Ricerca Operativa
- Simplesso
- Dualità
- Grafi

Scritto da Carmine D’Angelo e Emanuele Vitale

RICERCA OPERATIVA

Si occupa dello sviluppo e dell'applicazione di metodi matematici per la soluzione di problemi di decisione (ottimizzazione) che si presentano in molteplici e diversi settori della vita reale. La soluzione che da è quella ottima.

Esempi Applicativi

- Problemi in ambito industriale:

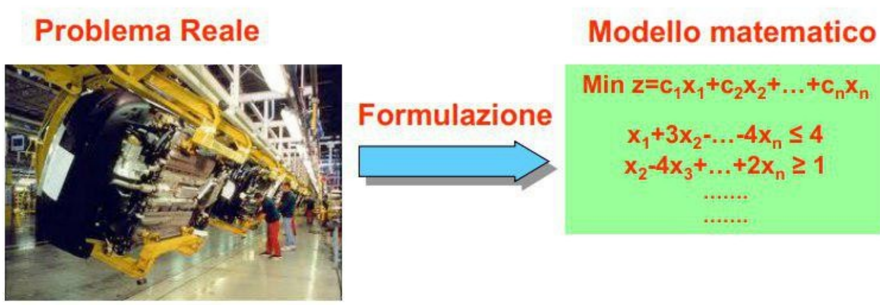
- **Pianificazione della produzione:** determinare i livelli di produzione e/o l'utilizzazione di risorse; ad es. allocazione ottima di risorse = distribuzione di risorse limitate tra alternative concorrenti in modo da minimizzare il costo o massimizzare il guadagno.
- **Scheduling**

- Problemi di progettazione ottima

- **VLSI design** (allocazione ottima di componenti elettroniche) disegnare una piastra madre in modo che, ad esempio, siano minimizzate le lunghezze dei percorsi dei segnali elettrici

Modello matematico

Con la ricerca operativa i problemi reali vengono affrontati definendone una rappresentazione quantitativa (modello matematico). La soluzione dei problemi è cercata per mezzo di tecniche (algoritmi) di ottimizzazione.



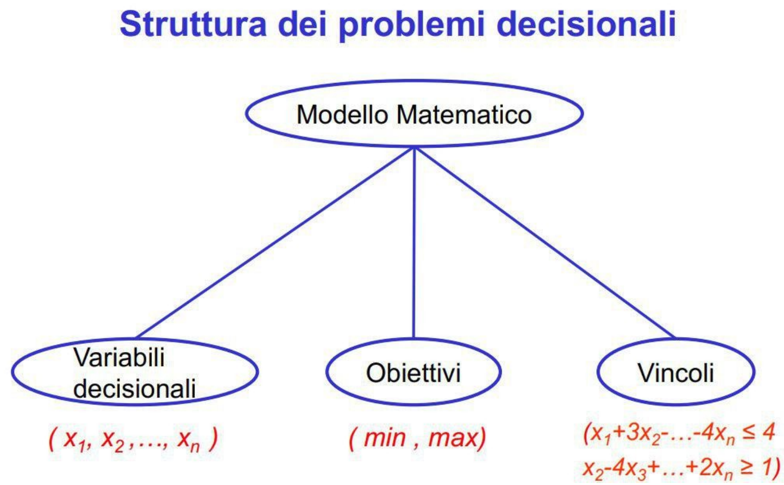
Aspetto fondamentale della Ricerca Operativa:
Identificare un modello matematico con cui studiare in modo sistematico il problema decisionale

Approccio Modellistico

La costruzione di modelli matematici per la soluzione di problemi reali avviene attraverso diverse fasi:

- **Analisi del problema:** consiste nell'analisi della struttura del problema per individuare i legami logico funzionali e gli obiettivi.
- **Costruzione del modello:** si descrivono in termini matematici le caratteristiche principali del problema.
- **Analisi del modello:** prevede la deduzione per via analitica, in riferimento a determinate classi di problemi, di alcune importanti proprietà quali esistenza ed unicità della soluzione ottima, condizioni di ottimalità e stabilità in caso di variazioni.

- **Soluzione numerica:** si individua mediante opportuni algoritmi di calcolo la cui soluzione deve essere verificata dal punto di vista applicativo.
- **Validazione del modello:** avviene attraverso una verifica sperimentale oppure con metodi di simulazione.



- **Variabili decisionali**: sono le variabili del problema e rappresentano la decisione che si prenderà, es:(x_1 = panda, x_2 = punto, ecc…), si scelgono ponendoci come domanda: *cosa devo decidere?*
- **Obiettivo:** minimizzare o massimizzare qualcosa.
- **Vincoli:** per avere una soluzione ottimale del problema.

Formulazione dei problemi decisionali

- **Decisione:** processo di selezione tra più alternative.
- **Alternative finite o infinite**
  - **finite:** NP.
  - **infiniti:** P, è il più facile perché la soluzione migliore si trova sempre in un range.
- **Alternative definite esplicitamente o implicitamente:**
  - **esplicite:** sono elencate.
  - **implicite:** rappresentate attraverso dei vincoli.
- **Scelta sulla base di uno o più criteri (obiettivi).**
- **Condizioni di certezza e incertezza:**
  - **certezza:** dati precisi.
  - **incertezza:** dati imprecisi.

Caratteristiche dei problemi che saranno considerati:

- Condizioni di certezza (problemi deterministici)
- Presenza di un solo criterio (singolo obiettivo)

Esempio di esercizio:
Supponiamo che ci siano tre lavori da svolgere: **stuccare, imbiancare e levigare.** Abbiamo a disposizione tre persone **Mario, Luca ed Andrea** che sanno svolgere questi tre lavori ma con differenti tempistiche come indicato nella seguente tabella (i valori rappresentano le ore necessarie ad ogni persona per portare a termine il rispettivo lavoro).

	STUCCA	IMBIANCA	LEVIGA
MARIO	3	1	2
LUCA	2	1.5	1.5
ANDREA	3	1.5	3

Il nostro obiettivo è quello di assegnare ad ogni persona un lavoro e ad ogni lavoro una persona al fine di minimizzare le ore totali necessarie per svolgere i tre lavori.

Consideriamo tutte le possibili soluzioni

MARIO - STUCCA: 3 LUCA – IMBIANCA: 1.5 ANDREA – LEVIGA: 3	7.5	MARIO - LEVIGA:2 LUCA – STUCCA: 2 ANDREA–IMBIANCA:1.5	5.5
MARIO - STUCCA: 3 LUCA – LEVIGA: 1.5 ANDREA–IMBIANCA: 1.5	6	MARIO - LEVIGA: 2 LUCA – IMBIANCA: 1.5 ANDREA – STUCCA: 3	6.5
MARIO - IMBIANCA: 1 LUCA – STUCCA: 2 ANDREA – LEVIGA: 3	6	MARIO - IMBIANCA: 1 LUCA – LEVIGA: 1.5 ANDREA – STUCCA: 3	5.5

Le migliori sono quelle in cui si impiegano 5,5 ore quindi entrambe le soluzioni sono equivalenti.

Algoritmi

- Per risolvere i problemi decisionali sono usati **algoritmi**
- Un algoritmo è una procedura iterativa costituita da un numero finito di passi
- Esistono problemi facili (pochi) e difficili
- La facilità di un problema è legata all’esistenza di un algoritmo di soluzione efficiente A

Un esempio: Assegnare 70 lavori a 70 persone

- Si indichino con i=1,...,70 i lavori e con j=1,...,70 le persone.
- Se la i-esima persona esegue il j-esimo lavoro si paga un costo c_{ij}.
- Una persona può eseguire solo un lavoro (vincolo)
- Ogni lavoro deve essere eseguito (vincolo)
- Lo scopo (decisione) è stabilire chi fa che cosa in modo che il costo pagato sia minimo (obiettivo).

Un possibile algoritmo di soluzione (**Brute Force**):
1) costruire tutte le possibili assegnazioni persone-lavori e calcolarne il costo
2) scegliere l'assegnazione con il costo più piccolo.
Le assegnazioni alternative sono 70! (le permutazioni di 70 numeri)

1^a

Persone	1	2	⋯	70
Lavori	1	2	⋯	70

2^a

Persone	1	2	⋯	70
Lavori	2	1	⋯	70

…

Il numero delle assegnazioni alternative è molto grande. Basta immaginare che $70! > 10^{100}$
Ora supponiamo di disporre un calcolatore che è in grado di calcolare 10^6 assegnazioni alternative (soluzioni) al secondo.

Quanto impiega l'algoritmo a risolvere il problema?

Supponendo di dover "esplorare" 10^{100} assegnazioni sono necessari 10^{94} secondi.
In un anno ci sono: circa 10^7 sec
Per risolvere il problema **sono necessari 10^{87} anni!**

Conclusioni:

- L'algoritmo Brute Force non è efficiente!
- Se questo fosse l'unico algoritmo utilizzabile per il problema dell'assegnazione persone-lavori, il problema sarebbe difficile
- La soluzione ottima dei problemi difficili può essere trovata solo per casi di ridotte dimensioni
- I problemi in cui la scelta è tra un numero finito di alternative (le variabili decisionali possono assumere sono un numero discreto di valori) si dicono combinatorici.
- La teoria della complessità è una parte della Ricerca Operativa che studia la difficoltà della risoluzione dei problemi.
- Conoscere se un problema è difficile permette la scelta di un appropriato algoritmo:
  - Algoritmi esatti basati sull'enumerazione esplicita delle soluzioni
  - Algoritmi esatti basati sull'enumerazione implicita delle soluzioni
  - Algoritmi approssimati
  - Algoritmi euristici

ESERCIZI

Il signor Rossi possiede un'azienda che produce due versioni di una bevanda energetica: normale e super. Per ogni quintale di bevanda venduta, l'azienda ha un profitto pari ad 1000 euro per il tipo normale e 1200 euro per il tipo super. Nella produzione è necessario utilizzare in sequenza tre tipi di macchinari, A, B, C, che ogni giorno possono lavorare un numero di ore massimo come riportato nella tabella seguente:

	ORE	NORMALE	SUPER
A	4	1	0.4 (24 minuti)
B	6	0.75 (45 minuti)	1
C	3.5	1	0

Per produrre un quintale di bevanda (normale o super) è richiesto l’utilizzo delle macchine per il tempo indicato nella stessa tabella. L'obiettivo del signor Rossi è quello di pianificare la produzione giornaliera dei due tipi di bevande al fine di massimizzare il profitto.

Soluzione:

1) 4 ore normale **A** = 4 t * 1000 = 4000
6 ore normale **B** = 0.75 = 45 minuti = 8 t * 1000 = 8000
3.5 ore normale **C** = 3.5 t = 3500
Totale = 15500

2) 4 ore normale **A** = 4 t * 1000 = 4000
6 ore super **B** = 6 t * 1200 = 7200
3.5 ore normale **C** = 3.5 t = 3500
Totale = 14700

3) 4 ore super **A** = 10 t * 1200 = 12000
6 ore normale **B** = 0.75 = 45 minuti = 8 t * 1000 = 8000
3.5 ore normale **C** = 3.5 t = 3500
Totale = 23500

4) 4 ore super **A** = 10 t * 1200 = 12000
6 ore super **B** = 6 t * 1200 = 7200
3.5 ore normale **C** = 3.5 t = 3500
Totale = 22700

La sequenza migliore è la 3 cioè mettere per 4 ore il macchinario A per la super, 6 ore B per la normale e C per 3.5 ore alla normale.

ALGEBRA VETTORIALE

Definizione (Vettore): Prende il nome di vettore ad n componenti reali una n-pla ordinata di numeri reali.
Esempio: La coppia (-1, 4) è un esempio di vettore a 2 componenti, la prima è -1 e la seconda è 4.

Definizione (Vettore colonna): Prende il nome di vettore colonna il vettore le cui componenti sono disposte lungo una linea verticale (colonna). Lo si indica con la seguente notazione:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

vettore colonna di dimensione *n=3*

I vettori si indicano sottolineando la lettera che li rappresenta: “$\underline{x}$”.

Definizione (Vettore riga): Prende il nome di vettore riga il vettore le cui componenti sono disposte lungo una linea orizzontale (riga). Lo si indica con la seguente notazioni:

$$\underline{x}^T = (3,-1,7)$$

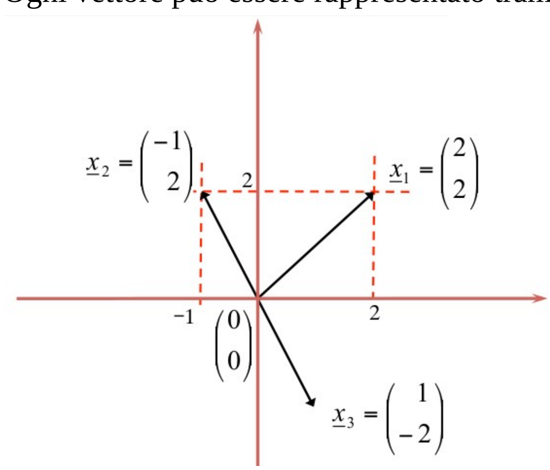
vettore riga di dimensione *n=3*

Definizione (Trasposizione): Si chiama trasposizione l’operazione unaria che trasforma un vettore riga (colonna) in un vettore colonna (riga) e si indica inserendo una “T” sopra la lettera indicante il vettore..

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \underline{x}^T = (1,2,3,-4,-6,7)$$

Definizione (Vettore nullo): Prende il nome di vettore nullo, e lo si indica con $0^T = (0, 0, ..., 0)$, il vettore le cui componenti sono tutte nulle.
Definizione (Scalare): Prende il nome di scalare un qualsiasi numero reale.

Ogni vettore può essere rappresentato tramite un punto o da una linea che connette l’origine al punto.



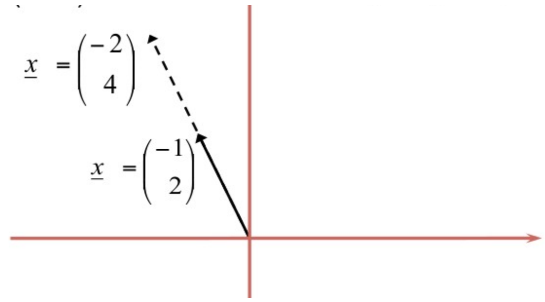
$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 & \text{prima coordinata} \\ 2 & \text{seconda coordinata} \end{pmatrix}$$ abbiamo due componenti

Caratteristiche del vettore

- **Modulo:** rappresenta la lunghezza del vettore.
- **Direzione:** indica la retta su cui poggia il vettore.
- **Verso:** è la direzione della freccia del vettore.

OPERAZIONI CON I VETTORI

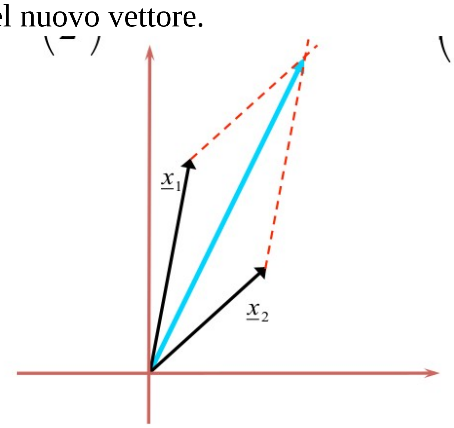
1. **Moltiplicazione per uno scalare:**
   - **Geometricamente abbiamo:** se si moltiplica per uno scalare negativo il verso cambia, se si moltiplica per uno scalare positivo < 0 il modulo si riduce, se si moltiplica per un scalare > 0 il modulo aumenta. L’unica cosa che non cambia è la direzione.



   - **Algebricamente abbiamo:** moltiplico lo scalare per ogni componente del vettore.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\underline{x} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. **Addizione di vettori regola del parallelogramma:**
   - **Geometricamente abbiamo:** si traccia la retta parallela da $\underline{x}_2$ passante per $\underline{x}_1$ e viceversa ottenendo così un nuovo punto, qui disegniamo la diagonale del parallelogramma trovato che sarà la direzione del nuovo vettore.



   - **Algebricamente abbiamo:** moltiplico lo scalare per ogni componente del vettore. I due vettori devono avere la stessa dimensione.

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{x}_1 + \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. **Prodotto interno:**
   - **Algebricamente abbiamo:** Presi due vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$ si sommano i loro prodotti, il prodotto di quest'operazione è uno scalare.

$$\underline{x}^T \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

$$\underline{x}^T = (0, 2) \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{x}^T \underline{y} = 8$$

Esempio di prodotto scalare nella realtà:

Si vogliono comprare delle penne USB massimizzando il # di GB comprati con il budget messo a disposizione. Budget = 150. I vincoli da rispettare sono:

- È necessario comprare almeno 2 penne USB da 16 GB;
- Il # di penne da $2\,GB \leq 2$ # di penne da 16 GB ;
- Non si deve superare il budget disponibile.

Penne USB

GB	2	4	8	16
Costo €	3	8	15	32
Budget €	150			

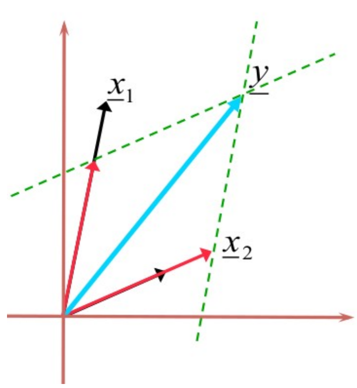
Variabili decisionali di una possibile soluzione:
$\underline{x}^T = (3\ 4\ 3\ 2) \rightarrow (3 * 3) + (8 * 4) + (15 * 3) + (32 * 2) = 150$
È ottimale? Non possiamo ancora dirlo ma sappiamo però che i giga che portiamo a casa sono 78:

Funzione obiettivo = (2 * 3) + (4 * 4) + (8 * 3) + (16 * 2) = 78 GB

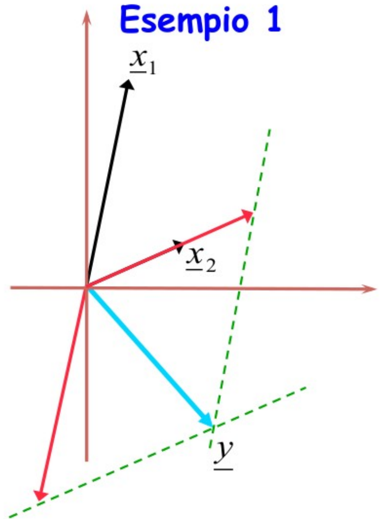
NOTA: Se le variabili decisionali che prendiamo sono degli interi probabilmente avremo a che fare con problemi difficili, se invece abbiamo a che fare con numeri reali avremo a che fare con problemi facili.

4. **Combinazione lineare:** Vettori moltiplicati per scalari.
   - **Geometricamente abbiamo:** Tracciamo un parallelogramma che abbia $\underline{y}$ come diagonale
   - **Algebricamente abbiamo:** Un vettore y è combinazione LINEARE dei vettori x_1, x_2, ..., x_n se esistono λ_1, λ_2, ... , λ_n numeri reali tali che: $\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{x}_n$.

Qualunque vettore in R^2 può essere espresso come combinazione lineare di due vettori.



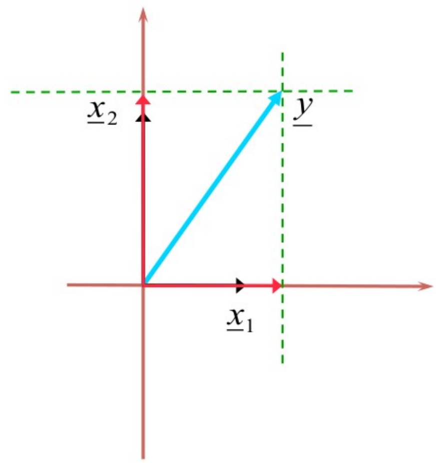
Esempio 1



$\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2$

$\lambda_1 < 0$
$\lambda_2 > 1$

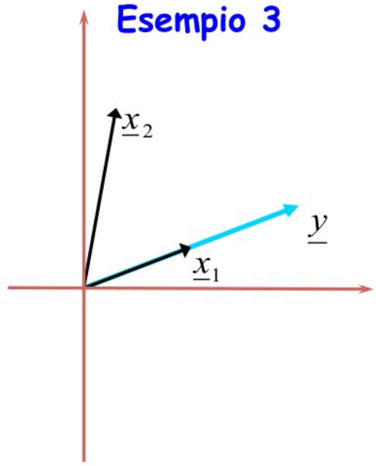
Esempio 2



$\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2$

$\lambda_1 > 1$
$\lambda_2 > 1$

Esempio 3

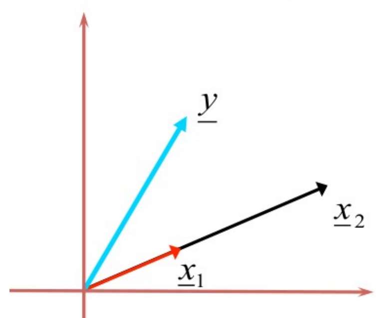


$\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2$

$\lambda_1 > 1$
$\lambda_2 = 0$

La combinazione lineare non è sempre possibile:

$\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2$

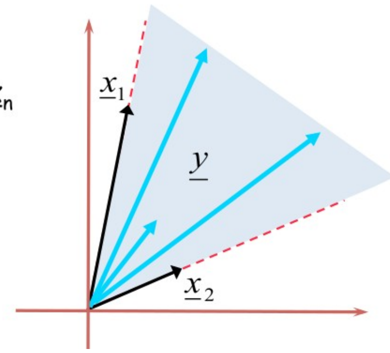


Non è possibile trovare alcun numero reale λ_1 e λ_2 se $\underline{x_1} = k\, \underline{x_2}$

Se due vettori $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_2$ si trovano nella stessa direzione non è possibile eseguire la combinazione lineare di $\underline{y}$.

5. **Combinazione conica:** Un vettore $\underline{y}$ è combiazione CONICA dei vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_n$ se esistono λ_1 , λ_2 , ... , λ_n numeri reali tali che:

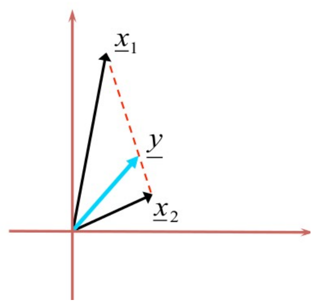
   1. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$
   2. $\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n$



Il verso non può essere cambiato. Possono essere rappresentati solo i vettori compresi tra $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_2$ perché così è rispettata la condizione di non cambiare verso.

6. **Combinazione convessa:**
   Un vettore y è combinazione CONVESSA dei vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_n$ se esistono λ_1 , λ_2 , ... , λ_n numeri reali tali che:

   1. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$
   2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$
   3. $\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n$



Tutti i vettori che si trovano nel segmento che unisce $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_2$.

7. **Indipendenza lineare:**
   I vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_n$ si dicono linearmente indipendenti se $\lambda_1\underline{x}_1 + \lambda_2\underline{x}_2 + \dots + \lambda_n\underline{x}_n = \underline{0}$ questo implica che $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, ... , $\lambda_n = 0$. Quindi c'è una sola combinazione per ottenere il vettore $\underline{0}$ cioè quella di avere tutte le $\lambda = 0$.

8. **Linearmente dipendenti:**
   I vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_n$ si dicono linearmente dipendenti se esistono λ_1 , λ_2 , ... , λ_n non tutti nulli, tali che $\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n = \underline{0}$

Esercizio:

$x_1^T = (1,2,3)$ $\quad x_2^T = (-1,1,-1)$ $\quad x_3^T = (0,3,2)$ sono linearmente dipendenti perché:

$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \lambda_3 \underline{x}_3 = 0$

$$\lambda_1 * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 * \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 * \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ portiamo tutto in un sistema lineare

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda_1 = \lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda_1 = \lambda_2 \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{Bmatrix}$$

Sono dipendenti perché $\lambda_1 = \lambda_2$ e $\lambda_2 = -\lambda_3$

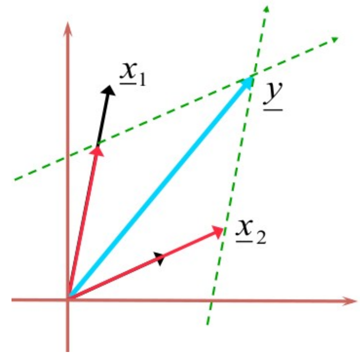
I vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_n$ si dicono linearmente dipendenti se uno di essi può essere espresso come combinazione lineare degli altri:

$\underline{x}_1^T=(1,2,3)$
$\underline{x}_2^T=(-1,1,-1)$
$\underline{x}_3^T=(0,3,2)$

$\Rightarrow$ $\underline{x}_1+\underline{x}_2=\underline{x}_3$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$$

$\underline{y}$, $\underline{x}_1$ ed $\underline{x}_2$ sono linearmente dipendenti



9. **Spazio generato:**
   Un insieme di vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_k$ di dimensione n genera l'insieme di vettori E n , se ogni vettore in E^n può essere rappresentato come combinazione lineare dei vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_k$

Base di uno spazio:

Def 1:

Un insieme di vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_k$ in E^n è una BASE di E^n se valgono le due seguenti condizioni:

1. $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_k$ generano E^n
2. Se uno solo dei vettori è rimosso, allora i rimanenti k-1 vettori non generano E^n.

Proprietà 1. (no dim)

Un insieme di vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_k$ in E^n è una BASE di $E^n$$\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_k$ in E^n è una BASE di E^n se e solo se:

1. k = n
2. $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_k$ sono linearmenti indipendenti

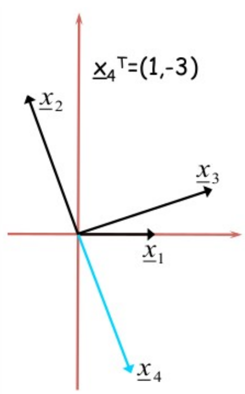
Def.

Il numero di vettori che formano una base per E^n è detto dimensione dello spazio E^n.

Esercizio:

Cerchiamo una base per lo spazio E^2 (dei vettori di dimensione due) quindi dobbiamo cercare 2 vettori in E^2 linearmente indipendenti.

$x_1^T=(1,0)$ $\quad x_2^T=(-1,3)$ $\quad x_3^T=(2,1)$



- **Dom. 1:** $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ generano E^2 ? Si perché tutti i vettori sono rappresentabili tramite combinazione lineare.
- **Dom. 2:** $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ sono una base per E^2 ? No perché non ci sono esattamente due vettori linearmente indipendenti.
- **Dom. 3:** $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ sono una base per E^2 ? Si.
- **Dom. 4:** $\underline{x}_1$, $\underline{x}_3$ sono una base per E^2 ? Si.
- **Dom. 5:** $\underline{x}_1$, $\underline{x}_4$ sono una base per E^2 ? No, perché sono sulla stessa direzione.

Esercizio
Dati i seguenti vettori in R^3
$x_1^T=(1,3,0) \quad x_2^T=(2,0,1) \quad x_3^T=(0,1,0)$

1. Verificare che costituiscono una base
2. Determinare le coordinare del vettore $\underline{y}^T$ =(2,4,1) in termini della base.

1) $x_1^T=(1,3,0) \quad x_2^T=(2,0,1) \quad x_3^T=(0,1,0)$

$$\lambda_1 * \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix} + \lambda_2 * \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} + \lambda_3 * \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\lambda_1+2\lambda_2=0\\3\lambda_1+\lambda_3=0\\\lambda_2=0\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}\lambda_1=0\\3\lambda_1+\lambda_3=0\\\lambda_2=0\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}\lambda_1=0\\\lambda_3=0\\\lambda_2=0\end{Bmatrix}$$

Siccome $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3=0$ sappiamo che c'è solo un modo per ottenere un vettore nullo($\underline{0}$), quindi sappiamo che i tre vettori sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base per R^3.

2) Per determinare le coordinate del vettore $\underline{y}$ eseguiamo una combinazione lineare in cui vogliamo trovare i valori delle λ:

$$\lambda_1 * \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix} + \lambda_2 * \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} + \lambda_3 * \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix}$$ mettiamo tutto in un sistema lineare:

$$\begin{Bmatrix}\lambda_1+2\lambda_2=2\\3\lambda_1+\lambda_3=4\\\lambda_2=1\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}\lambda_1=0\\3\lambda_1+\lambda_3=4\\\lambda_2=1\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}\lambda_1=0\\\lambda_3=4\\\lambda_2=1\end{Bmatrix}$$

$$0 * \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} + 4 * \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix}$$

Il vettore $\underline{y}$ in termini della base può essere espresso come combinazione lineare dei vettori appartenenti alla base moltiplicati per gli opportuni scalari ottenuti dal sistema lineare. Quindi sappiamo che le coordinate del vettore $\underline{y}^T$ in termini della base sono (2, 4, 1).

MATRICI

Def: (Matrice): Prende il nome di matrice di ordine *m*n* una tabella di elementi ordinatamente disposti su m righe ed n colonne.

Notazione: Indicheremo le matrici con lettere maiuscole A, B,.... o per esteso con la seguente notazione:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

La matrice riportata sopra è una matrice 3 x 4 dove abbiamo 3 righe e 4 colonne. Un generico elemento si indica con i pedici i j , per esempio a_{11} dove i = 1 e j = 1. Si può indicare anche con: $\underset{mxn}{A} = \{a_{ij}\}$

Presa una matrice:

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a}^3 \end{matrix} \\ \quad\ \begin{matrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 & \underline{a}_4 \end{matrix} & \end{array}$$

A può essere vista anche come un insieme di vettori riga o vettori colonna.
È indicata come insieme di vettori riga secondo la seguente notazione:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a}^3 \end{pmatrix}$$

Mentre come vettori colonna seguendo quest'altra: $A=(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4)$

Tipi di matrici
Se m≠n la matrice si dice rettangolare; si dice quadrata se m=n.
In una matrice quadrata di ordine n gli elementi a_{ii} (i=1,...n) costituiscono la diagonale principale.

matrice rettangolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice quadrata

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Moltiplicazione per uno scalare
Moltiplico ogni elemento della matrice per uno scalare.

$$\underset{mxn}{A} = \{a_{ij}\} \qquad \Longrightarrow \qquad k\,A = \{ka_{ij}\}$$

k scalare $\qquad\qquad$ matrice (mxn)

Esempio

$$k = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$kA = 2 * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 & 4 \\ 4 & 14 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Addizione tra matrici
L'addizione è possibile solo se le 2 matrici hanno la stessa dimensione, si sommano gli elementi nella stessa posizione.

$$\underset{mxn}{A} = \{a_{ij}\} \qquad \underset{mxn}{B} = \{b_{ij}\}$$

$$A + B = C \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{mxn}{C} = \{c_{ij}\}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \forall i = 1,\ldots,m \quad \forall j = 1,\ldots,n$$

$$\underset{2x2}{A} = \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} \quad \underset{2x2}{B} = \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad \underset{2x2}{A+B} = \begin{Bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix}$$

Moltiplicazione tra due matrici (prodotto righe per colonne)
Prese due matrici $A_{m\,x\,n}$ e $B_{n\,x\,p}$, la moltiplicazione è possibile soltanto quando il # di colonne di A = al # di colonne di B.
Più nel dettaglio: $A_{m\,xn} = \{a_{ij}\}$ $\quad B_{n\,x\,p} = \{b_{ij}\}$. Quindi abbiamo che si moltiplicano gli elementi della riga i = {1, 2, …, m} di A con gli elementi della colonna j di B = {1, 2, …, p}.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

La matrice risultante avrà m righe e p colonne: $C_{m\,x\,p}$.

$$\forall i = 1,\ldots,m \quad \forall j = 1,\ldots,p$$

Esempio

$$\underset{3x3}{A} = \left\{ \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} \right\} \qquad \underset{3x2}{B} = \left\{ \begin{matrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\}$$

$\mathbf{c_{11}}$ = (1 * 5) + (-1 * 3) + (1 * 1) = 3; $\mathbf{c_{12}}$ = (4 * 5) + (-2 * 3) + (5 * 1) = 19;
$\mathbf{c_{13}}$ = (2 * 5) + (0 * 3) + (1 * 1) = 11; $\mathbf{c_{21}}$ = (1 * 0) + (-1 * 0) + (1 * 1) = 1;
$\mathbf{c_{22}}$ = (4 * 0) + (-2 * 0) + (5 * 1) = 5; $\mathbf{c_{23}}$ = (2 * 0) + (0 * 0) + (1 * 1) = 1;

$$\underset{3x2}{C} = AB = \left\{ \begin{matrix} 3 & 1 \\ 19 & 5 \\ 11 & 1 \end{matrix} \right\}$$

Non sempre però la moltiplicazione è commutativa.

Matrice identità:
È una matrice quadrata che ha tutti gli elementi = 0 tranne sulla diagonale dove ci sono solo 1.
NOTA: Il simplesso partirà sempre da una base che è una matrice identità.

$$\underset{nxn}{I} = \left\{ \begin{matrix} 1\ 0\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 1\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 0\ 1 \ldots 0 \\ \ldots. \\ 0\ 0\ 0 \ldots 1 \end{matrix} \right\}$$

Matrice Identita'

$$\underset{mxn}{A}\ \underset{nxn}{I} = A$$

$$\underset{mxm}{I}\ \underset{mxn}{A} = A$$

Triangolare superiore
È una matrice in cui sotto la diagonale ha solo 0.

$$\underset{nxn}{A} = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \ldots a_{3n} \\ & \ldots. & \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ a_{nn} \end{matrix} \right\}$$

Trasposta di una matrice
Data una matrice A= { a_{ij} } (mxn), la sua matrice TRASPOSTA A^t è una matrice (nxm) ottenuta invertendo le righe con le colonne:

$$\underset{3x2}{A} = \left\{\begin{matrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underset{2x3}{A^T} = \left\{\begin{matrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}$$

Proprietà

1. $(A^T)^T = A$

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ (quando la somma è definita)

3. $(AB)^T = B^T A^T$ (quando il prodotto è definito)

Matrici partizionate
Una matrice A (mxn) possiamo anche vederla partizionata in sotto-matrici.

$$\underset{4x4}{A} = \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}\right\} \qquad \begin{array}{ccc} A_{11} & & A_{12} \\ \underset{4x4}{A} = & \left\{\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right\} & \\ A_{21} & & A_{22} \end{array}$$

$$\underset{4x4}{A} = \left\{\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}\right\}$$

A_{11} A_{12} hanno dimensione 3x2
A_{21} A_{22} hanno dimensione 1x2

Operazioni elementari
Data una matrice A (mxn) è possibile definire alcune operazioni sulle righe e sulle colonne utili a risolvere un sistema di equazioni lineari. Le operazioni elementari sulle righe (colonne) di una matrice sono:

- SCAMBIO: scambio della riga i con la riga j
- MOLTIPLICAZIONE: moltiplicazione di una riga per uno scalare (diverso da zero).
- SOSTITUZIONE: sostituzione della riga i con la somma della riga i e della riga j moltiplicata per uno scalare.

Inversa di una matrice
Sia A_{nxn} una matrice quadrata, se esiste B_{nxn} matrice quadrata tale che: A*B = I ^ B*A = I, allora B è detta matrice inversa di A.
Ricorda:

- l'inversa di una matrice A (se esiste) è UNICA ed è indicata con A^{-1}
- se una matrice ammette l'inversa allora è detta matrice NON SINGOLARE
- una matrice è non singolare se e solo se le righe sono linearmente indipendenti o equivalentemente se e solo se le colonne sono linearmente indipendenti.

Calcolo dell'inversa di una matrice
L'inversa di una matrice quadrata A può essere calcolata attraverso un numero finito di operazioni elementari nel seguente modo:

1. Si considera la nuova matrice (A,I) (cioè si affianca la matrice I alla destra di A).
2. Si effettuano una serie di operazioni elementari sulle righe e sulle colonne di questa nuova matrice in modo tale che:
   - A diventa la matrice identità I
   - I diventa la matrice inversa A -1

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \textit{affianchiamo la matrice identità} \quad I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ Dobbiamo eseguire una serie di calcoli per trasformare A in I

Iniziamo scegliamo una colonna, troviamo chi deve diventare 1 e applichiamo le operazioni elementari per trasformarlo in1. Poi trasformiamo gli altri elementi in 0.

