1. Processi d'urto

Un urto è un processo nel quale due particelle interagiscono mediante *forze impulsive* di grande intensità e brevissima durata. Nel caso dell'urto tra biglie, tali forze impulsive agiscono fintanto che le biglie sono a contatto. In questo brevissimo intervallo di tempo le biglie sono soggette a una coppia di forze azione-reazione in accordo con il terzo principio della dinamica. Le forze di reazione presenti nella fase d'urto dipendono dalle deformazioni, spesso impercettibili, dei corpi in interazione.

Prima di affrontare lo studio degli urti è utile premettere un importante teorema, noto come *teorema dell'impulso*.

Supponiamo che un corpo di massa m sia soggetto a una forza $\vec{F}(t)$ dipendente dal tempo. La forma differenziale del secondo principio della dinamica ci consente di scrivere:

$$m d\vec{v} = \vec{F}\,(t) dt.$$

Integrando la precedente si ottiene:

$$\int_{\vec{v}(t_1)}^{\vec{v}(t_2)} m d\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,(t) dt$$

$$\rightarrow m\vec{v}(t_2) - m\vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,(t) dt.$$

Il teorema si enuncia dicendo che *l'impulso della forza* agente su un punto materiale per un assegnato intervallo temporale è pari alla *variazione della quantità di moto* che il corpo sperimenta nel medesimo intervallo. Nell'enunciare il teorema abbiamo definito l'impulso della forza $\vec{F}(t)$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,(t) dt$$

e la quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$. Alla luce di queste definizioni possiamo anche scrivere:

$$\overrightarrow{p_f} - \overrightarrow{p_\iota} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,(t) dt.$$

L'impulso può essere espresso in termini della forza media agente nell'intervallo di tempo di interesse secondo la relazione:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,(t) dt = \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,(t) dt = \left(\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,(t) dt \right) (t_2 - t_1) = \overrightarrow{F_A} (t_2 - t_1),$$

dove $\overrightarrow{F_A}$ rappresenta la media temporale della forza nell'intervallo considerato.

Descriviamo adesso l'urto unidimensionale di due particelle di massa m_1 e m_2. In particolare scriviamo il secondo principio della dinamica per le due particelle:

$$m_1\ddot{x}_1 = R_1(t)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = R_2(t)$$

con $R_1(t)$ e $R_2(t)$ due forze impulsive dovute all'interazione di contatto tra i corpi. Tali forze sono diverse da zero fintanto che i corpi sono a contatto, cosa che si verifica nell'intervallo $t_2 - t_1$. Il terzo principio della dinamica inoltre impone che risulti $R_1(t) + R_2(t) = 0$. Applicando il teorema dell'impulso alla prima e alla seconda particella nell'intervallo temporale nel quale avviene l'urto otteniamo:

$$m_1 v_1^f - m_1 v_1^i = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)dt.$$
$$m_2 v_2^f - m_2 v_2^i = \int_{t_1}^{t_2} R_2(t)dt.$$

Sommando membro a membro le precedenti otteniamo la relazione:

$$m_1 v_1^f - m_1 v_1^i + m_2 v_2^f - m_2 v_2^i = \int_{t_1}^{t_2} \big(R_1(t) + R_2(t)\big)dt = 0,$$

la quale implica la seguente legge di conservazione della quantità di moto totale:

$$m_1 v_1^f + m_2 v_2^f = m_1 v_1^i + m_2 v_2^i.$$

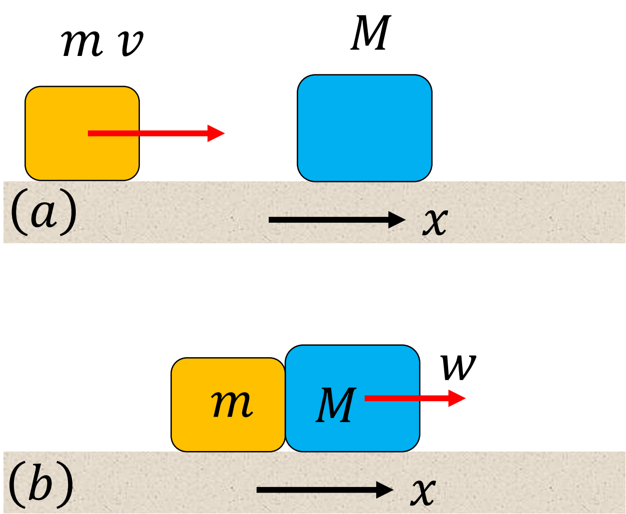
Questa relazione lega le quantità di moto iniziali e finali delle particelle coinvolte nell'urto. Essendo presenti due incognite, ossia le v_k^f, ed essendo ignote le forze $R_k(t)$ coinvolte nell'urto, occorre una seconda equazione per individuare univocamente le quantità di moto finali.
A tal riguardo risulta comodo classificare gli urti in *elastici ed anelastici*. In un urto elastico è per definizione conservata l'energia meccanica. In particolare, l'energia cinetica totale posseduta dai corpi prima dell'urto è completamente trasformata in energia potenziale (di deformazione) nella fase d'urto. L'energia potenziale accumulata è quindi rilasciata integralmente e riconvertita in energia cinetica. Vale quindi la relazione:

$$\frac{1}{2}m_1\left(v_1^i\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(v_2^i\right)^2 = \frac{1}{2}m_1\left(v_1^f\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(v_2^f\right)^2.$$

Gli urti per i quali non vale la precedente legge di conservazione si dicono anelastici.
Una tipologia d'urto particolarmente semplice si realizza quando le particelle restano unite dopo l'urto, situazione che viene definita *urto completamente anelastico*.

Un semplice esempio di urto completamente anelastico si realizza quando una particella proiettile di massa m e velocità v impatta un bersaglio fermo di massa M. Dopo l'urto, il proiettile aderisce al bersaglio e i due corpi procedono insieme con la medesima velocità w. La velocità finale w può essere calcolata a partire dalla conservazione della quantità di moto totale. Questa legge di conservazione si scrive nella forma:

$$mv = mw + Mw.$$



Dalla precedente si ha immediatamente:

$$w = \frac{m\,v}{m+M},$$

con $w < v$. Inoltre l'energia cinetica iniziale vale:

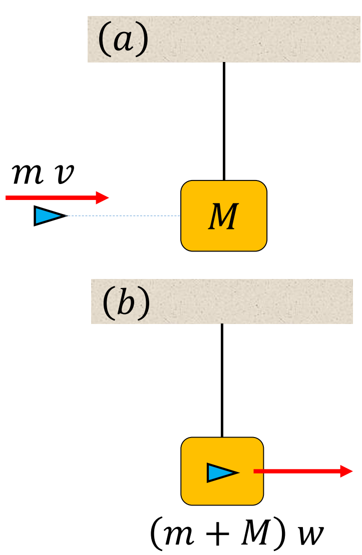
$$E_i = \frac{1}{2}mv^2,$$

mentre quella finale prende la forma:

$$E_f = \frac{1}{2}(m+M)w^2 = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m\,v}{m+M}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{m}{m+M}\right) = E_i\left(\frac{m}{m+M}\right) < E_i,$$

dalla quale risulta evidente che nell'urto viene persa una certa quantità di energia cinetica.

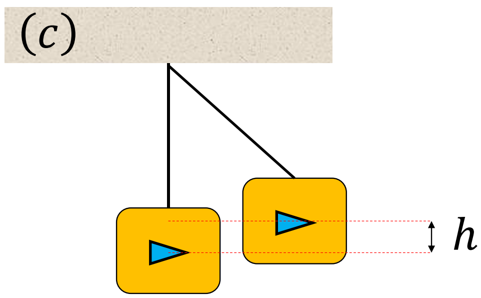
Esempio: il pendolo balistico



Per misurare la velocità v di un proiettile è possibile ricorrere al seguente esperimento. Si spara un proiettile di massa m contro un bersaglio di massa $M \gg m$. Dopo l'urto completamente anelastico, il bersaglio, sospeso ad un filo, raggiunge la quota massima h. Dalla misura di h, note le masse, è possibile ricostruire la velocità di impatto del proiettile.

