Esercizio *(applicazioni del prodotto vettoriale)*

Siano dati tre punti del piano di coordinate $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$. E' possibile costruire i vettori $\overrightarrow{AC} = (x_c - x_a, y_c - y_a)$ ed $\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$ aventi coda in A e punta in C o B, rispettivamente. In particolare il vettore $\overrightarrow{AC}$ è collineare al segmento AC, mentre $\overrightarrow{AB}$ è collineare al segmanto AB. Supponendo i punti non allineati, si determini - utilizzando la nozione di prodotto vettoriale - l'area del triangolo ABC in termini delle componenti di opportuni vettori. A partire dal risultato ottenuto, si scriva poi la condizione di allineamento dei tre punti.

Suggerimento: costruire vettori in tre dimensioni.

1. La meccanica

Si è detto che un fenomeno è una variazione dello stato del mondo percepibile dai nostri sensi. I fenomeni naturali che per primi attirano l'attenzione dell'osservatore sono quelli in cui *un corpo muta la propria posizione*. Questi fenomeni, comuni nell'esperienza quotidiana, riguardano *il movimento dei corpi*.
La **meccanica** è la parte della fisica che si occupa della descrizione del moto di un corpo. Essa è tradizionalmente suddivisa in **cinematica** e **dinamica** (comprendente la statica).
La cinematica si occupa della descrizione del moto senza curarsi delle cause che lo generano. Tali cause sono indagate dalla dinamica che si occupa della descrizione dei moti a partire dalle cause che li originano.

2. La cinematica

La cinematica intende evidenziare la relazione tra le *posizioni* occupate da un *corpo* nello spazio ed i *tempi* in cui dette posizioni vengono occupate. La descrizione cinematica può essere assai complicata quando riguarda il moto di *corpi estesi* (quelli della vita quotidiana).

Tale descrizione risulta notevolmente semplificata dalla nozione di **punto materiale**.

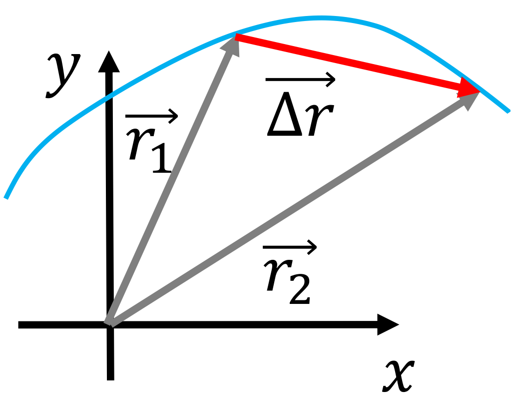
A tale riguardo, *un corpo in movimento di dimensioni lineari trascurabili rispetto alle dimensioni lineari delle regioni interessate dal suo moto può essere schematizzato come uno qualsiasi dei suoi punti. Sotto tali ipotesi, la posizione di detto punto può considerarsi una approssimazione sufficiente della posizione dell'intero corpo.*

Nonostante la nozione di punto materiale possa apparire una ingiustificata semplificazione delle situazioni di interesse reale, è qui utile richiamare come tale idealizzazione sia di accettata utilità. E' infatti prassi comune individuare la posizione di una nave (un corpo esteso!) mediante le sue coordinate geografiche, le quali in realtà rappresentano un punto sulla superficie terrestre.

Nel seguito studieremo *la cinematica del punto materiale* disinteressandoci delle dimensioni geometriche del corpo in movimento. Vedremo in seguito come tale assunzione non risulti limitante per lo sviluppo della teoria.

Il movimento è una variazione della *posizione* di un corpo in un dato intervallo di *tempo*. E' utile qui ricordare che la nozione di moto o di quiete è relativa al sistema di riferimento scelto. Il passeggero di un treno è fermo rispetto ad un riferimento solidale con il treno, ma risulta in moto se descritto nel riferimento solidale con un passeggero fermo alla stazione. Quanto esposto si enuncia sinteticamente dicendo che *il concetto di moto è relativo*.

