1. Elementi introduttivi: grandezze fisiche e loro unità di misura

La fisica è la scienza che studia **i fenomeni naturali**. Un **fenomeno** è una variazione dello stato del mondo percepibile dai nostri sensi in modo diretto o con l'ausilio di strumenti.

Osservare un fenomeno significa constatare che, in un certo intervallo di tempo, si verifica una variazione dello stato di un sistema da una configurazione A ad una B. Chiaramente affinché un fenomeno possa essere di interesse per la fisica è necessario che esso sia **ripetibile**. I fenomeni irripetibili (e.g. miracoli) non ricadono nell'ambito di indagine delle scienze esatte.

La ripetibilità della transizione da A a B, sotto ben precise condizioni iniziali, porta a stabilire un nesso causale (*una correlazione*) tra il verificarsi di A e la successiva evoluzione che porta il sistema nello stato B.

La comprensione di un fenomeno richiede che il nesso causale tra A e B, ossia il nesso di causa-effetto, possa essere descritto in termini semplici. La descrizione del fenomeno non deve inoltre dipendere dalla soggettività dell'osservatore.

Per eliminare la soggettività e procedere in modo razionale occorre associare **valori numerici** ad ogni cosa che a nostro giudizio partecipi in modo rilevante allo svolgimento del fenomeno allo studio.

Il processo che consente di sostituire numeri alle parole è chiamato **processo di misura** e tutto ciò che risulti quantificabile (in modo indipendente dallo sperimentatore) mediante tale processo è chiamato **grandezza fisica**.

Ad esempio la lunghezza di un tavolo è una grandezza fisica in quanto ad essa è possibile attribuire un valore numerico una volta scelta una opportuna **unità di misura**. *La bellezza di un tramonto non è una grandezza fisica in quanto non esistono modi oggettivi per quantificarla.*

Il **processo di misura è una operazione di confronto** tra una unità di misura e una grandezza fisica ad essa omogenea. Tale operazione è ripetibile, ma non esente da errori (errori casuali, sistematici). Immaginiamo ad esempio di voler misurare la lunghezza di un tavolo. Fissiamo come unità di misura il lato più lungo di un quaderno e valutiamo quante volte l'unità di misura sia contenuta nella grandezza da misurare. Il risultato della misura sarà un **numero seguito dall'indicazione dell'unità di misura utilizzata**. Una misurazione della lunghezza di un tavolo che sia espressa in termini di un numero puro (privo di unità di misura) non ha alcun senso. La scelta dell'unità di misura è arbitraria e sorge il problema di comunicare ad altri i risultati delle misure effettuate adottando una certa unità di misura. E' quindi necessario un sistema di misura condiviso da tutti gli sperimentatori. Tale sistema si chiama Sistema Internazionale (SI) e raccoglie le unità di misura da adottare per ogni grandezza fisica di interesse. *Unità fondamentali* di tale sistema sono il metro (m), il chilogrammo (kg) ed il secondo (s). Per tale ragione talvolta è indicato con la sigla MKS. Nel sistema internazionale:

- Le **lunghezze** sono misurate in metri
- Le **masse** sono misurate in kg
- Gli **intervalli di tempo** in secondi

Le unità di misura che discendono dalle precedenti sono dette *unità di misura derivate*. Sono unità derivate quelle della velocità, dell'accelerazione, del volume etc.

2. Metodo scientifico

Il metodo scientifico è la metodologia con la quale la scienza procede ed acquisisce e consolida la conoscenza dei fenomeni naturali. Galilei è ritenuto padre di tale metodo, anche noto come metodo sperimentale. Centrale per Galilei è il ruolo dell'esperimento. Esso differisce dall'osservazione del fenomeno nel suo svolgersi spontaneo. La riproduzione di un fenomeno in laboratorio cerca infatti di limitare l'effetto delle perturbazioni casuali che influenzano lo svolgersi in condizioni spontanee del fenomeno. Nell'ambito protetto del laboratorio lo sperimentatore: 1) riproduce in condizioni controllate il fenomeno osservato in natura; 2) effettua misure delle grandezze fisiche rilevanti e ne determina nessi causali sotto forma di relazioni matematiche; 3) formula previsioni sulla base delle relazioni trovate e ne verifica la validità in vari contesti.
Quando il nesso tra grandezze fisiche sia stato ampiamente verificato esso viene codificato

nella forma di **legge fisica**. *La legge fisica è formulata in termini matematici nella forma di eguaglianza tra grandezze fisiche o loro funzioni.* Il processo di verifica di una legge fisica è permanente. Infatti la scoperta di un fenomeno che devia dalle previsioni di una legge fisica rappresenta un'anomalia che mette in crisi l'impianto teorico. La scoperta di un'anomalia richiede la revisione dell'impianto teorico.

