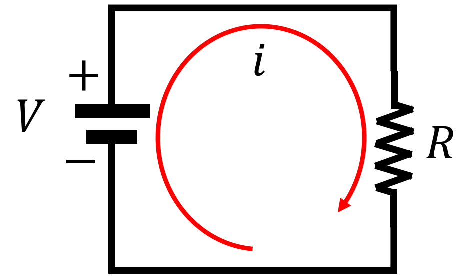
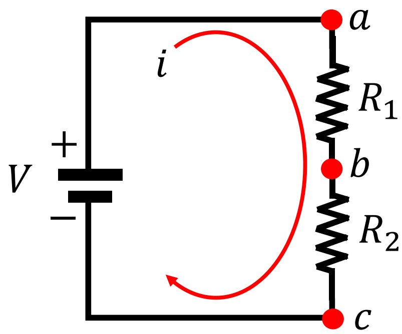
## 1. Semplici circuiti puramente resistivi




Il circuito resistivo più semplice è mostrato in figura. Un generatore di tensione fornisce una differenza di potenziale pari a $V$ che si trasmette inalterata ai capi del resistore di resistenza elettrica $R$. Dalla legge di Ohm si ottiene la corrente circolante pari a

$$i = \frac{V}{R}.$$

*Collegamento di resistori in serie*

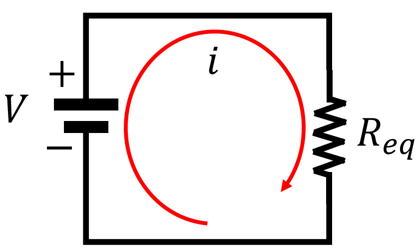



Nel circuito considerato circola una corrente pari ad $i$ che attraversa tutti i resistori. Dalla legge di Ohm possiamo scrivere le seguenti relazioni:

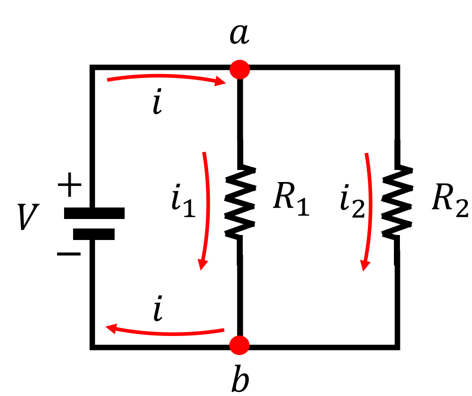
$$\begin{cases} V_a - V_b = iR_1 \\ V_b - V_c = iR_2 \\ V_a - V_c = V \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_a - V_c = i(R_1 + R_2) \\ V_a - V_c = V \end{cases}.$$

Di qui segue che la corrente circolante vale:

$$i = \frac{V}{R_1 + R_2}.$$



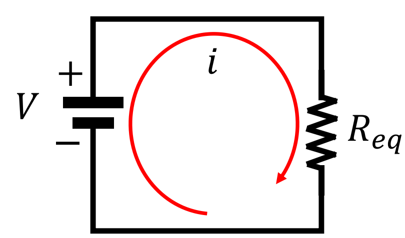

Esiste quindi un circuito resistivo equivalente nel quale un unico resistore avente resistenza elettrica $R_{eq} = R_1 + R_2$ è alimentato da un generatore di tensione. Il circuito è mostrato in figura. Nel caso del collegamento in serie dei resistori $R_1, \dots, R_N$ la resistenza equivalente vale $R_{eq} = R_1 + \cdots + R_N$. Nota la resistenza equivalente è possibile calcolare la corrente circolante dalla relazione:




$$i = \frac{V}{R_{eq}}.$$

*Collegamento di resistori in parallelo*

Consideriamo il collegamento di due resistori in parallelo come mostrato in figura. La tensione ai capi dei resistori coincide con quella erogata dal generatore in virtù dell'idealità dei collegamenti. Da questa considerazione segue che $V_a - V_b = V$. Dalla legge di Ohm abbiamo:



$$i_1 = \frac{V}{R_1}$$
$$i_2 = \frac{V}{R_2}.$$

Inoltre dalla legge di Kirchhoff delle correnti abbiamo la relazione $i = i_1 + i_2$. Da questa e dalle precedenti segue:

$$i = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \equiv \frac{V}{R_{eq}}.$$

