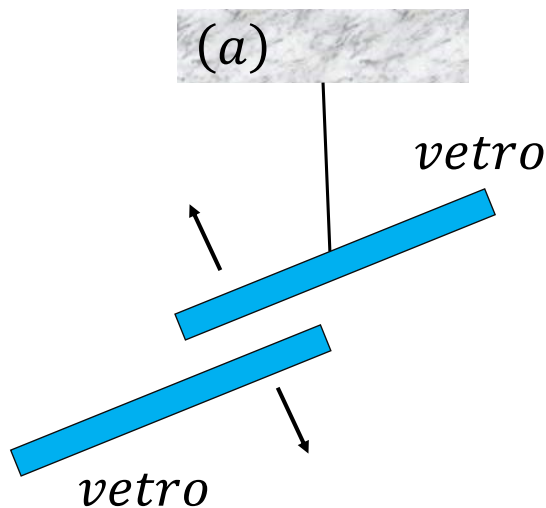


1. La carica elettrica

Nella meccanica di Newton i corpi sono caratterizzati da una proprietà intrinseca che abbiamo chiamato massa. Essa è all'origine dei fenomeni gravitazionali. L'attrazione gravitazionale conferisce un ordine al sistema solare descritto dalle leggi di Keplero.

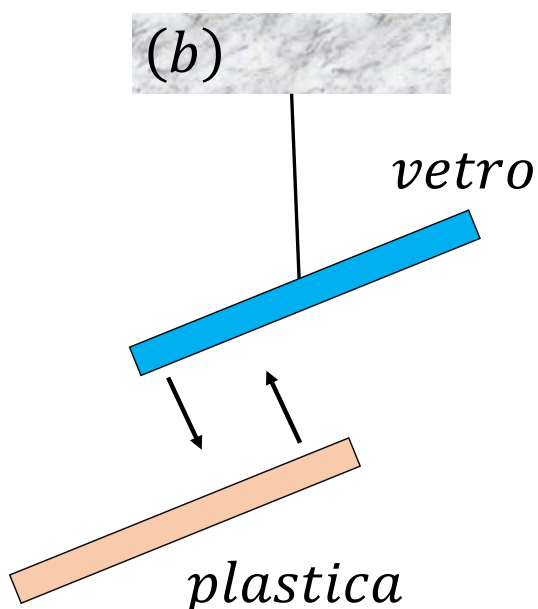


L'esistenza di forze non riconducibili all'attrazione gravitazionale è nota sin dall'antichità. A tal proposito descriviamo alcune evidenze sperimentali.

Sospendiamo una bacchetta di vetro mediante un filo. Se avviciniamo (senza che vi sia contatto) una seconda bacchetta identica alla prima non notiamo alcun effetto. Se l'esperimento viene ripetuto dopo aver preventivamente strofinato le due bacchette con un panno di seta, si osserva l'instaurarsi di una forza di natura repulsiva. Tale forza causa una rotazione della bacchetta sospesa.

Strofiniamo adesso una bacchetta in plastica mediante un panno in camoscio. Avvicinando la bacchetta in plastica a quella sospesa (in vetro) si osserva l'instaurarsi di una forza attrattiva.

Gli esperimenti sopra descritti mettono in evidenza l'esistenza di una proprietà nuova della materia. I fatti salienti che emergono dall'analisi sperimentale sono i seguenti:



- Le azioni meccaniche (forze) riscontrabili negli esperimenti sopra descritti non si manifestano in modo spontaneo. I corpi necessitano di essere opportunamente preparati. Il processo di preparazione (strofinio) può essere visto come la somministrazione di una certa quantità di energia al sistema.

- Le azioni meccaniche che si instaurano dopo aver eccitato il sistema per strofinio hanno intensità variabile con la distanza e non necessitano del contatto fra i corpi.

- La natura attrattiva o repulsiva delle menzionate azioni dipende dalla natura dei corpi considerati. Corpi dello stesso materiale tendono a respingersi, mentre si ha attrazione tra materiali

differenti. Notiamo che la fenomenologia della repulsione emerge qui per la prima volta. L'unica forza fin qui introdotta capace di esercitare un'azione a distanza è la gravità. Sappiamo però che le azioni gravitazionali sono di natura attrattiva.

