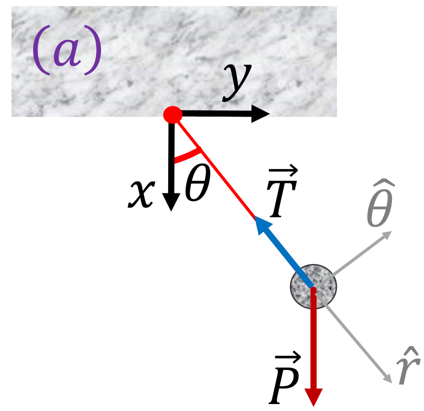
1. Una caduta vincolata: il pendolo semplice

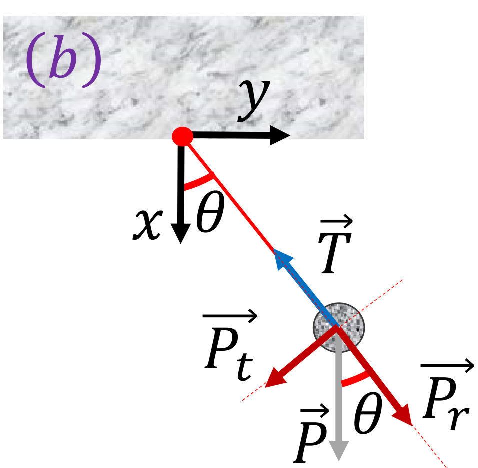


Consideriamo un corpo di massa m, assimilabile ad un punto materiale, sospeso mediante un filo ideale di lunghezza ℓ. Supponiamo di portare il corpo ad una certa quota rispetto alla posizione di equilibrio curando di mantenere in tensione in filo.

Supponendo trascurabile la resistenza dell'aria, quale sarà il moto del corpo dall'istante in cui esso viene lasciato?

In assenza del filo potremmo rispondere facilmente. Il corpo cadrebbe al suolo secondo un moto uniformemente accelerato. La presenza del filo vincola la caduta e il moto che ne risulta deriva dalla simultanea azione della forza peso $\vec{P}$ e della tensione del filo $\vec{T}$. Osserviamo che il corpo nel suo moto descrive archi di circonferenza, visto che il filo vincola la massa a tenere una distanza ℓ dal punto di sospensione. Descriviamo la dinamica del sistema nel sistema di riferimento mostrato in figura nel quale $\vec{g} = g\,\hat{x}$. Sia θ l'angolo formato dalla direzione del filo con l'asse x. L'angolo θ è una funzione del tempo che va determinata risolvendo la dinamica del sistema per assegnate condizioni iniziali. La posizione della massa oscillante è descritta dal vettore posizione

$$\vec{r} = \ell(\cos\theta\,,\sin\theta) = \ell\,\hat{r}.$$



Come già discusso in precedenza $\hat{r} = (\cos\theta\,,\sin\theta)$ rappresenta il versore radiale, mentre $\hat{\theta} = (-\sin\theta\,,\cos\theta)$ rappresenta il versore della direzione tangenziale. Le direzioni individuate dai due vettori sono ortogonali e risulta $\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$. La dinamica della massa oscillante è convenientemente descritta rispetto alle direzioni radiale e tangenziale appena introdotte. A tal riguardo notiamo che la tensione del filo è una forza puramente radiale, mentre la forza peso presenta, in generale, sia una componente tangenziale che una radiale. Da queste considerazioni è facile intuire che la componente tangenziale della forza peso non può essere equilibrata dalla tensione del filo. Quest'ultima può solamente neutralizzare la componente radiale della forza peso. Essendo presente una forza non equilibrata, dal secondo principio della dinamica, ci aspettiamo che si origini un moto accelerato in direzione tangenziale. D'altra parte l'inestensibilità del filo ideale implica l'assenza di moto in direzione radiale. Quest'ultima considerazione ci consentirà di valutare la tensione della fune. A tal proposito osserviamo preliminarmente che in condizioni statiche (massa a riposo e $\theta = 0$) risulta $|\vec{T}| = mg$.