L'approccio galileiano presuppone la convinzione che i fenomeni della natura sono conoscibili dallo sperimentatore.
Memorabili le parole di Galilei tratte da un brano da *Il Saggiatore (1623)*: *"[…] questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico*

l'universo), [...] non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.”

3. L’analisi dimensionale

Abbiamo imparato che l’attività sperimentale porta alla formulazione di leggi nella forma di eguaglianze tra grandezze fisiche o loro funzioni. In altri termini una legge fisica si presenta nella forma astratta

$$A = B,$$

dove le quantità A e B sono funzioni assegnate di specifiche grandezze fisiche. Affinché l’eguaglianza abbia senso le dimensioni fisiche del primo membro devono coincidere con le dimensioni fisiche del secondo membro. Questo si rende necessario in quanto è possibile confrontare soltanto grandezze fisiche omogenee (quantificabili mediante l’uso della stessa unità di misura). Per indicare le dimensioni fisiche della grandezza A si ricorre alla notazione $[A]$ e analogamente per B. Se c è un numero puro, ossia privo di unità di misura, si ha $[c] = 1$. Questa regola discende dal fatto che la moltiplicazione per una costante adimensionale di una grandezza fisica dimensionale non ne altera le dimensioni fisiche ($[c\,A] = [c][A] = [A]$). Per indicare che una grandezza fisica A ha dimensioni omogenee ad una lunghezza (L), una massa (M) o un tempo (T) si ricorre, a seconda dei casi, alla scrittura

$$[A] = L$$
$$[A] = M$$
$$[A] = T.$$

Affinché la scrittura $A = B$ sia una legge fisica *ben formata* occorre che sia verificata la relazione $[A] = [B]$. Abbiamo inoltre le seguenti proprietà formali del simbolo $[\dots]$:

$$[A^n] = [A]^n$$
$$[A^n B^m] = [A]^n [B]^m.$$

Siamo pronti a descrivere alcune applicazioni rilevanti dell’analisi dimensionale. Per prima cosa osserviamo che l’analisi dimensionale è un importante strumento di verifica preliminare di un risultato teorico (se una relazione è dimensionalmente scorretta è certamente errata!). Questo rappresenta il primo utilizzo dell’analisi dimensionale.

Esempio 1:
Ci viene detto che la velocità v con la quale un sasso raggiunge il suolo se lasciato cadere da una quota h vale $v = h^2$. Cosa possiamo dire circa la correttezza di tale affermazione?

L'analisi dimensionale ci mostra subito che

$$[v] = LT^{-1}$$
$$[h^2] = [h]^2 = L^2$$

e pertanto $[v] \neq [h^2]$. La relazione che ci hanno comunicato non può essere una legge fisica in quanto le dimensioni dei membri dell'uguaglianza risultano non omogenee.