Quanto detto sembra coerente con l'esistenza di una nuova proprietà della materia che chiamiamo *carica elettrica*. La carica elettrica deve presentarsi in due forme differenti che chiamiamo convenzionalmente *carica positiva* e *carica negativa*. Gli esperimenti sopra descritti si definiscono *esperimenti di elettrizzazione per strofinio*.

Alla luce del concetto di carica elettrica appena introdotto emerge un primo modello della materia basato sulle seguenti affermazioni sperimentalmente motivate:

- In condizioni ordinarie, la materia è globalmente neutra, ossia dotata di carica elettrica totale pari a zero.
- Negli esperimenti di elettrizzazione per strofinio, si ottengono corpi con carica totale diversa da zero. Corpi con carica dello stesso segno si respingono, mentre c'è attrazione tra corpi dotati di carica opposta.

Le precedenti affermazioni implicano che la neutralità elettrica di un corpo può essere alterata. Dobbiamo quindi ammettere che *la carica elettrica può migrare* da un corpo ad un altro con maggiore o minore facilità a seconda della natura dei corpi considerati.

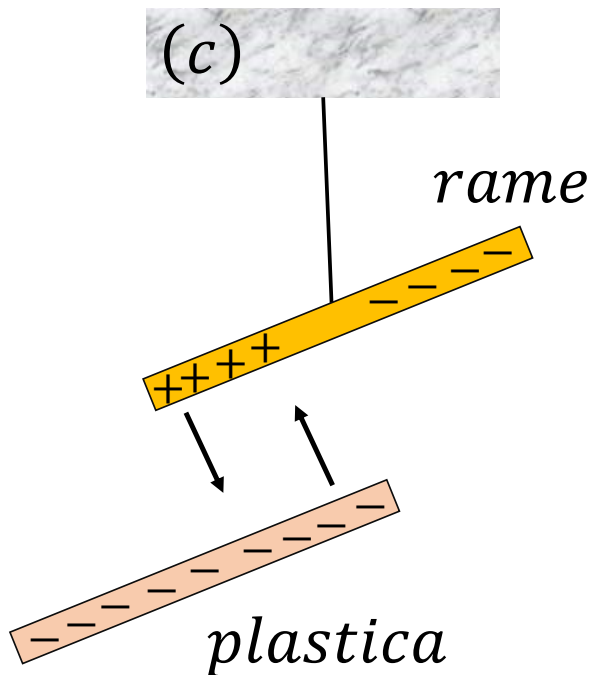
Un corpo carico inoltre può tornare neutro interagendo con altri corpi (e.g. le nostre mani). Questo è il motivo per il quale l'esperimento descritto inizialmente è condotto sospendendo ad un filo la bacchetta in vetro. In questo modo la bacchetta risulta essere un sistema quasi isolato (c'è sempre l'aria!).

La carica elettrica non può migrare attraverso il filo? Dipende dal materiale di cui è costituito il filo. Esistono materiali che non lasciano migrare la carica elettrica e altri che lo consentono. Definiamo:

- **Conduttori** i materiali che lasciano migrare la carica elettrica con relativa facilità (metalli, corpo umano, acqua di rubinetto, etc.)
- **Isolanti** i materiali nei quali le cariche non possono muoversi liberamente (plastica, vetro, gomma, etc)

Cosa accade se ripetiamo l'esperimento descritto inizialmente utilizzando un metallo?

Sospendiamo ad un filo una bacchetta di rame neutra ed avviciniamo ad essa una bacchetta in plastica preventivamente *elettrizzata per strofinio*. Supponiamo essere negativa la carica accumulata sulla bacchetta in plastica. Essendo neutra la bacchetta in rame (dotata di carica totale nulla) non dovremmo osservare alcun effetto. Si osserva invece che la bacchetta in rame è attratta da quella in plastica. D'altra parte affinché vi sia attrazione, occorre ipotizzare che nelle immediate vicinanze della bacchetta in plastica, in una regione localizzata sulla bacchetta in rame, vi sia un accumulo di cariche positive. Allontanando



la bacchetta in plastica il rame non manifesta alcun segno di elettrizzazione residua. D'altra parte se la carica elettrica è una proprietà intrinseca della materia dobbiamo anche ipotizzare che essa non possa essere né creata né distrutta. Da questa osservazione segue il *principio di conservazione della carica elettrica*:

In un sistema isolato è conservata la somma algebrica di tutte le cariche elettriche in esso contenute.

