Lezioni di Ricerca Operativa

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 18

- Teoria dei grafi: definizioni di base
- Problema del flusso a costo minimo
- Matrici Totalmente Unimodulari

R. Cerulli – F. Carrabs

Grafo Non Orientati: Definizioni di base

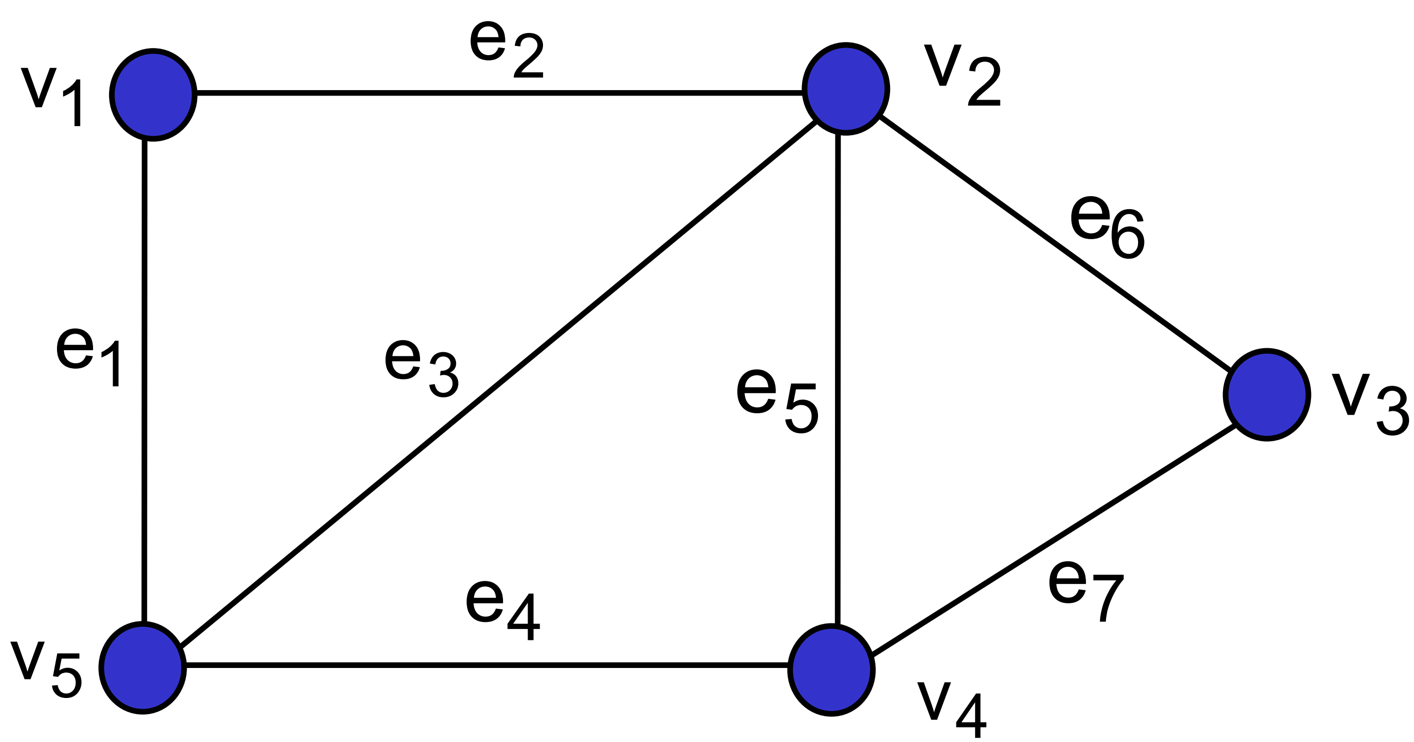
Un grafo **non orientato** $G=(V,E)$ è dato da una coppia di insiemi finiti:

- $V=\{v_1,...,v_n\}$ l'insieme degli n **Nodi** di G
- $E=\{e_1,..,e_m\} \subseteq VxV$ l'insieme degli m **Archi non orientati** di G

Ogni arco non orientato $e_k=(v_i,v_j)$ di G corrisponde ad una **coppia non ordinata** di nodi v_i e v_j di G. I nodi v_i e v_j sono gli **estremi** dell'arco e_k.

La presenza di un arco tra una coppia di nodi indica una relazione tra i nodi stessi.

Un esempio: G=(V,E)

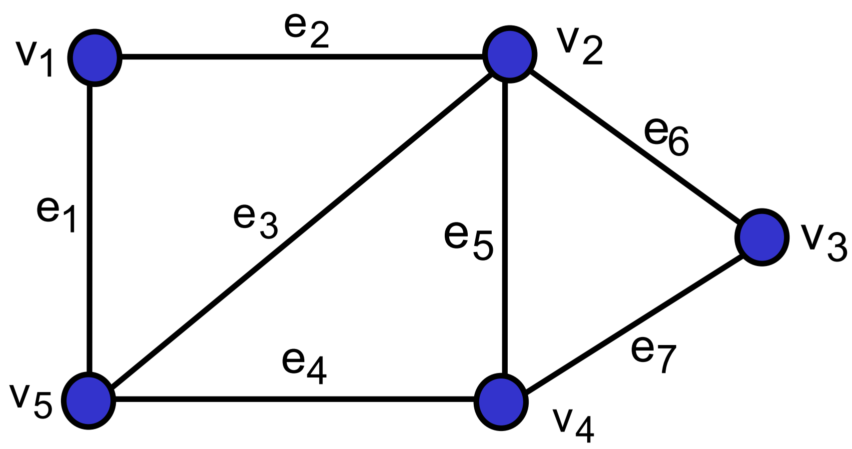


$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

$e_1 = (v_1, v_5)$ $\quad$ $e_2 = (v_1, v_2)$ $\quad \ldots$

Grafo Non Orientati: Definizioni di base



- un arco (v,v) è detto **loop**;
- un arco $e=(u,v)\in E$ si dice **incidente** su u e su v;
- due nodi $u,v\in V$ sono detti **adiacenti** $\Leftrightarrow$ $(u,v)\in E$;
- due archi $e_1,e_2\in E$ sono detti **adiacenti** $\Leftrightarrow$ $e_1=(u,v)$ ed $e_2=(v,w)$ (hanno un estremo in comune);
- l'insieme di nodi **N(u)**$=\{v\in V$: v adiacente a u$\}$ è detto **intorno** di u in G;
- l'insieme di archi **δ(u)**$=\{e\in E$: e incide su u$\}$ è detto **stella** di u in G;
- $|\delta(u)|$ è detto **grado del nodo** u.

Teoria dei Grafi: Concetti Base

I grafi sono un mezzo per rappresentare relazioni binarie

Ad esempio:

- due città connesse da una strada
- due calcolatori connessi in una rete telematica
- due persone legate da una relazione di parentela (come, padre-figlio)
- due persone che condividono una stanza
- il collegamento tra due componenti elettronici
- un’operazione che deve essere eseguita da una certa macchina
- ...

Applicazioni

I grafi possono essere usati come strumento per modellare in maniera schematica un vastissimo numero di problemi decisionali.

Ad esempio:

- determinare il percorso più breve che connette due città
- determinare come connettere nella maniera più economica (più efficiente) un insieme di calcolatori in una rete telematica
- assegnare un insieme di operazioni ad un insieme di macchine
- determinare il percorso più conveniente da far percorrere ad una flotta di veicoli commerciali per effettuare delle consegne e quindi rientrare al deposito
- ...