Approfittiamo del precedente esempio per introdurre alcune grandezze fisiche a noi note dalla vita quotidiana.
Sappiamo per esperienza comune che la *velocità* quantifica la variazione della posizione di un oggetto in un dato intervallo di tempo. Per tale ragione la velocità ha dimensioni fisiche di una lunghezza divisa per un tempo ($[v] = LT^{-1}$). Nel SI l'unità di misura della velocità è il m/s.
Un altro concetto a noi familiare è quello di *accelerazione* che esprime la variazione di velocità di un corpo in un dato intervallo di tempo. Per tale ragione le dimensioni fisiche dell'accelerazione sono quelle di una velocità divisa per un tempo. Di qui segue che $[a] = = [v]T^{-1} = LT^{-2}$. L'unità di misura dell'accelerazione nel SI è il m/s^2.
Le unità di misura della velocità e dell'accelerazione sono unità derivate da quelle fondamentali. Altre unità di misura derivate sono quelle di *superficie* e di *volume*.
La superficie di un quadrato è data dal quadrato del suo lato. Facile intuire che la superficie in generale ha dimensioni fisiche del quadrato di una lunghezza. Nel SI l'unità di misura di una superficie è il m^2. Un analogo ragionamento ci fa concludere che nel SI i volumi sono espressi in m^3.
Adesso diamo una prova di come l'analisi dimensionale possa avere capacità predittiva delle possibili relazioni fra grandezze fisiche.
Esempio 2:
Torniamo al nostro problema della caduta di un corpo e supponiamo di voler stabilire una relazione tra la velocità raggiunta al suolo v e la quota di caduta h. Sappiamo dall'esperienza che i corpi in prossimità della superficie terrestre cadono con accelerazione costante pari a g. Immaginiamo che tale grandezza giochi un ruolo nel fenomeno. Supponiamo che la relazione cercata sia della forma:

$$v = k\, g^a\, h^b$$

con $[k] = 1$, a e b esponenti da determinare. Dall'analisi dimensionale otteniamo:

$$[v] = [k\, g^a\, h^b] = [g^a][h^b] = [g]^a[h]^b = (LT^{-2})^a L^b = L^{a+b}T^{-2a}$$
$$[v] = LT^{-1}.$$

Dalla precedente otteniamo la seguente uguaglianza:

$$LT^{-1} = L^{a+b}T^{-2a}.$$

Affinché la precedente sia verificata occorre che siano rispettate le relazioni seguenti:

$$a + b = 1$$
$$2a = 1,$$

dalle quali otteniamo $a = b = 1/2$. Abbiamo quindi ottenuto che:

$$v = k\, g^{\frac{1}{2}}\, h^{\frac{1}{2}} = k\sqrt{gh}.$$

Esempio 3:
Un corpo di massa m è sospeso mediante una cordicella inestensibile di lunghezza ℓ al soffitto di una stanza. Un colpo di vento mette in oscillazione il corpo che ritorna ad intervalli di tempo uguali nella posizione iniziale. Detto $\mathcal{T}$ l'intervallo di tempo che il corpo impiega per tornare periodicamente nella posizione di partenza, stabilire la relazione che intercorre tra $\mathcal{T}$ ed ℓ facendo opportune ipotesi sulla forma funzionale di tale relazione ed utilizzando l'analisi dimensionale.
suggerimento: si ricordi che il moto avviene nel campo della gravità terrestre e che quindi il risultato dipenderà dall'accelerazione di gravità g.

Supponiamo che la relazione funzionale tra il periodo di oscillazione $\mathcal{T}$ e le altre grandezze fisiche in gioco sia del tipo $\mathcal{T} = k\, m^{\alpha}\ell^{\beta}g^{\gamma}$, dove k rappresenta una costante adimensionale. Ricordando che $[\mathcal{T}] = T,\ [k] = 1,\ [m] = M,\ [\ell] = L,\ [g] = LT^{-2}$, otteniamo l'equazione seguente:

$$[\mathcal{T}] = M^{\alpha}L^{\beta+\gamma}T^{-2\gamma},$$

che è dimensionalmente corretta soltanto quando la quantità al primo membro ha dimensioni fisiche identiche a quelle della quantità che compare al secondo membro. Questo avviene quando $\alpha = 0, \beta = 1/2,\ \gamma = -1/2$. Ne risulta la relazione funzionale seguente:

$$\mathcal{T} = k\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

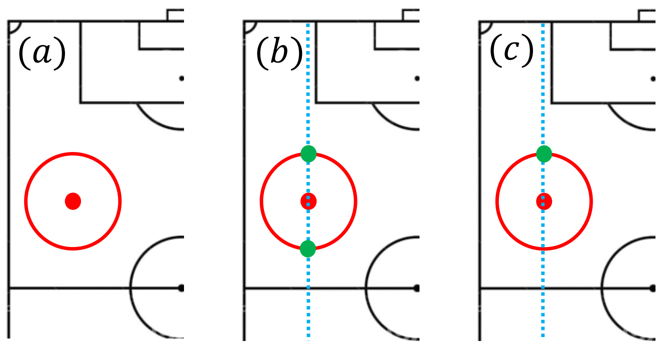
Si noti che abbiamo usato la relazione $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

4. Grandezze fisiche scalari e vettoriali: l'algebra dei vettori.

Una grandezza fisica che risulti univocamente specificabile mediante un numero seguito da un'opportuna unità di misura si dice **grandezza fisica scalare**. Sono ad esempio grandezze scalari la *massa* ed il *tempo*. Non tutte le grandezze fisiche sono scalari. Verifichiamo questa affermazione con un esempio.

