

Lezioni di Ricerca Operativa

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 23

- Problema dell'albero di copertura minimo
- Algoritmo di Kruskal
- Algoritmo di Prim

R. Cerulli — F. Carrabs

Alberi

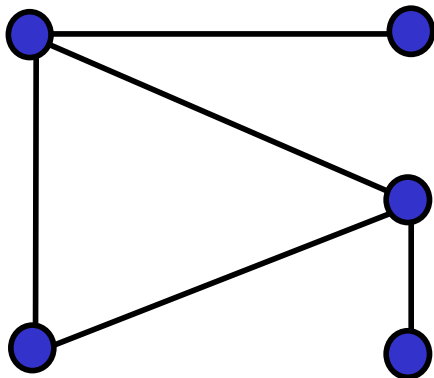
Definizione

Un **albero** è un grafo non orientato, connesso e aciclico.

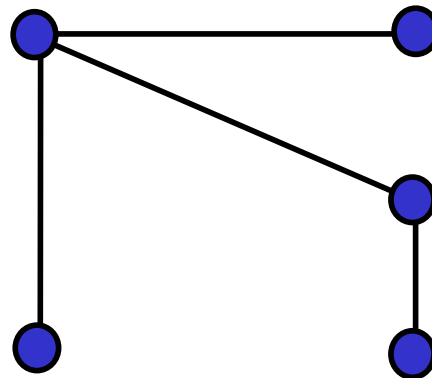
Definizione

Un **foresta** è un grafo non orientato e aciclico.

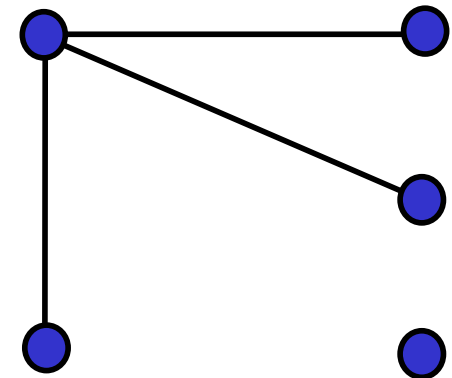
Esempio



grafo non aciclico



albero

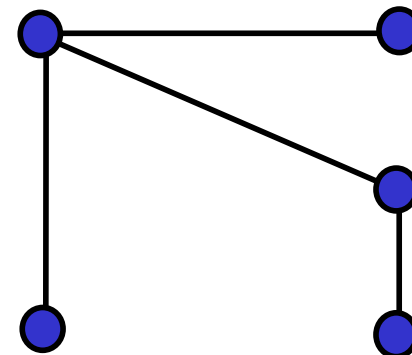


grafo aciclico
(foresta)

