

## 1. Interazione tra correnti elettriche stazionarie e campi magnetici

La fenomenologia del magnetismo è rimasta sostanzialmente misteriosa fino a quando non si è osservato che:

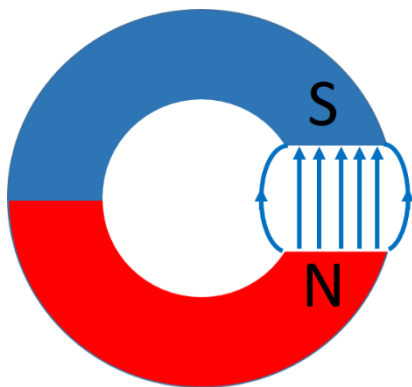
- (i) la corrente stazionaria che attraversa un filo rettilineo genera perturbazioni su un ago magnetico (Oersted, 1820);
- (ii) un filo percorso da corrente immerso in un campo magnetico uniforme è soggetto ad azioni di natura meccanica;
- (iii) due fili percorsi da corrente sperimentano forze di natura attrattiva o repulsiva a seconda dei versi di scorrimento delle correnti.

Queste evidenze sperimentali suggeriscono l'idea che *una corrente stazionaria possa essere la sorgente di un campo magnetico*. Secondo questa interpretazione, l'esperimento (i) indica che l'ago magnetico reagisce al *campo di induzione magnetica* generato dal filo percorso da corrente.

Analogia interpretazione può essere fornita per (ii) e (iii). Ma se questa è la situazione, quali sono le caratteristiche del campo magnetico prodotto nell'esperimento (i)?

Per rispondere a questa domanda occorre dapprima analizzare le evidenze sperimentali che ricaviamo dagli esperimenti (ii) e (iii). Procediamo quindi in questo ordine.

## 2. Filo percorso da corrente in campo magnetico spazialmente uniforme: la forza di Lorentz



Il primo problema da affrontare nello studio che ci proponiamo di condurre è quello di ottenere dei campi magnetici che siano spazialmente uniformi. Il campo magnetico generato da una barretta magnetica è infatti fortemente disomogeneo e non si presta allo studio di nostro interesse. Come creare un campo magnetico uniforme? Un campo con tali caratteristiche si instaura tra le espansioni polari di un magnete a forma di C, che può essere visto come l'analogo magnetico di un condensatore.

Sperimentalmente si trova che un filo rettilineo di lunghezza  $l$ , percorso da una corrente stazionaria  $i$  e immerso in un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$ , sperimenta una forza data dalla relazione (seconda legge di Laplace):

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}, \quad (1)$$

dove  $\vec{l} = l\hat{l}$  è il vettore di modulo pari alla lunghezza del filo e avente direzione e verso collineare al filo  $\hat{l}$ . Se il filo non è rettilineo il versore sopra menzionato assume un carattere locale e la forza agente sul sistema ha la forma:

$$\vec{F} = \int i \vec{dl} \times \vec{B} = \int d\tau \vec{j} \times \vec{B}, \quad (2)$$

dove nello scrivere la forma locale della (2) abbiamo esplicitamente utilizzato la relazione  $i \vec{dl} = \vec{j} ds dl = \vec{j} d\tau$ . Osserviamo che mediante la (1) è possibile quantificare l'intensità del campo magnetico inducente.

Da un punto di vista microscopico una corrente elettrica è costituita dal moto ordinato di portatori elettricamente carichi che si muovono sotto l'azione di un campo elettrico con una certa velocità di deriva  $\vec{v}_d$ .

Alla luce dell'ultima relazione della (2), il contributo infinitesimo alla forza agente sul conduttore dovuto ai portatore contenuti nel volume infinitesimo  $d\tau = dx dy dz$  vale:

$$\vec{dF} = d\tau \vec{j} \times \vec{B} = d\tau nq\vec{v}_d \times \vec{B} = dN q\vec{v}_d \times \vec{B}, \quad (3)$$

dove  $dN$  rappresenta la quantità infinitesima di particelle contenute nel volume  $d\tau$ . Dalla (3) segue che la forza agente per unità di portatore (e quindi sul singolo portatore) vale:

$$\vec{F} = q\vec{v}_d \times \vec{B}. \quad (4)$$

La (4) fornisce la forza a cui è sottoposta una particella quando il moto avviene in presenza di un campo magnetico. Tale forza è detta forza di Lorentz. La (4) è una forza dalla forma molto particolare in quanto dipende in modo esplicito dalla velocità della particella nel sistema di riferimento considerato e non agisce su particelle ferme (questo è un punto delicato in quanto il concetto di moto è relativo al sistema di riferimento!). Inoltre, essendo la forza ortogonale alla velocità e quindi allo spostamento, la forza di Lorentz non compie lavoro. Dal teorema dell'energia cinetica possiamo quindi dedurre che un campo magnetico non può alterare l'energia cinetica di una particella carica. Questo implica che il modulo del vettore velocità di una particella in moto in un campo magnetico è costante. Nel caso in cui sia simultaneamente presente un campo elettrico  $\vec{E}$ , la particella risentirà di una forza di natura elettromagnetica della forma:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (5)$$

In questa condizione l'energia cinetica non è più una grandezza conservata in quanto il campo elettrico compie lavoro non nullo sulla particella.

La (4) può essere utilizzata per dare una definizione operativa dell'unità di misura del campo magnetico. Un campo magnetico di **1 Tesla** è quello che induce una forza di **1 Newton** su una carica di **1 Coulomb** che si muove alla velocità di **1 m/s** secondo l'equazione dimensionale:

$$1 T = \frac{1N}{1 C \times 1 m \times 1 s^{-1}} = 1 \frac{N}{A m}. \quad (6)$$

A complemento di quanto detto fin qui possiamo osservare che le azioni meccaniche che un campo magnetico esercita su un circuito indeformabile percorso da corrente stazionaria sono completamente definite dalla risultante delle forze e dei momenti rispetto a un polo secondo le relazioni:

$$\vec{F} = i \oint d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (7a)$$

$$\vec{M} = i \oint \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}), \quad (7b)$$

dove  $\vec{r}$  rappresenta il vettore posizione dell'elemento infinitesimo  $d\vec{l}$  rispetto al polo scelto per il calcolo del momento risultante.

### 3. Moto di una particella carica in campo magnetico

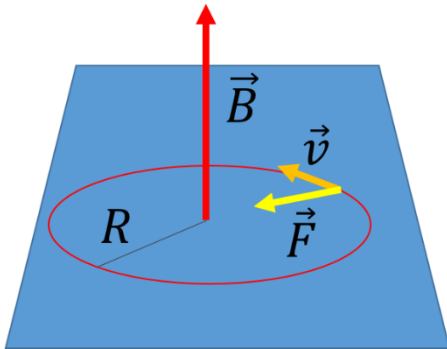
Supponiamo di voler studiare il moto di una particella di carica  $q$  e massa  $m$  immersa in un campo magnetico che è ortogonale al piano in cui giace la velocità iniziale. Sia il moto unicamente determinato dalla forza di Lorentz (il campo elettrico è assente). Dal secondo principio della dinamica è possibile scrivere:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (8)$$

Notiamo che la (8) può essere messa nella forma seguente:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad (9a)$$

$$\vec{\omega} = -\frac{q\vec{B}}{m}. \quad (9b)$$



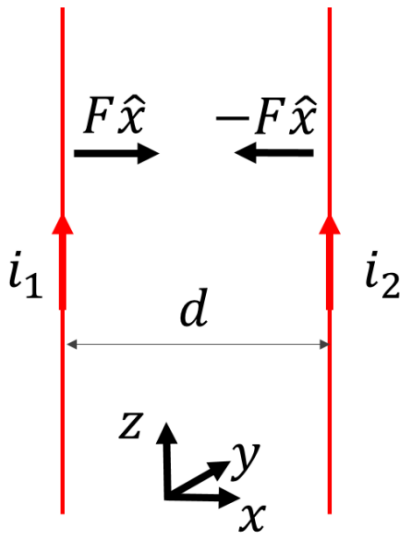
Essendo  $|\vec{v}|$  una costante del moto, la (9a) è la *formula di Poisson* per la derivata temporale di un vettore di modulo costante pari a  $v_0$ . Il vettore velocità angolare è dato da (9b). Da quanto detto appare chiaro che la particella in esame compirà un moto circolare uniforme. In un moto circolare uniforme vale la relazione  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , dove  $\vec{r}$  è il vettore posizione della particella con origine nel centro della circonferenza su cui avviene il moto. Il raggio della traiettoria circolare,  $|\vec{r}| = R$ , può essere semplicemente calcolato osservando che  $|\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega}|R = v_0$ . Di qui segue:

$$R = \frac{mv_0}{|q||\vec{B}|}. \quad (10)$$

Un modo alternativo per derivare la (10) è osservare che la forza di Lorentz rappresenta la forza centripeta responsabile del moto circolare uniforme della carica in moto. Il modulo della forza di Lorentz vale  $|\vec{F}_L| = |q\vec{v} \times \vec{B}| = |q|v_0|\vec{B}|$ . Il modulo della forza centripeta vale  $|\vec{F}_c| = mv_0^2/R$ . Ricavando  $R$  dall'uguaglianza  $|\vec{F}_L| = |\vec{F}_c|$  si ottiene la (10).

La (10) mostra come il raggio dell'orbita dipenda dal rapporto massa-carica, cosa che è alla base di molte applicazioni.

#### 4. Interazione tra fili percorsi da corrente stazionaria



Si osserva sperimentalmente che due fili rettilinei (paralleli e complanari) di lunghezza  $L$ , posti a distanza  $d$  e percorsi da correnti stazionarie  $i_1$  e  $i_2$ , sperimentano una forza avente modulo pari a:

$$F = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \frac{|i_1 i_2|}{d}, \quad (1)$$

dove  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$  rappresenta una costante che viene detta permeabilità magnetica del vuoto.

*La forza è di natura attrattiva se le correnti hanno verso di scorrimento concorde (come in figura), mentre è di natura repulsiva nel caso di versi discordi.* Le forze agenti

su ciascun filo soddisfano il terzo principio della dinamica. Come interpretare questo risultato?

Dall'esperimento di Oersted sappiamo che una corrente è in grado di perturbare l'ago di una bussola. Questo implica che la corrente genera nello spazio una perturbazione di tipo magnetico (un campo magnetico). Alla luce di questa osservazione potremmo pensare che il *primo filo* genera un campo magnetico  $\vec{B}_1$  che esercita una azione sul *secondo filo*. Potremmo quindi scrivere che la forza risentita dal secondo filo per effetto del campo prodotto dal primo vale:

$$\vec{F}_2 = i_2 L \hat{z} \times \vec{B}_1. \quad (2a)$$

Analogamente la forza risentita dal primo filo per effetto del secondo deve essere data dall'espressione seguente:

$$\vec{F}_1 = i_1 L \hat{z} \times \vec{B}_2. \quad (2b)$$

Inoltre dal terzo principio della dinamica sappiamo che deve anche valere la condizione  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ . L'analisi vettoriale mette in evidenza quanto segue:

$$\hat{z} \times \vec{B}_1 \propto -\hat{x}$$

$$\hat{z} \times \vec{B}_2 \propto \hat{x},$$

e quindi  $\vec{B}_1 \propto \hat{y}$  mentre  $\vec{B}_2 \propto -\hat{y}$ . Nota direzione e verso dei campi resta da determinare il modulo. Scriviamo i campi nella forma  $\vec{B}_1 = B_1 \hat{y}$  e  $\vec{B}_2 = -B_2 \hat{y}$  e sostituiamo nelle relazioni (2a-b). Così facendo otteniamo:

$$\vec{F}_2 = i_2 L B_1 \hat{z} \times \hat{y} = -i_2 L B_1 \hat{x} \quad (3a)$$

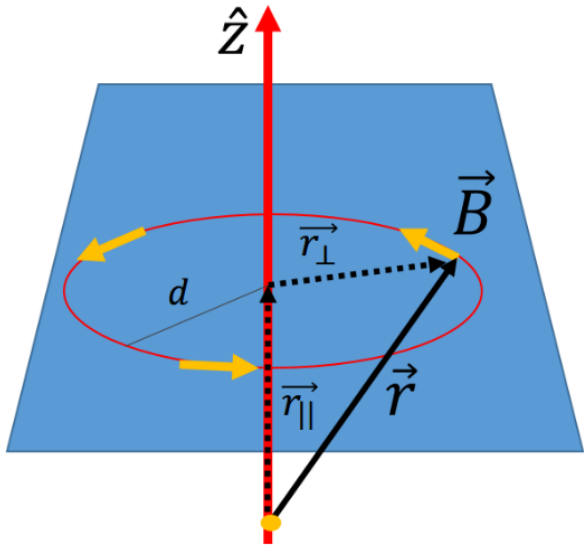
$$\vec{F}_1 = -i_1 L B_2 \hat{z} \times \hat{y} = i_1 L B_2 \hat{x}. \quad (3b)$$

L'ultima osservazione riguarda i moduli delle forze, ossia  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$ . La precedente ci consente di scrivere:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \quad (4a)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d}. \quad (4b)$$

Concentriamoci adesso sul campo prodotto da uno qualsiasi dei due fili spostando l'altro in una regione distante dello spazio e disinteressandocene. In questa condizione il campo è ancora presente sebbene non vi sia più un sistema fisico in grado di risentirne. Data la simmetria cilindrica del problema, ci aspettiamo che il modulo del campo dipenda solo dalla distanza dal filo, essendo irrilevante la dipendenza angolare in un qualsiasi piano ortogonale al filo. Inoltre, non ci aspettiamo alcuna dipendenza dalla coordinata  $z$ . Alla luce dei fatti sperimentali sopra esposti, facendo opportuno uso della simmetria del problema, concludiamo che il campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente  $i$ , collineare all'asse  $z$  e immerso nel vuoto, assume la forma:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\hat{z} \times \vec{r}}{x^2 + y^2}. \quad (5)$$

Adesso osserviamo che  $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$  e che  $\hat{z} \times \vec{r} = \hat{z} \times \vec{r}_{\perp}$ . Per le precedenti, la (5) può essere riscritta nella forma seguente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\hat{z} \times \vec{r}_{\perp}}{|\vec{r}_{\perp}|^2}, \quad (6)$$

dove  $|\vec{r}_{\perp}|^2 = x^2 + y^2$  rappresenta il quadrato della distanza dal filo di un generico punto dello spazio. Scriviamo il campo vettoriale definito nella (6) in forma esplicita. Dalla (6) otteniamo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi (x^2 + y^2)} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right). \quad (7)$$

Osserviamo che la (7) vale in tutti i punti dello spazio non appartenenti al filo e quindi occorre tenere conto del vincolo  $x^2 + y^2 \neq 0$ . E' semplice verificare che

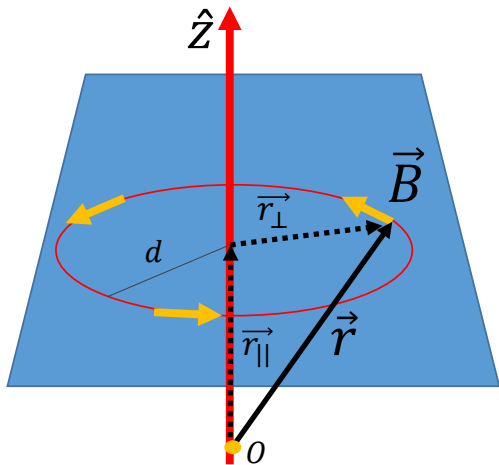
$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{2\pi \sqrt{x^2 + y^2}},$$

espressione quest'ultima consistente con le relazioni (4a-b). Abbiamo adesso a disposizione il prototipo di un campo magnetico generato da una corrente e siamo pronti ad analizzarne le proprietà.

