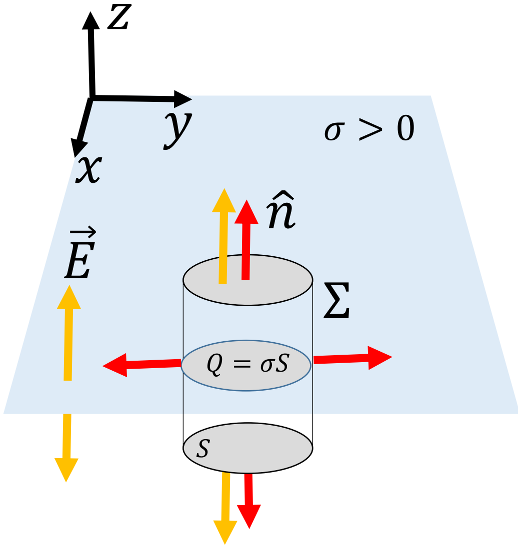
Esercizio 1

Calcoliamo mediante applicazione del teorema di Gauss il campo elettrostatico generato da un piano infinito uniformemente carico avente densità superficiale di carica $\sigma > 0$.

Osserviamo che per ragioni di simmetria il campo risulta ortogonale alla superficie. Calcoliamo quindi il flusso del campo elettrico utilizzando una superficie gaussiana cilindrica. Il flusso attraverso la superficie laterale del cilindro è nullo, essendo il campo ortogonale alla normale di detta superficie. Il campo risulta invece parallelo alle normali delle due basi del cilindro. Il flusso del campo attraverso le basi del cilindro, che coincide con il flusso totale attraverso la superficie gaussiana, vale quindi:



$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = 2|\vec{E}|S.$$

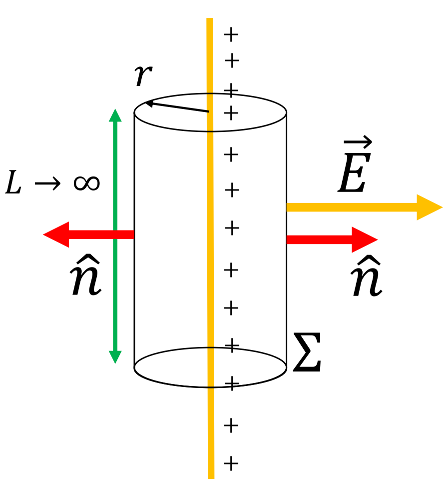
D'altra parte la carica racchiusa in Σ vale $Q = \sigma S$. Utilizzando il teorema di Gauss abbiamo la relazione:

$$2|\vec{E}|S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \rightarrow |\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

In forma vettoriale abbiamo:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}\, sign(z).$$

Questo risultato è stato già ottenuto ricorrendo a laborioso calcolo esplicito. L'attento lettore noterà un fattore due di differenza rispetto al risultato del teorema di Coulomb. Qual è l'origine di tale fattore?



Esercizio 2

Una carica positiva è uniformemente distribuita con densità di carica lineare λ su un filo di lunghezza infinita. Calcolare il valore del campo elettrico.

Consideriamo una superficie gaussiana cilindrica di altezza infinita come mostrato in figura. Il campo elettrico è di natura puramente radiale per ragioni di simmetria e risulta parallelo alle normali esterne della superficie cilindrica. Applicando il teorema di Gauss si ottiene:

$$\left|\vec{E}\right|(2\pi r)L = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0} \rightarrow \left|\vec{E}\right|(2\pi r)L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \rightarrow \left|\vec{E}\right| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

