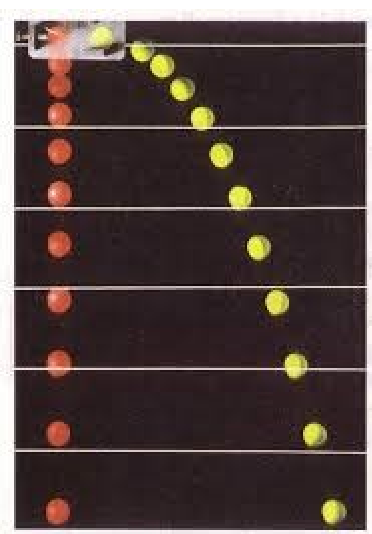
1. Cinematica in due dimensioni

Ci proponiamo di discutere alcuni aspetti della cinematica in due dimensioni. Rispetto al caso unidimensionale, è qui possibile apprezzare la natura vettoriale della teoria. Trattiamo in dettaglio due esempi di particolare interesse: il **moto del proiettile** ed **il moto circolare uniforme**. Prima di procedere con il nostro programma, enunciamo un importante principio noto come *principio di indipendenza dei moti simultanei* o anche come *principio di composizione dei moti simultanei*. Tale principio, già noto a Galilei (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, 1638*), può enunciarsi come segue:

Se un corpo è soggetto a due moti simultanei, ciascuno si svolge come se l'altro non fosse presente.

Pertanto i due moti, se pur operanti contemporaneamente, risultano indipendenti.

2. Il moto del proiettile: introduzione



Il principio ora enunciato è di particolare utilità concettuale quando occorra analizzare il problema del *moto del proiettile*. Un *proiettile* è un qualsiasi corpo soggetto all'accelerazione di gravità ed avente una velocità iniziale non nulla.

Cominciamo con il considerare il moto di due corpi identici nella situazione mostrata in figura. La pallina rossa è lasciata cadere con velocità nulla da una certa quota. Essa è animata da un moto rettilineo uniformemente accelerato.

La pallina gialla cade dalla stessa quota con velocità orizzontale diversa da zero. Il moto assume un carattere bidimensionale e la traiettoria è rappresentata da una curva nel piano della figura. E' un fatto sperimentalmente verificabile che se le due palline iniziassero il loro moto contemporaneamente giungerebbero simultaneamente al suolo. Questa osservazione è una chiara evidenza del fatto che il moto lungo la direzione verticale non è influenzato dal simultaneo svolgersi del moto in direzione orizzontale (*principio di indipendenza dei moti simultanei*).

Fu lo stesso Galilei ad accorgersi che il moto del proiettile risulta dalla composizione di un *moto rettilineo uniforme lungo la direzione orizzontale* e un *moto naturalmente accelerato nella direzione verticale*.

In accordo con tale osservazione, valida in condizioni ideali (si trascura ad esempio l'effetto frenante dell'aria), descriviamo la cinematica della situazione sopra richiamata.

Il moto nella direzione verticale è descritto, come già visto nel caso della caduta dei gravi, dalla seguente relazione:

$$\begin{gathered} z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h \\ v_z(t) = -gt \\ a_z(t) = -g \end{gathered} .$$

Il moto nella direzione orizzontale, seguendo Galilei, è rettilineo uniforme e pertanto

$$\begin{gathered} x(t) = v_x^0 t \\ v_x(t) = v_x^0, \\ a_x(t) = 0 \end{gathered}$$

con $v_x^0 > 0$. Il vettore posizione nel riferimento scelto prende la forma $\vec{r} = \big(x(t), 0, z(t)\big)$. Adesso possiamo rispondere ad alcune semplici domande. Ad esempio, possiamo domandarci quale sia l'equazione della traiettoria nel piano $x - z$. Per ottenere questa informazione basta eliminare il tempo dalle equazioni precedenti e scrivere la funzione $z = z(x)$.

Per fare questo ci basta osservare che vale la seguente relazione:

$$\begin{cases} z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h \\ t = \frac{x(t)}{v_x^0} \end{cases} .$$

Dalle precedenti otteniamo l'equazione della traiettoria

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x(t)}{v_x^0}\right)^2 + h$$

$$z = h - \frac{g}{2(v_x^0)^2} x^2.$$

Una volta nota l'equazione della traiettoria è semplice rispondere alla domanda successiva. Quanto dista il punto di caduta dalla direzione verticale? Per rispondere basta risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} z = h - \dfrac{g}{2(v_x^0)^2}x^2 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow h - \frac{g}{2(v_x^0)^2}x^2 = 0 \rightarrow x^* = v_x^0\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Il risultato precedente rappresenta lo spazio percorso orizzontalmente nel tempo di caduta.

