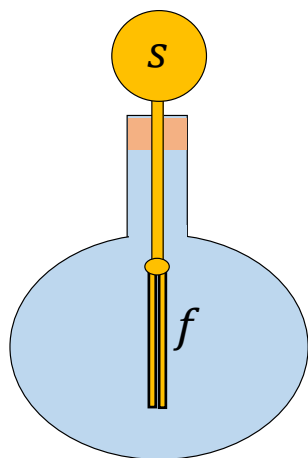


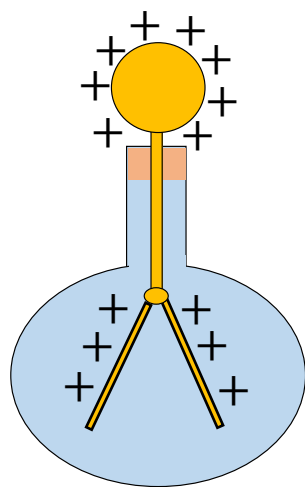
## 1. Strumenti di misura dell'elettrizzazione



Nel discutere i fatti sperimentali collegati alla legge di Coulomb abbiamo dato per scontato che sia possibile disporre di corpi elettricamente carichi con assegnate caratteristiche. Vediamo come ciò sia effettivamente possibile.

Per rendere evidente lo stato di carica di un corpo utilizziamo un sistema noto come *elettroscopio a foglie d'oro*. Un elettroscopio è costituito da una sferetta metallica collegata ad un'asticella conduttiva terminante con due lamine metalliche molto sottili (foglie d'oro). L'asticella è montata su un supporto isolante che occlude l'apertura di un'ampolla in vetro. L'ampolla contiene le lamine metalliche. Le foglie metalliche, protette dai movimenti dell'aria esterna, reagiscono allo stato di carica della sferetta.

Quando questa è neutra, le foglie metalliche sono a contatto in posizione verticale. Se una carica è depositata sulla sferetta essa migra distribuendosi su tutto il sistema conduttivo e quindi anche sulle foglie metalliche. La repulsione coulombiana causa quindi la repulsione delle foglie metalliche ed una divaricazione delle stesse. L'ampiezza della divaricazione è tanto maggiore quanto maggiore è la carica accumulata. In questo modo l'elettroscopio mette in evidenza lo stato di carica della parte conduttiva dello strumento.

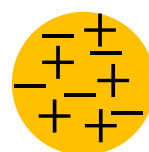


Analizziamo una procedura sperimentale che consente di ottenere un corpo elettricamente carico a partire da uno neutro utilizzando il fenomeno dell'*induzione elettrostatica*. Abbiamo già incontrato il fenomeno dell'induzione elettrostatica nel discutere alcuni fatti sperimentali.

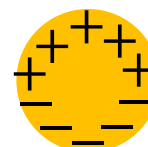
Quando un corpo carico è avvicinato ad un metallo, questo induce accumuli locali di carica come mostrato in figura. Il fenomeno è tuttavia reversibile. Infatti il

metallo torna ad uno stato localmente neutro allontanando il corpo carico. Come anticipato, esiste un modo per rendere permanente lo stato di carica indotto. La procedura sperimentale è illustrata dalla seguente sequenza di azioni.

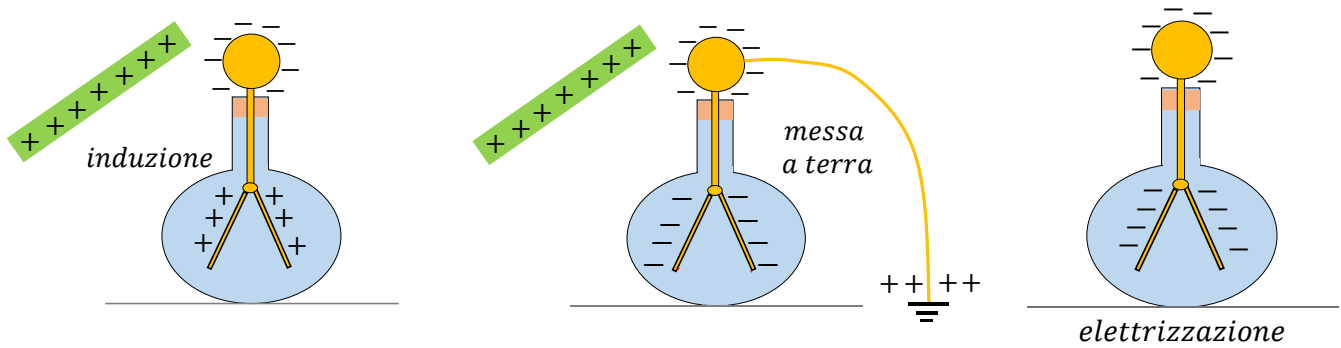
Avviciniamo un corpo carico positivamente alla sferetta dell'elettroscopio. Per induzione la sferetta acquisisce una carica negativa mentre le foglie nell'ampolla, private di elettroni, rimangono cariche positivamente. In questa situazione le foglie si respingono evidenziando lo stato di carica della sferetta. *Mettendo a terra* la sferetta, ad



