Lezioni di Ricerca Operativa

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 12

Algoritmo del Simplesso:

- Metodo delle 2 Fasi
- Metodo del Big-M

R. Cerulli – F. Carrabs

Individuazione di una base di partenza per il simplesso

Dato il seguente problema di PL in forma standard:

$$min\ z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$\mathrm{A}\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

dove A è una matrice mxn, con $m<n$, a rango pieno e $\underline{b} \geq \underline{0}$, supponiamo di voler utilizzare il metodo del simplesso per risolvere il problema.

Occorre individuare una sottomatrice di A che sia una base di $\mathbb{R}^m$

Individuazione di una base di partenza per il simplesso

Se tra le colonne di A non è presente la **matrice identità,** l'individuazione di una sottomatrice quadrata mxm di A , con determinante diverso da zero, può essere un'operazione costosa.

Il problema viene risolto modificando **artificialmente** il sistema dei vincoli come segue:

$$\begin{cases} A\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0},\ \underline{y} \geq \underline{0} \end{cases}$$

Si aggiunge una variabile artificiale y_i ad ogni vincolo del sistema affinché nel nuovo sistema sia presente una matrice identità (associata alle variabili $\underline{y}$).

Individuazione di una base di partenza per il simplesso

Lemma

Data una soluzione ammissibile $(\underline{x}', \underline{y}')$ *del poliedro* $X' = \{A\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}, \underline{y} \geq \underline{0}\}$, *il vettore* $\underline{x}'$ *sarà soluzione ammissibile del poliedro* $X = \{A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$ *se e solo se* $\underline{y}' = \underline{0}$.

DIM.

$\Longrightarrow$

Poiché per ipotesi $\underline{x}'$ e $(\underline{x}', \underline{y}')$ sono soluzioni ammissibili dei rispettivi poliedri, si ha che:

$$\mathrm{A}\underline{x}' = \underline{b} \quad \text{e} \quad \mathrm{A}\underline{x}' + I\underline{y}' = \underline{b}$$

Sostituendo $\mathrm{A}\underline{x}'$ con $\underline{b}$ nella seconda equazione otteniamo:

$$\underline{b} + I\underline{y}' = \underline{b} \quad \Longrightarrow \quad \underline{y}' = \underline{0}$$

$\Longleftarrow$

Poiché $(\underline{x}', \underline{y}')$ è una soluzione ammissibile di X' e $\underline{y}' = \underline{0}$ si ha che $\underline{x}' \geq \underline{0}$ e:

$$\mathrm{A}\underline{x}' + I\underline{0} = \underline{b} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}\underline{x}' = \underline{b} \qquad \blacksquare$$

Metodo Delle Due Fasi

Per ottenere la soluzione $(\underline{x}', \underline{0})$ (se esiste) risolviamo il seguente problema di PL a cui ci riferiremo come problema di PL della 1° fase.

$$min\ g = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$\mathrm{A}\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{y} \geq \underline{0}$$

Per risolvere il nuovo problema possiamo utilizzare il simplesso a partire dalla matrice identità generata dalle colonne associate alle variabili artificiali $\underline{y}$.

Quindi all'inizio della procedura tutte le variabili artificiali $\underline{y}$ sono in base mentre tutte le variabili $\underline{x}$ del problema originale sono fuori base.

Metodo Delle Due Fasi

Alla fine della prima fase possono verificarsi due casi:

1) $g^* > 0 \Longrightarrow$ $A\underline{x} = \underline{b}$ **non ammette soluzione**.
Il problema di partenza è inammissibile e non si passa alla seconda fase.

2) $g^* = 0 \Longrightarrow$ $A\underline{x} = \underline{b}$ **ammette soluzione**.
Si passa alla seconda fase risolvendo il problema iniziale utilizzando la base ottima della prima fase come base di partenza per il simplesso.

Metodo Delle Due Fasi

$$min\ g = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$\text{A}\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{y} \geq \underline{0}$$

- *Perché il problema di PL della prima fase ammette sempre una soluzione ammissibile?*

- *Perché il problema di PL della prima fase non avrà mai un ottimo illimitato?*

- *Se al termine della prima fase $g^* = 0$, quale sarà stato il minimo numero di iterazioni necessarie al simplesso per azzerare le variabili artificiali? (è sempre necessario aggiungere m variabili artificiali al sistema di partenza?)*

Metodo Delle Due Fasi: Esempio

Forma standard

$$\min z = -x_1 - 2x_2 \qquad\qquad \min z = -x_1 - 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 1 \qquad\qquad x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4 \quad \Longrightarrow \quad x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \qquad\qquad \underline{x} \geq \underline{0}$$

Problema della
prima fase

$$\min g = x_5^a$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_5^a = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$\underline{x} \geq \underline{0},\ x_5^a \geq 0$$

D'ora in poi indicheremo le variabili artificiali con l'apice *a* per poterle distinguere dalle variabili del problema di partenza.

