1. L'ottica geometrica e il principio di Fermat

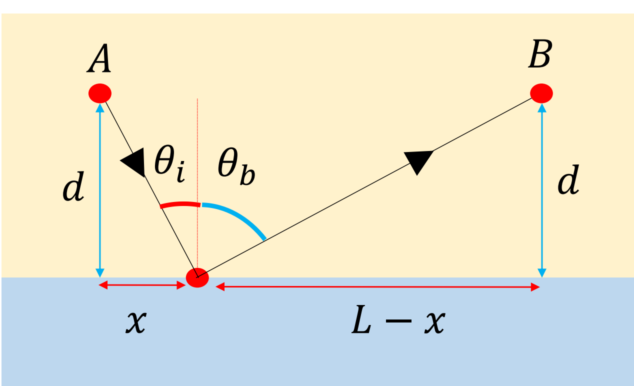
L'ottica geometrica studia la propagazione della luce e l'interazione di questa con le interfacce tra mezzi trasparenti. L'assunzione di base è che la luce si propaghi in linea retta in assenza di ostacoli o discontinuità nelle proprietà ottiche dei mezzi attraversati. Per questa ragione è centrale il concetto *di raggio luminoso*. Il raggio luminoso rappresenta la direzione di propagazione della luce nel mezzo considerato.

Abbiamo già anticipato il fatto che la luce è un'onda elettromagnetica e come tale è dotata di un vettore d'onda e di una lunghezza d'onda. L'approssimazione dell'ottica geometrica, utile nella costruzione di strumenti ottici, è ben giustificata quando *la lunghezza d'onda della luce è molto minore della dimensione tipica degli ostacoli* con i quali essa interagisce. La direzione del raggio luminoso coincide con la direzione del vettore d'onda dell'onda elettromagnetica associata.

Nell'ambito dell'ottica geometrica, le leggi che regolano l'interazione della luce con interfacce tra mezzi differenti possono essere ricavate facendo ricorso *al principio di Fermat*. Esso afferma che:

di tutti i possibili cammini che un raggio luminoso può percorrere per andare da un punto ad un altro, esso sceglie il cammino che richiede il tempo più breve.

Questo principio implica immediatamente che la propagazione tra due punti dello stesso mezzo è rettilinea. Sappiamo che la luce si propaga in un certo mezzo a velocità costante. Pertanto il cammino che richiede il tempo più breve è anche quello di lunghezza minore. Questo immediatamente implica che il percorso è rettilineo. La situazione è meno intuitiva quando la luce interagisce con l'interfaccia tra due mezzi.



Consideriamo dapprima la situazione in cui un raggio luminoso si propaga dal punto A al punto B dopo aver interagito con una superficie riflettente. Ci chiediamo quale sia il cammino seguito dalla luce. Sappiamo che la luce propaga in linea retta fintanto che non incontra ostacoli. Pertanto la traiettoria che ne risulta è formata da due tratti rettilinei. Sia x la posizione del punto di incidenza del raggio sulla superficie. Al variare di x cambia anche il tempo totale di percorrenza. Esso è una funzione di x della forma:

$$\mathcal{T}(x) = \frac{1}{v}\left(\sqrt{x^2 + d^2} + \sqrt{(L-x)^2 + d^2}\right).$$

La posizione del punto di incidenza discende la principio di Fermat che richiede che il tempo di percorrenza sia minimo. Questa condizione può essere espressa imponendo la condizione di derivata nulla per la funzione $\mathcal{T}(x)$:

$$\frac{d}{dx}\mathcal{T}(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{v}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+d^2}} - \frac{2(L-x)}{2\sqrt{(L-x)^2+d^2}}\right) = 0.$$

Osserviamo che valgono le seguenti relazioni:

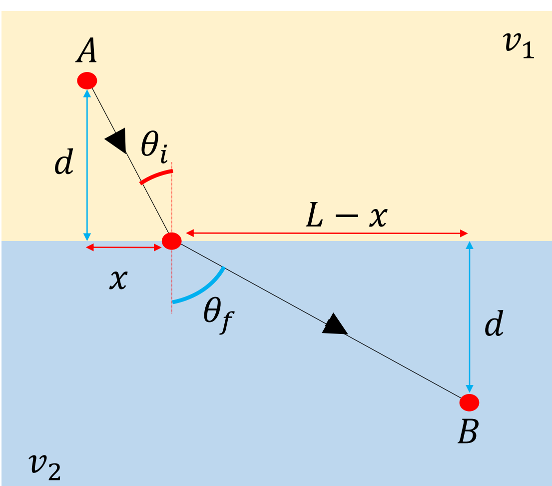
$$\sin\theta_i = \frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$$
$$\sin\theta_b = \frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2+d^2}},$$

dalle quali si ottiene la *legge della riflessione* nella forma:

$$\sin\theta_i = \sin\theta_b.$$

Questa afferma che l'angolo di incidenza θ_i misurato a partire dalla normale alla superficie eguaglia l'angolo di riflessione θ_b.

Nei fenomeni di interazione tra la luce e l'interfaccia tra due mezzi una parte delle luce incidente viene riflessa, mentre la restante frazione attraversa l'interfaccia. Il raggio che attraversa l'interfaccia si dice *rifratto* e il fenomeno associato *rifrazione*. Consideriamo la situazione in figura e valutiamo il tempo di percorrenza a seconda del punto di incidenza x sull'interfaccia tra i due mezzi. Siano v_1 e v_2 le velocità di propagazione della luce nei due mezzi. Il tempo di percorrenza del generico cammino vale:



$$\mathcal{T}(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2+d^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(L-x)^2+d^2}.$$

Procedendo come mostrato per il caso della riflessione otteniamo:

$$\frac{d}{dx}\mathcal{T}(x) = 0 \rightarrow \frac{2x}{2v_1\sqrt{x^2+d^2}} - \frac{2(L-x)}{2v_2\sqrt{(L-x)^2+d^2}} = 0.$$

Riconosciamo il seno dell'angolo di incidenza θ_i e dell'angolo di rifrazione θ_f:

$$\sin\theta_i = \frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$$
$$\sin\theta_f = \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+d^2}}.$$

Dalle precedenti otteniamo la relazione:

$$\frac{\sin\theta_i}{v_1} = \frac{\sin\theta_f}{v_2},$$

che moltiplicata per la velocità della luce nel vuoto c prende la forma:

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_f.$$

La precedente, detta *legge di Snell-Cartesio*, mette in relazione l'angolo di incidenza e l'angolo di rifrazione. I due angoli sono differenti a causa del differente indice di rifrazione dei mezzi considerati.

Mostreremo nel seguito che le leggi della riflessione e della rifrazione derivate mediante il principio di Fermat sono identiche a quelle che si ottengono studiando l'interazione di un'onda elettromagnetica con l'interfaccia tra due mezzi trasparenti.

2. Vettore d'onda e fronte d'onda

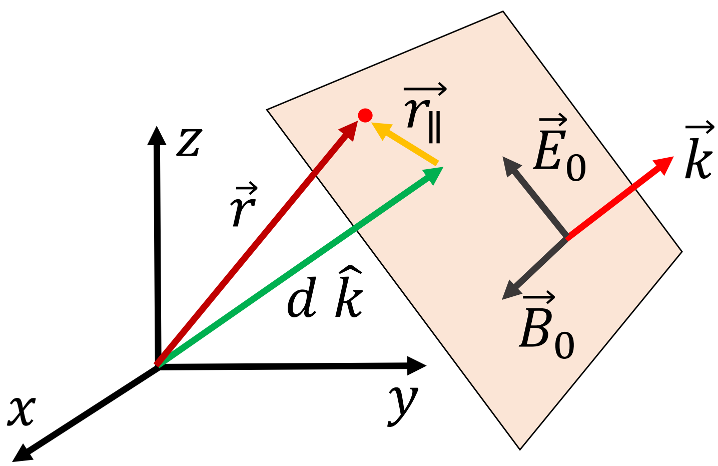
Prima di procedere con il nostro programma è utile presentare in forma generale il concetto di vettore d'onda e fronte d'onda. Fin qui abbiamo sviluppato i nostri ragionamenti nel caso di un'onda monocromatica propagantesi lungo l'asse x. Abbiamo visto che in questo caso una soluzione periodica per il campo elettrico si scrive nella forma $\vec{E}(x,t) = \hat{y}\, E(x,t)$ con