Durante un partita di calcio l'allenatore di una delle squadre in campo urla ad un attaccante di **spostarsi di 2 m dalla sua posizione**. Le istruzioni dell'allenatore sono abbastanza accurate?

Il giocatore potrebbe obbedire all'allenatore occupando un punto qualsiasi della circonferenze di raggio 2 m centrata nella posizione di partenza.



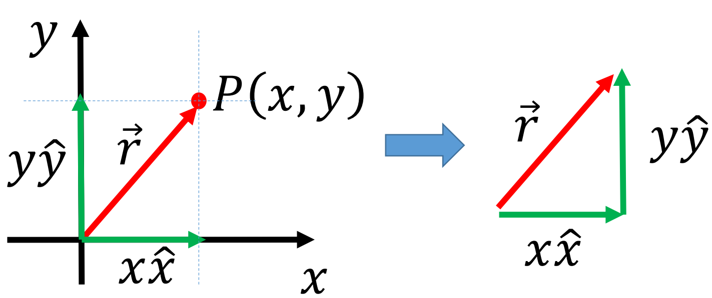
L'allenatore potrebbe precisare le proprie intenzioni aggiungendo che **lo spostamento deve avvenire lungo una direzione parallela alla linea di bordo campo**.

Con questa precisazione, il calciatore avrebbe ancora l'arbitrio di scegliere tra i due punti di intersezione tra la circonferenza prima descritta e la parallela alla linea di bordo campo passante per la posizione iniziale.

L'informazione dell'allenatore risulterebbe univoca precisando che **lo spostamento deve avvenire verso la porta avversaria**.

Per definire in modo univoco l'ordine dell'allenatore è stato necessario specificare **tre informazioni**. Lo spostamento (richiesto al calciatore) è una quantità di natura **vettoriale**. Un vettore è una quantità caratterizzata da *modulo, direzione e verso*. Nell'esempio, il modulo del **vettore spostamento** è pari a $2\ m$, la direzione è rappresentata dalla retta parallela alla linea di bordo campo, il verso è quello che indica la metà campo avversaria.

D'altra parte se lo spostamento è una quantità di natura vettoriale deve esserlo anche la *posizione* del calciatore in campo rispetto ad un certo sistema di riferimento. Quanto asserito si giustifica osservando che la posizione del calciatore può essere sempre vista come il vettore spostamento necessario a riposizionare il calciatore dall'origine degli assi sino alla sua attuale posizione. Queste osservazioni costituiscono la base per una rappresentazione delle quantità vettoriali come *ennuple,* ossia sequenze ordinate di n numeri del tipo $(x_1, \dots, x_n)$. Precisiamo questi concetti in due dimensioni in vista di una futura generalizzazione.



Sulla base di quanto detto, una volta assegnato un riferimento cartesiano, esiste una corrispondenza biunivoca tra il vettore posizione di un punto del piano e le coordinate di detto punto. Sulla base di detta corrispondenza il vettore in oggetto può essere rappresentato mediante la coppia ordinata costituita dalle coordinate del punto del piano di cui descrive la posizione. Diremo quindi che il vettore posizione $\vec{r}$ del punto P di coordinate (x, y) si scrive nella forma $\vec{r} = (x, y)$. La freccia al di sopra della lettera r indica che si tratta di una quantità vettoriale o sinteticamente di un vettore. Da un punto di vista grafico *la coda del vettore* è situata nell'origine degli assi, mentre *la punta* ha coordinate (x, y). Il vettore posizione può anche scriversi nella forma seguente:

$$\vec{r} = (x, y) = x(1,0) + y(0,1) = x\hat{x} + y\hat{y}$$

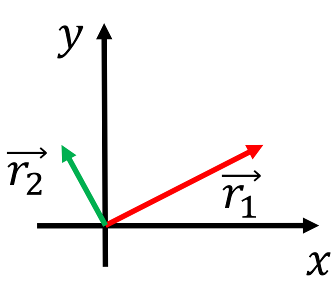
dove abbiamo introdotto i vettori speciali $\hat{x} = (1,0)$ e $\hat{y} = (0,1)$. Quanto vale la distanza dall'origine della punta del vettore? Applicando il teorema di Pitagora è facile verificare che detta distanza, che indichiamo con $|\vec{r}|$, vale

