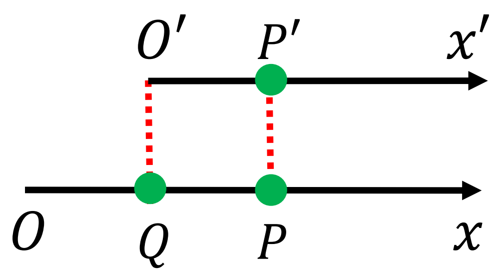
1. Leggi fisiche in sistemi non inerziali



Consideriamo due osservatori solidali con i due sistemi di riferimento Ox e $O'x'$ mostrati in figura. Sia Ox un sistema inerziale.

Supponiamo che i due osservatori debbano descrivere la dinamica del medesimo corpo. Il corpo ha vettore posizione $\vec{r} = \hat{x}\, P$ nel sistema Ox, mentre nel sistema $O'x'$ si ha $\vec{r}' = \hat{x}' P' = \hat{x}\, P'$. Detto $\vec{Q} = \hat{x}\, Q$ il vettore posizione di O' nel sistema di riferimento Ox, si ha la seguente relazione tra i vettori posizione prima introdotti: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{Q}$. Pertanto abbiamo le seguenti relazioni:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{Q}}{dt},$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} + \frac{d^2\vec{Q}}{dt^2}.$$

Supponiamo che l'origine del sistema $O'x'$ sia vista accelerare dall'osservatore solidale con il sistema Ox. Sia

$$\vec{A} = \frac{d^2\vec{Q}}{dt^2} = A\,\hat{x},$$

l'accelerazione supposta costante del sistema $O'x'$. Scriviamo il secondo principio della dinamica nel sistema inerziale Ox per il corpo in P

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

dove $\vec{F}$ rappresenta la risultante delle forze agenti sul corpo. Per semplicità, assumiamo che le forze agenti siano indipendenti dalle coordinate. Come fare per descrivere la dinamica nel sistema non inerziale? La domanda è lecita visto che il secondo principio della dinamica può essere scritto soltanto nel sistema di riferimento inerziale.

Utilizzando le relazioni cinematiche di sopra, possiamo riscrivere il secondo principio nel sistema inerziale facendo comparire le variabili cinematiche del sistema non inerziale. Procedendo in questo modo si ottiene:

$$\vec{F} = m\left(\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} + \vec{A}\right) = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} + m\vec{A} \rightarrow \vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} + m\vec{A}.$$

La precedente non ha la forma del secondo principio della dinamica per la presenza del termine $m\vec{A}$ al secondo membro. Tuttavia, la precedente equazione può riscriversi nella forma

$$\vec{F} - m\vec{A} = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} \rightarrow \vec{F} + \overrightarrow{F_a} = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}.$$

Ne segue che l'osservatore solidale con il sistema non inerziale $O'x'$ avverte una *forza apparente* $\overrightarrow{F_a} = -m\vec{A}$ non presente nel sistema di riferimento inerziale. Tale forza apparente, originata dall'*accelerazione di trascinamento* posseduta dal sistema non inerziale, va ad aggiungersi alle forze riscontrabili anche dall'osservatore inerziale. Da quanto detto si evince che la forma del secondo principio è preservata anche nel sistema di riferimento non inerziale a patto di considerare, al primo membro, sia la risultante delle forze reali che la risultante delle forze apparenti.

Notiamo inoltre che se $A > 0$ (e.g. treno che accelera) $\overrightarrow{F_a} = -m\vec{A}$ punta nel verso negativo dell'asse x'. Mentre se $A < 0$ (e.g. treno che decelera) $\overrightarrow{F_a} = -m\vec{A}$ punta nel verso positivo dell'asse x'.

La precedente deduzione è avvalorata dall'esperienza. Quando siamo seduti sul sedile di un veicolo in accelerazione avvertiamo una forza che schiaccia al sedile la nostra schiena. In condizione di moto rettilineo uniforme non avvertiamo alcuna forza. Una forte decelerazione provoca una forza apparente che ci spinge verso il parabrezza del veicolo.