$$E(x,t) = E_0\, sin(kx - \omega t).$$

Inoltre, affinché la precedente sia una soluzione dell'equazione delle onde, occorre che le quantità $k > 0$ e $\omega > 0$ rispettino la relazione $\omega = ck$. La natura vettoriale della quantità k può essere evidenziata introducendo il concetto di vettore d'onda. Esso contiene informazioni sulla direzione di propagazione dell'onda. Introducendo il vettore d'onda $\vec{k} = \hat{x}\, k$ possiamo scrivere:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, sin\big(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\big),$$

con $\vec{E}_0 = E_0\hat{y}$ e $\vec{r} = (x, y, z)$. Osservando che $|\vec{k}| = k$, possiamo scrivere la relazione di dispersione nella forma generale $\omega = c|\vec{k}|$. La precedente scrittura ottenuta per $\vec{E}(x,t)$ è anche valida quando il vettore d'onda sia diretto lungo una arbitraria direzione dello spazio. Anche in quest'ultimo caso i vettori $\vec{k}$ ed $\vec{E}_0$ risultano perpendicolari.



Consideriamo adesso un piano nello spazio a distanza d dall'origine degli assi e perpendicolare al vettore d'onda. Un generico punto del piano avrà un vettore posizione scrivibile nella forma $\vec{r} = d\,\hat{k} + \vec{r}_{\parallel}$ con $\vec{r}_{\parallel} \cdot \hat{k} = 0$. Per questa ragione si ha:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = \vec{E}_0\, sin(\vec{k}\cdot(d\,\hat{k} + \vec{r}_{\parallel}) - \omega t)$$
$$= \vec{E}_0\, sin(\vec{k}\cdot(d\,\hat{k} + \vec{r}_{\parallel}) - \omega t) = \vec{E}_0\, sin(kd - \omega t),$$

dalla quale segue che il campo elettrico risulta spazialmente uniforme sul piano considerato. Una superficie dello spazio sulla quale risulti costante la fase dell'onda ad un fissato istante di tempo viene detto fronte d'onda. Pertanto il fronte d'onda associato ad un'onda piana è una arbitraria superficie piana ortogonale alla direzione di propagazione.

3. Fenomeni di riflessione e rifrazione di onde elettromagnetiche all'interfaccia tra mezzi dielettrici trasparenti.

Consideriamo due mezzi dielettrici omogenei ed isotropi che riempiano lo spazio in modo tale che il mezzo 1 riempia il semispazio definito dalla condizione $z > 0$, mentre il mezzo 2 occupa il semispazio $z < 0$. Sia il piano $x - y$ la superficie di separazione che definisce l'interfaccia tra i due mezzi. Le caratteristiche fisiche del mezzo 1 sono riassunte dalle grandezze ε_1 e μ_1, mentre per il mezzo 2 abbiamo ε_2 e μ_2.

Consideriamo un'onda incidente sull'interfaccia proveniente dal mezzo 1. Dalla soluzione dell'equazione delle onde nel mezzo 1 sappiamo che il campo elettrico dell'*onda incidente* può essere scrittura come segue:

$$onda\ incidente\colon \vec{E}_i = \vec{E}_{0i}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t).$$

Sappiamo poi come la soluzione per il campo di induzione magnetica sia legata al campo elettrico. Tuttavia per sviluppare la nostra discussione non abbiamo bisogno di esplicitare la componente magnetica e di qui in poi ce ne disinteresseremo.

L'onda incidente, interagendo con l'interfaccia, genera due onde: un'onda *riflessa* ed una *rifratta*. La componente riflessa occupa il mezzo 1, mentre quella rifratta penetra nel mezzo 2. Ad ogni componente generata si può associare un campo elettrico nella forma:

$$\begin{gathered} onda\ riflessa\text{: } \vec{E}_b = \vec{E}_{0b} \sin(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega_b t + \theta_b) \\ onda\ rifratta\text{: } \vec{E}_f = \vec{E}_{0f} \sin\left(\vec{p} \cdot \vec{r} - \omega_f t + \theta_f\right) \end{gathered} .$$

Il campo elettrico nei due mezzi si scrive quindi nella forma:

$$\begin{gathered} \vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_i(\vec{r}, t) + \vec{E}_b(\vec{r}, t) \\ \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_f(\vec{r}, t) \end{gathered} .$$