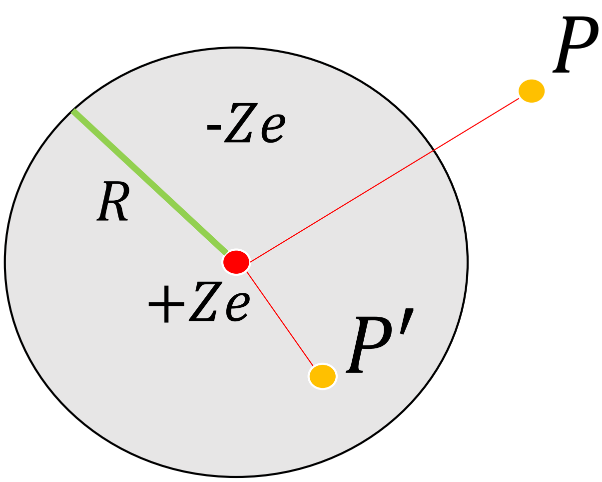
Dalla precedente abbiamo:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}.$$

Quanto varrebbe il campo elettrico interno ed esterno ad un cilindro di lunghezza infinita uniformemente carico?

Esercizio 3

Consideriamo un modello semplificato di atomo (con numero atomico Z) nel quale il nucleo è rappresentato da una carica puntiforme positiva pari a $+Ze$ circondata una distribuzione uniforme di carica negativa $-Ze$ distribuita su una sfera di raggio R. Si vuole conoscere il campo elettrico interno alla distribuzione sferica.



Utilizzando il teorema di Gauss è facile rendersi conto del fatto che il campo elettrico esterno alla distribuzione di carica è nullo, essendo tale la carica totale del sistema.

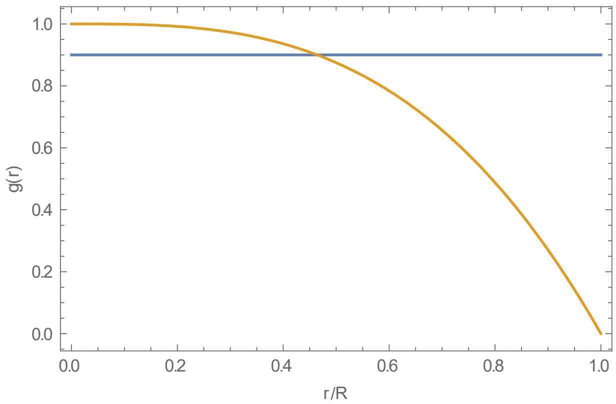
Resta da calcolare il campo elettrico a distanza dal nucleo minore di R. Il campo è sovrapposizione del campo del nucleo e di quello della distribuzione di carica negativa, problemi questi che abbiamo già trattato separatamente. In particolare il campo generato dal nucleo vale:

$$\vec{E}_+ = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\hat{r}.$$

Il campo generato dalla distribuzione di carica negativa vale:

$$\vec{E}_- = -\frac{Ze\, r}{4\pi\varepsilon_0\, R^3}\hat{r}.$$

Il campo risultante dal principio di sovrapposizione risulta essere somma dei precedenti:



$$\begin{aligned}\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- &= \frac{Ze\,\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right) \\ &= \frac{Ze\,\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) \\ &\equiv \frac{Ze\,\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, g(r),\end{aligned}$$

dove $r \leq R$ e $g(r)$ è una funzione che descrive lo schermaggio della carica del nucleo da parte degli elettroni. Si osserva inoltre che $g(0) = 1$ e $g(R) = 0$. Queste osservazioni sembrano giustificare il fatto che gli elettroni più interni sono maggiormente legati al nucleo di quelli periferici.

1. Energia potenziale e potenziale elettrico

Consideriamo il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q. In questo campo sia posta una carica di prova avente carica $q > 0$. La carica di prova sperimenta una forza coulombiana pari a $\vec{F} = q\vec{E}$. Ci chiediamo quale sia il lavoro che le forze del campo compiono per spostare la carica di prova tra due assegnate posizioni dello spazio. Ricorrendo alla definizione di lavoro abbiamo:

$$\begin{aligned}L = \int_i^f q\vec{E}\cdot d\vec{\ell} &= q\int_i^f \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|^2}\hat{r}\right)\cdot d\vec{\ell} = q\int_i^f \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|^2}\hat{r}\right)\cdot d\vec{r} \\ &= q\int_i^f \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|^2}\hat{r}\right)\cdot \hat{r}\, dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_i^f \frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_i}^{r_f} \\ &= -\frac{k\,qQ}{r_f} + \frac{k\,qQ}{r_i} = -\left(\frac{k\,qQ}{r_f} - \frac{k\,qQ}{r_i}\right).\end{aligned}$$