Dalla conservazione della quantità di moto nell'urto anelastico possiamo scrivere:

$$mv = (m+M)w \rightarrow w = \frac{m\,v}{m+M},$$



dove w è la velocità finale del sistema bersaglio-proiettile, mentre v è la velocità di impatto del proiettile da determinare. Inoltre dalla conservazione dell'energia meccanica totale dopo l'urto si ha la relazione.

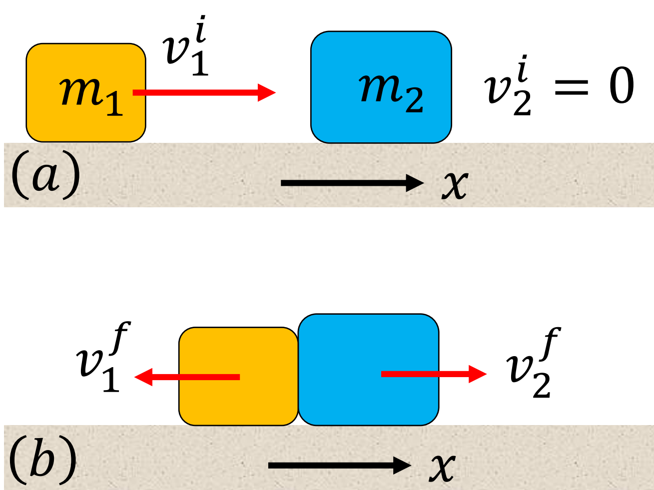
$$\frac{1}{2}(m+M)w^2 = (m+M)gh \rightarrow w = \sqrt{2gh}.$$

Dalla precedente si ottiene il risultato finale:

$$v = \left(\frac{m+M}{m}\right)w = \left(\frac{m+M}{m}\right)\sqrt{2gh} \approx \frac{M}{m}\sqrt{2gh}.$$

2. Urto elastico contro un bersaglio fermo

Vogliamo studiare un urto elastico tra un proiettile e un bersaglio fermo. In questa situazione le equazioni generali che definiscono la dinamica dell'urto elastico assumono la forma semplificata seguente:



$$m_1 v_1^i = m_1 v_1^f + m_2 v_2^f$$
$$\frac{1}{2}m_1\left(v_1^i\right)^2 = \frac{1}{2}m_1\left(v_1^f\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(v_2^f\right)^2.$$

Osserviamo che le precedenti possono essere manipolate per ottenere le due equazioni equivalenti:

$$m_2 v_2^f = m_1\left(v_1^i - v_1^f\right)$$
$$m_2\left(v_2^f\right)^2 = m_1\left(\left(v_1^i\right)^2 - \left(v_1^f\right)^2\right).$$

Il secondo membro della seconda equazione può essere scritto nella forma:

$$m_1\left(\left(v_1^i\right)^2 - \left(v_1^f\right)^2\right) = m_1\left(v_1^i - v_1^f\right)\left(v_1^i + v_1^f\right) = m_2 v_2^f\left(v_1^i + v_1^f\right),$$

cosa che implica la relazione:

$$m_2\left(v_2^f\right)^2 = m_2 v_2^f\left(v_1^i + v_1^f\right)$$
$$\rightarrow v_2^f = v_1^i + v_1^f.$$

Utilizzando la precedente nella prima equazione otteniamo:

$$m_2 v_2^f = m_1\left(v_1^i - v_1^f\right) \rightarrow m_2\left(v_1^i + v_1^f\right) = m_1\left(v_1^i - v_1^f\right)$$

$$\rightarrow v_1^f = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1^i.$$

Inoltre abbiamo la seguente catena di relazioni:

$$v_2^f = v_1^i + v_1^f \rightarrow v_2^f = v_1^i + \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1^i$$

$$\rightarrow v_2^f = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1^i.$$

Le relazioni precedenti forniscono le velocità finali in funzione della velocità iniziale del proiettile. Analizziamo tre casi rilevanti.