## 5. Ancora sul campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente stazionaria

Nel precedente paragrafo abbiamo osservato che il campo generato da un filo rettilineo infinito percorso da corrente assume la forma:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right). \quad (1)$$



Abbiamo più volte invocato la simmetria cilindrica del problema. Tale simmetria diventa evidente in coordinate cilindriche. Scriviamo quindi la (1) in queste coordinate. Ricordiamo che le coordinate cilindriche sono definite dalla trasformazione seguente:

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Esaminando le varie componenti della (1), tenendo conto delle precedenti, abbiamo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} (-\sin \theta, \cos \theta, 0),$$

dove resta da comprendere chi è il versore  $(-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ . Notiamo che il versore della direzione radiale è dato da  $\hat{r} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ . E' facile verificare che  $(-\sin \theta, \cos \theta, 0) \cdot \hat{r} = 0$ . Ne segue che  $(-\sin \theta, \cos \theta, 0) = \hat{\theta}$  è il versore della direzione tangenziale. Otteniamo quindi:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\theta},$$

relazione che mette in luce le proprietà di simmetria del campo. Calcoliamo in queste coordinate la circuitazione su una circonferenza di raggio  $R$  centrata in un punto del filo e appartenente al piano ortogonale al filo passante per questo punto. Si ha:

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint \left( \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\theta} \right) \cdot (\hat{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{z} dz) = \oint \left( \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\theta} \right) \cdot (\hat{\theta} r d\theta) \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\theta = \mu_0 i. \end{aligned}$$

Il risultato della circuitazione sarebbe invariato se considerassimo una linea di integrazione arbitraria (non circolare).

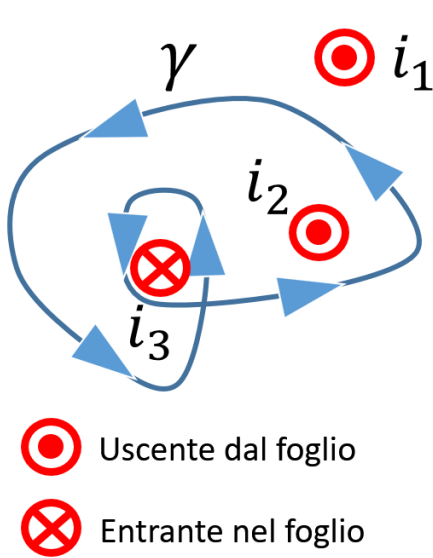
Fin qui abbiamo riconosciuto che una corrente stazionaria produce un campo di induzione magnetica. Abbiamo dedotto la forma di questo campo per il caso particolare di un filo rettilineo infinito percorso da corrente. Questo risultato deriva dall'analisi dei fatti sperimentali. Abbiamo poi analizzato le proprietà matematiche del campo e siamo giunti alla conclusione che esso deve rispettare le condizioni

$$\begin{cases} \Phi(\vec{B}) = 0 \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \end{cases}$$

Assumiamo che queste proprietà non dipendano dallo specifico caso considerato (filo rettilineo), ma siano proprietà costitutive di ogni campo di induzione magnetica a prescindere dalla particolare geometria della sorgente. Chiaramente questa è una indebita generalizzazione da un caso particolare alla situazione generale (logicamente sarebbe corretto il processo inverso). Ci aspettiamo quindi che a partire da queste relazioni sia possibile ottenere il campo di induzione magnetica generato da una arbitraria sorgente (l'analogo della forza di Coulomb per l'elettrostatica). Notiamo infatti che la legge di forza che lega il campo di induzione magnetica alle caratteristiche della sua sorgente resta

al momento sconosciuta. Prima di procedere con il nostro programma vediamo come rubare qualche altro segreto alla natura con quanto abbiamo a disposizione.

## 6. Teorema di Ampère (caso stazionario)



La circuitazione di  $\vec{B}$  lungo una linea chiusa ed orientata è pari alla corrente complessiva con cui la linea si concatena moltiplicata per  $\mu_0$ . Qualora la linea amperiana abbia concatenazioni multiple con le correnti, occorre tenere conto del grado di concatenazione mediante la formula:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k i_k N_k,$$

dove  $N_k$  rappresenta il grado di concatenazione con la  $k$ -esima corrente. Le correnti vanno prese con *segno positivo* o *negativo* a seconda che esse vedano circolare intorno a sé la linea di circuitazione in *senso orario* o *antiorario* (regola della mano destra).

