Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice) Anno Acc. 2018-2019
Prova scritta - 15 luglio 2019

Nome e Cognome, email: Matricola: **Firma**:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	**Tot.**	7
							SI NO

Leggere le tracce con attenzione!
La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.
È vietato copiare, collaborare o comunicare con altri studenti. È vietato l'utilizzo di libri, appunti o lucidi.

I risultati della prova scritta e le informazioni per la conclusione dell'esame saranno pubblicati sulla piattaforma e-learning.

1. *(15 punti)*

   – Fornire la definizione di espressione regolare, indicando con chiarezza il linguaggio associato.
   – Fornire un'espressione regolare per il linguaggio L delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ che contengono almeno una occorrenza del carattere a.

2. *(15 punti)*

   (a) Definire l'operazione di intersezione di due linguaggi.

   (b) Siano $L_1 = \{x \in \{a, b\}^* \mid x$ ha almeno un'occorrenza del carattere $a\}$ ed $L_2 = \{y \in \{a, b\}^* \mid y$ ha almeno un'occorrenza del carattere $b\}$. Definire un automa finito deterministico $\mathcal{A}$ che riconosca $L = L_1 \cap L_2$ cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L$.

3. *(15 punti)*

   Fornire la definizione di funzione calcolabile. Definire una macchina di Turing deterministica M che calcoli la funzione $f(x) = x + 2$, con x intero positivo. Si assuma che l'input sia la rappresentazione unaria di x e si definisca M in modo che $f(x)$ sia ugualmente rappresentato in unario. Per esempio se $x = 4$, l'input sarà 1111 ed $f(x)$ sarà rappresentato da 111111. Non ci sono vincoli sulla posizione della testina all'arresto.

4. *(15 punti)*

   Definire il concetto di riduzione mediante funzione di un linguaggio A a un linguaggio B. Per ognuna delle seguenti due affermazioni, provare che è vera o mostrare che è falsa. Occorre fornire gli enunciati dei risultati intermedi utilizzati.

   (a) Non esiste alcuna riduzione da A_{TM} a $\{ab, ba\}$.

   (b) Non esiste alcuna riduzione da $\{ab, ba\}$ al linguaggio $\emptyset$.

5. *(15 punti)*

   Data la seguente espressione booleana in 3-CNF

   $$\phi = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee \overline{x}_4) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4)$$

   definire il grafo G e l'intero k tali che $\langle G, k\rangle$ sia l'immagine di $\langle \Phi \rangle$ nella riduzione polinomiale di 3-SAT a $CLIQUE$

6. *(15 punti)*

   Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, con insieme V di nodi e insieme E di archi. Un sottoinsieme V' di nodi di G è un *independent set* in G se per ogni u, v in V', la coppia (u, v) non è un arco, cioè u e v non sono adiacenti.

   (a) Definire il linguaggio $INDEPENDENT\text{-}SET$ associato al seguente problema di decisione:

   Sia G un grafo e k un intero positivo. G ha un independent set di cardinalità k?

   (b) Dato un grafo $G = (V, E)$, il grafo complemento di G è il grafo $G' = (V, E')$, dove

   $$E' = \{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v \text{ e } (u, v) \notin E\}.$$

   Provare formalmente che la funzione f che associa alla stringa $\langle G, k\rangle$ la stringa $\langle G', k\rangle$, è una riduzione polinomiale da $CLIQUE$ a $INDEPENDENT\text{-}SET$.

7. Dimostrare formalmente e con precisione l'affermazione seguente:

   $$\forall L \in NP \quad L \leq_P \overline{L} \;\Rightarrow\; NP = coNP.$$