Quindi sommiamo la prima riga e la seconda: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Sommiamo alla seconda riga la terza riga: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Moltiplico la prima riga per -1 e la sommo alla terza: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

Ora passiamo alla seconda colonna e ripetiamo il procedimento, una volta terminata passiamo alla terza.

Moltiplico la seconda riga per -3 e la sommo alla prima: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

Moltiplico la seconda riga per 4 e la sommo alla terza: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right]$

Divido la terza riga per 12: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{array}\right]$

Moltiplico la terza riga per 7 e la sommo alla prima: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{12} \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{array}\right]$

Moltiplico la terza riga per -3 e la sommo alla seconda: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{array}\right]$

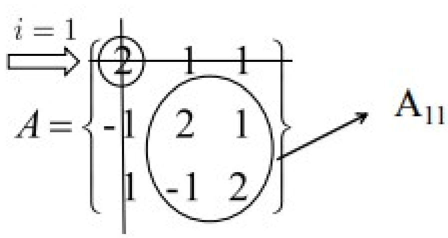
Abbiamo ottenuto che $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{-1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$

Nel caso peggiore abbiamo m x n operazioni quindi abbiamo una complessità: $O(n^2)$.

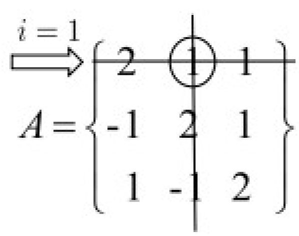
Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata A è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche. Viene denotato con det(A) e si calcola con la seguente formula:

$det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} * a_{ij} * minor(A\,ij)$ fissata una riga I



→



$det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} +$

$det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} +$

→

$$\begin{array}{c c} i=1 \Rightarrow & \\ & A=\left\{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{matrix}\right\} \end{array}$$

$$det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

che è uguale a 2*5+(-1)*(-3)+1*(-1)=12 quindi **det(A)=12**
Visto che il determinante è diverso da 0 vuol dire che A è invertibile.

la matrice inversa è uguale a $\frac{1}{det(A)}$ *** la matrice trasposta dei cofattori cioè**

$$A^{-1}=\frac{1}{det\,A}\begin{bmatrix} cof(A_{11}) & cof(A_{21}) & \cdots & cof(A_{n1}) \\ cof(A_{12}) & cof(A_{22}) & & cof(A_{n2}) \\ \vdots & & & \vdots \\ cof(A_{1n}) & cof(A_{2n}) & \cdots & cof(A_{nn}) \end{bmatrix}$$ e il **cof(A_{ij}) = (-1)$^{i+j}$*minor(A_{ij})**

$$A=\left\{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{matrix}\right\}$$

$$det(A) = 12$$

$$cof(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot minor(A_{ij})$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} cof(A_{11}) & cof(A_{21}) & \dots & cof(A_{n1}) \\ cof(A_{12}) & cof(A_{22}) & \dots & cof(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cof(A_{1n}) & cof(A_{2n}) & \dots & cof(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$cof(A_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot minor(A_{11}) = (-1)^2 \cdot det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$A^{-1}=\left\{\begin{matrix} 5/12 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}\right\}$$

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$det(A) = 12$$
$$cof(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot minor(A_{ij})$$
$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} cof(A_{11}) & cof(A_{21}) & \dots & cof(A_{n1}) \\ cof(A_{12}) & cof(A_{22}) & \dots & cof(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cof(A_{1n}) & cof(A_{2n}) & \dots & cof(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$cof(A_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot minor(A_{21}) = (-1)^3 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -3$$

$$A^{-1} = \begin{Bmatrix} 5/12 & -3/12 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

Rango di una matrice
Rango di riga: numero massimo di righe linearmenti indipendenti.
Rango di colonna: numero massimo di colonne linearmenti indipendenti.

Teorema: Rango di riga = Rango di colonna Rango (A) ≤ min (m,n).
Se rango (A) = min (m,n) allora A è una matrice a rango pieno.

Il rango di una matrice si può calcolare tramite il numero di pivot della matrice a scala oppure usando il teorema degli orlati, cioè parte da una sotto-matrice quadrata si calcola il determinante, se è uguale a 0 si passa ad una sotto-matrice quadrata inferiore se è diverso da 0 ad una superiore. Se il rango è diverso da 0 e quella superiore da 0 il rango equivale al numero di righe della matrice che ha determinante diverso da 0.

Rango di una matrice e sistema di equazioni lineari
Cercare una soluzione ad un sistema di equazioni lineari A_{mxn} $\underline{x}$ = $\underline{b}$. Significa cercare quei valori x_1, x_2 , ..., x_n tali che il vettore b può essere espresso come combinazione lineare delle colonne della matrice.

Per la soluzione di un sistema di equazioni lineari valgono le seguenti:

- Rango(A,b) > Rango(A) ⇒ il sistema non ha soluzione, perché vuol dire che b + lianearmente indipendente dai vettori di A
- Rango(A,b) = Rango(A) ⇒ il sistema ha soluzione, le soluzioni sono comprese in $\infty^{n-r(A)}$, dove n – r(A) è il grado di libertà nella scelta della variabile dal valore arbitrario, n è il numero di colonne e r(A) il rango della matrice di A. Quando n-r(A) > 1 abbiamo infinite soluzioni e il valore di n – r(A) è il numero di variabili arbitrarie che possiamo scegliere, mentre se n – r(A) = 0 abbiamo solo una soluzione e nessuna variabile da poter scegliere in modo arbitrario.

$\boxed{\text{Rango}(A,b) = \text{Rango}(A)}$

m>n :

Rango(A) $\leq$ min(m,n) $\Rightarrow$ Rango(A) $\leq$ n <m

Se Rango(A) = $n \Rightarrow$ il sistema ha soluzione unica

Se Rango(A) < $n \Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni

m<n :

Rango(A) $\leq$ min(m,n) $\Rightarrow$ Rango(A) $\leq$ m <n

Se Rango(A) = $m \Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni

Se Rango(A) < $m \Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni

m = n :

Rango(A) $\leq$ min(m,n) $\Rightarrow$ Rango(A) $\leq$ n =m

Se Rango(A) = $n \Rightarrow$ il sistema ha soluzione unica

Se Rango(A) < $n \Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni

Risolvere un sistema di equazioni lineari

Dato un sistema di m equazioni lineari ed n incognite A $\underline{x}$ = $\underline{b}$:

- **A** = matrice dei coefficienti m x n.
- $\underline{\mathbf{x}}$ = vettore delle incognite di dimensione n x 1.
- $\underline{\mathbf{b}}$ = vettore dei termini noti di dimensione m x 1.

Questo sistema è equivalente a A’ $\underline{x}$ = $\underline{b}$’ dove la matrice (A’, $\underline{b}$’) è ottenuta da (A, $\underline{b}$) attraverso un numero finito di operazioni elementari.

Esercizio:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

La matrice dei coefficienti ha rango = 3 < 4 quindi ammette infinite soluzioni con 1 variabile arbitraria. Per risolvere il sistema applichiamo il di metodo di Gauss-Jordan: ridurre la matrice dei coefficienti ad una matrice triangolare superiore (scala) attraverso un numero finito di operazioni elementari.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right\}$$

Aggiungi la prima riga alla seconda riga.

$$\left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right\}$$

Dividi la seconda riga per 4. Sottrai la nuova riga ottenuta alla terza riga.

$$\left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -2 \end{array}\right\}$$

Metodo di Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -2 \end{array}\right\}$$

infinite soluzioni al sistema:

$$x_4 = \lambda$$

$$x_3 = -2 - \frac{1}{4}\lambda$$

$$x_2 = 4 + \frac{1}{4}\lambda$$

$$x_1 = 10 + 2\lambda - 2x_2 - x_3 = 4 + \frac{7}{4}\lambda$$

Esercizi

1) Dati i seguenti vettori A=(4,1,2), B=(7, -8, 0), C=(4, 1, 3) determinare un nuovo vettore D che risulti combinazione lineare dei tre vettori dati.

Scelgo $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

$$D=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}+1*\begin{pmatrix}7\\-8\\0\end{pmatrix}+1*\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-6\\5\end{pmatrix}$$

2)Dare la definizione di lineare indipendenza e lineare dipendenza tra vettori in R^n. Fornire un esempio di vettori in R^3 linearmente indipendenti e vettori in R^3 linearmente dipendenti.

Definizione di lineare indipendenza:I vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_n$ si dicono linearmente indipendenti se $\lambda_1\underline{x}_1 + \lambda_2\underline{x}_2 +...+ \lambda_n\underline{x}_n = \underline{0}$ questo implica che $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, ... , $\lambda_n = 0$. Quindi c'è una sola combinazione per ottenere il vettore $\underline{0}$ cioè quella di avere tutte le $\lambda = 0$.

Definizione di lineare dipendenza: I vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_n$ si dicono linearmente dipendenti se esistono λ_1 , λ_2 , ... , λ_n non tutti nulli, tali che $\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 +...+ \lambda_n \underline{x}_n = \underline{0}$

Esempio di vettore indipendente

(1,0,0)   (0,1,0)   (0,0,1) = (0,0,0)

$$\underline{Y}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix}\lambda_1=0\\\lambda_2=0\\\lambda_3=0\end{Bmatrix}$$

Esempio di vettore dipendente:

(2,1,0)   (-1,0,1)   (1,1,1)

$$\underline{Y}=\lambda_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{mettendo a sistema}\rightarrow \quad \begin{Bmatrix}2\lambda_1+\lambda_2=0\\-\lambda_1+\lambda_3=0\\\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}\lambda_2=-2\lambda_1\\\lambda_1=\lambda_3\\\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\end{Bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\lambda_2=-2\lambda_1\\\lambda_1=\lambda_3\\2\lambda_3=\lambda_2\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}\lambda_2=-2\lambda_1\\\lambda_1=\lambda_3\\\lambda_3=\dfrac{\lambda_2}{2}\end{Bmatrix}$$

3) Dati i seguenti vettori in R^3: A = (1, 3, - 4), B = (0, 3, 2), C = (1 0 1):

1. **Si verifichi se i vettori dati costituiscono una base per lo spazio;**
2. **Si determini un nuovo vettore ottenuto come combinazione convessa dei tre vettori dati.**

1) Per vedere se i vettori sono una base dobbiamo vedere se k=n e se sono indipendenti.

k=n? SI ora verifichiamo se sono indipendenti

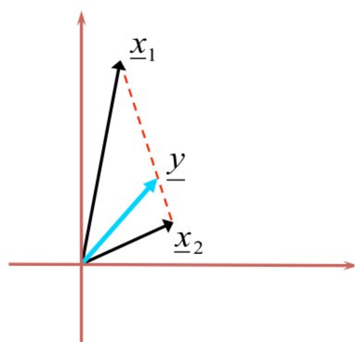
$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ mettiamo a sistema } \rightarrow \begin{Bmatrix}\lambda_1+\lambda_3=0\\3\lambda_1+3\lambda_3=0\\-4\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\end{Bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\lambda_1=-\lambda_3\\3\lambda_2=-3\lambda_1\\-4\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}\lambda_1=-\lambda_3\\\lambda_2=-\lambda_1\\-4\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}\lambda_1=-\lambda_3\\\lambda_2=-\lambda_1\\-4(-\lambda_1)+2\lambda_3+\lambda_3=0\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}\lambda_1=-\lambda_3\\\lambda_2=-\lambda_1\\7\lambda_3=0\end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix}\lambda_1=0\\\lambda_2=0\\\lambda_3=0\end{Bmatrix}$$ sono indipendenti quindi sono una base.

2)Un vettore y è combinazione CONVESSA dei vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_n$ se esistono λ_1 , λ_2 , ... , λ_n numeri reali tali che:

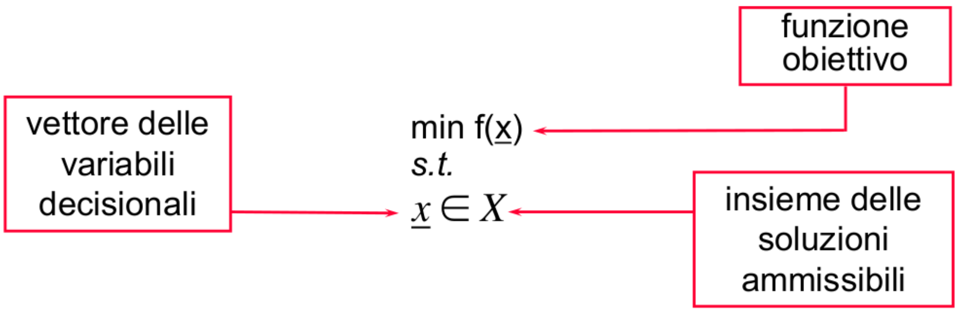
1. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$
2. $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n = 1$
3. $\underline{y}= \lambda_1 \underline{x}_1+ \lambda_2 \underline{x}_2+\dots+ \lambda_n \underline{x}_n$



λ_1=0,2 λ_2=0,3 λ_3=0,5

$$0{,}2\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}+0{,}3\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}+0{,}5\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ otteniamo } \begin{pmatrix}0{,}2+0{,}5\\0{,}6+0{,}9\\-0{,}8+0{,}6+0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}7\\1{,}5\\0{,}3\end{pmatrix} \leftarrow \text{è il nuovo vettore.}$$

Problemi di ottimizzazione
Data una funzione $f : R^n \longrightarrow R$ e $X \subseteq R^n$ (*R^n prende in input un vettore R di dimensione reale e restituisce un insieme di soluzioni accettabili.*)un problema di Ottimizzazione (PO) può essere formulato come:



Quindi un problema di Ottimizzazione consiste nel determinare, se esiste, un punto di minimo della funzione f tra i punti dell'insieme X.

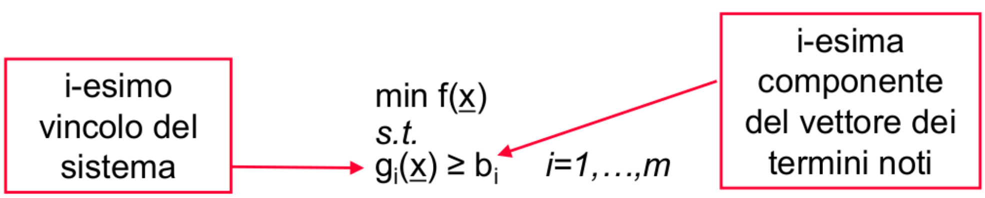
Terminologie

- **min f($\underline{x}$)**: tra tutte le soluzioni ammissibili prendo quella in cui f assume il valore minimo.
- **Funzione obiettivo**: associa un valore alla soluzione *x* che viene fornita. Ci serve a per aver un metro di paragone tra tutte le possibili soluzioni.
- **s.t.**: tale che, sotto il vincolo di.

Nota: non confondere la soluzione del problema con il valore della soluzione:

- La soluzione del problema è il $\underline{x}$.
- Il valore della soluzione è dato da f($\underline{x}$) ed è uno scalare.
- La soluzione non esiste quando la regione ammissibile X è vuota. In questo caso la risposta essendo vuota porta a dover cambiare i vincoli del problema.

Problemi di programmazione (pianificazione) matematica
Quando l'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di ottimizzazione viene espresso attraverso un sistema di equazioni e disequazioni, tale problema prende il nome di problema di Programmazione Matematica (PM).



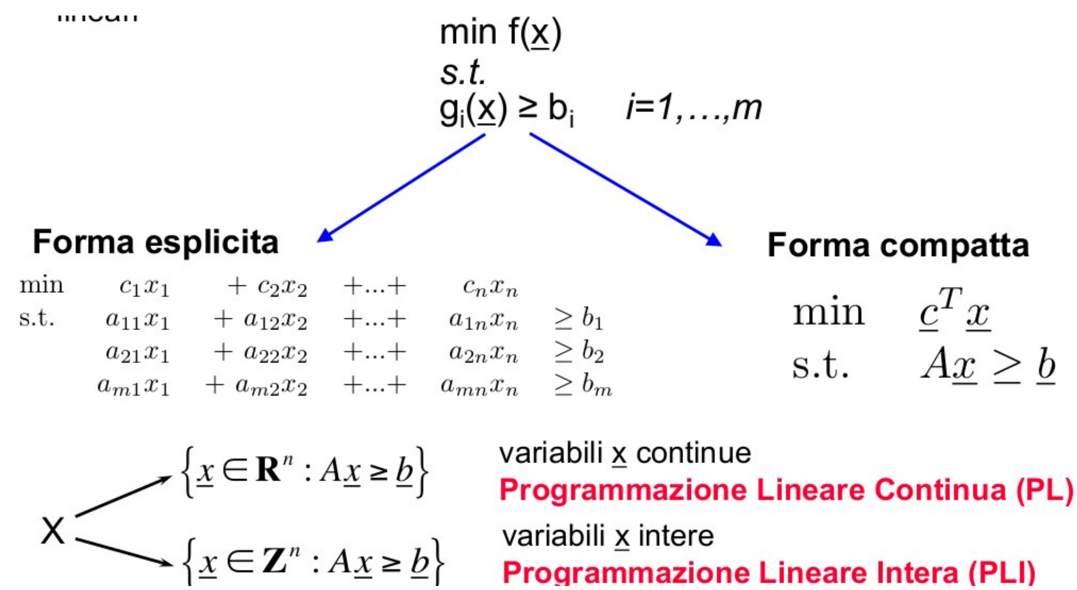
Nota: È chiamata così perché la regione ammissibile è espressa tramite un sistema di equazioni e disequazioni.

Problemi di programmazione lineare

Un problema di PM è lineare quando:

- la funzione obiettivo è lineare: f(x) = $\underline{c}^T\underline{x}$.
- l'insieme X è espresso in termini di relazioni (uguaglianze e disuguaglianze) lineari.

In questi problemi ci sono solo prodotti scalari.



$\underline{c}^T\underline{x}$: è il prodotto scalare tra due vettori.

- Per i problemi PL essendo che le variabili del $\underline{x}$ sono reali hanno infinite soluzioni, ma tutti questi problemi sono facili perché esistono delle proprietà che ci permettono di capire dove si trova la soluzione ottima nella regione delle soluzioni, questa cosa la fa il metodo del simplesso.
- Per i problemi PLI essendo che le variabili del $\underline{x}$ sono intere possiamo avere finite soluzioni, per questo i problemi sono difficili. Per risolverli o si trova l'ottima per piccole soluzioni o ci si accontenta di algoritmi euristici.

Esempio:

Forma esplicita

$$\min \; 500x_1 + 700x_2 + 350x_3 + 400x_4 + 200x_5$$
$$s.t.$$
$$8x_1 + 10x_2 + 5x_4 + 7x_5 = 96$$
$$5x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 96$$
$$20x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 20x_5 = 384$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Forma compatta

$$\begin{array}{ll} \min & \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq 0 \end{array}$$

min è la funzione obiettivo.

Le variabile del $\underline{x}$ del problema sono *n*, mentre i vincoli sono *m*.

Il vettore $\underline{c}^T$ si chiama vettore dei coefficienti di costo: $\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 500 & 700 & 350 & 400 & 200 \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$

La matrice A è la matrice dei vincoli, a_{ij} sono i coefficienti tecnologici: $A = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 0 & 5 & 7 \\ 5 & 12 & 4 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix}$

Il vettore $\underline{b}$ ha dimensione *m* ed è il vettore dei termini noti: $\underline{b} = \begin{bmatrix} 96 \\ 96 \\ 384 \end{bmatrix}$

Questi sono i vincoli di non negatività delle variabili del problema: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$.

Combinazione lineare delle colonne di A

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 20 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} 96 \\ 96 \\ 384 \end{bmatrix}$$

Problemi di programmazione lineare

Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\min f(\underline{x})$$
$$s.t.$$
$$g_i(\underline{x}) \geq b_i \quad i=1,\ldots,m$$

un vettore $\underline{x}'$ di R^n:

- soddisfa il vincolo $g_i(x) \geq b_i$ se $g_i(x') \geq b_i$, quindi si prende una soluzione la si sostituisce e si verifica che quel vincolo sia soddisfatto.
- viola il vincolo $g_i(x) \geq b_i$ se $g_i(x') < b_i$
- satura (o rende attivo) il vincolo $g_i(x) \geq b_i$ se $g_i(x') = b_i$, vuol dire che la risorsa del vincolo è scarsa all'ottimo, e probabilmente aumentando la risorsa aumenterà il valore dell'ottimo.

Domanda d'esame: Un vettore x di R^n è soluzione ammissibile per il problema di PL se e solo se soddisfa tutti i vincoli del problema.

Soluzioni di un problema PL

$$\min f(\underline{x})$$
$$s.t.$$
$$g_i(\underline{x}) \geq b_i \quad i=1,\ldots,m$$

Un problema di programmazione lineare risulta:

- Inammissibile se la regione ammissibile è vuota ossia $X=\emptyset$, non è possibile rispettare tutti i vincoli del problema.
- Illimitato (inferiormente) se scelto un qualsiasi scalare k, esiste sempre un punto $\underline{x}\in X$ tale che $f(\underline{x}) < k$, il valore della soluzione obiettivo è $-\infty$ se è un problema di minimo, $+\infty$ se è un problema di massimo, non esiste un punto di ottimo.
- Ammettere soluzione ottima finita se esiste un punto $\underline{x}^* \in X$ tale che-- $f(\underline{x}^*) \leq f(\underline{x})\ \forall \underline{x}\in X$.

Esempio 1: Piano di produzione aziendale

Un'azienda produce tre tipi di elettrodomestici: lavatrici, frigoriferi e forni.

Per produrre una lavatrice occorrono 9 ore di lavorazione sulla macchina M1 e 8 ore di lavorazione sulla macchina M2; mentre per produrre un frigorifero occorrono 11 ore di lavorazione sulla macchina M2; infine per produrre un forno occorrono 4 ore sulla macchina M1 e 6 sulla macchina M2.

La macchina M1 è disponibile per 137 ore settimanali, mentre la macchina M2 è disponibile per 149 ore settimanali. Il numero di forni prodotti non può essere superiore alla somma dei frigoriferi e delle lavatrici prodotte. Tuttavia devono essere prodotti almeno 20 forni. Inoltre il numero di lavatrici prodotte non può essere superiore al numero di frigoriferi prodotti per al più 5 unità.

Il guadagno ottenuto dalla vendita di una lavatrice è di 375 euro, quello ottenuto per un frigorifero è 320 euro e quello per un forno è 170 euro. Si vuole conoscere la quantità di lavatrici, frigoriferi e forni da produrre settimanalmente per massimizzare il guadagno totale nel rispetto dei vincoli di produzione.

a) Si formuli il corrispondente modello di programmazione.

Per prima cosa scegliamo le variabili decisionali per il x:
Prendiamo x_1 = # lavatrici x_2 = # frigoriferi x_3 = # forni.

La nostra funzione obiettivo sarà : max $z = 375x_1 + 320x_2 + 170x_3$ (costi di ogni prodotto).

Vincoli delle risorse: $9x_1 + 0x_2 + 4x_3 \leq 137$ (ore settimanali M1)
$8X_1 + 11x_2 + 6x_3 \leq 149$ (ore settimanali M2)

Vincoli di domanda (richieste specifiche dell'azienda riguardo le risorse): $x_3 \geq 20$, $x_3 \leq x_1 + x_2$, $x_1 \leq x_2 + 5$
Le variabili devono essere intere: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

Abbiamo quindi:

x_1 = numero di lavatrici da produrre
x_2 = numero di frigoriferi da produrre
x_3 = numero di forni da produrre

$$\max\ 375x_1 + 320x_2 + 170x_3$$
$$\begin{aligned} 9x_1 + 4x_3 &<= 137 \\ 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 &<= 149 \\ x_3 &<= x_1 + x_2 \\ x_3 &>= 20 \\ x_1 &<= 5 + x_2 \\ x_1, x_2, x_3 &>= 0, intere \end{aligned}$$

Problemi di Programmazione Lineare: Forma Canonica
Consideriamo un problema di Programmazione Lineare (PL) con m vincoli ed n variabili in Forma Canonica di minimo:

$$\begin{aligned} \min z = \underline{c}^T \underline{x} \\ A\underline{x} \geq \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \\ \underline{x} \in R^n \end{aligned}$$

Abbiamo che tutti i vincoli del problema sono di tipo ≥.

Abbiamo anche:

$\underline{x}$ è il vettore n*x*1 delle **variabili decisionali**

$\underline{c}$ è il vettore n*x*1 dei **coefficienti di costo** della funzione obiettivo

$\underline{b}$ è il vettore m*x*1 dei **termini noti** dei vincoli

A è la matrice mxn dei coefficienti dei vincoli; $A=[a_{ij}]$, i=1,...,n, j=1,...,m

Problemi di Programmazione Lineare: Forma Standard di minimo
La differenza è che c'è l'uguaglianza:

$$\begin{aligned} \min \quad z = \underline{c}^T \underline{x} \\ A\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \\ \underline{x} \in R^n \end{aligned}$$

Questa forma deve rispettare 4 condizioni:
1. Il problema è di minimo.
2. Tutti i problemi sono di uguaglianza.
3. Il $\underline{x} \geq 0$.
4. Il vettore dei termini noti di tutte le componenti deve essere ≥ 0: $\underline{b} \geq 0$.

Nota: Il simplesso risolve solo problemi in forma standard, ma questo non è un problema perché qualunque forma che abbiamo scelto può essere trasformata in una equivalente.

I valori di x che soddisfano i vincoli sono detti soluzioni del problema di PL, inoltre, i valori di x che soddisfano anche i vincoli sono detti soluzioni ammissibili del problema di PL.

Si assumono soddisfatte le seguenti ipotesi:

- m < n
- m = rango(A)

L'ipotesi m < n (più variabili che vincoli) non rappresenta una perdita di generalità. E' noto infatti che il sistema di equazioni lineari:

- può ammettere una soluzione unica se m = n
- può ammettere ∞^{n-m} soluzioni se m < n

Solo il secondo caso è significativo dal punto di vista dei problemi di ottimizzazione.

Funzioni equivalenti

Definizione 1 (Problemi equivalenti)
Due problemi di programmazione lineare di minimo (massimo) (P) e (P') sono equivalenti se, per ogni soluzione ammissibile di (P), possiamo costruire una soluzione ammissibile di (P') con lo stesso valore e, per ogni soluzione ammissibile di (P'), possiamo costruire una soluzione ammissibile di (P) con lo stesso valore.

Osservazione 1
Se due problemi di programmazione lineare sono equivalenti allora i valori delle rispettive soluzioni ottime coincidono.

Osservazione 2
Qualunque problema di PL può essere trasformato in un problema equivalente in forma canonica o standard.

Formulazioni equivalenti

Funzione Obiettivo

$$\max \ z = \underline{c}^T \underline{x} \iff -\min \ -z = -\underline{c}^T \underline{x}$$

Per trasformare una funzione obiettivo basta moltiplicare per (-1), il – davanti a min serve per restituire il valore corretto della soluzione.
Esempio:

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 \iff -\min \ -z = -3x_1 - 5x_2$$

Vincoli

$$A\underline{x} \geq \underline{b} \iff -A\underline{x} \leq -\underline{b}$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff \begin{cases} A\underline{x} \leq \underline{b} \\ A\underline{x} \geq \underline{b} \end{cases}$$

Formulazioni equivalenti: vincoli ≤

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i$$

$$x_{n+1} \ge 0$$

La nuova variabile x_{n+1} introdotta prende il nome di **variabile di slack *(scarto)***

$$x_{n+1} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Variabile di slack: esempio

$$4x_1 + 6x_2 \le 15 \Leftrightarrow 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 15$$

- $x_1=1$, $x_2=1$ è un assegnamento di valori che soddisfa il vincolo di disuguaglianza ($4+6\le15$).

  In corrispondenza di tale soluzione, è possibile soddisfare il vincolo di uguaglianza assegnando i medesimi valori ad x_1 e x_2 ed un valore non negativo ad x_3: $x_3=5$ ➔ $4+6+5=15$

- $x_1=1$, $x_2=2$ è un assegnamento di valori che <u>non</u> soddisfa il vincolo di disuguaglianza ($4+12>15$).

  <u>Non</u> è possibile soddisfare il vincolo di uguaglianza utilizzando lo stesso assegnamento di valori per x_1 e x_2 ed assegnando un valore non negativo ad x_3.

Formulazioni equivalenti: vincoli ≥

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+1} = b_i$$

$$x_{n+1} \geq 0$$

La nuova variabile x_{n+1} introdotta prende il nome di **variabile di surplus *(eccedenza)***

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$$

Formulazioni equivalenti: variabili ≤ 0

$$x_j \leq 0 \Leftrightarrow -x_j \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x'_j = -x_j,\ x'_j \geq 0$$

Sostituiamo x_j con $-x'_j$ ovunque appaia nel modello (vincoli e funzione obiettivo).

Esempio:

$$7x_1 + 2x_2 = 5 \quad x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

$x_1=1$, $x_2=-1$ è un assegnamento di valori che soddisfa il vincolo.

$$7x_1 - 2x'_2 = 5 \quad x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x'_2 = -x_2$$

$x_1=1$, $x'_2=-x_2=1$ è un assegnamento di valori che soddisfa il vincolo.

Formulazioni equivalenti: variabili non vincolate

$$x_j \text{ n.v.} \Rightarrow x_j = (x'_j - x''_j) \quad x'_j \geq 0, x''_j \geq 0$$

Sostituiamo x_j con la differenza tra x'_j e x''_j ovunque appaia nel modello (vincoli e funzione obiettivo).
Il valore (positivo, negativo oppure 0) assunto da x_j in ogni soluzione ammissibile sarà ottenuto come differenza tra due numeri non negativi.

Esempio:

$$7x_1 - 2x_2 \geq 5 \quad x_1 \geq 0,\ x_2\ n.v$$

$x_1=1$, $x_2=-3$ è un assegnamento di valori che soddisfa il vincolo. Infatti $7\cdot1 - 2(-3) = 13 > 5$. Ora fissati due valori per x_2' e x_2'' tali che $x_2'-x_2''=-3$ (ad esempio $x_2'=6$ e $x_2''= 9$) si ha:

$$7x_1 - 2(x'_2 - x''_2) = 7\cdot1 - 2(-3) = 13 > 5 \quad x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x''_2 \geq 0$$

Esercizi

Esercizio

Scrivere la forma canonica e la forma standard per il seguente problema di programmazione lineare.

$$\max\ z = x_1 - x_2 - x_3$$

$$\begin{array}{rcl}
-3x_1 - x_2 + x_3 & <= & -3 \\
2x1 - 3x_2 - 2x_3 & >= & 4 \\
x_1 - x_3 & = & 2 \\
x_1 > & = & 0 \\
x_2 & <= & 0 \\
x_3 & n.v. &
\end{array}$$

Trasformazione in forma standard:

$$-min\, z=-x_1-x'_2+(x'_3-x''_3)$$
$$3x_1-x'_2-(x'_3-x''_3)+x_4=3$$
$$2x_1+3x'_2-2(x'_3-x''_3)-x_5=4$$
$$x_1-(x'_3-x''_3)=2$$
$$x_1>0$$
$$x'_2\geq 0 \qquad quindi\; x'_2=-x_2$$
$$x'_3\geq 0\, e \quad x''_3\geq 0 \qquad perché \quad (x'_3-x''_3)=x_3$$
$$x_4\geq 0 \qquad x_5\geq 0$$

Trasformazione in forma canonica minimo:

$$-min\, z=-x_1-x'_2+(x'_3-x''_3)$$
$$3x_1-x'_2-(x'_3-x''_3)\geq 3$$
$$2x_1+3x'_2-2(x'_3-x''_3)\geq 4$$
$$-x_1+(x'_3-x''_3)\geq -2$$
$$x_1-(x'_3-x''_3)\geq 2$$
$$x_1>0$$
$$x'_2\geq 0 \qquad quindi\; x'_2=-x_2$$
$$x'_3\geq 0\, e \quad x''_3\geq 0 \qquad perché \quad (x'_3-x''_3)=x_3$$

1) Fornire un esempio di vettori in R^3 linearmente indipendenti e linearmente dipendenti.

2) Verificare se i seguenti vettori:

$\underline{x}_1^T$=(4, 1, 2) e $\underline{x}_2^T$=(7, 3, 1)

e

$\underline{x}_3^T$=(4, 1), $\underline{x}_4^T$=(7/2, 5) e $\underline{x}_5^T$ = (3, 2)

sono linearmente indipendenti o dipendenti.

3) I vettori $\underline{x}_1^T$ e $\underline{x}_2^T$ formano una base di R^3?

4) I vettori $\underline{x}_3^T$, $\underline{x}_4^T$ e $\underline{x}_5^T$ formano una base di R^2?

5) I vettori $\underline{x}_3^T$, e $\underline{x}_5^T$ formano una base di R^2?

1. $x_1^T=(1,0,0) \quad x_2^T=(0,1,0) \quad x_3^T=(0,0,1)$ indipendenti
   $x_4^T=(1,0,0) \quad x_5^T=(0,1,0) \quad x_6^T=(1,1,0)$
2. $x_1^T=(4,1,2) \quad x_2^T=(7,3,1)$ sono indipendenti
   $x_3^T=(4,1) \quad x_4^T=(\frac{7}{2,}5) \quad x_5^T=(3,2)$ *sono dipendenti perché la base è composta da due vettori*
3. Non formano una base perché k è diverso da n.
4. non formano una base in R^2.
5. formano una base in R^2.

Verificare se i seguenti vettori:

x_1^T=(4, 1, 2), x_2^T=(7, 3, 1) e x_3^T = (3, 2, 0) sono linearmente indipendenti o dipendenti.

Costruiamo la matrice A=(x_1, x_2, x_3):

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. A è invertibile sse le sue righe (le sue colonne) sono linearmente indipendenti
2. A è invertibile sse il suo determinante è diverso da zero.

Se det(A)≠0 le righe (le colonne) di A sono linearmente indipendenti

$det(A)=2*det\begin{bmatrix}7 & 3\\3 & 2\end{bmatrix}-1*det\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}+0*det\begin{bmatrix}4 & 7\\1 & 3\end{bmatrix}$ = 2*(14-9)-1*(8-3)*0*(12-7) = 10-5 ≠ 0

quindi sono linearmente dipendenti

Esempio: Pianificazione della produzione (formulazione) (CHE COSA DEVO FARE?)
Un'industria fabbrica 4 tipi di prodotti, **P1, P2, P3, P4**, la cui lavorazione è affidata a due reparti dell'industria: il reparto produzione e il reparto confezionamento. Per ottenere i prodotti pronti per la vendita è necessaria naturalmente la lavorazione in entrambi i reparti. La tabella che segue riporta, per ciascun tipo di prodotto i tempi (in ore) necessari di lavorazione in ciascuno dei reparti per avere una tonnellata di prodotto pronto per la vendita.

	P1	P2	P3	P4
Reparto produzione	2	1.5	0.5	2.5
Reparto confezionamento	0.5	0.25	0.25	1

ciascuna tonnellata di prodotto dà i seguenti profitti (prezzi espressi in Euro per tonnellata)

	P1	P2	P3	P4
Profitto	250	230	110	350

Determinare le quantità che si devono produrre settimanalmente di ciascun tipo di prodotto in modo da massimizzare il profitto complessivo, sapendo che ogni settimana, il reparto produzione e il reparto confezionamento hanno una capacità lavorativa massima rispettivamente di 100 e 50 ore.

PASSO 1: trovare le variabili decisionali
E' naturale introdurre le variabili reali x1, x2, x3 e x4 rappresentanti rispettivamente le quantità di prodotto P1, P2, P3, P4 da fabbricare in una settimana.