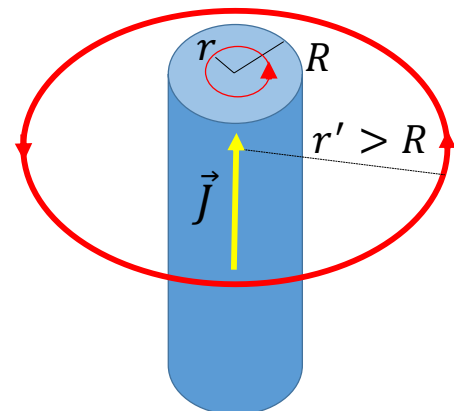
Nell'esempio in figura,  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = 1$ ,  $N_3 = 2$ . La corrente  $i_2$  va presa con segno positivo, mentre  $i_3$  con segno negativo. Ne risulta la relazione

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (-2i_3 + i_2),$$

con  $i_2, i_3 > 0$ .

## 7. Campo magnetico generato da un filo cilindrico percorso da corrente stazionaria

Supponiamo di voler determinare il campo di induzione magnetica prodotto da un filo cilindrico percorso da una corrente  $i$ . Sia uniforme la densità di corrente  $\vec{J}$  diretta come mostrato in figura. Il modulo della densità di corrente, nelle ipotesi fatte, vale  $|\vec{J}| = \frac{i}{S}$  con  $S = \pi R^2$  la superficie trasversa del conduttore. Notiamo anzitutto che non disponiamo di una formula generale, almeno fino a questo momento, che ci consenta di determinare il campo magnetico assegnata la geometria della sorgente. Dobbiamo quindi cercare di capire se il problema possa essere risolto con gli strumenti concettuali che già





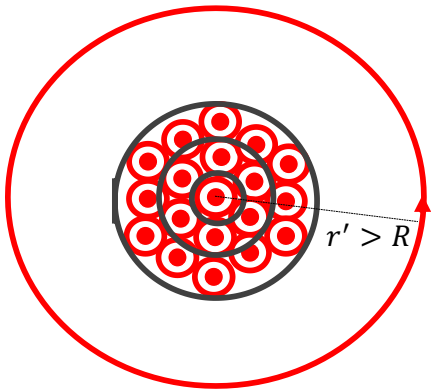
possediamo. Il problema può essere risolto mediante il teorema di Ampère. Osserviamo dapprima che il problema allo studio possiede simmetria cilindrica. Ci aspettiamo quindi che il campo di induzione magnetica sia della forma  $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$ . Nota direzione e verso del campo occorre determinarne il modulo  $B(r)$  che per ragioni di simmetria ci aspettiamo possa dipendere soltanto dalla coordinata radiale, ma non dalle altre coordinate. L'altra osservazione è che il nostro conduttore può essere immaginato come un insieme di conduttori di sezione trasversa tendente a zero arrangiati a formare un cilindro percorso da corrente. Ad ognuno di questi conduttori elementari si applica il teorema di Ampère nella forma vista fino a questo momento. Occupiamoci prima del campo a distanza  $r > R$  dall'asse di simmetria del cilindro (esterno del conduttore). Consideriamo quindi una linea amperiana circolare di raggio  $r$  che si concateni con l'intero cilindro. Dal teorema di Ampère abbiamo:

$$\mu_0 i = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint (B(r)\hat{\theta}) \cdot (\hat{\theta} r d\theta) = B(r)r \int d\theta = B(r)2\pi r,$$

cosa che immediatamente ci consente di scrivere:

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 i \hat{\theta}}{2\pi r} \\ r \geq R \end{cases}$$

Troviamo che il campo esterno è indistinguibile dal campo che genererebbe un conduttore di sezione trasversa nulla collineare all'asse di simmetria del cilindro. Cosa si può dire sul campo interno al conduttore cioè per  $r < R$ ?