2. La forza peso

La forza peso è responsabile della caduta dei corpi in prossimità della superficie terrestre. Sappiamo dagli studi di Galilei che essa imprime la medesima accelerazione $\vec{g}$ a corpi di massa differente. E' facile quindi intuire che la forma di tale forza è data dalla relazione

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{z},$$

dove l'asse z è scelto in modo da avere direzione ortogonale alla superficie terrestre e verso da essa uscente. Quando scriviamo il secondo principio in presenza della sola forza peso, otteniamo la relazione:

$$\vec{P} = m\vec{a},$$

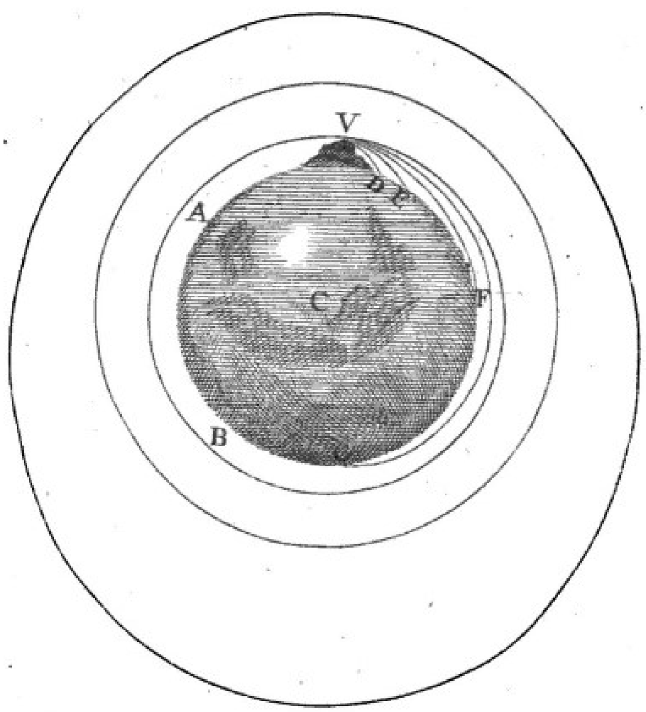
che, identificando massa inerziale e gravitazionale, implica $\vec{a} = \vec{g}$. La precedente relazione si riscrive nella forma

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -g\hat{z}.$$

Quest'ultima, proiettata lungo l'asse z e lungo l'asse x, ci consente di ottenere:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2z}{dt^2} = -g \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \end{cases}.$$

La soluzione delle precedenti porta alle equazioni già viste per la caduta dei gravi o per il moto del proiettile nel piano $x - z$, a seconda delle condizioni iniziali.



E' qui utile chiarire la differenza tra massa e peso. La massa è uno scalare che specifica la quantità di materia di cui è costituito un corpo. Il peso (o forza peso) è una forza ed ha quindi natura vettoriale.

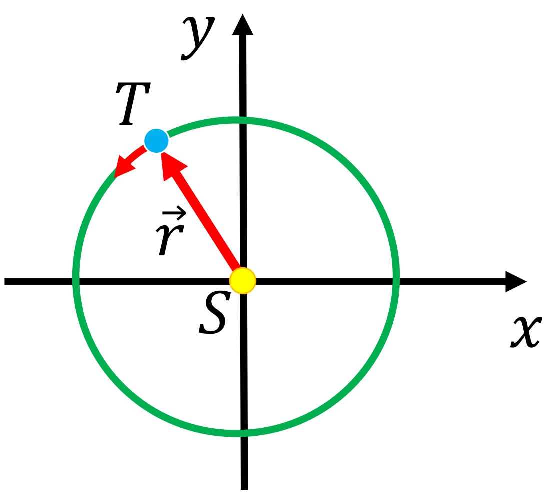
3. La mela di Newton e l'origine della forza peso