Per assegnare ad un corpo una posizione nello spazio occorre quindi fissare un sistema di riferimento. Rispetto all'assegnato riferimento, la posizione del corpo ad un fissato istante di tempo t_1 è descritta dalle coordinate cartesiane o, più utilmente, dal *vettore posizione* $\vec{r}_1$ del punto materiale che lo rappresenta.



Supponiamo che al tempo $t_2 > t_1$ la posizione del corpo sia variata rispetto a quella iniziale e sia $\vec{r}_2$ il vettore associato alla nuova configurazione spaziale. E' possibile definire *lo spostamento* come il vettore $\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Notiamo che la descrizione cinematica del moto richiede la capacità di misurare intervalli di tempo del tipo $\Delta t = t_2 - t_1$. Si è detto che il processo di misura è una operazione di confronto di una data grandezza fisica con una ad essa omogenea presa come unità di misura. Mentre per la grandezza fisica "lunghezza" tale processo appare intuitivo, la misura di un intervallo di tempo sembra una questione concettualmente più elaborata. La difficoltà nasce dal fatto che il tempo è una grandezza connaturata con la nostra percezione che si manifesta ai nostri sensi soltanto in modo indiretto.

In natura esistono infatti fenomeni che si presentano con regolarità e possono essere utilizzati per la misura del tempo. Questi fenomeni, detti periodici, hanno suscitato l'interesse della specie umana sin dalla notte dei tempi e sono responsabili dell'emergere alla nostra coscienza del concetto di tempo. L'alternarsi del giorno e della notte, il ripetersi delle fasi lunari e delle stagioni rappresentano fenomeni periodici utili alla misura del tempo (giorno, mese, anno).

Campioni di tempo di agevole utilizzo possono essere ottenuti mediante i *pendoli campione*. Si attribuisce a Galilei l'osservazione riguardante l'isocronismo delle piccole oscillazioni di un pendolo. In questi sistemi oscillanti una data configurazione della massa sospesa (e.g. un lampadario) si ripresenta ad intervalli di tempo regolari. In questo modo il conteggio delle oscillazioni fornisce una misura, riferita al periodo di oscillazione, di un assegnato intervallo di tempo. Abbiamo dimostrato che il periodo di tali oscillazioni dipende dalla lunghezza del sistema. Per tale ragione è possibile costruire pendoli con periodo variabile. Utilizzando tali sistemi, almeno da un punto di vista concettuale, è possibile misurare la durata di un intervallo temporale. Tale misura stabilisce un confronto tra la durata dell'intervallo da misurare e la durata del periodo di un pendolo, preso come unità di misura.

Da Galilei ad oggi il problema della misura del tempo è stato ripetutamente affrontato. Tale processo ha portato alla costruzione di orologi che, nelle versioni più sofisticate, sfruttano le oscillazioni periodiche di sistemi atomici in grado di riprodurre i propri periodi caratteristici con una precisione di 1 parte su un miliardo.

D'ora in avanti, sulla base di quanto detto, riterremo possibile disporre di misurazioni accurate degli intervalli temporali.

In cinematica il moto di un punto materiale è determinato una volta nota, istante per istante, la posizione da esso occupata. La relazione vettoriale che specifica le posizioni occupate da un corpo nel tempo prende il nome di *legge oraria*.

La legge oraria è una relazione vettoriale del tipo $\vec{r} = \vec{r}(t) \equiv \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ che specifica completamente le caratteristiche cinematiche del moto.

Il luogo geometrico costituito dalle posizioni occupate successivamente da un punto materiale durante il moto è una curva nello spazio che prende il nome di *traiettoria*.

La traiettoria diventa osservabile in modo diretto quando risulti possibile tenere memoria della posizione occupata nel tempo da un corpo in movimento. Questo avviene effettivamente nel caso della traccia lasciata da una matita su un foglio o della scia di un aereo, le quali sono le traiettorie della punta della matita o di un aereo in volo, rispettivamente.

3. Le caratteristiche cinematiche del moto: la velocità e l'accelerazione

Si è detto che la legge oraria specifica in modo completo le caratteristiche del moto. Vediamo come estrarre alcune informazioni rilevanti.