Quanto vale la velocità al momento dell'impatto con il suolo? Abbiamo già osservato che il tempo di caduta vale

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Il vettore velocità in t^* si scrive nella forma:

$$\begin{cases} v_z(t^*) = -gt^* \\ v_x(t^*) = v_x^0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_z(t^*) = -g\sqrt{\dfrac{2h}{g}} \\ v_x(t^*) = v_x^0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_z(t^*) = -\sqrt{2gh} \\ v_x(t^*) = v_x^0 \end{cases}.$$

Abbiamo quindi ottenuto $\vec{v}(t^*) = \left(v_x^0, 0, -\sqrt{2gh}\right)$. Il modulo di tale vettore vale:

$$|\vec{v}(t^*)| = \sqrt{(v_x^0)^2 + 2gh}.$$

3. Il moto del proiettile

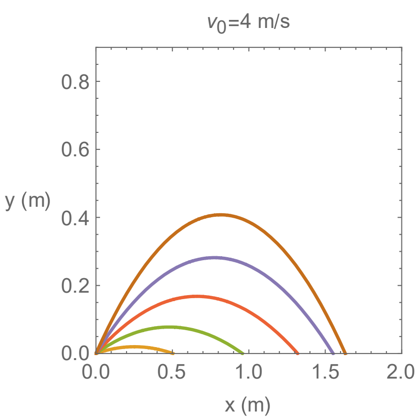
Fin qui abbiamo trattato la situazione in cui il proiettile è lanciato con velocità puramente orizzontale da un'altura. Supponiamo adesso di dover descrivere il moto di un proiettile lanciato da quota nulla. Dalla precedente analisi abbiamo capito che il moto avviene in un assegnato piano e quindi d'ora in avanti svilupperemo i nostri ragionamenti utilizzando vettori a due componenti. Sia $x - y$ il piano in cui si svolge il moto e sia il proiettile posto nell'origine degli assi al tempo iniziale. Sia inoltre la velocità iniziale data dal vettore $\vec{v}_0 = \left(v_{0x}, v_{0y}\right) \equiv (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta)$, dove v_0 rappresenta il modulo del vettore velocità iniziale mentre θ definisce l'angolo tra l'orizzontale e la direzione di *sparo*. Decomponiamo il moto nelle componenti indipendenti lungo gli assi. Procedendo in questo modo otteniamo le relazioni seguenti:

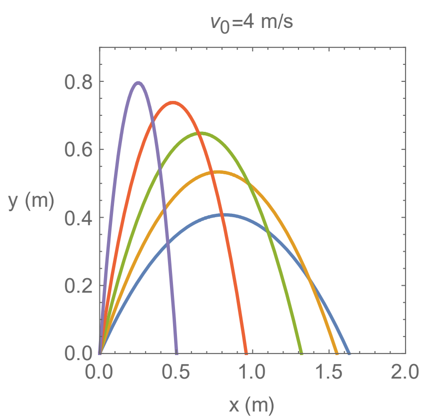
$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t \end{cases}.$$

Ricaviamo l'equazione della traiettoria.

$$\begin{cases} t = \frac{x(t)}{v_{0x}} \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{x(t)}{v_{0x}} \\ y(t) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x(t)}{v_{0x}}\right)^2 + v_{0y}\left(\frac{x(t)}{v_{0x}}\right) \end{cases} \rightarrow$$

$$y = -\frac{g}{2(v_{0x})^2}x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x.$$





La precedente può anche scriversi nella forma:

$$y = -\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2 + \tan\theta\, x,$$

che rappresenta una traiettoria parabolica passante per l'origine degli assi. La gittata, ossia la distanza tra il punto di impatto al suolo e l'origine degli assi, si determina risolvendo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} y = -\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2 + \tan\theta\, x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow -\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2 + \tan\theta\, x = 0.$$

L'equazione evidenziata ammette due soluzioni. La prima, $x = 0$, mette in evidenza che la condizione cercata è banalmente realizzata all'istante iniziale. La seconda soluzione, quella per noi interessante, è la soluzione non nulla dell'equazione:

$$x\left(-\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x + \tan\theta\right) = 0.$$

Determiniamo tale soluzione.

$$-\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x + \tan\theta = 0$$

$$-\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\rightarrow x_G = \frac{2\sin\theta\cos\theta\,(v_0)^2}{g} = \frac{(v_0)^2\sin(2\theta)}{g}.$$

Come si vede la gittata dipende dall'angolo di sparo. Essa è nulla sia per $\theta = 0$ che per $\theta = \pi/2$. La gittata è massima quando $\theta = \pi/4$.