Johannes Kepler (1571-1630), analizzando i risultati delle osservazioni astronomiche di Tycho Brahe (1546-1601), giunse a formulare tre leggi empiriche sul moto dei pianeti intorno al sole. Tali leggi si enunciano nel modo seguente:

1) I pianeti nel loro moto intorno al sole descrivono orbite ellittiche, essendo la posizione del sole coincidente con uno dei due fuochi.
2) La velocità areolare dei pianeti è costante lungo l'orbita.
3) Per tutti i pianeti è costante il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore a e il quadrato del periodo di rivoluzione T, secondo la relazione

$$\frac{a^3}{T^2} = K.$$

Sulla base di tali leggi empiriche, Newton elaborò la sua teoria della *gravitazione universale*. Ripercorriamo i passaggi salienti di questa elaborazione.



Dal momento che in molti casi rilevanti le orbite dei pianeti assumono la forma di ellissi molto prossime a circonferenze, risulta possibile fare alcune semplificazioni. In particolare la trattazione diviene particolarmente semplice se si considerano orbite circolari. Sotto tale ipotesi, la prima e la seconda legge di Keplero implicano che i pianeti sono animati da moto circolare uniforme. Sappiamo che se il moto del pianeta è circolare ed uniforme deve esistere un'accelerazione centripeta avente modulo $|\vec{a}_c| = \omega^2 R$, dove ω rappresenta la velocità angolare dell'orbita ed R ne rappresenta il raggio. La presenza di un'accelerazione centripeta indica l'esistenza di una forza centripeta, rivolta verso il sole, avente modulo pari a $|\vec{F}_c| = m\,\omega^2 R$, dove m rappresenta la massa del pianeta considerato, ad esempio la terra. Newton comprese che l'origine di tale forza è da ricercarsi nella forza attrattiva $\vec{F}_S$ che il sole esercita sul pianeta. Da queste considerazioni risulta chiaro che

$$\vec{F}_S = -m\,\omega^2 R\,\hat{r}.$$

D'altra parte, dalla terza legge di Keplero con $a \approx R$, possiamo dedurre quanto segue:

$$\frac{R^3}{T^2} = K \rightarrow \frac{4\pi^2 R^3}{T^2} = 4\pi^2 K \rightarrow \omega^2 R^3 = k \rightarrow \omega^2 = \frac{k}{R^3}.$$

Sostituendo il risultato precedente nell'espressione della forza attrattiva dovuta al sole si ottiene:

$$\vec{F}_S = -\frac{k\,m}{R^2}\,\hat{r},$$

che rappresenta la forza con la quale il sole attrae la terra. Il terzo principio della dinamica asserisce che deve esistere una forza di pari modulo e direzione, ma opposta in verso, esercitata dalla terra sul sole. Sia il modulo di tale forza dato dalla relazione

$$\left|\vec{F}_T\right| = \frac{k' \, M}{R^2},$$

dove M rappresenta la massa del sole. D'altra parte occorre che sia verificata l'uguaglianza $\left|\vec{F}_T\right| = \left|\vec{F}_S\right|$, richiesta dal terzo principio della dinamica. La precedente uguaglianza implica immediatamente la relazione

$$k'M = k \, m.$$

Le costanti k e k' dipendono solo dalle proprietà delle sorgenti dell'attrazione gravitazionale. Sia la massa della sorgente l'unica grandezza fisica rilevante. Sotto tale ipotesi, possiamo scrivere

$$k = f(M)$$
$$k' = f(m)'$$

dove $f(x)$ è una funzione incognita da determinare. La funzione deve essere nulla se la massa della sorgente è nulla. Stiamo costruendo quindi una teoria nella quale i corpi massivi generano forze attrattive su altre masse. Queste richieste si traducono nella relazione $f(0) = 0$. Sia poi la funzione incognita sviluppabile in serie di Taylor secondo la relazione

