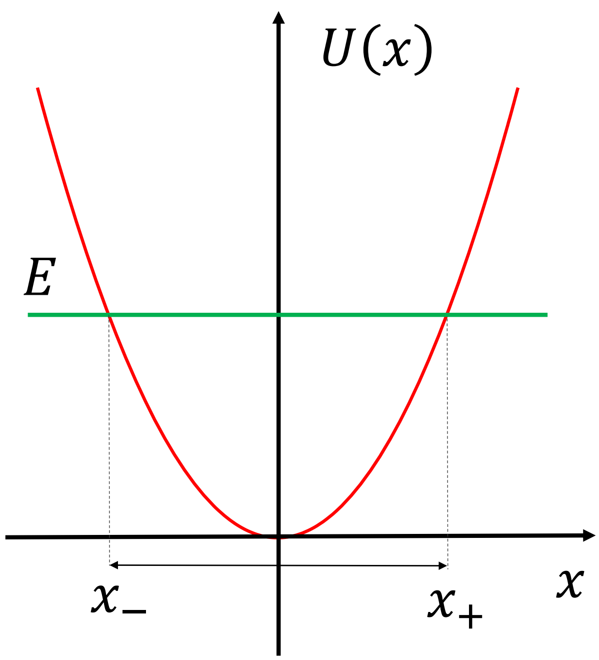
1. Caratteristiche qualitative del moto di un corpo soggetto a un potenziale

Vogliamo riconsiderare il moto di una particella soggetta alla sola forza elastica. La conservatività della forza implica l'esistenza di un potenziale, il potenziale elastico, e la conservazione dell'energia meccanica totale. Se all'istante iniziale l'energia del sistema vale E si ha quindi:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Dalla precedente si ricava il modulo della velocità del corpo in funzione della posizione occupata secondo la relazione:



$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}.$$

Dalla precedente si nota che esistono punti in cui la velocità si annulla. Tali punti, soluzione dell'equazione

$$E - \frac{1}{2}kx^2 = 0,$$

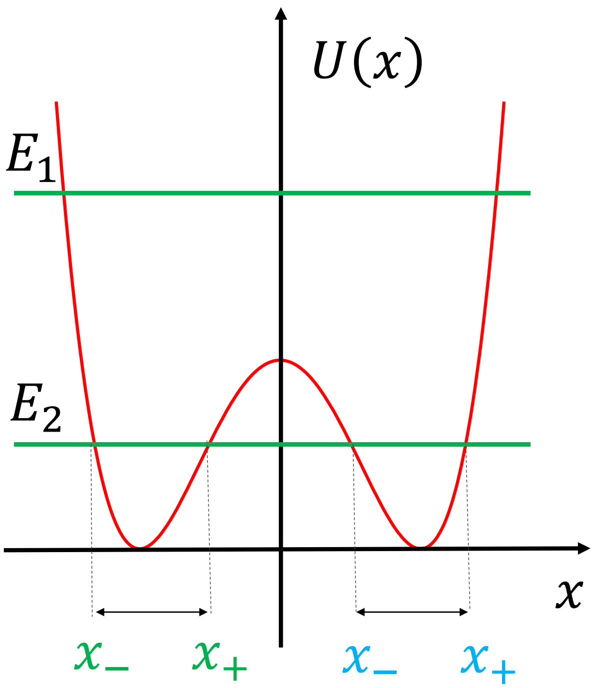
si chiamano punti di inversione ed assumono la forma:

$$x_\pm = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

Il significato fisico di questi punti è chiarito da un'ulteriore osservazione. L'espressione del modulo della velocità richiede la non negatività del radicando. Tale condizione si traduce nella forma di una disuguaglianza

$$E - \frac{1}{2}kx^2 \geq 0 \rightarrow \frac{1}{2}kx^2 \leq E,$$

che è soddisfatta quando $x \in [x_-, x_+]$. Da questa considerazione segue che *il moto è confinato* ad una porzione della retta reale individuata dall'intervallo chiuso $[x_-, x_+]$ la cui estensione è proporzionale all'energia totale del sistema. Notiamo inoltre che se $E = 0$, il sistema non può che trovarsi in una condizione di quiete nella quale $x = 0$ e $v = 0$.