Per determinare la dinamica del sistema occorre scrivere il secondo principio proiettando la risultante equazione vettoriale in direzione tangenziale e radiale. Per fare questo ci occorre un'espressione dell'accelerazione nella forma $\vec{a} = a_t\hat{\theta} + a_r\hat{r}$. Quest'ultima si ottiene facilmente mediante derivate temporali successive del vettore posizione. Procedendo in questo modo otteniamo la seguente espressione della velocità:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \ell\dot{\theta}(-\sin\theta\,, \cos\theta) = \ell\dot{\theta}\,\hat{\theta},$$

dove il puntino al disopra della variabile indica, in forma abbreviata, la derivata prima rispetto al tempo (due puntini indicano la derivata seconda). Derivando ancora una volta rispetto al tempo otteniamo l'accelerazione istantanea nella forma:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\ell\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right) = \ell\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + \ell\dot{\theta}\frac{d}{dt}\,\hat{\theta} = \ell\ddot{\theta}\,\hat{\theta} - \ell\left(\dot{\theta}\right)^2\hat{r},$$

dalla quale riconosciamo la componente tangenziale $a_t = \ell\ddot{\theta}$ e la componente radiale $a_r = -\ell\left(\dot{\theta}\right)^2$ dell'accelerazione. Nella derivazione del precedente risultato abbiamo utilizzato la relazione:

$$\frac{d}{dt}\,\hat{\theta} = \frac{d}{dt}(-\sin\theta\,, \cos\theta) = \dot{\theta}(-\cos\theta\,, -\sin\theta) = -\dot{\theta}\,\hat{r}.$$

E' utile confrontare la struttura dell'accelerazione con quanto già noto per il moto circolare uniforme. In un moto circolare uniforme l'accelerazione tangenziale è nulla ($a_t = 0$), essendo costante la velocità angolare (ossia $\dot{\theta} = \omega$). E' facile convincersi del fatto che nel caso del pendolo la velocità angolare non è costante. Questa osservazione è chiaramente supportata dal fatto che il corpo aumenta la propria velocità a partire da una condizione di quiete.

Scriviamo adesso il secondo principio nella forma $m\,\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ e proiettiamo l'equazione vettoriale in direzione tangenziale e radiale. Procedendo come detto, otteniamo:

$$\begin{aligned} \hat{r}: &\quad ma_r = mg\cos\theta - T \\ \hat{\theta}: &\quad ma_t = -mg\sin\theta \end{aligned}\;.$$

Le precedenti possono essere riscritte nella forma seguente

$$\begin{array}{ll} \hat{r}: & ma_r = mg\cos\theta - T \\ \hat{\theta}: & ma_t = -mg\sin\theta \end{array} \rightarrow \begin{cases} -m\ell\left(\dot{\theta}\right)^2 = mg\cos\theta - T \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} T = mg\cos\theta + m\ell\left(\dot{\theta}\right)^2 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \end{cases}.$$

Le precedenti equazioni vanno lette nel modo seguente. La prima equazione definisce istante per istante il valore della tensione del filo. Tale valore dipende dalla soluzione $\theta(t)$ della seconda equazione. Quest'ultima è una equazione differenziale non-lineare del secondo ordine che determina la dinamica angolare una volta note le condizioni iniziali. La prima relazione conferma le nostre iniziali aspettative sul valore della tensione in condizioni statiche. In queste condizioni si ha $\theta = 0$ e $\dot{\theta} = 0$, cosa che implica $T = mg$. In condizioni dinamiche, la tensione del filo deve equilibrare sia la componente radiale della forza peso che un contributo centrifugo (*forza centrifuga*) pari a $m\ell\left(\dot{\theta}\right)^2$. La sollecitazione dinamica prodotta dalla forza centrifuga è massima quando è tale la velocità angolare. L'entità delle sollecitazioni radiali dipende dalla dinamica tangenziale, che è retta da un'equazione differenziale non-lineare non esattamente risolubile.
Il problema può essere risolto in forma approssimata considerando il limite di piccole oscillazioni. In tale limite il contributo non-lineare dovuto alla funzione seno viene rimosso mediante l'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$. In questo modo il problema della dinamica angolare può essere presentato nella forma familiare dell'equazione differenziale di un moto armonico:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases},$$

dove abbiamo introdotto la pulsazione ω e il periodo $\mathcal{T}$ nella forma seguente:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \rightarrow \mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Procedendo come già visto nel caso del moto di un corpo soggetto alla forza elastica, otteniamo la soluzione cercata nella forma:

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t).$$

La soluzione trovata è quella di un moto periodico. La massa sospesa oscilla indefinitamente nel tempo ritornando alla configurazione occupata al tempo t ad ogni istante successivo $t + n\mathcal{T}$, con $n > 0$ intero. La periodicità della soluzione può essere facilmente dimostrata osservando che vale la seguente catena di uguaglianze:

$$\theta(t+\mathcal{T}) = \theta_0 \cos(\omega t + \omega\mathcal{T}) = \theta_0 \cos(\omega t + 2\pi) = \theta_0 \cos(\omega t),$$

dalla quale risulta provata la condizione di periodicità $\theta(t+\mathcal{T}) = \theta(t)$. La velocità angolare del moto può essere calcolata mediante derivata temporale della funzione $\theta(t)$. Procedendo in questo modo abbiamo:

$$\dot{\theta}(t) = -\omega\theta_0 \sin(\omega t).$$

Note le quantità $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ è possibile calcolare il valore della tensione del filo istante per istante:

$$T = mg\cos\theta + m\ell\left(\dot{\theta}\right)^2 = mg\cos(\theta_0\cos(\omega t)) + mg(\theta_0\sin(\omega t))^2.$$

Sarebbe possibile determinare la tensione del filo in funzione della sola posizione angolare?

Basta osservare quanto segue:

$$\begin{aligned}\left(\dot{\theta}\right)^2 &= (\omega\theta_0)^2\sin^2(\omega t) = (\omega\theta_0)^2(1-\cos^2(\omega t)) = (\omega\theta_0)^2 - (\omega\theta_0)^2\cos^2(\omega t)\\ &= (\omega\theta_0)^2 - \omega^2\left(\theta(t)\right)^2 = \omega^2\left[(\theta_0)^2 - \left(\theta(t)\right)^2\right].\end{aligned}$$

Sostituendo la precedente nell'espressione della tensione otteniamo:

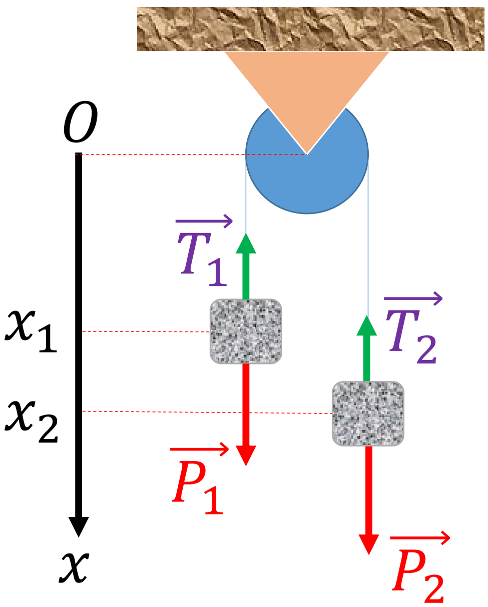
$$\begin{aligned}T &= mg\cos\theta + m\ell\left(\dot{\theta}\right)^2 = mg\cos\theta + m\ell\omega^2\left[(\theta_0)^2 - \left(\theta(t)\right)^2\right] =\\ &= mg\cos\theta + mg[\theta_0^2 - \theta^2].\end{aligned}$$

La tensione risulta massima per $\theta = 0$ e si ha $T^{max} = mg(1+\theta_0^2) > mg$.

Questo esempio mostra come i vincoli possano modificare profondamente le caratteristiche del moto dei corpi.

2. La macchina di Atwood

Il sistema meccanico mostrato in figura è una idealizzazione della macchina di Atwood. Essa è costituita da due corpi di massa m_1 ed m_2 collegati da una fune. La fune attraversa una carrucola. Supponiamo la fune e la carrucola elementi meccanici ideali. Siano inoltre



trascurabili gli attriti. Sotto le ipotesi sopra richiamate, si vuole determinare il modulo dell'accelerazione del moto delle due masse e la tensione della fune. Scegliamo un riferimento cartesiano come quello mostrato in figura. Scriviamo il secondo principio della dinamica per le due masse considerate:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= -T_1 + m_1 g \\ m_2 a_2 &= -T_2 + m_2 g \end{aligned}.$$

Dall'idealità del sistema ed invocando il terzo principio della dinamica, si ha $T_1 = T_2 = T$. Inoltre si verifica facilmente che vale ad ogni istante di tempo la relazione $\ell + x_1 + x_2 = L$, dove L è la lunghezza totale della corda mentre ℓ rappresenta la lunghezza del tratto di corda avvolto alla carrucola. Derivando rispetto al tempo la precedente relazione si ottengono le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = -v_2 \\ a_1 = -a_2 \end{cases}.$$

Le precedenti mostrano che la velocità e l'accelerazione dei due corpi hanno sempre verso opposto. Poniamo adesso $a_2 = a$ e riscriviamo alla luce di quanto detto il secondo principio della dinamica:

$$\begin{cases} -m_1 a = -T + m_1 g \\ m_2 a = -T + m_2 g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1 a = T - m_1 g \\ m_2 a = -T + m_2 g \end{cases}.$$