*corpo  
neutro*



*induzione*

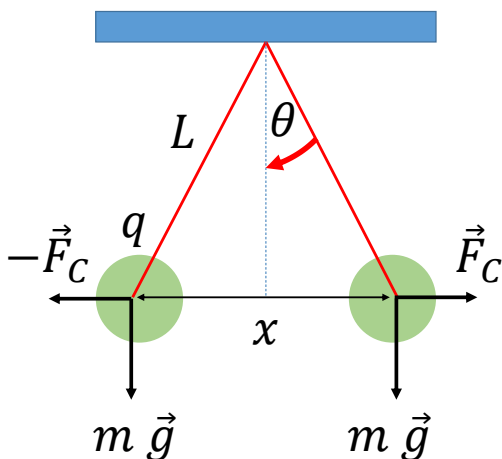
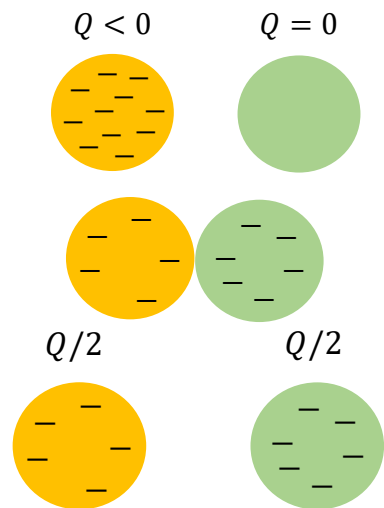


esempio toccandola, le cariche positive migrano il più lontano possibile. Interrompendo il collegamento con la terra e allontanando il corpo induttore si ottiene una carica netta negativa accumulata sull'elettroscopio. Il sistema può essere scaricato toccandolo nuovamente. La carica accumulata sull'elettroscopio può inoltre essere dimezzata toccando il sistema con un elettroscopio identico ed inizialmente scarico.

Questo fenomeno è detto *elettrizzazione per contatto*. L'elettrizzazione per contatto consente di ottenere conduttori con valore della carica identico.

Supponiamo di avere due conduttori sferici identici (stesso materiale e caratteristiche geometriche). Sia depositata la carica  $Q < 0$  su uno dei due conduttori e sia l'altro conduttore neutro.

Ponendo a contatto i conduttori, l'eccesso di carica si distribuisce uniformemente. I conduttori, una volta separati, rimarranno carichi con identica carica  $Q/2$ . Il processo può essere iterato per ottenere conduttori carichi con una frazione della carica iniziale. Con questi strumenti concettuali è possibile costruire sistemi con eccesso di carica assegnato utili nella verifica della legge di Coulomb.



### Esercizio

L'elettroscopio evidenzia lo stato di carica di un corpo ma non consente una stima quantitativa della carica accumulata. Il sistema può essere opportunamente tarato per corrispondere a questa esigenza. Il problema seguente offre alcuni utili spunti di riflessione.

Due palline di eguale massa e carica, rispettivamente  $m$  e  $q$ , sono sospese mediante fili di seta di lunghezza  $L$ . Supponendo *piccola* la carica, determinare la relazione che intercorre tra la divaricazione  $x$  dei fili e la carica  $q$ .

Innanzitutto osserviamo che il sistema potrebbe essere visto come una schematizzazione delle foglioline di un elettroscopio nell'ipotesi in cui queste siano approssimabili come cariche puntiformi.