Essendo la bacchetta in rame un sistema isolato, deve valere il principio sopra enunciato. D'altra parte, il sistema è inizialmente neutro. Questo ci fa intuire che se esiste un accumulo di carica positiva

localizzato ad una estremità della bacchetta in rame, un'analogia quantità di carica negativa deve trovarsi in un'altra regione della bacchetta metallica. La fenomenologia fin qui descritta non dipende dall'estremo considerato.

Da un punto di vista microscopico possiamo immaginare quanto accade nell'esperimento sopra descritto. Quando avviciniamo la bacchetta in plastica (carica negativamente) a quella in rame le cariche negative del rame sono respinte e, se libere di muoversi, migrano verso l'estremità opposta della bacchetta. La migrazione delle cariche negative, determina una carica positiva accumulata nella regione svuotata di cariche negative. D'altra parte, se le cariche positive fossero altrettanto libere di muoversi sarebbero attratte dalle cariche negative della bacchetta in plastica. Questo meccanismo di migrazione di cariche spiegherebbe il fatto sperimentale.

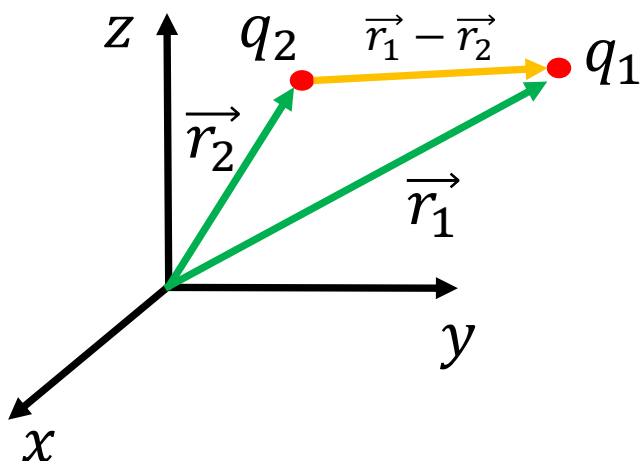
La spiegazione data dell'esperimento è compatibile però con varie forme di organizzazione microscopica della carica elettrica nella materia. Certamente occorre ipotizzare che le cariche elettriche appartenenti ad almeno un tipo (positivo o negativo) siano libere di muoversi all'interno del materiale metallico.

Le ipotesi in campo sono varie: (1) le cariche negative sono libere, mentre quelle positive sono fisse; (2) le cariche positive sono mobili, mentre quelle negative sono fisse; (3) sia le cariche positive che quelle negative sono libere di muoversi.

Per incamminarci verso un tentativo di soluzione occorre stabilire la modalità di interazione tra cariche elettriche. Occorre cioè determinare la legge che regola le interazioni tra corpi carichi.

2. La legge di Coulomb

Ragionando in analogia a quanto visto in meccanica, risulta conveniente occuparsi di cariche elementari che possano essere descritte come oggetti puntiformi (cariche puntiformi). I corpi carichi estesi saranno poi descrivibili come un insieme di cariche puntiformi.



Chiaramente non esistono cariche puntiformi mediante le quali sperimentare le azioni elettrostatiche. Un sistema fisico che si comporti in forma approssimata come una carica puntiforme è una sferetta carica di *ridotte dimensioni*. L'ultima condizione si realizza quando il raggio della sferetta è molto minore delle scale di distanza tipicamente rilevanti nel problema.

Sperimentando con questi strumenti concettuali, nel 1785 Coulomb arrivò a formulare la legge di forza che porta il suo nome. Siano q_1 e q_2 due cariche puntiformi poste nel vuoto a distanza r l'una dall'altra. Siano \vec{r}_1 ed \vec{r}_2 i rispettivi vettori posizione. La forza di cui la carica 1 risente per effetto della carica 2 vale:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Detta $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ la distanza fra le cariche ed introducendo il versore

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|},$$

la precedente può essere riscritta nella forma compatta:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}.$$

Osserviamo che la forza di Coulomb è diretta lungo la congiungente le due cariche, risulta repulsiva se $q_1 q_2 > 0$, nulla se $q_1 = 0$ o $q_2 = 0$, attrattiva quando $q_1 q_2 < 0$. Inoltre la forza di Coulomb tende a zero come l'inverso del quadrato della distanza fra le cariche. La costante dimensionale k può essere definita compiutamente una volta definita l'unità di misura della carica elettrica.

