{R^2}.$$

4. Riesame del flusso del campo elettrico prodotto da una sorgente puntiforme

Riesaminiamo il problema della determinazione del flusso del campo elettrico generato da una sorgente puntiforme alla luce del concetto di angolo solido. Ripercorrendo la precedente dimostrazione abbiamo:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\hat{r}\right)\cdot d\vec{S} = \oint_S \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{\hat{r}\cdot d\vec{S}}{R^2} = \oint_S \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{dS}{R^2}$$
$$= \int_\Omega \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right) d\Omega = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\int_\Omega d\Omega = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

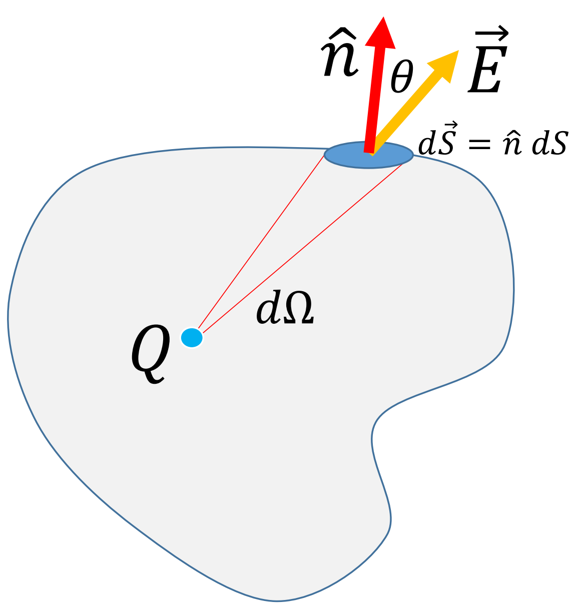
dove abbiamo utilizzato

$$\int_\Omega d\Omega = 4\pi.$$

Il precedente risultato può anche essere messo in forma differenziale secondo la scrittura:

$$d\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega.$$

Questa relazione mette in evidenza la natura speciale dei campi vettoriali che dipendono dall'inverso del quadrato della distanza. Solo in presenza di tale dipendenza è possibile ricostruire l'angolo solido infinitesimo all'interno dell'integrale del flusso. Questa osservazione è carica di conseguenze che nel seguito esporremo.



5. Flusso del campo elettrico prodotto da una sorgente puntiforme attraverso una superficie qualsiasi

Consideriamo una sorgente puntiforme racchiusa da una superficie arbitraria orientata Σ. Ripercorriamo il calcolo del flusso precedentemente discusso. Nel caso generale di una superficie arbitraria l'elemento di area infinitesimo vale $d\vec{S} = \hat{n}\, dS$ dove $\hat{n}$ è un versore normale dipendente dal punto considerato sulla superficie. Pertanto abbiamo:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_\Sigma \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|^2}\hat{r}\right)\cdot d\vec{S} = \oint_\Sigma \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|^2}\hat{r}\right)\cdot \hat{n}\, dS$$
$$= \oint_\Sigma \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{\hat{r}\cdot\hat{n}\, dS}{|\vec{r}|^2} = \oint_\Sigma \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{\cos\theta_n\, dS}{|\vec{r}|^2} = \int_\Omega \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right) d\Omega$$
$$= \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\int_\Omega d\Omega = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Nella derivazione abbiamo riconosciuto l'angolo solido infinitesimo:

$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta_n}{|\vec{r}|^2},$$

definito mediante la quantità ausiliaria $\hat{r}\cdot\hat{n} = \cos\theta_n$. Abbiamo quindi dimostrato che il flusso del campo elettrico generato da una carica puntiforme inclusa in una generica superficie orientata chiusa vale

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Il valore che il flusso assume risulta indipendente anche dalla posizione che la carica occupa all'interno della superficie.