Dalla precedente deduciamo la conservatività del campo e la funzione energia potenziale nella forma:

$$U(r) = \frac{k\,qQ}{r}.$$

Per mettere in evidenza le proprietà del campo indipendentemente dalle proprietà delle cariche che ne risentono, si introduce la funzione potenziale elettrico $V(r)$ definito dalla relazione $q\,V(r) = U(r)$. Dalle precedenti risulta:

$$V(r) = \frac{k\,Q}{r}.$$

Notiamo esplicitamente che sia l'energia potenziale che il potenziale sono scelti in modo da risultare nulli all'infinito. Nel SI il potenziale elettrico si misura in Volt (V) e si ha l'equazione dimensionale:

$$1\,V = \frac{1\,J}{1\,C}.$$

Utilizzando il concetto di potenziale è possibile scrivere la seguente relazione:

$$L = \int_i^f q\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\left(U\left(r_f\right) - U(r_i)\right) = -q\left(V\left(r_f\right) - V(r_i)\right),$$

che immediatamente implica la conservatività del campo elettrico:

$$\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\left(V\left(r_f\right) - V(r_i)\right).$$

Quando la posizione iniziale e finale coincidono otteniamo il risultato notevole:

$$\oint_{i\equiv f} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0.$$

Questo risultato si enuncia dicendo che *la circuitazione del campo elettrostatico è nulla* qualsiasi sia la curva chiusa scelta per il suo calcolo. La precedente è diretta conseguenza della conservatività del campo elettrico.

I precedenti risultati sono stati ottenuti considerando il campo elettrico prodotto da una singola sorgente. Qualora siano presenti N sorgenti con cariche $q_1, \dots, q_N$ poste nelle posizioni definite dai vettori $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$, i precedenti risultati si generalizzano utilizzando il principio di sovrapposizione. In questo modo concludiamo che il potenziale elettrico nel caso di una distribuzione discreta di carica vale:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{k\,q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

Se le cariche sono così piccole e numerose da poter essere descritte, rispetto ad una appropriata scala di lunghezza, mediante una distribuzione continua di carica $\rho(\vec{r})$, il potenziale si scrive nella forma:

$$V(\vec{r}) = \int \frac{k\,\rho(\vec{r}')dx'\,dy'\,dz'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$

Il potenziale $V(\vec{r})$ è una funzione scalare delle coordinate spaziali. Una volta nota è possibile ricavare il campo elettrico ad essa associato. Per far questo sia $V(x, y, z)$ la funzione potenziale. Scegliamo un arbitraria direzione dello spazio, ad esempio quella individuata dall'asse delle x, e calcoliamo l'integrale nel limite di estremi di integrazione quasi coincidenti ($\Delta x \to 0$):

$$\int_x^{x+\Delta x} \vec{E}(x', y', z') \cdot \overrightarrow{dx'} = \int_x^{x+\Delta x} \vec{E}(x', y', z') \cdot \hat{x}\,dx' = \int_x^{x+\Delta x} E_x(x', y', z')\,dx' \approx E_x(x, y, z)\,\Delta x.$$

D'altra parte dalla conservatività del campo possiamo scrivere la relazione:

$$\int_x^{x+\Delta x} \vec{E}(x', y', z') \cdot \overrightarrow{dx'} = -\big(V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)\big).$$

Utilizzando le precedenti relazioni si ha:

$$E_x(x, y, z)\,\Delta x \approx -\big(V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)\big)$$
$$\to E_x(x, y, z) \approx -\left(\frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x}\right).$$

La relazione approssimata diviene esatta nel passaggio al limite dal quale si ha:

$$E_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} -\left(\frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x}\right) = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x},$$

dove abbiamo introdotto la nozione di derivata parziale.