Grafo semplice:

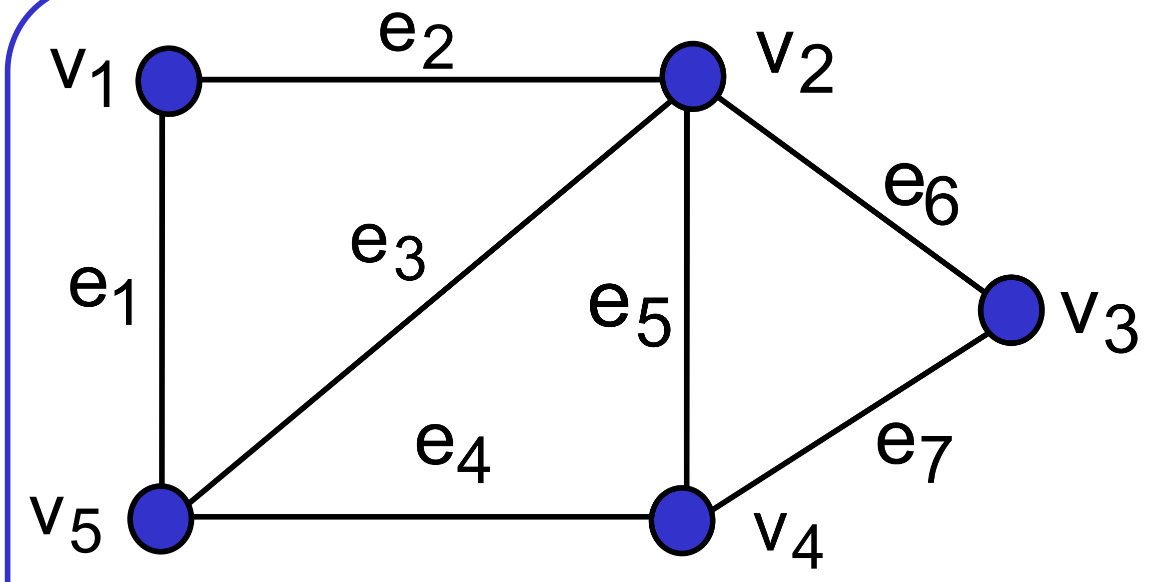
Non esistono “loop” o archi paralleli (ossia tra due nodi non ci può essere più di un arco).

Grafi e Sottografi

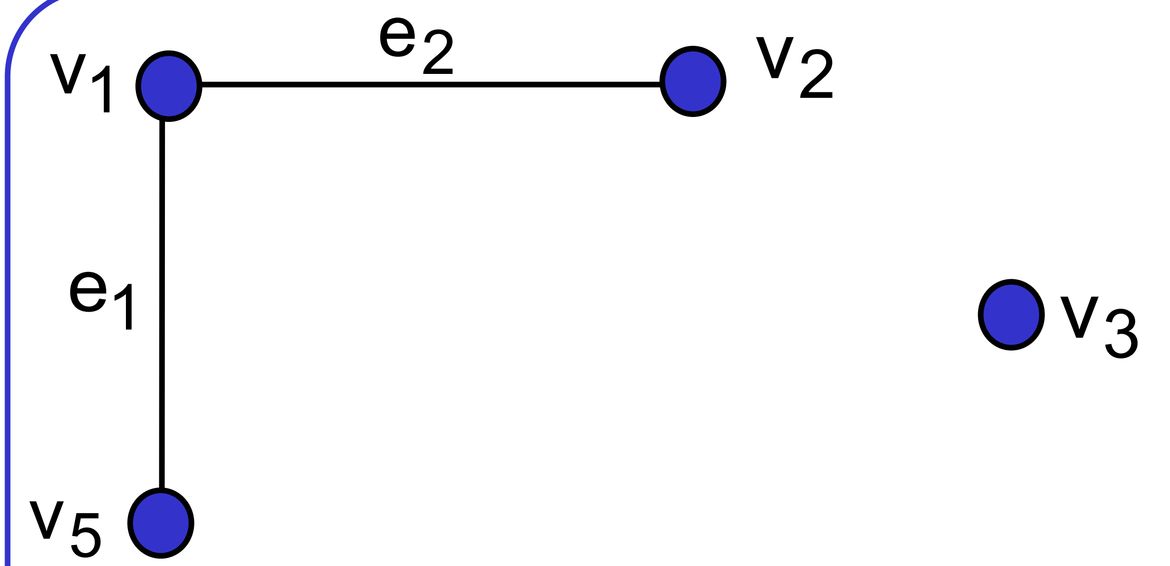
- G’=(V’,E’) è detto **sottografo** di G=(V,E) $\Leftrightarrow$
  - $V' \subseteq V$
  - $E' \subseteq E$ e $(v_i,v_j) \in E' \Longrightarrow (v_i,v_j) \in E$

- G’=(V’,E’) è detto **sottografo indotto** da V’ in G=(V,E) $\Leftrightarrow$
  - $V' \subseteq V$
  - $\forall u,v \in V'$ se $(u,v) \in E$ allora $(u,v) \in E'$

Esempio

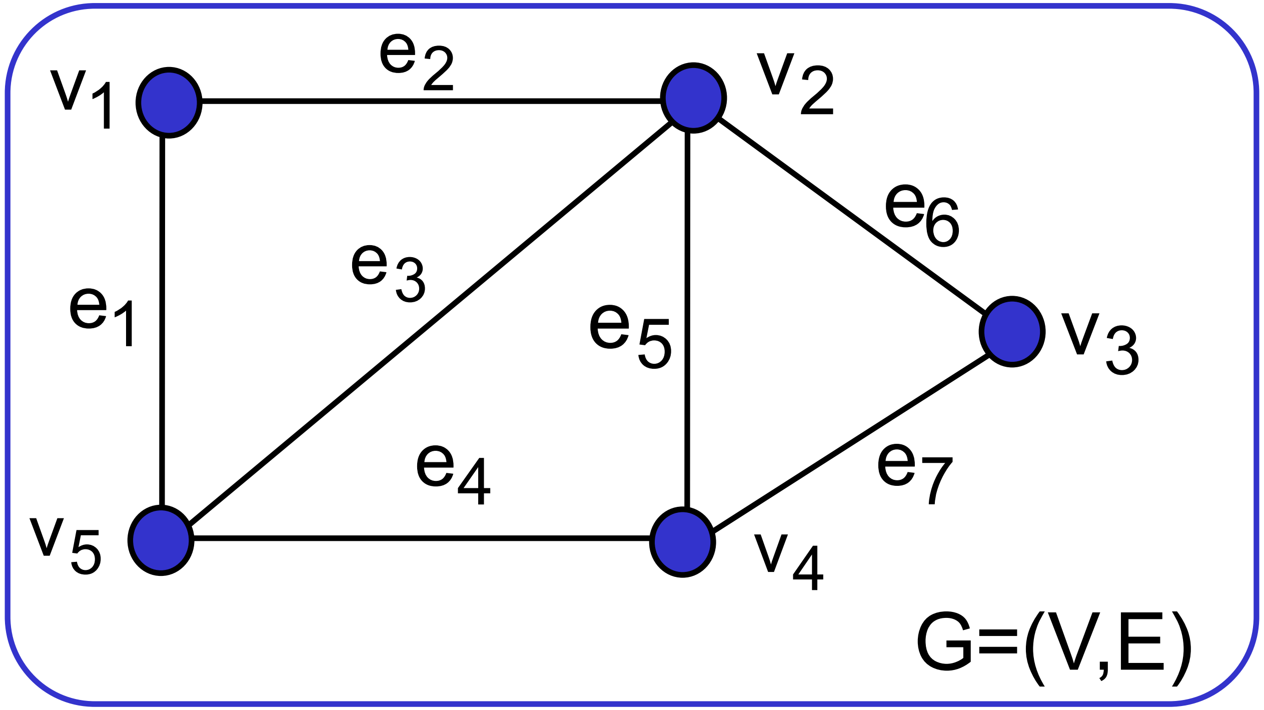


G=(V,E)