6. Flusso del campo elettrico prodotto da più sorgenti puntiformi attraverso una superficie qualsiasi

Consideriamo N cariche puntiformi incluse in una superficie arbitraria. Il campo da esse prodotto è dato dal principio di sovrapposizione dal quale segue:

$$\vec{E} = \sum_{k=1}^{N} \vec{E}_k.$$

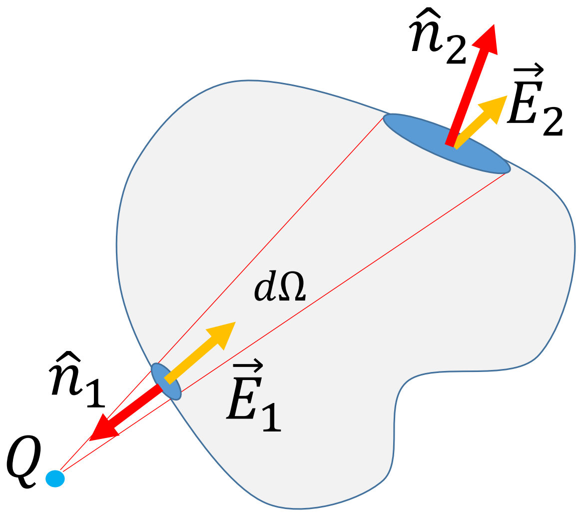
Il flusso di tale campo vale:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_\Sigma \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{E}_k\right)\cdot d\vec{S} = \sum_{k=1}^{N}\oint_\Sigma \vec{E}_k\cdot d\vec{S} = \sum_{k=1}^{N}\frac{Q_k}{\varepsilon_0}.$$

Pertanto il flusso del campo prodotto da N cariche interne ad una arbitraria superficie chiusa è dato dalla somma algebrica delle cariche (prese con il loro segno) divisa per la costante dielettrica del vuoto.

7. Flusso del campo generato da cariche esterne ad una superficie chiusa

Fino a questo momento abbiamo considerato sorgenti interne alla superficie chiusa. Esaminiamo il caso in cui sia presente un'unica sorgente puntiforme esterna ad una superficie chiusa. Il caso di più sorgenti esterne segue dal principio di sovrapposizione.



Consideriamo pertanto un cono che definisca l'angolo solido infinitesimo $d\Omega$ ed intersechi la superficie come mostrato in figura. I coni che non intersecano la superficie non contribuiscono al flusso e sono pertanto irrilevanti. Il flusso infinitesimo totale è somma di due contributi e risulta $d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2$. Valutiamo separatamente i due contributi. Abbiamo:

$$\begin{aligned} d\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 &= \left|\vec{E}_1\right| \cos\theta_1\, dS_1 \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_1^2}\cos\theta_1\, dS_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta_1\, dS_1}{r_1^2} \\ &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\cos\theta_1| dS_1}{r_1^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega. \end{aligned}$$

Valutiamo adesso $d\Phi_2$. Analogamente a quanto fatto in precedenza abbiamo:

$$d\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \left|\vec{E}_2\right| \cos\theta_2\, dS_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_2^2}\cos\theta_2\, dS_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta_2\, dS_2}{r_2^2} =$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega.$$

Dalle precedenti abbiamo ottenuto che $d\Phi_1 = -d\Phi_2$, cosa che implica $d\Phi = 0$. Risulta quindi dimostrato che il flusso prodotto dal campo generato da cariche esterne alla superficie chiusa non dà alcun contributo.

8. Il teorema di Gauss

I risultati parziali fin qui ottenuti procedendo per gradi sono aspetti particolari del più generale teorema di Gauss. Esso afferma che

Il flusso del campo elettrico nel vuoto attraverso una superficie chiusa (detta superficie gaussiana) è pari alla somma algebrica delle cariche interne a detta superficie divisa per la costante dielettrica del vuoto e si scrive