Metodo Delle Due Fasi: 1° fase

$$min\ g = x_5^a$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_5^a = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$\underline{x} \geq \underline{0},\ x_5^a \geq 0$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5^a \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \{5,4\}$$

$$N = \{1,2,3\}$$

Matrice Identità
(Base Iniziale)

Metodo Delle Due Fasi: 1° fase

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_B = A_B^{-1}\underline{b} \implies \underline{x}_B = I\underline{b} \implies \underline{x}_B = \underline{b}$$

$$\begin{bmatrix} x_5^a \\ x_4 \end{bmatrix} = A_B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad x_5^a = 1, \quad x_4 = 4$$

Test di Ottimalità: calcolo di $z_j - c_j$ per $j \in N = \{1,2,3\}$

$$z_1 - c_1 = [1\ 0]\ I \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 1$$

$$z_2 - c_2 = [1\ 0]\ I \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 0 = 1$$

$$z_3 - c_3 = [1\ 0]\ I \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Metodo Delle Due Fasi: 1° fase

x_2 entra in base   Quale variabile esce dalla base?

Test dei minimi rapporti:

$$\begin{bmatrix} x_5^a \\ x_4 \end{bmatrix} = \underline{\bar{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \underline{y}_2 = A_B^{-1}\underline{a}_2 = I \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{1}{1}, \frac{4}{2} \right\} = 1 = \frac{\bar{b}_1}{y_{1k}}$$

x_5^a esce dalla base; x_2 entra in base con valore 1

Nuova base: B = {2,4}   N = {1,3,5}

Metodo Delle Due Fasi: 1° fase

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = A_B^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Test di Ottimalità: calcolo di $z_j - c_j$ per $j \in N = \{1,3,5\}$

$$z_1 - c_1 = [0\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$z_3 - c_3 = [0\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

Soluzione ottima

$$z_5 - c_5 = [0\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = -1$$

Metodo Delle Due Fasi: 1° fase

Soluzione Ottima della Prima fase

$$g^* = \underline{c}_B^T A_B^{-1}\ \underline{b}$$

$$g^* = [0\ 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow$$

Si può passare alla seconda fase

Si risolve il problema iniziale utilizzando come base di partenza:

B = {2,4} N = {1,3,5}

$$min\ z = -x_1 - 2x_2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Metodo Delle Due Fasi: 2° fase

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = A_B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Test di Ottimalità: calcolo di $z_j - c_j$ per $j \in N = \{1,3\}$

$$z_1 - c_1 = [-2\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = -1$$

$$z_3 - c_3 = [-2\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 2$$

x_3 entra in base

Metodo Delle Due Fasi: 2° fase

x_3 entra in base   Quale variabile esce dalla base?

Test dei minimi rapporti:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{y}_3 = A_B^{-1}\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \min_{1\le i\le m}\left\{\frac{\overline{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right\} = \min_{1\le i\le m}\left\{\frac{2}{2}\right\} = 1 = \frac{\overline{b}_2}{y_{2k}}$$

x_4 esce dalla base; x_2 entra in base con valore 1

Nuova base: B = {2,3}   N = {1,4}

Metodo Delle Due Fasi: 2° fase

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A_B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Test di Ottimalità: calcolo di $z_j - c_j$ per $j \in N = \{1,4\}$

$$z_1 - c_1 = [-2\ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = -1 + 1 = 0$$

$$z_4 - c_4 = [-2\ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Soluzione ottima

Metodo Del Big-M

- Nella prima fase del metodo delle due fasi, la funzione obiettivo del problema originale è completamente ignorata.

- La prima fase ha, infatti, come obiettivo l'individuazione di una qualsiasi soluzione di base ammissibile del problema originale e quindi non necessariamente una buona soluzione di base ammissibile.

- Il Big-M è un metodo alternativo al metodo delle 2 fasi che tiene conto anche della funzione obiettivo originale durante la risoluzione del problema.

Metodo Del Big-M

Il problema di PL viene risolto modificando **artificialmente** il sistema dei vincoli esattamente come fatto per il Due Fasi aggiungendo le variabili artificiali al sistema.

Ciò che cambia è la funzione obiettivo usata dal metodo del Big-M.

$$P \quad \min z = \underline{c}^T \underline{x} \qquad\qquad P(M) \quad \min z = \underline{c}^T \underline{x} + M \underline{1}^T \underline{y}$$

$$\mathrm{A}\underline{x} = \underline{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{A}\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \qquad\qquad \underline{x} \geq \underline{0}, \underline{y} \geq \underline{0}$$

Alla funzione obiettivo di P vengono sommate (nel caso di un problema di minimo) le variabili artificiali moltiplicate per un coefficiente M ”molto grande”.