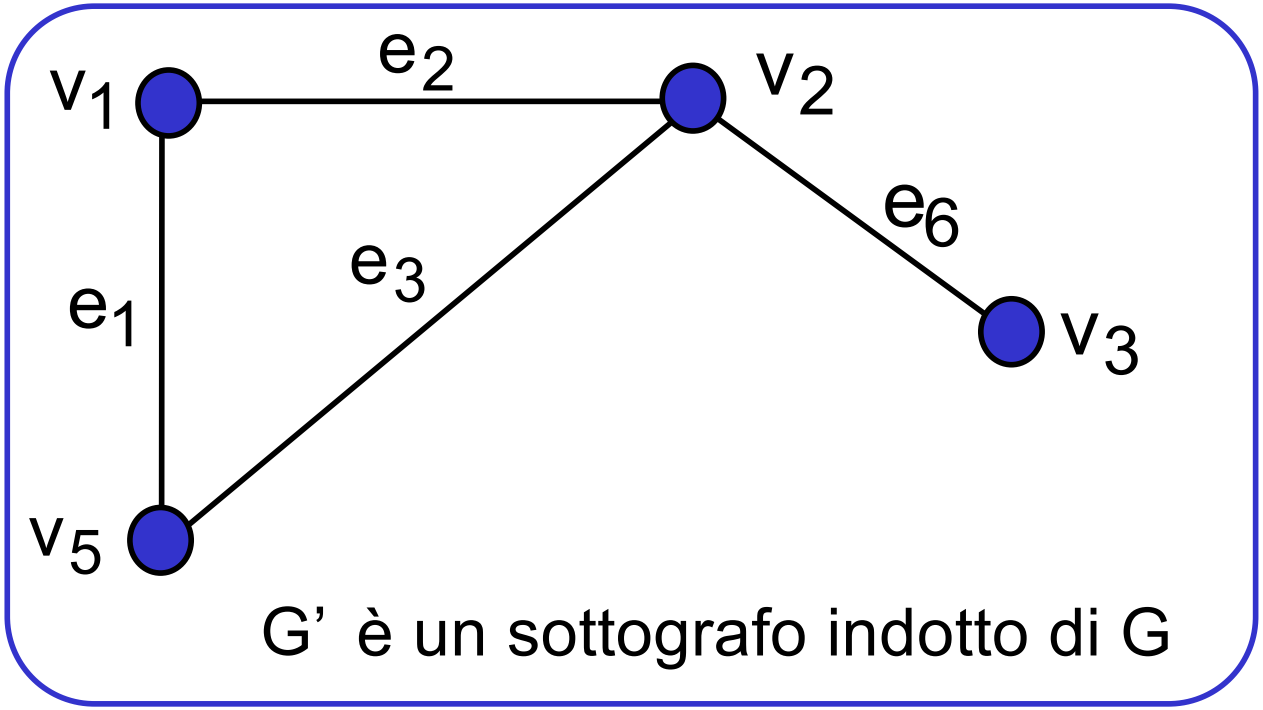


G’ è un sottografo di G

Esempio



v_1
e_2
v_2
e_6
e_3
e_1
e_5
v_3
e_4
e_7
v_5
v_4
G=(V,E)



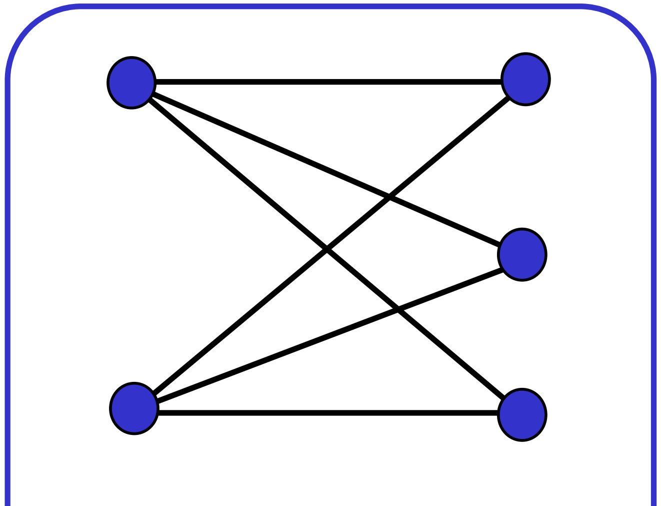
v_1
e_2
v_2
e_6
e_3
e_1
v_3
v_5
G' è un sottografo indotto di G

Grafo Non Orientato Bipartito

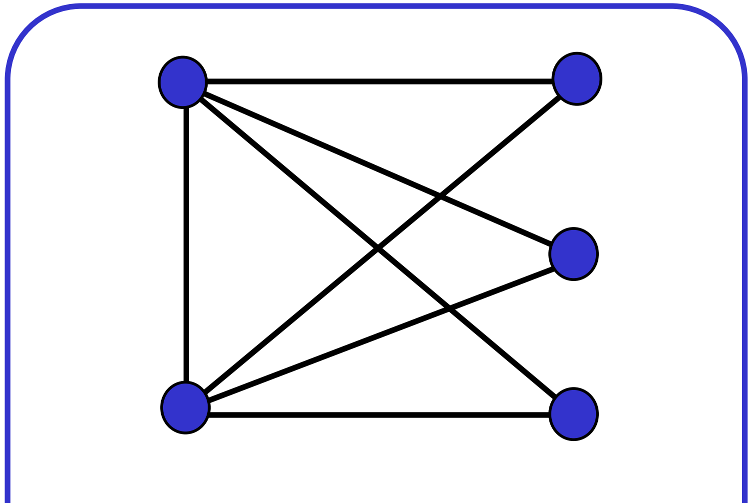
G è detto **grafo bipartito** se esiste una partizione di V in due sottoinsiemi V_1 e V_2 tali che:

- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- $V_1 \cup V_2 = V$
- $\forall e=(u,v) \in E$ se $u \in V_1$ allora $v \in V_2$ oppure se $u \in V_2$ allora $v \in V_1$

Esempio



grafo bipartito

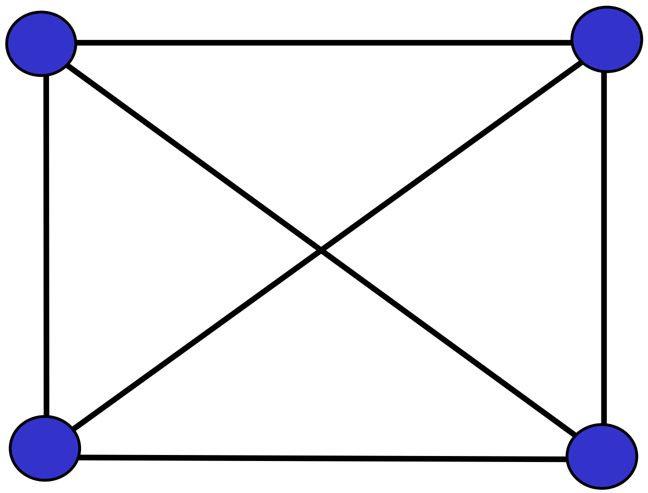


grafo non bipartito

Grafo Non Orientato Completo

- G è un grafo **completo** $\Leftrightarrow$ contiene tutti i possibili archi, ovvero $|\delta(v)| = n\text{-}1 \ \forall v \in V$
- il numero di archi in un grafo completo è: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Esempio