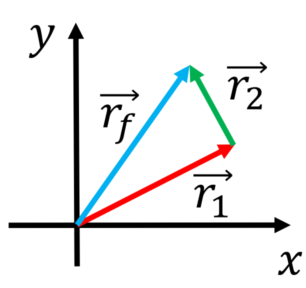
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La quantità appena derivata è il modulo del vettore posizione. Dalla definizione segue che il modulo di un vettore è una quantità non negativa. Un vettore che abbia modulo nullo deve necessariamente avere tutte le componenti nulle. Chiamiamo questa quantità *vettore nullo*. Possiamo pensare al vettore nullo come allo spostamento di lunghezza nulla effettuato a partire dall'origine degli assi. In base a questo è evidente che il vettore nullo è rappresentato da $\vec{o} = (0,0)$. Visto che punta e coda del vettore nullo coincidono, risulta indeterminata la direzione di tale vettore.

I vettori speciali prima introdotti $\hat{x}$ e $\hat{y}$ hanno la proprietà di avere *modulo pari ad uno* e per questa caratteristica vengono detti *versori*. In particolare $\hat{x}$ è il versore dell'asse x e ne eredita direzione e verso. Analogamente $\hat{y}$ è il versore dell'asse y.

La scrittura del vettore $\vec{r} = (x, y) = x(1,0) + y(0,1) = x\hat{x} + y\hat{y}$ può essere vista come una operazione di somma dei due vettori $x\hat{x}$ e $y\hat{y}$. Ciò significa che per giungere nella posizione (x, y) occorre spostarsi di x in direzione e verso indicati da $\hat{x}$ e quindi effettuare uno spostamento di y in direzione e verso indicati da $\hat{y}$. Chiaramente le operazioni possono essere scambiate senza alcun cambiamento nell'esito finale.





Siano adesso $\overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{r_2} = (x_2, y_2)$ due spostamenti di un punto a partire dall'origine. Lo spostamento risultante dall'effettuare i due movimenti in sequenza restituisce la posizione finale raggiunta $\overrightarrow{r_f}$. L'operazione che ne risulta è la definizione di somma di due vettori secondo le loro componenti:

$$\overrightarrow{r_f} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Quanto scritto in coordinate è la regola grafica del parallelogrammo per la somma di due vettori. Nel caso di n vettori, la regola di somma si generalizza come segue:

$$\vec{r_f} = \vec{r_1} + \cdots + \vec{r_n} = (x_1 + \cdots + x_n, y_1 + \cdots + y_n).$$

Chiaramente il vettore risultante non dipende dall'ordine degli addendi.

Un dato vettore $\vec{r} = (x, y)$ può essere moltiplicato per un numero c. Il risultato, $\vec{r_f} = c\vec{r} = (cx, cy)$, è un nuovo vettore di direzione immutata. Il verso di $\vec{r_f}$ è concorde (discorde) con il verso di $\vec{r}$ se $c > 0$ ($c < 0$). Inoltre è facile verificare che il modulo di $\vec{r_f}$ è $|c|$ volte il modulo del vettore iniziale, ossia $|\vec{r_f}| = |c||\vec{r}| = |c|\sqrt{x^2 + y^2}$.