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0},$$

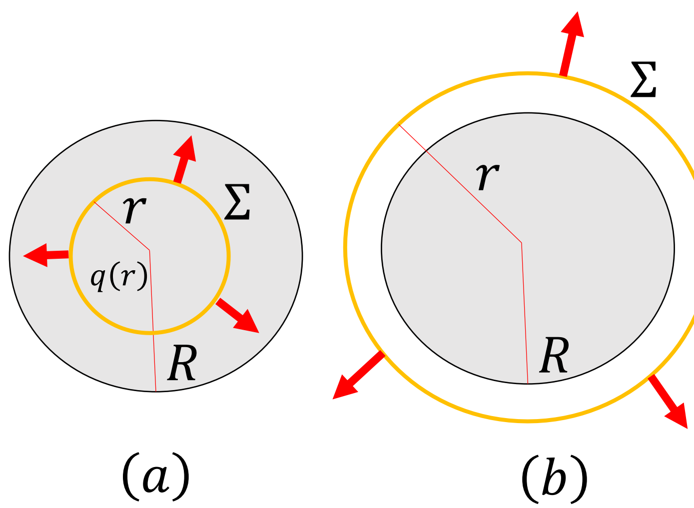
dove $Q^{int} = \sum_k Q_k$ rappresenta la somma algebrica delle cariche interne alla superficie.

La eventuale presenza di cariche esterne alla superficie non contribuisce al flusso. Il teorema che abbiamo provato nel caso di sorgenti puntiformi *vale anche per corpi carichi estesi*.

Il teorema consente inoltre di determinare in modo semplice il valore del campo elettrico prodotto da una assegnata sorgente laddove il sistema presenti un'appropriata simmetria. In quest'ultima situazione è infatti possibile scegliere una superficie gaussiana sulla quale sia costante punto per punto il modulo del campo elettrico. Con questa condizione il calcolo del flusso diviene immediato. Nel seguito mostreremo specifiche applicazioni di questa idea.

9. Campo elettrico generato da una sfera uniformemente carica

Un interessante problema è quello di determinare il campo elettrico generato da una sfera di raggio R sulla quale sia uniformemente distribuita una carica Q. Sia ρ la densità di carica per unità di volume definita dalla relazione $Q = \rho V$. Inoltre il volume della sfera vale



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ci troviamo di fronte ad un problema a simmetria sferica e pertanto ci aspettiamo che anche il campo elettrico risenta di tale simmetria. Calcoliamo dapprima il campo elettrico interno alla sfera. Applichiamo quindi il teorema di Gauss utilizzando come superficie gaussiana una superficie sferica orientata di generico raggio $r < R$ e centrata nel centro della distribuzione di carica. La simmetria ci assicura che il modulo del campo elettrico è costante sulla superficie gaussiana scelta. Dal teorema di Gauss abbiamo la relazione:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}| 4\pi r^2$$
$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}.$$

La carica $q(r)$ interna alla superficie gaussiana vale:

$$q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

Utilizzando questi risultati otteniamo:

$$\left|\vec{E}\right|4\pi r^2 = \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi r^3\rho \rightarrow \left|\vec{E}\right| = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Ne segue che il campo interno ($r < R$) alla distribuzione di carica vale:

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} = \frac{Q\, r}{4\pi\varepsilon_0\, R^3}\hat{r}.$$

Consideriamo adesso un punto esterno ($r > R$) alla distribuzione di carica ed una superficie gaussiana sferica passante per tale punto e centrata nel centro della distribuzione di carica. Applicando ancora una volta il teorema di Gauss possiamo scrivere:

$$\left|\vec{E}\right|4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow \left|\vec{E}\right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}.$$

Ne segue che il campo esterno ($r > R$) alla distribuzione di carica vale:

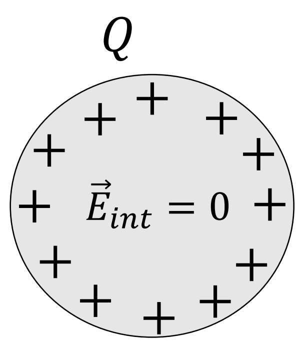
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\hat{r}.$$

Abbiamo dimostrato che il campo esterno ad una distribuzione di carica a simmetria sferica è indistinguibile da quello che genererebbe una carica puntiforme di pari carica posta nel centro della distribuzione.

Questa osservazione giustifica l'uso di sferette cariche nella verifica sperimentale della legge di Coulomb (che richiederebbe a rigore cariche puntiformi).