grafo completo

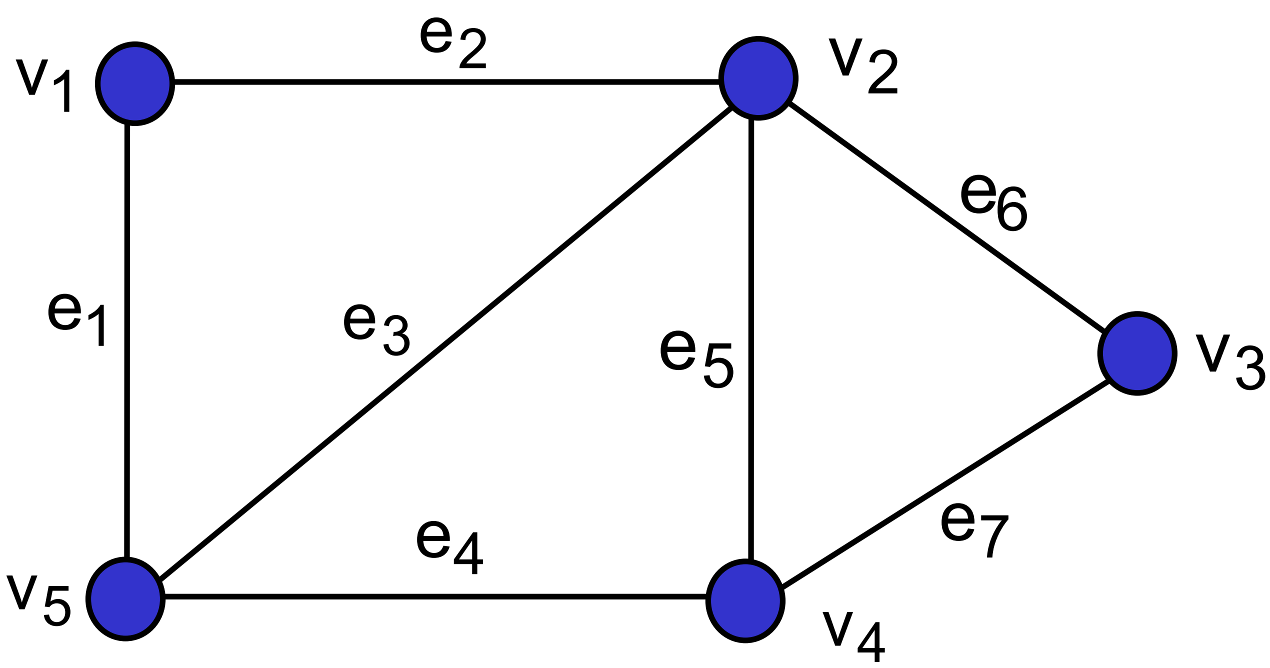
Grafo Non Orientato: Connettività

- Una **path** di lunghezza k da un vertice u ad un vertice u' in un grafo non orientato G=(V,E) è una sequenza $< v_0, v_1, \dots, v_k >$ di vertici tali che $v_0 = u$ e $v_k = u'$ e $(v_{i-1}, v_i) \in E$ per $\mathrm{i} = 1,2, \dots, \mathrm{k}$;
- La **lunghezza di una path** è data dal numero di archi che compongono la path;
- La **path contiene** i vertici $v_0, v_1, \dots, v_k$ e gli archi $(v_0, v_1), (v_1, v_2) \dots, (v_{k-1}, v_k)$. (Per definizione c'è sempre una path di lunghezza zero da u a se stesso);
- Una path si dice **semplice** se tutti i vertici che la compongono sono distinti.
- Se esiste una path p dal vertice u ad un vertice u' in G allora u è **connesso** ad u' tramite p. Si noti che:

  - Se u è connesso a u' allora anche u' è connesso ad u;

  - Se u è connesso a u' e u' è connesso ad w allora u è connesso a w;
- Un **grafo non orientato è connesso** se e solo se tutti i suoi vertici sono connessi tra loro;
- Una path $< v_0, v_1, \dots, v_k >$ forma un **ciclo** se $k \geq 3$ e $v_0 = v_k$.

Grafo Non Orientato: Connettività



Esempi:

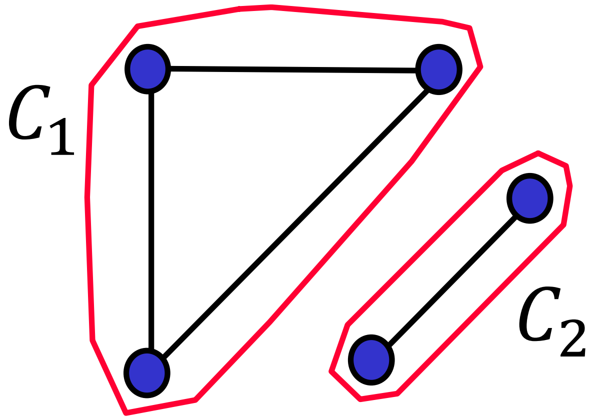
- $< v_1, v_2, v_5, v_4 >$ è un path semplice di lunghezza 3 che contiene gli archi e_2, e_3 ed e_4;
- $< v_1, v_2, v_5, v_4, v_5 >$ è un path (non semplice) di lunghezza 4;
- $< v_2, v_3, v_4, v_2 >$ è un ciclo;
- Il grafo in figura è connesso.

Grafo Non Orientato: Componenti Connesse

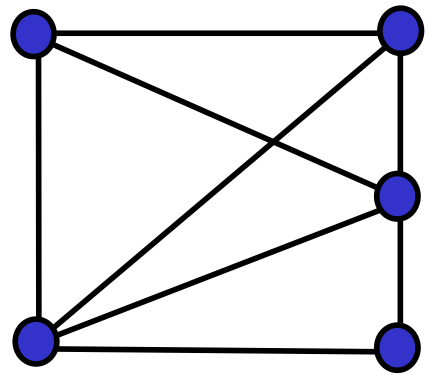
Quando un grafo G non è connesso è utile determinare quali siano i sottografi di G che risultano connessi.

- Una **componente connessa** $C_i = (V_i, E_i)$ di G è un sottografo di G in cui ogni coppia di vertici $u \in V_i$ e $v \in V_i$ è connessa;
- G **è connesso** $\Leftrightarrow$ è composto da una sola componente connessa.

Esempio



componenti connesse



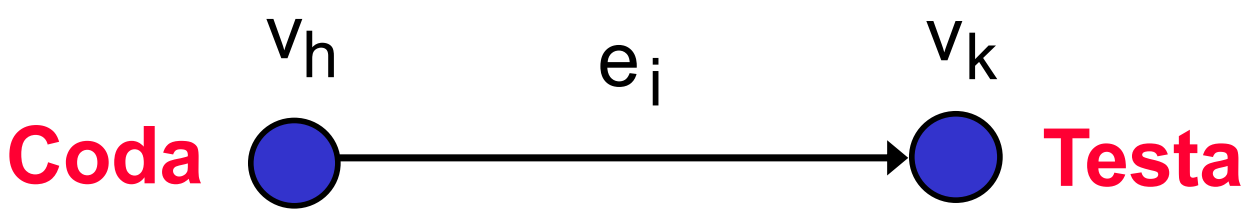
grafo connesso

In questo corso considereremo solo **grafi semplici e connessi.**

Grafi Orientati: Definizioni di base

- $G=(V,E)$ è un **grafo orientato** se, dato $V=\{v_1,...,v_n\}$, l'insieme degli archi $E=\{e_1,..,e_m\}$ è formato da **coppie ordinate** di nodi.

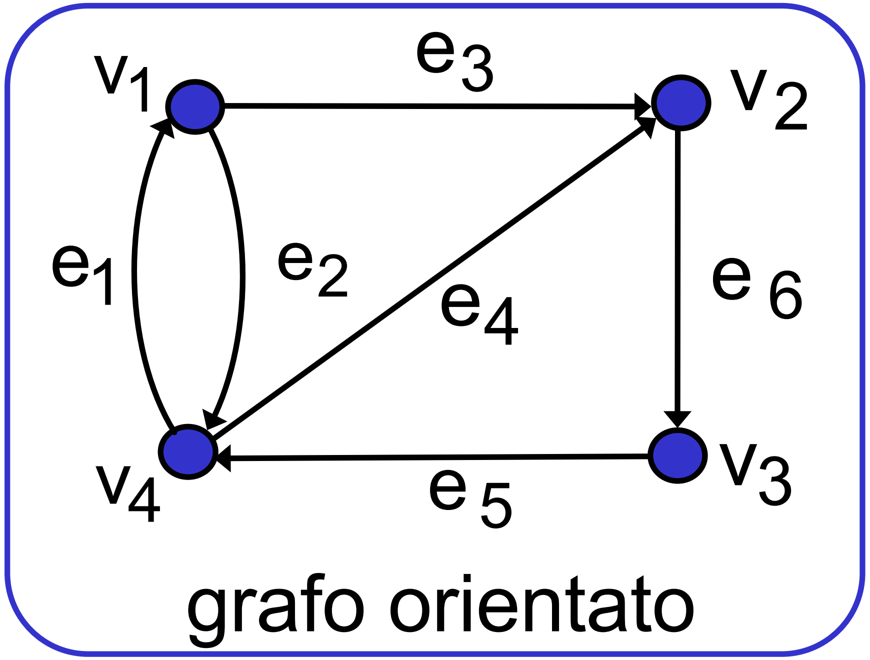
  Per un grafo orientato si ha che $e_i=(v_h,v_k) \neq e_j = (v_k,v_h)$ con $e_i, e_j \in E$



L'arco e_i si dice **uscente** da v_h ed **entrante** in v_k;

v_h e v_k sono la **coda** e la **testa** di e_i rispettivamente.