Il modulo della repulsione coulombiana tra le sferette vale:

$$|\vec{F}_c| = k \frac{q^2}{x^2}.$$

Inoltre si ha la relazione trigonometrica

$$\frac{x}{2L} = \sin \theta.$$

Pertanto possiamo scrivere la seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{|\vec{F}_c|}{mg} = \tan \theta \approx \sin \theta = \frac{x}{2L}.$$

Da quest'ultima otteniamo la relazione cercata:

$$\begin{aligned} \frac{k}{mg} \frac{q^2}{x^2} &= \frac{x}{2L} \rightarrow x^3 = \left( \frac{2Lk}{mg} \right) q^2 \\ \rightarrow x &= \sqrt[3]{\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}}. \end{aligned}$$

Notiamo che la divaricazione  $x$  è tanto maggiore quanto minore è la massa delle palline. Essa inoltre aumenta con la carica.

## 2. Il campo elettrico

Supponiamo di poter disporre di uno spazio vuoto di dimensioni infinite e che ad un certo istante di tempo sia creata una sorgente di carica  $Q$  in una regione di tale spazio. Sebbene possiamo intuire che la presenza della carica modifica in qualche modo le proprietà dello spazio circostante, non abbiamo strumenti per suffragare tale ipotesi. Gli effetti della carica  $Q$  infatti possono essere sondati soltanto introducendo una seconda carica  $q$ . La carica  $q$  dovrebbe essere molto minore di  $Q$  affinché non sia essa stessa causa della modifica delle proprietà dello spazio. Supponiamo per ragioni di convenzione che la carica  $q$ , detta *carica di prova*, sia una *carica puntiforme positiva*. Posizioniamo quindi  $q$  in ogni punto accessibile dello spazio e misuriamo la forza di Coulomb di cui essa risente per effetto della carica  $Q$ .

Con questa procedura stiamo creando un importante ente matematico di rilevanza fisica. Stiamo definendo un *campo vettoriale*. Un campo vettoriale associa ad ogni punto dello

spazio tridimensionale un vettore. Il vettore in questione è dato dalla forza di Coulomb variabile punto per punto. Per questa ragione si tratta in particolare di *un campo di forze*. Le forze coulombiane dipendono dalle caratteristiche della carica sorgente  $Q$  (che ad esempio può essere un corpo esteso carico) e dall'intensità della carica di prova. Possiamo definire un ente fisico, il *campo elettrico*, che dipende dalle sole proprietà della sorgente del campo. Il campo elettrico è il campo vettoriale che si ottiene dal rapporto

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}(x, y, z)}{q}$$

con  $q \ll Q$ . Notiamo esplicitamente che le caratteristiche della sorgente sono nascoste in  $\vec{F}(x, y, z)$ . Talvolta il campo elettrico viene definito scrivendo il seguente limite formale

$$\vec{E}(x, y, z) = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\vec{F}(x, y, z)}{q}.$$

D'altra parte, questo limite ha solo un valore matematico in quanto  $q$  non può assumere valori inferiori alla carica elementare  $e$  a causa della già citata quantizzazione della carica elettrica. L'unità di misura del campo elettrico nel SI è il  $N/C$ .

La specifica forma che  $\vec{E}(x, y, z)$  assume dipende dalle caratteristiche della sorgente. Esiste un importante caso particolare nel quale il campo elettrico assume una forma semplice.

Questo è il caso del campo elettrico generato da una sorgente puntiforme dotata di carica  $Q$ . Fissiamo un sistema di riferimento che abbia l'origine coincidente con la sorgente del campo. Posizioniamo la carica di prova  $q$  in un generico punto dello spazio individuato dal vettore  $\vec{r}$ . La forza di Coulomb che agisce sulla carica di prova per effetto della sorgente è data dalla legge di Coulomb:

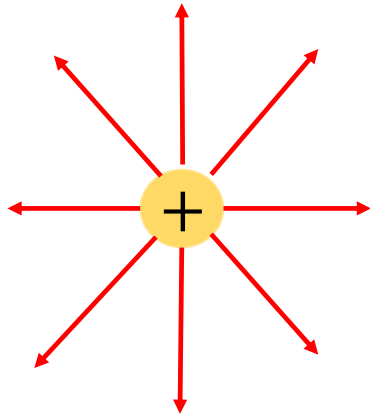
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{|\vec{r}|^2} \hat{r}.$$

Dalla precedente e dalla definizione di campo elettrico è semplice convincersi della validità della relazione:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|^2} \hat{r}.$$