Un concetto importante è quello di velocità. A livello intuitivo la velocità rappresenta il rapporto tra lo spostamento e l'intervallo di tempo in cui esso avviene. Fissiamo quindi due istanti di tempo successivi, t e $t + \Delta t$, con $\Delta t > 0$. Sia $\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ lo spostamento che avviene nell'intervallo Δt. In base alla nostra definizione di velocità abbiamo:

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}.$$

La relazione appena scritta definisce la *velocità media* nell'intervallo di tempo considerato. Supponiamo di voler introdurre il concetto di *velocità istantanea* riferita ad un generico tempo. Scriviamo la precedente nella forma equivalente:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

La velocità istantanea può essere vista come il limite per $\Delta t \to 0^+$ della velocità media nell'intervallo Δt. Di qui otteniamo:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right) = \\ = \hat{x}\frac{dx(t)}{dt} + \hat{y}\frac{dy(t)}{dt} + \hat{z}\frac{dz(t)}{dt} = \\ = \hat{x}\, v_x(t) + \hat{y}\, v_y(t) + \hat{z}\, v_z(t).\end{aligned}$$

Nello scrivere la precedente abbiamo riconosciuto la derivata temporale nel limite di un rapporto incrementale. Osserviamo esplicitamente che sia la velocità media che la velocità istantanea hanno natura vettoriale.

Con analoga procedura si perviene al concetto di accelerazione. Dapprima definiamo l'accelerazione media

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

come la variazione della velocità nell'intervallo di durata finita Δt. Quindi, mediante procedura di limite, perveniamo all'accelerazione istantanea:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt} \right) =$$
$$= \hat{x}\frac{dv_x(t)}{dt} + \hat{y}\frac{dv_y(t)}{dt} + \hat{z}\frac{dv_z(t)}{dt} =$$
$$= \hat{x}\, a_x(t) + \hat{y}\, a_y(t) + \hat{z}\, a_z(t).$$

L'accelerazione istantanea è anche esprimibile come la derivata seconda rispetto al tempo del vettore posizione:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \hat{x}\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \hat{y}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \hat{z}\frac{d^2z(t)}{dt^2}.$$

Abbiamo quindi ottenuto il seguente schema:

$$\begin{array}{lr} \vec{r} = \vec{r}(t) & Legge\ oraria \\ \vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} & Velocità\ istantanea \\ \vec{a}(t) = \dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} & Accelerazione\ istantanea \end{array},$$

nel quale viene evidenziato come, a partire dalla legge oraria, si pervenga ai concetti cinematici di velocità ed accelerazione istantanea per successive operazione di derivazione rispetto al tempo.

4. Cinematica in una dimensione: moti rettilinei ad accelerazione costante

Una volta descritto il problema della cinematica nei suoi tratti generali, affrontiamo qui lo studio della cinematica dei *moti rettilinei ad accelerazione costante*. Un moto rettilineo è descritto dalla legge oraria $\vec{x} = x(t)\,\hat{x}$, dove $\hat{x}$ rappresenta il versore collineare alla direzione di moto. Nella particolare situazione descritta le caratteristiche del moto risultano specificate dalla funzione del tempo $x(t)$. A partire dalla legge oraria, seguendo la procedura generale, otteniamo:

$$\begin{array}{c} \vec{x} = x(t)\,\hat{x} \\ \vec{v} = v(t)\hat{x} = \dfrac{dx(t)}{dt}\hat{x} \\ \vec{a} = a(t)\hat{x} = \dfrac{dv(t)}{dt}\hat{x} = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{x} \end{array}.$$

In natura hanno particolare importanza i moti ad accelerazione costante. Ad esempio, come ricordato in precedenza, la caduta di un corpo nel campo della gravità è un moto ad accelerazione costante.