PASSO 2: definire la funzione obiettivo
Ciascuna tonnellata di prodotto contribuisce al profitto totale secondo la tabella data. Quindi il profitto totale sarà:

$$\text{Max } 250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4$$

PASSO 3: definire i vincoli
Ovviamente la capacità produttiva della fabbrica (risorsa «scarsa») limita i valori che possono assumere le variabili; infatti si ha una capacità massima lavorativa in ore settimanali di ciascun reparto. In particolare per il reparto produzione si hanno a disposizione al più 100 ore settimanali e poiché ogni tonnellata di prodotto **P1** utilizza il reparto produzione per 2 ore, ogni tonnellata di prodotto **P2** utilizza il reparto produzione per 1.5 ore e così via per gli altri tipi di prodotti si dovrà avere:

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100$$

Ragionando in modo analogo per il reparto confezionamento si ottiene:

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50$$

Vincolo di non negatività delle variabili:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

La formulazione finale quindi può essere scritta in questa forma:

max $250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4$

$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100$ (utilizzo reparto produzione)

$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50$ (utilizzo reparto confezionamento)

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$

Consideriamo ulteriori richieste (vincoli):

1. P1 non può utilizzare per più di 20 ore settimanali il reparto di produzione.
2. La produzione di P2 non può superare quella di P3.
3. P4 può utilizzare complessivamente 30 ore settimanali di lavorazione (tra il reparto di produzione e quello di confezionamento).
4. La produzione di P1 non può superare il doppio della produzione di P2 e P3.

1. P1 non può utilizzare per più di 20 ore settimanali il reparto di produzione:

$$2x_1 \leq 20 \Leftrightarrow x_1 \leq 10$$

2. La produzione di P2 non può superare quella di P3:

$$x_2 \leq x_3$$

3. P4 può utilizzare complessivamente 30 ore settimanali di lavorazione:

$$2.5x_4 + x_4 \leq 30 \Leftrightarrow 3.5x_4 \leq 30$$

4. La produzione di P1 non può superare il doppio della produzione di P2 e P3:

$$x_1 \leq 2 * (x_2+x_3)$$

ATTENZIONE!!!!!!!

Per ambiguità il punto 4 si può intendere anche come $x_1 \leq x_3$ e $x_1 \leq x_4$

ESEMPIO 2 (CHI FA COSA?)
Supponiamo che ci siano tre lavori da svolgere: **stuccare, imbiancare e levigare.** Abbiamo a disposizione tre persone **Mario, Luca ed Andrea** che sanno svolgere questi tre lavori ma con differenti tempistiche come indicato nella seguente tabella (i valori rappresentano le ore necessarie ad ogni persona per portare a termine il rispettivo lavoro).

	STUCCA	IMBIANCA	LEVIGA
MARIO	3	1	2
LUCA	2	1.5	1.5
ANDREA	3	1.5	3

Il nostro obiettivo è quello di assegnare ad ogni persona un lavoro e ad ogni lavoro una persona al fine di minimizzare le ore totali necessarie per svolgere i tre lavori.

Possiamo indicare le variabili decisionali con x_i dove i sono gli operai e j i lavori da fare: assegneremo un valore booleano come segue

$$x_{ij}=\begin{Bmatrix} 1 & \text{se assegnamo alla persona } i \text{ il lavoro } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{Bmatrix}$$

Funzione obiettivo: Min $3X_{11}+1X_{12}+2X_{13}+3X_{21}+1.5X_{22}+1.5X_{23}+3X_{31}+1.5X_{32}+3X_{33}$

$min\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}x_{ij}$ per ogni i=1,2,3 e per ogni j=1,2, $\mathbf{c_{ij}}$ = tempo impiegato dall'operaio i per il lavoro j

Definiamo i vincoli :
$X_{11}+X_{12}+X_{13}=1$ (Mario)

$X_{21}+X_{22}+X_{23}=1$ (Luca) → $\sum_{j=1}^{3}x_{ij}=1 \; per\; ogni\; i=1,2,3$

$X_{31}+X_{32}+X_{33}=1$ (Andrea)
cosi facendo assegniamo ad ogni lavoratore esattamente un lavoro

$X_{11}+X_{21}+X_{31}=1$ (Levigare)

$X_{12}+X_{22}+X_{32}=1$ (Stuccare) → $\sum_{i=1}^{3}x_{ij}=1 \; per\; ogni\; j=1,2,3$

$X_{13}+X_{23}+X_{33}=1$ (Imbiancare)
cosi invece definiamo che due operai non possono fare lo stesso lavoro

La formula del minimo si può generalizzare nel seguente modo:

$min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$ per ogni i=1,2,...,n e per ogni j=1,2,...,

Funzioni obiettivo max-min: Esempio delle scommesse

Il signor Rossi è uno scommettitore incallito ma poco fortunato. Dopo aver perso tutte le scommesse della giornata ha deciso di puntare gli ultimi 100 euro sulla vincitrice della coppa Italia.
Questa volta però vuole essere assolutamente sicuro di vincere e per farlo chiede aiuto ad un amico che ha studiato un po' di ricerca operativa. Le 4 squadre rimaste in gara per la vittoria finale sono milan, juventus, napoli e siena quotate rispettivamente 3:1, 4:1, 7:2, 10;1. Una di queste 4 squadre sarà sicuramente la vincitrice del torneo. Quanto deve scommettere il signor Rossi su ogni squadra per massimizzare la vincita nel caso peggiore?

Informazione fondamentale: una delle 4 squadre deve vincere.

Variabili decisionali:
x_m= # sul milan
x_j= # sulla juve
x_n= # sul napoli
x_s= # sul siena

$x_m+x_j+x_{n+}x_s= 100$ perché la traccia ci dice che lo scommettitore vuole usare tutti e 100 euro
$x_i \geq 0$

Vogliamo massimizzare la vincita sul x_i peggiore

M	J	N	S	
3	4	7	10	
40	20	20	20	soluzione ammissibile
120	80	140	200	

Funzione Obiettivo: max z (massimo tra il minimo delle possibili vincite)

$$z = \left\{ \begin{matrix} z \leq 3\, x_n \\ z \leq 4\, x_j \\ z \leq 7\, x_n \\ z \leq 10\, x_s \end{matrix} \right\}$$

Ottimi globali e ottimi locali

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t. } \underline{x} \in X \subseteq R^n$$

Definizione (Ottimo Globale) Un punto $\underline{x}^* \in X$ è un ottimo globale per la funzione f(x) se e solo se: $f(x^*) \leq f(x)\ \forall x \in X$.
Definizione (Ottimo Locale) Un punto $x' \in X$ è un ottimo locale per la funzione f(x) se e solo se: $f(x') \leq f(x)\ \forall x \in N(x;\varepsilon)$.

Ottimo Globale: il valore minimo di un problema min o il valore massimo in un problema max
Ottimo locale: soluzione migliore possibile solo in una parte delle regioni ammissibili.

Ogni ottimo globale è anche ottimo locale, in generale non è vero il viceversa

esempio
L'azienda Rossi &C. ha vinto una gara d'appalto per la produzione di due tipologie di leghe di acciaio L1 ed L2. Il contratto prevede il pagamento di 10 milioni di euro a condizione che siano rispettate le seguenti proporzioni tra le tonnellate delle due leghe prodotte.

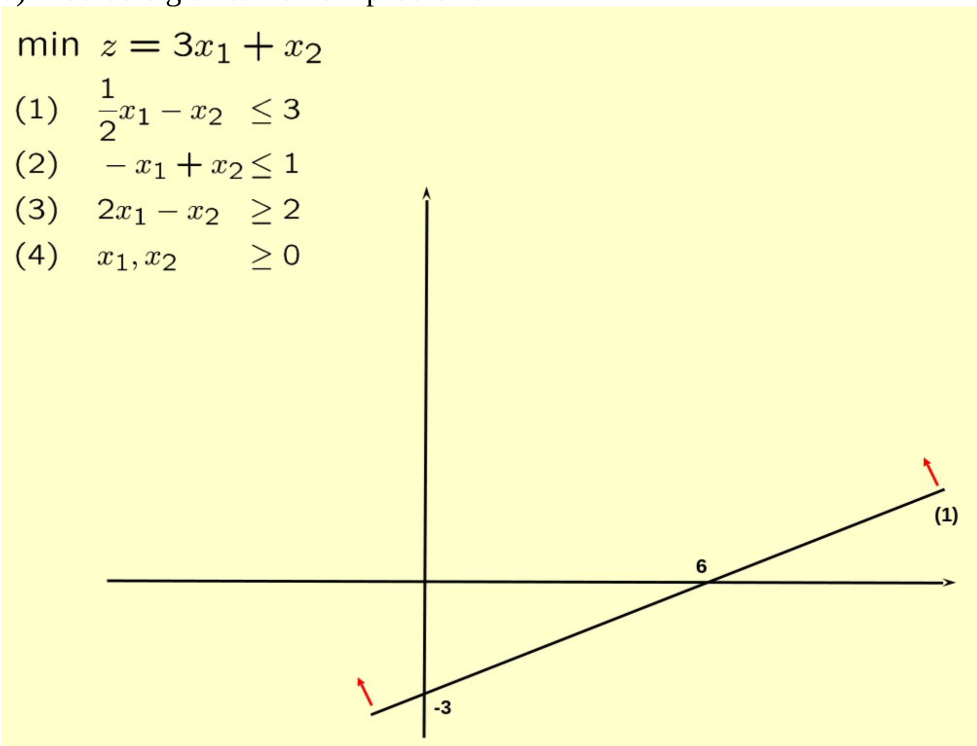
- La metà delle tonnellate di L1 prodotte non devono superare, per al più 3 unità, le tonnellate di L2 prodotte;
- Le tonnellate di L2 possono essere al più di uno superiori a quelle di L1;
- Le tonnellate di L2 prodotte non devono mai superare il doppio delle tonnellate di L1 decrementate di 2.

Sapendo che l'azienda spende 3 milioni di euro per produrre una tonnellata della lega L1 ed un milione di euro per la lega L2, individuare un piano di produzione che rispetti i vincoli di produzione minimizzando però i costi di produzione.
L'attuale piano di produzione individuato prevede la produzione di 2 tonnellate di L1 e mezza tonnellata di L2 per una spesa totale di 6,5 milioni di euro e un profitto finale pari a 10 - 6,5 = 3,5 milioni. Si può fare di meglio?

Min $z = 3x_1 + x_2$

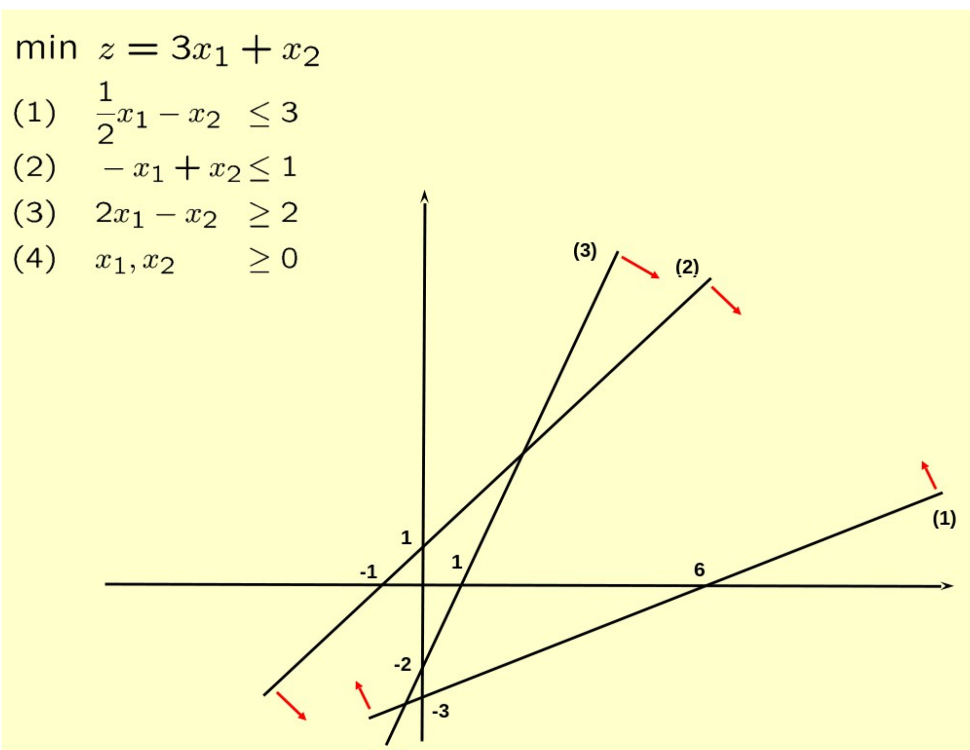
1. $\frac{1}{2}x_1 - x_2 \leq 3$ → La metà delle tonnellate di L1 prodotte non devono superare, per al più 3 unità, le tonnellate di L2 prodotte
2. $x_1 - x_2 \leq 1$ → Le tonnellate di L2 possono essere al più di uno superiori a quelle di L1
3. $2x_1 - x_2 \geq 2$ → Le tonnellate di L2 prodotte non devono mai superare il doppio delle tonnellate di L1 decrementate di 2
4. $x_1, x_2 \geq 0$

a) Risolvere graficamente il problema

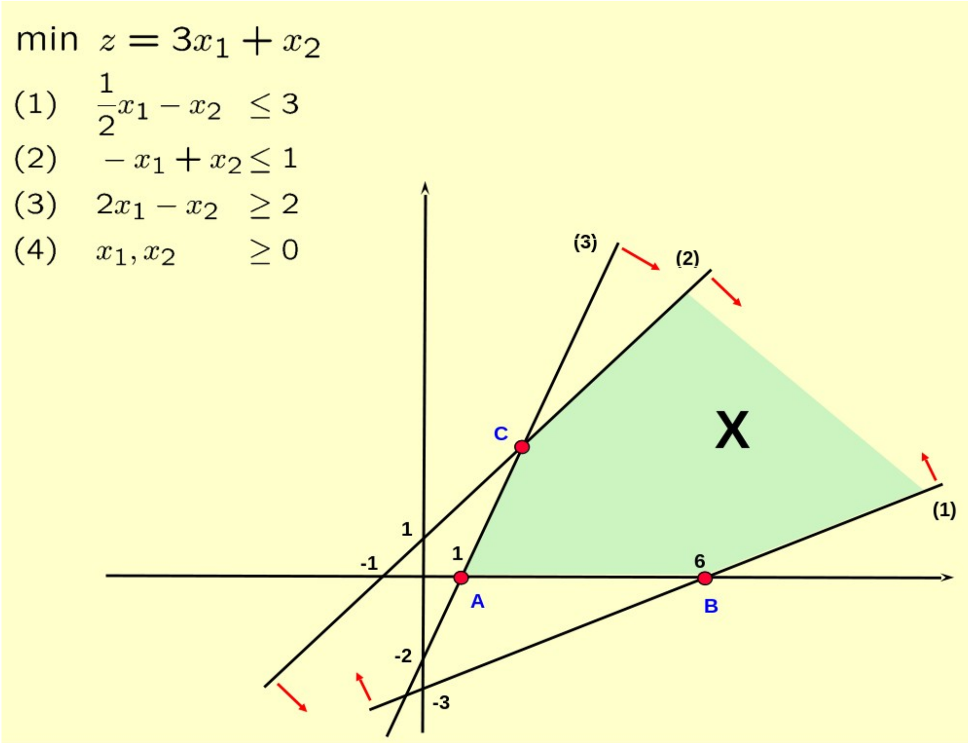


1)Mi trovo de punti sul piano e li unisco

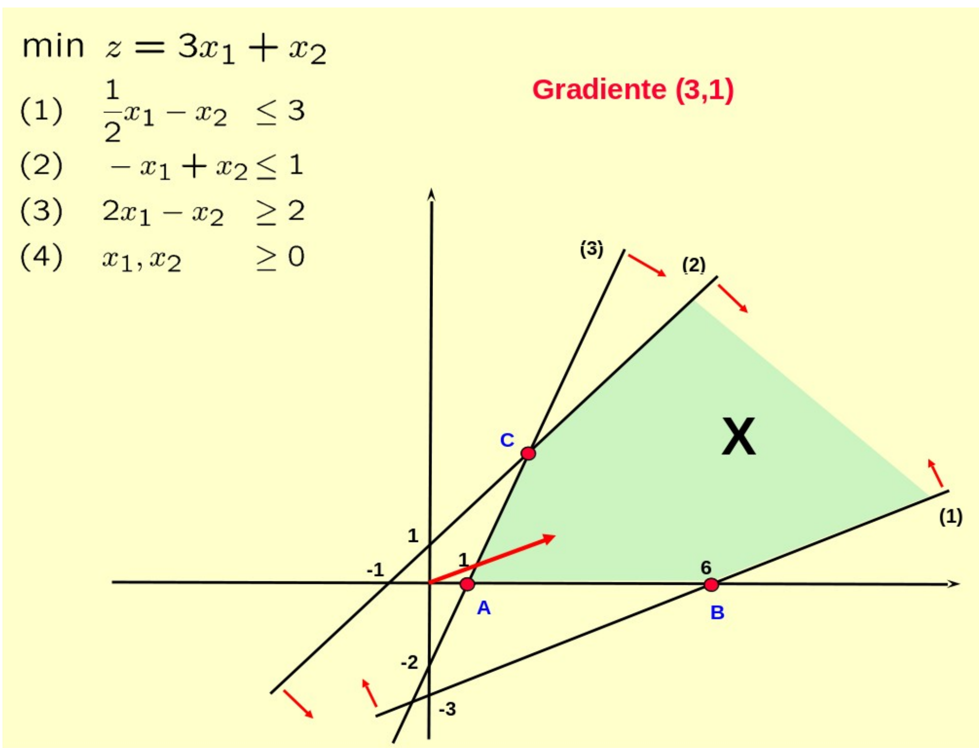
Poi mi trovo un terzo punto e vedo in che regione si trova
ad esempio se scelgo il punto (0,0) noto che la funzione resta vera dal semispazio superiore



Trovo due punti sul piano anche per il vincolo 2 e 3 unisco le rette e controllando sempre la regione ammissibile



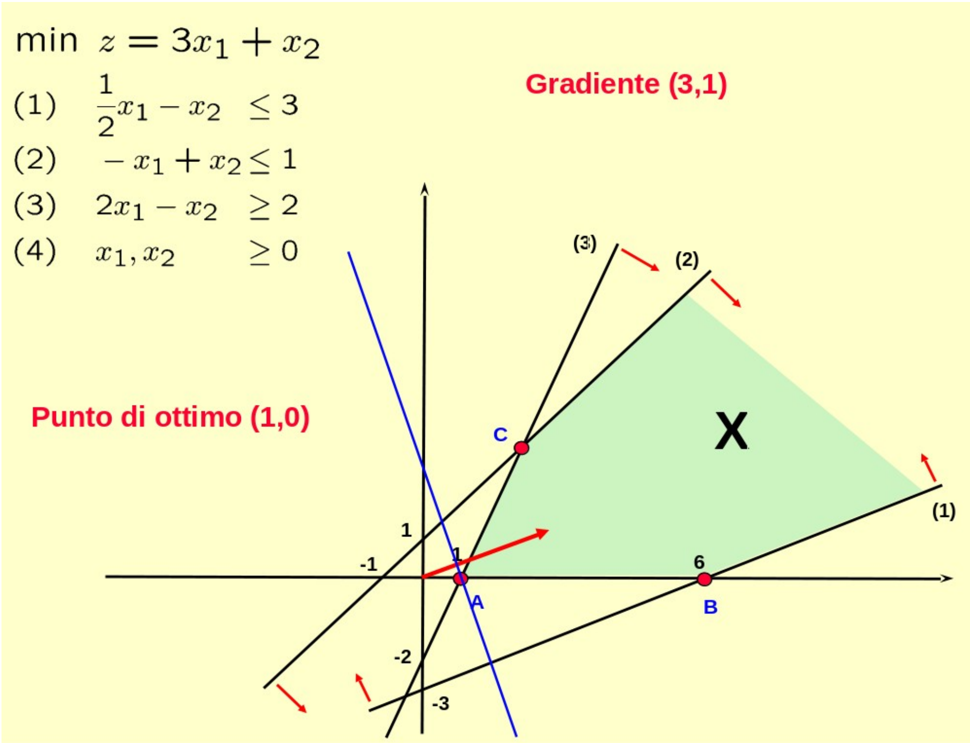
al termine la regione ammissibile risulta la X



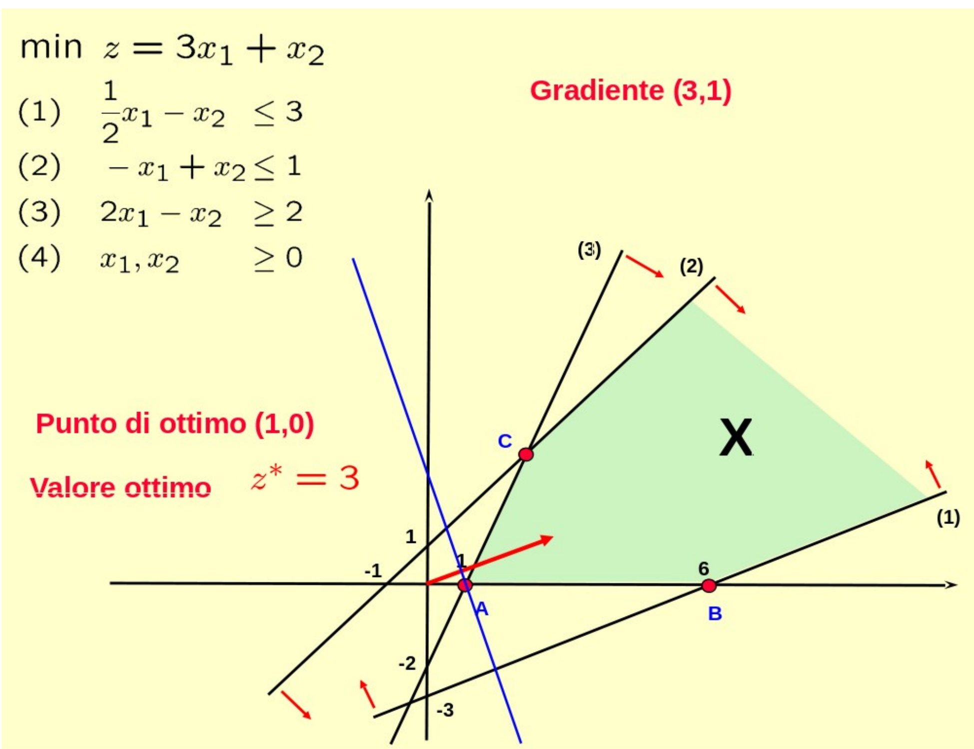
disegniamo il vettore Gradiente dato dai coefficienti di costo della funzione min

il verso del gradiente indica la funzione di crescita del valore obiettivo qualunque sia il suo verso
per massimizzare il fascio delle rette va nel verso del gradiente
per minimizzare l’opposto

Ricorda: la funzione obiettivo è una retta di cui non conosciamo il termine noto.



poi disegniamo tante linee perpendicolari al vettore gradiente e vediamo l'ultimo punto (A) che interseca nella regione ammissibile detto anche punto di ottimo



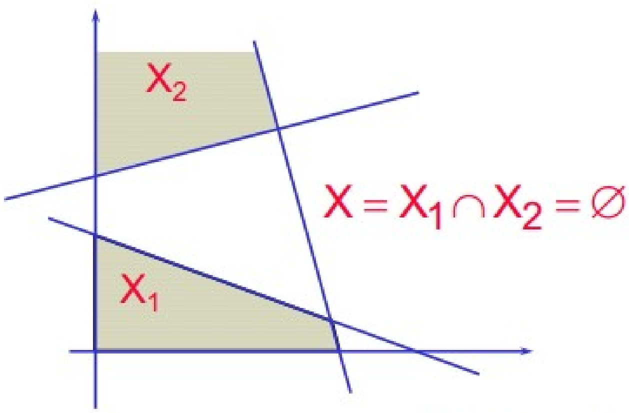
prendiamo le sue coordinate (1,0) e le mettiamo nella funzione min otteniamo che z*=3

Un problema di PL può essere:

1. Non Ammissibile (senza soluzioni ammissibili)
2. Ammissibile con valore ottimo illimitato: abbiamo infiniti valori ottimi
3. Ammissibile con valore ottimo finito:
   1. unico punto di ottimo
   2. infiniti punti di ottimo: abbiamo infiniti punti ottimi che danno lo stesso valore z di ottimo

Definizione Problema inammissibile: Un problema di ottimizzazione si dice inammissibile se X= $\emptyset$, cioè non esistono soluzioni ammissibili.

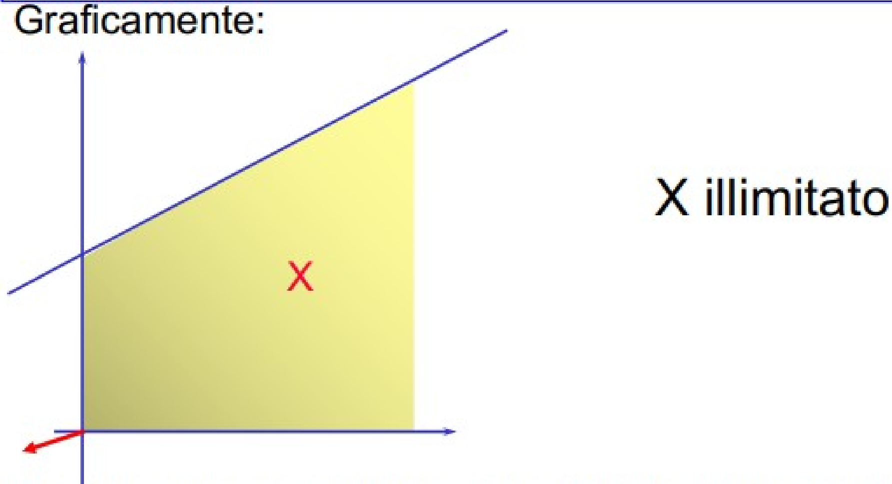
Graficamente:



$$X = \emptyset \Rightarrow \nexists \underline{x} \in \mathbf{R}^n : A\underline{x} \geq \underline{b},\ \underline{x} \geq 0$$

Definizione Ottimo illimitato: Un problema di ottimizzazione si dice illimitato (inferiormente) se scelto un qualsiasi valore M>0, esiste sempre un punto $\underline{x}$∈X tale che f($\underline{x}$) < -M.

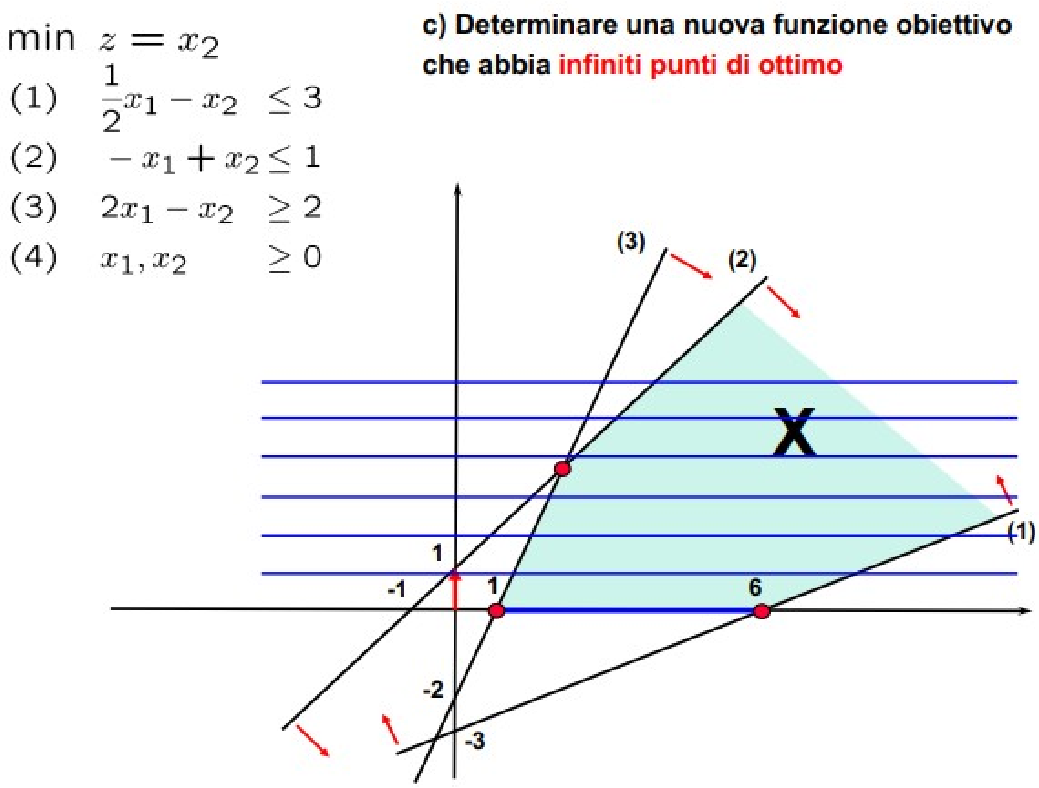
Graficamente:



(n.b., una soluzione con valore ottimo illimitato implica un insieme di ammissibilità X illimitato, ma non è vero il viceversa)

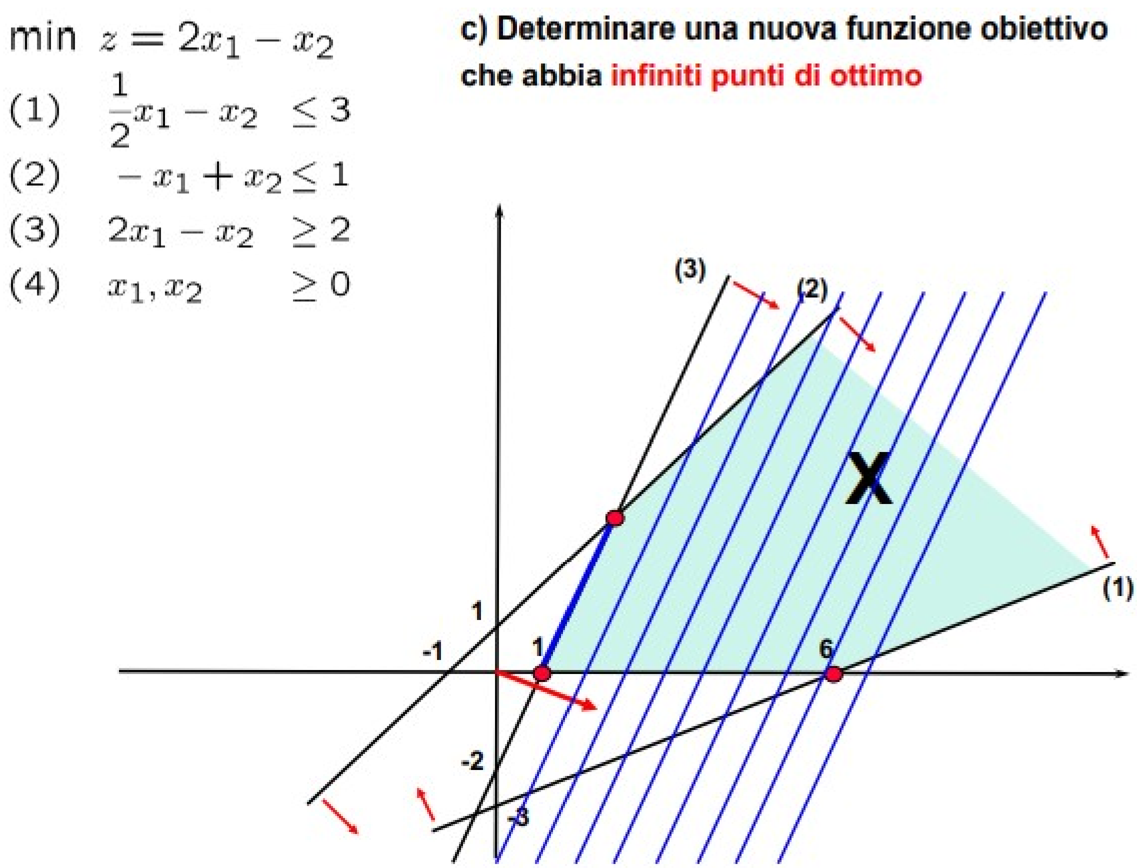
b) Determinare una nuova funzione obiettivo che abbia ottimo illimitato
basta proporre una funzione obiettivo decidendo il suo gradiente decidendo se deve essere minino o massimo, nella richiesta b sopra riportata si vuole determinare il massimo quindi basta definire la funzione max $z = 3x_1 + x_2$ (vedi esempio fatto sopra)
b1) Determinare una nuova funzione obiettivo che abbia ottimo illimitato utilizzando una sola variabile: possiamo fare max $z = x_1$

c) Determinare una nuova funzione obiettivo che abbia infiniti punti di ottimo:
dobbiamo tracciare le linee di livello parallele al gradiente



Visto che cerchiamo di minimizzare la funzione tracciamo il fascio di rette perpendicolari al gradiente nel verso opposto finché non tocchiamo gli ultimi punti in cui si intersecano le rette se esiste.

Vale la



definizione di quello sopra.

Esercizi

1)Una multinazionale produce due versioni di una bevanda energetica: normale e super. Per ogni quintale di bevanda venduta, l'azienda ha un profitto pari ad 1000 euro per il tipo normale e 1200 euro per il tipo super. Nella produzione è necessario utilizzare in sequenza tre tipi di macchinari, A, B, C, che ogni giorno possono lavorare un numero di ore massimo come riportato nella tabella seguente:

	ORE	NORMALE	SUPER
A	4	1	0.4
B	6	0.75	1
C	3.5	1	0

Per produrre un quintale di bevanda (normale o super) è richiesto l'utilizzo delle macchine per il tempo indicato nella stessa tabella. L'obiettivo del signor Rossi è quello di pianificare la produzione giornaliera dei due tipi di bevande al fine di massimizzare il profitto (supponendo che l'intera produzione verrà venduta).

Variabili decisionali: x_1= # tonnellate normale x_2 = # tonnellate super

funzione obbiettivo: max z = $1000x_1 + 1200_{x2}$ (quanti quintali produrre per ogni tipologia di bevanda)

vincoli:
1) $x_1 + 0.4x_2 \leq 4$ (Ore macchina A)
2) $0{,}75x_1 + x_2 \leq 6$ (Ore macchina B)
3) $x_1 + 3.5$ (Ore macchina C)
$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Risoluzione grafica:
Le rette corrispettive ai vincoli sono le seguenti:

1)

x	y
0	10
4	0

2)

x	y
0	6
8	0

3)

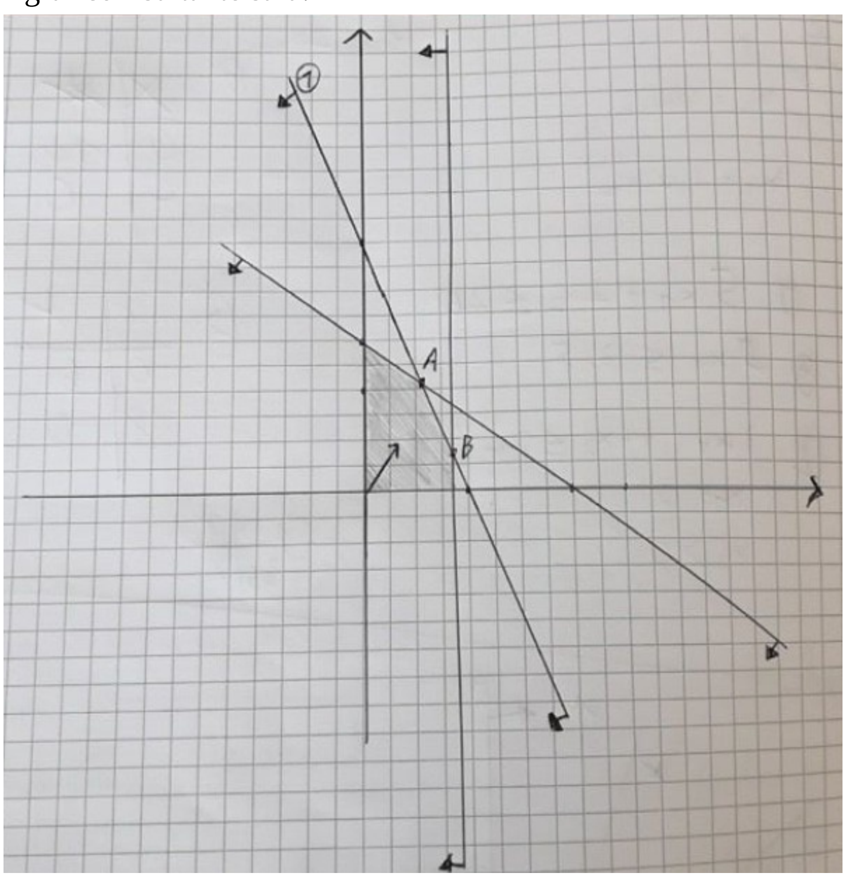
x
3.5

Nota: per convertire un numero con la virgola in frazione si applica la seguente formula: i numeri dopo la virgola compongono il numeratore, mentre il denominatore è composta da un 1 più tanti 0 quanti sono i numeri dopo la virgola. Es: $0{,}75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$

Calcolo in quale semispazio la funzione resta vera:

1. Scegliendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ abbiamo che la funzione resta vera, quindi il suo semispazio è quello verso sinistra.
2. Scegliendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ abbiamo che la funzione resta vera, quindi il suo semispazio è quello verso sinistra.
3. Scegliendo $x_1 = 0$ abbiamo che la funzione resta vera, quindi il suo semispazio è quello verso sinistra.