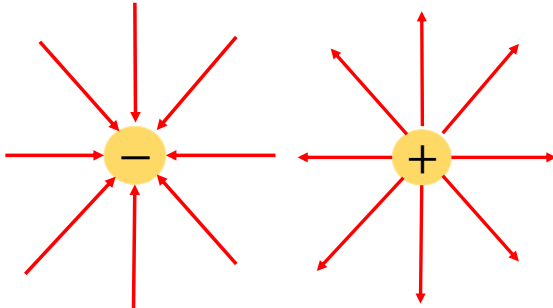
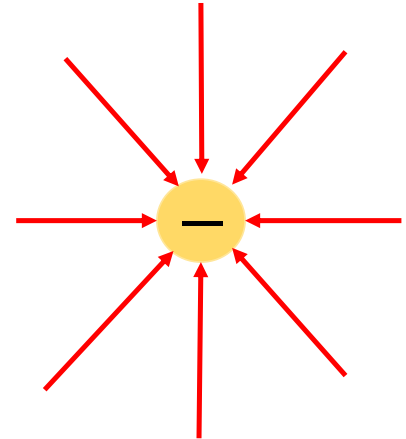
Il modulo del campo elettrico si scrive nella forma:

$$|\vec{E}(x, y, z)| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{|\vec{r}|^2},$$



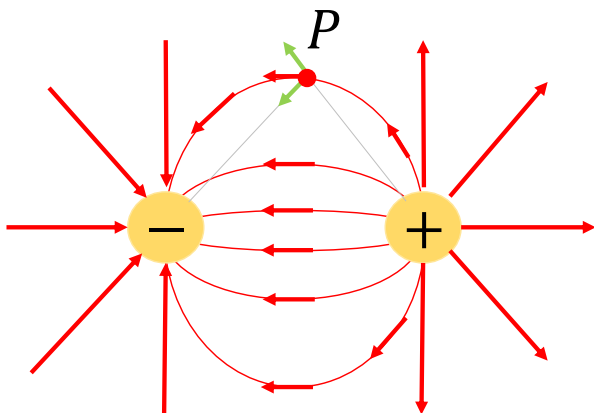
dove la precedente vale per valori positivi o negativi della carica sorgente. Per il campo elettrico, così come per la forza di Coulomb, vale il principio di sovrapposizione degli effetti. In base a ciò, il campo elettrico generato da più sorgenti è somma

vettoriale dei campi generati dalle singole sorgenti. La validità del principio di sovrapposizione consente di calcolare il campo generato da distribuzioni di carica discrete o continue. Il campo vettoriale generato da una sorgente puntiforme può essere rappresentato mediante *linee di campo*. Data la convenzione sul segno della carica di prova, le linee del campo generate da una carica positiva risultano uscenti dalla sorgente, mentre quelle generate da una carica negativa risultano entranti nella sorgente.

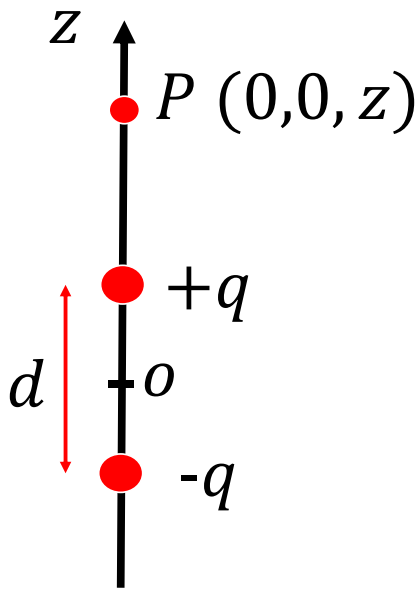


### 3. Il campo elettrico generato da un dipolo elettrico

Un dipolo elettrico è un sistema discreto costituito di due cariche di segno opposto a distanza fissa l'una dall'altra. Sia  $d$  questa distanza. Immaginiamo che la congiungente le due cariche individui la direzione dell'asse  $z$  di un sistema di assi ortogonali aventi l'origine in un punto equidistante dalle due cariche. Vogliamo calcolare il campo generato dal dipolo in un punto  $P$  appartenente all'asse  $z$ .



Prima di procedere con il calcolo vogliamo utilizzare il metodo delle linee di campo per visualizzare l'andamento approssimato del campo elettrico. Per prima cosa occorre tenere conto del



principio di sovrapposizione degli effetti. In base a questo principio il campo è la somma vettoriale dei campi generati dalle singole cariche. Possiamo quindi avvicinare le due cariche di segno opposto considerando le loro linee di campo così come si presenterebbero se le cariche fossero isolate. Sommando quindi i due campi punto per punto si ottiene il campo di dipolo risultante.