Proprietà degli alberi

Dato un grafo $G=(V,E)$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

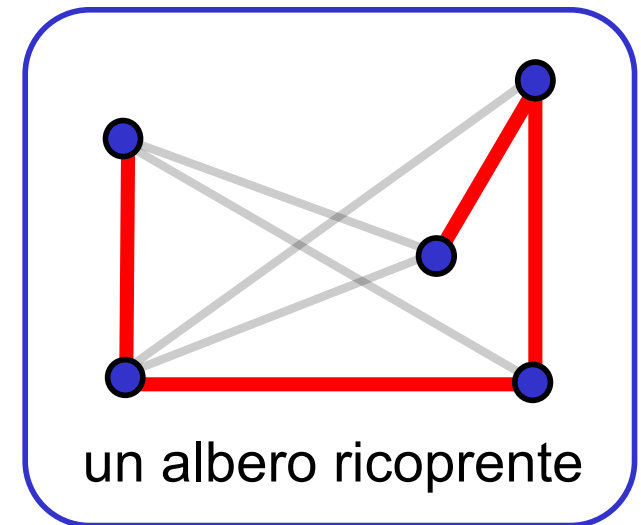
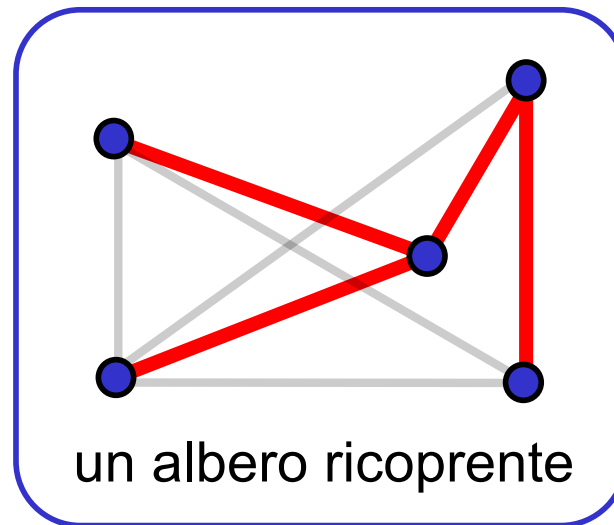
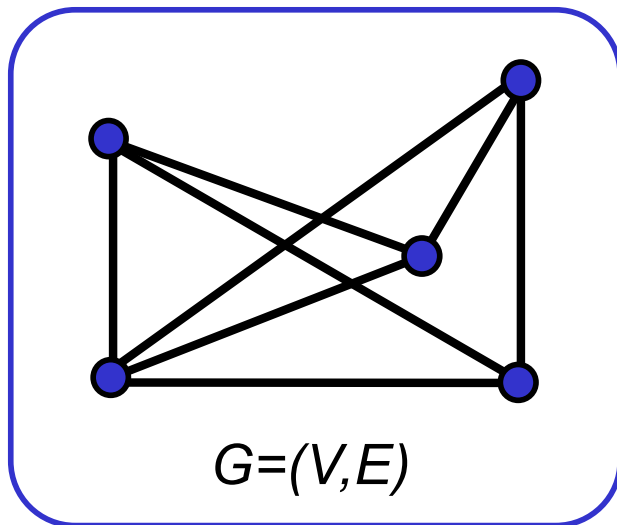
- G è un albero;
- G è aciclico e $|E| = |V| - 1$;
- G è connesso e $|E| = |V| - 1$;
- ogni coppia di nodi di G è connessa da un unico cammino;
- G è connesso ma se viene rimosso un qualsiasi arco da E il grafo risultante è disconnesso;
- G è aciclico ma se viene aggiunto un qualsiasi arco ad E il grafo risultante è ciclico.



Alberi Ricoprenti

Sia $G=(V,E)$ un grafo non orientato e connesso.

Un **albero ricoprente** (**spanning tree**) di G è un sottografo T di G tale che: T è un albero che contiene tutti i nodi di G .



Un grafo può avere più alberi ricoprenti.