Il grafico risultante sarà:



Il gradiente è (1, 1.2).
I punti A e B sono i punti in cui si incrociano almeno due rette e sono anche soluzioni. Il punto A è il massimo valore assunto dalla funzione.

2) Il cuoco del ristorante dove lavoriamo ci ha assegnato il compito di andare a comprare le mele e le arance con 20 euro in tasca. Il costo di ogni kg di mele è pari a 5 euro mentre ogni kg di arance costa 2 euro. Inoltre il cuoco non vuole che acquistiamo più di 3.5 kg di mele. Infine il fruttivendolo questa settimana offre un buono sconto da 1 euro su ogni kg di mele e di 1.2 euro su ogni kg di arance acquistato. Questi buoni sconto sono però offerti a condizione che il numero di kg di mele, moltiplicato per 3, più il numero di kg di arance, moltiplicato per 4, non superi i 24 kg. L'obiettivo da raggiungere è quello di ottenere il massimo sconto, rispettando però le indicazioni sia del cuoco che del fruttivendolo.

Variabili decisionali: x_1= # chili di mele da acquistare x_2 = # chili di arance da acquistare
funzione obbiettivo: max $z = x_1 + 1.2x_2$ (Massimizzare il valore totale dei buoni sconto ottenuti)
vincoli: 1) $5x_1 + 2x_2 \leq 20$ (rispetto del limite di spesa)
2) $3x_1 + 4x_2 \leq 24$ (rispetto della condizione imposta dal fruttivendolo per avere accesso ai buoni sconto)
3) $x_1 + 3.5$ (rispetto della richiesta del cuoco)
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Risoluzione grafica:
Le rette corrispettive ai vincoli sono le seguenti:

1)

x	y
0	10
4	0

2)

x	y
0	6
8	0

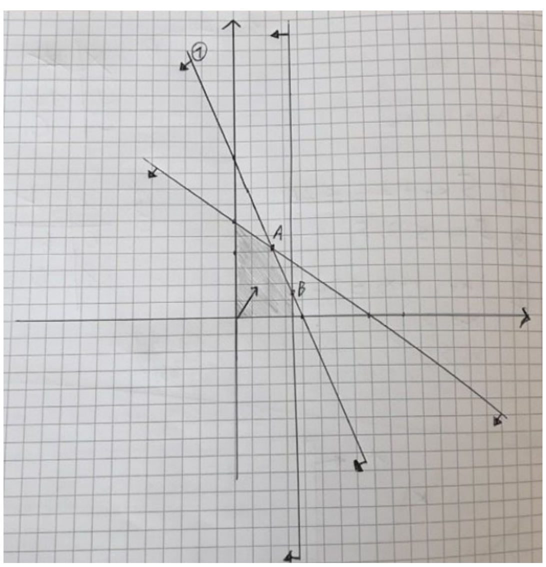
3)

x
3.5

Calcolo in quale semispazio la funzione resta vera:

1. Scegliendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ abbiamo che la funzione resta vera, quindi il suo semispazio è quello verso sinistra.
2. Scegliendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ abbiamo che la funzione resta vera, quindi il suo semispazio è quello verso sinistra.
3. Scegliendo $x_1 = 0$ abbiamo che la funzione resta vera, quindi il suo semispazio è quello verso sinistra.

Il grafico risultante sarà:



Il gradiente è (1, 1.2).
I punti A e B sono i punti in cui si incrociano almeno due rette e sono anche soluzioni. Il punto A è il massimo valore assunto dalla funzione.

Il punto A ha coordinate: $A(\frac{16}{7}, \frac{30}{7})$, basta sostituire questi valori nella funzione obbiettivo per ottenere la soluzione ottima.

Iperpiano: generalizzazione della retta

Definizione: Un insieme geometrico H è un iperpiano se e solo se: H $\{\underline{x}:\underline{p}^T\,\underline{x}=k\}$ o equivalentemente

H = $\{\underline{x} : p_1x_1 + p_2\,x_2 +\ldots+ p_n\,x_n = k\}$

p è un vettore (nel nostro caso è il gradiente) e k è uno scalare

Il vettore $\underline{p} \neq \underline{0}$ è detto gradiente o normale dell'iperpiano, ed è la direzione di crescita dell'iperpiano

Iperpiano: in particolare

Consideriamo un punto $\underline{x}_0$ di H ed il gradiente $\underline{p}$. L'iperpiano H è l'insieme dei vettori $\underline{x}$ tali che il vettore $\underline{x}$-$\underline{x0}$ è perpendicolare a $\underline{p}$

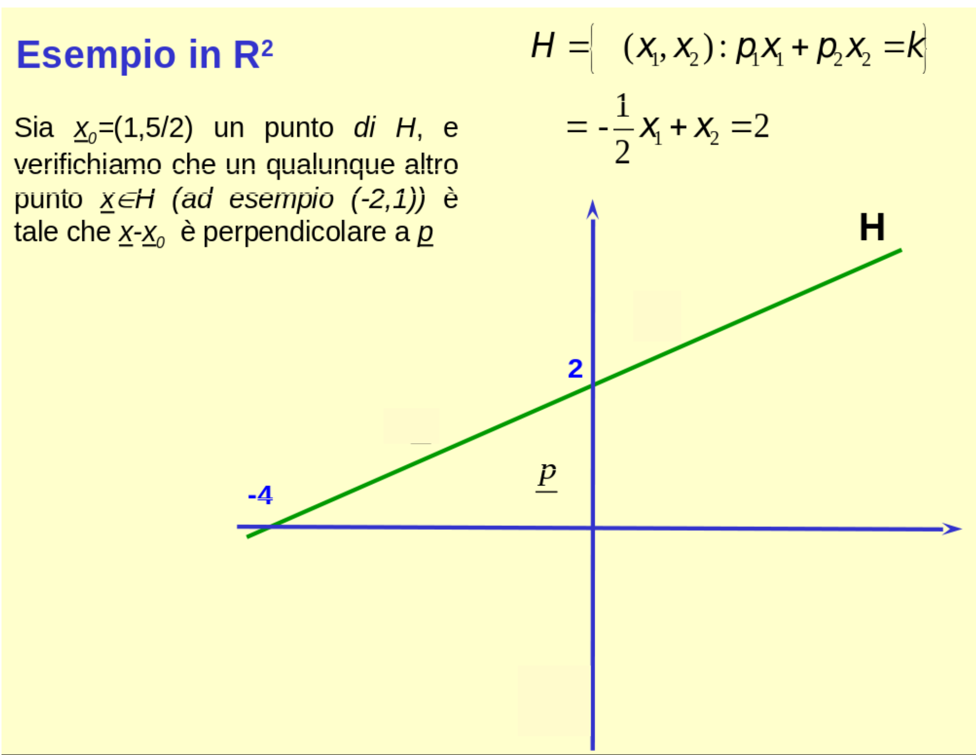
Sappiamo che: $\underline{x}_0 \in H \rightarrow \underline{p}^T\,\underline{x}_0 = k$

quindi: $\underline{x} \in H \rightarrow \underline{p}^T\,\underline{x} = k$

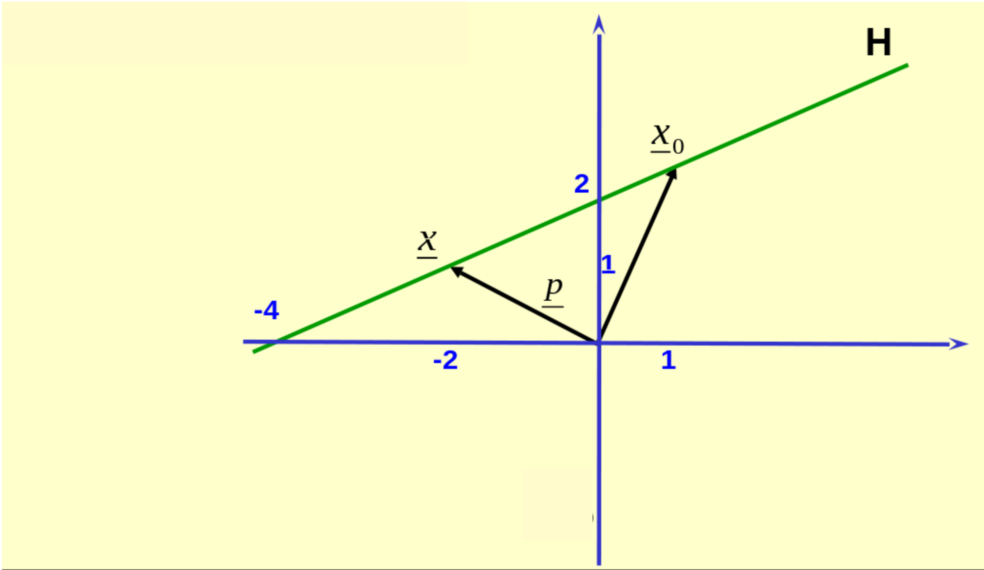
sottraendo: $\underline{p}^T(\underline{x}-\underline{x}_0) = 0$

se due vettori hanno prodotto interno nullo allora sono perpendicolari.

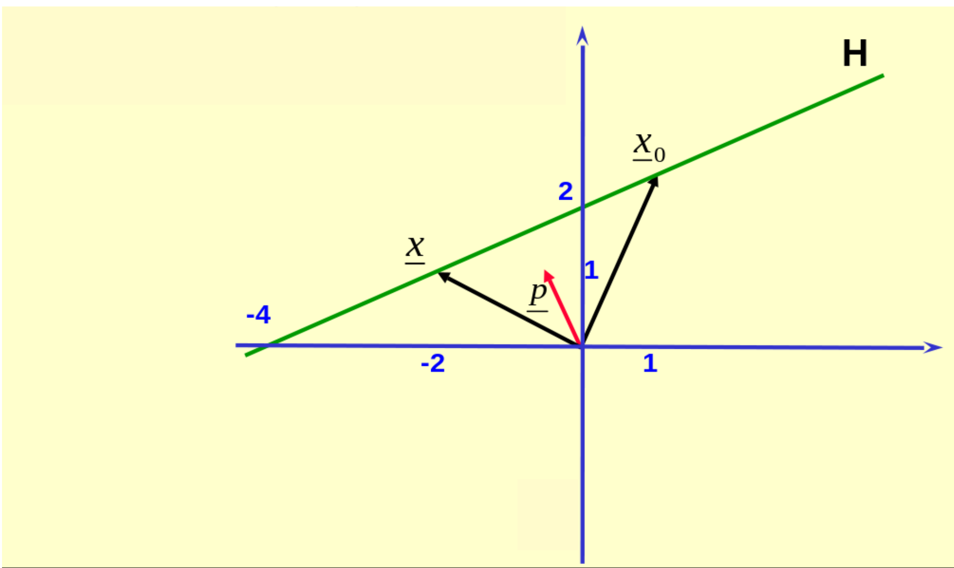
Esempio in R2



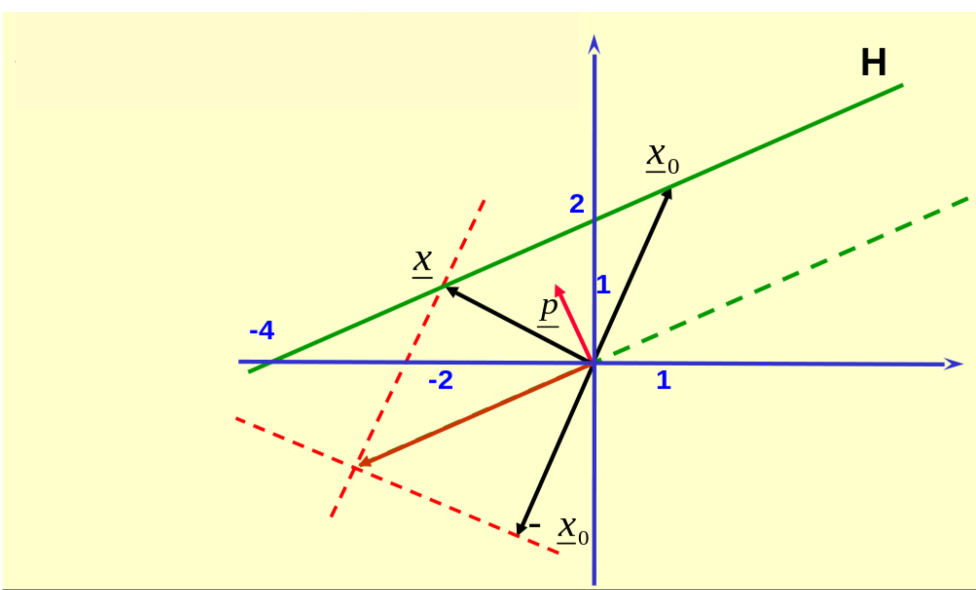
tracciamo l'iperpiano



Tracciamo i vettori
$\underline{x}$= (1/5, 2) e
$\underline{x}_0$ = (-2 ,1)



Tracciamo il gradiente



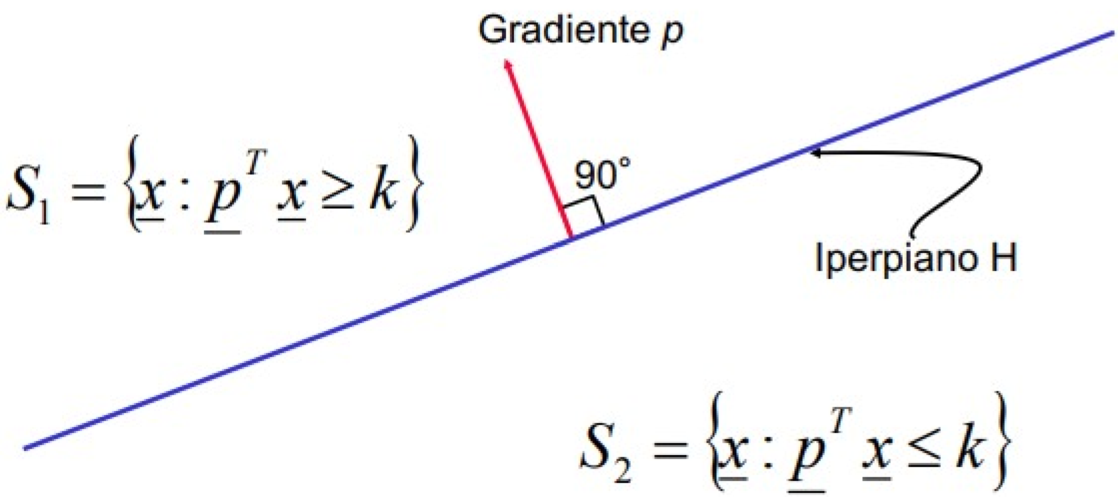
moltiplichiamo x_0 per -1 cosi gli cambiamo il verso e poi eseguiamo $x-x_0$ e con la regola del parallelogramma troviamo il vettore differenza che è perpendicolare a $\underline{p}$ e parallelo ad H

Un iperpiano H divide lo spazio R^n cui appartiene in due semispazi

$$H = \left\{ \underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} = k \right\}$$

$$S_1 = \left\{ \underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} \geq k \right\} \qquad S_2 = \left\{ \underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} \leq k \right\}$$

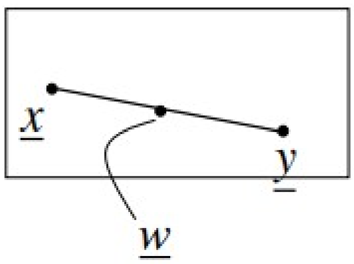
Esempio:



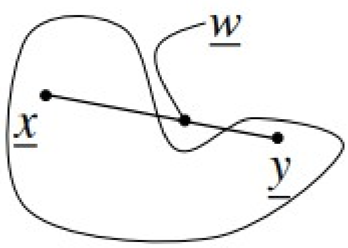
Insieme convesso
Def: Un insieme X è convesso se e solo se dati due punti, x, y $\in$ X ogni punto w generato come loro combinazione convessa:

$w = \lambda\underline{x} + (1-\lambda)\,\underline{y}$ con $\lambda \in [0,1]$ e tale che $\underline{w} \in X$

Presi due punti $\underline{x}$ e $\underline{y}$ la combinazione convessa corrisponde al segmento che unisce $\underline{x}$ e $\underline{y}$



Presi due punti dell'insieme facendone la combinazione lineare riusciamo a trovare un vettore che non fa parte dell'insieme.



Alcuni insiemi convessi
$X = \{\, \underline{x} : A\underline{x} = \underline{b} \}$

Dim. Dobbiamo dimostrare che un qualunque punto $\underline{w} \in X$ può essere espresso come combinazione convessa di due altri punti di X
Consideriamo $\underline{x}, \underline{y} \in X$ generici.

$\underline{x} \in X \rightarrow A\underline{x} = \underline{b}$
$\underline{y} \in X \rightarrow A\underline{y} = \underline{b}$

Considero il punto $\underline{w}$ espresso come combinazione convessa di $\underline{x}$ ed $\underline{y}$

$\underline{w} = \lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$ $\quad \lambda \in [0,1]$

Dobbiamo verificare che w appartiene ad X quindi ad

$\underline{w} = \lambda\underline{x} + (1-\lambda)$ Moltiplico per la matrice A

$A\underline{w} = \lambda A\underline{x} + (1-\lambda)A\underline{y}$ Poiché $\underline{x}$ ed $\underline{y}$ appartengono ad X

$A\underline{w} = \lambda\underline{b} + (1-\lambda)\underline{b} = \lambda\underline{b} + \underline{b} - \lambda\underline{b} = \underline{b}$

Altri insiemi convessi

- Un **Iperpiano** è un insieme convesso
- Un **Semispazio** è un insieme convesso
- L'**intersezione** di iperpiani/semispazi produce un insieme convesso

Dimostrazione che un iperpiano è un insieme convesso:

$X=\{\ \underline{x}:\underline{p}^T\underline{x}=k\}$

Considerando due punti $\underline{x}$ e $\underline{y}$ tali che: $\underline{x}\in X\rightarrow\underline{p}^T\underline{x}=k$ e $\underline{y}\in X\rightarrow\underline{p}^T\underline{y}=k$, considero $\underline{w}$ ottenuto come combinazione di $\underline{x}$ e $\underline{y}$. Quindi ho che $\underline{w}=\lambda\underline{x}+(1-\lambda)\underline{y}$ $\quad con\ \lambda\in[0,1]$. Verifichiamo che $\underline{w}\in X$:

Quindi prendiamo $\underline{w}=\lambda\underline{x}+(1-\lambda)\underline{y}$ e moltiplichiamo per $\underline{p}^T$, otteniamo che $\underline{p}^T\underline{w}=\lambda\underline{p}^T\underline{x}+(1-\lambda)\underline{p}^T\underline{y}$ perché $\underline{x}$ ed $\underline{y}$ appartengono ad X possiamo scrivere:

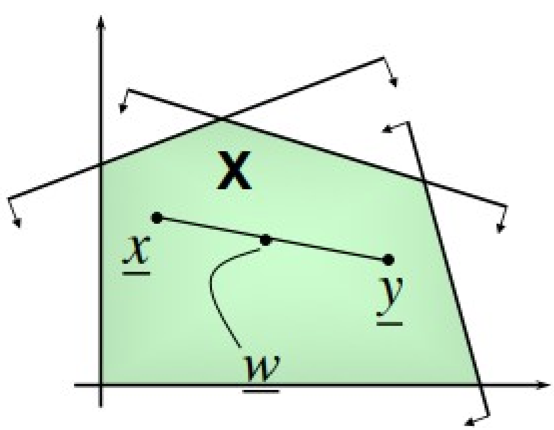
$$\underline{p}^T\underline{w}=\lambda k+(1-\lambda)k=\cancel{\lambda k}+k-\cancel{\lambda k}=k$$

Un **poliedro** è l'intersezione di un numero finito di semispazi

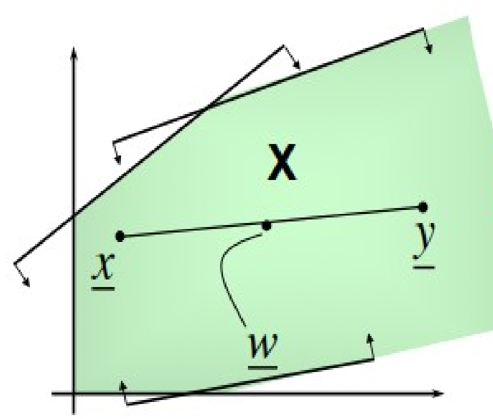
Per noi il poliedro è la nostra regione ammissibile dato dall'intersezione tra iperpiano e semispazo.

Un poliedro X è un **insieme convesso**

poliedro chiuso e limitato
(Politopo)



poliedro illimitato



Funzione convessa

Definizione: Una funzione $f(\underline{x})$ si dice convessa su insieme X se, presi comunque due punti $\underline{x}_1, \underline{x}_2\in X$ risulta che: $f(\lambda\underline{x}_1+(1-\lambda)\underline{x}_2)\leq\lambda f(\underline{x}_1)+(1-\lambda)f(\underline{x}_2)$ con $\lambda\in[0,1]$

Teorema 1

Una funzione lineare del tipo $\underline{c}^T\underline{x}$ è una funzione convessa.

DIM. Dalla definizione di funzione convessa, sostituendo la $f(\underline{x})$ con $\underline{c}^T\underline{x}$ si ha:

$f(\lambda\underline{x}_1+(1-\lambda)\underline{x}_2) \longrightarrow \underline{c}^T\lambda\underline{x}_1 + \underline{c}^T(1-\lambda)\underline{x}_2$
$\lambda f(\underline{x}_1) + (1-\lambda)\, f(\underline{x}_2) \longrightarrow \lambda\underline{c}^T\underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{c}^T\underline{x}_2$

Uguali

Poiché $f(\lambda\underline{x}_1+(1-\lambda)\,\underline{x}_2) = \lambda f(\underline{x}_1) + (1-\lambda)\, f(\underline{x}_2)$ la funzione $\underline{c}^T\underline{x}$ è convessa.

Teorema 2

Se f è una funzione convessa e X è un insieme convesso allora ogni ottimo locale x' di f su X (se ne esistono) è anche un ottimo globale.

Questo è utile nel simplesso perché si fermerà appena trova l'ultimo ottimo locale

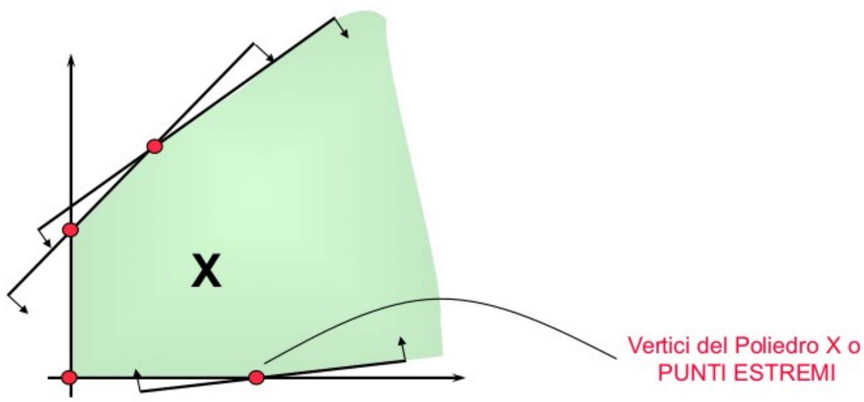
Vertici di un poliedro

Quando la soluzione ottima è finita si trova nei vertici di un poliedro.

Vertici: un vertice è un punto che non potrà mai essere espresso come combinazione convessa stretta da altri punti all'interno della regione ammissibile.

Più in generale:

Def: Un punto di un poliedro X è un punto estremo se e solo se non può essere espresso come combinazione convessa STRETTA di altri punti di X.



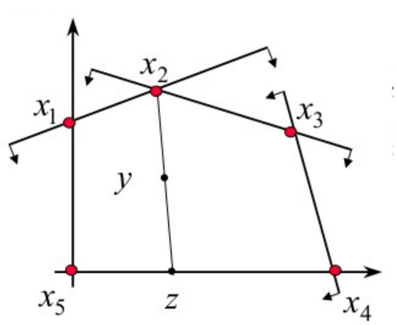
Teorema (no dim.) (Proprietà dei punti estremi di un poliedro limitato)

Dato un poliedro X non vuoto e limitato con punti estremi $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$,..., $\underline{x}_k$, ogni punto $\underline{y}\in X$ può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X, cioè:

$$\underline{y}=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\underline{x}_j \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1 \quad \text{e} \quad \lambda_j\geq 0 \qquad \forall\, j=1,\ldots,k \quad .$$

Esempio:

Voglio esprimere il vettore $\underline{y}$ come combinazione convessa dei vertici del politopo.



Per calcolare il vettore $\underline{y}$ tracciamo una retta che parte dal vertice x_2 che tocca la retta $x_4 - x_5$ generando un nuovo vettore $\underline{z}$, quindi $\underline{y}$ è espresso come combinazione lineare:

$\underline{y} = \lambda \underline{x_2} + (1-\lambda) z \quad \lambda \in (0,1)$ con $z = \mu \underline{x_5} + (1-\mu) \underline{x_4} \quad \mu \in (0,1)$, sostituiamo ora e otteniamo:

$\underline{y} = \lambda \underline{x_2} + \mu (1-\lambda) \underline{x_5} + (1-\mu)(1-\lambda) \underline{x_4}$

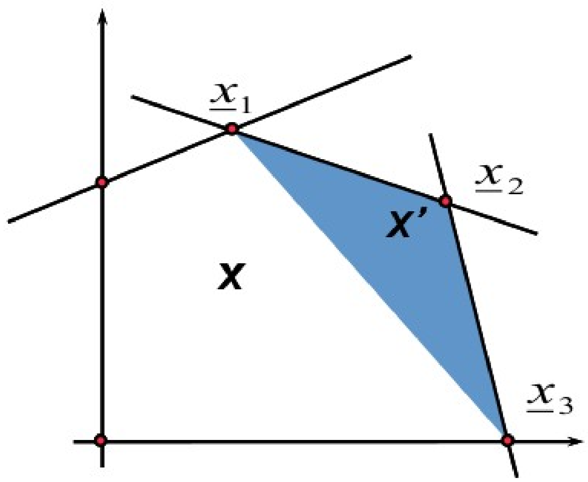
Nota che :

1. $\lambda \ge 0 \quad \mu(1-\lambda) \ge 0$ e $(1-\mu)(1-\lambda) \ge 0$
2. $\lambda + \mu(1-\lambda) + (1-\mu)(1-\lambda) = \lambda + (1-\lambda)(\mu + 1 - \mu) = 1$

   Dim: $\lambda + (1-\lambda)(\mu + 1 - \mu) = \lambda + (-\lambda + 1)(1) = \lambda - \lambda + 1 = 1$

In generale abbiamo

Una combinazione convessa di $\underline{x_1}$, $\underline{x_2}$ e $\underline{x_3}$ permette di ottenere tutti i punti di $X' \subset X$? Si ma solo in un area che collega i 3 vettori:

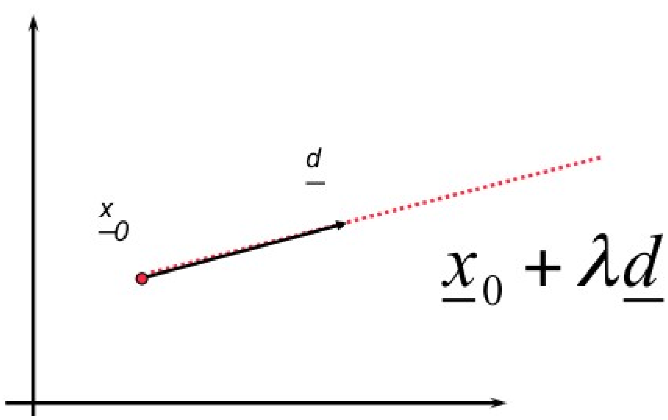


Quando un poliedro è illimitato? Bisogna considerare le sue direzioni estreme.

Raggi e direzioni di un poliedro

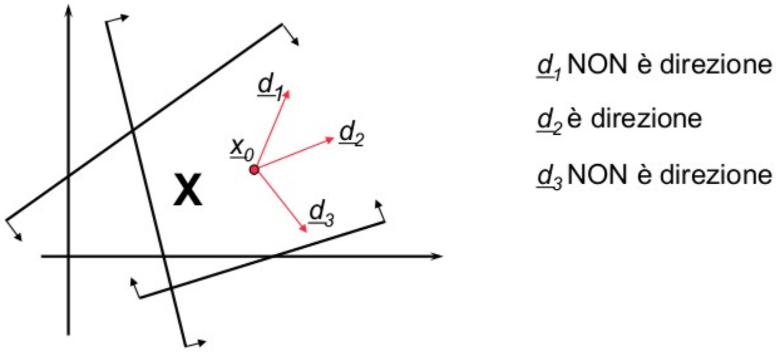
Definizione: un RAGGIO R di vertice $\underline{x_0}$ e di direzione $\underline{d}$ è un insieme di punti della forma:

$$R = \{ x_0 + \lambda d : \lambda \ge 0 \}$$



Direzione: un vettore $\underline{d}$ è direzione se preso un qualsiasi punto del poliedro posso spostarmi all'infinito all'interno di esso senza mai uscire dalla regione ammissibile. Se il poliedro è chiuso non esiste un vettore $\underline{d}$ che rappresenta la direzione.

Definizione: dato un poliedro X, il vettore d è una direzione di X se e solo se per ogni punto $\underline{x}_0 \in X$, il raggio $\underline{x}_0 + \lambda d$, $\lambda \geq 0$ appartiene a X.



Come si calcolano le direzioni di un poliedro?
(Procedimento algebrico)
$X = \{ \underline{x} : A\underline{x} \leq \underline{b} , \underline{x} \geq 0 \}$ (poliedro)

Dato un qualsiasi punto $\underline{x} \in X$, poliedro X se: il vettore $\underline{d}$ è una direzione del

- **(i)** $A (\underline{x} + \lambda \underline{d}) \leq \underline{b}$
- **(ii)** $\underline{x} + \lambda \underline{d} \geq \underline{0}$
- **(iii)** $\underline{d} \neq \underline{0}$

dove A è la matrice originale del problema, $\underline{d}$ è la direzione, e i termini noti sono uguali a 0.
Questo vale perché:

- **(i)** poiché $x \in X$: $A (\underline{x} + \lambda\underline{d}) \leq \underline{b} \Leftrightarrow A\underline{x} + \lambda A\underline{d} \leq \underline{b} \Leftrightarrow \lambda A\underline{d} \leq \underline{0} \Leftrightarrow A\underline{d} \leq \underline{0}$
- **(ii)** $\underline{x} + \lambda\underline{d} \geq \underline{0} \Leftrightarrow \underline{d} \geq \underline{0}$

Quindi le direzioni $\underline{d}$ del poliedro X sono tutti e soli i vettori tali che:

$$A\underline{d} \leq \underline{0}$$
$$\underline{d} \geq \underline{0}$$
$$\underline{d} \neq \underline{0}$$

Esercizio: dato il seguente sistema trovare la sua direzione se l'ammette.

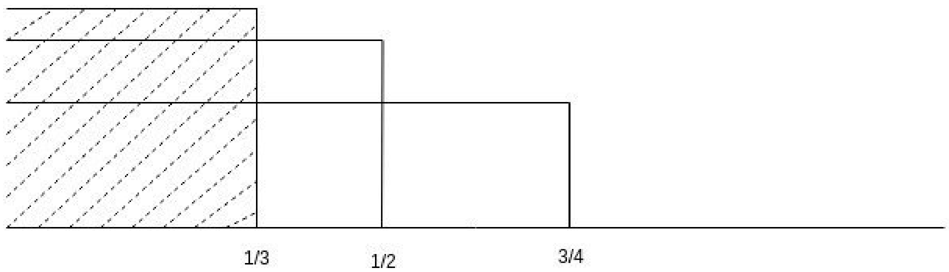
$$X \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2) : -3x_1 + x_2 \leq -2, -x_1 + x_2 \leq 2, -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ \underline{x} \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$X \left\{ \begin{array}{c} -3x_1 + x_2 \leq -2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ \underline{x} \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow X \left\{ \begin{array}{c} -3d_1 + d_2 \leq 0 \\ -d_1 + d_2 \leq 0 \\ -d_1 + 2d_2 \leq 0 \\ \underbrace{d_1 + d_2}_{\text{prendo solo le soluzioni estreme}} = 1 \\ \underline{d} \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow X \left\{ \begin{array}{c} -3 + 3d_2 + d_2 \leq 0 \\ -1 + d_2 + d_2 \leq 0 \\ -d_1 + 2d_2 \leq 0 \\ d_1 = 1 - d_2 \\ \underline{d} \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$X\left\{\begin{matrix} d_2 \le \frac{3}{4} \\ d_2 \le \frac{1}{2} \\ d_2 \le \frac{1}{3} \\ d_1 = 1 - d_2 \\ \underline{d} \ge 0 \end{matrix}\right.$$

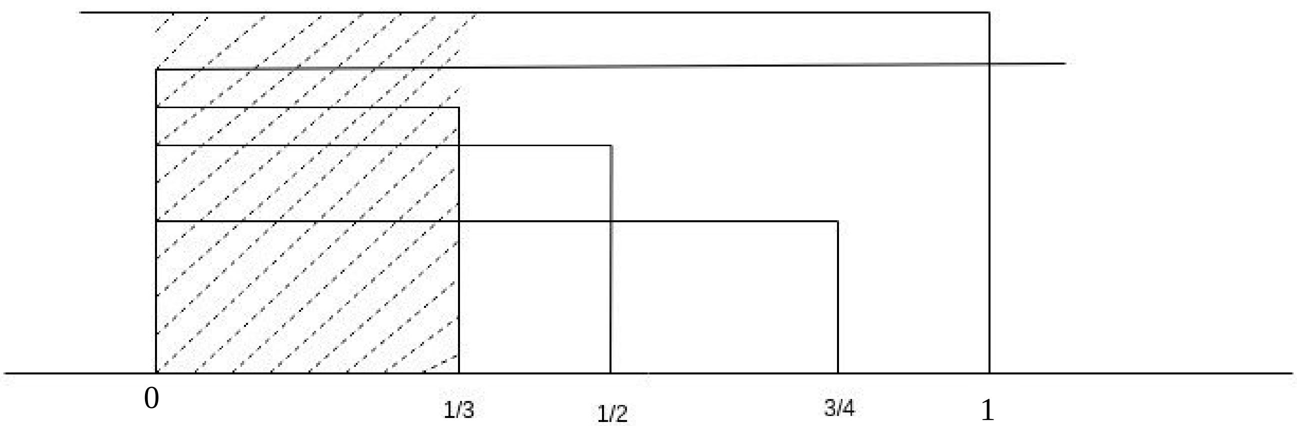
Nota: se le equazioni fossero di $\ge$ non cambierebbe nulla.