Un'altra domanda alla quale è possibile rispondere è quale sia la quota massima raggiunta dal proiettile nel suo moto. La quota massima raggiunta è l'ordinata del punto di massimo della curva che rappresenta la traiettoria. L'ascissa di tale punto si determina imponendo la condizione

$$\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow -\frac{g}{(v_0\cos\theta)^2}x + \tan\theta \rightarrow x^* = \frac{x_G}{2}.$$

La quota massima vale:

$$y^* = -\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}\left(\frac{x_G}{2}\right)^2 + \tan\theta\,\frac{x_G}{2}$$

$$= -\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta\,(v_0)^2}{g}\right)^2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta\,(v_0)^2}{g}\right)$$

$$= -\frac{(v_0)^2\sin^2\theta}{2g} + \frac{\sin^2\theta\,(v_0)^2}{g}$$

$$= \frac{\sin^2\theta\,(v_0)^2}{2g}$$

La quota raggiunta viene massimizzata se il proiettile è sperato verticalmente. In quest'ultima condizione chiaramente la gittata è nulla ed è messa a rischio l'incolumità di chi spara!

Possiamo adesso domandarci quanto valga il tempo di volo t_V del proiettile. Questa informazione può essere ricavata imponendo la condizione $x(t_V) = v_{0x}t_V = x_G$. Dalla precedente otteniamo:

$$t_V = \frac{x_G}{v_{0x}} = \left(\frac{2\sin\theta\cos\theta\,(v_0)^2}{g}\right)\frac{1}{v_0\cos\theta} = \frac{2\,v_0\sin\theta}{g} = \frac{2\,v_{0y}}{g}.$$

Allo stesso risultato si giungerebbe se si imponesse la condizione $y(t_V) = 0$ scegliendo la soluzione diversa da zero.

4. Il moto circolare uniforme

Il moto circolare uniforme si realizza quando un corpo percorre una traiettoria circolare con velocità $\vec{v}$ costante in modulo. Scelto un riferimento cartesiano avente origine nel centro della circonferenza, il vettore posizione di un generico punto della traiettoria si scrive nella forma $\vec{r} = R(\cos\theta, \sin\theta)$. Qui R rappresenta il raggio della traiettoria circolare, mentre θ è una funzione del tempo che ci accingiamo a specificare.

Calcoliamo la velocità istantanea a partire dalla definizione:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R(-\sin\theta, \cos\theta)\frac{d\theta}{dt}.$$

Il modulo del vettore velocità vale:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(-\frac{d\theta}{dt}R\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}R\cos\theta\right)^2} = \sqrt{\left(R\frac{d\theta}{dt}\right)^2[\sin^2\theta + \cos^2\theta]} = R\left|\frac{d\theta}{dt}\right|.$$

Dalla precedente abbiamo ottenuto che $|\vec{v}|$ è costante nel tempo soltanto se

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

con ω una costante. La quantità ω prende il nome di velocità angolare. La precedente relazione implica che $\theta(t) = \omega t + \theta_0$. Nel seguito sceglieremo per semplicità $\theta_0 = 0$. In questo modo il vettore posizione del moto circolare si scrive nella forma

$$\vec{r}(t) = R(\cos(\omega t), \sin(\omega t)) = R\widehat{r_t},$$

dove $\widehat{r_t} = (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ rappresenta il versore della direzione radiale al tempo t. Il vettore posizione evolve nel tempo in modo periodico. Questo significa che vale la relazione $\vec{r}(t) = \vec{r}(t+T)$, dove T, detto *periodo*, rappresenta il tempo impiegato dal punto materiale per compiere un giro completo. La dimostrazione della periodicità del moto è immediata:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t+T) &= R(\cos(\omega t + \omega T), \sin(\omega t + \omega T)) = R(\cos(\omega t + 2\pi), \sin(\omega t + 2\pi)) \\ &= \vec{r}(t),\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la relazione $\omega T = 2\pi$. La precedente definisce la frequenza ν nel modo seguente:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Nel SI la frequenza è misurata in Hz (s^{-1}), mentre ω in radianti al secondo (rad/s). Con questa notazione, deriviamo nuovamente l'espressione della velocità