Quando si considerano forze conservative in una dimensione dotate di un generico potenziale $U(x)$, l'energia totale del sistema si scrive nella forma

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x).$$

Sulla base della precedente, si possono sviluppare ragionamenti sulle caratteristiche qualitative del moto senza risolvere nessuna equazione differenziale. L'esito di tali ragionamenti mostra le regioni della retta reale che sono esplorabili, a seconda delle condizioni iniziali, dal moto della particella. Inoltre i punti stazionari del potenziale, quelli per cui vale la condizione

$$\frac{d}{dx}U(x) = 0,$$

risultano essere punti di equilibrio stabile (minimi relativi) o instabile (massimi relativi). In questi punti la forza di cui il corpo risente vale

$$\overrightarrow{F^*} = \hat{x}\left(-\frac{d}{dx}U(x)\right)_{x=x^*} = 0.$$

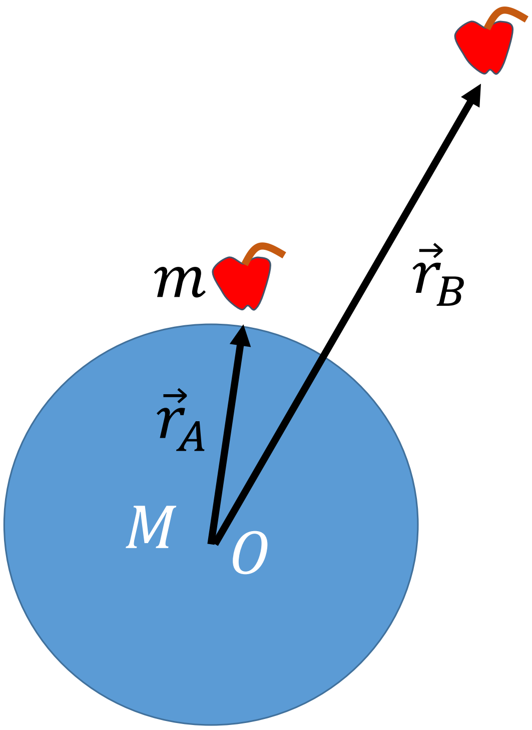
2. Il potenziale gravitazionale: la mela di Newton nello spazio

Abbiamo visto che esiste un'attrazione gravitazionale tra corpi massivi. Questa interazione fondamentale è descritta dalla legge di gravitazione universale dovuta a Newton. Dal momento che sospettiamo che tale forza sia di natura conservativa, ne vogliamo determinare il potenziale.

Per fare questo, studiamo l'interazione tra la terra ed una mela. La forza con la quale la mela è attratta dalla terra, nel sistema di riferimento che ha origine nel centro della terra, si scrive nella forma:

$$\vec{F} = -\hat{r}\frac{GMm}{r^2},$$

con $r = |\vec{r}|$. Calcoliamo il lavoro che la forza compie per spostare la mela tra le posizioni radiali r_A e r_B. Esso vale:



$$L = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{r_A}^{r_B} \left(-\hat{r}\,\frac{GMm}{r^2}\right) \cdot (\hat{r}\,dr)$$
$$= -GMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \left[\frac{GMm}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$
$$= GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right).$$

D'altra parte, dal teorema dell'energia cinetica risulta:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$
$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{r_B} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{r_A}.$$

La precedente esprime la conservazione dell'energia meccanica totale, prova della conservatività della forza. L'espressione del potenziale gravitazionale si scrive quindi nella forma:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

Notiamo inoltre che vale la relazione:

$$\vec{F} = \left(-\frac{d}{dr}U(r)\right)\hat{r}.$$

Adesso che sappiamo qualcosa in più sull'attrazione gravitazionale è possibile formulare domande più ardite. E' esperienza comune lanciare corpi verso l'alto. Essi ritornano invariabilmente al suolo. L'altezza raggiunta però è tanto maggiore quanto maggiore è la velocità di lancio. Sarebbe possibile imprimere alla mela una velocità tale da consentirle di sfuggire definitivamente all'attrazione gravitazionale?

Una tale velocità esiste e prende il nome di *velocità di fuga*. La conservazione dell'energia meccanica totale ci consente di calcolare tale velocità. Scriviamo la conservazione dell'energia meccanica in modo da imporre che lo stato finale raggiunto dalla mela corrisponda alla situazione in cui essa ha energia cinetica nulla all'infinito. Questa condizione implica che $v_B = 0$ per $r_B \rightarrow \infty$. Inoltre, se la mela è lanciata dalla superficie terrestre si ha $r_A = R$, dove R è il raggio medio terrestre. Da queste considerazioni si ha:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

$$\rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

La velocità di fuga appena determinata dipende dalla massa e dal raggio del corpo che genera il campo gravitazionale. Nel caso della terra la velocità di fuga vale $11{,}2\ km/s$, mentre per la luna tale valore è ridotto a circa $2{,}48\ km/s$.