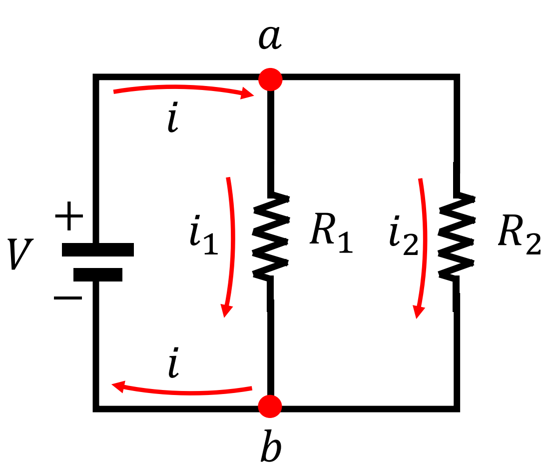
La resistenza equivalente del circuito è definita dalla relazione:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

che è subito generalizzabile al caso del collegamento in parallelo di $N$ resistori. In quest'ultimo caso si avrebbe:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_N}.$$

## 2. Il partitore di corrente




Il collegamento in parallelo di resistori realizza un semplice dispositivo che va sotto il nome di *partitore di corrente*. Analizziamo le sue proprietà.

Consideriamo il circuito in figura che contiene due resistori in parallelo. Ad essi è applicata la differenza di potenziale $V_A - V_B$. Dalla conservazione della corrente possiamo scrivere una relazione che lega le correnti di ramo nella forma $i = i_1 + i_2$.

Dalla legge di Ohm, tenuto conto che la tensione ai capi dei resistori è identica, otteniamo le due relazioni $V_A - V_B = i_1 R_1$ e $V_A - V_B = i_2 R_2$. Da questo discende:

$$i = i_1 + i_2 = (V_A - V_B)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V_A - V_B}{R_{eq}} \rightarrow V_A - V_B = iR_{eq}. \qquad (1)$$

Inoltre sappiamo che

$$i_k = \frac{V_A - V_B}{R_k} = \frac{iR_{eq}}{R_k} = \frac{R_1 R_2}{R_k(R_1+R_2)}\, i. \tag{2}$$

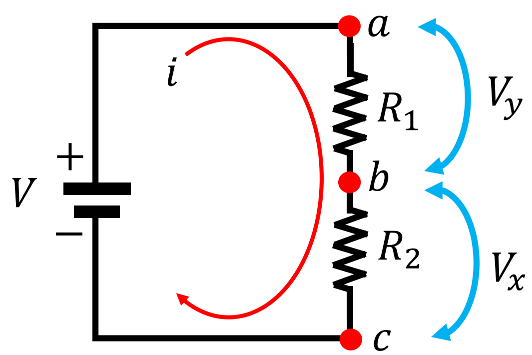
Dalla (2) segue immediatamente:

$$i_1 = \frac{R_2}{(R_1+R_2)}\, i, \tag{3a}$$

$$i_2 = \frac{R_1}{(R_1+R_2)}\, i. \tag{3b}$$

Le relazioni (3a-b) mostrano che la corrente si ripartisce in modo che il ramo meno resistivo sia attraversato dalla corrente di ramo maggiore. Ossia *la corrente fluisce preferenzialmente attraverso il percorso meno resistivo*.