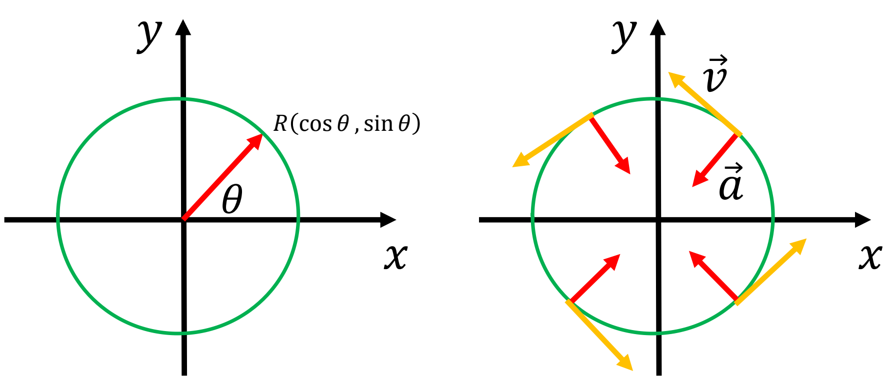
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\frac{d\widehat{r_t}}{dt} = R\omega\,\widehat{\theta_t},$$

dove $\widehat{\theta_t} = (-\sin(\omega t)\,, \cos(\omega t))$ indica il versore della direzione tangenziale e $|\vec{v}| = \omega R \equiv v$. Notiamo che vale la relazione

$$\widehat{r_t} \cdot \widehat{\theta_t} = (\cos(\omega t)\,, \sin(\omega t)) \cdot (-\sin(\omega t)\,, \cos(\omega t)) = 0,$$

la quale implica che le due direzioni risultano ortogonali. Da questo segue che $\vec{v}$ è ortogonale alla direzione radiale e tangente alla circonferenza in ogni punto. Calcoliamo adesso l'accelerazione istantanea. Utilizzando la definizione otteniamo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\omega\frac{d\widehat{\theta_t}}{dt} = R\omega^2(-\cos(\omega t), -\sin(\omega t)) = -R\omega^2\widehat{r_t} = -\omega^2\vec{r}.$$



Abbiamo quindi ottenuto le seguenti relazioni:

$$\vec{r}(t) = R\widehat{r_t}$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\omega\,\widehat{\theta_t} \qquad .$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2\widehat{r_t} = -\omega^2\vec{r}$$

Pertanto nel moto circolare uniforme esiste una *accelerazione centripeta* (che punta verso il centro della circonferenza) della forma $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$. Facile convincersi della validità della relazione $|\vec{a}| = \omega^2 R = v^2/R$. La presenza di un'accelerazione diversa da zero sembra un fatto contrario all'intuizione visto che il modulo della velocità risulta costante. Tuttavia l'accelerazione origina dalla variazione della direzione del vettore velocità.

Una ulteriore interessante osservazione può essere fatta esprimendo l'accelerazione in termini della derivata seconda del vettore posizione rispetto al tempo. Procedendo in questo modo, otteniamo la seguente relazione vettoriale

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega^2\vec{r} = 0,$$

che scritta in componenti prende la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \end{cases}.$$

Il moto elementare seguito da ogni componente del vettore posizione si dice *moto armonico*. Ad esempio la coordinata x si muove di moto armonico in quanto soddisfa l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

la quale è risolta, nel caso esaminato, dalla funzione $x(t) = Rcos(\omega t)$. Facile intuire che la precedente non è la soluzione più generale dell'equazione costitutiva di un moto armonico. La soluzione generale dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine è del tipo:

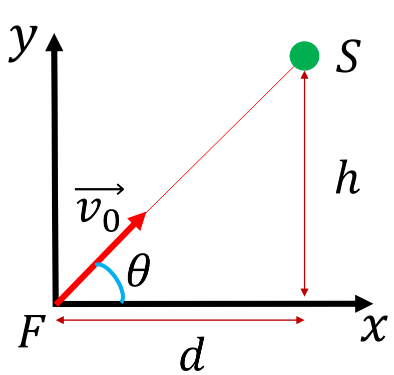
$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t),$$

dove A e B sono due costanti che possono essere fissate imponendo le condizioni iniziali (i.e. i valori iniziali della posizione e della velocità) . Nel contesto più generale dei moti armonici ω prende il nome di *pulsazione*.