Dall'analisi qualitativa fin qui condotta si vede che il campo di dipolo assume in generale una forma complicata. Una notevole semplificazione si ottiene quando si voglia calcolare il campo nelle condizioni inizialmente descritte. Vediamo come il calcolo procede in questa situazione.

Utilizzando il principio di sovrapposizione otteniamo:

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \hat{z} \left( k \frac{q}{(z - d/2)^2} - k \frac{q}{(z + d/2)^2} \right).$$

La precedente può essere riscritta nella forma seguente:

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= \hat{z} \left( k \frac{q}{(z - d/2)^2} - k \frac{q}{(z + d/2)^2} \right) = \hat{z} kq \left( \frac{1}{z^2 \left(1 - \frac{d}{2z}\right)^2} - \frac{1}{z^2 \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^2} \right) \\ &= \frac{\hat{z} kq}{z^2} \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{2z}\right)^2} \right) = \frac{\hat{z} kq}{z^2} \left( \frac{\left(1 + \frac{d}{2z}\right)^2 - \left(1 - \frac{d}{2z}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^2} \right) \\ &= \frac{\hat{z} kq}{z^2} \left( \frac{\frac{2d}{z}}{\left(1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^2} \right) = \frac{\hat{z} 2k qd}{z^3} \left( \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^2} \right) \\ &= \frac{\hat{z} qd}{2\pi\epsilon_0 z^3} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Notiamo che a grande distanza dal dipolo ( $z \gg d/2$ ) il campo sull'asse  $z$  può essere approssimato dalla seguente relazione:

$$\vec{E}(P) \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\hat{z} qd}{z^3}.$$

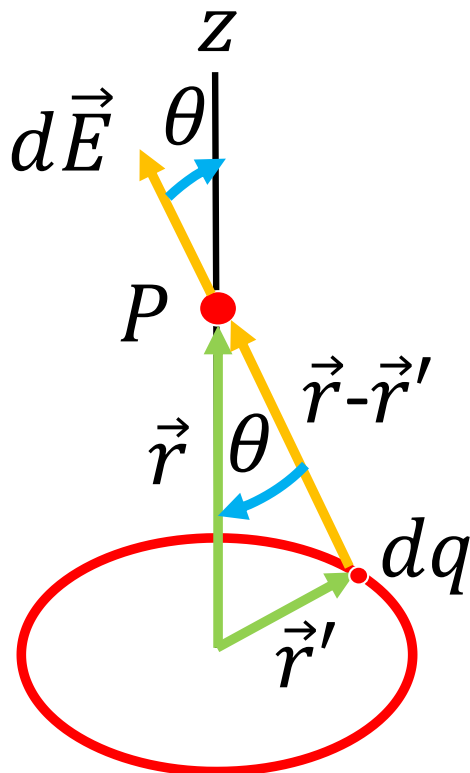
Il valore del campo elettrico a grandi distanze dal dipolo tende a zero più velocemente di quanto faccia il campo generato da una carica puntiforme.

#### 4. Campo elettrico di una spira carica

Fino a questo momento abbiamo fornito un esempio di calcolo del campo elettrico nel caso di una distribuzione discreta di cariche (dipolo). Vogliamo adesso esaminare il caso in cui il campo elettrico sia generato da una distribuzione continua di carica. Una distribuzione di carica continua si realizza quando una certa carica totale  $Q$  è distribuita su una regione estesa dello spazio. Tale regione può essere unidimensionale, bidimensionale o tridimensionale. Tratteremo qui il caso semplice di una distribuzione unidimensionale.