$$f(x) = G \, x + \Gamma x^2 + \cdots.$$

Alla luce di queste posizioni, la relazione $k'M = k \, m$ si può riscrivere nella forma

$$f(m)M = f(M)m \rightarrow (G \, m + \Gamma m^2 + \cdots)M = (G \, M + \Gamma M^2 + \cdots)m,$$

la quale implica necessariamente $f(x) = Gx$. Di qui si giunge a stabilire che la forza che il sole esercita sulla terra vale

$$\vec{F}_S = -\frac{G \, M \, m}{R^2} \, \hat{r}.$$

In generale la forza attrattiva generata da una massa M (posta nell'origine di un riferimento cartesiano) su una m a distanza $|\vec{r}|$ è data dalla relazione

$$\vec{F}_G = -\frac{G \, M \, m}{|\vec{r}|^2} \, \hat{r},$$

che è la *legge di gravitazione universale*. La costante G, detta costante di gravitazione universale, può essere misurata mediante la bilancia di torsione (esperimento di H. Cavendish, 1797) ed il suo valore in unità del SI è dato dalla relazione

$$G = 6.66 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}.$$

Newton intuì che la forza che tiene in orbita la terra intorno al sole è della stessa natura di quella responsabile della caduta dei gravi sulla terra. Mettendo a confronto l'espressione della forza peso per un corpo di massa m con l'attrazione gravitazionale esercitata dalla terra sulla stessa massa, otteniamo le due relazioni

$$\vec{P} = -mg\,\hat{z}$$
$$\vec{F}_G = -\frac{G\,M_{terra}\,m}{R_{terra}^2}\,\hat{r}$$

dove abbiamo utilizzato l'approssimazione valida in prossimità della superficie terrestre $|\vec{r}|^2 \approx R_{terra}^2$ e la simmetria sferica del problema. Il confronto delle precedenti mostra immediatamente che l'accelerazione di gravità sulla terra

$$g = \frac{G\,M_{terra}}{R_{terra}^2}$$

dipende dalla massa e dal raggio medio terrestre ($R_{terra} \approx 6370\ Km$), che è noto sin da tempi remoti (Eratostene, 230 a.C.). Pertanto, nella precedente, l'unica incognita è la massa della terra. Essa può quindi essere stimata mediante la relazione

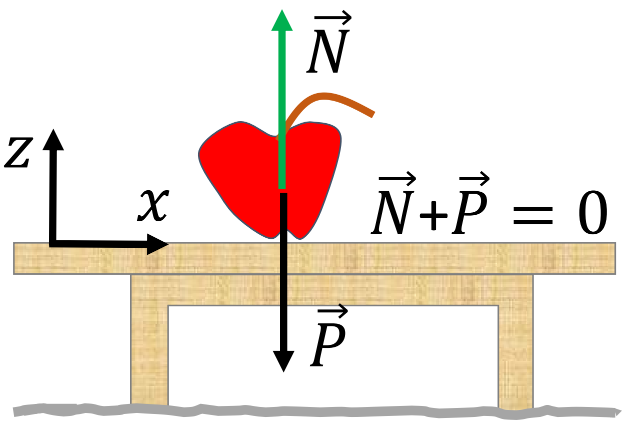
$$M_{terra} = \frac{gR_{terra}^2}{G} = \frac{(9.8\ m/s^2)(6.4 \cdot 10^6 m)^2}{6.66 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}} \approx 6 \cdot 10^{24} Kg.$$

Nel corso di questa discussione abbiamo individuato la prima delle quattro forze fondamentali: *l'interazione gravitazionale o forza di gravità*.

4. La forza peso agisce in ogni situazione?

L'effetto della forza peso risulta evidente nel fenomeno della caduta dei gravi. Essa è infatti responsabile dell'accelerazione di gravità sperimentata da ogni corpo. Consideriamo una mela di massa m poggiata sul piano di un tavolo.

In questa situazione la forza peso continua ad agire?