Quando la velocità di fuga supera la velocità della luce, che è la massima velocità raggiungibile ($c \approx 300000\ km/s$), niente può sfuggire all'attrazione gravitazionale del corpo in questione (neppure la luce!). Tali corpi sono detti *buchi neri* e sono studiati dall'astrofisica.

3. Bilancio energetico di un sistema in presenza di forze non conservative

Supponiamo che su un dato corpo agiscano simultaneamente forze di natura conservativa e forze di natura non conservativa. Sia la risultante di tutte le forze agenti sul sistema $\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$, con $\vec{F}_c$ la risultante delle forze conservative e $\vec{F}_{nc}$ la risultante delle forze non conservative. Calcoliamo il lavoro compiuto della risultante per spostare il suo punto di applicazione tra i punti generici A e B:

$$L = \int_A^B \left(\vec{F}_c + \vec{F}_{nc}\right) \cdot \overrightarrow{ds} = \int_A^B \vec{F}_c \cdot \overrightarrow{ds} + \int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot \overrightarrow{ds} = -\big(U(x_B) - U(x_A)\big) + L_{nc},$$

dove il potenziale $U(x)$ è somma dei potenziali di tutte le forze conservative agenti sul corpo. D'altra parte, dal teorema dell'energia cinetica, possiamo scrivere:

$$L = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2.$$

Dalle precedenti relazioni otteniamo:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + U(x_B) = \frac{1}{2}mv_A^2 + U(x_A) + L_{nc} \rightarrow E_B - E_A = L_{nc}.$$

La precedente mostra che l'energia meccanica totale non è conservata ($E_B \neq E_A$) in presenza di forze non conservative. In particolare la differenza tra l'energia meccanica totale finale ed iniziale eguaglia il lavoro delle forze non conservative L_{nc}.

Due distinte situazioni sono possibili. Se $E_B - E_A = L_{nc} < 0$, le forze non conservative dissipano energia. Questo è il caso delle forze di attrito.

Nel secondo caso, quello in cui $E_B - E_A = L_{nc} > 0$, le forze non conservative forniscono energia al sistema. Questo è il caso ad esempio dei motori che convertono l'energia chimica in energia meccanica tramite processi irreversibili.

Esercizio 1

Un'automobile procede a velocità costante v_0 lungo una strada in pianura. Ad un certo istante il conducente aziona il freno. Conoscendo il coefficiente di attrito dinamico μ e trascurando l'attrito con l'aria, determinare lo spazio di arresto del veicolo.

Nel momento in cui il conducente aziona il freno l'unica forza agente sul sistema nella direzione di moto è la forza di attrito dinamico. Tale forza può scriversi come $\overrightarrow{F_a} = -\mu\, N\, \hat{x} = -\mu\, mg\, \hat{x}$. Il lavoro effettuato da tale forza è pari alla variazione di energia cinetica. Da questa considerazione possiamo scrivere:

$$L = \int_0^d (-\mu\, N\, \hat{x}) \cdot \overrightarrow{dx} = -\mu mg\, d.$$

D'altra parte la variazione dell'energia cinetica vale

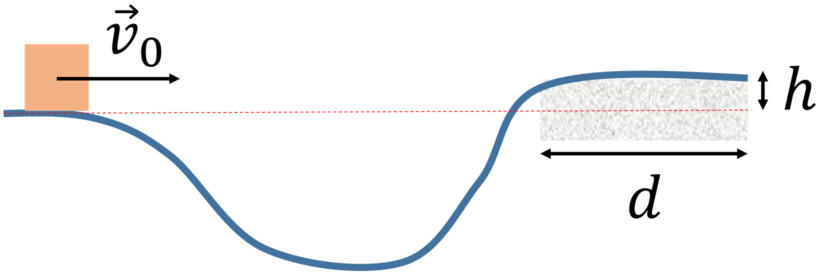
$$-\frac{1}{2} m v_0^2.$$

Uguagliando i precedenti risultati otteniamo la relazione cercata:

$$-\mu mg\, d = -\frac{1}{2} m v_0^2 \rightarrow d = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Esercizio 2

Un corpo scivola lungo una pista da un livello ad un altro più elevato percorrendo un avvallamento intermedio. La pista è priva di attrito fino al punto in cui si giunge alla quota maggiore, laddove l'attrito arresta il blocco dopo che quest'ultimo ha percorso la distanza d. Determinare la distanza d'arresto sapendo che il modulo della velocità iniziale vale $v_0 = 6{,}0\ m/s$, la differenza di quota vale $h = 1{,}1\ m$, mentre il coefficiente di attrito dinamico assume valore $\mu = 0{,}60$.