## 3. **Il partitore di tensione**




Il collegamento in serie di resistori realizza un *partitore di tensione*. Risolviamo quindi il circuito mostrato di seguito. Esso contiene due resistori in serie. Ai capi del resistore $R_1$ rileviamo la caduta di tensione $V_y$, mentre ai capi di $R_2$ abbiamo $V_x$, essendo incognite le due cadute di tensione. I resistori sono attraversati dalla medesima corrente $i$. Possiamo quindi scrivere:

$$V_y = V_a - V_b = iR_1 \tag{4a}$$

$$V_x = V_b - V_c = iR_2 \tag{4b}$$

$$V_x + V_y = V_a - V_c = V. \tag{4c}$$

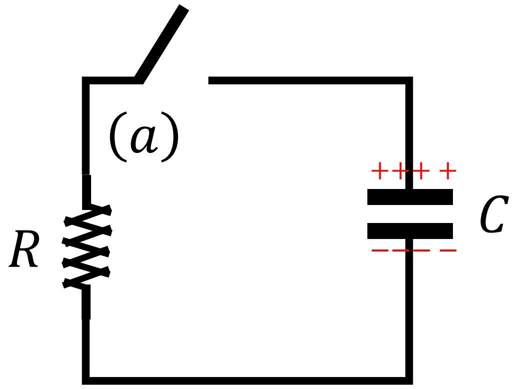
La soluzione del sistema di equazioni definito dalle (4a-b), insieme alla (4c), ci consente di ottenere le relazioni caratteristiche del *partitore di tensione*:

$$V_x = iR_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} V \tag{5a}$$

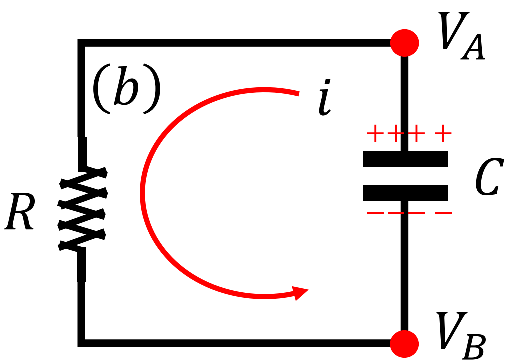
$$V_y = iR_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} V, \tag{5b}$$

dove abbiamo usato la relazione $i = \frac{V}{R_{eq}}$ e $R_{eq} = R_1 + R_2$. Pertanto la tensione fornita dal generatore è partizionata come mostrato dalle (5a-b). La caduta di tensione maggiore si osserva ai capi del resistore di resistenza maggiore.

## 4. Primo incontro con un circuito RC




Supponiamo di aver caricato mediante un generatore il condensatore in figura. La carica accumulata sulle armature del condensatore è $q = C(V_A - V_B)$. Immaginiamo di chiudere il circuito sulla resistenza $R$. Una volta chiuso l'interruttore si instaura una corrente $i$ che tende a riportare alla neutralità elettrica il sistema. Qui è utile ricordare che lo stato elettrizzato della materia è da considerarsi uno stato eccitato che richiede energia per essere instaurato. Di qui la tendenza del sistema a riportarsi allo stato fondamentale (neutro).




Applichiamo la legge di Ohm ai capi del resistore dalla quale segue che

$$V_A - V_B = iR. \tag{6}$$

D'altra parte sappiamo dalla fisica del condensatore che vale la relazione

$$V_A - V_B = q/C.$$

Combinando le precedenti otteniamo la relazione

$$iR = q/C.$$

A questo punto vorremmo trovare una relazione tra la carica accumulata sulle armature del condensatore a un generico istante di tempo e la corrente che fluisce attraverso il resistore. E' facile convincersi del fatto che $i \neq \frac{dq}{dt}$. Il seguente argomento chiarisce la precedente affermazione.