In particolare vogliamo calcolare il campo elettrico generato sull'asse di una spira di raggio  $R$  sulla quale sia uniformemente distribuita la carica  $Q$ . Sia  $\lambda$  la densità lineare di carica in modo tale che risulti  $Q = 2\pi R \lambda$ . Il calcolo richiede la valutazione del contributo al campo elettrico fornito da ogni elemento infinitesimo  $dl$  in cui è scomponibile la spira. Il campo infinitesimo nel punto  $P$  vale:

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = k \frac{\lambda dl}{r^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$



La simmetria del problema suggerisce che le componenti del campo ortogonali all'asse  $z$  siano irrilevanti (si cancellano per simmetria e non contribuiscono al risultato). Le sole componenti rilevanti sono quelle parallele all'asse  $z$ . La componente infinitesima del campo parallela all'asse  $z$  si scrive come segue:

$$\begin{aligned} dE_{\parallel} &= d\vec{E} \cdot \hat{z} = k \frac{\lambda dl}{r^2} \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \hat{z} \\ &= k \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \theta = k \frac{\lambda dl}{r^2} \left( \frac{z}{r} \right) \\ &= k \frac{z \lambda dl}{r^3} = k \frac{z \lambda dl}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la relazione:

$$\cos \theta = \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \hat{z}.$$

Il campo totale generato lungo l'asse dalla distribuzione si calcola integrando su tutta la lunghezza della circonferenza. Procedendo in questo modo si ottiene:

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &= \int dE_{\parallel} = \int_0^{2\pi R} k \frac{z \lambda dl}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= k \frac{z \lambda}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi R} dl = k \frac{z \lambda (2\pi R)}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = k \frac{z Q}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Da un punto di vista vettoriale il campo nel punto  $P$  si scrive  $\hat{z} E_{\parallel}$ . Osserviamo che per  $z = 0$  il campo è nullo, mentre nel limite  $z \gg R$  si ha:

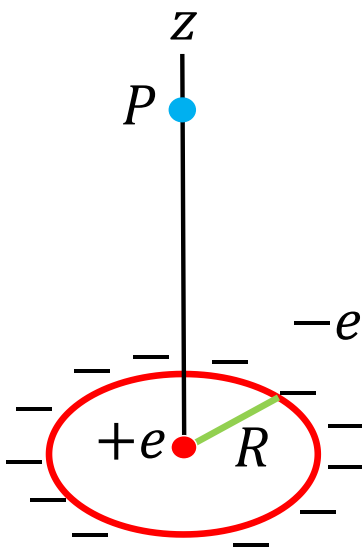
$$E_{\parallel} \approx \frac{k Q}{z^2}.$$

Il precedente risultato mostra che il campo generato a grande distanza dalla spira risulta indistinguibile da quello di una sorgente puntiforme avente la stessa carica di quella distribuita sulla spira.

### 5. Una osservazione sulla neutralità della materia

Immaginiamo di poter descrivere un atomo, ad esempio quello dell'idrogeno, come una carica elementare positiva  $+e$  posta al centro di un anello uniformemente carico con carica negativa  $-e$  e raggio  $R$ . Per il principio di sovrapposizione, il campo generato in un punto  $P$  lungo l'asse della spira è dato dalla somma dei contributi al campo forniti dalla carica positiva e dall'anello. Si ha quindi:

$$\vec{E} = \hat{z} \left( \frac{ke}{z^2} + \frac{k z(-e)}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

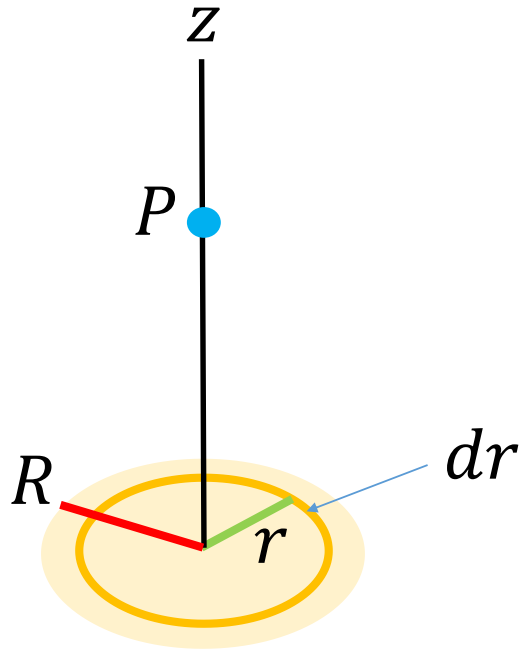


Osserviamo che nel limite di grande distanza si ha:



$$\lim_{z \rightarrow \infty} \vec{E} = 0.$$

Questo è il motivo per il quale la materia appare neutra nonostante sia costituita di cariche positive e negative.