Per trovare la soluzione vediamo quali sono i punti in comune nella disequazione:



Da qui

troviamo che d potrebbe avere soluzioni $d' e d'' \le \frac{1}{3}$? No, infatti teniamo presente che il vettore $\underline{d} \ge 0$ e $d_1 + d_2 = 1$, quindi i valori dovrebbero essere compresi anche tra 0 e 1:



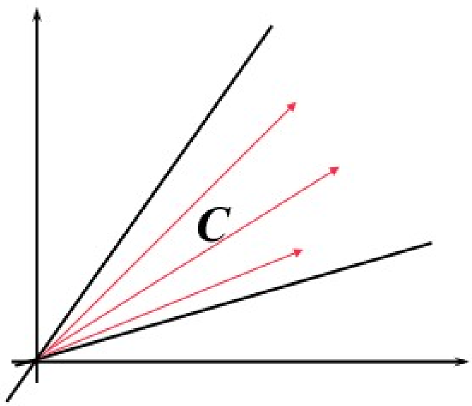
Quindi abbiamo che:

$$d' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad d'' = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

il valore 0 e $\frac{1}{3}$ sono le soluzioni estreme e sono i valori di d_2, una volta infatti abbiamo $d_2 = 0$ che ci da $d_1 = 1$, e una volta $d_2 = 1/3$ che ci da $d_1 = \frac{2}{3}$.

Coni convessi

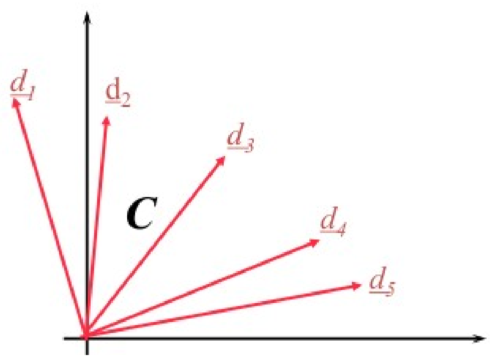
Definizione: Un cono convesso C è un insieme convesso tale che se x∈C allora anche λx∈C ∀λ ≥ 0.



Un cono convesso è un insieme convesso che contiene raggi che partono dall'origine. Alcuni raggi possono essere espressi come combinazione conica di altri.
In generale: un cono convesso può essere espresso in funzione dei suoi raggi. Ma alcuni raggi sono sufficienti (detti RAGGI ESTREMI) perché gli altri raggi sono espressi come combinazione conica di questi.

Dato un insieme di vettori d_1 ,d_2 ,...,d_k il cono convesso generato da questi vettori è dato da:

$$C=\left\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j \underline{d}_j : \lambda_j \geq 0 \qquad j=1,2,\dots,k\right\}$$



Tutti i vettori compresi tra $\underline{d}_1$ e $\underline{d}_5$ sono esprimibili come combinazione conica.

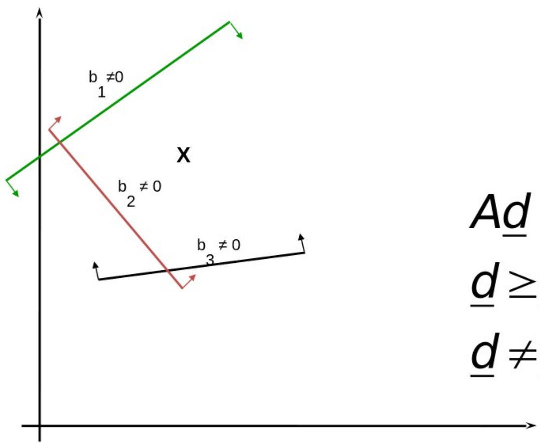
Direzioni estreme di un poliedro

Definizione: una direzione $\underline{d}$ di un poliedro X, è una direzione estrema di X se e solo se non è esprimibile come combinazione conica di altre direzioni di X.

Come si calcolano le direzioni di un poliedro?

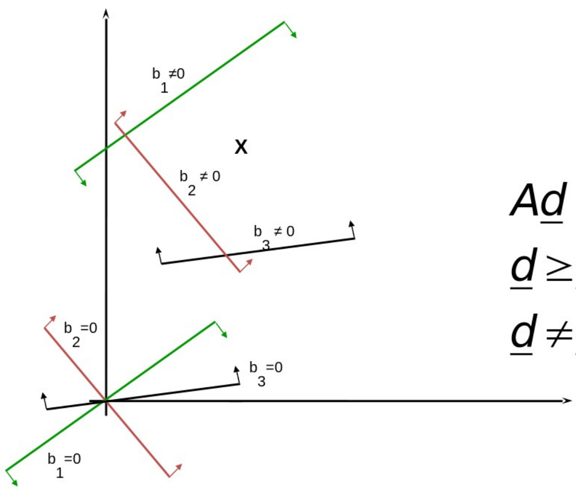
Procedimento geometrico

Iniziamo ricordando che un poliedro si compone nel seguente modo $X=\{\underline{x}: A\,\underline{x}\le \underline{b}\,,\underline{x}\ge \underline{0}\}$ e che una direzione $\underline{d}$ è direzione del poliedro se: $A\,\underline{d}\le \underline{0}\,,\quad \underline{d}\ge \underline{0}\,,\quad \underline{d}\ne \underline{0}$. Questo è un sistema omogeneo che definisce un cono poliedrico (detto CONO di RECESSIONE) ottenuto traslando gli iperpiani che definiscono X parallelamente a se stessi fino all'origine.



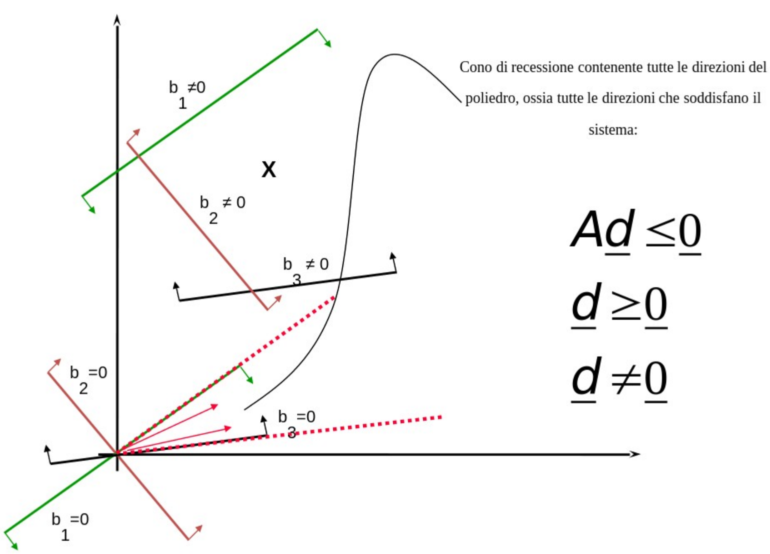
$$A\underline{d} \le \underline{0}$$
$$\underline{d} \ge \underline{0}$$
$$\underline{d} \ne \underline{0}$$

Effettuiamo una traslazione mettendo le b = 0



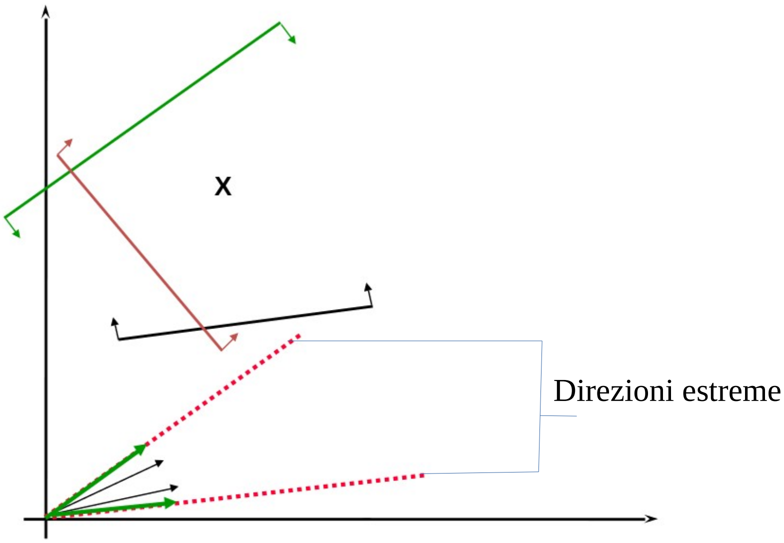
$$A\underline{d} \le \underline{0}$$
$$\underline{d} \ge \underline{0}$$
$$\underline{d} \ne \underline{0}$$

Abbiamo traslato le rette nell'origine degli assi, ora tracciamo il cono di recessione rispettando i vincoli delle direzioni.



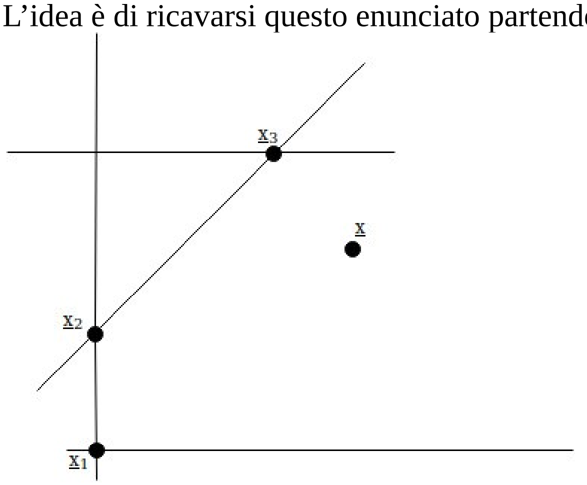
Cono di recessione contenente tutte le direzioni del poliedro.

$$A\underline{d} \le \underline{0}$$
$$\underline{d} \ge \underline{0}$$
$$\underline{d} \ne \underline{0}$$

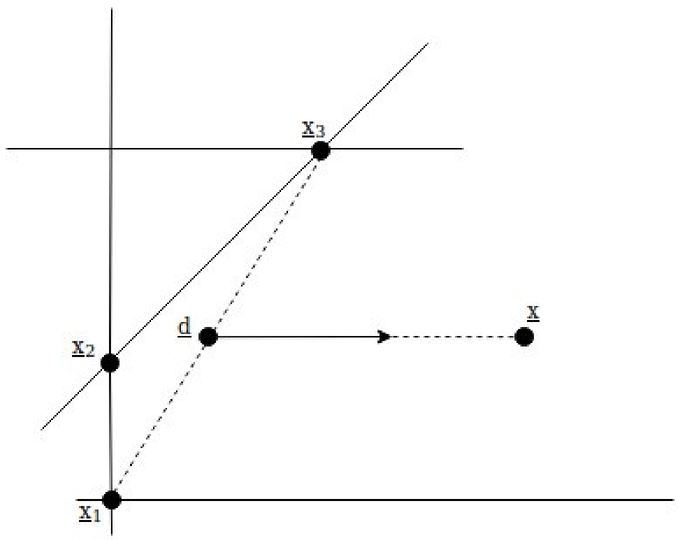


Direzioni estreme del poliedro (direzioni estreme del cono di recessione)

Teorema (di rappresentazione di poliedri) (no dim.)
Dato un poliedro X non vuoto con punti estremi x i con i=1,...,k e direzioni estreme d j con j=1,...,t , ogni punto x ∈ X può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X e combinazione lineare non negativa (conica) delle sue direzioni estreme:
L'idea è di ricavarsi questo enunciato partendo dal ricordarsi la seguente immagine:



Vogliamo infatti poter esprimere il punto $\underline{x}$ nel seguente modo:
Visto che da solo i punti $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ non bastano per esprimere il punto $\underline{x}$ perché non è un politopo e quindi abbiamo che $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ non possono permetterci di esprimere il punto $\underline{x}$ come loro combinazione convessa, per far questo basta aggiungere le direzioni estreme:

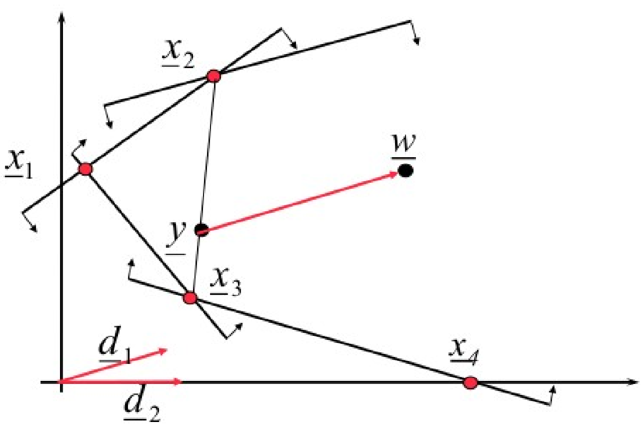


Il punto $\underline{d}$ è combinazione convessa di $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_3$ ed è usato poi come combinazione conica per ottenere $\underline{x}$.

Abbiamo quindi che il punto $\underline{x}$ può essere espresso come combinazione convessa di vertici nel seguente modo:

$$\underline{x}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \underline{x}_i+\underbrace{\sum_{j=1}^{t}\mu_j \underline{d}_j}_{\text{combinazione conica delle direzioni}} \qquad \text{con} \quad \underline{x}_i\geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1, \quad \lambda_i\geq 0, \quad \mu_j\geq 0.$$

Con questa formula possiamo ora ottenere tutti i punti presenti all'interno della regione ammissibile.
Ma come troviamo la nostra soluzione? Basta sostituire i valori di λ_i e μ_j.
Esempio:



$$\underline{y} = \lambda \underline{x}_2 + (1-\lambda)\underline{x}_3 \qquad \lambda\in(0,1)$$
$$\underline{w} = \underline{y} + \mu \underline{d}_1 \qquad \mu \geq 0$$

quindi: $\quad \underline{w} = \lambda \underline{x}_2 + (1-\lambda)\underline{x}_3 + \mu \underline{d}_1$

Soluzione di problemi di PL
Partiamo ricordando che la nostra funzione è la seguente min f($\underline{x}$) = $\underline{c}^T\underline{x}$ quindi abbiamo che:
$\underline{x}_i$ i = 1 , 2 ,..., k punti estremi $\underline{d}_j$ j = 1 , 2 ,..., t direzioni estreme.
Ogni punto x ∈ X può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X e combinazione lineare non negativa delle sue direzioni estreme:

$$\underline{x}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\underline{x}_i+\sum_{j=1}^{t}\mu_j\underline{d}_j \quad \text{con} \quad \underline{x}_i\geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1, \quad \lambda_i\geq 0, \quad \mu_j\geq 0.$$

Possiamo trasformare il problema di PL in un nuovo problema con incognite: $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ e $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_t$ quindi la nostra funzione obbiettivo diventa:

$$\min z=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\underline{c}^T\underline{x}_i)+\sum_{j=1}^{t}\mu_j(\underline{c}^T\underline{d}_i) \quad \text{con} \quad \underline{x}_i\geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1, \quad \lambda_i\geq 0, \quad \mu_j\geq 0.$$

$\underline{c}^T\underline{x}_i$ è un prodotto scalare ed è il coefficiente di λ_i stessa cosa vale per $\underline{c}^T d_j$ che è il prodotto scalare e coefficiente di μ_t.

Come troviamo i valori di λ_i e μ_t?

Per una funzione obbiettivo di minimo valgono le seguenti regole:

1. $se\,\exists\underline{d}_j:\underline{c}^T\underline{d}_j<0$ l'unico valore che possiamo assegnare a μ_t è infinito ed allora il problema ha ottimo illimitato.
2. $se\,\underline{c}^T\underline{d}_j\geq 0\,\forall\underline{d}_j$ le corrispondenti variabili μ_1 , μ_2 ,..., μ_t sono scelte uguali a zero, per minimizzare il resto della sommatoria basta calcolare tutti i valori $\underline{c}^T\,\underline{x}_i$, scegliere il minimo ad esempio $\underline{c}^T\,\underline{x}_p$ e fissare λ_p =1 e tutti gli altri λ uguali a zero. In poche parole il λ del valore minimo è messo a 1 mentre tutti gli altri λ a 0.

Per una funzione obbiettivo di massimo valgono le seguenti regole:

1. $se\,\exists\underline{d}_j:\underline{c}^T\underline{d}_j\geq 0$ l'unico valore che possiamo assegnare a μ_t è infinito ed allora il problema ha ottimo illimitato.
2. $se\,\underline{c}^T\underline{d}_j<0\,\forall\underline{d}_j$ le corrispondenti variabili μ_1 , μ_2 ,..., μ_t sono scelte uguali a zero, per massimizzare il resto della sommatoria basta calcolare tutti i valori $c^T\,x_i$, scegliere il massimo ad esempio $c^T\,x_p$ e fissare λ_p =1 e tutti gli altri λ uguali a zero. In poche parole il λ del valore massimo è messo a 1 mentre tutti gli altri λ a 0.

RIASSUMENDO:

1. La soluzione ottima di un problema di minimo è finita se e solo se $\underline{c}^T\underline{d}_j \geq 0$ per ogni $\underline{d}_j$.
2. In questo caso una soluzione ottima si trova su uno dei vertici del poliedro.
3. Se esistono più vertici ottimi allora ogni combinazione convessa di questi punti è una soluzione ottima.

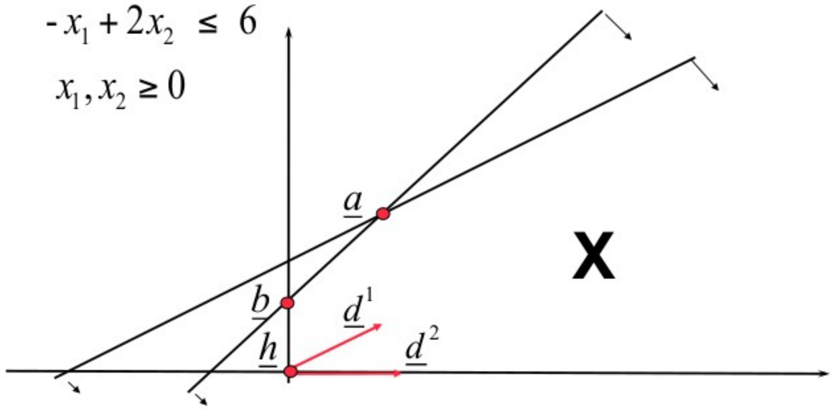
Errori che si commettono nel compito:

1. La soluzione grafica e quella del teorema della rappresentazione devono essere uguali.
2. Chi si ricorda del problema indicato al punto (1) imbroglia facendo uscire i valori uguali ad una delle due soluzioni solo per trovarsi lo stesso valore (MALEEEEEEEE!!!, MOOOOOOLTOOOO MALEEEEEE!!! Carrabs bestemmia) infatti i due metodi servono come prova per verificare la correttezza del risultato(questo non fa bestemmiare Carrabs).

Esercizio soluzioni dei problemi PL

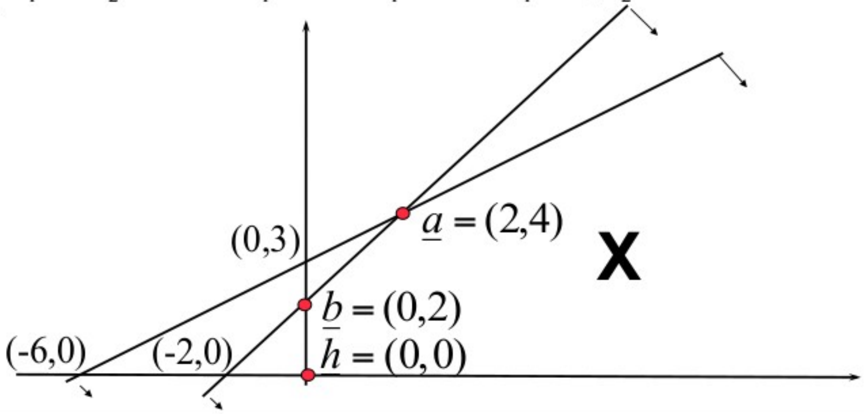
$$\min \quad z = x_1 - 3x_2$$
$$-x_1 + x_2 \le 2$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Calcoliamo punti estremi e direzioni estreme



Le equazione del nostro sistema sono le seguenti:
- $x_1 + x_2 = 2$; $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$; $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$
- $x_1 + 2x_2 = 6$; $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$; $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -6$
Calcoliamo le rette:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 + x_1 \\ -x_1 + 2x_2 = 6 \Rightarrow -x_1 + 4 + 2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4 \end{cases}$$



Calcoliamo le direzioni:

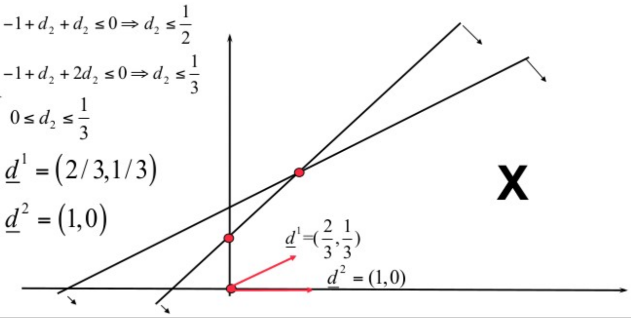
$$D = \begin{Bmatrix} (d_1, d_2) : -d_1 + d_2 \le 0, -d_1 + 2d_2 \le 0, d_1 + d_2 = 1 \\ d_1 \ge 0, d_2 \ge 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} d_1 = 1 - d_2 \\ -1 + d_2 + d_2 \le 0 \Rightarrow d_2 \le \frac{1}{2} \\ -1 + d_2 + 2d_2 \le 0 \Rightarrow d_2 \le \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$0 \le d_2 \le \frac{1}{3}$$

$$\underline{d}^1 = (2/3, 1/3)$$

$$\underline{d}^2 = (1,0)$$



Nota: quando calcoliamo le direzione per capire se i risultati sono corretti basta verificare se toccano il poliedro.

Calcoliamo ora il valore ottima con il teorema della rappresentazione:
min z = $x_1 - 3x_2 \Rightarrow c = (1, -3)$, abbiamo che i punti sono A = (2, 4) B = (0, 2) C = (0, 0) per calcolare i punti di intersezione tra due rette, si mettono a sistema le loro equazioni e si trovano i valori di x_1 e x_2 applicando il metodo della sostituzione. Le direzioni sono $d_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ $d_2 = (1, 0)$

$$\min z = \lambda_1 (1 -3) \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}^{A} + \lambda_2 (1 -3) \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}^{B} + \lambda_3 (1 -3) \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{C} + \mu_1 (1 -3) \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}^{d_1} + \mu_2 (1 -3) \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{d_2} =$$

$$= -10\lambda_1 - 6\lambda_2 - \frac{1}{3}\mu_1 + \mu_2 \quad \text{con i vincoli} \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_{1,} \lambda_2 \geq 0$$

visto che abbiamo $\frac{-1}{3}\mu_1$ $\quad$ *abbiamo che μ_1 ha valore ∞*

Deviazione: pensiamo di avere una funzione un po' diversa: $10\lambda_1 - 6\lambda_2 + \frac{1}{3}\mu_1 + \mu_2$ visto che i nostri coefficienti davanti a μ maggiore di 0 possiamo scegliere μ = 0.
Quindi abbiamo min z = -10 (1) – 6 (0) = min z = -10, -10 è il valore di λ_1 è calcolato dal punto A quindi quest'ultimo è il valore ottimo, per trovarlo sostituiamo le sue coordinate nella funzione.

Soluzione algebrica dei problemi di programmazione lineare

Consideriamo un problema di PL in Forma Standard

$$\min \quad z = \underline{c}^T \underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad (1)$$
$$\underline{x} \geq \underline{0} \qquad (2)$$
$$\underline{x} \in R^n$$

Poiché m=rango(A) ed m<n, si può partizionare A come: A=[A_B | A_N]
dove:

- A_B è una matrice non singolare mxm (det(A B)10)
- A_N è una matrice mx(n-m)

La matrice A_B è composta da m colonne linearmente indipendenti di A. Tali colonne (viste come vettori) sono quindi una base nello spazio vettoriale ad m dimensioni delle colonne di A.
La matrice A_B è detta Matrice di Base (Base). In corrispondenza di una scelta di A B ed A N si può partizionare anche il vettore delle x: $\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B & \text{m componenti} \\ \underline{x}_N & \text{n-m componenti} \end{bmatrix}$ dove
x_B è detto Vettore delle Variabili in Base (Vettore di Base) e x_N è detto Vettore delle Variabili fuori Base.
Il sistema di equazioni lineari Ax=b si può riscrivere come:

$$A_B \underline{x}_B + A_N \underline{x}_n = \underline{b} \rightarrow A_B \underline{x}_B = \underline{b} - A_N \underline{x}_N \rightarrow A_B = A_B^{-1}\underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_n$$

Un esempio:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= 5 \\
-x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3 \\
6x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 21
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_5 \end{array} \\
A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\quad \underline{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} x_2 & x_4 \end{array} \\
A_N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}
\end{array}
\quad \underline{x}_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}
\qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 21 \end{bmatrix}
$$

$$
A_B \underline{x}_B + A_N \underline{x}_N = \underline{b} \quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
x_1 + x_3 - 5x_5 + x_2 + 2x_4 &= 5 \\
-x_1 - 3x_3 + 2x_5 + x_2 + x_4 &= 3 \\
6x_1 + x_3 + x_5 + 2x_2 - x_4 &= 21
\end{aligned}
$$

Una scelta particolarmente importante è porre $\underline{x}_N = \underline{0}$ da cui si ottiene: $\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1}\underline{b} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$ ed è una soluzione di base. La base è composta da:

1. le *m* componenti che sono associate ad una base R^m.
2. Le variabili fuori base $\underline{x}_N$ devono essere sempre uguali a 0.

Il nostro vettore x appena trovato è una soluzione ammissibile? No Perché rispetta soltanto il vincolo 1, infatti per essere ammissibile dobbiamo garantire che $\underline{x}_B = A_B^{-1}\underline{b} \geq \underline{0}$ e quindi si ottiene una Soluzione di Base Ammissibile.

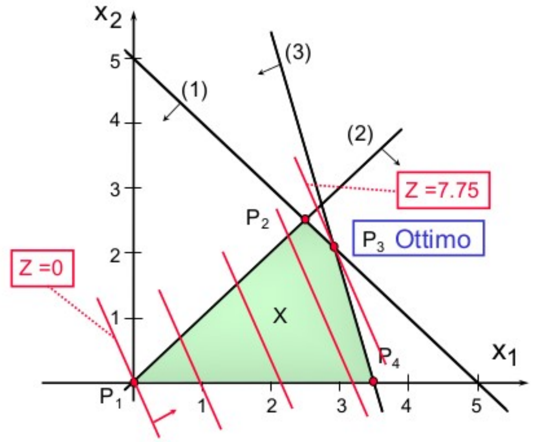
Le soluzioni di base sono importanti poiché vale il seguente teorema:

> **3. Teorema (no dim.)**
>
> Dato X={$\underline{x}$: A$\underline{x}$=$\underline{b}$, $\underline{x}$≥$\underline{0}$} insieme convesso, dove A è una matrice m*x*n di rango m con m<n,
>
> $\underline{x}_e$ è un punto estremo di X se e solo se $\underline{x}_e$ è una soluzione di base ammissibile.

Quindi sappiamo che le soluzioni di base ammissibili coincidono con i vertici del poliedro.

Un esempio:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \qquad (1) \\ & -x_1 + x_2 \le 0 \qquad (2) \\ & 6x_1 + 2x_2 \le 21 \qquad (3) \\ & x_1 \ge 0 \; x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \qquad (1) \\ & -x_1 + x_2 \le 0 \qquad (2) \\ & 6x_1 + 2x_2 \le 21 \qquad (3) \\ & x_1 \ge 0 \; x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 11/4 \\ 9/4 \end{bmatrix} \quad P_4 = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il problema trasformato
in forma standard

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + \; x_2 \le 5 \\ & -x_1 + \; x_2 \le 0 \\ & 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -\min \quad & z = -2x_1 - x_2 \\ & x_1 + \; x_2 + x_3 \; = 5 \\ & -x_1 + \; x_2 + x_4 \; = 0 \\ & 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

Numero possibili di basi

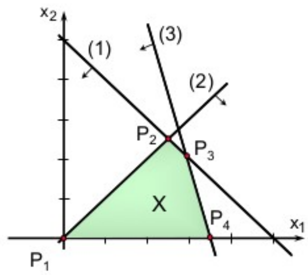
Il massimo numero di possibili basi corrisponde al numero di possibili estrazioni di m colonne su n colonne di A: $\binom{n}{m}=n\frac{!}{m!(n-m)!}$, nel nostro esempio: $\binom{5}{3}=5\frac{!}{3!2!}=10$. In generale, non tutte le possibili sotto-matrici mxm sono non-singolari (quindi invertibili). Inoltre, non tutte le matrici di base danno luogo a soluzioni ammissibili (ossia, con tutte le componenti positive). Per questo motivo il numero delle possibili combinazioni corrisponde ad un limite superiore. Quindi il numero possibile di basi è limitato superiormente.

Nell'esempio solo 6 combinazioni danno luogo a basi ammissibili, vediamo quali:

$$\begin{aligned} -\min \quad & z = -2x_1 - x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ & 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\ & x_1 \ge 0 x_2 \ge 0 x_3 \ge 0 x_4 \ge 0 x_5 \ge 0 \end{aligned} \qquad A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_{B_2} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_{B_3} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \ldots$$

Calcolo geometricalmente di una base



$$
\begin{aligned}
-\min \quad z &= -2x_1 - x_2 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \quad (1)\\
-x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \quad (2)\\
6x_1 + 2x_2 + x_5 &= 21 \quad (3)\\
x_i &\geq 0
\end{aligned}
$$

scegliamo una base, visto che siamo in R^3 deve avere 3 variabili, per trovare una base scegliamo 3 variabili e mettiamo il loro valore ad 1 e le altre a 0. La matrice risultante dalle 3 variabili, la invertiamo e facciamo il prodotto scalare con il vettore dei termini noti $\underline{b}$, il vettore risultante ci darà la base del punto che cerchiamo.

$$
\underline{x}_{B_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad A_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_{B_2}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/4 \\ 3/2 & 0 & -1/4 \\ -2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}
$$

$$
\underline{x}_{B_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = A_{B_2}^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/4 \\ 3/2 & 0 & -1/4 \\ -2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/4 \\ 9/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow P_3
$$

$$
\underline{x}_{B_3} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_2 \qquad \underline{x}_{B_4} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \\ 7/2 \end{bmatrix} \Rightarrow P_4
$$

$$
\underline{x}_{B_5} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underline{x}_{B_6} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underline{x}_{B_7} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 21 \end{bmatrix} \Rightarrow P_1
$$

Queste soluzioni sono dette degeneri perché almeno una componente vale 0. Questa cosa è pericolosa perché il simplesso può andare in loop infinito su quel vertice.

La ricerca delle soluzioni di un problema di PL si può effettuare esaminando solamente un numero finito di soluzioni corrispondenti alle soluzioni di base associate al poliedro dei vincoli. A ciascuna matrice di base B (ammissibile) corrisponde una sola soluzione di base (ammissibile). Viceversa, ad una soluzione di base (ammissibile) possono corrispondere più matrici di base. Questi casi sono associati a soluzioni dette degeneri, ovvero soluzioni per cui qualche componente del vettore di base $\underline{x}_B$ risulta nullo.

Dalla corrispondenza delle soluzioni di base ammissibili con ipunti estremi del poliedro X deriva il seguente teorema.

4. Teorema Fondamentale della PL

Dato un problema di PL in forma standard:

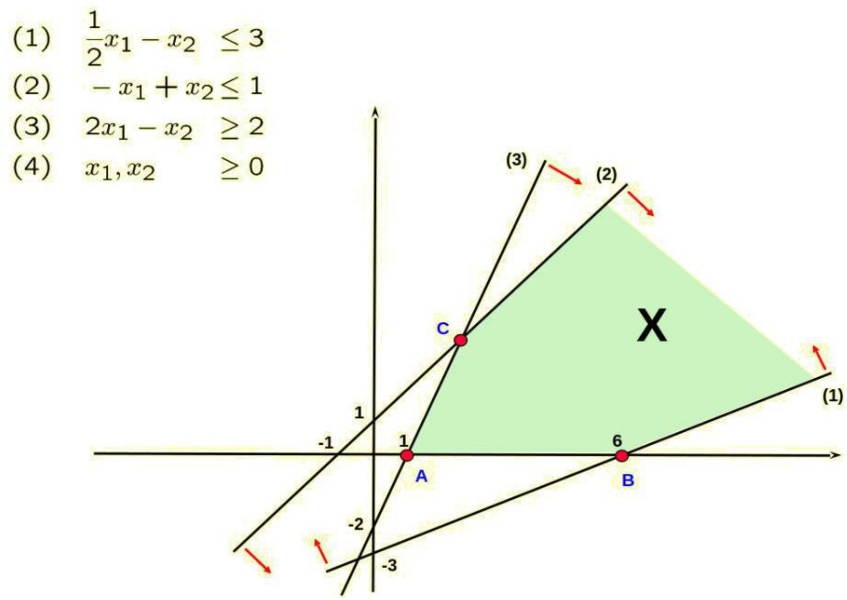
$$\begin{aligned} \min \quad & z = \underline{c}^T \underline{x} \\ & A\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

dove A è una matrice m*x*n con rango(A)=m ed m<n, allora:

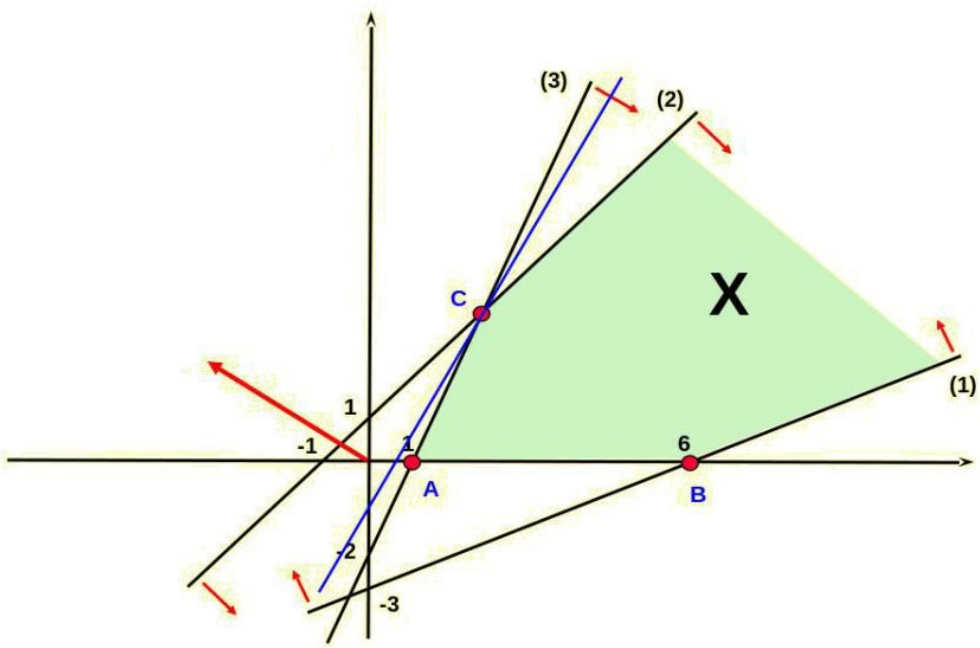
1. esiste una soluzione ammissibile ⇔ esiste una soluzione ammissibile di base
2. esiste una soluzione ottima finita ⇔ esiste una soluzione ottima finita che è anche di base

Poiché il massimo numero di possibili basi di un problema di PL è finito, tali problemi hanno una struttura discreta. I problemi di ottimizzazione corrispondenti alla selezione tra un numero finito di alternative si dicono problemi combinatorici. La PL è quindi un problema combinatorico. Un possibile algoritmo per determinare la soluzione ottima potrebbe consistere nella generazione esplicita di tutte le soluzioni ammissibili di base, quindi nella scelta di quella soluzione che rende massimo l'obiettivo. Tale strategia non è conveniente poiché il numero massimo delle possibili basi cresce in maniera esponenziale col crescere delle dimensioni del problema (numero di variabili e vincoli). Algoritmi che richiedono in generale un numero di passi che cresce in maniera esponenziale con le dimensioni del problema non sono efficienti, infine non è detto che ci dia sempre la soluzione al nostro problema.