Grafi Orientati: Definizioni di base



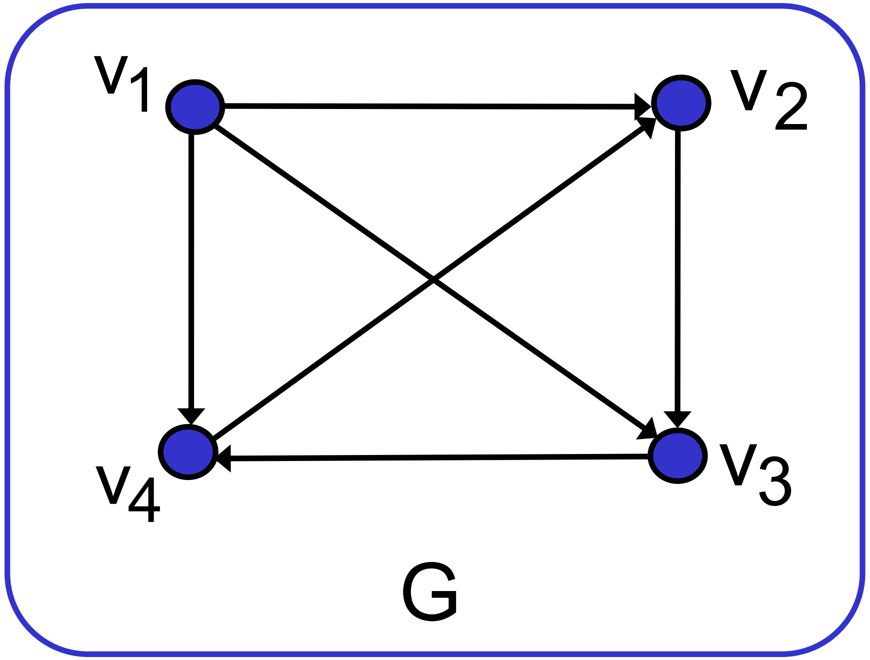
Nell'esempio $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$
$e_1 = (v_4, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_4)$…

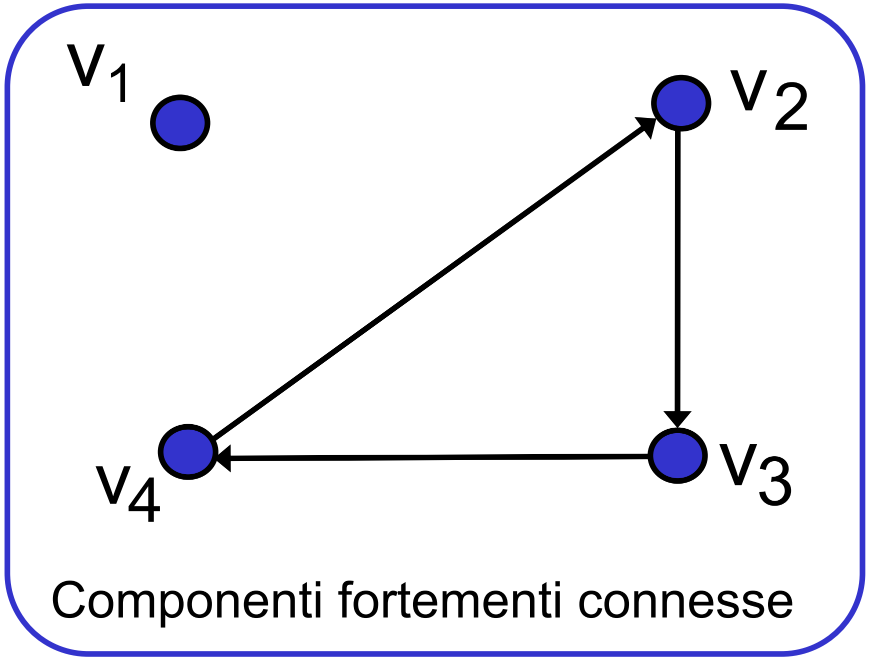
- $Fs(v) = \{u \in V: (v,u) \in E\}$ è detto **stella uscente** di v;
- $Bs(v) = \{u \in V: (u,v) \in E\}$ è detto **stella entrante** di v;
- $S(v) = Fs(v) \cup Bs(v)$ è detto **stella** di v;
- le definizioni di **sottografo** e **sottografo indotto** di un grafo orientato sono analoghe a quelle date per i grafi non orientati.

Grafo Orientato: Connettività

- Una **path** di lunghezza k da un vertice u ad un vertice u' in un grafo orientato G=(V,E) è una sequenza $< v_0, v_1, \dots, v_k >$ di vertici tali che $v_0 = u$ e $v_k = u'$ e $(v_{i-1}, v_i) \in E$ per $\mathrm{i} = 1,2, \dots, \mathrm{k}$; (N.B. ogni arco della path è diretto verso v_k);
- Le definizioni di **lunghezza di una path, path semplice** e nodi e archi **contenuti** in una path sono analoghe a quelle date per i grafi non orientati;
- Una **catena (chain)** di lunghezza k da un vertice u ad un vertice u' in un grafo orientato G=(V,E) è una sequenza $< v_0, v_1, \dots, v_k >$ di vertici tali che $v_0 = u$ e $v_k = u'$ e $(v_{i-1}, v_i) \in E$ oppure $(v_i, (v_{i-1}) \in E$ per $\mathrm{i} = 1,2, \dots, \mathrm{k}$; (quindi ci possono essere archi nella catena che non sono diretti verso v_k)
- Se esiste una catena p_c dal vertice u ad un vertice u' in G allora u è **connesso** ad u' tramite p_c.
- Se esiste una path p dal vertice u ad un vertice u' in G allora u è **fortemente connesso** ad u' tramite p.
- Un grafo orientato
  - **è connesso** se e solo se tutti i suoi vertici sono connessi tra loro;
  - **è fortemente connesso** se e solo se tutti i suoi vertici sono fortemente connessi tra loro;
- Una path $< v_0, v_1, \dots, v_k >$ forma un **ciclo** se $k \geq 2$ e $v_0 = v_k$.

Esempio





- La sequenza $< v_1, v_3, v_4, v_2 >$ è una **path** da v_1 a v_2 mentre la sequenza $< v_1, v_3, v_2 >$ è una **catena** da v_1 a v_2;
- Il vertice v_1 è fortemente connesso al vertice v_2 mentre v_2 è connesso, ma non fortemente connesso, a v_1.
- La sequenza $< v_2, v_3, v_4 >$ è un ciclo.
- Il grafo G è connesso ma non è fortemente connesso.
- Ci sono in G componenti fortemente connesse?

Rappresentazioni di un Grafo

- **Liste di adiacenza**:

  ad ogni vertice è associata la lista dei vertici adiacenti (può essere una tabella o una lista concatenata).

- **Matrice di adiacenza** (n x n) :

  $a_{ij} = 1$ se $(v_i, v_j) \in E$, $a_{ij} = 0$ altrimenti

- **Matrice di incidenza** (n x m) :

  $a_{ij} = 1$ se $v_i \in e_j$, $a_{ij} = 0$ altrimenti

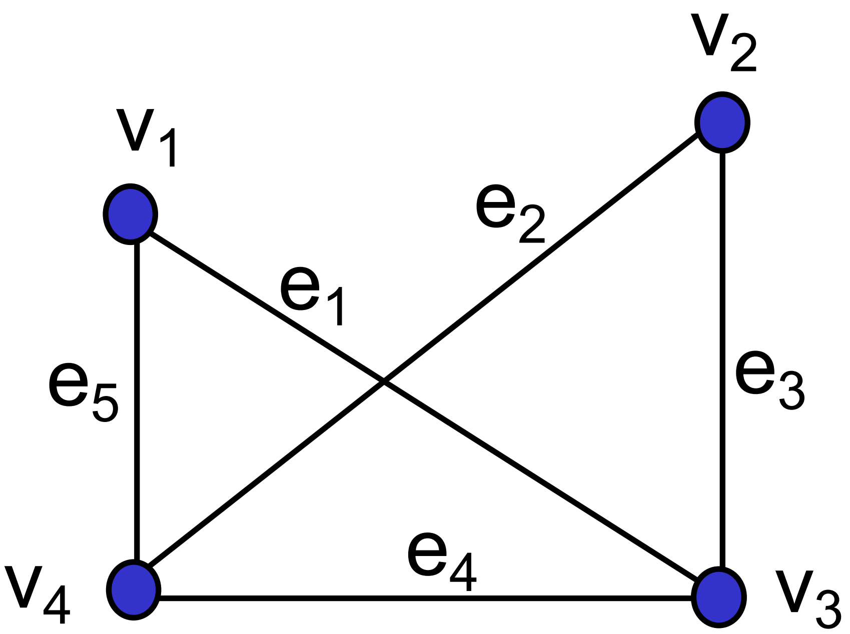
Matrice di Incidenza dei Grafi

- Sia G=(V,E) un **grafo non orientato** con |V|=n ed |E|=m. Denotiamo con $A=[a_{ij}]$, con i=1,...,n e j=1,...,m, la **matrice di incidenza** di G, dove:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ v_i \text{ è } un\ estremo\ di\ e_j \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Matrice di Incidenza dei Grafi