Quando i precedenti ragionamenti sono estesi alle altre direzioni dello spazio si ottengono le relazioni:

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}.$$

Note le componenti del campo, la sua natura vettoriale è ricostruita dalla scrittura:

$$\vec{E} = \hat{x}\, E_x + \hat{y}\, E_y + \hat{z}\, E_z.$$

2. Concetto di capacità elettrica

Consideriamo un conduttore sferico di raggio R sul quale sia distribuita la carica totale Q. Sappiamo che il campo elettrico è nullo all'interno del conduttore, mentre all'esterno vale:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}.$$

Essendo il campo indistinguibile da quello che genererebbe una opportuna carica puntiforme, ne concludiamo che il potenziale associato risulta essere ($r > R$):

$$V(r) = \frac{k\, Q}{r}.$$

E' semplice rendersi conto del fatto che tra il campo e il potenziale sussiste la relazione:

$$\vec{E} = \left(-\frac{dV}{dr}\right)\hat{r}.$$

Infatti, utilizzando la precedente si verifica facilmente quanto segue:

$$\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_i^f \left(-\frac{dV}{dr}\right)\hat{r}\cdot d\vec{\ell} = -\int_i^f \left(\frac{dV}{dr}\right) dr = -\int_i^f dV = -\Big(V\big(r_f\big) - V(r_i)\Big).$$

Essendo nullo il campo all'interno del conduttore, occorre che il potenziale interno ad esso sia costante. D'altra parte non può esserci una differenza di potenziale tra l'interno e la superficie del conduttore. Questi argomenti implicano che deve essere:

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{k\, Q}{R} & 0 < r \leq R \\ \dfrac{k\, Q}{r} & r > R \end{cases}.$$

Abbiamo quindi dimostrato che il volume di un conduttore carico è equipotenziale e risulta:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, R}.$$

Esiste quindi una relazione di proporzionalità diretta tra la carica accumulata su un conduttore ed il potenziale elettrico a cui si trova. Questa proprietà può essere messa in maggior rilievo riscrivendo la precedente nella forma:

$$Q = CV,$$

dove la quantità $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ prende il nome di *capacità elettrica* del conduttore sferico. Nel SI l'unità di misura della capacità elettrica è il Farad (F) e vale la seguente equazione dimensionale:

$$1F = \frac{1\,C}{1V}.$$

La capacità elettrica di $1F$ risulta enorme e nella pratica si suole utilizzare i suoi sottomultipli.

Per farsi un'idea dell'enormità di tale unità di misura consideriamo un conduttore sferico di raggio pari a quello terrestre e valutiamone la capacità elettrica. Il calcolo diretto mostra quanto segue:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R = 4\pi(8{,}85 \cdot 10^{-12})(6{,}4 \cdot 10^{6})F \approx 0{,}71\,mF.$$

Si è ottenuta una capacità inferiore a $1\,mF$.

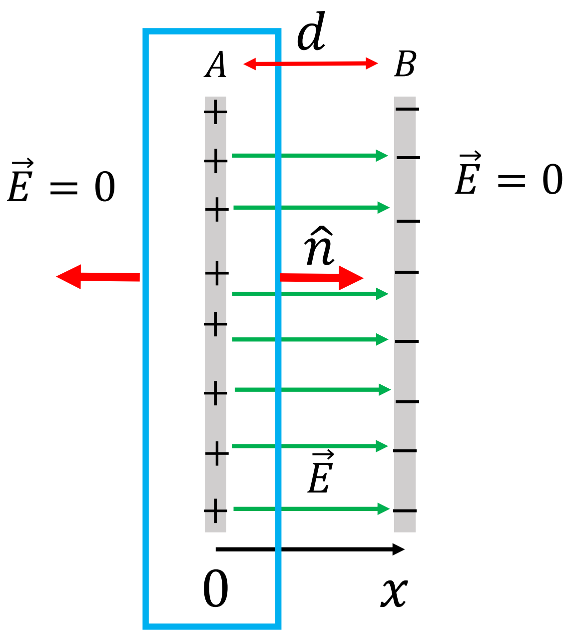
La capacità elettrica di un conduttore dipende in generale dalle sue caratteristiche geometriche. A livello intuitivo la nozione di capacità elettrica è facilmente comprensibile alla luce della relazione:

$$V = \frac{Q}{C}.$$

Supponiamo a tal riguardo di condurre il seguente esperimento ideale. Vogliamo far raggiungere un certo valore di potenziale ad un conduttore dotato di assegnata capacità elettrica. Si verifica facilmente che la quantità di carica necessaria ad ottenere questo scopo risulterà tanto più grande quanto maggiore risulta la capacità del conduttore. Pertanto, la capacità elettrica risulta essere una misura della *capienza* del conduttore nell'accogliere cariche a fissato potenziale.

3. Il condensatore piano

E' possibile attribuire una capacità elettrica anche a *sistemi di conduttori carichi*. Il *condensatore piano* ne è un rilevante esempio. Esso è formato da due piani (infiniti) conduttivi carichi a distanza d l'uno dall'altro. La carica sulle *armature* del condensatore è uguale in modulo e opposta in segno. Il sistema che ne risulta è globalmente neutro. Per questa ragione, utilizzando il teorema di Gauss, concludiamo che il campo elettrico è diverso da zero soltanto nello spazio fra le due armature, laddove esso risulta spazialmente uniforme. Il campo risulta inoltre ortogonale (vedi precedenti esempi) alla superficie delle armature. Esso risulta uscente dalla distribuzione di carica positiva ed entrante in quella negativa.



Per calcolare il valore del campo nella regione compresa tra le armature del condensatore utilizziamo il teorema di Gauss. Consideriamo a tal fine una superficie gaussiana che avvolga completamente l'armatura positiva così come mostrato in figura. Sia S l'estensione dell'armatura e $\sigma > 0$ la sua densità superficiale di carica. Risulta quindi:

$$|\vec{E}|S = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \rightarrow |\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Dalla precedente si ha la relazione $Q = \varepsilon_0|\vec{E}|S$. Inoltre il campo elettrico, in forma vettoriale, prende la forma:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{x}.$$

E' adesso possibile determinare la differenza di potenziale tra le armature. Si ha infatti:

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{x} = -(V_B - V_A).$$

Valutiamo l'integrale al primo membro:

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{x} = \int_0^d \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{x}\right)\cdot \hat{x}\,dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}.$$

Dalle due relazioni precedenti si ottiene:

$$V_A - V_B = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \rightarrow V_A - V_B = \frac{S\sigma d}{S\varepsilon_0} \rightarrow V_A - V_B = \frac{Qd}{S\varepsilon_0} \rightarrow Q = C(V_A - V_B)$$

Dove abbiamo introdotto la capacità elettrica del sistema nella forma:

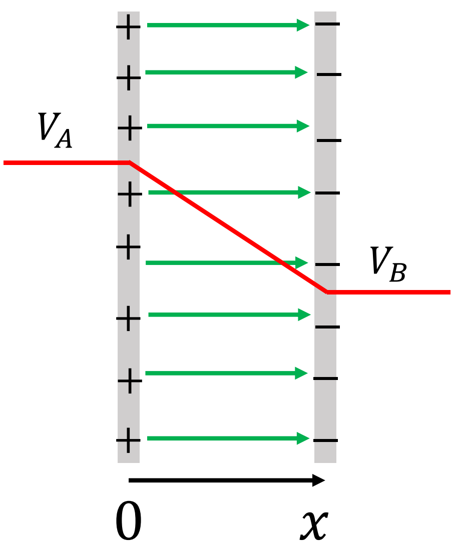
$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Si ha inoltre la relazione

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{V_A - V_B}{d}.$$

Per ragioni tecnologiche può essere conveniente disporre di condensatori che abbiano una elevata capacità elettrica. Per aumentare la capacità del condensatore è possibile agire sulla geometria del sistema. Infatti aumentando l'estensione delle armature o diminuendo la distanza tra esse è possibile ottenere un aumento della capacità.