Una possibile definizione operativa di carica elettrica è la seguente.

Due cariche identiche, poste nel vuoto a distanza di un metro, hanno carica di un Coulomb (C) se sperimentano una forza repulsiva di modulo pari a $\approx 8,99 \cdot 10^9 N$.

Alla luce di questa definizione, risulta evidente che la costante di Coulomb vale:

$$k = 8,99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}.$$

Essa può essere espressa in termini di un'altra quantità, la costante dielettrica del vuoto ϵ_0 , la cui rilevanza sarà più chiara nel seguito. In termini della costante dielettrica del vuoto si può scrivere:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

dalla quale evidentemente segue che

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N m^2}.$$

Le forze coulombiane obbediscono al *principio di sovrapposizione degli effetti*. Ossia in un sistema formato da N cariche puntiformi la forza coulombiana \vec{F}_j risentita dalla carica j -esima è pari alla somma delle forze coulombiane dovute alle restanti cariche. In particolare, la forza \vec{F}_{jk} agente sulla j -esima carica per effetto della k -esima ha la stessa espressione che avrebbe se le restanti cariche non fossero presenti. Si ha quindi:

$$\vec{F}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{q_j q_k}{r_{jk}^2} \hat{r}_{jk}.$$

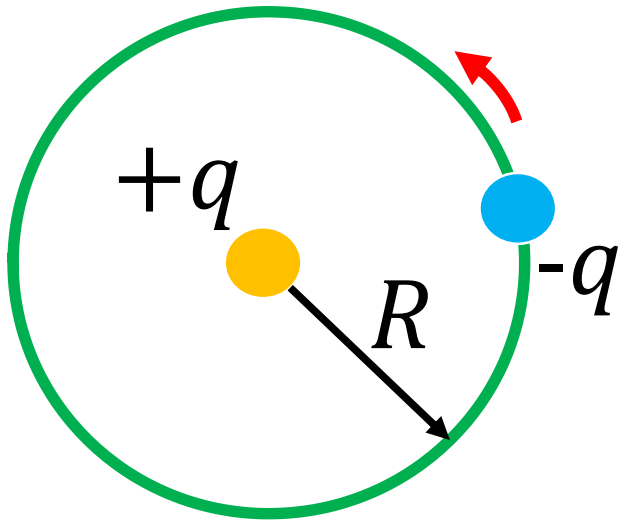
3. Cenni sulla struttura della materia

Il fatto che i corpi macroscopici siano invariabilmente neutri lascia supporre che tali siano i loro costituenti microscopici. Questi ultimi devono essere porzioni di materia contenenti cariche positive e negative in egual numero. Chiamiamo *atomi* i costituenti dei corpi in esame.

Si pone il problema di capire come siano disposte le cariche positive e negative all'interno dell'atomo. Affinché l'atomo sia un'entità stabile occorre che le cariche che lo costituiscono siano confinate in una regione spazialmente limitata. L'analogia tra la forza di Coulomb e la forza di attrazione gravitazionale suggerisce che l'atomo possa essere

concepito come una sorta di sistema solare in miniatura. Un sistema solare nel quale, ad esempio, un nucleo carico positivamente è contornato da cariche negative. Il sistema sarebbe stabilizzato dall'attrazione Coulombiana fra cariche di segno opposto. Cerchiamo di capire di più su questo sistema in un caso semplice.

Supponiamo che il sistema atomico sia costituito da un *nucleo* carico positivamente avente carica $q > 0$ e che una particella di carica $-q$ e massa m vi orbiti intorno. In analogia con quanto detto per il sistema terra-sole, la forza di Coulomb rappresenta la forza centripeta che costringe la carica negativa a muoversi di moto circolare uniforme. Imponendo che la forza di Coulomb coincida con la forza centripeta, otteniamo la relazione:



$$\frac{k q^2}{R^2} = m \omega^2 R = m \frac{v^2}{R}.$$

Dalla precedente è possibile ricavare l'energia cinetica della particella negativa:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{k q^2}{2R}.$$

Vogliamo adesso determinare l'energia totale del sistema. Ci occorre determinare il potenziale della forza di Coulomb, che sappiamo esistere in analogia al caso gravitazionale. Questo implica che *la forza di Coulomb è di natura conservativa*. Ricordiamo a tal riguardo che per una forza conservativa vale la relazione:

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(U(r_B) - U(r_A)).$$

Nel caso considerato abbiamo:

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(-\frac{k q^2}{r^2} \hat{r} \right) \cdot \hat{r} dr = \left[\frac{k q^2}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \frac{k q^2}{r_B} - \frac{k q^2}{r_A}.$$

Dal teorema dell'energia cinetica abbiamo inoltre:

$$L = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2.$$

Si ha quindi che l'energia meccanica totale del sistema vale:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k q^2}{R}.$$

Inoltre, sostituendo il valore dell'energia cinetica prima determinato nella precedente otteniamo:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k q^2}{R} = \frac{k q^2}{2R} - \frac{k q^2}{R} = -\frac{k q^2}{2R}.$$

L'energia totale del sistema è negativa. La particella negativa è quindi confinata a rimanere in una regione spaziale prossima al nucleo positivo.

E' utile a questo punto osservare che *la carica elettrica è una grandezza quantizzata*. Questa affermazione implica che qualsiasi carica risulta essere multipla di una carica elementare. La carica elementare vale:

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19}C.$$

Ne segue che l'atomo più semplice che possiamo concepire è costituito da un nucleo carico positivamente, con carica $+e$, contornato da una carica negativa, di intensità $-e$, che gli orbita intorno.

Un atomo così semplice esiste realmente ed è l'atomo d'idrogeno. Alla particella carica positivamente si dà il nome di *protone*, mentre chiamiamo *elettrone* la carica negativa. Classicamente l'energia dell'atomo di idrogeno vale:

$$E = -\frac{k e^2}{2R}.$$

L'energia dell'atomo sopra richiamata può variare con continuità. Da un punto di vista classico, l'atomo può quindi assorbire qualsiasi quantità di energia fornita dall'esterno. L'atomo può ricevere energia dall'ambiente esterno se sollecitato mediante un'appropriata sorgente luminosa. Si osserva sperimentalmente che l'atomo può assorbire energia soltanto quando interagisce con sorgenti luminose con specifiche caratteristiche (dipendenti dall'atomo considerato).

Questa osservazione sperimentale contrasta con la visione classica sopra richiamata. In particolare lo studio dell'interazione tra radiazione e materia (esperimenti di spettroscopia) mostra come gli atomi rispondano soltanto a specifiche sollecitazioni. Questa selettività nella risposta atomica alla luce non risulta spiegabile mediante la fisica classica ed una piena comprensione richiede una trattazione quantistica del problema.

4. L'ipotesi di Niels Bohr

N. Bohr notò che molte delle osservazioni sperimentali (spettri atomici) potevano essere spiegate dal punto di vista teorico imponendo un vincolo su una costante del moto. Riper corriamo il ragionamento di Bohr. Sappiamo che nel moto circolare uniforme è conservato il momento angolare. Nel caso specifico si conserva la quantità $|\vec{L}| = mvR$. Bohr propose che tale valore, continuo in fisica classica, dovesse essere sostituito con un multiplo intero di una costante fondamentale nota come costante di Planck ridotta (\hbar). Nel modello di Bohr la quantizzazione del momento angolare prende la forma:

$$|\vec{L}| = n\hbar$$

dove $n > 0$ è un intero positivo. La costante di Planck ridotta ha un valore molto piccolo ($\hbar \approx 1,05 \cdot 10^{-34} Js$) e per valori di n grandi (limite classico) il momento angolare esibisce una variazione quasi continua. La natura discreta del momento angolare è invece importante per valori di n abbastanza piccoli.

La quantizzazione del momento angolare si scrive in forma esplicita nella forma seguente:

$$mvR = n\hbar.$$

La precedente, tuttavia, non è sufficiente a determinare completamente lo stato del sistema atomico. Per fare questo occorre infatti determinare il raggio dell'orbita e il modulo della velocità. Occorre quindi una seconda relazione. Questa ci è fornita dall'identificazione della forza di Coulomb con la forza centripeta. Pertanto possiamo scrivere:

$$\begin{cases} mv_n R_n = n\hbar \\ \frac{k e^2}{R_n^2} = m \frac{v_n^2}{R_n} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m v_n R_n = n\hbar \\ m v_n^2 R_n = k e^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_n = \frac{n\hbar}{m v_n} \\ v_n n\hbar = k e^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_n = \frac{(n\hbar)^2}{m k e^2} \\ v_n = \frac{k e^2}{n\hbar} \end{cases}.$$