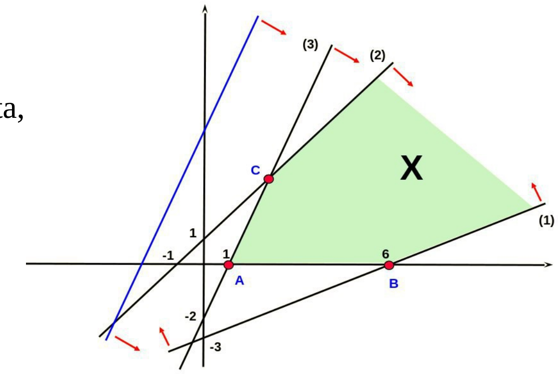
Esercitazione in classe



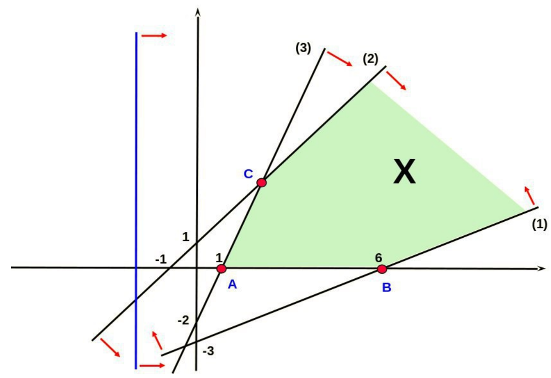
a) Determinare una funzione obiettivo che renda C punto di ottimo unico:
Per trovare una funzione obiettivo che renda il punto C come ottimo unico dobbiamo trovare un gradiente che abbia un coefficiente angolare compreso tra quello di C e A. Quindi data la retta $ax_1 + bx_2 + c = 0$, calcoliamo il coefficiente angolare $m = \frac{-a}{b}$ quindi: $m_2 = \frac{-(-1)}{1} = 1$ *e* $m_3 = \frac{-(2)}{-1} = 2$
dobbiamo quindi individuare una retta con coefficiente angolare: $1 < m < 2$: la retta che troviamo è la seguente $-3x_1 + 2x_2$, visto che vogliamo massimizzare la funzione sarà di massimo, quindi avremo: max $-3x_1 + 2x_2$.



b) Aggiungere un vincolo RIDONDANTE

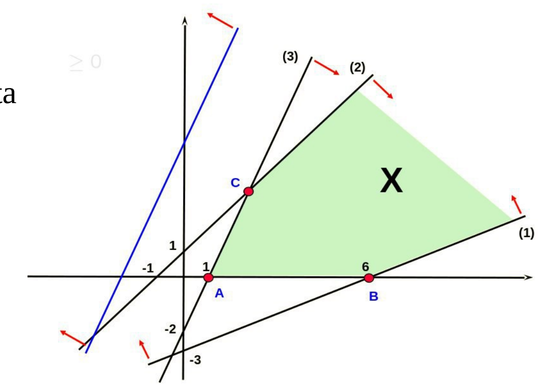


Un vincolo ridondate è un vincolo che non cambia la regine ammissibile, per trovarlo basta effettuare una traslazione di una retta, come per esempio la 3: $2x_1 + x_2 \geq -4$,

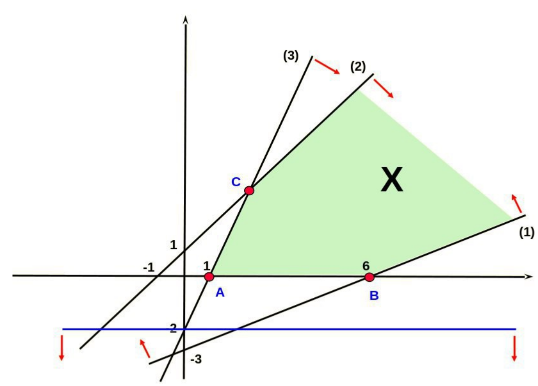


oppure prendiamo un vincolo già esistente e lo modifichiamo un po: $x_1 \geq -2$

c) Aggiungere un vincolo che renda in sistema INAMMISSIBILE

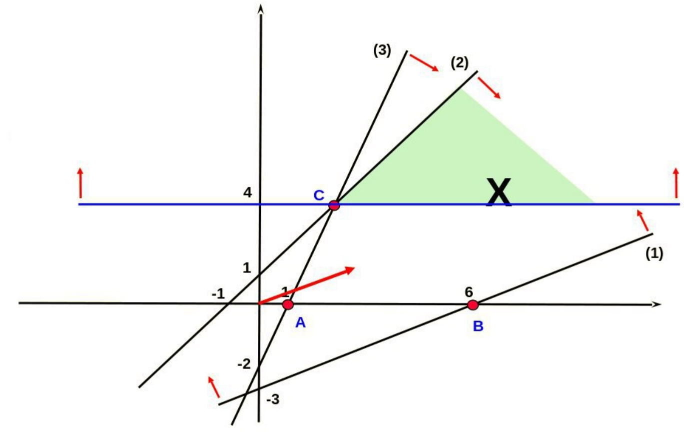


è inammissibile quando non esiste nessun punto nella regione ammissibile tale che sia soluzione. Per far questo prendiamo una retta la trasliamo e ne cambiamo il verso.

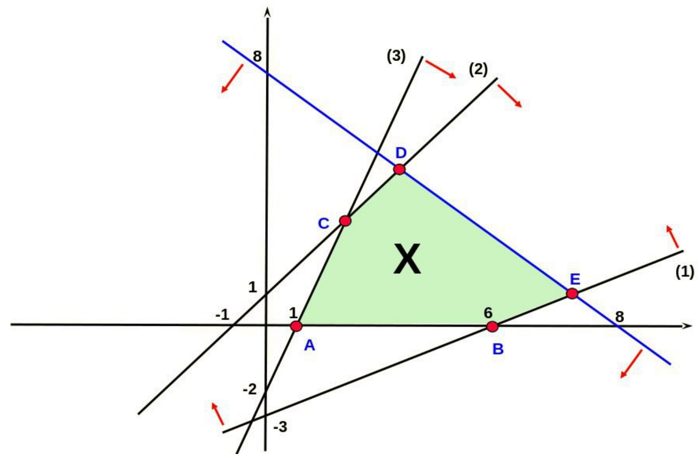


Oppure creiamo un vincolo opposto ad uno già esistente: $x_1 \leq 0$

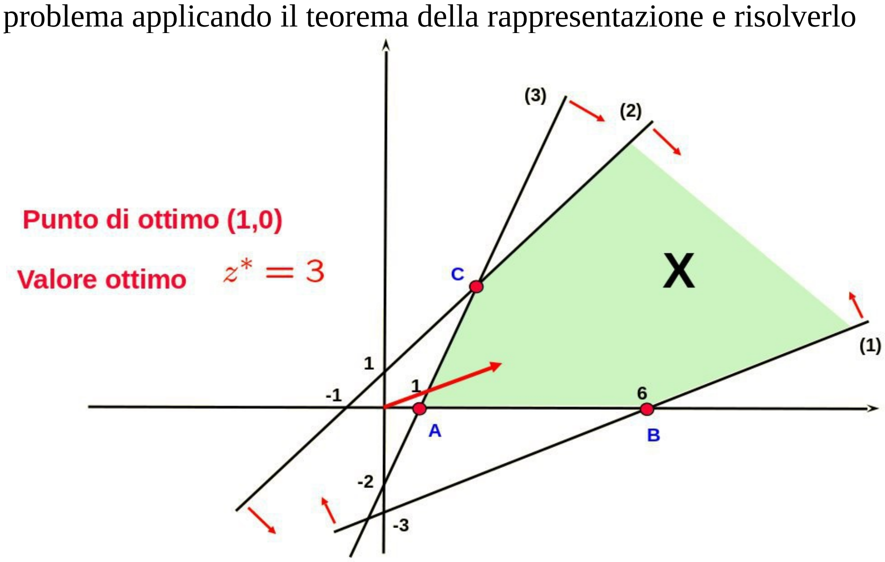
d) Aggiungere un vincolo affinché il punto C diventi punto di ottimo unico.
Il trucco è di scegliere un punto che sia parallelo all'asse delle x: $x_2 \geq 4$



e) Aggiungere un vincolo che renda la regione ammissibile un politopo.
Scegliamo $x_1 + x_2 \leq 8$



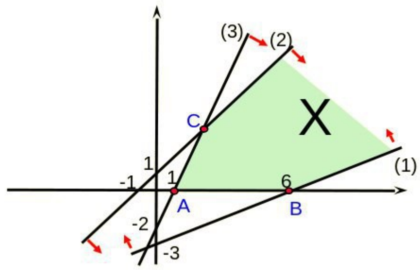
f) Riscrivere il problema applicando il teorema della rappresentazione e risolverlo



Per prima cosa calcoliamo punti estremi e le direzioni estreme:

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$



Calcoliamo punti estremi e le direzioni estreme

A= (1,0)

B= (6,0)

C = ?

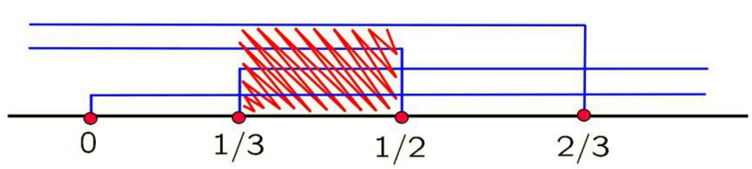
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = 2x_1 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_1 - 2 = 1 \\ x_2 = 2x_1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases} \quad \text{C= (3,4)}$$

Poi calcoliamoci i valori delle direzioni esterne

$$\begin{cases} \frac{1}{2}d_1 - d_2 \leq 0 \\ -d_1 + d_2 \leq 0 \\ 2d_1 - d_2 \geq 0 \\ d_1 = 1 - d_2 \\ d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}d_2 - d_2 \leq 0 \\ -1 + d_2 + d_2 \leq 0 \\ 2 - 2d_2 - d_2 \geq 0 \\ d_1 = 1 - d_2 \\ d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}d_2 \leq -\frac{1}{2} \\ d_2 \leq \frac{1}{2} \\ -3d_2 \geq -2 \\ d_1 = 1 - d_2 \\ d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2 \geq 1/3 \\ d_2 \leq 1/2 \\ d_2 \leq 2/3 \\ d_1 = 1 - d_2 \\ d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$d_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad d_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Applichiamo la formula per la risoluzione grafica:

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{k} (\underline{c}^T \underline{x}_i)\, \lambda_i \; + \sum_{j=1}^{t} (\underline{c}^T \underline{d}_j) \mu_j$$

$$\sum_{1=1}^{k} \lambda_i = 1, \qquad \lambda_i \geq 0 \quad \text{i} = 1,2,\dots,\text{k}$$

$$\mu_j \geq 0 \quad \text{j} = 1,2,\dots,\text{t}$$

$$\min \quad z = \lambda_1 (3\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 (3\ 1)\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 (3\ 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} +$$

$$+ \mu_1 (3\ 1)\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \mu_2 (3\ 1)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\min \quad z = 3\lambda_1 + 18\lambda_2 + 13\lambda_3 + \frac{7}{3}\mu_1 + 2\mu_2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$
$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$

$$\underline{c}^T \underline{d}^1 > 0 \quad \underline{c}^T \underline{d}^2 > 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

$$\min \quad z = 3\lambda_1 + 18\lambda_2 + 13\lambda_3 + \cancel{\frac{7}{3}\mu_1} + \cancel{2\mu_2}$$

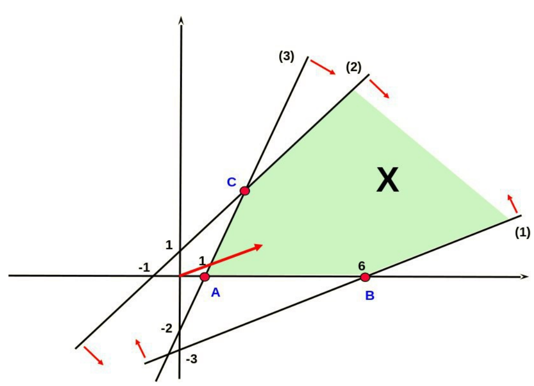
$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$
$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$

i valori di u sono messi a 0 perché entrambi sono positivi e si vuole minimizzare.

Otteniamo così che la nostra soluzione è:

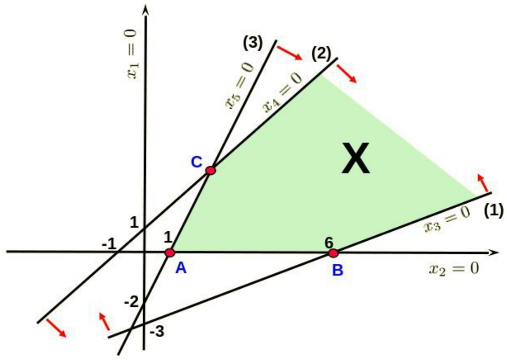
Punto di ottimo (1,0)



Adesso in base alla seguente traccia:

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{ll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 \quad \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 \quad \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 \qquad \geq 0 \end{array}$$



Forma Standard

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

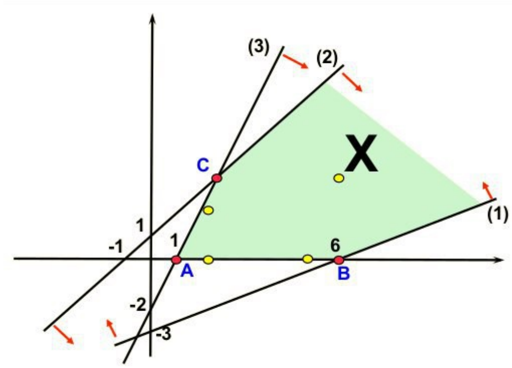
$$\begin{array}{ll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 \quad = 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 - x_5 \quad = 2 \\ (4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

a) Si determinino le basi associate ad ogni vertice della regione ammissibile:
Nell'esempio in figura:

- Il punto A=(1,0) è individuato dal vincolo 3, su cui x_5 vale zero e l'asse delle ascisse dove x_2 vale zero. Quindi la base associata al vertice A=(1,0) è B_A ={1,3,4}.
- Il punto B=(6,0) è individuato dal vincolo 1, su cui x_3 vale zero e l'asse delle ascisse dove x_2 vale zero. Quindi la base associata al vertice B=(6,0) è {1,4,5}.
- Il punto C=(3,4) è individuato dal vincolo 2, su cui x_4 vale zero ed il vincolo 3, su cui x_5 vale zero. Quindi la base associata al vertice C=(3,4) è {1,2,3}.

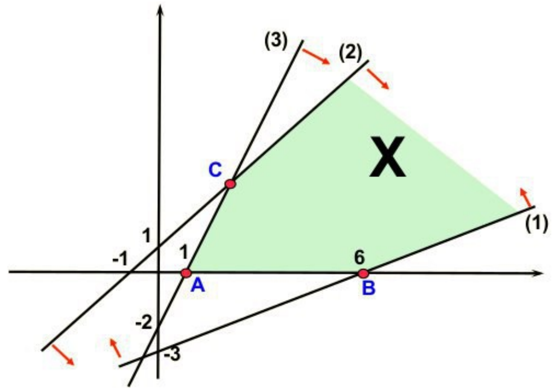
b) Si individui (geometricamente) una soluzione ammissibile non basica
RISP: Qualsiasi punto della regione ammissibile ad eccezione dei punti estremi A, B, C.

Esempio: (2,0), (5,0), (2,2), (6,3) …



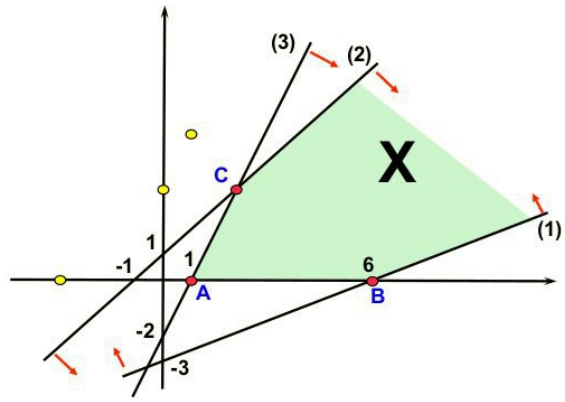
c) Si individui (geometricamente) una soluzione ammissibile basica
RISP: Uno qualsiasi dei punti estremi della regione ammissibile.

Nell'esempio in figura sono: A=(1,0), B=(6,0) e C=(3,4)



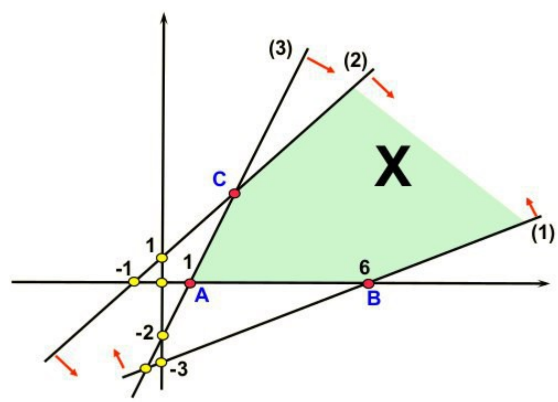
d) Si individui (geometricamente) una soluzione non ammissibile non basica
RISP: Un qualsiasi punto al di fuori della regione ammissibile diverso da quelli ottenuti dall'intersezione di due o più vincoli del problema.

Nell'esempio in figura: (0,3), (1,5), (-3,0), ...



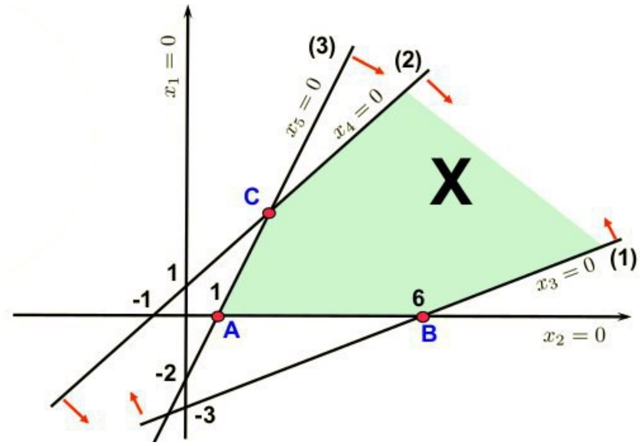
e) Si individui (geometricamente) una soluzione non ammissibile basica.
RISP: Un qualsiasi punto al di fuori della regione ammissibile ottenuto dall'intersezione di due o più vincoli del problema.

Nell'esempio in figura sono: (0,0), (-1,0), (0,1), (0,-2), (0,-3), (-2/3,-10/3)



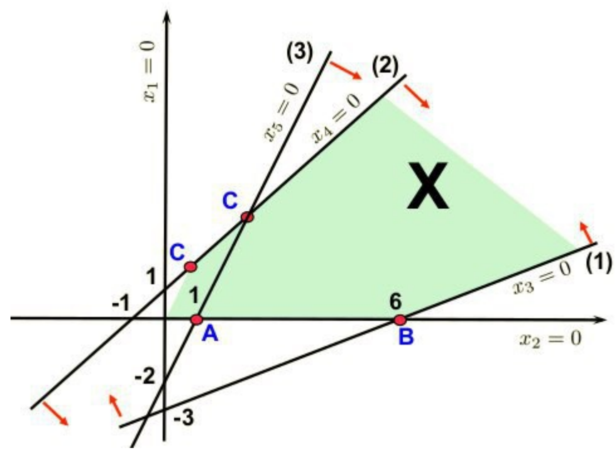
d) Individuare una soluzione di base ammissibile degenere, se esiste.
RISP: Un punto estremo su cui passano almeno n-m+1 vincoli. Questa condizione garantisce che almeno una variabile in base sia nulla.

Nell'esempio in figura non ci sono soluzioni di base degeneri.



e) Modificare il vincolo 3 al fine di generare una soluzione di base ammissibile degenere. Quali sono le basi associate al punto A?
$B_1 = \{3,4,5\}$, $B_2 = \{3,4,2\}$, $B_3 = \{3,4,1\}$

Verificare algebricamente che x_{B1} è una soluzione di base ammissibile degenere.



B_1={3,4,5}

$$A_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad x_{B_1} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = A_{B_1}^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio opzionale: dati $B_2 = \{2,3,4\}$, $B_3 = \{1,3,4\}$, verificare algebricamente che x_{B2} e x_{B3} sono soluzioni di base ammissibile degeneri.

I seguenti vettori sono soluzioni di base ammissibili per il problema dato?

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{ll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 - x_5 = 0 \\ (4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \underline{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{x}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per capire se una soluzione di base è ammissibile si devono rispettare i seguenti 4 punti:

1. Deve essere una base in m.
2. contare quanti 0 ci sono.
3. Controllare che il vettore sia base di R^m , per far questo prendiamo una base m dal vettore costruiamo la sua matrice in base ai nostri vincoli, ne calcoliamo il determinante che deve essere diverso da 0.
4. Deve rispettare tutti i vincoli del problema.

Algoritmo del simplesso (passi base)

Calcolo della soluzione ottima di un problema di PL

Consideriamo il problema (PL) in Forma Standard:

$$\min z = \underline{c}^T x$$
$$A\,\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

La prima cosa da fare è dato il problema consideriamo una base i partenza (che può essere data oppure calcolata con dei passaggi). Quindi data una base B ammissibile, partizioniamo sia la matrice A che il vettore delle incognite x come segue:

Il

$$A = [\, A_B \mid A_N \,]$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{m componenti} \\ \text{n – m componenti} \end{array}$$

sistema di equazioni lineari $A\underline{x}=\underline{b}$ si può riscrivere come:

$A_B \underline{x}_B + A_N \underline{x}_N = \underline{b} \rightarrow A_B \underline{x}_B = \underline{b} - A_N \underline{x}_N \rightarrow \underline{x}_B = A^{-1}_B \underline{b} - A^{-1}_B A_N \underline{x}_N$

Riscriviamo anche la funzione obiettivo come: $z = \underline{c}^T \underline{x} = [\underline{c}^T_B \quad \underline{c}^T_N] \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} = \underline{c}^T_B \underline{x}_B + \underline{c}^T_N \underline{x}_N$

sostituiamo ora nella funzione obiettivo l'espressione delle variabili di base ponendo: $\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N$ otteniamo così: $z = \underline{c}^T_B A_B^{-1} \underline{b} - \underline{c}^T_B A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}^T_N \underline{x}_N$ il valore della funzione obiettivo corrispondente alla base B è: $z = \underline{c}^T_B A^{-1}_B \underline{b}$.
Le relazioni $\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N$ e $z = \underline{c}^T_B A_B^{-1} \underline{b} - \underline{c}^T_B A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}^T_N \underline{x}_N$ esprimono rispettivamente i vincoli e la funzione obiettivo in funzione delle variabili fuori base.

$$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N$$

Queste sono m + 1 equazioni.

$$\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N$$

Indicando con:

$$\underline{\bar{b}} = A_B^{-1} \underline{b}$$

Otteniamo:

$$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N \Leftrightarrow z = \underline{c}_B^T \underline{\bar{b}} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N$$

$$\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N \Leftrightarrow \underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N$$

Inoltre essendo:

$$A_N \underline{x}_N = \sum_{j \in N} \underline{a}_j x_j$$

Abbiamo

$$z = \underline{c}_B^T \underline{\bar{b}} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N \Leftrightarrow z = \underline{c}_B^T \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j$$

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N \Leftrightarrow \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} A_B^{-1} \underline{a}_j x_j$$

dove $\underline{a}_j$ è la colonna di N che moltiplica la j-esima variabile fuori base.

Infine ponendo: $A_B^{-1} \underline{a}_j = \underline{y}_j$

Otteniamo: $\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} A_B^{-1} \underline{a}_j x_j \Leftrightarrow \underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j$

dove le $\underline{y}_j$ sono termini noti e x_j variabili.

La nostra funzione obiettivo diventa:

$$z = \underline{c}_B^T \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j \Leftrightarrow z = \underline{c}_B^T \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{c}_B^T \underline{y}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j$$

Le y_j sono usate per le condizioni di limitatezza.

Poniamo: $\underline{c}_B^T \underline{\bar{b}} = z_0$ e $\underline{c}_B^T \underline{y}_j = z_j$

la nostra F.O. diventa:

$$\min z = \underline{c}_B^T \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{c}_B^T \underline{y}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j \Leftrightarrow \min z = z_0 - \sum_{j \in N} z_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \min \quad z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j$$

I coefficienti $z_j - c_j$ vengono detti **coefficienti di costo ridotto**.
Z_0 valore che assume la mia funzione nel vertice (0,0).
I coefficienti del nostro problema finale saranno le N variabili fuori base.

Forma canonica funzione di una base B

Consideriamo il problema (PL) in Forma Standard:
$$\begin{aligned} \min z &= \underline{c}^T \underline{x} \\ A\,\underline{x} &= \underline{b} \\ \underline{x} &\geq \underline{0} \end{aligned}$$

Data una base B ammissibile, riscriviamo il problema in funzione di B come segue:

$$\begin{aligned} \min z &= z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j \\ \underline{x}_B &= \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j \\ \underline{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

con $z_0 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b}$ $\quad z_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j$ $\quad \underline{\bar{b}} = A_B^{-1} \underline{b}$ $\quad \underline{y}_j = A_B^{-1} \underline{a}_j$

Verifichiamo se la soluzione di Base corrente è ottima o può essere migliorata

Consideriamo l'obiettivo: $\min z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j$

Supponiamo che esista un coefficiente $k \in N$ tale che $z_k - c_k > 0$ e consideriamo come varia l'obiettivo facendo diventare positiva la variabile fuori base x_k, attualmente nulla.

$$z = z_0 - \overbrace{(z_k - c_k) x_k}^{>0} \qquad \underset{>0}{x_k}$$

L'obiettivo migliora !

> **Teorema (Condizione di ottimalità)**
> Una soluzione di base non degenere di un problema di PL è ottima se e solo se:
> 1. $b_i \geq 0$ (ammissibile)
> 2. $z_j - c_j \leq 0 \ \forall j \in N$ (non migliorabile) (Nota per il masimmo vale il $\geq$)

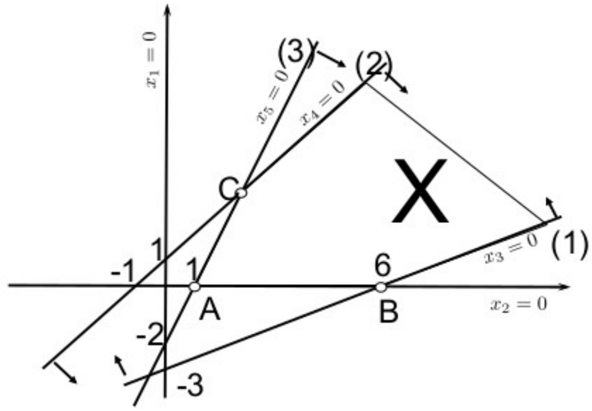
È possibile iterare il procedimento fino a che esiste qualche variabile fuori base che può migliorare l'obiettivo se portata in base.

Nel caso di soluzione degenere possono esistere soluzioni ottime in cui il punto (2) del teorema 5 non è soddisfatto. Tuttavia, se un problema ammette soluzione ottima finita allora ammette una soluzione di base ottima che soddisfa le condizioni (1) e (2) del teorema 5.

Esercizio

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$



Forma Standard

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 & = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 & = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 & = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0
\end{array}$$

Verificare analiticamente se la soluzione di base associata al punto A soddisfa il test di ottimalità.

(3, 0, 0)
sono i

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 & = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 & = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 & = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0
\end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_{B_A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_{B_A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$B_A=\{1,3,4\}$ $N_A=\{2,5\}$ $\quad \underline{c}_B^T = (3,0,0)$ $\quad z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j$

$$z_2 - c_2 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_2 - c_2 = \overbrace{(3,0,0) A_B^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}^{*}}^{z_j} - 1 = (0,0,\tfrac{3}{2}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}^{*} - 1 = -\tfrac{3}{2} - 1 = -\tfrac{5}{2}$$

$$z_5 - c_5 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_5 - c_5 = (3,0,0) A_B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^{*} - 0 = (0,0,\tfrac{3}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^{*} - 0 = -\tfrac{3}{2} - 0 = -\tfrac{3}{2}$$

coefficienti delle variabili in base: c^T_B
1 e 0 sono i costi delle variabili fuori base.

* valori delle variabili fuori base nel sistema.
Poiché incrementando il valore della variabile fuori base x_k il valore della funzione obiettivo migliora, si potrebbe pensare di aumentare indefinitamente x_k. Tuttavia, aumentando x_k anche le equazioni corrispondenti ai vincoli variano, modificando i valori delle variabili di base:

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j \geq \underline{0}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Dal momento che per j ∈ N le x_j sono uguali a zero per j ≠ k la relazione: $\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j, x_j$ diventa $\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \underline{y}_k x_k$.

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \underline{y}_k x_k$$

In forma vettoriale:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_r} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

Se $y_{ik} \leq 0$ ∀i ∈ B allora x_{Bi} cresce al crescere di x_k e così x_{Bi} continua a essere non negativo. (ottimo illimitato)
Se esiste una componente i tale che $y_{ik} > 0$ allora x_{Bi} decresce al crescere di x_k . Il valore di x_k verrà incrementato finché una delle variabili in base assumerà valore zero. Infatti noi vogliamo che:

$$\begin{aligned} x_{B_1} &= \bar{b}_1 - y_{1k} x_k \geq 0 \\ x_{B_2} &= \bar{b}_2 - y_{2k} x_k \geq 0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_{B_m} &= \bar{b}_m - y_{mk} x_k \geq 0 \end{aligned}$$

la variabile x_{Bi} che si azzererà per prima verrà tolta dalle variabili di base e sarà rimpiazzata dalla variabile x_k.

Possiamo scrivere:

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - \overset{\le 0}{y_{1k}} x_k \ge 0 \iff sempre$$

$$x_{B_2} = \bar{b}_2 - \overset{>0}{y_{2k}} x_k \ge 0 \iff x_k \le \frac{\bar{b}_2}{y_{2k}}$$

Dobbiamo considerare solo i rapporti in cui $y_{ik} > 0$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - \overset{>0}{y_{mk}} x_k \ge 0 \iff x_k \le \frac{\bar{b}_m}{y_{mk}}$$

Quindi considerando quei rapporti in cui $y_{jk} > 0$ la variabile x_k assumerà il seguente valore:

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{i \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Così:

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - y_{1k} x_k \ge 0 \Leftrightarrow \bar{b}_1 - y_{1k} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \ge 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{B_r} = \bar{b}_r - y_{rk} x_k \ge 0 \Leftrightarrow \bar{b}_r - y_{rk} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - y_{mk} x_k \ge 0 \Leftrightarrow \bar{b}_m - y_{mk} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \ge 0$$

Fare assumere ad x_k un valore positivo significa portare la variabile x_k in base. Nello stesso tempo il valore delle altre variabili di base per cui $y_{ik} > 0$ diminuisce. Il valore che x_k assume in base è quello corrispondente all'annullamento della prima variabile di base, cioè:

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{i \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

La variabile x_k entra in base, con tale valore, mentre la variabile x_{Br} esce dalla base. Il coefficiente y_{rk} è detto Pivot, (l'aggiornamento della base si dice Pivoting) e viene usato per aggiornare i valori delle variabili in base dopo l'ingresso in base di x_k.

$$\boxed{\begin{aligned} x_{B_i} &= \bar{b}_i - y_{ik}\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \\ x_k &= \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \end{aligned}}$$

La nuova soluzione di base

$$x_j = 0 \;\; \forall j \in N' \text{ con } N' = \{B_r\} \cup N - \{k\}, \;\; x_{B_r} = 0$$

Le nuove variabili fuori base

Con il cambio delle variabili in base, la nuova matrice di base risulta composta delle stesse colonne della vecchia base ad eccezione del fatto che la colonna associata a x_{Br} è stata sostituita dalla colonna associata a x_k.
La nuova soluzione di base ha migliorato il valore della funzione obiettivo:

$$z = z_0 - \overbrace{(\underset{>0}{z_k - c_k})\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}}^{>0} \leq z_0$$

Esercizio: Provare che il punto c del seguente esercizio non è punto di ottimo, quindi trovare quest'ultimo.

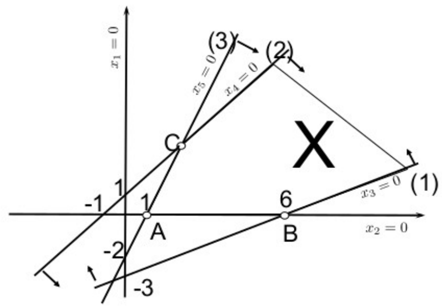
$\min z = 3x_1 + x_2$

(1) $\frac{1}{2}x_1 - x_2 \leq 3$

(2) $-x_1 + x_2 \leq 1$

(3) $2x_1 - x_2 \geq 2$

(4) $x_1, x_2 \geq 0$



Forma Standard

$\min z = 3x_1 + x_2$

(1) $\frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3$

(2) $-x_1 + x_2 + x_4 = 1$

(3) $2x_1 - x_2 - x_5 = 2$

(4) $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Verificare analiticamente se la soluzione di base associata al punto A soddisfa il test di ottimalità.

$B_C = (1,2,3)$ B_N = (4,5)

$$A_C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{c}_B^T = (3,1,0) \quad A_C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Test di ottimalità per x_4 e x_5:

$$z_4 - c_4 = [3 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = [0 \quad 5 \quad 4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 > 0$$ visto che è maggiore di 5 sappiamo che C non è punto di ottimo.

Facciamo il test di ottimalità per par condicio anche per x_5:

$$z_5 - c_5 = [3 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = [0 \quad 5 \quad 4] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -4 < 0$$

Ora scegliamo quale sarà la variabile ad entrare in base:

Per capire quale sarà la variabile in base prendiamo la massima fra $z_j - c_j > 0$, nel nostro caso x_4.

Test di illimitatezza:

$$\underline{y}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$ essendo tutte le $\underline{y}_{ik} > 0$ il problema ha soluzione.

Scelta della variabile uscente dalla base: Test dei minimi rapporti

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\text{Variabili in base}} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{Termini noti del problema}}$$

$x_4 = \min_{j \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{y_{j4}} : y_{j4} > 0 \right\} = \min \left\{ \underbrace{\frac{3}{1}}_{x_1}, \underbrace{\frac{1}{2}}_{x_2}, \underbrace{\frac{2}{\frac{3}{2}}}_{x_3} \right\} = 1$ visto che 1 è dato da x_2 quest'ultima uscirà dalla base.