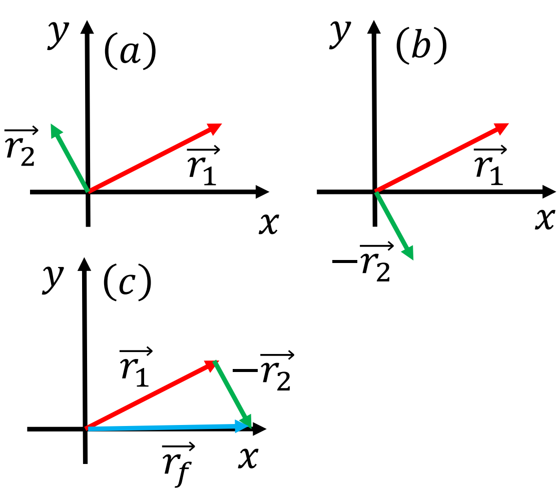
Dati i vettori $\vec{r_1} = (x_1, y_1)$ e $\vec{r_2} = (x_2, y_2)$ ha adesso senso costruire un vettore che sia combinazione lineare dei due:

$$\vec{r_f} = a\,\vec{r_1} + b\,\vec{r_2} = a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2)$$

con a e b due costanti. Scegliendo $a = 1$ e $b = -1$ otteniamo la definizione di differenza di due vettori:

$$\vec{r_f} = \vec{r_1} - \vec{r_2} = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

I due vettori sono coincidenti se la loro differenza è pari al vettore nullo, cosa che avviene se i vettori hanno componenti coincidenti. In forma equivalente, diremo che due vettori *della stessa specie* (ossia rappresentanti grandezze fisiche omogenee) sono coincidenti se hanno stesso modulo, direzione e verso.



L'operazione di differenza tra vettori può essere vista come una somma di vettori nella forma seguente:

$$\vec{r_f} = \vec{r_1} - \vec{r_2} = \vec{r_1} + (-\vec{r_2}).$$

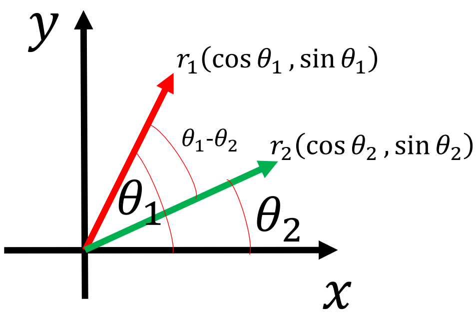
L'osservazione precedente è utile nell'applicare la regola del parallelogrammo.

Due vettori possono essere composti per ottenere uno scalare mediante l'operazione di *prodotto scalare*. Il prodotto scalare tra i vettori $\vec{r_1} = (x_1, y_1)$ e $\vec{r_2} = (x_2, y_2)$ si scrive nella forma:

$$\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = \vec{r_2} \cdot \vec{r_1} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Introducendo la notazione $|\vec{r_k}| = r_k$, possiamo scrivere $\vec{r_k} = r_k(\cos\theta_k, \sin\theta_k)$ con $k = 1, 2$. Gli angoli θ_k rappresentano gli angoli formati dalle direzioni dei vettori con l'asse x del riferimento cartesiano. Utilizzando tale notazione con la definizione di prodotto scalare appena data otteniamo:

$$\vec{r_1}\cdot\vec{r_2} = r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) = r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2) = r_1r_2\cos(\theta)$$



dove $\theta = \theta_1 - \theta_2$ è l'angolo formato tra le direzioni dei due vettori. Di qui segue che *due vettori sono ortogonali se hanno prodotto scalare nullo*. I versori introdotti inizialmente sono ortogonali e pertanto $\hat{x}\cdot\hat{y} = 0$. Si ha inoltre $\hat{x}\cdot\hat{x} = 1$ e $\hat{y}\cdot\hat{y} = 1$.

Consideriamo adesso una generica quantità vettoriale $\vec{a} = (a_x, a_y) = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$ non necessariamente associata ad una posizione nello spazio. Osserviamo che le componenti del vettore possono essere ottenute come segue:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\hat{x} = (a_x\hat{x} + a_y\hat{y})\cdot\hat{x} = a_x\hat{x}\cdot\hat{x} + a_y\hat{y}\cdot\hat{x} = a_x\\ \vec{a}\cdot\hat{y} = (a_x\hat{x} + a_y\hat{y})\cdot\hat{y} = a_x\hat{x}\cdot\hat{y} + a_y\hat{y}\cdot\hat{y} = a_y\end{aligned}.$$

Si ha inoltre la seguente relazione:

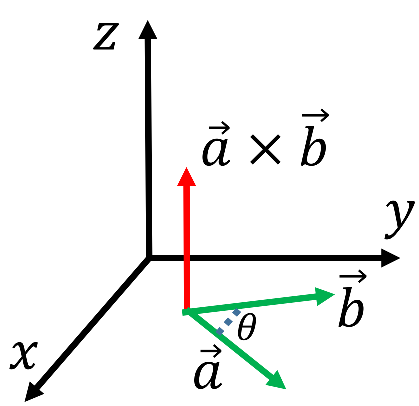
$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 = |\vec{a}|^2 \geq 0.$$

Quanto detto per i vettori a due componenti vale anche per vettori a tre componenti. Una quantità vettoriale a tre componenti si scrive nella forma:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$$

dove abbiamo introdotto i versori degli assi $\hat{x} = (1,0,0)$, $\hat{y} = (0,1,0)$ e $\hat{z} = (0,0,1)$.

Due vettori generici $\vec{a}$ e $\vec{b}$ possono essere composti per dare un terzo vettore $\vec{c}$ mediante l'operazione di prodotto vettoriale. Possiamo quindi scrivere:



$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}.$$

Il vettore $\vec{c}$ è perpendicolare al piano individuato dai due vettori dati ed ha modulo pari a

$$|\vec{c}| = ab\sin\theta$$

dove θ è il più piccolo fra gli angoli individuati dalle direzioni dei due vettori. Notiamo inoltre che la quantità $ab\sin\theta$ è pari all'area del parallelogrammo individuato dai due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Il verso del vettore $\vec{c}$ può essere determinato mediante la regola della mano destra. Il vettore $\vec{c}$ è nullo se i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno la stessa direzione ($\sin\theta = 0$). Disponendo delle componenti dei vettori è possibile ottenere il loro prodotto vettoriale in componenti mediante il seguente determinante formale:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{x} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{y} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$
$$= \hat{x}(a_y b_z - a_z b_y) - \hat{y}(a_x b_z - a_z b_x) + \hat{z}(a_x b_y - a_y b_x)$$
$$= \hat{x}(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{y}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{z}(a_x b_y - a_y b_x).$$

Allo stesso risultato si giunge utilizzando le seguenti proprietà:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$
$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}.$$
$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

Infatti abbiamo:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}) \times (b_x\hat{x} + b_y\hat{y} + b_z\hat{z})$$
$$= (a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}) \times b_x\hat{x} + (a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}) \times b_y\hat{y}$$
$$+ (a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}) \times b_z\hat{z} =$$
$$= (a_y b_x\hat{y} + a_z b_x\hat{z}) \times \hat{x} + (a_x b_y\hat{x} + a_z b_y\hat{z}) \times \hat{y} + (a_x b_z\hat{x} + a_y b_z\hat{y}) \times \hat{z}$$
$$= (a_y b_x\hat{y} \times \hat{x} + a_z b_x\hat{z} \times \hat{x}) + (a_x b_y\hat{x} \times \hat{y} + a_z b_y\hat{z} \times \hat{y})$$
$$+ (a_x b_z\hat{x} \times \hat{z} + a_y b_z\hat{y} \times \hat{z})$$
$$= (-a_y b_x\hat{z} + a_z b_x\hat{y}) + (a_x b_y\hat{z} - a_z b_y\hat{x}) + (-a_x b_z\hat{y} + a_y b_z\hat{x})$$
$$= \hat{x}(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{y}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{z}(a_x b_y - a_y b_x).$$

Il risultato precedente conferma l'equivalenza dei due metodi di calcolo.

5. Leggi fisiche in forma vettoriale.

Abbiamo imparato in precedenza che una legge fisica si presenta nella forma $A = B$ e che questa deve obbedire alla richiesta di omogeneità dimensionale dei due membri dell'equazione. Avendo introdotto quantità fisiche di natura scalare e vettoriale, occorre precisare che i due membri dell'equazione devono anche avere la stessa natura scalare o vettoriale. Il caso scalare è stato già trattato in precedenza. Qualora le quantità siano di natura vettoriale l'eguaglianza si scrive nella forma:

$$\vec{A} = \vec{B},$$

che equivale a imporre l'eguaglianza componente per componente nella forma:

$$\begin{gathered} A_x = B_x \\ A_y = B_y. \\ A_z = B_z \end{gathered}$$