Esempio



$$
A = \begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
\end{array}
$$

matrice di incidenza di un grafo non orientato

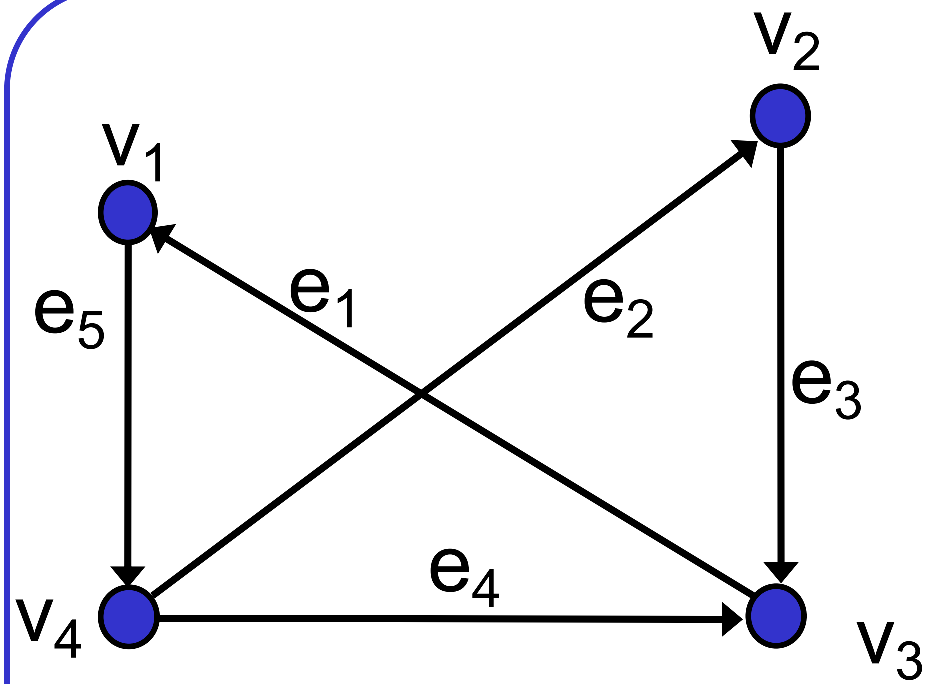
Matrice di Incidenza dei Grafi Orientati

- Sia $G=(V,E)$ un **grafo orientato** con $|V|=n$ ed $|E|=m$. Denotiamo con $A=[a_{ij}]$, con $i=1,...,n$ e $j=1,...,m$, la **matrice di incidenza** di G, dove:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ v_i \text{ è } coda\ di\ e_j \quad (arco\ uscente\ da\ v_i) \\ -1 & se\ v_i \text{ è } testa\ di\ e_j \quad (arco\ entrante\ in\ v_i) \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Matrice di Incidenza dei Grafi Orientati

Esempio



$$A = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \end{array}$$

matrice di incidenza di un grafo orientato

Problema del Flusso a Costo Minimo

Sia G=(V,E) un **grafo connesso e orientato** in cui:

- Ad ogni arco (i,j) è associato un costo c_{ij} che rappresenta il costo da pagare per ogni **unità di flusso** che transita sull'arco (i,j).
- Ad ogni vertice $v \in V$ è associato un valore **intero** b_v dove:

  - $b_v > 0$ indica che il nodo v è un nodo di **offerta**

  - $b_v < 0$ indica che il nodo v è un nodo di **domanda**

  - $b_v = 0$ indica che il nodo v è un nodo di **passaggio**

- La somma di tutti i b_v deve essere uguale a zero (**condizione di bilanciamento**). Ciò che viene prodotto dalle sorgenti viene consumato dalle destinazioni.

Nel problema del **flusso a costo minimo** bisogna far giungere la merce prodotta dai nodi di offerta ai nodi di domanda minimizzando i costi di trasporto.

Problema del Flusso a Costo Minimo: Formulazione

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j\in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k\in BS(i)} x_{ki} = b_i \qquad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in A$$ Intere?

x_{ij} = **quantità di flusso** che transita sull'arco (i,j)

c_{ij} = **costo** di trasporto di una unità di flusso sull'arco (i,j)

b_i = valore intero associato al nodo *i* (ne definisce il **ruolo** nel problema):

$b_i > 0$: nodo di offerta

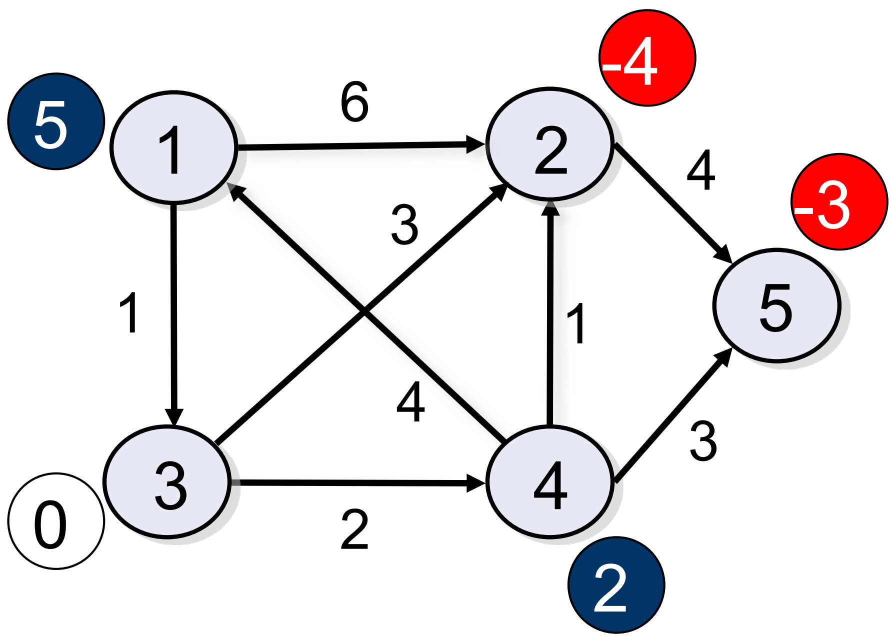
$b_i < 0$: nodo di domanda

$b_i = 0$: nodo di passaggio

Problema del Flusso a Costo Minimo: Esempio

Consideriamo un grafo orientato G=(V,E) rappresentante una rete di trasporto.

L'obiettivo è quello di trasportare, al minimo costo, determinate quantità di merce (unità di flusso) dai nodi di **offerta** a quelli di **domanda** (eventualmente transitando per dei nodi di **passaggio**).