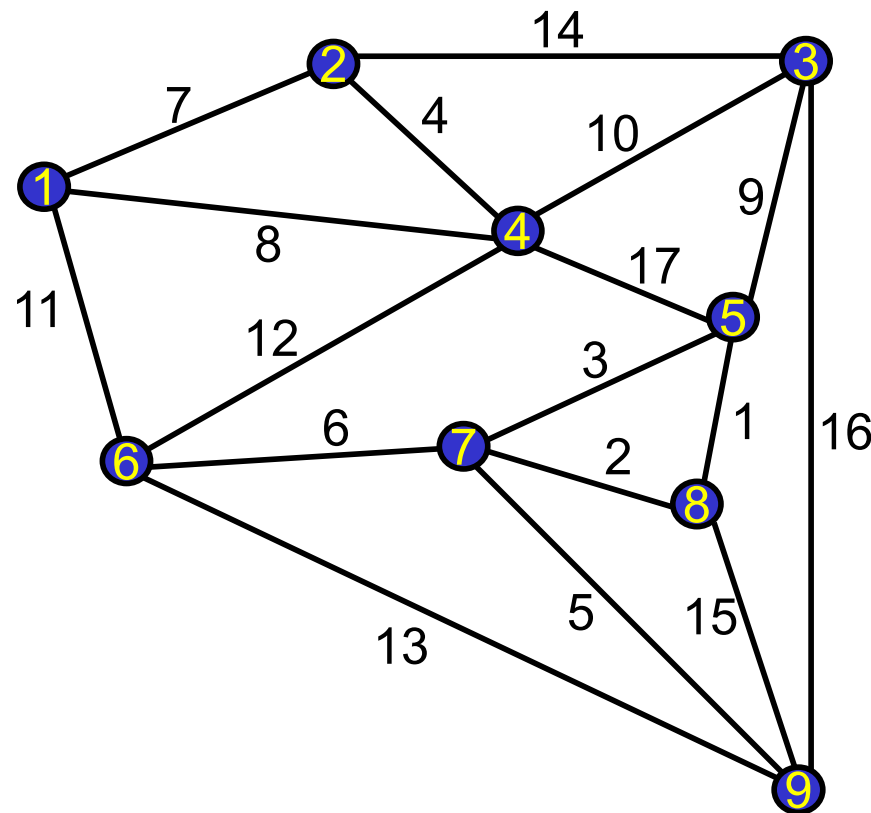
Il Problema del Minimo Albero Ricoprente (Minimum Spanning Tree Problem)

Sia $G=(V,E)$ un grafo non orientato e connesso dove ad ogni arco $e_i \in E$ è associato un costo c_i .

Il **costo** di un albero ricoprente T di G è dato dalla somma dei costi degli archi che lo compongono.

Problema: determinare l'albero ricoprente di G di costo minimo.

Esempio



Applicazioni

- Progettare una rete in fibra ottica che connetta, a costo minimo, un insieme di punti;
- determinare la connessione tra città attraverso una rete di condutture (del gas, dell'acqua,...) a costo minimo;
- progettare i circuiti elettronici per collegare fra loro le diverse componenti minimizzando la quantità di filo da utilizzare;

Modello Matematico 1: Subtour Elimination

$$\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = n - 1$$

$$\sum_{\substack{(i,j) \in E \\ i \in S, j \in S}} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset V, |S| \geq 3$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Modello Matematico 1: Cut Formulation

$$\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = n - 1$$

$$\sum_{\substack{(i,j) \in E \\ i \in S, j \in V \setminus S}} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset V, |S| \geq 1$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Algoritmi Risolutivi