Caso $m_1 = m_2$. In questa circostanza, a partire dalle relazioni trovate, otteniamo:

$$v_1^f = 0$$

$$v_2^f = v_1^i.$$

Pertanto il proiettile si ferma dopo l'urto, mentre il bersaglio prosegue con la stessa velocità inizialmente posseduta dal proiettile.

Caso $m_2 \gg m_1$ *(bersaglio massiccio)*. Sotto tali ipotesi possiamo scrivere le seguenti relazioni approssimate:

$$\begin{aligned} v_1^f &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1^i \approx -v_1^i \\ v_2^f &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1^i \approx \frac{2m_1}{m_2} v_1^i \end{aligned}.$$

Dalle precedenti abbiamo che il proiettile viene riflesso dal bersaglio che avanza a velocità trascurabile.

Caso $m_1 \gg m_2$ *(proiettile massiccio)*. Sotto tali ipotesi possiamo scrivere le seguenti relazioni approssimate:

$$\begin{aligned} v_1^f &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1^i \approx v_1^i \\ v_2^f &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1^i \approx 2v_1^i \end{aligned},$$

dalle quali si vede che il proiettile procede con velocità pressoché inalterata, mentre il bersaglio avanza con velocità doppia.

Le considerazioni fin qui esposte mettono in evidenza il ruolo della quantità di moto nei processi d'urto. Le sole velocità delle particelle risultano infatti insufficienti a definire correttamente la dinamica dell'urto.

Data la centralità del concetto di quantità di moto è possibile rivedere il secondo principio della dinamica e questa revisione porta all'espressione:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

con $\vec{p} = m\vec{v}$.

3. Urto elastico contro un bersaglio mobile

Facciamo un cenno alla soluzione del problema generale in una dimensione. Le equazioni che regolano la dinamica dell'urto sono le seguenti:

$$m_1 v_1^i + m_2 v_2^i = m_1 v_1^f + m_2 v_2^f$$

$$\frac{1}{2} m_1 \left(v_1^i\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(v_2^i\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(v_1^f\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(v_2^f\right)^2.$$

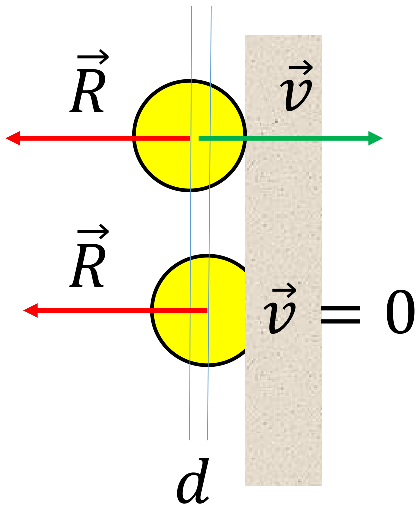
Notiamo che queste equazioni risultano inalterate se trasformiamo gli indici secondo la regola $1 \rightarrow 2$ e $2 \rightarrow 1$, visto che l'etichetta attribuita alle variabili non può alterare il fenomeno descritto. Questa proprietà deve valere anche per la soluzione. Pertanto è lecito attendersi che, una volta individuata un'espressione per v_1^f (funzione delle masse e delle velocità iniziali), è possibile individuare la corrispondente espressione per v_2^f semplicemente per scambio di indici.
La soluzione delle equazioni d'urto porta alla seguente soluzione:

$$v_1^f = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1^i + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2^i$$
$$v_2^f = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1^i + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_2^i,$$

che conferma le nostre aspettative circa la simmetria della soluzione per scambio di indici.

Esercizio 1

Una pallina da tennis ($m = 50\ g$ e raggio $6{,}7\ cm$) urta un muro con velocità $v = 30\ m/s$. Durante l'urto la reazione vincolare esercitata dalla parete produce una decelerazione della pallina che si arresta per un istante prima di invertire il moto. Durante l'interazione con la parete la pallina subisce una deformazione pari a $d = 0{,}50\ cm$. Determinare l'intensità della reazione vincolare supponendola costante.