## 6. Campo generato da un disco uniformemente carico

Vogliamo calcolare il campo generato da un disco di raggio  $R$  uniformemente carico in un punto di un asse ad esso ortogonale e passante per il centro del disco. Il problema può essere risolto ricorrendo al precedente risultato. Il contributo al campo lungo l'asse  $z$  dovuto ad un sottile anello vale:

$$dE = k \frac{z dq}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

con  $r \leq R$ . Introducendo la densità superficiale di carica

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

possiamo scrivere l'elemento di carica infinitesimo nella forma  $dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r) dr$ . Utilizzando i precedenti risultati intermedi otteniamo ( $z \geq 0$ ):

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\pi \epsilon_0} \int_0^R \frac{(2\pi r) dr}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma z}{4 \epsilon_0} \int_0^R \frac{2r dr}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Rimane da calcolare l'integrale in rosso. Effettuiamo il seguente cambio di variabili:

$$y = z^2 + r^2$$

con  $dy = 2r dr$ . Con queste posizioni l'integrale si trasforma nel modo seguente:

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\pi \epsilon_0} \int_0^R \frac{(2\pi r) dr}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma z}{4 \epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2 + R^2} \frac{dy}{(y)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right).$$

Notiamo che considerando il limite di raggio infinito si ottiene il campo che genererebbe un piano uniformemente carico. In questo limite abbiamo:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} E = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0}.$$

Allo stesso valore si giunge anche nel limite  $z \rightarrow 0$ .

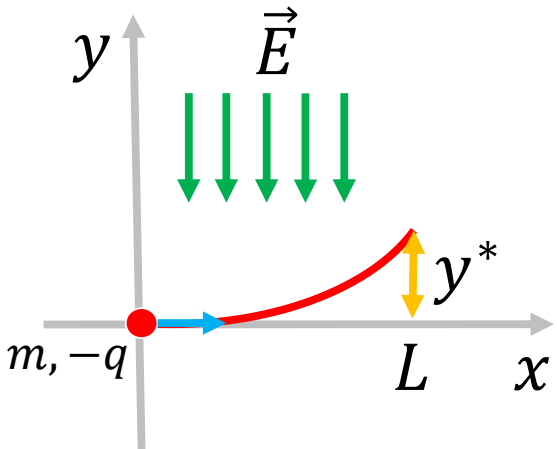
## 7. Cariche puntiformi in un campo elettrico

Una carica puntiforme  $q$  posta in una regione dello spazio che sia sede di un campo elettrico  $\vec{E}(x, y, z)$  generato da sorgenti di carica ferme rispetto ad un assegnato riferimento sperimenta una forza pari a

$$\vec{F}(x, y, z) = q \vec{E}(x, y, z).$$

I vettori  $\vec{F}(x, y, z)$  ed  $\vec{E}(x, y, z)$  risultano paralleli se  $q > 0$ , antiparalleli altrimenti.

### Esercizio



Una particella di massa  $m$  e carica negativa  $-q$  entra in una regione nella quale risiede un campo elettrico uniforme descritto dalla relazione  $\vec{E} = -\hat{y} E$  con  $E > 0$ . La particella è dotata di velocità iniziale  $\vec{v} = \hat{x} v$  ( $v > 0$ ) ed è collocata nell'origine degli assi all'istante iniziale. Determinare la distanza  $y^*$  dall'asse  $x$  nel momento in cui la particella ha percorso una distanza orizzontale pari a  $L$ .

Scriviamo il secondo principio della dinamica per la particella. Proiettando lungo gli assi otteniamo:

$$\hat{x}: m a_x = 0$$

$$\hat{y}: m a_y = (-E)(-q) = qE \rightarrow a_y = \frac{qE}{m}.$$

Osserviamo che il moto della particella lungo l'asse  $x$  è rettilineo uniforme, mentre il moto lungo l'asse  $y$  è uniformemente accelerato. Di qui e dalle condizioni iniziali seguono le relazioni cinematiche:

$$\begin{aligned}x(t) &= vt \\ y(t) &= \frac{1}{2} a_y t^2.\end{aligned}$$

Definiamo il tempo  $t^*$  nel quale la particella ha percorso la distanza orizzontale  $L = vt^*$ . Utilizzando le precedenti relazioni cinematiche si ottiene

$$y(t^*) = \frac{1}{2} a_y t^{*2} = \frac{1}{2} \left( \frac{qE}{m} \right) \left( \frac{L}{v} \right)^2,$$

che rappresenta proprio la deflessione cercata.