Sia $\vec{a} = a\,\hat{x}$ l'accelerazione costante del moto in esame. La soluzione cinematica del problema richiede la conoscenza della legge oraria, ossia della funzione $x(t)$. La richiesta di accelerazione costante implica la relazione:

$$\frac{dv(t)}{dt} = a.$$

Per risalire alla funzione $v(t)$ a partire dalla precedente occorre integrare membro a membro su un generico intervallo temporale. Procedendo in questo modo si ottiene:

$$\int_0^t \left[\frac{dv(t')}{dt'}\right] dt' = \int_0^t a\, dt'.$$

Il primo membro si può riscrivere nella forma alternativa:

$$\int_0^t \left[\frac{dv(t')}{dt'}\right] dt' = \int_{v_0}^{v(t)} dv = v(t) - v_0,$$

dove abbiamo introdotto la notazione $v(t = 0) = v_0$ che specifica la velocità iniziale del corpo. Il secondo membro prende invece la forma seguente:

$$\int_0^t a\, dt' = a \int_0^t dt' = at.$$

Dalle precedenti otteniamo $v(t) = at + v_0$. Per ricavare la legge oraria osserviamo che vale la relazione:

$$\frac{dx(t)}{dt} = at + v_0,$$

dalla quale è possibile ottenere $x(t)$ utilizzando la stessa procedura usata per ottenere $v(t)$. Procedendo in modo analogo a quanto visto in precedenza otteniamo:

$$\int_0^t \left[\frac{dx(t')}{dt'}\right] dt' = \int_0^t [at' + v_0]\, dt'.$$

Trattiamo il primo integrale:

$$\int_0^t \left[\frac{dx(t')}{dt'}\right] dt' = \int_{x_0}^{x(t)} dx = x(t) - x_0,$$

dove $x(t = 0) = x_0$ rappresenta la posizione iniziale del corpo in movimento. Il secondo integrale si scrive nella forma seguente:

$$\int_0^t [at' + v_0]\, dt' = a\int_0^t t'\, dt' + v_0 \int_0^t dt' = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t.$$

Il confronto delle precedenti ci consente di scrivere la legge oraria nella forma:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0.$$

Abbiamo quindi mostrato come, dalla richiesta di moto ad accelerazione costante, derivino le seguenti relazioni:

$$\begin{gathered} x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ v(t) = at + v_0 \\ a(t) = a \end{gathered} .$$

Utilizzando le precedenti, il lettore è inoltre invitato a verificare che vale la seguente importante relazione:

$$a[x(t) - x_0] = \frac{1}{2}[v(t)^2 - v_0^2]$$

Fin qui non abbiamo specificato quale sia il valore costante di a. Esistono tre casi possibili: (i) $a > 0$; (ii) $a < 0$; (iii) $a = 0$. I primi due casi corrispondono ad un *moto rettilineo uniformemente accelerato* con accelerazione *positiva o negativa*. Un moto ad *accelerazione negativa è anche detto decelerato*. Un moto che avviene ad accelerazione costante pari all'accelerazione di gravità $g = 9.81\ m/s^2$ viene detto, per ovvie ragioni, *naturalmente accelerato*.

Il caso di *accelerazione nulla*, di particolare importanza concettuale, corrisponde ad un *moto rettilineo uniforme*. Un moto rettilineo uniforme è retto dalle relazioni cinematiche seguenti:

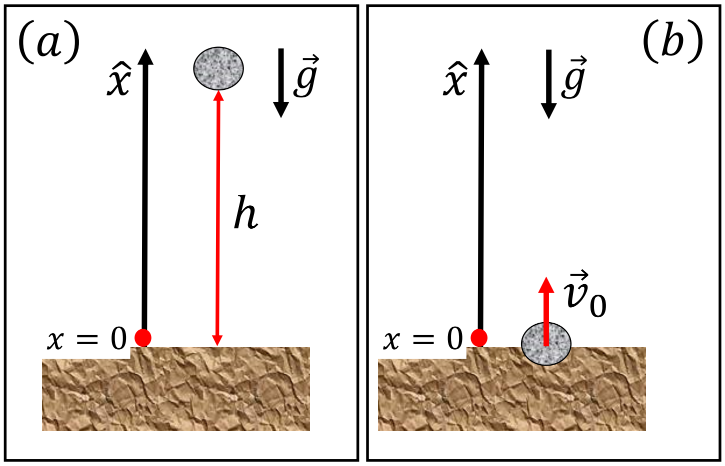
$$\begin{gathered} x(t) = v_0 t + x_0 \\ v(t) = v_0 \\ a(t) = 0 \end{gathered} ,$$

le quali mostrano, tra l'altro, la costanza della velocità del moto.

