Lezioni di Ricerca Operativa

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 14

Teoria della dualità:

- Teorema forte della dualità
- Teorema degli scarti complementari
- Relazioni tra il primale e il duale

R. Cerulli – F. Carrabs

2. Teorema forte della dualità

Data una coppia di problemi primale duale, (P) e (D), se uno dei due problemi ammette una soluzione ottima finita, allora anche l'altro problema ammette una soluzione ottima finita ed i valori ottimi delle funzioni obiettivo coincidono, i.e.

$$\underline{c}^T \underline{x}^* = \underline{b}^T \underline{w}^*$$

$$(P) \quad min \ \underline{c}^T \underline{x} \qquad\qquad (D) \quad max \ \underline{b}^T \underline{w}$$

$$\mathrm{A}\underline{x} = \underline{b} \qquad\qquad \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{x} \geq 0 \qquad\qquad \underline{w} \quad n.v.$$

Dim.: Sia $\underline{x}^*$ la soluzione ottima del primale e sia B la base ad esso associata.

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} \underline{x}_B^* \\ \underline{x}_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1}\underline{b} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \qquad \text{quindi} \qquad \underline{c}^T\underline{x}^* = \underline{c}_B^T\underline{x}_B^* = \underline{c}_B^T A_B^{-1}\underline{b}$$

Sia $\underline{w}^{*T} = \underline{c}_B^T A_B^{-1}$. Vogliamo dimostrare che questo vettore è una soluzione ammissibile ed ottima per (D).

$$(P) \quad min \ \underline{c}^T \underline{x}$$

$$\mathrm{A}\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

$$(D) \quad max \ \underline{b}^T \underline{w}$$

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{w} \quad n.v.$$

- Ammissibilità ($\underline{w}^{*T} = \underline{c}_B^T A_B^{-1}$):

$$A^T\underline{w}^* \leq \underline{c} \;\Longrightarrow\; \underline{w}^{*T}A \leq \underline{c}^T \;\Longrightarrow\; \underline{c}_B^T A_B^{-1} A \leq \underline{c}^T \;\Longrightarrow\; \underline{c}_B^T A_B^{-1} A - \underline{c}^T \leq 0$$

$$\underline{c}_B^T A_B^{-1}\,[A_B \mid A_N] - \left[\underline{c}_B^T \mid \underline{c}_N^T\right] = \left[\underline{c}_B^T A_B^{-1} A_B \mid \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N\right] - \left[\underline{c}_B^T \mid \underline{c}_N^T\right] =$$

$$= \left[\underline{c}_B^T - \underline{c}_B^T \mid \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N - \underline{c}_N^T\right] = \left[\underline{0} \mid \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N - \underline{c}_N^T\right] \leq \underline{0}^T$$

Poichè $\underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N - \underline{c}_N^T \leq \underline{0}^T$ è la condizione di ottimalità per (P) (problema di minimizzazione), l'ammissibilità è verificata.

- Ottimalità:

Il valore della funzione obiettivo duale in $\underline{w}^{*T}$ è:

$$\underline{w}^{*T}\underline{b} = \underline{c}_B^T A_B^{-1}\underline{b} = \underline{c}_B^T \underline{x}_B^* = \underline{c}^T \underline{x}^*$$

Dal Corollario 1 del teorema debole della dualità, poichè $\underline{w}^{*T}\underline{b} = \underline{c}^T \underline{x}^*$ allora $\underline{w}^{*T}$ è ottima per (D).

■

Dal teorema della dualità forte ricaviamo che, data la base ottima B del primale, è possibile calcolare velocemente la soluzione ottima del duale (D) tramite l'equazione:

$$\underline{w}^{*T} = \underline{c}_B^T A_B^{-1}$$

Riassumendo

Se (P) è illimitato $\Longrightarrow$ (D) non è ammissibile

(P) ha soluzione ottima finita $\Longleftrightarrow$ (D) ha soluzione ottima finita

(ed i valori delle loro f.o. coincidono)

Se (P) inammissibile $\Longrightarrow$ (D) illimitato o inammissibile

Il Teorema dello “scarto complementare” (Complementary Slackness Theorem)

Consideriamo la coppia di problemi *(P)* e *(D)* in forma canonica e trasformiamo i vincoli dei due problemi in vincoli di uguaglianza

$$(P)\quad min\ \underline{c}^T \underline{x} \qquad\longrightarrow\qquad min\ \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} \geq \underline{b} \qquad\qquad A\underline{x} - I\underline{s} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \qquad\qquad \underline{x} \geq \underline{0} \quad n \text{ var.}$$

$$\underline{s} \geq \underline{0} \quad m \text{ var. di surplus}$$

$$(D)\quad max\ \underline{b}^T \underline{w} \qquad\longrightarrow\qquad max\ \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A^T\underline{w} \leq \underline{c} \qquad\qquad A^T\underline{w} + I\underline{v} = \underline{c}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0} \qquad\qquad \underline{w} \geq \underline{0} \quad m \text{ var.}$$

$$\underline{v} \geq \underline{0} \quad n \text{ var. di slack}$$

Ad ogni variabile di *(P)* è associato un vincolo di *(D)* e quindi la corrispondente variabile di slack/surplus e viceversa.