10. Elettrostatica di un conduttore carico

Un conduttore è un sistema fisico nel quale le cariche elettriche sono libere di muoversi. Si pone pertanto il problema di capire come si distribuisca un eccesso di carica su un conduttore. Per rispondere a questa domanda è necessario osservare che in condizioni elettrostatiche la risultante delle forze agenti sulle cariche libere deve essere nulla. Se così non fosse le cariche verrebbero accelerate, in violazione dell'ipotesi elettrostatica. Questo implica che il campo elettrico interno ad un conduttore deve essere nullo. La precedente osservazione, ed il teorema di Gauss, implicano che non vi possano essere cariche libere all'interno del volume del conduttore. Ne concludiamo che l'eccesso di carica si distribuisce sulla superficie del conduttore.



Vogliamo adesso calcolare il campo elettrico generato da un conduttore sferico di raggio R sul quale sia distribuita la carica totale Q. La carica Q si distribuisce sulla superficie della sfera che acquisisce una densità superficiale di carica uniforme (in virtù della simmetria del problema) pari a

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Abbiamo già detto che il campo interno è nullo. Valutiamo in campo in prossimità della superficie del conduttore ed appena fuori da esso. Consideriamo una superficie gaussiana sferica di raggio $r = R + 0^+$. Dal teorema di Gauss si ottiene:

$$|\vec{E}|4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \rightarrow |\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Pertanto il campo in prossimità della superficie del conduttore vale:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{r}.$$

Osserviamo che il campo elettrico appena determinato è ortogonale alla superficie del conduttore. Il risultato è intuitivamente comprensibile in quanto eventuali componenti tangenziali del campo metterebbero in moto le cariche.

Il campo in un generico punto esterno alla superficie può essere calcolato in modo simile a quanto visto in precedenza (*paragrafo 9*). Da questa osservazione otteniamo che il campo esterno $(r > R)$ al conduttore vale:

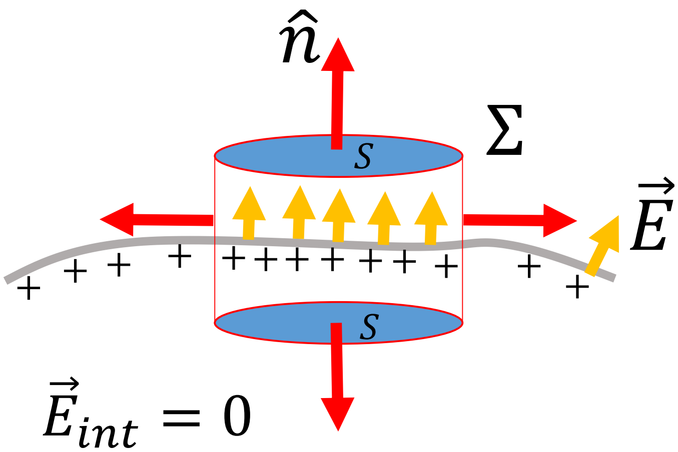
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\hat{r}.$$

Ne segue che il campo elettrico generato da un conduttore carico si può scrivere nella forma seguente:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{r} & r \approx R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\hat{r} & r > R \end{cases}.$$

11. Campo elettrico in vicinanza di un conduttore carico (Teorema di Coulomb)

L'eccesso di carica, ad eccezione che nei conduttori sferici, non si distribuisce uniformemente sulla superficie del conduttore. Nonostante ciò, risulta comunque possibile valutare il campo elettrico nei pressi della superficie utilizzando il teorema di Gauss. Consideriamo la superficie gaussiana cilindrica mostrata in figura e applichiamo il teorema di Gauss. Sia S l'area di base del cilindro. Il campo elettrico è ortogonale alla superficie del conduttore. Se non lo fosse le componenti parallele alla superficie causerebbero un moto di cariche. Dal teorema di Gauss possiamo scrivere:



$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}|S,$$

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

dove la quantità σS rappresenta la carica totale racchiusa dalla superficie gaussiana. Dalle precedenti otteniamo il risultato:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n},$$

dove σ rappresenta la densità locale di carica.