Esempio 1

Un corpo è lasciato cadere dalla quota h. Con quale velocità giunge al suolo? Dopo quanto tempo?

Fissiamo un riferimento come quello mostrato in figura (a). In questo riferimento la cinematica del problema allo studio è riassunta dalle equazioni seguenti:



$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$
$$v(t) = -gt \qquad .$$
$$a(t) = -g$$

Il corpo giunge al suolo al tempo t^*, allorquando $x(t^*) = 0$. Questa condizione immediatamente implica che

$$x(t^*) = -\frac{1}{2}gt^{*2} + h = 0 \rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

La velocità con la quale il corpo giunge al suolo vale

$$v(t^*) = -gt^* = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}.$$

Il lettore è invitato a verificare la correttezza dimensionale delle relazioni trovate.

Esempio 2

Un corpo è lanciato verso l'alto con velocità verticale v_0 da quota nulla. Quanto vale la quota massima raggiunta? Dopo quanto tempo giunge nuovamente al suolo? E con quale velocità?

Fissiamo un riferimento come quello utilizzato del precedente esercizio (vedi pannello (b)). Utilizziamo la relazione generale:

$$a[x(t^*) - x_0] = \frac{1}{2}[v(t^*)^2 - v_0^2],$$

con t^* il tempo al quale viene raggiunta la quota massima. Osserviamo esplicitamente che $v(t^*) = 0$ e $x(t^*) = h$. Scrivendo la precedente nelle ipotesi del problema dato, otteniamo:

$$-gh = \frac{1}{2}[0 - v_0^2] \rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Per rispondere alla seconda questione occorre determinare il tempo di salita t^*. Scriviamo le equazioni cinematiche per il caso di interesse:

$$\begin{gathered} x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \\ v(t) = -gt + v_0 \\ a(t) = -g \end{gathered}.$$

Sappiamo poi che $v(t^*) = 0$, dalla quale segue:

$$v(t^*) = 0 \rightarrow -gt^* + v_0 = 0 \rightarrow t^* = \frac{v_0}{g}.$$

Abbiamo già dimostrato, nel precedente esercizio, che il tempo di caduta di un corpo dalla quota h vale:

$$t^{**} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

D'altra parte, nel caso specifico $h = \frac{v_0^2}{2g}$. Tenuto conto di queste informazioni possiamo scrivere il tempo di caduta nella forma

$$t^{**} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)} = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2}} = \frac{v_0}{g}.$$

Abbiamo trovato che il tempo di caduta t^{**} è identico a quello necessario a raggiungere la quota massima t^*. Pertanto il corpo giunge nuovamente al suolo dopo un tempo pari a $\frac{2v_0}{g}$.

La velocità con la quale il corpo ricade al suolo vale

$$v(t = 2t^*) = -2gt^* + v_0 = -g\left(\frac{2v_0}{g}\right) + v_0 = -v_0.$$

Esempio 3

Lo spazio di frenatura di un veicolo è un parametro importante per la sicurezza stradale. La tabella in basso mostra lo spazio di frenatura stimato in base alla velocità iniziale del veicolo e alle condizioni del fondo stradale.

Sarebbe possibile comprendere i valori della tabella sulla base delle conoscenze di cinematica sin qui esposte?