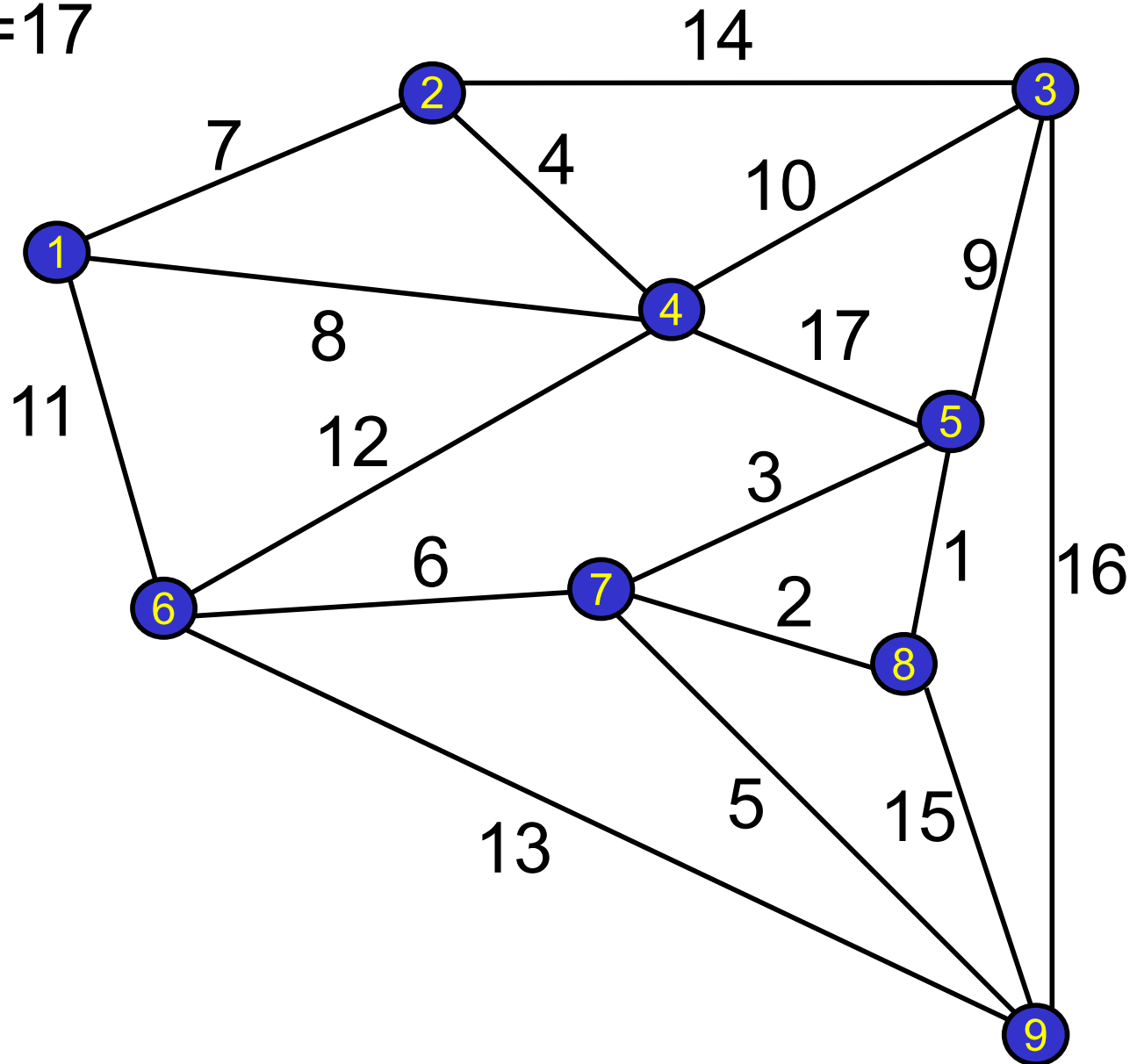
- algoritmo di Kruskal (Greedy Algorithm)
- algoritmo di Prim

Algoritmo di Kruskal (Minimum Spanning Tree)

Sia $G=(V,E)$ un grafo non orientato con n nodi ed m archi.