Per determinare le caratteristiche delle onde coinvolte nel processo di interazione con l'interfaccia tra i due mezzi occorre considerare *le condizioni di raccordo del campo elettrico all'interfaccia tra mezzi dielettrici*. Si può dimostrare in modo rigoroso che esse prendono la forma:

$$\begin{gathered} E_{1t} = E_{2t} \\ \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \end{gathered} ,$$

dove E_{kt} e E_{kn} rappresentano le componenti dei campi tangenziali e normali all'interfaccia, rispettivamente. Le condizioni di raccordo implicano che per $z = 0$, cioè sul piano che definisce l'interfaccia tra i due mezzi, le componenti del campo elettrico nei due mezzi devono soddisfare relazioni di uguaglianza o di proporzionalità. Queste relazioni prendono la forma seguente

$$\begin{gathered} \left(\vec{E}_{0i}\right)_t \sin\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right) + \left(\vec{E}_{0b}\right)_t \sin(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega_b t + \theta_b) = \left(\vec{E}_{0f}\right)_t \sin\left(\vec{p} \cdot \vec{r} - \omega_f t + \theta_f\right) \\ \varepsilon_1 \left(\vec{E}_{0i}\right)_n \sin\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right) + \varepsilon_1 \left(\vec{E}_{0b}\right)_n \sin(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega_b t + \theta_b) = \varepsilon_2 \left(\vec{E}_{0f}\right)_n \sin\left(\vec{p} \cdot \vec{r} - \omega_f t + \theta_f\right) \end{gathered}$$

e devono essere rispettate a prescindere dall'istante di tempo e dal punto dell'interfaccia considerato. Per tale ragione gli argomenti delle funzioni trigonometriche devono coincidere, a prescindere dall'onda considerata. Pertanto occorre che valgano le relazioni:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \vec{q} \cdot \vec{r} - \omega_b t + \theta_b = \vec{p} \cdot \vec{r} - \omega_f t + \theta_f .$$

Le precedenti devono valere per ogni tempo e per ogni $\vec{r}$ con $z = 0$. L'unica possibilità per rispettare questi vincoli è data dalla seguente scelta:

$$\begin{cases} \theta_b = \theta_f = 0 \\ \omega = \omega_b = \omega_f \\ \vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{q} \cdot \vec{r} = \vec{p} \cdot \vec{r} \end{cases}.$$

Le prime due relazioni implicano che la frequenza dell'onda riflessa e dell'onda rifratta è identica a quella dell'onda incidente. Le tre onde risultano avere sfasamento nullo. Analizziamo la relazione tra le frequenze.

Per l'onda riflessa possiamo osservare che vale la relazione $\lambda_b \nu_b = v_1$. Da questa segue:

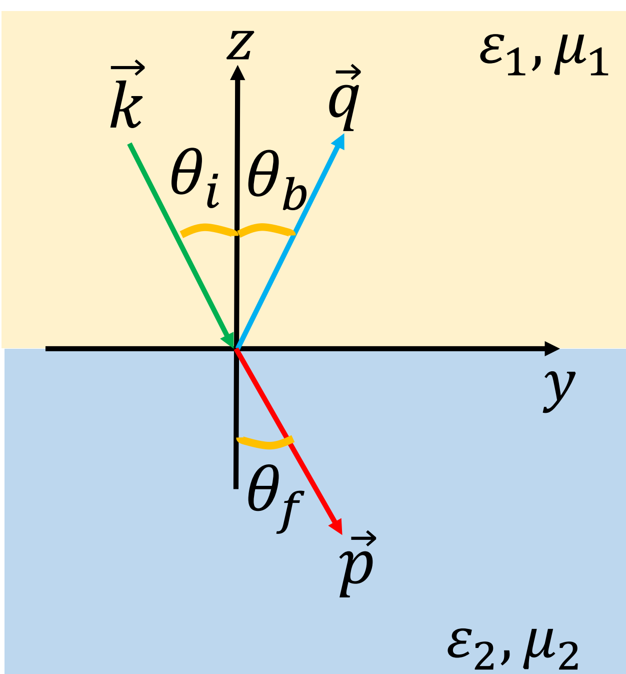
$$\lambda_b = \frac{v_1}{\nu_b} = \frac{v_1}{\nu} = \lambda_i,$$

cosa che implica che la lunghezza d'onda dell'onda riflessa è identica a quella dell'onda incidente. Nello scrivere la precedente abbiamo introdotto le notazioni: $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda_i$, $|\vec{q}| = 2\pi/\lambda_b$, $|\vec{p}| = 2\pi/\lambda_f$, $\omega = 2\pi\nu$, $\omega_b = 2\pi\nu_b$, $\omega_f = 2\pi\nu_f$.