3. Teorema della slackness complementare

Data la coppia di soluzioni $\underline{x}$ e $\underline{w}$ rispettivamente ammissibili per (P) e (D), $\underline{x}$ e $\underline{w}$ sono ottime per (P) e (D) se e solo se

$$s_j w_j = \left(\underline{a}^j \underline{x} - b_j\right) w_j = 0 \qquad j = 1, \dots, m$$

$$v_i x_i = \left(c_i - \underline{a}_i^T \underline{w}\right) x_i = 0 \qquad i = 1, \dots n$$

dove $\underline{a}^j$ è la *j*-esima riga di A

$\underline{a}_i$ è la *i*-esima colonna di A

Esercizio

$$\max \quad -x_1 + \frac{3}{2}x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1. Scrivere il duale del problema e determinare una coppia di soluzioni primale-duale ammissibile.
2. Verificare che le soluzioni trovare soddisfano il teorema debole della dualità.
3. Verificare se le soluzioni trovate sono ottime per i rispettivi problemi.
4. Risolvere graficamente il primale ed individuare il punto di ottimo e la base B.
5. Calcolare la soluzione ottima del duale a partire dalla base ottima B.
6. Verificare utilizzando gli scarti complementari che le soluzioni trovate nei due punti precedenti siano effettivamente ottime.

Esercizio

$$(P) \qquad max\ z = -x_1 + \frac{3}{2}x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$(D) \qquad min\ g = 4w_1 + 5w_2$$

$$-w_1 - \frac{1}{2}w_2 \geq -1$$

$$w_1 + w_2 \geq \frac{3}{2}$$

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$$

Sol. Ammissibile per (P)

$$x_1 = 1, x_2 = 4 \implies z = 5$$

Sol. Ammissibile per (D)

$$w_1 = 0, w_2 = 2 \implies g = 10$$

$$z = 5 \leq 10 = g$$

Il Teorema debole è verificato?

Sol. Ammissibile per (P)

$$x_1 = 2, x_2 = 6 \implies z = 7$$

Sol. Ammissibile per (D)