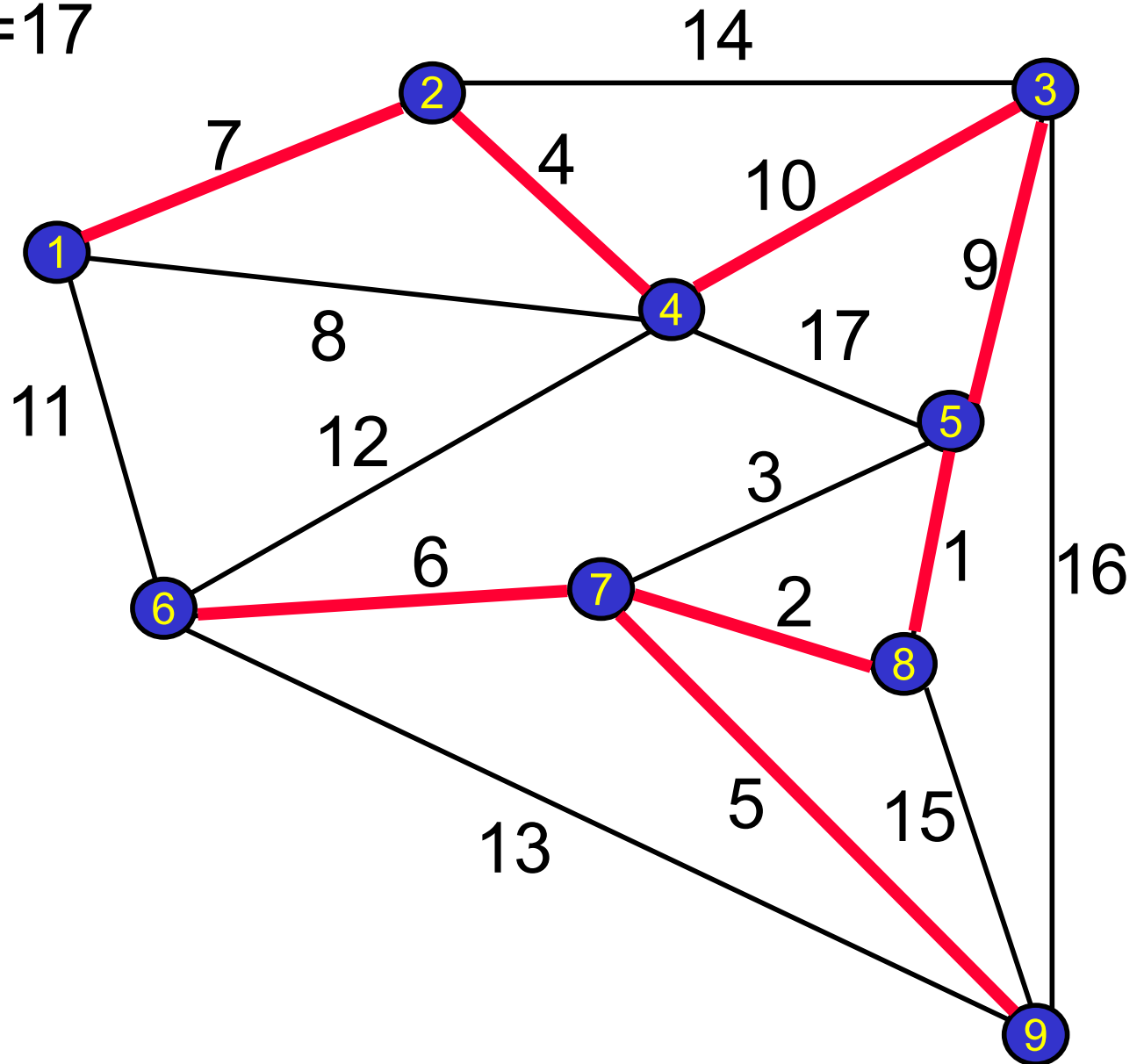
1. Ordinare gli archi in E in base al loro costo, in modo non decrescente. Siano $E^0=\emptyset$, $ST^0=(V, \emptyset)$, $k=1$ ed $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$ la sequenza ordinate degli archi;
2. All'iterazione k -esima, se $(V, E^{k-1} \cup \{e_k\})$ è un grafo aciclico allora $ST^k=(V, E^k)$ con $E^k=E^{k-1} \cup \{e_k\}$; altrimenti e_k viene scartato, $E^k=E^{k-1}$ e $ST^k=ST^{k-1}$;
3. Se $|E^k|=n-1$ l'algoritmo si arresta ed ST^k è l'albero ricoprente cercato, altrimenti $k=k+1$ e si ritorna al passo (2).