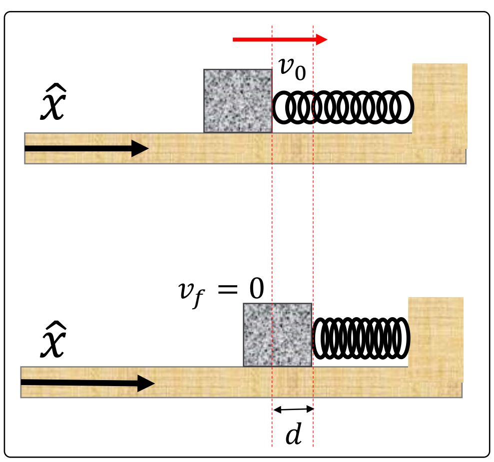


Utilizzando la conservazione dell'energia ricaviamo l'energia cinetica posseduta dal corpo all'inizio del tratto con attrito. Fissata a zero la quota di partenza, possiamo scrivere
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_a^2 \rightarrow \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh,$$
dove v_a rappresenta il modulo della velocità del corpo all'inizio del tratto con attrito. D'altra parte sappiamo che il lavoro compiuto della forza d'attrito per arrestare il corpo vale:
$$L = -\mu\, mg\, d.$$
Utilizzando il teorema dell'energia cinetica otteniamo la relazione:

$$-\mu\, mg\, d = -\frac{1}{2}mv_a^2 \rightarrow \mu\, mg\, d = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh$$
$$\rightarrow\ d = \frac{v_0^2}{2\mu\, g} - \frac{h}{\mu}.$$
Sostituendo i valori numerici otteniamo (due cifre significative):
$$d = 1{,}2\, m.$$

Esercizio 3

Un blocco di massa $m = 2{,}5\, kg$, muovendosi come mostrato in figura, va ad urtare l'estremo libero di una molla disposta orizzontalmente ($k = 320\, N/m$) e la comprime per una lunghezza massima pari a $d = 7{,}5\, cm$. Il coefficiente di attrito dinamico fra il blocco e il piano di appoggio vale $\mu = 0{,}25$. Determinare: (a) il lavoro compiuto dalla forza elastica per arrestare il blocco; (b) l'energia meccanica dissipata in attrito; (c) la velocità iniziale del blocco.



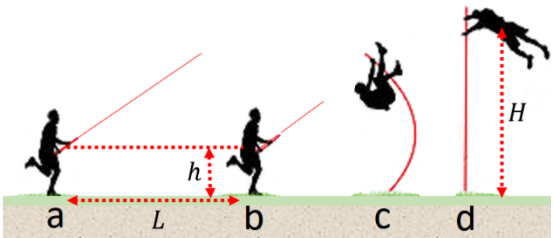
Il lavoro compiuto dalla forza elastica e dalla forza di attrito valgono rispettivamente:

$$L_{el} = -\frac{1}{2}kd^2 \rightarrow -0{,}90\, J$$
$$L_a = -mg\mu\, d \rightarrow -0{,}46\, J.$$

Inoltre dal teorema dell'energia cinetica abbiamo (due cifre significative):

$$L = L_{el} + L_a = -\frac{1}{2}mv_0^2 \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2|L_{el} + L_a|}{m}} \rightarrow 1{,}0\frac{m}{s}.$$