$$w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = 1 \implies g = 7$$

$$max\ \ z = -x_1 + \frac{3}{2}x_2$$

$$-x_1 + x_2 \le 4$$

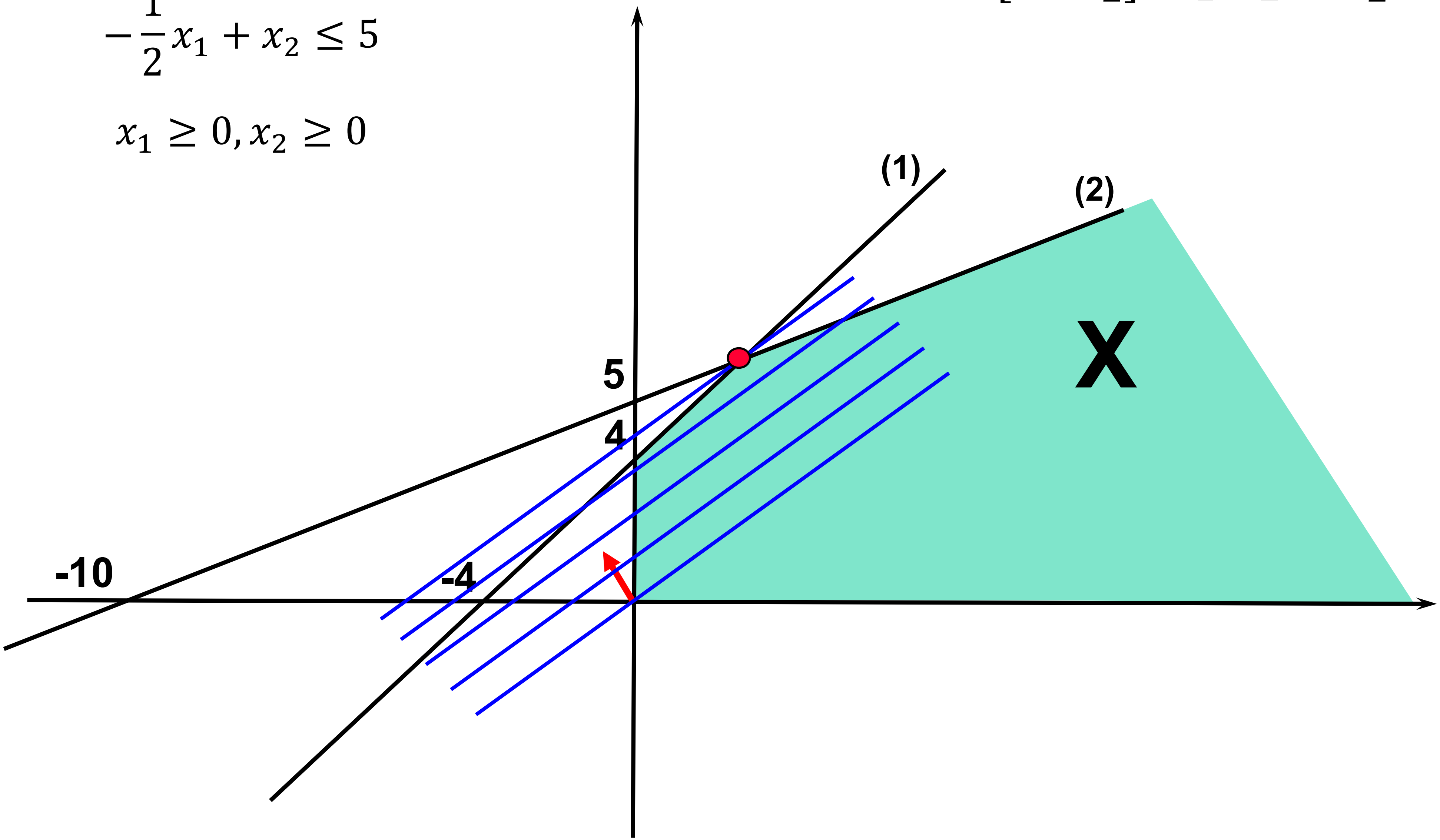
$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 \le 5$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Punto di ottimo $\underline{x}$ = (2,6)

Base ottima B = {1,2}

$$w^* = c_B A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = [\frac{1}{2} \quad 1]$$



Esercizio

$$(P) \qquad max\ \ z = -x_1 + \frac{3}{2}x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(P) \qquad max\ \ z = -x_1 + \frac{3}{2}x_2$$

$$-x_1 + x_2 + s_1 = 4$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + s_2 = 5$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{s} \geq \underline{0}$$

$$(D) \qquad min\ g = 4w_1 + 5w_2$$

$$-w_1 - \frac{1}{2}w_2 \geq -1$$

$$w_1 + w_2 \geq \frac{3}{2}$$

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(D) \qquad min\ g = 4w_1 + 5w_2$$

$$-w_1 - \frac{1}{2}w_2 - v_1 \geq -1$$

$$w_1 + w_2 - v_2 \geq \frac{3}{2}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0}$$

Esercizio

$$(P) \quad max \ z = -x_1 + \frac{3}{2}x_2$$

$$-x_1 + x_2 + s_1 = 4$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + s_2 = 5$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{s} \geq \underline{0}$$

$$(D) \quad min \ g = 4w_1 + 5w_2$$

$$-w_1 - \frac{1}{2}w_2 - v_1 \geq -1$$

$$w_1 + w_2 - v_2 \geq \frac{3}{2}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0}$$

Condizioni degli scarti complementari: $s_j w_j = 0$, $v_i x_i = 0$

$$\underbrace{(4 + x_1 - x_2)}_{s_1} w_1 = (4 + 2 - 6)\frac{1}{2} = 0 * \frac{1}{2} = 0$$

$$\underbrace{(5 + \frac{1}{2}x_1 - x_2)}_{s_2} w_2 = (5 + 1 - 6) * 1 = 0 * 1 = 0$$

$$\underbrace{(-w_1 - \frac{1}{2}w_2 + 1)}_{v_1} x_1 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right) * 2 = 0 * 2 = 0$$

$$\underbrace{(w_1 + w_2 - \frac{3}{2})}_{v_2} x_2 = \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2}\right) * 6 = 0 * 6 = 0$$

Sol. Ammissibile per (P)

$$x_1 = 2, x_2 = 6$$

Sol. Ammissibile per (D)

$$w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = 1$$