La risposta è affermativa. *La forza peso agisce in ogni situazione*. D'altra parte il fatto che la mela sia in quiete ci suggerisce che la risultante delle forze agenti su di essa debba essere nulla. Questa osservazione implica l'esistenza di almeno un'altra forza in grado di neutralizzare l'effetto della forza peso. Questa forza è la *reazione vincolare esercitata dal piano*.

Quando un corpo preme contro una superficie, essa si deforma (anche se è apparentemente rigida). Tale deformazione produce una forza di reazione ortogonale alla superficie.

Le *reazioni vincolari* sono forze che impediscono alcuni movimenti ai corpi. Il piano di un tavolo, ad esempio, impedisce alla mela di cadere al suolo.

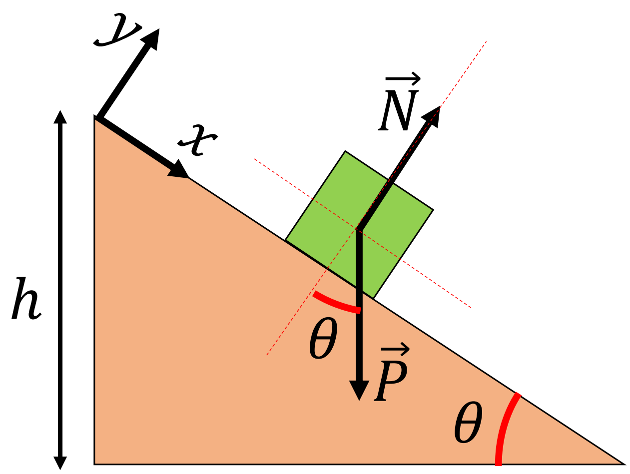
Nella situazione descritta, detta $\vec{N}$ la reazione vincolare, deve valere la condizione di equilibrio $\vec{N} + \vec{P} = 0$. La precedente può essere proiettata sugli assi nel modo seguente:

$$\begin{cases} \left(\vec{N} + \vec{P}\right) \cdot \hat{x} = 0 \cdot \hat{x} = 0 \\ \left(\vec{N} + \vec{P}\right) \cdot \hat{z} = 0 \cdot \hat{z} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_x + P_x = 0 \\ N_z + P_z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_x = -P_x \\ N_z = -P_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_x = 0 \\ N_z = mg \end{cases}.$$

Dalle precedenti si ottiene il valore della reazione vincolare nella forma $\vec{N} = mg\,\hat{z}$, che risulta normale al piano. Nonostante la reazione vincolare normale sia originata dalla risposta elastica del piano, risulta conveniente, come mostrato sopra, ricorrere ad un'analisi dinamica della situazione. Questa analisi fa unicamente uso della condizione di equilibrio di un corpo. Quest'ultima si enuncia nel modo seguente:

un corpo (punto materiale), inizialmente in quiete, è in equilibrio se la risultante delle forze agenti su di esso è nulla.

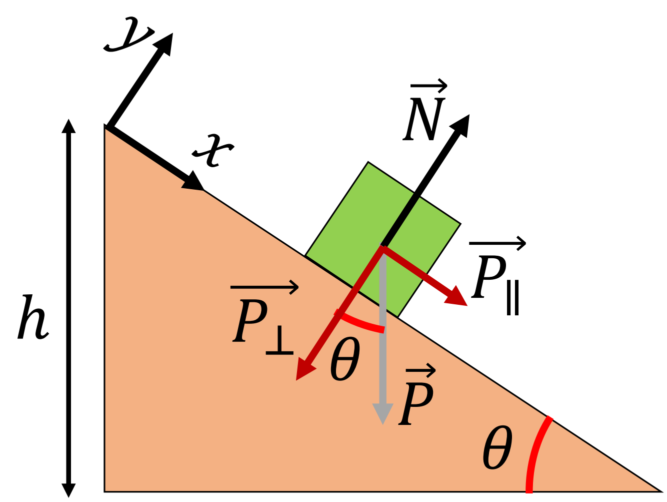
E' interessante precisare che la reazione vincolare è una forza causata dalla deformazione del piano, di variabile entità, prodotta dalle sollecitazioni meccaniche indotte dai corpi poggiati. In linea di principio (vedremo in seguito come) si potrebbe determinare la reazione vincolare valutando la deformazione del piano sotto l'azione della forza peso del corpo poggiato su di esso. Tale valutazione è nella pratica di difficile attuazione in quanto le deformazioni sopra dette sono tipicamente di modestissima entità. Per tale ragione, l'analisi delle reazioni vincolari è affrontata mediante le considerazioni di carattere dinamico sopra riportate.