Prima che il circuito venga chiuso sul resistore il sistema è dotato di una energia elettrostatica pari a

$$U = \frac{q^2}{2C}\,. \tag{7}$$

Come abbiamo visto in precedenza questa energia è immagazzinata nel campo elettrico presente nel volume circoscritto dalle armature del condensatore. Dal momento in cui il circuito viene chiuso l'energia (7) inizia ad essere dissipata dal resistore. La variazione di energia (7) nel tempo rappresenta proprio la potenza dissipata dal resistore. In equazioni questo bilancio energetico si scrive nella forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = -Vi, \tag{8}$$

dove abbiamo indicato con $V = V_A - V_B$. Effettuando la derivata temporale nella (8) otteniamo quanto segue:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{q}{C}\frac{d}{dt}q = V\frac{d}{dt}q. \tag{9}$$

Confrontando la (8) con la (9) otteniamo immediatamente la relazione cercata nella forma

$$i = -\frac{d}{dt}q. \tag{10}$$

Notiamo esplicitamente che la (10) non contraddice la nostra definizione di corrente in quanto $q$ rappresenta la carica accumulata sulle armature del condensatore. La corrente $i$ è alimentata a spese di tale carica, che diminuisce nel tempo.

Dalla (10) otteniamo la seguente relazione:

$$iR = \frac{q}{C} \rightarrow -R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{c}. \tag{11}$$

L'ultima equazione della (11) può essere riscritta nella forma:

$$\frac{d}{dt}q + \frac{q}{\tau} = 0, \tag{12}$$

dove è stato possibile individuare un tempo caratteristico del sistema (analisi dimensionale) pari a $\tau = RC$. La (12) è una equazione differenziale lineare del primo ordine che deve essere risolta con la condizione iniziale

$$q(t = 0) = Q,$$

con $Q$ la carica inizialmente presente sulle armature del condensatore.

Cerchiamo una funzione $q(t)$ la cui derivata temporale sia proporzionale alla funzione stessa. Sappiamo che la funzione esponenziale ha questa proprietà e supponiamo che la soluzione possa essere scritta nella forma

$$q(t) = A\ exp(\gamma t),$$

dove le costanti arbitrarie $A$ e $\gamma$ vanno determinate. Sostituendo la soluzione di prova nella (12) si ha $\gamma = -1/\tau$. Inoltre imponendo la condizione iniziale abbiamo $A = Q$. Otteniamo quindi la soluzione del problema nella forma:

$$q(t) = Qexp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \tag{13}$$

Notiamo che $q(t)$ tende a zero tanto più rapidamente quanto più la costante di tempo del circuito è piccola. Nel limite in cui $\tau \to 0$, cosa che accadrebbe nel limite di collegamento ideale (con resistenza nulla), il processo di scarica del condensatore è istantaneo. Nel limite opposto ($\tau \to \infty$), che ad esempio potrebbe essere un modello semplificato di batteria ricaricabile, il processo di scarica dura un tempo infinito. Dalla (10), tenendo conto della (13), è possibile ricavare la corrente che circola nel circuito:

$$i = -\frac{d}{dt} q = \frac{Q}{\tau} exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \tag{14}$$

La (14) mostra il carattere transiente (non stazionario) della corrente che si instaura nel circuito. Essa infatti si esaurisce nel momento in cui le armature del condensatore si sono neutralizzate. La tensione ai capi del condensatore vale:

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C} exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \tag{15}$$

Quanto vale l'energia totale dissipata nel circuito? Facile convincersi del fatto che l'energia totale dissipata nel sistema deve essere data dalla relazione:

$$E = \int_0^{+\infty} dt\ (V_A - V_B) i = \frac{Q^2}{C\tau} \int_0^{+\infty} dt\ exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right). \tag{16}$$

Valutiamo l'integrale:

$$\int_0^{+\infty} dt\ exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) = -\left[\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^{+\infty} = \frac{\tau}{2}. \tag{17}$$

Usando la (17) nella (16) otteniamo quanto era lecito prevedere sin da principio:

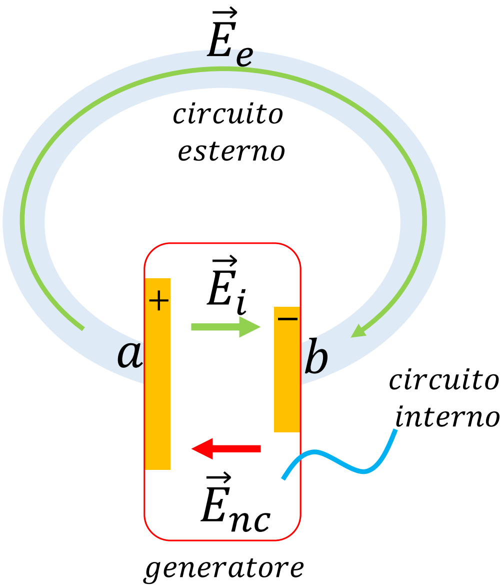
$$E = \frac{Q^2}{2C}. \tag{18}$$

L'energia dissipata coincide con quella inizialmente immagazzinata sotto forma di energia elettrostatica tra le armature del condensatore.

## 5. **Generatore ideale di forza elettromotrice**

Fin qui abbiamo introdotto alcuni elementi della teoria dei circuiti. Vogliamo adesso approfondire alcuni aspetti legati alla fisica dei *generatori di tensione*.

Abbiamo accennato al fatto che una corrente elettrica è originata da un campo elettrico. D'altra parte, il campo elettrico, di natura conservativa, non può sostenere una corrente in un circuito in quanto il lavoro che esso compie su un percorso chiuso è nullo e vale la relazione




$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0.$$

Per sostenere una corrente occorre una entità fisica che compia lavoro su un percorso chiuso (circuito). Una tale entità è necessariamente di natura non conservativa. Pertanto il generatore deve ospitare al suo interno processi di natura elettrochimica in grado di originare forze di natura non conservativa.

Esaminiamo quindi il circuito in figura che mostra sia la regione interna che la regione esterna ad un generatore di tensione. Il circuito è formato da un generatore i cui poli sono collegati da un conduttore. Il campo elettrostatico prodotto dagli accumuli di carica presenti sui poli del generatore è diretto dal polo positivo verso quello negativo sia nella regione interna che in quella esterna al generatore. Tale campo è definito nel modo seguente:

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_e \; circuito\ esterno \\ \vec{E}_i \; circuito\ interno \end{cases}.$$

D'altra parte il campo in oggetto è conservativo essendo di natura elettrostatica e quindi vale la relazione:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \left(\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}\right)_{esterno} + \left(\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l}\right)_{interno} = \int_a^b \vec{E}_e\cdot d\vec{l} + \int_b^a \vec{E}_i\cdot d\vec{l} = 0.$$

Nella regione interna al generatore, il passaggio di una carica positiva dal polo negativo al polo positivo non può avvenire sotto l'azione del campo $\vec{E}_i$, che infatti indurrebbe un moto opposto. Deve quindi esistere l'ulteriore campo $\vec{E}_{nc}$ interno al generatore, detto *campo elettromotore*, in modo che si abbia:

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_e & circuito\ esterno \\ \vec{E}_i + \vec{E}_{nc} & circuito\ interno \end{cases}.$$

La cosiddetta *forza elettromotrice* $\mathcal{E}$ associata al campo $\vec{E}$ vale:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \left(\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}\right)_{esterno} + \left(\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l}\right)_{interno} = \int_a^b \vec{E}_e\cdot d\vec{l} + \int_b^a \left(\vec{E}_i + \vec{E}_{nc}\right)\cdot d\vec{l}$$
$$= \int_b^a \vec{E}_{nc}\cdot d\vec{l} = \mathcal{E}.$$

Nella derivazione abbiamo esplicitamente usato la relazione:

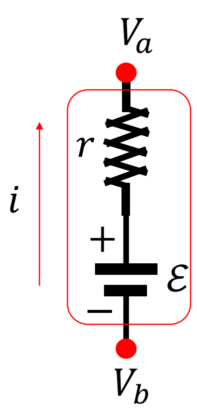
$$\int_a^b \vec{E}_e \cdot d\vec{l} + \int_b^a \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = 0.$$

Quando il generatore è scollegato dal circuito esterno al suo interno si stabilisce un equilibrio tra $\vec{E}_i$ e $\vec{E}_{nc}$ e si ha:

$$\vec{E}_i + \vec{E}_{nc} = 0.$$

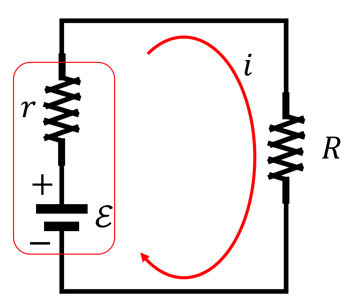
L'instaurarsi di un equilibrio dipende da due opposte tendenze. Mentre il campo $\vec{E}_{nc}$ tende a produrre accumuli di carica crescenti sui poli del generatore, il campo elettrostatico $\vec{E}_i$ da questi generato tende ad ostacolare questo processo. Ad un certo punto si raggiunge una situazione di equilibrio nella quale i due campi si compensano. In questa condizione la carica accumulata sui poli del generatore non varia ulteriormente. Queste considerazioni ci consentono di effettuare una valutazione della forza elettromotrice a *circuito aperto*, cioè in assenza di un collegamento tra i poli del generatore. Utilizzando la definizione possiamo scrivere quanto segue:

$$\mathcal{E} = \int_b^a \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} = -\int_b^a \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -(V_b - V_a) = V_a - V_b.$$




E' qui importante precisare che $\vec{E}_{nc}$ è un campo non conservativo e non ammette una funzione potenziale. Da questo segue che la forza elettromotrice a circuito aperto eguaglia la differenza di potenziale misurata ai capi del generatore. Un generatore ideale, come quello che stiamo descrivendo, quando collegato a un circuito esterno genera una corrente che non trova impedimento al suo passaggio nella regione interna al generatore. Un generatore reale di forza elettromotrice è dotato di una sua resistenza interna. Un generatore reale può essere descritto dal collegamento in serie di un generatore ideale e di un resistore che ne rappresenta la resistenza interna. La differenza di potenziale ai capi di un generatore di forza elettromotrice reale attraversato da una corrente $i$ vale:

$$V_a - V_b = \mathcal{E} - ir.$$




dove $r$ rappresenta la resistenza interna, mentre $\mathcal{E}$ è la forza elettromotrice misurata a circuito aperto. Quando consideriamo il semplice circuito resistivo in figura, otteniamo la relazione:

$$\mathcal{E} - ir = iR,$$

che immediatamente implica:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + R}.$$

## 6. Leggi di Kirchhoff

Fino a questo momento abbiamo analizzato semplici circuiti. L'analisi di situazioni più complesse richiede la formulazione di leggi note come leggi di Kirchhoff, le quali possono essere enunciate come segue:

1) *La somma algebrica delle correnti confluenti/uscenti in/da un nodo è nulla*. Alternativamente, possiamo anche dire che *la somma delle correnti entranti in un nodo eguaglia la somma di quelle uscenti*.
2) *La somma algebrica delle tensioni rilevate lungo un qualsiasi percorso chiuso (maglia) è nulla.*

La prima (già incontrata in precedenza) viene detta legge di Kirchhoff delle correnti di nodo, mentre la seconda è la legge di Kirchhoff delle tensioni di maglia.