Esempio: $n=9$ $m=17$



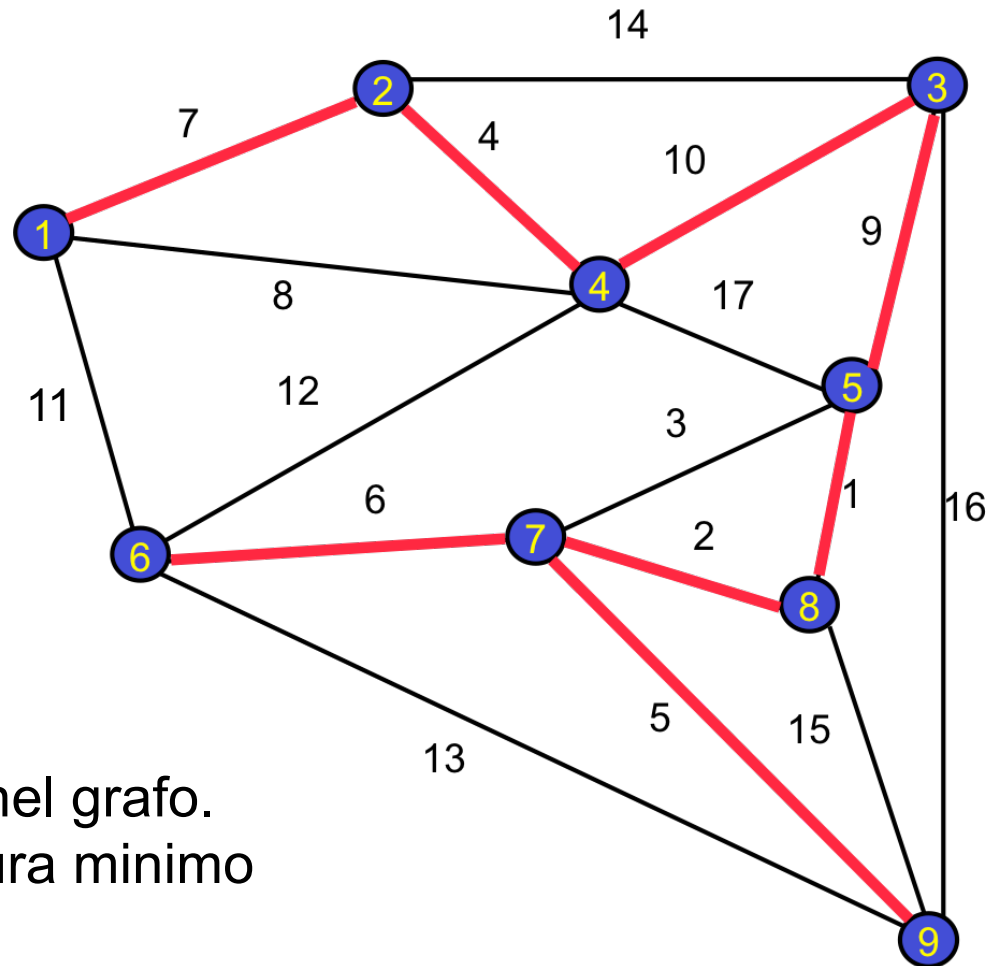
(5,8)	(7,8)	(5,7)	(2,4)	(7,9)	(6,7)	(1,2)	(1,4)	(3,5)	(3,4)	(1,6)	(4,6)	(6,9)	(2,3)	(8,9)	(3,9)	(4,5)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Esempio: $n=9$ $m=17$



(5,8)	(7,8)	(5,7)	(2,4)	(7,9)	(6,7)	(1,2)	(1,4)	(3,5)	(3,4)	(1,6)	(4,6)	(6,9)	(2,3)	(8,9)	(3,9)	(4,5)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Esempio: $n=9$ $m=17$



- Sia $4+k$ il nuovo peso dell'arco $(2,4)$ nel grafo. Per quali valori di k l'albero di copertura minimo non cambia?
- Sia $8+k$ il nuovo peso dell'arco $(1,4)$ in G . Per quali valori di k l'arco $(1,4)$ verrà inserito nella soluzione ottima?