Consideriamo una linea amperiana di raggio  $r < R$ . Con questa linea si concatena soltanto una frazione della corrente totale. Precisamente la corrente concatenata è pari alla densità di corrente moltiplicata per l'area del cerchio che ha come perimetro la linea di circuitazione:

$$i_c = |\vec{J}| \pi r^2 = \frac{i}{\pi R^2} (\pi r^2) = i \frac{r^2}{R^2}.$$

D'altra parte dalla circuitazione sappiamo che

$$\mu_0 i_c = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r)2\pi r.$$

Da quanto detto otteniamo:

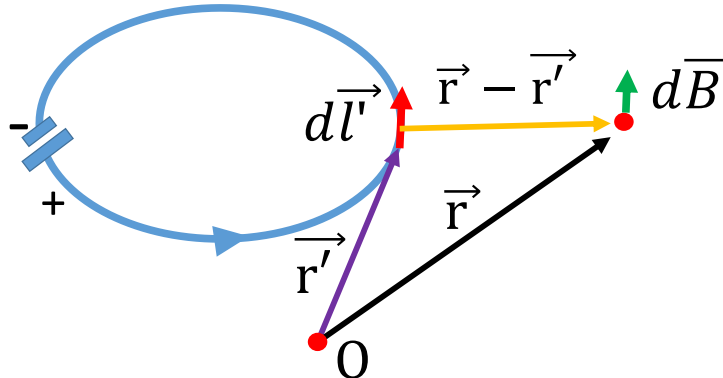
$$B(r) = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \left( i \frac{r^2}{R^2} \right) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2},$$

con  $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$  e  $r < R$ . Notiamo che l'espressione calcolata per il campo interno e quella per il campo esterno si raccordano sulla superficie del cilindro senza subire discontinuità. Il modulo del campo di induzione magnetica è nullo sull'asse di simmetria del cilindro ed aumenta linearmente all'aumentare della distanza radiale. Quando quest'ultima eccede il raggio del conduttore il modulo del campo tende a decadere come l'inverso della distanza radiale misurata a partire dall'asse del cilindro.

La determinazione del campo di induzione magnetica a una distanza fissa da un elettrodotto ad alta tensione è un problema rilevante per la protezione delle persone dai danni provocati da intensi campi magnetici. La legge fissa le distanze minime da tenere dagli elettrodotti affinché le persone non siano esposte a valori di campo troppo elevati.

### 8. Applicazioni elementari della legge di Biot e Savart (prima legge di Laplace)

Dall'analisi dei fatti sperimentali è stato sperimentalmente dedotto che il campo di induzione magnetica generato da una sorgente filiforme percorsa da corrente  $i$  si scrive nella forma:



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

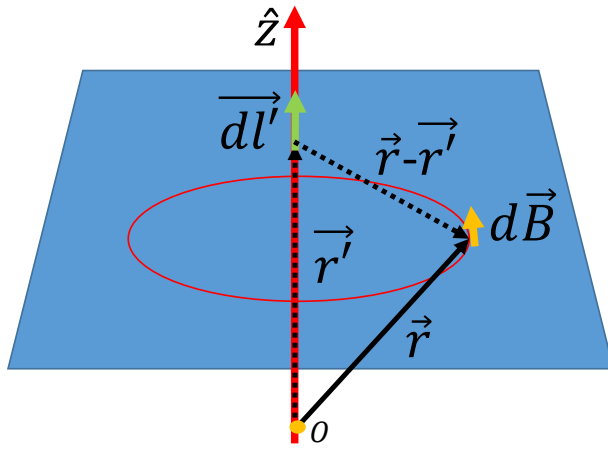
o in forma differenziale:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

nella quale  $d\vec{l}'$  rappresenta l'elemento circuitale infinitesimo. La precedente relazione è fondamentale in magnetostatica e va sotto il nome di *legge di Biot e Savart*. Vogliamo applicare la precedente ad alcuni casi elementari.

## 9. Filo rettilineo

Applichiamo la legge di Biot-Savart al caso di un filo rettilineo, il primo caso da noi trattato. Con riferimento alla figura, riconosciamo i seguenti vettori:



$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{r}' = (0, 0, z')$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (x, y, z - z')$$

L'elemento di linea vale  $d\vec{l}' = \hat{z} dz'$ .  
Calcoliamo  $\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}')$ :

$$\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z - z' \end{vmatrix} = (-y, x, 0).$$

Da queste relazioni otteniamo:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{(-y, x, 0) dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}},$$

da cui integrando sull'intero filo si ha:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-y, x, 0) dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 i (-y, x, 0)}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Occupiamoci dell'integrale. Si dimostra che :