Dalla soluzione trovata è evidente che non tutte le orbite classicamente permesse sono ammissibili. Soltanto una infinità numerabile di orbite, aventi raggio R_n , risultano consentite. Per questa ragione, l'energia del sistema presenta livelli di energia discreti:

$$E_n = -\frac{k e^2}{2R_n} = -\frac{E_0}{n^2}$$

$$E_0 = \frac{(k e^2)^2 m}{2\hbar^2}.$$

Questo risultato mostra che l'atomo non può assorbire arbitrarie quantità di energia. L'orbita di raggio minore si ottiene fissando $n = 1$. In questo stato l'energia del sistema vale $-E_0$, che corrisponde allo stato fondamentale del sistema (lo stato di minore energia). Lo stato fondamentale è quello al quale il sistema tende se non perturbato da cause esterne.

Il raggio dell'orbita nello stato fondamentale, detto raggio di Bohr, vale:

$$R_1 = \frac{\hbar^2}{m k e^2}.$$

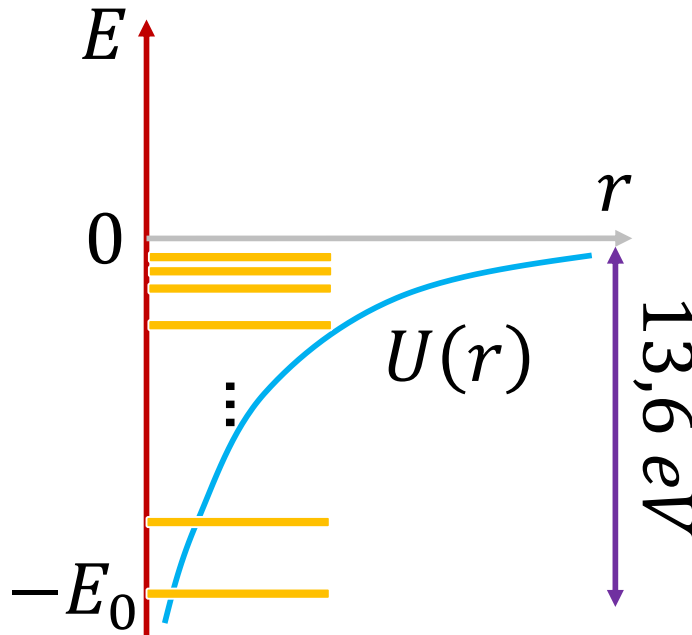
Quando si considera il valore della massa dell'elettrone

$$m = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg},$$

otteniamo i valori di E_0 ed R_1 . Essi valgono:

$$E_0 = 13,6 \text{ eV}$$

$$R_1 = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$



con $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Il raggio di Bohr rappresenta una misura delle dimensioni tipiche di un atomo, mentre E_0 rappresenta l'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno (in ottimo accordo con il valore sperimentale).

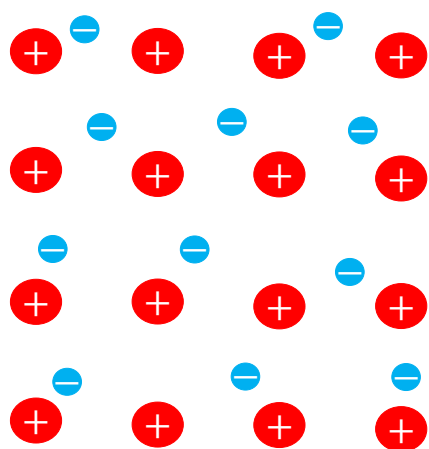
Il modello di Bohr è un modello semiclassico che recepisce sotto forma di vincolo elementi caratterizzanti la teoria quantistica. Nonostante il successo del modello nel rendere conto delle osservazioni sperimentali, restano problemi che non discuteremo e che verranno risolti soltanto nel quadro della meccanica quantistica.