L'equazione differenziale del moto armonico è di particolare importanza nella descrizione di sistemi oscillanti ideali (*oscillatore armonico*).

Esercizio

Un uomo primitivo, posto nell'origine di un sistema di riferimento fisso, lancia una freccia F puntando direttamente verso un scimmia S ferma su un albero. La scimmia intuisce l'intenzione aggressiva e, nell'istante in cui parte la freccia, si lascia cadere al suolo. Determinare se la scimmia verrà colpita dalla freccia.



Occorre scrivere le equazioni della cinematica della freccia e della scimmia. Per la freccia possiamo scrivere le seguenti relazioni cinematiche:

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t \end{cases}.$$

Da queste abbiamo dedotto l'equazione della traiettoria

$$y = -\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2 + \tan\theta\, x.$$

Notiamo esplicitamente che il vettore velocità iniziale della freccia si scrive in componenti mediante la seguente relazione:

$$\overrightarrow{v_0} = v_0(\cos\theta\,,\sin\theta) = v_0\left(\frac{d}{\sqrt{h^2+d^2}}, \frac{h}{\sqrt{h^2+d^2}}\right).$$

Una prima osservazione utile alla soluzione del problema riguarda la gittata. Se quest'ultima è minore di d allora la scimmia non verrà colpita. La condizione di salvezza della scimmia si scrive nella forma $x_G < d$

$$\frac{2\sin\theta\cos\theta\,(v_0)^2}{g} < d \to \frac{2(v_0)^2}{g}\left(\frac{d}{\sqrt{h^2+d^2}}\right)\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+d^2}}\right) < d$$

$$\to (v_0)^2 < g\left(\frac{h^2+d^2}{2h}\right) \to v_0 < \sqrt{g\left(\frac{h^2+d^2}{2h}\right)}.$$

Consideriamo adesso il caso in cui

$$v_0 \geq \sqrt{g\left(\frac{h^2+d^2}{2h}\right)},$$

che garantisce $x_G \geq d$. Scriviamo le equazioni del moto della scimmia

$$\begin{cases} x_s(t) = d \\ y_s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}.$$

La scimmia verrà colpita se ad un certo tempo t^* si verifica la condizione $\big(x(t^*), y(t^*)\big) = \big(x_s(t^*), y_s(t^*)\big)$. Tale condizione in componenti si scrive nella forma seguente

$$\begin{cases} x(t^*) = x_s(t^*) \\ y(t^*) = y_s(t^*) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{0x} t^* = d \\ -\frac{1}{2} g t^{*2} + v_{0y} t^* = -\frac{1}{2} g t^{*2} + h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t^* = \dfrac{d}{v_{0x}} \\ t^* = \dfrac{h}{v_{0y}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} t^* = \dfrac{d}{v_0 \left(\dfrac{d}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right)} \\ t^* = \dfrac{h}{v_0 \left(\dfrac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right)} \end{cases} \rightarrow t^* = \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{v_0}$$

Abbiamo quindi trovato che esiste un tempo t^* nel quale la freccia e la scimmia occupano la stessa posizione nel piano $x - y$. Questo implica che la scimmia verrà colpita se il modulo della velocità iniziale della freccia è adeguato.

Possiamo anche chiederci a quale quota la scimmia verrà intercettata dalla freccia. La quota sarà data dalla relazione

$$y_s(t^*) = -\frac{1}{2} g t^{*2} + h = -\frac{1}{2} g \left(\frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{v_0} \right)^2 + h = h - \frac{g\,(h^2 + d^2)}{2(v_0)^2}.$$

Chiaramente ci aspettiamo che valga la relazione $y_s(t^*) \geq 0$. Questo implica

$$h - \frac{g\,(h^2 + d^2)}{2(v_0)^2} \geq 0 \rightarrow (v_0)^2 \geq \frac{g\,(h^2 + d^2)}{2h} \rightarrow v_0 \geq \sqrt{\frac{g\,(h^2 + d^2)}{2h}},$$

che ribadisce la condizione sotto la quale l'intera analisi è stata sviluppata. Notiamo che la quota alla quale la scimmia è colpita aumenta all'aumentare del modulo della velocità iniziale della freccia. La scimmia è colpita al suolo (quota nulla) quando vale la relazione

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\,(h^2 + d^2)}{2h}}.$$

Una variante di questo problema nella quale la scimmia viene sempre colpita si trova al link https://it.wikipedia.org/wiki/La_scimmia_e_il_cacciatore.