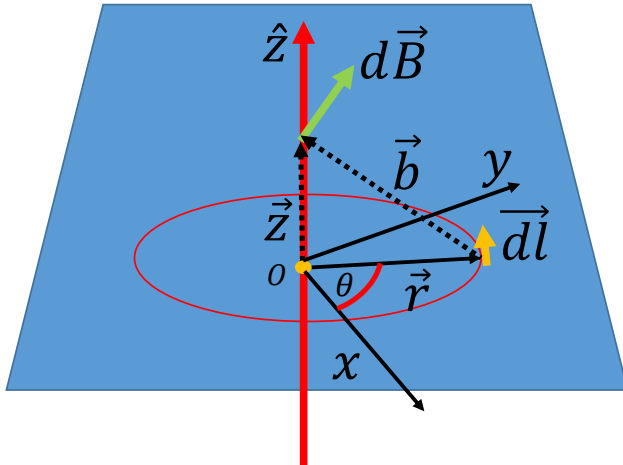
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{2}{x^2 + y^2},$$

da cui segue:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\hat{z} \times \vec{r}}{x^2 + y^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

## 10. Campo sull'asse di una spira circolare

La simmetria del problema assicura che il campo di induzione magnetica è parallelo all'asse  $z$ . Utilizziamo la formula di Biot-Savart con la notazione:



$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{b}}{|\vec{b}|^3},$$

con  $\vec{b} = \vec{z} - \vec{r}$ . Definiamo le seguenti quantità utili nel calcolo:

$$\vec{z} = (0, 0, z)$$

$$\vec{r} = R(\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$d\vec{l} = R d\theta \hat{\theta}$$

$$\hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

Calcoliamo quindi la quantità  $(d\vec{l} \times \vec{b})_z$ . Il calcolo diretto mostra che:

$$\begin{aligned} (d\vec{l} \times \vec{b})_z &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -R \sin\theta d\theta & R \cos\theta d\theta & 0 \\ -R \cos\theta & -R \sin\theta & z \end{vmatrix} \cdot \hat{z} = R^2 \sin^2\theta d\theta + R^2 \cos^2\theta d\theta \\ &= R^2 d\theta. \end{aligned}$$

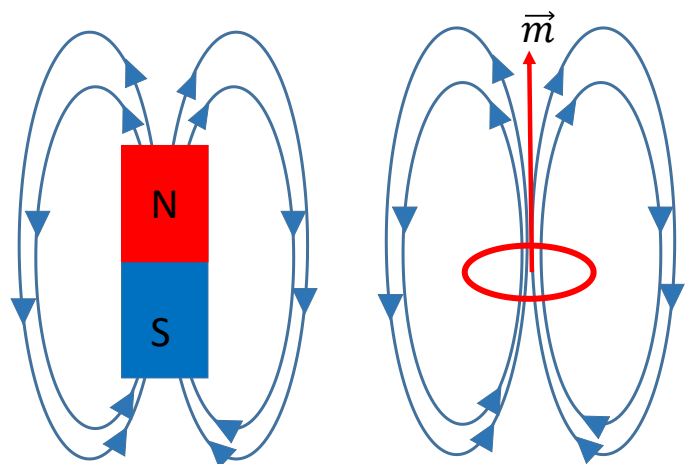
Dalle precedenti relazioni segue:

$$B_z = \int dB_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{2\pi R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Ne concludiamo che il campo lungo l'asse della spira vale:

$$\vec{B}(z) = \hat{z} \left( \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

Il precedente risultato può essere espresso in termini del **momento magnetico della spira** definito come  $\vec{m} = iS\hat{z}$  con  $S = \pi R^2$ . Procedendo in questo modo otteniamo:



$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Possiamo notare che il valore del campo al centro della spira vale:

$$\vec{B}(z = 0) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{R^3},$$

mentre a grande distanza da essa otteniamo:

$$\vec{B}(z \gg R) \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{|z|^3}.$$

In punti arbitrari dello spazio il campo è simile al campo generato da un dipolo elettrico o al campo generato da una piccola barretta magnetica. Questa osservazione fornisce qualche spunto di riflessione riguardo l'origine del magnetismo nella materia.