5. I costituenti dell'atomo

Oggi sappiamo che un atomo è costituito da un nucleo positivo e da una nuvola elettronica negativa. Il nucleo è costituito da protoni (carica $+e$) e neutroni di carica nulla. La nuvola elettronica è costituita da tanti elettroni quanti sono i protoni del nucleo. Quest'ultima proprietà garantisce la neutralità del sistema. In tabella mostriamo alcune proprietà dei costituenti dell'atomo.

e, p, n	carica	massa
<i>elettrone</i>	$-e$	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
<i>protone</i>	$+e$	$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
<i>neutrone</i>	0	$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

I protoni hanno una massa di circa 1836 volte maggiore di quella di un elettrone. Nella



materia cristallina i nuclei atomici sono localizzati in reticoli geometricamente ordinati. I protoni, localizzati nel nucleo, non sono liberi di spostarsi all'interno del materiale. Gli elettroni, molto più leggeri, possono in principio migrare all'interno del materiale. Lo spostamento degli elettroni è agevole nei metalli (legame metallico), mentre questo è molto più difficoltoso negli isolanti.

Da queste considerazioni è facile rendersi conto che gli elettroni giocano un ruolo rilevante nei fenomeni di trasferimento di carica tra corpi.

6. Newton contro Coulomb

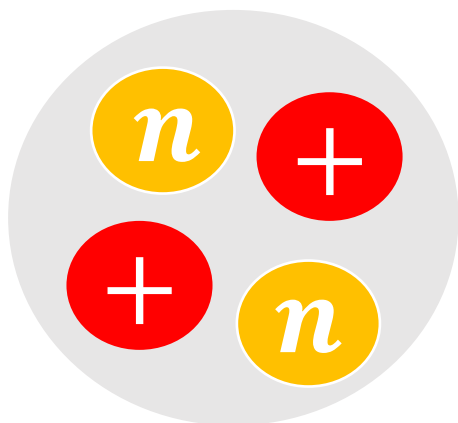
Nel corso della nostra esposizione abbiamo considerato un modello semplificato di atomo contenente un protone ed un elettrone. Questo modello descrive bene l'atomo di idrogeno il cui nucleo contiene un singolo protone.

Esistono evidentemente atomi più complessi il cui nucleo è formato da più protoni. In generale i nuclei contengono anche neutroni.

Qui sorge un ulteriore problema concettuale. Come possono coesistere cariche dello stesso segno all'interno del nucleo?

Il nucleo dovrebbe essere infatti instabile a causa della repulsione coulombiana tra i protoni. Il fatto che i nuclei siano stabili fa sospettare dell'esistenza una forza in grado di bilanciare la repulsione coulombiana. Conosciamo al momento soltanto un'altra forza in grado di fornire una interazione attrattiva. Questa è la forza di attrazione gravitazionale. Confrontiamo quindi i moduli delle due forze.

Limitiamo la nostra attenzione al caso in cui il nucleo contenga soltanto due protoni. Questo è il caso del nucleo di elio (${}^4\text{He}$), formato da due protoni e due neutroni. Si stima che la regione nucleare abbia un'estensione spaziale dell'ordine di 1 fm (femtometro),



ossia 10^{-15} m . Quanto vale la repulsione coulombiana tra due protoni a distanza $d = 10^{-15} \text{ m}$?

Il calcolo diretto mostra quanto segue:

$$|\vec{F}_C| = \frac{ke^2}{d^2} = \frac{(8,99 \cdot 10^9) \cdot (1,602 \cdot 10^{-19})^2}{(10^{-15})^2} \text{ N} \approx 230 \text{ N}.$$

Il modulo della forza repulsiva risulta enorme se si pensa che stiamo considerando un sistema microscopico.

Valutiamo il modulo dell'attrazione gravitazionale per i due protoni. Il calcolo diretto mostra che

$$|\vec{F}_G| = \frac{Gm_p^2}{d^2} = \frac{(6,66 \cdot 10^{-11}) \cdot (1,673 \cdot 10^{-27})^2}{(10^{-15})^2} \text{ N} \approx 18,6 \cdot 10^{-35} \text{ N}.$$

Per rendere ancora più evidente il risultato valutiamo il rapporto tra i moduli delle due forze:

$$\frac{|\vec{F}_C|}{|\vec{F}_G|} = \frac{230 \text{ N}}{18,6 \cdot 10^{-35} \text{ N}} \approx 1,2 \cdot 10^{36}.$$

Dalle precedenti valutazioni appare evidente che l'attrazione gravitazionale non può stabilizzare i nuclei atomici.

La regione nucleare è stabilizzata infatti da *forze nucleari* a cortissimo raggio. Queste forze, le più intense in natura, sono dominanti alle scale subatomiche e consentono la stabilità nucleare.