ESERCIZIO 1

Usare il pumping lemma per dimostrare che

$$L = \{xx \mid x \text{ è una stringa binaria}\}$$

è non regolare.

Pumping lemma

Se L è un linguaggio regolare, allora esiste una costante positiva p, che dipende da L, tale che $\forall$ stringa $w \in L$ di lunghezza $|w| \geq p$, esistono tre stringhe x, y, z con $w = xyz$ che soddisfano le seguenti condizioni:

1. $|xy| \leq p$
2. $|y| > 0$ (oppure $y \neq \varepsilon$)
3. $\forall\, k \geq 0$, $xy^kz \in L$

Quindi, se un linguaggio è regolare, allora verifica il pumping lemma

L REGOLARE $\rightarrow$ P

In altre parole, il pumping lemma è una CONDIZIONE NECESSARIA affinché un linguaggio sia regolare.

Per questo motivo, se il pumping lemma non è verificato, possiamo dedurre che il linguaggio è NON regolare

PL NON VERIFICATO $\rightarrow$ L NON REGOLARE
(contronominale)

Se la proprietà del pumping lemma è rispettata, non possiamo dedurre nulla sulla regolarità del linguaggio.

Quando un linguaggio non verifica il pumping lemma?

Quando, $\forall$ costante positiva p, esiste una parola $w \in L$, con lunghezza $|w| \geq p$, tale che $\forall$ stringa $x, y, z \in \Sigma^*$ con $w = xyz$, si ha che

1. $|xy| \leq p$
2. $|y| > 0$
3. $\exists\, k \geq 0$ tale che $xy^kz \notin L$.

Supponiamo per assurdo che L sia regolare. Allora la proprietà del pumping lemma deve valere per il linguaggio L.

Mostriamo che

$\forall\, p > 0 \quad \exists\, w \in L,\ |w| \geq p$ tale che

$\forall\, x, y, z \in \Sigma^* \quad w = xyz,\ |xy| \leq p,\ y \neq \varepsilon$

$\exists\, k \geq 0$ tale che $xy^kz \notin L$.

Sia p la costante del pumping.

Consideriamo la stringa $w = 0^p 1 0^p 1$.
Chiaramente, $w \in L$ e $|w| \geq p$.

Il pumping lemma garantisce che w può essere fattorizzata in tre sottostringhe $x, y, z \in \Sigma^*$ tali che:

1. $|xy| \leq p$ 2. $y \neq \varepsilon$ 3. $\forall k \geq 0, \ xy^k z \in L$

La condizione 1) implica che xy è formata da soli 0. Di conseguenza, anche y è formata da soli 0 (almeno uno per la condizione 2).

Si ha, quindi, che $w = 0^p 1 0^p 1 = xyz$ dove

$$x = 0^i \quad y = 0^j \quad z = 0^{p-i-j} 1 0^p 1, \text{ con } i+j \leq p, \ j > 0, \ i \geq 0$$

Consideriamo $k = 0$. In questo modo, otteniamo la stringa

$$xy^0 z = xy = 0^i 0^{p-i-j} 1 0^p 1 = 0^{p-j} 1 0^p 1$$

La stringa xz, tuttavia, non appartiene al linguaggio L poichè

$$xz \in L \iff xz = v'v'' \text{ con } v' = v''$$

Dato che v'' termina con 1, anche v' deve terminare con 1. Di conseguenza,

$$v' = 0^{p-j} 1 \quad e \quad v'' = 0^p 1$$

Però, poichè $j > 0$ si ha che $p - j < p$; ciò implica che $v' \neq v''$.

Questo risultato è in contraddizione con la terza condizione del pumping lemma. Ciò significa che L non può essere regolare.