Abbiamo:

- $b_i > 0$: nodo di offerta

  $b_i < 0$: nodo di domanda

  $b_i = 0$: nodo di passaggio

- Un costo $\mathbf{c_{ij} \geq 0}$ per ogni arco (costo per il trasporto di una unità di flusso)

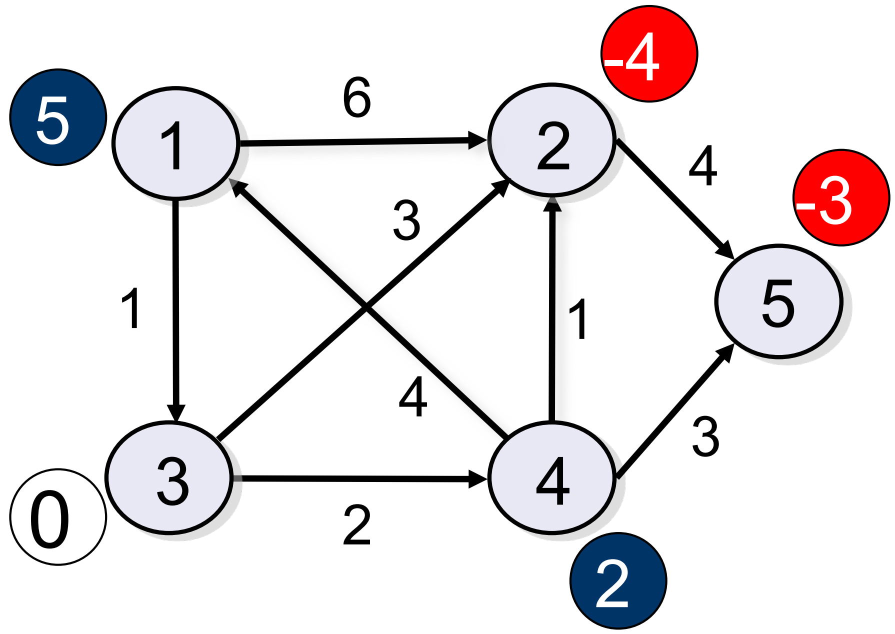
Problema del Flusso a Costo Minimo: Esempio

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j\in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k\in BS(i)} x_{ki} = b_i \qquad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in A$$

Consideriamo una variabile **$x_{ij} \geq 0$**, ∀(i,j) ∈ E, rappresentante **la quantità di flusso** che attraverserà tale arco nella soluzione.



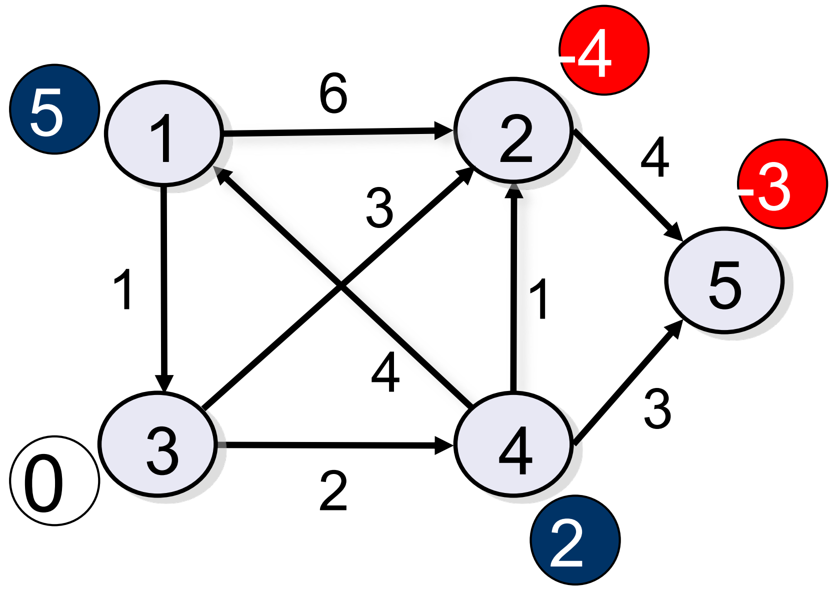
$$\min \quad 6x_{12} + x_{13} + 4x_{25} + 3x_{32} + 2x_{34} + 4x_{41} + x_{42} + 3x_{45}$$

$$\begin{array}{ccccccccccl}
x_{12} & +x_{13} & & & & -x_{41} & & & = & 5 & \textit{nodo } 1\\
-x_{12} & & +x_{25} & -x_{32} & & & -x_{42} & & = & -4 & \textit{nodo } 2\\
& -x_{13} & & +x_{32} & +x_{34} & & & & = & 0 & \textit{nodo } 3\\
& & & & -x_{34} & +x_{41} & +x_{42} & +x_{45} & = & 2 & \textit{nodo } 4\\
& & -x_{25} & & & & & -x_{45} & = & -3 & \textit{nodo } 5
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

Problema del Flusso a Costo Minimo: Esempio

A	(1,2)	(1,3)	(2,5)	(3,2)	(3,4)	(4,1)	(4,2)	(4,5)
1	1	1	0	0	0	-1	0	0
2	-1	0	1	-1	0	0	-1	0
3	0	-1	0	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	-1	1	1	1
5	0	0	-1	0	0	0	0	-1



La matrice A dei vincoli del modello matematico corrisponde alla **matrice di incidenza nodo-arco** del grafo G.

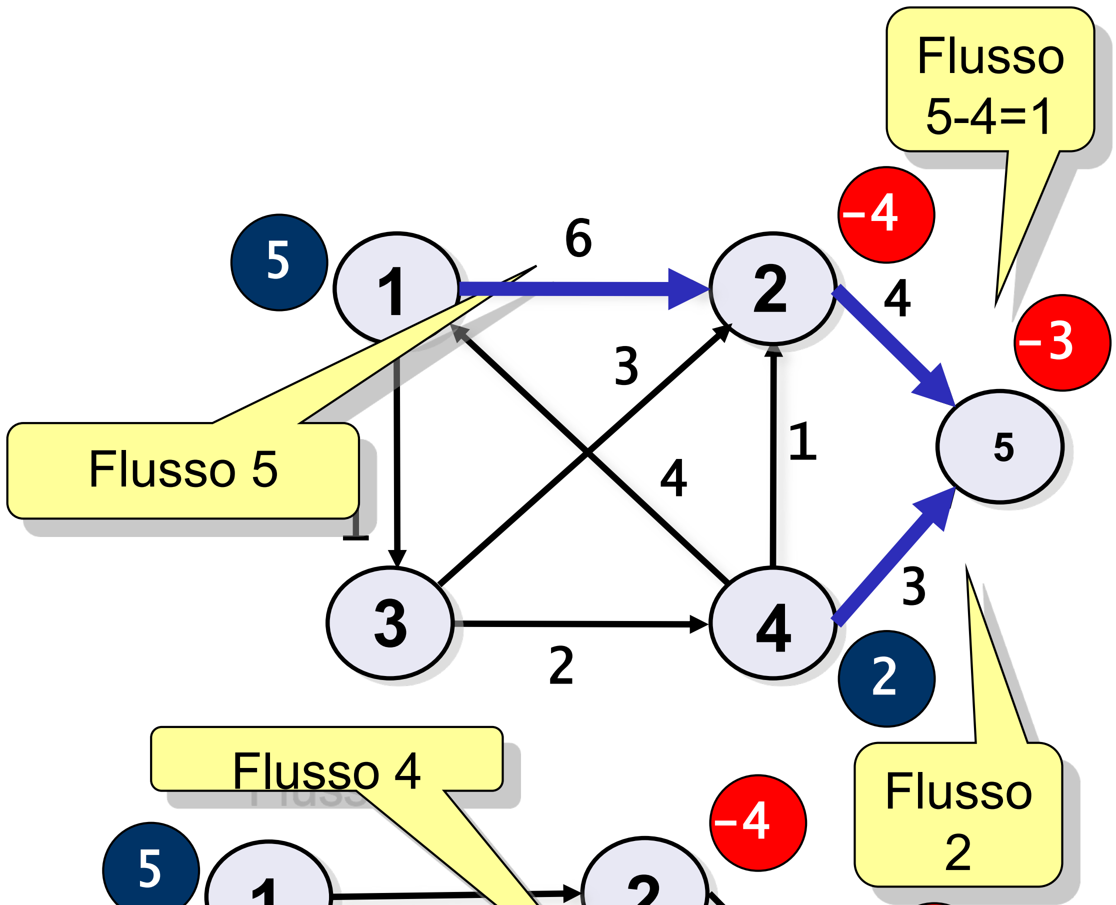
$$\min \quad 6x_{12} + x_{13} + 4x_{25} + 3x_{32} + 2x_{34} + 4x_{41} + x_{42} + 3x_{45}$$