Dalle precedenti, sommando membro a membro, otteniamo:

$$m_1 a + m_2 a = m_2 g - m_1 g \rightarrow a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g.$$

La tensione può essere calcolata sostituendo il valore trovato dell'accelerazione in una delle due equazioni. Sostituendo, ad esempio nella prima, abbiamo

$$T = m_1(a + g) = m_1 g \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + 1\right) = m_1 g \left(\frac{m_2 - m_1 + m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\rightarrow T = \left(\frac{2\, m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g.$$

Osserviamo che corpi di massa differente sono animati da moto uniformemente accelerato. Il sistema è in equilibrio se le masse dei corpi sospesi risultano coincidenti. Il modulo dell'accelerazione può essere reso piccolo a piacere scegliendo corpi di massa simile. Il sistema permette di rallentare la caduta dei gravi consentendo una verifica più agevole delle leggi della meccanica.

3. Calcolo numerico negli esercizi: le cifre significative

In fisica, come in tutte le scienze sperimentali, si usa indicare il valore delle grandezze di interesse utilizzando la *notazione scientifica*. Una grandezza fisica espressa in notazione scientifica si presenta nella forma di un numero decimale moltiplicato per una opportuna potenza di 10. Il valore numerico della grandezza fisica è poi seguito da una opportuna unità di misura del SI. Il numero decimale è formato da una parte intera, situata a sinistra della virgola, e da una parte decimale collocata a destra della virgola. La parte intera del numero decimale è compresa tra 1 e 9, mentre il numero di cifre della parte decimale specifica l'accuratezza della misura. E' facile intuire che mentre da un punto di vista matematico $2\ m$ e $2{,}0\ m$ sono scritture equivalenti, esse non lo sono da un punto di vista fisico.

La notazione scientifica serve a rendere pratico l'utilizzo di quantità numeriche che possono contenere un gran numero di zeri. Sappiamo ad esempio che il raggio medio terrestre è circa pari a $R = 6370\ km$. Nel sistema internazionale le lunghezze vengono espresse in metri. L'unità km che compare nella precedente è una forma abbreviata per indicare $10^3\ m$, che è un particolare multiplo del metro. Le unità fondamentali del SI hanno *multipli* e *sottomultipli* che si indicano premettendo i seguenti *prefissi* alle unità di misura.

	Potenza di dieci	Prefisso
Peta-	10^{15}	P
Tera-	10^{12}	T
Giga-	10^{9}	G
Mega-	10^{6}	M
Chilo-	10^{3}	k
Etto-	10^{2}	h
Deca-	10^{1}	da
Deci-	10^{-1}	d
Centi-	10^{-2}	c
Milli-	10^{-3}	m
Micro-	10^{-6}	μ
Nano-	10^{-9}	n
Pico-	10^{-12}	p
Femto-	10^{-15}	f

Il valore del raggio terrestre si scrive pertanto in forma estesa come segue:

$$R = 6370000\, m.$$

Il precedente valore si esprime in notazione scientifica nella forma

$$R = 6{,}370 \cdot 10^6\, m.$$

Potremmo esprimere il precedente valore nella forma $R = 6{,}37 \cdot 10^6\, m$?

La risposta dipende dall'accuratezza della misura del raggio terrestre. Normalmente si ritiene, se non specificato diversamente, che l'incertezza della misura cada sull'ultima cifra. Secondo questa convenzione, la misura iniziale $R = 6370\, km$ è affetta da errore sull'ultima cifra, cosa che lascia intendere che l'accuratezza della misura è al km. In questo caso la corretta notazione scientifica è $R = 6{,}370 \cdot 10^6\, m$.

Talvolta però l'inclusione di zeri finali è l'inevitabile conseguenza della necessità di dover correttamente indicare una assegnata posizione decimale. Ad esempio, nello scrivere $700\, m$ non è possibile omettere gli zeri finali senza alterare il valore della quantità in oggetto. In questi casi occorre specificare l'accuratezza della misura in quanto la convenzione sopra esposta non chiarisce quale sia la corretta scrittura in notazione scientifica.