Un altro modo per migliorare la capacità di un condensatore piano è interporre fra le armature un mezzo isolante (*dielettrico*) al posto del vuoto (o dell'aria). La presenza di un isolante può essere tenuta in conto sostituendo la costante dielettrica del vuoto ε_0 con quella del mezzo isolante $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$. Quest'ultima è espressa in termini di una quantità adimensionale detta costante dielettrica relativa ε_r. La costante dielettrica relativa tiene conto di fenomeni di aggiustamento di carica nel dielettrico (che non tratteremo). Per i fini di questa trattazione è sufficiente notare che $\varepsilon_r \approx 80$ per l'acqua, $\varepsilon_r \approx 12$ per l'ossido di silicio, $\varepsilon_r \approx 3{,}5$ per la carta, $\varepsilon_r \approx 1{,}00054$ per l'aria. Ne risulta che la capacità elettrica di un condensatore piano le cui armature siano separate da un dielettrico si scrive nella forma:



$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} \geq \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

E' inoltre interessante notare l'andamento del potenziale elettrico nel sistema. Si verifica agevolmente che vale la relazione:

$$V(x) = V_A - \left(\frac{V_A - V_B}{d}\right) x = V_A - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} x.$$

Come si muoverebbe una particella nel campo uniforme del condensatore?

Una particella positiva si muoverebbe verso il valore minore del potenziale in quanto la sua energia potenziale $U(x) = qV(x)$ verrebbe in questo modo minimizzata. Una particella negativa si comporterebbe in modo opposto, essendo potenziale ed energia potenziale opposti in segno. Il comportamento di particelle cariche nel campo uniforme del condensatore è intuitivamente comprensibile alla luce delle interazioni coulombiane tra cariche.

Concludiamo dicendo per completezza dell'esistenza di condensatori delle più disparate geometrie (condensatore cilindrico, c. sferico, c. variabili, etc).

4. Energia di carica di un condensatore

Per poter ottenere una distribuzione di carica sulle armature di un condensatore piano è necessaria l'azione di un agente esterno che compia lavoro contro le forze del campo elettrico. Queste ultime infatti lavorano per portare il sistema alla neutralità elettrica. Vogliamo calcolare il lavoro che questo agente esterno deve compiere affinché il condensatore si carichi.

Supponiamo che sul condensatore sia già presente la carica q sull'armatura a carica positiva. Per quanto detto si ha l'uguaglianza:

$$q = C(V_A - V_B).$$

Se adesso volessimo trasportare a velocità costante una carica infinitesima negativa $-dq$ da A a B occorrerebbe un agente esterno (una forza) che compia un lavoro elementare dL opposto a quello che compirebbero le forze del campo elettrico per compiere la stessa operazione. Il lavoro elementare che il campo elettrico compirebbe vale:

$$dL = (-dq)\big(-(V_B - V_A)\big).$$

Tale lavoro è negativo in quanto corrispondente ad una azione contraria alla naturale tendenza del campo elettrostatico a neutralizzare il sistema (la natura vorrebbe evitare accumuli di carica se possibile).

Il lavoro elementare che l'agente esterno dovrebbe compiere vale quindi:

$$d\mathcal{L} = -dL = dq(V_A - V_B) = \frac{q}{C}dq,$$

mentre il lavoro totale occorrente ad ottenere la configurazione di carica finale risulta essere

$$U = \int d\mathcal{L} = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C}.$$

Il lavoro necessario a caricare il sistema è immagazzinato come energia elettrostatica del condensatore e si ha

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}C(V_A - V_B)^2.$$

La densità di energia immagazzinata fra le armature del condensatore si può calcolare come rapporto tra U e il volume Sd compreso fra le armature. Ne segue che:

$$u = \frac{U}{Sd} = \frac{Q^2}{2CSd} = \frac{\left(\varepsilon_0 \left|\vec{E}\right| S\right)^2}{2CSd} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2 \frac{\varepsilon_0 S^2}{Sd\left(\frac{\varepsilon_0 S}{d}\right)} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2.$$

Nella derivazione abbiamo esplicitamente utilizzato la relazione $Q = \varepsilon_0 \left|\vec{E}\right| S$.