Esercizio 4



Nel salto con l'asta l'atleta compie un gesto complesso che trasforma l'energia cinetica accumulata nella fase di rincorsa in energia di deflessione dell'asta (energia elastica). Quest'ultima è poi convertita nell'energia potenziale gravitazionale posseduta dall'atleta nel punto di quota massima, raggiunto a velocità verticale nulla. Assumendo trascurabili gli attriti e la massa dell'asta, si assuma uniformemente accelerato, con accelerazione a e velocità iniziale nulla, il moto dell'atleta nella fase di rincorsa. Sia $L = 40{,}0\ m$ lo spazio percorso dall'atleta alla fine della fase di rincorsa. Si supponga inoltre che al termine della rincorsa l'energia cinetica finale sia interamente convertita in energia elastica e che questa, a sua volta, sia interamente convertita in energia potenziale gravitazionale, corrispondente alla situazione di atleta fermo alla quota massima H. Si determini:

a) L'accelerazione a richiesta affinché il centro di massa dell'atleta, inizialmente posto alla quota $h = 1{,}00\ m$, si porti alla quota $H = 6{,}00\ m$ dal suolo.

b) La durata in secondi della fase di rincorsa con valore dell'accelerazione precedentemente determinato.

c) La forza (generata dai muscoli) che muove l'atleta di massa $m = 70{,}0\ kg$ nella fase di rincorsa ed il lavoro compiuto da detta forza per spostare il centro di massa dell'atleta dalla posizione iniziale a quella in cui ha termine la rincorsa.

d) La potenza istantanea, media e massima erogata dall'atleta nella fase di rincorsa.

e) Schematizzando l'asta come una molla ideale di costante elastica $K = 1{,}36 \cdot 10^3\ N/m$ e la sua deflessione come la variazione di lunghezza x di detta molla, si determini la deflessione nelle condizioni sopra descritte.

La fase di rincorsa è descritta dalle equazioni cinematiche seguenti:

$$v(t) = at,$$
$$x(t) = \frac{1}{2}at^2.$$

Sia t^* la durata temporale della fase di rincorsa. Essa può essere espressa in termini dell'accelerazione e della lunghezza della fase di rincorsa mediante la relazione $L = x(t^*)$. Da quest'ultima si ha:

$$t^* = \sqrt{\frac{2L}{a}}.$$

Dalla precedente otteniamo la velocità alla fine della fase di rincorsa nella forma:

$$v_f = v(t^*) = \sqrt{2aL}.$$

L'energia cinetica alla fine della rincorsa è per ipotesi interamente convertita in energia elastica E_e e pertanto possiamo scrivere la relazione:

$$\frac{m{v_f}^2}{2} = E_e.$$

Sappiamo inoltre per ipotesi che l'energia di deflessione è interamente convertita in energia potenziale gravitazionale. Da questa osservazione segue:

$$E_e = mg(H - h),$$

da cui otteniamo l'uguaglianza $\frac{m{v_f}^2}{2} = mg(H - h)$. Quest'ultima implica la relazione cercata:

$$a = g\frac{H - h}{L} \rightarrow 1{,}23\,\frac{m}{s^2}.$$

La fase di rincorsa ha quindi una durata pari a

$$t^* = \sqrt{\frac{2L}{a}} \rightarrow 8{,}08\;s.$$

Inoltre la velocità finale vale $v_f \approx 35{,}7\;km/h$. Il modulo della forza generata dai muscoli dell'atleta vale

$$F = ma \rightarrow 85{,}8\;N,$$

mentre il lavoro svolto da detta forza nella fase di rincorsa vale:

$$\int_0^L \vec{F} \cdot d\vec{x} = FL \rightarrow 3{,}43\;kJ.$$

Quanto detto risponde ai punti (a)-(c). La potenza istantanea nella fase di rincorsa si ottiene dalla relazione $P(t) = Fv(t) = ma^2t$. La potenza massima è erogata alla fine della rincorsa e vale:

$$P(t^*) = \ ma^2t^* \rightarrow 850\ W.$$

La potenza media erogata P_m può essere calcolata come il lavoro compiuto dalla forza attiva F diviso per la durata temporale t^* della fase di rincorsa:

$$P_m = \frac{FL}{t^*} \rightarrow 425\ W.$$

Le precedenti considerazioni rispondono al punto (d). Nelle ipotesi del punto (e), la deflessione dell'asta può essere calcolata dalla relazione:

$$E_e = \frac{1}{2}Kx^2 = mg(H-h),$$

da cui segue:

$$x = \sqrt{\frac{2mg(H-h)}{K}} \rightarrow 2{,}25\ m,$$

cosa che risponde al punto (e). E' qui utile notare che l'asta ha una lunghezza di circa 5 m ed una massa inferiore ai 3 kg. (https://it.wikipedia.org/wiki/Salto_con_l'asta)