Supponiamo ad esempio che la misura $R = 6370\, km$ sia stata effettuata con accuratezza di $10\, km$. Questo implica che il *valore vero* della grandezza fisica si colloca in un intervallo di estremi $6365\, km$ e $6375\, km$ ed ampiezza $10\, km$. Pertanto la cifra indicata in rosso è la *cifra incerta*. La corretta notazione scientifica in questo caso è data dall'espressione

$$R = 6{,}37 \cdot 10^6\, m,$$

nella quale la cifra incerta è l'ultima della parte decimale. Il precedente risultato è espresso con *tre cifre significative*. La quantità $R = 6{,}370 \cdot 10^6\, m$ ha *quattro cifre significative*. *Sono significative le cifre che ha senso esporre tenuto conto dell'accuratezza della misura da comunicare.*

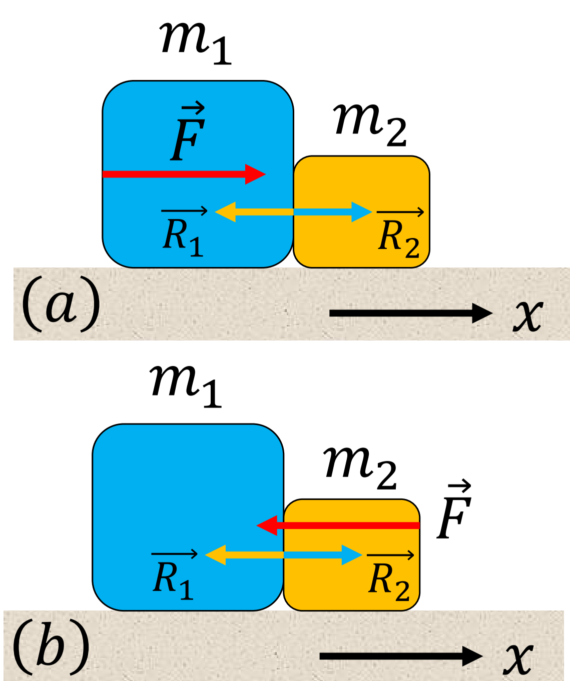
Negli esercizi i dati vengono forniti con un assegnato numero di cifre significative. I risultati vanno riportati utilizzando lo stesso numero di cifre significative dei dati di partenza. Quando i dati hanno un numero di cifre significative disomogeneo, i risultati vanno espressi utilizzando un numero di cifre significative uguale a quello del dato meno accurato (minor numero di cifre significative).

Nello svolgimento dei calcoli intermedi occorre utilizzare almeno una cifra significativa in più rispetto a quelle da esporre nel risultato finale. Nello svolgimento dei calcoli si presenta l'esigenza di approssimare un valore numerico ad un assegnato numero di cifre.

Questa operazione si effettua secondo le usuali regole di approssimazione. In particolare la quantità numerica 3,14159 si approssima a 3 se occorre 1 cifra significativa, 3,1 con due cifre significative, 3,14 con 3 cifre significative, 3,142 con 4 cifre significative, 3,1416 con 5 cifre significative.

Esercizio

Due blocchi di massa $m_1 = 2{,}3\ kg$ e $m_2 = 1{,}2\ kg$ sono a contatto e risultano poggiati su una superficie priva di attrito. Quando si spinge uno dei due blocchi applicando ad esso una forza avente modulo $|\vec{F}| = 3{,}2\ N$ si genera una forza di contatto tra i due blocchi. Determinare l'intensità della forza di contatto nella configurazione mostrata in (a) ed in (b).



Cominciamo ad analizzare il caso (a). Notiamo preliminarmente che le forze di contatto sono coppie di forze di azione e reazione. Risulta quindi $|\vec{R}_1| = |\vec{R}_2| = R$. Scriviamo il secondo principio della dinamica proiettato lungo l'asse x. Procedendo in questo modo abbiamo:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = F - R \\ m_2 a_2 = R \end{cases}.$$

Si ha inoltre $a_1 = a_2 = a$. Sommando membro a membro le precedenti otteniamo l'accelerazione costante del sistema:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

Utilizzando la precedente nella seconda delle equazioni di Newton abbiamo:

$$R = m_2 a_2 = \frac{m_2\, F}{m_1 + m_2} \to 1{,}1\ N.$$

Esaminiamo adesso la situazione mostrata in (b). Procediamo come mostrato in precedenza. Le equazioni della dinamica si scrivono nella forma:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = -R \\ m_2 a_2 = R - F \end{cases},$$

con $a_1 = a_2 = a$. Sommando membro a membro si ottiene:

$$a = \frac{-F}{m_1 + m_2}.$$

Dalla precedente otteniamo l'intensità delle forze di contatto nella forma:

$$R = -m_1 a_1 = -m_1 \left(\frac{-F}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_1\, F}{m_1 + m_2} \rightarrow 2{,}1\ N.$$