5. Reazioni vincolari su un piano inclinato

Il piano inclinato è stato ampiamente utilizzato da Galilei per lo studio del moto dei corpi sotto l'azione della gravità. Analizziamo le forze agenti su un corpo poggiato su un piano inclinato come quello mostrato in figura. Supponiamo per prima cosa che **il piano sia sufficientemente liscio** così che il corpo sia libero di scivolare su di esso senza impedimenti.

Sia il piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Sia lunga ℓ l'ipotenusa del profilo triangolare del piano ed h la misura di uno dei due cateti. Definiamo un riferimento di assi cartesiani come mostrato in figura. Sia l'asse x parallelo al piano inclinato, mentre l'asse y corrisponda con la direzione ortogonale al piano. Le forze agenti sul corpo sono la forza peso e la reazione vincolare esercitata dal piano. Quest'ultima può esercitare soltanto azioni meccaniche che siano puramente ortogonali al piano. In base a queste considerazioni si ha la situazione mostrata in figura.



Notiamo che la forza peso può essere decomposta in una componente parallela al piano, $\vec{P}_\parallel$, ed una ortogonale, $\vec{P}_\perp$. La componente parallela al piano, in assenza di attrito, non può essere equilibrata da alcuna forza. Mentre affinché il corpo risulti poggiato sul piano in ogni istante (assenza di moto in direzione y) occorre che sia rispettata la relazione

$$\vec{P}_\perp + \vec{N} = 0 \rightarrow \hat{y}(N - mg\cos\theta) = 0 \rightarrow N = mg\cos\theta,$$

che determina la reazione vincolare normale al piano nella forma $\vec{N} = mg\cos\theta\,\hat{y}$. In direzione x esiste un'unica forza non equilibrata, ossia $\vec{P}_\parallel$. Tale forza è responsabile della caduta del corpo verso la base del piano inclinato. Scriviamo l'espressione del secondo principio della dinamica in direzione parallela al piano. Otteniamo

$$\vec{P}_\parallel = m\,\vec{a} \rightarrow mg\sin\theta = m\,a_x \rightarrow a_x = g\sin\theta = g\frac{h}{\ell} < g.$$

Pertanto il moto di discesa lungo il piano inclinato avviene ad accelerazione costante. Si tratta quindi di un moto uniformemente accelerato lungo la direzione x. L'accelerazione di detto moto è inferiore a quella di gravità e può essere resa piccola a piacere diminuendo h. Per questo motivo il tempo di discesa può essere reso lungo a piacere. Questo è il motivo per il quale Galilei fece largo uso del piano inclinato nei suoi esperimenti.

Commentiamo adesso una proprietà generale dei moti originati da forze costanti nel tempo e nello spazio. Sotto tale ipotesi possiamo scrivere il secondo principio nella forma

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Dalla precedente otteniamo le seguenti relazioni:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_x}{m}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_y}{m},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{F_z}{m}$$

che definiscono le equazioni di un moto uniformemente accelerato nella direzione della forza applicata. Se $F_y = F_z = 0$ e sotto l'ipotesi che non vi siano variazioni di posizione nel piano $y - z$, l'unica relazione rilevante risulta

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_x}{m},$$

che immediatamente implica

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{F_x}{m}\right)t^2 + v_{0x}t + x_0.$$