SPAZIO DI ARRESTO CON LE DIVERSE VELOCITÀ

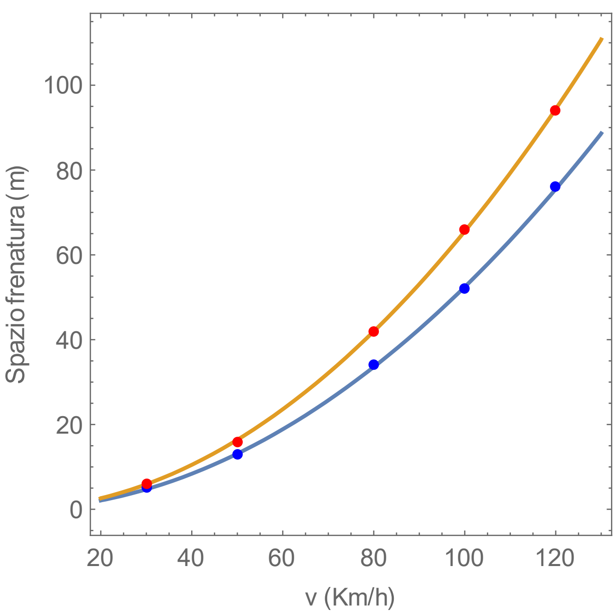
Velocità	Spazio percorso nel tempo di reazione (1 secondo)	Spazio di frenatura (μ Coefficiente D'Attrito)			Spazio di arresto (=spazio di reazione + spazio di frenatura)		
		asciutto (μ = 0.75)	bagnato (μ = 0.6)	ghiacciato (μ = 0.1)	asciutto	bagnato	ghiacciato
30 km/h	8 m	5 m	6 m	35 m	13 m	14 m	43 m
50 km/h	14 m	13 m	16 m	98 m	27 m	30 m	112 m
80 km/h	22 m	34 m	42 m	252 m	56 m	64 m	274 m
100 km/h	28 m	52 m	66 m	399 m	80 m	94 m	421 m
120 km/h	33 m	76 m	94 m	566 m	109 m	127 m	599 m

Lo spazio di arresto di un veicolo dipende dai tempi di reazione del conducente e dallo spazio di frenatura del veicolo. Limitiamo la nostra attenzione allo spazio di frenatura. Il veicolo è animato da velocità v_0 al momento in cui il conducente aziona il freno. Dopo un certo tempo il veicolo si ferma. La variazione di velocità ci fa ritenere che la cinematica del veicolo possa seguire quella di un moto uniformemente decelerato. Fissiamo a zero lo spazio percorso al tempo iniziale e scriviamo la legge oraria di detto moto nella forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t \\ v(t) &= -at + v_0 \\ a(t) &= -a \end{aligned}.$$

Se il veicolo si arresta al tempo t^*, avremo $v(t^*) = 0$. Dalla condizione di annullamento della velocità otteniamo la relazione $t^* = v_0/a$. Lo spazio d'arresto sarà dato da

$$x(t^*) = -\frac{1}{2}at^{*2} + v_0 t^* = -\frac{1}{2}a\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{a}\right) = \frac{v_0^2}{2a}.$$



La decelerazione del veicolo può essere espressa mediante l'accelerazione di gravità secondo la relazione $a = \mu\, g$, dove μ rappresenta un coefficiente legato alle condizioni della strada e dei pneumatici (torneremo in futuro su questo argomento). Arriviamo alla relazione

$$x(t^*) = \frac{v_0^2}{2\,\mu\, g}.$$

Per poter confrontare il nostro risultato con quanto mostrato in tabella occorre poter convertire in m/s le velocità espresse in Km/h. A tal proposito osserviamo quanto segue

$$1\,\frac{Km}{h} = \frac{10^3 m}{3.6 \cdot 10^3 s} = \frac{1}{3.6}\frac{m}{s} \to 1\,\frac{Km}{h} = \frac{1}{3.6}\frac{m}{s}.$$

Ad esempio, volendo convertire $100\ Km/h$ in m/s basta moltiplicare per 100 ambo i membri della precedente con il risultato:

$$100 \times 1\frac{Km}{h} = 100 \times \frac{1}{3.6}\frac{m}{s} \approx 27.8\frac{m}{s}.$$

Dal confronto diretto (vedi figura) concludiamo che la relazione teorica per lo spazio di frenatura è in pieno accordo con i dati riportati in tabella.

Come bisognerebbe modificare il modello per poter tenere conto dello spazio percorso dal veicolo nel tempo di reazione del conducente?