Per l'onda rifratta possiamo scrivere $\lambda_f \nu_f = v_2$. Questo implica quanto segue:

$$\lambda_f = \frac{v_2}{\nu_f} = \frac{v_2}{\nu} = \frac{v_1}{v_1}\left(\frac{v_2}{\nu}\right) = \frac{v_2}{v_1}\left(\frac{v_1}{\nu}\right) = \frac{v_2}{v_1}\lambda_i = \frac{n_1}{n_2}\lambda_i,$$

dove abbiamo utilizzato le definizioni degli indici di rifrazione dei mezzi introdotte in precedenza:



$$n_{1,2} = \frac{c}{v_{1,2}}.$$

Da queste osservazioni segue che la lunghezza d'onda dell'onda rifratta è differente da quella dell'onda incidente e dipende dal rapporto degli indici di rifrazione tra i mezzi considerati.

Analizziamo adesso le implicazioni cinematiche della relazione che coinvolge i vettori d'onda. Supponiamo, senza perdita di generalità, che il vettore d'onda dell'onda incidente appartenga al piano yz. Questo implica che $k_x = 0$. Scriviamo la relazione fra i vettori d'onda sull'interfaccia ($z = 0$):

$$k_y y = q_x x + q_y y = p_x x + p_y y.$$

Affinché le precedenti valgano, occorre che sia $q_x = p_x = 0$ e $k_y = q_y = p_y$. La prima di queste relazioni ci dice che la direzione di propagazione dell'onda riflessa e quella dell'onda rifratta sono complanari con la direzione di propagazione dell'onda incidente. Osservando che valgono le relazioni seguenti:

$$k_y = \left|\vec{k}\right| \, sin\theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} \, sin\theta_i$$
$$q_y = |\vec{q}| \, sin\theta_b = \frac{2\pi}{\lambda_b} \, sin\theta_b,$$
$$p_y = |\vec{p}| \, sin\theta_f = \frac{2\pi}{\lambda_f} \, sin\theta_f$$

possiamo scrivere:

$$\frac{2\pi}{\lambda_i} \, sin\theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_b} \, sin\theta_b \rightarrow sin\theta_i = sin\theta_b$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_i} \, sin\theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_f} \, sin\theta_f \rightarrow sin\theta_f = \frac{\lambda_f}{\lambda_i} sin\theta_i \rightarrow sin\theta_f = \frac{n_1}{n_2} sin\theta_i$$

La prima relazione implica l'eguaglianza tra l'angolo di incidenza e quello di riflessione. La seconda, la *legge di Snell-Cartesio*, esprime in forma semplice la relazione esistente tra l'angolo di incidenza e quello di rifrazione. Come si vede, l'angolo di rifrazione dipende dal rapporto degli indici di rifrazione dei mezzi interessati.

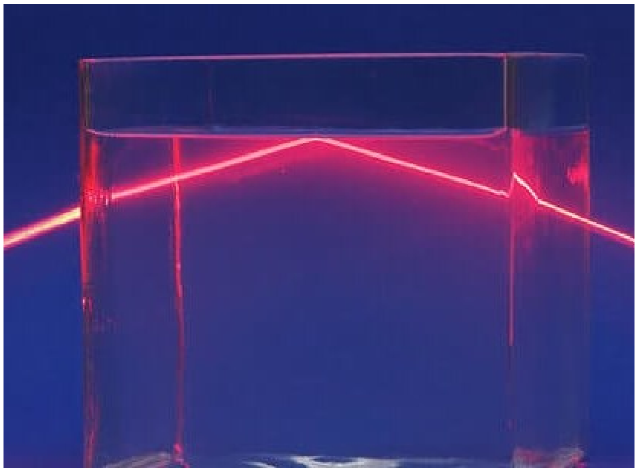
Interessante notare che l'onda rifratta non sempre esiste. Quando il raggio rifratto non esiste, la radiazione è completamente riflessa dall'interfaccia di separazione fra i due mezzi. In questo caso si parla di *riflessione totale*. Questo fenomeno è di fondamentale importanza nelle *fibre ottiche*.