Nota: Le variabili y_{i4} sono il risultato di $\underline{y}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Aggiornamento della base:

$B_{new} = (1,3,4)\, B_{Nnew}(2,5)$ si ripete tutto:

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} &(1) \quad \tfrac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ &(2) \quad -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ &(3) \quad 2x_1 - x_2 - x_5 = 2 \\ &(4) \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ A_{B_A} = & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ci

$$A_{B_A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$B_A = \{1,3,4\}$ $N_A = \{2,5\}$ $\qquad \underline{c}_B^T = (3,0,0) \qquad z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j$

$$z_2 - c_2 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_2 - c_2 = (3,0,0) A_B^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = (0,0,\tfrac{3}{2}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = -\tfrac{3}{2} - 1 = -\tfrac{5}{2}$$

$$z_5 - c_5 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_5 - c_5 = (3,0,0) A_B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = (0,0,\tfrac{3}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -\tfrac{3}{2} - 0 = -\tfrac{3}{2}$$

fermiamo perché notiamo che il punto A è punto di ottimo.

Scelta della variabile entrante
Quando le condizioni di ottimalità non sono verificate è sempre possibile scegliere una variabile fuori base x_k da portare in base per migliorare l'obiettivo. Quando esistono più alternative la scelta non preclude il raggiungimento della soluzione ottima, ma può al peggio aumentare il tempo necessario per la sua ricerca.

Scelta della variabile entrante: Il metodo del gradiente
Sceglie la variabile fuori base x_k che localmente fa aumentare più rapidamente l'obiettivo:

$$z_k - c_k = \max_{j \in N} \{ z_j - c_j \}$$

Scelta della variabile uscente
Determinata la variabile fuori base x_k da portare in base, si deve scegliere la variabile uscente. Esistono due situazioni alternative:

a) $y_{ik} \leq 0 \ \forall i=1,...m$: La soluzione del problema è illimitata (non esiste un punto di ottimo). In questo caso facendo aumentare x_k il valore di nessuna variabile di base diminuisce: $z = z_0 - (z_k - c_k) x_k \leq z_0$. Per qualsiasi valore di x_k.
b) $y_{rk} > 0$ per almeno un r. La soluzione di base non è ottima, bisogna quindi passare alla base successiva.

Nota:
Se una variabile di base x_{Bi} è nulla (soluzione degenere) e $y_{ik} > 0$, allora x_k entra in base con valore nullo. In questo caso la soluzione non cambia, ed in particolare rimane degenere. Per questa ragione la ricerca della soluzione potrebbe rimanere bloccata generando sempre la medesima soluzione (cycling). Il cycling è piuttosto raro e comunque esistono strategie per evitalo.

Algoritmo del simplesso

INPUT:

Problema di PL (in forma standard) e una soluzione di base ammissibile.

1.Test di ottimalità:

Se $z_j - c_j \leq 0 \ \forall j \in N$ allora la soluzione corrente è ottima e l'algoritmo termina.

Altrimenti andare al passo 2.

2.Scelta della variabile entrante in base:

Scegliere una variabile fuori base x_k tale che $z_k - c_k > 0$ ed andare al passo 3.

3.Test di illimitatezza:

Se $y_{ik} \leq 0 \ \forall i=1,...m$, allora la soluzione del problema è illimitata (non esiste ottimo finito), e l'algoritmo termina. Altrimenti vai al Passo 4.

4.Scelta della variabile uscente dalla base: Test dei minimi rapporti

Scegliere la variabile x_r tale che: $\dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{j \in B} \left\{ \dfrac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0 \right\}$

x_r è la variabile uscente e la variabile entrante x_k assume valore pari a $\dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$

5.Aggiornamento della base:

Aggiornare gli indici delle variabili in base (B) e quelli delle variabili fuori base (N).
Tornare al passo 1.

1° Metodo per calcolare una base ammissibile
Controlliamo che con le equazioni del nostro sistema possiamo costruire una sotto-matrice di A che sia la matrice identità in R^m, siamo sicuri che sia giusta perché la matrice inversa dell'identità è l'identità stessa, e quindi moltiplicata per il vettore dei termini noti $\underline{b}$ otteniamo un vettore con termini ≥ 0.

Esempio di esecuzione del metodo del simplesso
Dato il seguente problema trovare il suo punto di ottimo con il simplesso:

$$\begin{aligned} &\min z = -x_1 - 2x_2 \\ &-2x_1 + x_2 \le 1 \\ &x_1 - x_2 \ge -2 \\ &x_1 + x_2 \le 5 \\ &\underline{x} \ge 0 \end{aligned}$$

la sua forma standard è:

$$\begin{aligned} &\min z = -x_1 - 2x_2 \\ &-2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ &-x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ &x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ &\underline{x} \ge 0 \quad x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

La matrice del sistema è:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per trovare una base possiamo applicare il primo metodo, infatti notiamo che x_3,x_4,x_5 formano una sotto-matrice di A che è quella identità.
B = {3,4,5}   N = {1,2}

1 test di ottimalità

$$z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j \qquad \forall j \in N$$

$$(z_1 - c_1) = [0\,0\,0]\,\mathrm{I} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = 0 + 1 = 1$$

$$(z_2 - c_2) = [0\,0\,0]\,\mathrm{I} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-2) = 0 + 2 = 2$$

2 scelta della variabile entrante in base
Per capire quale variabile esce dalla base applichiamo il metodo del gradiente che ci dice di prendere il massimo tra $max\ \{z_1-c_1, z_2-c_2\}$, otteniamo così che x_2 è la variabile che entra in base.

3 test d'illimitatezza

$$\underline{y}_2 = A_B^{-1}\underline{a}_2 = I\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{b}_1\\\bar{b}_2\\\bar{b}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}$$

a_2 è il sotto-vettore con i valori dei coefficienti della variabile x_2 nella matrice A.

visto che tutte le y > 0 il vettore ha soluzione.

$$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = A_B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix} \Longrightarrow x_3 = 1,\ x_4 = 2, x_5 = 5$$

4 scelta della variabile uscente dalla base

$$x_2 = \frac{\bar{b}_1}{y_{12}} = \min_{j\in B}\left\{\frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0\right\} \Rightarrow x_2 = 1 = \min\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{1}\right\}$$

x_3 esce dalla base; x_2 entra in base con valore 1.

5 aggiornamento della base
Nuova base: B = { 2,4,5 } N = { 1,3 }

Da ora ripetiamo il procedimento dal punto 1 finché non troviamo il punto di ottimo.
B = { 2,4,5 } N = { 1,3 }

Calcoliamo A_B^{-1}

$$A_B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j \qquad \forall j \in N$$

$$(z_1 - c_1) = [-2\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = [-2\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = 5$$

$z_j - c_j > 0$ per j=1 x_1 entra in base

$$(z_3 - c_3) = [-2\,0\,0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = [-2\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -2$$

$$\underline{x}_B = A_B^{-1}\underline{b} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = A_B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_1 = A_B^{-1}\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\bar{b}_2}{y_{21}} = \min_{j \in B}\left\{\frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0\right\} \Rightarrow x_1 = 1 = \min\left\{\frac{1}{1}, \frac{4}{3}\right\}$$

x_4 esce dalla base; x_1 entra in base con valore 1

Nuova base: $\quad B = \{2,1,5\} \quad N = \{4,3\}$

Da ora ripetiamo il procedimento dal punto 1 finché non troviamo il punto di ottimo.
B = { 2,1,5 } N = { 4,3 }

$$A_B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_1 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calcoliamo A_B^{-1}

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j \qquad \forall j \in N$$

$$(z_3 - c_3) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 3$$

$z_j - c_j > 0$ per j=3 x_3 entra in base

$$(z_4 - c_4) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -5$$

Quale variabile esce dalla base?

$$\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = A_B^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = A_B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da ora ripetiamo il

$$x_3 = \frac{\bar{b}_3}{y_{33}} = \min_{j \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0 \right\} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} = \min \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

x_5 esce dalla base; x_3 entra in base con valore 1/2

Nuova base: $B = \{2,1,3\} \quad N = \{4,5\}$

procedimento dal punto 1 finché non troviamo il punto di ottimo.

B = { 2,1,3 } N = { 4,5 }

$$A_B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_1 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calcoliamo A_B^{-1}

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j \qquad \forall j \in N$$

$$(z_4 - c_4) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{1}{2}$$

$$(z_5 - c_5) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{3}{2}$$

Siccome il valore di $z_j - c_j$ è < 0 per tutte le variabili fuori base abbiamo trovato il punto di ottimo.

Calcoliamo ora il valore di z_0: $z_0 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b}$

$$z_0 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = -\frac{17}{2}$$

Nota 1: Per calcolare la matrice inversa usare metodo dei cofattori.

Nota 2: Se nel compito si superano le 2-3 iterazioni del simplesso vuol dire che ci è stato un errore.

Esercizio 2: eseguire l'esercizio precedente graficamente

$$\min z = -x_1 - 2x_2$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 - x_2 \geq -2$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$\underline{x} \geq 0$$

$-2x_1+x_2=1$

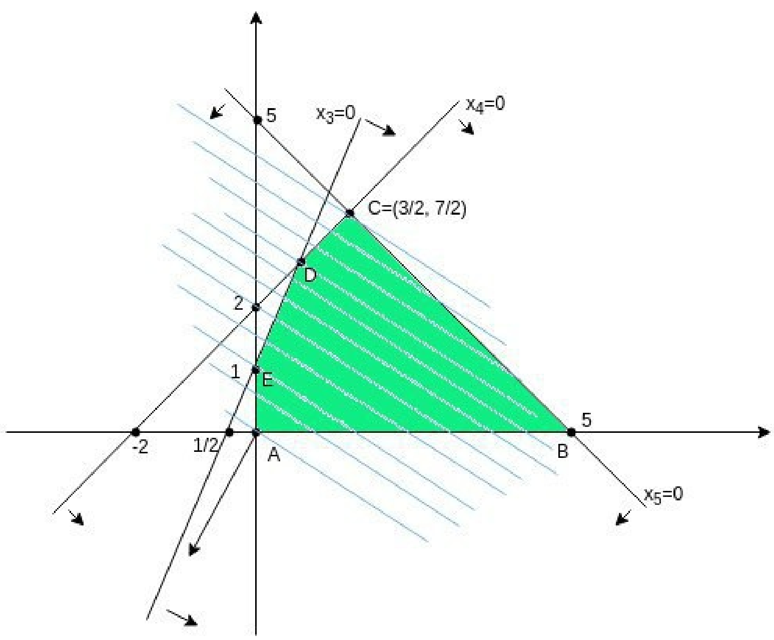
x_1	x_2
0	1
½	0

$x_1+x_2=5$

x_1	x_2
0	5
5	0

$x_1-x_2=-2$

x_1	x_2
0	2
-2	0



Valori variabili di base nei punti

$B_A=(3,4,5)$ $N_A=(1,2)$
$B_B=(1,3,4)$ $N_A=(3,5)$
$B_C=(1,2,3)$ $N_A=(4,5)$
$B_D=(1,2,5)$ $N_A=(3,4)$
$B_E=(2,3,5)$ $N_A=(1,4)$

Il valore ottimo è dato dal punto C. Confrontando il risultato grafico con quello del simplesso otteniamo che si trovano.

Complessità del simplesso

Nel caso medio è O(m) ma nel caso peggiore è O(3m) che è esponenziale però sono pochissimi gli input per il quale il simplesso abbia effettivamente la complessità di O(3m) infatti per anni si è cercato un input che si fosse comportato nel caso peggiore e fino al 1972 nessuno lo aveva trovato quando poi due studiosi hanno trovato un istanza che ha tempo esponenziale e non era altro che il cubo, infatti il simplesso si comporta nel caso peggiore solo nel caso in cui il numero dei vertici è esponenziale rispetto al numero di variabili.

Metodo delle due fasi

Dato il seguente problema di PL in forma standard:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \underline{c}^T \underline{x} \\ & A\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \\ & \underline{x} \in R^n \end{aligned}$$

con A(m,n) e $\underline{b} \geq 0$. Supponiamo di volerlo risolvere utilizzando l'algoritmo del simplesso. Ci occorre trovare una base iniziale da cui partire.

Come troviamo una base?

Se tra le colonne di A non è presente la matrice Identità non è facile individuare m colonne di A linearmente indipendenti. Si modifica allora artificialmente il sistema dei vincoli:

$$\begin{aligned} & \min \underline{c}^T\underline{x} \\ & A\underline{x} = \underline{b} \rightarrow A\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b} \\ & x \geq 0 \quad \rightarrow x \geq 0 \text{ , } y \geq 0 \end{aligned}$$

con l'aggiunta di una variabile artificiale y i ad ogni vincolo del sistema. Nel nuovo sistema è presente una matrice identità (associata alle variabili y). Questo però altera la soluzione del sistema originale. Infatti una soluzione di ($\underline{x}$',$\underline{y}$') del nuovo sistema sarà soluzione anche del sistema di partenza se e solo se $\underline{y}$'=0. Per ottenere una tale soluzione (se esiste) risolviamo il seguente problema di PL.

$$\begin{aligned} & \min g = \sum_{i=1} y_i \\ & A\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq 0, \underline{y} \geq 0 \end{aligned}$$

Nota: se nella matrice A c'è già una colonna della matrice I si può non aggiungere una y per quel vincolo.

Risoluzione

Per risolvere tale problema possiamo utilizzare il simplesso utilizzando come base iniziale le colonne della matrice (A,I) associate alle variabili artificiali y. Quindi nella prima fase si risolve il problema:

$$\begin{aligned} & \min g = \sum_{i=1} y_i \\ & A\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq 0, \underline{y} \geq 0 \end{aligned}$$

Inizialmente tutte le variabili y sono in base mentre tutte le variabili x sono fuori base. Dobbiamo portare le y fuori base e le x in base, e controllare che la base sia ottimale.

Alla fine della prima fase possono verificarsi due casi, l'ottimo della F.O:

1. g* = 0 ⇒ A$\underline{x}$ = $\underline{b}$ ammette soluzione (a meno di soluzioni degeneri). Si passa alla seconda fase: si risolve il problema iniziale utilizzando la base ottima della prima fase come base iniziale della seconda fase.
2. g* >0 ⇒ A$\underline{x}$=$\underline{b}$ non ammette soluzione. Il problema originale è inammissibile. Non si passa alla seconda fase.
   Dim: per assurdo sappiamo che $\exists x' \in X \rightarrow A\underline{x}' = \underline{b} \quad x' \geq 0$, costruiamo una nuova soluzione $(\underline{x}', \underbrace{0 \ldots 0}_{y})$ è soluzione per il nostro problema e vale 0, ma questa soluzione è un valore per il nostro problema migliore dell'ottimo ed è un assurdo.

Esempio metodo delle due fasi

$$\begin{aligned} &\min z = -x_1 - 2x_2 \\ &x_1 + x_2 \geq 1 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ &\underline{x} \geq 0 \end{aligned} \quad \text{forma standard} \quad \begin{aligned} &\min z = -x_1 - 2x_2 \\ &x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ &x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ &\underline{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Applichiamo il metodo delle due fasi creando la matrice identità, poniamo y = x_5^a

$$\begin{aligned} &\min g = x_5^a \\ &x_1 + x_2 - x_3 + x_5^a = 1 \\ &x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ &\underline{x} \geq 0 \end{aligned} \quad B = (5, 4) \quad N = (1, 2, 3) \quad A_B = I = A_B^{-1}$$

Test di ottimalità: $z_j - c_j \leq 0 \ \forall \ j \in N$

$$z_1 - c_1 = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 1 > 0 \qquad z_2 - c_2 = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 0 = 1 > 0$$

$$z_3 - c_3 = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1 < 0$$

Per la regola del gradiente x_2 entra in base.

Test di illimitatezza

$$y_2 = A_B^{-1} * a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ il test di illimitatezza non è fallito

calcoliamo quindi $x_B = A_B^{-1} * a_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_5 \\ 4 & x_4 \end{bmatrix}$

variabile che esce dalla base: $\min\{\frac{1}{1}, \frac{4}{2}\} = 1 = x_5^a$ esce dalla base x_5^a

La nuova base è B = {2, 4} N = {1, 3, 5}.

controlliamo se è una soluzione ottima: B = {2, 4} N = {1, 3, 5}

calcolo matrice inversa col metodo di calcolo scientifico (prendi la matrice A e risolvi il sistema lineare con come termini noti le colonne della matrice identità:

$$colonna1 = \begin{Bmatrix} x_1 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{Bmatrix} \quad colonna2 = \begin{Bmatrix} x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{Bmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 - c_1 = [0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 0 \qquad z_3 - c_3 = [0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$z_3 - c_3 = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1 < 0$$ abbiamo ottenuto che la base è ottima.

Come fa il simplesso ad accorgerci che c'è infiniti punti di ottimo?
Il simplesso si accorge di infiniti punti di ottimo nel momento in cui almeno un $z_j - c_j = 0$.

2° Fase
B = {2, 4}   N = {1, 3} calcoliamo se la base è ottima sui vincoli originali:

$$\min z = -x_1 - 2x_2$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$
$$\underline{x} \geq 0$$

$$z_1 - c_1 = [-2 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = [-2 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = 1 < 0$$
$$z_3 - c_3 = [-2 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = [-2 \quad 0]\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 2 > 0$$ x_3 entra in base

Test di illimitatezza

$$y_3 = A_B^{-1} * a_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad x_B = A_B^{-1} * a_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ 2 & x_4 \end{bmatrix}$$

$\min\{\frac{4}{2}\} = 2 = x_4$ che esce dalla base.

La nuova base sarà B = {2, 3}   N = {1, 4}

$$(z_1 - c_1) = [-2 \;\; 0]\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = -1 + 1 = 0$$

$$(z_4 - c_4) = [-2 \;\; 0]\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Metodo Del Big M
Si modifica artificialmente il sistema dei vincoli:
min $\underline{c}^T\underline{x}$ min $\underline{c}^T\underline{x} + M\,\underline{1}^T\,\underline{y}$
$A\underline{x} = \underline{b}$ → $A\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b}$ //sistema di vincoli e identità
$\underline{x} \geq 0$ → $\underline{x} \geq 0$, $\underline{y} \geq 0$
Calcoliamo la funzione obbiettivo: min $z = \underline{c}^T\underline{x} + M\sum y$ //M= coefficiente molto grande
con l'aggiunta di una variabile artificiale y_i ad ogni vincolo del sistema. Nel nuovo sistema è presente una matrice identità (associata alle variabili $\underline{y}$). Alla funzione obiettivo originale vengono sommate (nel caso di un problema di minimo) le variabili artificiali moltiplicate per un coefficiente M molto grande. Se siamo nel caso in cui il problema è un problema di massimo si usa un M comunque molto grande preso in maniera negativa in sintesi:

- caso problema di massimo → -M
- caso problema di minimo → M

con M sempre molto grande.

Parte 1 end

Cosa abbiamo imparato:

Per risolvere qualcosa darla in pasto al simplesso.
Simplesso significa semplice e complesso, all'occorrenza anche semplice e convesso.
I'm simplex and I know it.
Ma la cosa piu' importante e' che per risolvere il simplesso si deve applicare sempre un altro simplesso.

Dualità
Con il metodo del simplesso riusciamo a calcolare la soluzione ottima di un problema di programmazione lineare. Ma oltre a questo il simplesso calcola quali sono le risorse scarse (usate completamente) e quali sono le risorse in abbondanza (risorse avanzate), possiamo definire queste risorse nella nostra matrice a come le variabili di surplus e slack che abbiamo aggiunto.
La dualità ci serve per trovare un lowerbound della nostra soluzione quando è un problema di minimo, e un upperbound quando è un problema di amssimo. Questi due soluzioni che troviamo dalla dualità sono un limite inferiore/superiore della soluzione ottima.
Ad ogni problema di PL (Primale) è associato un problema Duale:

(n variabili, m vincoli)

Problema Primale (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ s.t. \quad & \\ & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(m variabili, n vincoli)

Problema Duale (D)

$$\begin{aligned} \max \quad & b_1w_1 + \cdots + b_mw_m \\ s.t. \quad & \\ & a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \leq c_1 \\ & \vdots \\ & a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \leq c_n \\ & \underline{w} \geq 0 \end{aligned}$$

Il problema D ha tante variabili quanti sono i vincoli di P e tanti vincoli quante sono le variabili di P.
Per far questo si sceglie un vettore $\underline{w} \geq \underline{0}$ che moltiplicato per il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ci fa ottenere:
$\underline{w}^T A\underline{x} \geq \underline{w}^T\underline{b}$ con $\underline{w} \geq \underline{0}$, come ulteriore condizione poniamo $\underline{w}^T A \leq \underline{c}^T\underline{x}$, e possiamo scrivere:
$\underline{c}^T\underline{x} \geq \underline{w}^T A\underline{x} \geq \underline{w}^T\underline{b}$, se eliminiamo $\underline{w}^T A\underline{x}$ abbiamo scoperto che il valore della mia funzione obbiettivo nella regione è sempre maggiore di $\underline{w}^T A\underline{x}$ quindi $\underline{w}^T\underline{b}$ è il lowerbound che cercavamo.

Come costruire il duale di un problema di programmazione lineare
Si parte costruendo una tabella dove sono inseriti i coefficienti tecnologici della matrice A:

	a_{11}	a_{12}	a_{13}	
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	

Inseriamo poi le variabili del problema principale ($\underline{x}$), i termini noti ($\underline{b}$) e i coefficienti di costo ($\underline{c}^T$):

	x_1	x_2	x_3	
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
	c_1	c_2	c_3	

Alla fine assegniamo ad ogni vincolo una variabile duale:

	x_1	x_2	x_3	
w_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
w_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
w_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
	c_1	c_2	c_3	

Creiamo ora il sistema associato ricordandoci le seguenti regole la funzione di min diventa max e viceversa. Es:

$$\begin{array}{l} \min\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1 \\ \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2 \\ \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3 \\ \quad \underline{x} \geq \underline{0} \end{array}$$

il suo duale è:

$$\begin{array}{l} \max\ b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3 \\ \quad a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + a_{13}w_3 \leq c_1 \\ \quad a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + a_{23}w_3 \leq c_2 \\ \quad a_{31}w_1 + a_{32}w_2 + a_{33}w_3 \leq b_3 \\ \quad w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3 \geq 0 \end{array}$$

I segni del sistema duale si assegnano nel seguente modo:

- Se il problema è in forma canonica i segni dei vincoli del duale sono l'opposto di quelli del sistema in forma canonica, per le variabili si assegnano gli stessi vincoli.
- Altrimenti se il primale è di minimo, se le variabili hanno valore ≤ il vincolo collegato a quella variabile sarà di ≤, se i vincoli sono di ≤ allora le variabili del duale saranno ≤.
- Altrimenti se il primale è di massimo, se le variabili hanno valore ≥ il vincolo collegato a quella variabile sarà di ≥, se i vincoli sono di ≥ allora le variabili del duale saranno ≥.
- Se il vincolo del primale è di uguaglianza allora la variabile nel duale sarà non vincolata, se nel duale un vincolo è di uguaglianza vuol dire che nel primale c'è una variabile non vincolata.

Più nel dettaglio abbiamo che:

$$\begin{array}{llll} (P) & \min & \underline{c}^T \underline{x} \qquad & (D) \quad \max \quad \underline{b}^T \underline{w} \\ & & A\underline{x} \geq \underline{b} & \qquad\quad A^T \underline{w} \leq \underline{c} \\ & & \underline{x} \geq \underline{0} & \qquad\quad \underline{w} \geq \underline{0} \\ & & \underline{x} \in \mathbf{R}^n & \qquad\quad \underline{w} \in \mathbf{R}^m \end{array}$$

Duale di un primale con vincoli di uguaglianza

$$\begin{array}{lll} (P) & \min & \underline{c}^T \underline{x} \\ & & A\underline{x} = \underline{b} \\ & & \underline{x} \geq \underline{0} \\ & & \underline{x} \in R^n \end{array}$$

Trasformiamo i vincoli di uguaglianza in vincoli di maggiore o uguale come segue:

$$\underline{x} = \underline{b} \quad \text{equivale a} \quad \begin{cases} A\underline{x} \geq \underline{b} \\ A\underline{x} \leq \underline{b} \rightarrow -A\underline{x} \geq -\underline{b} \end{cases}$$

dim:

$$(P) \qquad \min \quad \underline{c}^T \underline{x}$$
$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$
$$-A\underline{x} \geq -\underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$\underline{x} \in R^n$$

	$\underline{x}$	
$\underline{u}$	A	$\underline{b}$
$\underline{v}$	$-A$	$-\underline{b}$
	$\underline{c}$	

$$\max \ (\underline{b}^T \underline{u} - \underline{b}^T \underline{v})$$
$$A^T \underline{u} - A^T \underline{v} \leq \underline{c}$$
$$\underline{u} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0}$$
$$\underline{u}, \underline{v} \in R^m$$

quindi si introducono 2m variabili duali, $\underline{u}$ e $\underline{v}$

$$\max \ (\underline{b}^T \underline{u} - \underline{b}^T \underline{v})$$
$$A^T \underline{u} - A^T \underline{v} \leq \underline{c}$$
$$\underline{u} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0}$$
$$\underline{u}, \underline{v} \in R^m$$

e sostituendo $\underline{w} = \underline{u} - \underline{v}$ si ottiene (D)

$$(P) \qquad \min \quad \underline{c}^T \underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$\underline{x} \in R^n$$

$$(D) \qquad \max \ \underline{b}^T \underline{w}$$
$$A^T \underline{w} \leq \underline{c}$$
$$\underline{w} \ n.v.$$
$$\underline{w} \in R^m$$

Dualità: regole di trasformazione generali (non consigliate dal professore)

min	max
c	b
b	c
$A_i \underline{x} \geq b_i$	$w_i \geq 0$
$A_i \underline{x} \leq b_i$	$w_i \leq 0$
$A_i \underline{x} = b_i$	w_i non vincolata
$x_i \geq 0$	$\underline{w} A_i \leq c_i$
$x_i \leq 0$	$\underline{w} A_i \geq c_i$
x_i non vincolata	$\underline{w} A_i = c_i$

La teoria della Dualità è importante perchè:

- le soluzioni di (P) e (D) sono legate tra loro;
- la soluzione ottima del duale è un bound sulla soluzione ottima del primale.
- le soluzioni duali hanno un’interpretazione economica utile per l’analisi di sensitività (post-ottimalità);
- sulla teoria della dualità sono basati algoritmi, quali il Simplesso Duale e l’Algoritmo Primale-Duale, alternativi al Simplesso (Primale) utili per certe classi di problemi;
- può in certi casi essere conveniente risolvere D al posto di P (conviene risolvere il problema con il minor numero di vincoli).

Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Siano dati i problemi

$$(P) \quad \min \ \underline{c}^T \underline{x} \qquad A\underline{x} \geq \underline{b} \qquad \underline{x} \geq \underline{0}$$

$$(D) \quad \max \ \underline{b}^T \underline{w} \qquad A^T \underline{w} \leq \underline{c} \qquad \underline{w} \geq \underline{0}$$

1. Teorema (debole) della dualità
Siano $\underline{x}$ e $\underline{w}$ soluzioni ammissibili rispettivamente per (P) e (D), allora $\underline{c}^T\underline{x} \geq \underline{b}^T\underline{w}$.
L'espressione $\underline{c}^T\underline{x} \geq \underline{b}^T\underline{w}$ si può leggere in due modi:

- se il primale è di minimo: la funzione obbiettivo di minimo del primale è ≥ della funzione obbiettivo di massimo del duale;
- se il primale è di massimo: la funzione obbiettivo di massimo del primale è ≤ della funzione obbiettivo di minimo del duale;

Dimostriamolo per assurdo.

Dimostrazione:

$\hat{\underline{x}}$ soluzione $\Rightarrow A\hat{\underline{x}} \geq \underline{b}$

Poichè $\hat{\underline{w}} \geq \underline{0} \Rightarrow \underbrace{\hat{\underline{w}}^T (A\hat{\underline{x}})}_{} \geq \hat{\underline{w}}^T \underline{b} \Rightarrow \underbrace{(A\hat{\underline{x}})^T \hat{\underline{w}}}_{} \geq \underline{b}^T \hat{\underline{w}} \Rightarrow \hat{\underline{x}}^T A^T \hat{\underline{w}} \geq \underline{b}^T \hat{\underline{w}}$

Poichè $\underline{x}\,\underline{y} = \underline{y}^T \underline{x}^T$

Poichè $(\underline{x}\,\underline{y})^T = \underline{y}^T \underline{x}^T$

$\hat{\underline{w}}$ soluzione $\Rightarrow A^T \hat{\underline{w}} \leq \underline{c}$

Poichè $\hat{\underline{x}} \geq \underline{0} \Rightarrow \hat{\underline{x}}^T A^T \hat{\underline{w}} \leq \hat{\underline{x}}^T \underline{c}$

$$\text{Quindi:} \quad \hat{\underline{x}}^T \underline{c} = \underline{c}^T \hat{\underline{x}} \geq \hat{\underline{x}}^T A^T \hat{\underline{w}} \geq \underline{b}^T \hat{\underline{w}} \quad \blacksquare$$

Corollario 1

Se $\underline{x}$ è una soluzione ammissibile per (P) e $\underline{w}$ una soluzione ammissibile per (D) tali che $\underline{c}^T\underline{x} = \underline{b}^T\underline{w}$ allora $\underline{x}$ e $\underline{w}$ sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi.

Dimostrazione per assurdo
Supponiamo per assurdo che x non sia ottimo per (P). Quindi esiste un'altra soluzione ammissibile $\underline{x}^*$ di (P) tale che $\underline{c}^T\underline{x}^* < \underline{c}^T\underline{x}$. Ma poiché per ipotesi $\underline{c}^T\underline{x} = \underline{b}^T\underline{w}$ si ha che $\underline{c}^T\underline{x}^* < \underline{b}^T\underline{w}$. Assurdo perché va contro la tesi del teorema debole della dualità.

Corollario 2
Se il problema primale (P) è illimitato inferiormente allora il duale (D) è inammissibile. Viceversa se il duale (D) è illimitato superiormente il primale (P) è inammissibile.

Dimostrazione per assurdo
Supponiamo che il valore ottimo del primale (P) sia -∞ e che il problema duale ammetta una soluzione $\underline{w}$. Dal teorema della dualità debole si ha che $\underline{c}^T\underline{x} \geq \underline{b}^T\underline{w}$ per una qualsiasi soluzione ammissibile $\underline{x}$ di (P). Questo implica che $\underline{b}^T\underline{w} \leq -\infty$, ed è un assurdo.

Il corollario 2 stabilisce che l'illimitatezza di un problema implica l'inammissibilità del suo duale. Tuttavia questa non è una proprietà simmetrica ossia se un problema è inammissibile non è detto che il suo duale sia illimitato.

Esercizi
1) Primale in forma standard
min $3x_1 + 4x_2$

$$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + x_2 \geq 2$$
$$\frac{1}{5}x_1 \geq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	
W_1	2	1/2	3
W_2	4	1	2
W_3	1/5	0	7
	3	4	

Forma duale
max $3w_1+2w_2+7w_3$

$$2w_1+4w_2+1/5\, w_3 \leq 3$$
$$½\, w_1+1w_2+ 0w_3 \leq 4$$
$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

2) Primale non in forma standard
min $5x_1 + 3x_2$

$$x_1 + 4x_2 - 8x_3 \geq 2$$
$$7x_2 + 12x_3 \leq 4$$
$$9x_1 - 8x_2 + x_3 = 7$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	
w_1	1	4	-8	2
w_2	0	7	12	4
w_3	9	-8	1	7
	5	3	0	

Il suo duale è:

max $2w_1 + 4w_2 + 7w_3$

$$\begin{aligned} w_1 + 9w_3 &\le 5 \\ 4w_1 + 7w_2 - 8w_3 &\le 3 \\ -8w_1 + 12w_2 + w_3 &\le 0 \\ w_1 \ge 0,\ w_2 \le 0,\ w_3 &\text{ n. v.} \end{aligned}$$

3) Il corollario 2 stabilisce che l'illimitatezza di un problema implica l'inammissibilità del suo duale. Tuttavia questa non è una proprietà simmetrica ossia se un problema è inammissibile non è detto che il suo duale sia illimitato. Per esempio:

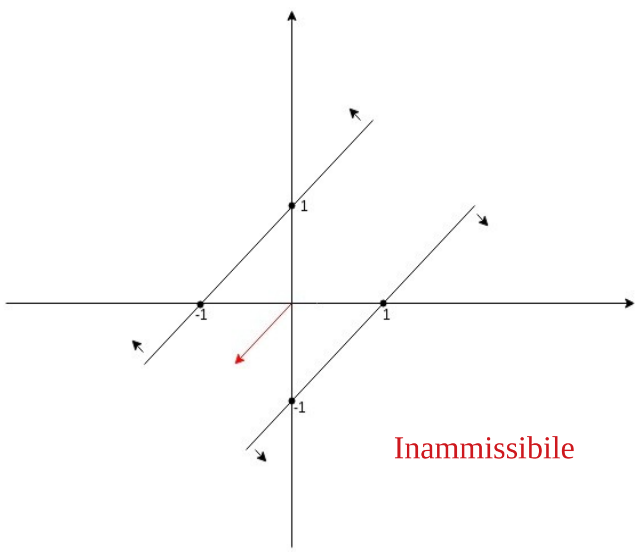
min $-x_1-x_2$

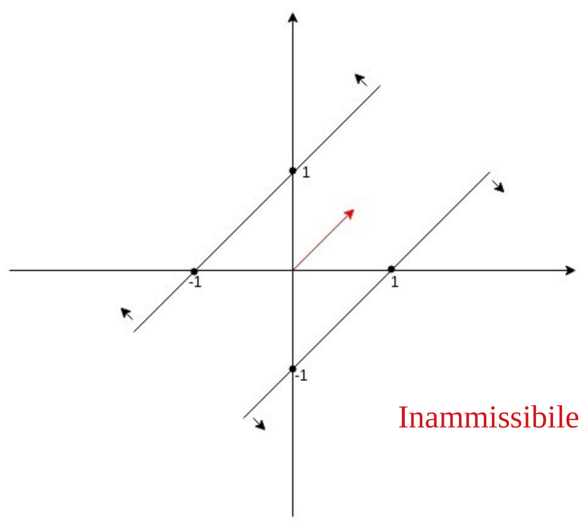
$$\begin{aligned} -x_1+x_2 &\ge 1 \\ x_1-x_2 &\ge 1 \\ x_1, x_2 &\ge \underline{0} \end{aligned}$$

	x_1	x_2	
w_1	-1	1	1
w_2	1	-1	1
	-1	-1	

max $-w_1-w_2$

$$\begin{aligned} -w_1+w_2 &\le 1 \\ w_1-w_2 &\le 1 \\ w_1 \ge 0, w_2 &\ge 0 \end{aligned}$$





Teorema (forte) della dualità
Data una coppia di problemi primale duale, (P) e (D), se uno dei due problemi ammette una soluzione ottima finita, allora anche l'altro problema ammette una soluzione ottima finita ed i valori ottimi delle funzioni obiettivo coincidono: $\underline{c}^T \underline{x}^* = \underline{b}^T \underline{w}^*$
Dim:

$$(P) \quad \min \ \underline{c}^T \underline{x} \qquad\qquad (D) \quad \max \ \underline{b}^T \underline{w}$$
$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad\qquad A^T \underline{w} \le \underline{c}$$
$$\underline{x} \ge \underline{0} \qquad\qquad \underline{w} \ \ n.v.$$

Sia $\underline{x}$* la soluzione ottima del primale e sia B la base ad esso associata.

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} \underline{x}_B^* \\ \underline{x}_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1}\underline{b} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad \text{quindi} \quad \underline{c}^T \underline{x}^* = \underline{c}_B^T \underline{x}_B^* = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b}$$

Sia $\underline{w}^{*T} = \underline{c}_B^T A_B^{-1}$, vogliamo dimostrare che questo vettore è una soluzione ammissibile ed ottima per (D).
- Proviamo l'ammissibilità $\underline{w}^{*T} = \underline{c}_B^T A_B^{-1}$:

$$A^T \underline{w}^* \underline{c} \Leftrightarrow \underline{w}^{*T} A \le \underline{c}^T \Rightarrow \underline{c}_B^T A_B^{-1} A \le \underline{c}^T \Leftrightarrow \underline{c}_B^T A_B^{-1} A - \underline{c}^T \le \underline{0}^T$$
$$\underline{c}_B^T A_B^{-1} [A_B | A_N] - [\underline{c}_B^T | \underline{c}_N^T] = [\underline{c}_B^T | \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N] - [\underline{c}_B^T | \underline{c}_N^T] = [\underline{c}_B^T - \underline{c}_B^T | \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N - \underline{c}_N^T] = [\underline{0} | \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N - \underline{c}_N^T] \le \underline{0}^T$$

Poiché $\underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N - \underline{c}_N^T \le \underline{0}^T$ è la condizione di ottimalità per (P) (problema di minimizzazione), è verificata l'ammissibilità.