Nell'analisi dei circuiti resistivi valgono le seguenti regole pratiche:

1) Se si attraversa un resistore nel verso della corrente la variazione di potenziale vale $-iR$. Se l'attraversamento avviene in verso opposto alla corrente si osserva una variazione di potenziale pari a $+iR$.
2) Se si attraversa un generatore di f.e.m. dal polo negativo verso quello positivo si ha una variazione di potenziale pari a $+\mathcal{E}$, nel caso contrario si ha $-\mathcal{E}$.

E' bene notare che la scelta del percorso chiuso (e del suo verso di percorrenza) è arbitraria e non altera i risultati dell'analisi circuitale.

Possiamo dimostrare le regole pratiche sopra enunciate. Nel circuito esterno al generatore vale la relazione:

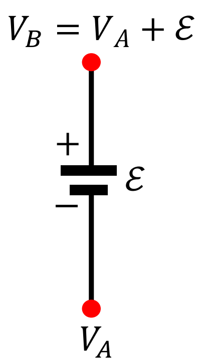
$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(V_B - V_A),$$

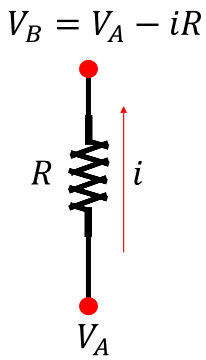
dalla quale segue:

$$V_B = V_A - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

dove $V_B$ è il potenziale del punto di arrivo, mentre $V_A$ è il potenziale del punto di partenza. Applichiamo la precedente al caso di un resistore. Dalla legge di Ohm in forma locale sappiamo che vale la relazione $\vec{E} = \rho\vec{J}$. Sostituendo otteniamo:

$$V_B = V_A - \int_A^B \rho\vec{J}\cdot d\vec{l} = V_A - \int_A^B \rho\left(\frac{i}{S}\hat{l}\right)\cdot\hat{l}\,dl = V_A - \frac{i\rho L}{S} = V_A - iR.$$



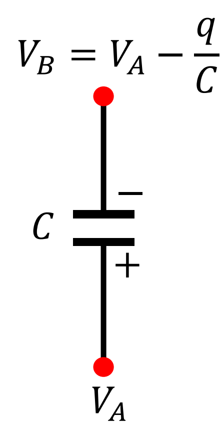

D'altra parte l'attraversamento di un generatore ideale di f.e.m. implica l'uguaglianza

$$\mathcal{E} = V_B - V_A \rightarrow V_B = V_A + \mathcal{E}.$$

Le precedenti dimostrano la validità delle regole pratiche enunciate in precedenza.

Una analoga regola di analisi circuitale può essere derivata anche nel caso dell'attraversamento di un condensatore. Sappiamo che il campo interno vale:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}.$$



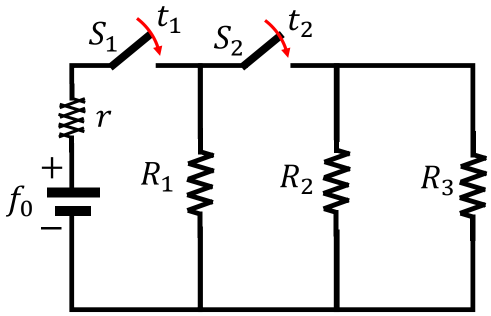

Pertanto otteniamo:

$$V_B = V_A - \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = V_A - \int_A^B \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}\cdot d\vec{l} = V_A - \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = V_A - \frac{\sigma S d}{S\varepsilon_0} = V_A - \frac{q}{C}.$$

Nella derivazione della precedente abbiamo utilizzato le relazioni $q = \sigma S$ e

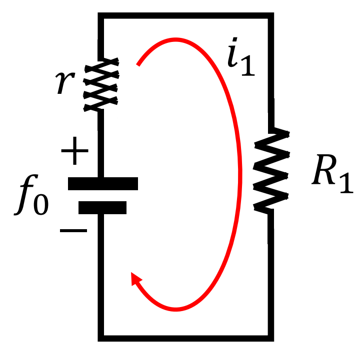
$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