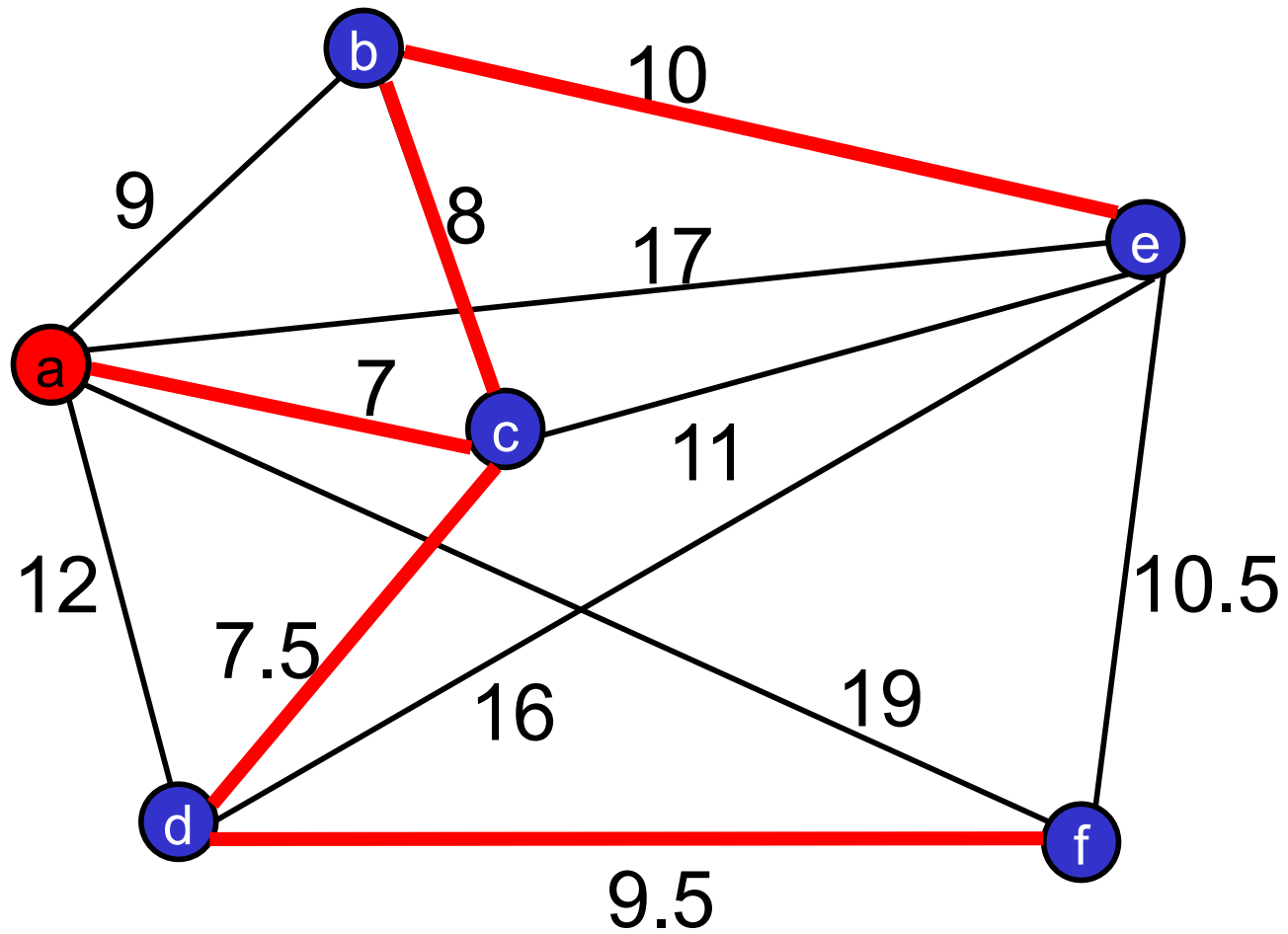
(5,8)	(7,8)	(5,7)	(2,4)	(7,9)	(6,7)	(1,2)	(1,4)	(3,5)	(3,4)	(1,6)	(4,6)	(6,9)	(2,3)	(8,9)	(3,9)	(4,5)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Algoritmo di Prim (Minimum Spanning Tree)

Sia $G=(V,E)$ un grafo non orientato con n nodi ed m archi.