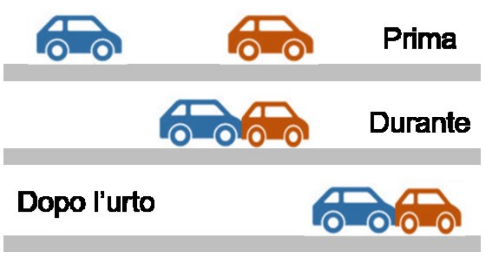
Utilizzando il teorema dell'energia cinetica possiamo scrivere:

$$-R\,d = -\frac{1}{2}mv^2$$

$$\rightarrow R = \frac{mv^2}{2d} \rightarrow 4{,}5 \cdot 10^3 N.$$

Queste stime mostrano l'ordine di grandezza dell'intensità delle forze che operano durante gli urti.

Esercizio 2



Un guidatore distratto ($m_G = 70{,}0\ kg$) perde il controllo della sua automobile ($m_A = 860\ kg$) e urta una seconda auto di pari massa in sosta a bordo strada. Dopo l'urto completamente anelastico le due auto rimangono incastrate e procedono unite fino a fermarsi. Gli agenti di polizia rilevano una traccia lunga $d = 6{,}00\ m$, corrispondente allo spazio di arresto. Dalle condizioni della strada viene desunto un coefficiente di attrito dinamico pari a $\mu_K = 0{,}800$. Trascurando l'attrito con l'aria, determinare:

a) Il lavoro compiuto dalle forze d'attrito per arrestare i due veicoli.
b) L'energia cinetica posseduta appena dopo l'urto dal sistema costituito dai due veicoli (guidatore incluso).
c) La velocità iniziale del veicolo che ha originato l'incidente espressa in km/h.
d) Il tempo di arresto dei due veicoli a partire dall'istante dell'urto.
e) Il modulo, la direzione ed il verso della forza apparente agente sul guidatore dopo l'urto.

Il lavoro compiuto dalle forze di attrito è pari a

$$L_a = -\mu_K g(m_G + 2m_A)d,$$

che numericamente dà $L_a = -84{,}3\ kJ$. Dal teorema dell'energia cinetica sappiamo che

$$L_a = -\frac{1}{2}(m_G + 2m_A)V^2,$$

essendo nulla l'energia cinetica finale. Pertanto l'energia cinetica cercata è pari a $-L_a = 84.3\ kJ$.

Nell'urto anelastico è conservata la quantità di moto totale prima e dopo l'urto. Detto w il modulo della velocità iniziale dell'auto che origina l'incidente e V il modulo della velocità del sistema costituito dalle due auto appena dopo l'urto, è possibile scrivere la seguente relazione:

$$(m_G + m_A)w = (m_G + 2m_A)V.$$

Dalla precedente segue:

$$w = \frac{m_G + 2m_A}{m_G + m_A}V$$

D'altra parte sappiamo dai precedenti risultati che $V = \sqrt{2\mu_K g d}$. Numericamente otteniamo $w = 67{,}2\ km/h$.

Il moto dopo l'urto è uniformemente accelerato con proiezione dell'accelerazione lungo la direzione di moto pari a $a = -\mu_K g$. La velocità ad un tempo generico si scrive come $v(t) = v(0) - \mu_K g t$. Il tempo di arresto si ottiene dalla condizione $v(t^*) = 0$ con $v(0) = V$. Ne segue la relazione:

$$t^* = \frac{V}{\mu_K g}$$

Numericamente otteniamo $t^* = 1{,}24\ s$.

Dopo l'urto, il guidatore si trova in un sistema di riferimento non inerziale che decelera con proiezione dell'accelerazione lungo la direzione di moto pari a $a = -\mu_K g$. La forza apparente che il guidatore sperimenta vale $\vec{F}_A = \hat{x}(\mu_K m_G g)$, dove $\hat{x}$ indica il versore della direzione di moto. Numericamente otteniamo $|\vec{F}_A| = 549\ N$.