## Esercizio




Ai capi di un generatore di forza elettromotrice è presente una tensione $f_0 = 12.0$ V. Tale generatore è inserito nel circuito mostrato in figura, dove $r = 10.0$ Ω, $R_1 = 10.0$ Ω, $R_2 = 20.0$ Ω, $R_3 = 40.0$ Ω. Inizialmente, gli interruttori $S_1$ ed $S_2$ sono aperti e non fluisce corrente nel circuito. Al tempo $t_1 = 0.00$ $s$ si chiude l'interruttore $S_1$ e una corrente $i_1$ viene erogata dal generatore. Successivamente, al tempo $t_2 = 100$ $s$, si chiude anche il secondo interruttore ($S_2$) e una diversa corrente $i_2$ viene erogata dal generatore. Entrambi gli interruttori, $S_1$ ed $S_2$, vengono aperti al tempo $t_3 = 200$ $s$. Si calcoli:

a) La corrente $i_1$ erogata dal generatore per $t_1 < t < t_2$.
b) La potenza sviluppata dal generatore per $t_1 < t < t_2$.
c) L'energia $E_1$ dissipata nel circuito nell'intervallo di tempo $t_1 < t < t_2$.
d) La corrente $i_2$ erogata dal generatore per $t_2 < t < t_3$.
e) L'energia $E_2$ dissipata nel circuito nell'intervallo di tempo $t_2 < t < t_3$.




(a) Per $t_1 < t < t_2$, si ha il circuito mostrato in figura. La corrente circolante in esso vale:

$$i_1 = \frac{f_0}{r+R} = \frac{12.0}{20.0} A = 0.600\ A.$$

(b) In questo caso la potenza erogata dal generatore vale:

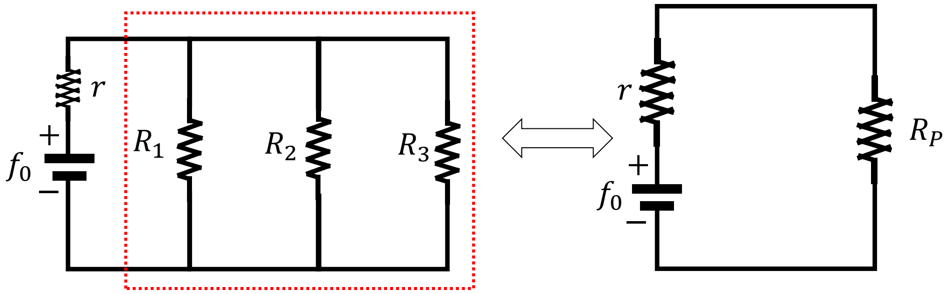
$$P_1 = f_0 i_1 = (12.0)(0.600) W = 7.20\ W.$$

(c) L'energia dissipata nel circuito vale:

$$E_1 = P_1(t_2 - t_1) = (7.20\ W)(100\ s) = 720\ J.$$

(d) Per $t_2 < t < t_3$, consideriamo il circuito equivalente mostrato in figura. La resistenza equivalente, $R_P$, si determina mediante la relazione:

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \left(\frac{1}{10.0} + \frac{1}{20.0} + \frac{1}{40.0}\right)\Omega^{-1} = \frac{7}{40}\Omega^{-1},$$




da cui si ha:

$$R_P = \frac{40.0}{7}\,\Omega = 5.71\,\Omega.$$

Pertanto la corrente erogata dal generatore in questa situazione vale:

$$i_2 = \frac{f_0}{r + R_P} = \frac{12.0}{15.71}\,A = 0.764\,A.$$

(e) Dalla precedente risulta che la potenza e l'energia dissipata nel circuito nell'intervallo di tempo $t_2 < t < t_3$ valgono, rispettivamente:

$$P_2 = f_0 i_2 = 9.17\,W,$$
$$E_2 = P_2(t_3 - t_2) = 917\,J.$$