Il raggio rifratto non esiste quando la relazione data dalla legge di Snell-Cartesio non può essere soddisfatta. Questo avviene quando $\frac{n_1}{n_2} sin\theta_i > 1$. In questa condizione non esiste alcun valore di θ_f che possa soddisfare la legge di Snell-Cartesio. In questa condizione, esiste un angolo di incidenza critico al di sopra del quale si ha riflessione totale. Questo angolo è definito dalla relazione

$$sin\theta_f = \frac{n_1}{n_2} sin\theta_{ic} = 1.$$

La precedente mostra che la condizione critica implica che il raggio rifratto, che ancora esiste in questa condizione, viaggia parallelamente all'interfaccia ($\theta_f = \frac{\pi}{2}$). L'angolo critico vale invece:

$$\theta_{ic} = arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = arcsin\left(\frac{v_1}{v_2}\right).$$



Se $\frac{n_2}{n_1} > 1$ non esiste alcun angolo critico. Questo implica che un'onda rifratta esiste in qualsiasi condizione di incidenza. Notiamo anche che la condizione precedente può scriversi in forma equivalente come $\frac{v_1}{v_2} > 1$. Nel caso contrario, $\frac{n_2}{n_1} < 1$, esiste un angolo critico pari a θ_{ic}. La condizione precedente può scriversi nella forma:

$$n_1 > n_2 \rightarrow \frac{c}{v_1} > \frac{c}{v_2} \rightarrow v_2 > v_1.$$

Questo implica che il fenomeno della riflessione totale può aversi solo quando il raggio incidente proviene da un mezzo nel quale la velocità di propagazione della luce è inferiore a quella del mezzo nel quale eventualmente propaga il raggio rifratto.

Esercizio

Calcolare l'angolo critico dell'interfaccia acqua/aria e la velocità della luce nell'acqua. Siano $n_1 = 1{,}33$ e $n_2 = 1{,}00$ gli indici di rifrazione dell'acqua e dell'aria, rispettivamente.

Dalla teoria generale sappiamo che l'angolo critico vale:

$$\theta_{ic} = arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = arcsin\left(\frac{v_1}{v_2}\right).$$

Nel caso considerato abbiamo:

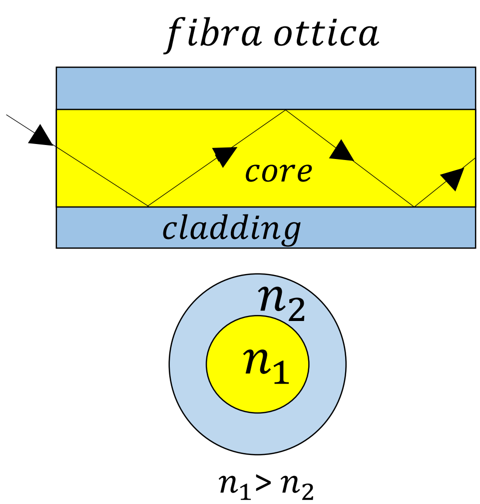
$$\theta_{ic} = arcsin\left(\frac{1{,}00}{1{,}33}\right) \approx 48{,}8°.$$

La velocità della luce nell'acqua si ottiene considerando la seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow v_1 = \frac{n_2}{n_1} v_2 \rightarrow v_1 = \left(\frac{1}{1{,}33}\right) \cdot 3{,}00 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 2{,}26 \cdot 10^8 \frac{m}{s}.$$

Si noti che $v_1 < v_2$.

4. Principio di funzionamento di una fibra ottica



Una fibra ottica è una *guida d'onda dielettrica* che basa il suo funzionamento sulla *disomogeneità del sistema*. Questo è costituito da un nucleo (*core*) e da un mantello (*cladding*) aventi *differente indice di rifrazione*. Il nucleo ha indice di rifrazione maggiore del mantello ($n_1 > n_2$). Questo consente di trasportare onde elettromagnetiche per *riflessioni totali multiple* con bassissima attenuazione, essendo molto limitate le perdite dovute alla trasmissione (per rifrazione) verso l'esterno della fibra. Per queste caratteristiche le fibre ottiche sono comunemente utilizzate nelle telecomunicazioni.