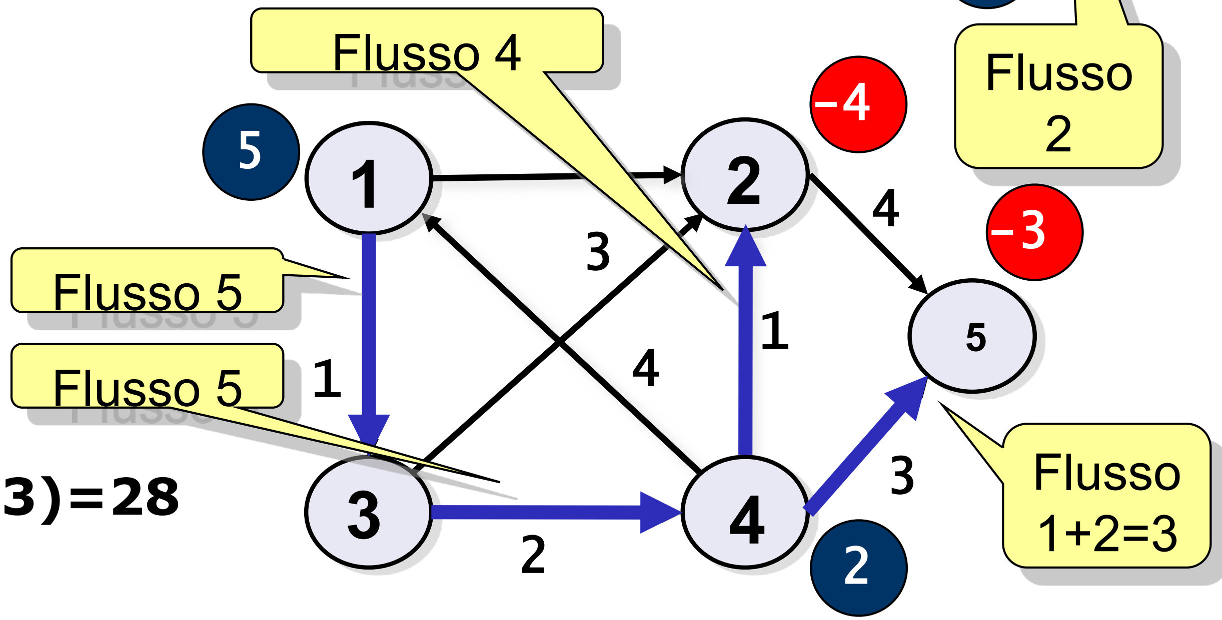
$$\begin{array}{rrrrrrrrcrl}
x_{12} & +x_{13} & & & & -x_{41} & & & = & 5 & \textit{nodo } 1 \\
-x_{12} & & +x_{25} & -x_{32} & & & -x_{42} & & = & -4 & \textit{nodo } 2 \\
 & -x_{13} & & +x_{32} & +x_{34} & & & & = & 0 & \textit{nodo } 3 \\
 & & & & -x_{34} & +x_{41} & +x_{42} & +x_{45} & = & 2 & \textit{nodo } 4 \\
 & & -x_{25} & & & & & -x_{45} & = & -3 & \textit{nodo } 5
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

Problema del Flusso a Costo Minimo: Esempio

Soluzione 1
Costo:
(6*5)+(4*1)+(3*2)=40





Soluzione 2
Costo:
(1*5)+(2*5)+(1*4)+(3*3)=28

Problema del Flusso a Costo Minimo: Formulazione

In forma matriciale:

$$\begin{aligned} \min\ \underline{c}^T \underline{x} \\ A\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

Osservazioni:

1. La matrice A è la matrice di incidenza nodo-arco con dimensione **n*x*m**. Ogni colonna $\underline{a}_{ij}$ è associata all'arco (i,j), ed in particolare abbiamo che: $\underline{a}_{ij} = \underline{e}_i - \underline{e}_j$

($\underline{e}_i$ vettore colonna con tutti 0 eccetto un 1 nella posizione i-ma)

2. Il rango di questa matrice è: **r(A) = n - 1**

Matrici Totalmente Unimodulari

Definizione (totale unimodularità): Una matrice si dice *totalmente unimodulare* (TU) se tutte le sue sottomatrici quadrate (di ogni ordine) hanno determinante uguale a 0, 1 oppure -1.

Osservazione 1: Tutte le componenti di una matrice totalmente unimodulare sono uguali a 0, 1 oppure -1 dato che ogni suo elemento è una matrice quadrata di ordine 1*x*1.

Matrici Totalmente Unimodulari

Teorema 1: La matrici di incidenza nodo-arco A di un grafo orientato è totalmente unimodulare.

Dimostrazione: La dimostrazione è per induzione sulla dimensione k delle sottomatrici di A. Poiché A è una matrici di incidenza nodo-arco, tutti i suoi elementi sono uguali a ± 1 oppure 0 e quindi ogni sottomatrice $1x1$ di A ha determinante uguale a ± 1 oppure 0. Questo dimostra la base dell'induzione ($k = 1$).

Per ipotesi induttiva supponiamo che il determinante di una qualsiasi sottomatrice quadrata $(k-1)x(k-1)$ di A abbia determinante uguale a ± 1 oppure 0.

Sia A_k una sottomatrice di dimensione $k\,x\,k$ di A con $k \geq 2$. Dobbiamo dimostrare che il determinante di A_k è uguale a ± 1 oppure 0. Si noti che ogni colonna di A_k ha *i)* tutte le componenti uguali a zero oppure *ii)* solo un elemento diverso da zero (quindi uguale a ± 1) oppure *iii)* due elementi diversi da zero (un $+1$ e un -1).

Matrici Totalmente Unimodulari

Analizziamo le tre casi precedenti.

Se una colonna di A_k è nulla allora det(A_k) = 0.

Se una colonna di A_k ha un solo elemento diverso da zero , diciamo a_{ij}, allora calcolando il determinante sulla colonna j-esima, si ha che det(A_k) = $\pm 1 \cdot$ det(A_{k-1}) dove A_{k-1} è la sottomatrice di A_k ottenuta rimuovendo la i-esima riga e j-esima colonna di A_k. Dall'ipotesi induttiva sappiamo che det(A_{k-1}) è uguale a ± 1 oppure 0 e quindi det(A_k) è uguale a ± 1 oppure 0.

L'ultimo caso si verifica quando tutte le colonne di A_k hanno due elementi diversi da zero ossia un $+1$ e un -1. In questo caso, poiché effettuando la somma di tutte le righe di A_k si ottiene il vettore nullo, tali righe sono linearmente dipendenti e quindi det(A_k) = 0.

■

Matrici Totalmente Unimodulari

Corollario 1: Sia A la matrice di incidenza nodo-arco di un grafo orientato G, e sia A_B una sottomatrice quadrata di A non singolare. Si ha che A_B^{-1} ha tutte le componenti intere.

Dimostrazione: Poiché A è una matrice di incidenza nodo-arco, dal Teorema 1 sappiamo che A è totalmente unimodulare. Per calcolare la matrice inversa di A_B utilizziamo la formula:

$$A_B^{-1} = \frac{1}{det(A_B)} \begin{pmatrix} cof(A_{B_{11}}) & cof(A_{B_{12}}) & \dots & cof(A_{B_{1(n-1)}}) \\ cof(A_{B_{21}}) & cof(A_{B_{22}}) & \dots & cof(A_{B_{2(n-1)}}) \\ cof(A_{B_{(n-1)1}}) & cof(A_{B_{(n-1)2}}) & \dots & cof(A_{B_{(n-1)(n-1)}}) \end{pmatrix}^T$$

Poiché A_B è una sottomatrice non singolare di A allora $\det(A_B) = \pm 1$.

Inoltre $cof\left(A_{B_{ij}}\right) = (-1)^{i+j}\, minor(A_{B_{ij}})$

= -1, 0, +1

(perché $A_{B_{ij}}$ è una sottomatrice quadrata di A)

Quindi $\frac{cof(A_{ij})}{\det(A_B)}$ è sempre un intero. ■

Matrici Totalmente Unimodulari

Teorema 2: Tutti i vertici del poliedro definito dal modello matematico del problema del flusso a costo minimo hanno coordinate intere.

Dimostrazione: Sia A_B una sottomatrice di A dimensioni $(n-1)x(n-1)$ non singolare. La soluzioni di base ammissibili associate ad A_B ha la struttura

$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x_B} \\ \underline{x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1}\underline{b} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$ e corrisponde ad un vertice del poliedro.

Dobbiamo quindi dimostrare che il vettore $A_B^{-1}\underline{b}$ ha tutte le componenti intere.

Dal Corollario 1 sappiamo che A_B^{-1} ha tutte le componenti intere. Inoltre, per ipotesi, $\underline{b}$ ha tutte le componenti intere, quindi $A_B^{-1}\underline{b}$ ha tutte le componenti intere.

$\blacksquare$