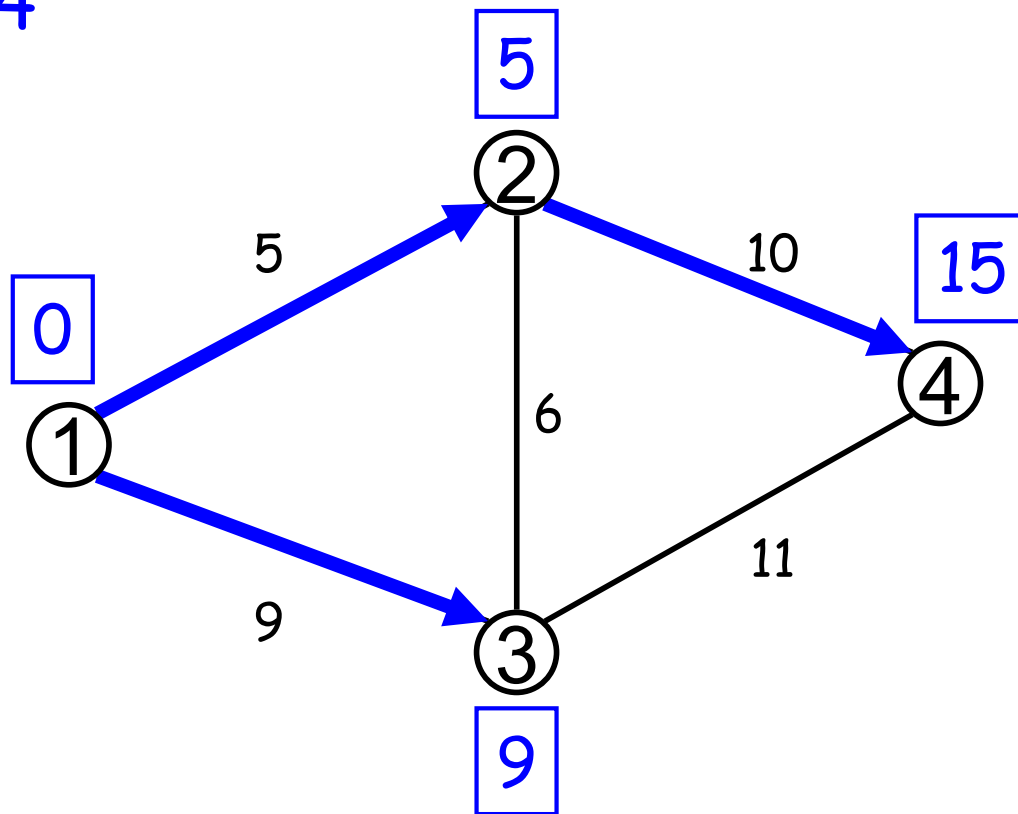
1. Selezionare un qualsiasi vertice $v_s \in V$ e porre $V^0 = \{v_s\}$, $E^0 = \emptyset$, $k=1$.
2. Dato il taglio $[V^{k-1}, V \setminus V^{k-1}]$, selezionare l'arco del taglio (v_i, v_h) avente costo minimo e porre $V^k = V^{k-1} \cup \{v_h\}$ e $E^k = E^{k-1} \cup \{(v_i, v_h)\}$
3. Se $|E^k| = n-1$ l'algoritmo si arresta e $ST=(V^k, E^k)$ è l'albero ricoprente cercato, altrimenti $k=k+1$ e si ritorna al passo (2).

Esempio: $n=6$ $m=12$



Albero dei Cammini minimi \neq albero di copertura minimo

SPT=24



Albero dei Cammini minimi \neq albero di copertura minimo

SPT=24

MST=21