- Proviamo l'ottimalità:
Il valore della funzione obiettivo duale in w*T è: $\underline{w}^T \underline{b} = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} = \underline{c}_B^T \underline{x}_B^* = \underline{c}^T \underline{x}^*$.
Dal Corollario 1 del teorema della dualità debole sappiamo che, essendo $\underline{c}^T \underline{x}^* = \underline{w}^{*T}$ è ottima.
Dal teorema della dualità forte ricaviamo che, data la base ottima B del primale, è possibile calcolare velocemente la soluzione ottima del duale (D) tramite l'equazione: $\underline{w}^{*T} = \underline{c}_B^T A_B^{-1}$

Riassumendo
- Se (P) è illimitato → (D) non è ammissibile
- (P) ha soluzione ottima finita ↔ (D) ha soluzione ottima finita (ed i valori delle loro f.o. coincidono)
- Se (P) inammissibile → (D) illimitato o inammissibile

Solo in corrispondenza dell ' ottimo dalla base B ammissibile per (P) si ottiene una soluzione ammissibile per (D) (che in particolare è anche ottima).

Nota: Se abbiamo risolto il simplesso per trovare la soluzione ottima del duale basta creale prima di tutto il duale del primale originale, poi prendiamo la base ottima dataci dal simplesso e applichiamo la seguente formula al duale $\underline{w}^{*T} = \underline{c}_B^T A_B^{-1}$, dove c è il vettore dei costi delle variabili in base e A l'inversa della matrice corrispondente alla base.

Ad una generica iterazione del simplesso dalla base corrente per (P) si può costruire un vettore $\underline{\pi}^T = \underline{c}_B^T A_B^{-1}$ che non è soluzione di (D). Tale vettore è detto dei MOLTIPLICATORI DEL SIMPLESSO e compare nel calcolo dei coefficienti di costo ridotto (problema di min):
$\underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N - \underline{c}_N^T$

Il Teorema dello "scarto complementare" (Complementary Slackness Theorem)

$$(P) \quad \min \underline{c}^T \underline{x} \qquad A\underline{x} \geq \underline{b} \qquad \underline{x} \geq \underline{0} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \min \underline{c}^T \underline{x} & \\ A\underline{x} - I\underline{s} = \underline{b} & \\ \underline{x} \geq \underline{0} & n \text{ var.} \\ \underline{s} \geq \underline{0} & m \text{ var. } \textit{di surplus} \end{array}$$

$$(D) \quad \max \underline{b}^T \underline{w} \qquad A^T \underline{w} \leq \underline{c} \qquad \underline{w} \geq \underline{0} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max \underline{b}^T \underline{w} & \\ A^T \underline{w} + I\underline{v} = \underline{c} & \\ \underline{w} \geq \underline{0} & m \text{ var.} \\ \underline{v} \geq \underline{0} & n \text{ var. } \textit{di slack} \end{array}$$

Ad ogni variabile di (P) è associato un vincolo di (D) e quindi la corrispondente variabile di slack e viceversa.

Teorema della slackness complementare
Data la coppia di soluzioni x e w rispettivamente ammissibili per (P) e (D), x e w sono ottime per (P) e (D) se e solo se:

- $s_j w_j = (\underline{a}^j \underline{x} - b_j) w_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$
- $v_j x_j = (\underline{c}^j - \underline{a}_i^T \underline{w}) x_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$

dove $\underline{a}^j$ è la j-esima riga di A, $\underline{a}_i$ è la i-esima colonna di A.

Esercizio

$$\begin{array}{l} \max \; -x_1 + \frac{3}{2} x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ -\frac{1}{2} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0 \end{array}$$

1. Scrivere il duale del problema e determinare una coppia di soluzioni primale-duale ammissibile.
2. Verificare che le soluzioni trovate soddisfano il teorema debole della dualità.
3. Verificare se le soluzioni trovate sono ottime.
4. Verificare utilizzando gli scarti complementari se le seguenti soluzioni sono ottime: $x_1 = 2, x_2 = 6, w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = 1$ sono ottime.

1) Duale:

	x_1	x_2	
w_1	-1	1	4
w_2	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	1	5
	-1	$\boxed{\frac{3}{2}}$	

$$\min 4w_1+5w_2$$
$$-w_1+w_2\geq -1$$
$$-\frac{1}{2}w_1+w_2\geq\frac{3}{2}$$
$$w_1\geq 0, w_2\geq 0$$

Teorema fondementalmente forte di Emanuele Vitale
Se il problema primale è di max nel creare il suo duale i simboli di <= diventano >=, se il primale è di minimo i simboli di >= nel duale diventano <=.

Indichiamo come coppia di soluzioni ammissibili le seguenti: $\underline{x}$ = [1 1] e $\underline{w}$ = [$\frac{1}{2}$ 1]

2) Verifichiamo che soddisfino il teorema debole della dualità:

- $z_p = \underline{c}^T\underline{x}$ = $\begin{bmatrix}-1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}$
- $z_d = \underline{b}^T\underline{w}$ = $\begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}=7$

Essendo la funzione del primale di massimo abbiamo che $\underline{c}^T\underline{x} \leq \underline{b}^T\underline{w}$:
$\frac{1}{2}\leq 7$? Si, quindi vale il teorema debole della dualità

3) Le soluzioni trovate non sono ottime perché non i due valori non coincidono.
4) Per essere ottime usando gli scarti complementari ci devono restituire tutte il valore 0.
$\underline{x}$ = [2 6] e $\underline{w}$ = [$\frac{1}{2}$ 1]
Per prima cosa trasformiamo i vincoli del primale e del duale in uguaglianza:

Primale

$$\max -x_1+\frac{3}{2}x_2$$
$$-x_1+x_2+x_3=4$$
$$-\frac{1}{2}x_1+x_2-x_4=5$$
$$\underline{x}\geq 0$$

otteniamo così che

$$x_3=4+x_1-x_2$$
$$x_4=5+\frac{1}{2}x_1-x_2$$

Duale

$$\min 4w_1+5w_2$$
$$-w_1+w_2-w_3=-1$$
$$-\frac{1}{2}w_1+w_2-w_4=\frac{3}{2}$$
$$\underline{w}\geq 0$$

otteniamo così che

$$w_3=1-2_1-\frac{1}{2}w_2$$
$$w_4=-\frac{3}{2}+w_1-w_2$$

calcoliamo gli scarti complementari:

$$w_1 x_3 = w_1(4+x_1-x_2) = \frac{1}{2}(4+2-6) = 0 \qquad Ok!$$

$$w_1 x_3 = w_2(4+x_1-x_2) = \frac{1}{2}(4+2-6) = 0 \qquad Ok!$$

$$x_1 w_3 = x_1(1-w_1-\frac{1}{2}w_2) = 2(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1)) = 0 \qquad Ok!$$

$$x_2 w_4 = x_2(-\frac{3}{2}+w_1+w_2) = 6(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1) = 0 \qquad Ok!$$

Poiché tutte le condizioni degli scalari complementari sono 0 le soluzioni di date dai vettori x e w sono ottime.

Interpretazione economica

Una azienda produce due tipi di mangime A e B, entrambi costituiti da una miscela di carne e cereali. La seguente tabella mostra quanti kg di carne e di cereali sono necessari per produrre un kg di A e B:

materie prime	Prodotti A	Prodotti B
Cereali	1 Kg	1.5 Kg
Carne	2 Kg	1 Kg

Ogni giorno l'azienda ha a disposizione 240 kg di cereali e 180 Kg di carne. Inoltre, essendo il mangime A più pregiato, prima di poter essere venduto deve essere raffinato attraverso un macchinario in grado di raffinare al più 110 kg di mangime al giorno. Il profitto per kg è pari a 560€ euro per il mangime A e 420€ per il mangime B.

PROBLEMA: determinare quanti kg di mangime A e B devono essere prodotti giornalmente per massimizzare il ricavo dell'azienda.

Introduciamo due variabili che rappresentano le quantità di mangime A e B prodotte:

- Kg di mangime A: x_1;
- Kg di mangime B: x_2.

(P) $\max z = 560x_1 + 420x_2$

$x_1 + 1{,}5x_2 \leq 240$ Cereali

$2x_1 + x_2 \leq 180$ Carne

$x_1 \leq 110$ Raffinatrice

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Supponiamo che un'altra azienda chieda alla prima di vendergli parte della carne o dei cereali. Qual'è il prezzo minimo al quale la prima azienda deve vendere la carne e i cereali facendo rimanere inalterato il proprio profitto? Introduciamo il concetto di **Prezzo ombra**: è il prezzo a cui vendo la singola unità della risorsa affinché la funzione obbiettivo non cambi.
Per rispondere a questa domanda risolviamo il problema duale:

Problema (D):

$$\min g = 240w_1 + 180w_2 + 110w_3$$
$$w_1 \quad + 2w_2 + w_3 \geq 560$$
$$1{,}5w_1 + w_2 \geq 420$$
$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0.$$

Nota: I prodotti che produco sono quelli nelle variabili di Base, quelle fuori base non con viene produrle.

La soluzione ottima del problema primale (P) è: $x_1^* = 15$; $x_2^* = 150$; $x_3^* = x_4^* = 0$; $x_5^* = 95$.
La soluzione ottima del problema duale (D) è: $w_1^* = 140$; $w_2^* = 210$; $w_3^* = w_4^* = w_5^* = 0$.

Facciamo la forma standard del primale e notiamo:
$\max 560x_1 + 420x_2$

$x_1 + ½\, x_2 + x_3 = 240$ abbiamo usato tutte le risorse dei cereali
$2x_1 + x_2 + x_4 = 180$ abbiamo usato tutte le risorse della carne
$x_1 + x_5 = 110$ risorsa abbondanti

Vediamo adesso il significato delle x e delle w considerando la seguente tabella:

Cereali	Carne	x1	x2	x3	x4	x5	w1	w2	w3	w4	w5	z* = g*
240	**180**	15	150	0	0	95	140	210	0	0	0	71400
239	**180**	15,5	149	0	0	94,5	140	210	0	0	0	71260
241	**180**	14,5	151	0	0	95,5	140	210	0	0	0	71540
240	**179**	14,25	150,5	0	0	95,75	140	210	0	0	0	71190
240	**181**	15,75	149,5	0	0	94,25	140	210	0	0	0	71610
250	**200**	25	150	0	0	85	140	210	0	0	0	77000
250	**250**	110	93,3	0	36,6	0	280	0	280	0	0	100800

Ogni volta che aggiungiamo una carne l'aumento corrisponde al valore della variabile duale corrispondente cioè 140.
Ma nell'ultimo cosa notiamo un errore questo è dovuto, al fatto che nell'aumentare il valore di una variabile abbiamo modificato la base. Perché è cambiata:
$\underline{c}^T \underline{x}^T = \underline{b}^T \underline{w}^T = b_1 w_1^* + b_2 w_2^* + ... + b_n w_n^*,$ il valore di una b_n cambia e quindi anche la funzione obbiettivo cambia, questo però è vero finché non cambia la base nel momento che quest'ultimo cambia abbiamo un errore che sarebbe l'ultimo caso della tabella.

Riassumendo
Le variabili duali $\underline{w}$ rappresentano i "prezzi ombra", ovvero i prezzi minimi a cui bisogna vendere le risorse per mantenere invariato il profitto. I prezzi ombra sono validi fino a quando non viene cambiata la base ottima (quando ciò avviene devono essere ricalcolati). Quando un vincolo è attivo la risorsa ad esso associata è scarsa. La variabile duale corrispondente, a meno di degenerazione, sarà diversa da zero. Se invece la risorsa è abbondante sicuramente la variabile duale ad essa associata è nulla.

Esercizio:

$$(P) \quad \min \quad x_1 - \frac{3}{2} x_2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4$$
$$-\frac{1}{2} x_1 + x_2 \leq 5$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

forma standard:

$$\min x_1 - \frac{3}{2} x_2$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_4 = 5$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

a) Data la base B = { 2,1} verificare se è ammissibile.

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_D = A_B^{-1} \underline{b} \geq 0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \end{array}$$

b) Verificare se è ottima.
B = {2,1} N = {3,4}

$$z_3 - c_3 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} [1 \quad 0] - 0 = \frac{1}{2} < 0 \qquad \text{ok!}$$

$$z_4 - c_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} [0 \quad 1] - 0 = -1 < 0 \qquad \text{ok!}$$

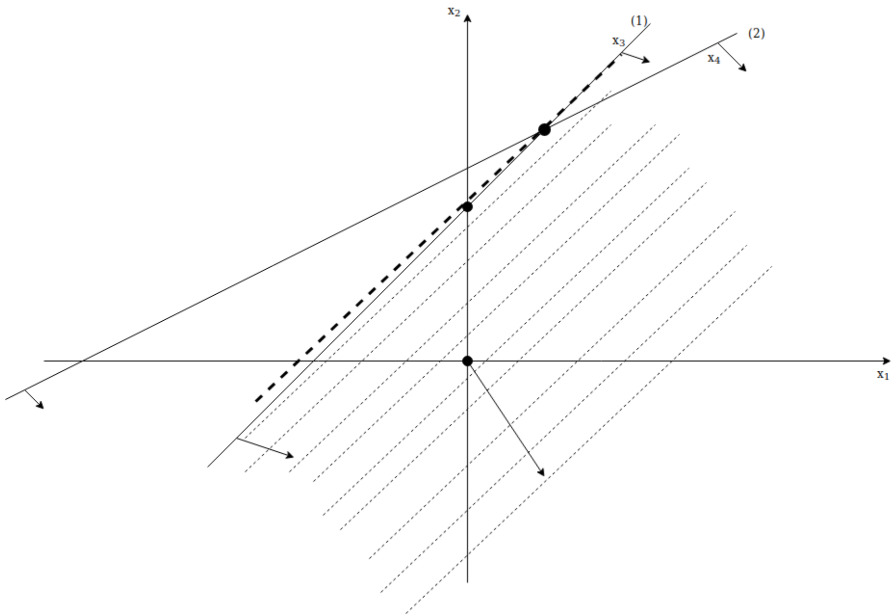
c) Risolvere graficamente il problema primale.
G = (1, - 3/2)

1)

X	Y
0	4
-4	0

2)

X	Y
0	5
-10	0



d) Calcolare la soluzione ottima del problema duale.

$$w^* = \underline{c}_B^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

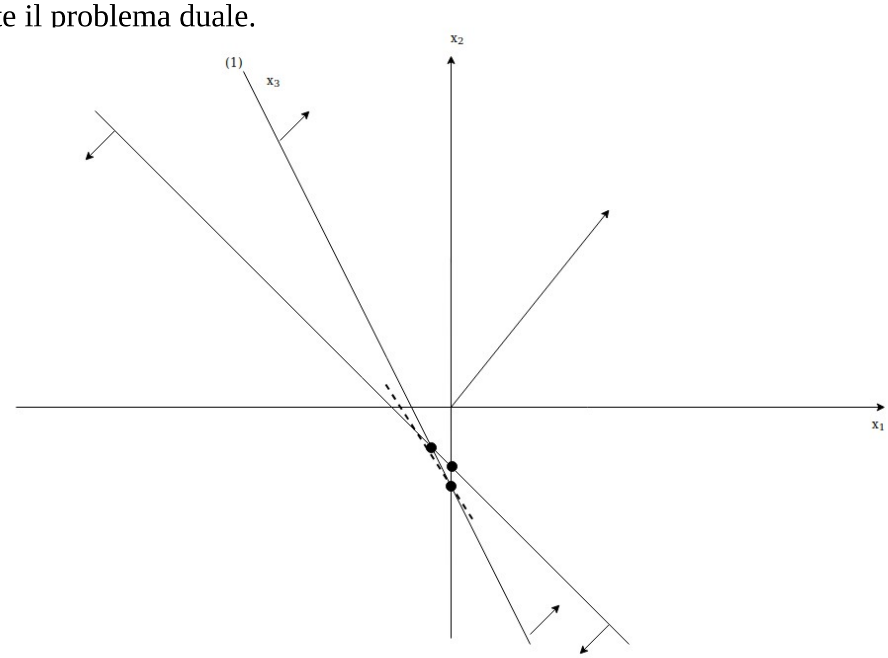
e) Risolvere graficamente il problema duale.

1)

X	Y
0	-2
-1	0

2)

X	Y
0	-3/2
-3/2	0



f) Verificare attraverso il corollario 1 del teorema debole della dualità che la coppia di soluzioni primale/duale calcolate sono ottime.

$$z^* = 2 - \frac{3}{2} * 6 = 2 - 9 = -7 \qquad w^* = (4 - \frac{1}{2}) + 5 - 1 = -7$$

Dal corollario 1 visto che le funzioni obbiettivo coincido le soluzioni sono ottime.

g) Verificare attraverso il teorema degli scarti complementari se la coppia di soluzioni primale/duale è ottima.

$$\begin{array}{lcl} \max 4w_1 + 5w_2 & & \max 4w_1 + 5w_2 \\ -w_1 - \frac{1}{2}w_2 \le 1 & & -w_1 - \frac{1}{2}w_2 + w_3 = 1 \\ & \text{forma standard} & \\ w_1 + w_2 \le -\frac{3}{2} & & w_1 + w_2 + w_4 = -\frac{3}{2} \\ \underline{w} \le \underline{0} & & \underline{w} \le \underline{0} \end{array}$$

con x= [2 6] w = [1 -1/2]

$$w_1 x_3 = w_1(4 + x_1 - x_2) = 1(4 + 2 - 6) = 0 \qquad Ok!$$

$$w_2 x_4 = w_2(4 + x_1 - x_2) = -\frac{1}{2}(4 + 2 - 6) = 0 \qquad Ok!$$

$$x_1 w_3 = x_1(1 + w_1 + \frac{1}{2}w_2) = 2(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})) = 0 \qquad Ok!$$

$$x_2 w_4 = x_2(\frac{3}{2} - w_1 - w_2) = 6(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 1) = 0 \qquad Ok!$$

Analisi di Post-Ottimalità

Esempio: pianificare la produzione di una piccola azienda

L'azienda produce due tipi di prodotti, il prodotto P_1 ed il prodotto P_2 , usando due materie prime indicate con A e B. La disponibilità al giorno di materia prima A è pari a 6 ton, mentre quella di materia prima B è di 8 ton. La quantità di A e B consumata per produrre una ton di prodotto P_1 e P_2 è riportata nella seguente tabella.

materie prime	Prodotti P_1	P_2
A	1	2
B	2	1

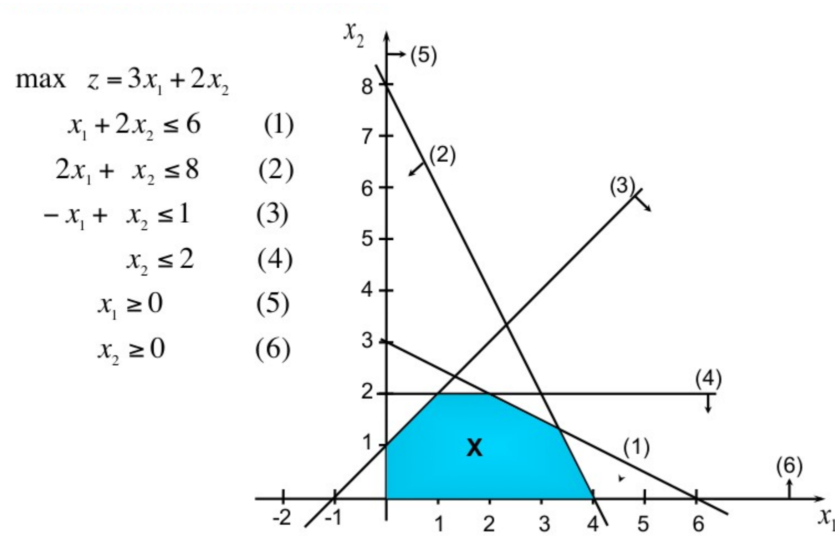
Si ipotizza che tutta la Quantità prodotta venga venduta. Il prezzo di vendita per tonnellata è Euro 3000 per P_1 e Euro 2000 per P_2 . L'azienda ha effettuato un'indagine di mercato con i seguenti esiti: la domanda giornaliera di prodotto P_2 non supera mai di più di 1 ton quella di prodotto P_1 , la domanda massima giornaliera di prodotto P_2 è di 2 ton.

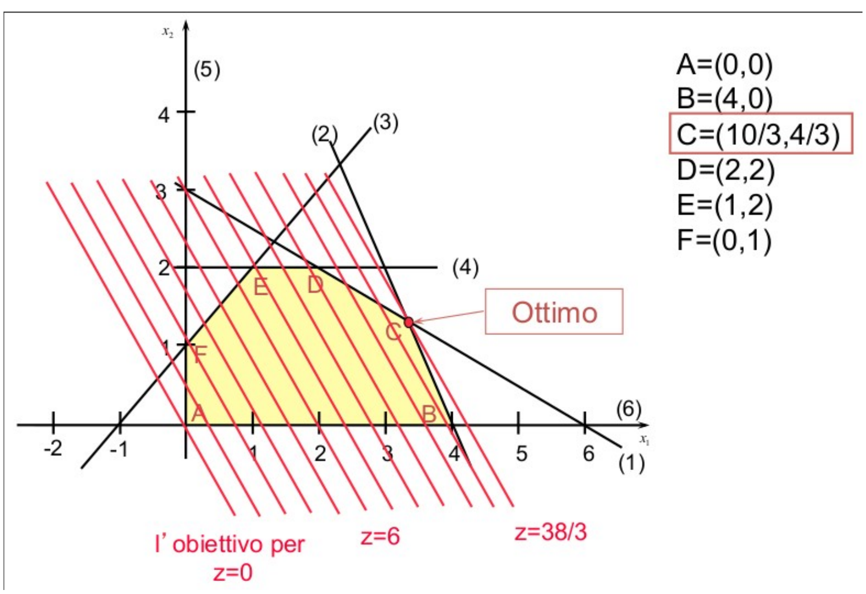
Problema: determinare le quantità dei due prodotti che debbono essere fabbricati giornalmente in modo da rendere massimo il ricavo.

Variabili decisionali: x_1 = tonnellate P_1, x_2 = tonnellate P_2
Funzione obiettivo: max z = 3x 1 + 2x 2

Vincoli (tecnologici) sull'uso delle materie prime (l'uso giornaliero delle materie prime non può eccedere la disponibilità):
(A) $x_1 + 2x_2 \leq 6$
(B) $2x_1 + x_2 \leq 8$
Vincoli conseguenti le indagini di mercato:
$x_1 + x_2 \leq 1$
$x_2 \leq 2$
Non negatività delle variabili <u>x</u> ≥ <u>0</u>

Risolviamolo graficamente:



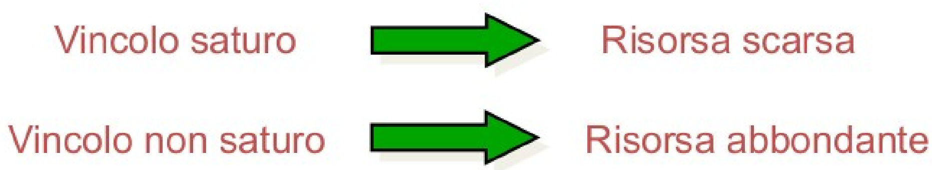


Variazioni rispetto la disponibilità delle risorse

a) come aumentare le risorse per migliorare la soluzione ottima;
b) come ridurre risorse disponibili lasciando invariata la soluzione ottima.

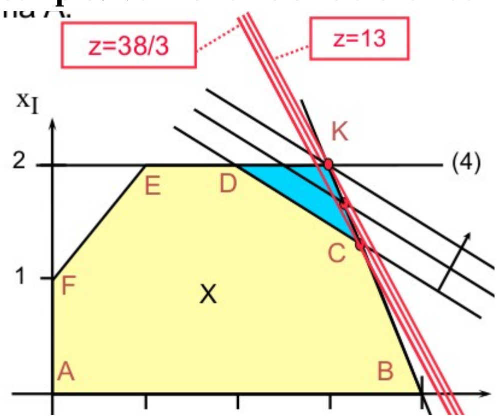
Nel nostro esempio I vincoli del problema hanno tutti la seguente forma quantità di risorsa usata ≤ disponibilità di risorsa anche se solamente i vincoli (1) e (2) rappresentano effettivamente il consumo delle materie prime A e B.

Poiché i vincoli (1) e (2) sono soddisfatti all’uguaglianza dalla soluzione ottima corrispondente al punto C=($\frac{10}{3}$, $\frac{4}{3}$), il livello ottimo di produzione per i due prodotti è tale da utilizzare tutte le materie prime disponibili. I vincoli (1) e (2) sono saturi, quindi le materie prime A e B sono utilizzate completamente, ovvero sono risorse scarse.



È possibile aumentare la disponibilità di una risorsa scarsa per migliorare la soluzione ottima (caso (a)).
È possibile diminuire la disponibilità di una risorsa abbondante senza variare la soluzione ottima (caso (b)).

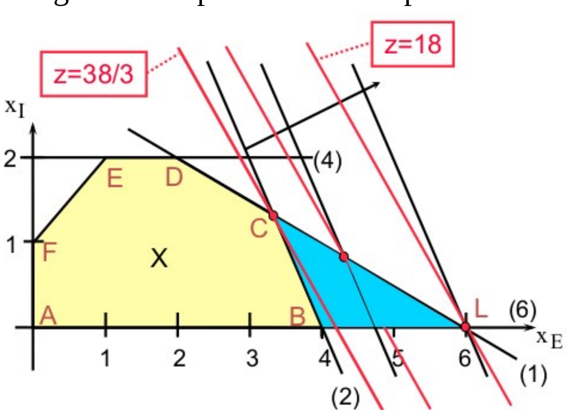
Esempio: Verifichiamo sino a che livello ha senso aumentare la materia prima A.



Aumentando la risorsa A il vincolo (1) si sposta e di conseguenza varia il punto di ottimo.

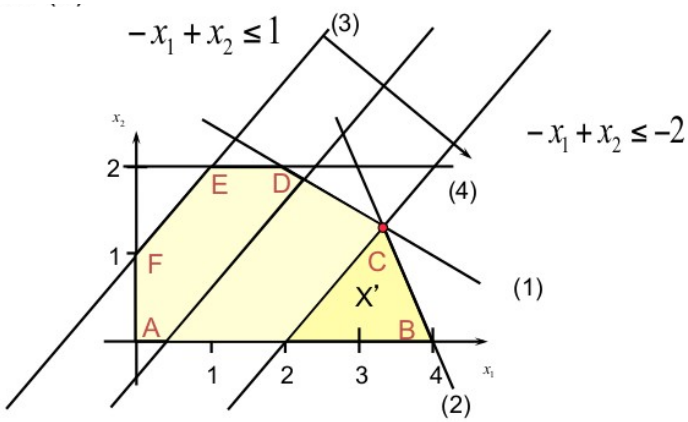
Oltre K=(3,2) (intersezione di (2) e (4)) non ha più senso aumentare la risorsa A. Il nuovo valore di A è 7.

Analoga verifica può essere fatta per la materia prima B.

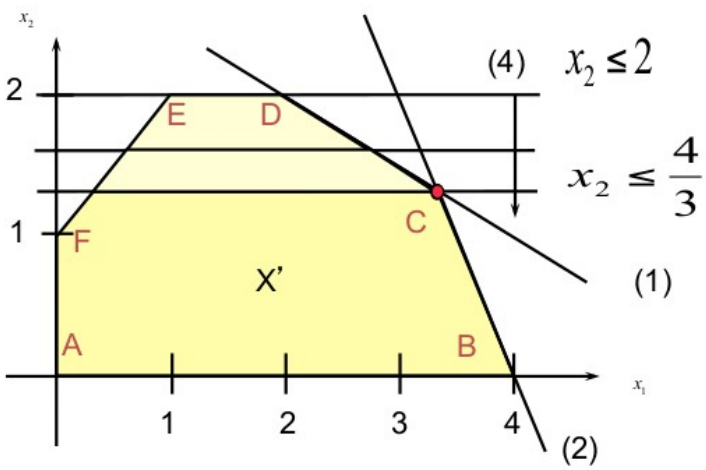


Aumentando la risorsa B il vincolo (2) si sposta e di conseguenza varia il punto di ottimo. Oltre L=(6,0) (intersezione di (1) e (6)) non ha più senso aumentare la risorsa B. Il nuovo valore di B è 12.

Supponendo i vincoli (3) e (4) relativi al consumo di due ulteriori risorse abbondanti, è possibile verificare di quanto diminuirne la disponibilità senza modificare la soluzione ottima.
Nota: Per le risorse abbondanti si fa l'inverso del gradiente perché si vuole diminuire.
Per il vincolo (3)



Per il vincolo (4)



Dopo aver verificato la convenienza di una possibile maggiore disponibilità delle risorse A e B, è interessante determinare quale sia la risorsa che di più convenga aumentare. Nell'esempio, l'azienda potrebbe avere una limitata disponibilità finanziaria che vorrebbe far fruttare al meglio, acquisendo un'ulteriore quantità di una delle risorse in modo da incrementare maggiormente i propri profitti. Questa informazione è ottenibile per mezzo della Programmazione Lineare.
Si può calcolare il Valore di una Unità di Risorsa w_i :

$$w_i=\frac{\text{massima variazione di z}}{\text{massima variazione della risorsa i}}$$

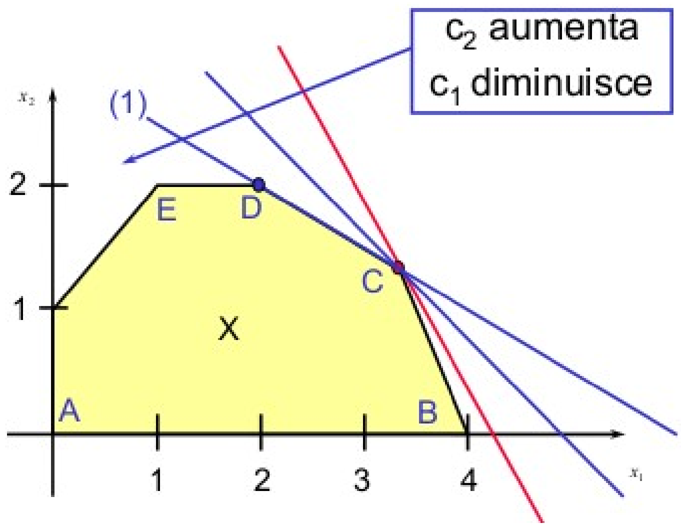
$$Per\,la\,risorsa\,A: w_A=\frac{13-\frac{38}{3}}{7-6}=\frac{39-38}{3}=\frac{1}{3}$$

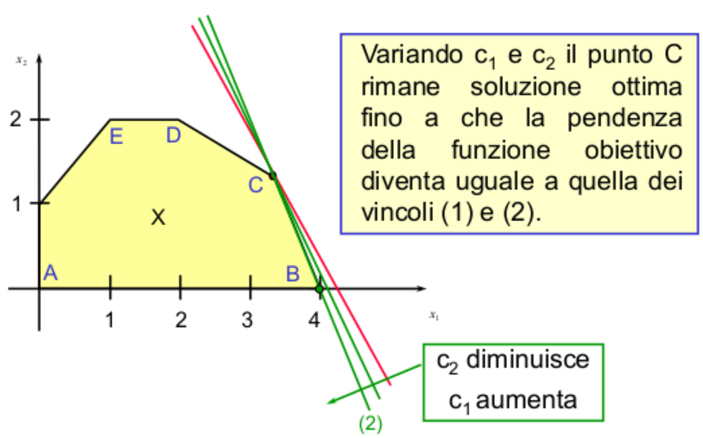
$$Per\,la\,risorsa\,A: w_B=\frac{18-\frac{38}{3}}{12-8}=\frac{\frac{54-38}{3}}{4}=\frac{4}{3}$$

La quantità w_i indica di quanto aumenta l'obiettivo in corrispondenza dell'acquisizione di un'ulteriore unità di risorsa. È evidente come nell'esempio l'incremento unitario migliore è associato alla risorsa B.

Variazioni del prezzo di vendita dei prodotti
Si tratta di analizzare entro quali limiti di tolleranza possono variare i prezzi di vendita senza alterare la soluzione ottima (la produzione associata al punto C).

Variando c_1 e c_2 cambia la pendenza della funzione obiettivo:





Analisi di Post-Ottimalità (Analisi della Sensitività della Soluzione)
Dato un problema di programmazione lineare
min $\underline{c}^T\underline{x}$
$A\underline{x} = \underline{b}$
$\underline{x} \geq \underline{0}$
e data la soluzione ottima x * e la base ottima associata B, determinare come sia possibile variare certe caratteristiche del problema lasciando invariata la base ottima.

Abbiamo cinque casi:
1. variazione nel vettore dei costi c;
2. variazione nel vettore dei termini noti b;
3. variazione nella matrice di vincoli A;
4. aggiunta di una nuova variabile;
5. aggiunta di un nuovo vincolo.

Caso 1: variazione nel vettore dei costi c.
Data una soluzione di base ottima x* (sia B la base associata a tale soluzione), supponiamo che il coefficiente di una delle variabili sia cambiato da c_k a c'_k . L'effetto di questo cambio si ripercuoterà solo sui coefficienti di costo ridotto.

Bisogna considerare i seguenti due casi:
Caso 1.1) variazione di un coefficiente di costo c_k relativo ad una variabile x_k non in base:
Sia c_k , k ∈ N, il coefficiente che viene modificato come segue:

$$c'_k = c_k + \delta$$

In questo caso c^T_B non subisce variazioni e quindi
$z_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j$ rimane inalterato per ogni j ∈ N.
Solo il coefficiente di costo di ridotto z_k-c_k cambia come segue: $z_k - c'_K = z_k - (c_k + \delta) = (z_k - c_k) - \delta$
Se z_k -c'_k ≤0 allora x* è ancora la soluzione ottima.
Se invece z_k -c'_k > 0 allora x* non è più la soluzione ottima e quindi occorre effettuare un'iterazione del simplesso per far entrare in base la variabile x_k.
Quale è l'intervallo di valori che può assumere δ affinchè l'attuale base B continui a rimanere ottima?

$$z_k - c'_K = \underbrace{(z_k - c_k)}_{\leq 0} - \delta \leq 0 \rightarrow \delta \geq (z_k - c_k)$$

Quindi per ogni valore di d nell'intervallo (z_k -c_k) ≤ δ ≤+∞ la base continua a rimanere ottima.

Caso 1.2) variazione di un coefficiente di costo c_k relativo ad una variabile in base:
Sia c_{Bi} , i=1,...,m , il coefficiente di costo che viene modificato in $c'_{Bi} = c_{Bi} + \delta$.
Poichè: $z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j \quad j \in N$ la modifica di c_{Bi} implica la variazione di tutti i coefficienti di costo ridotto associati alle variabili fuori base. In particolare si ha che:
$c'_{B_i} = C_{B_i} + \delta \rightarrow \underline{c}'_B = \underline{c}_B + \delta \underline{e}_i$ dove

$$\underline{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (i - \text{esimo elemento})$$

allora : $z'_j - c_j = (\underline{c}_B^T + \delta \underline{e}_i^T) A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j + \delta \underline{e}_i^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j$ dove
$\underline{e}_i^T A^{-1} = (A_B^{-1})^i$ $è\, la\, riga\;\; i - esima\, di\, A_B^{-1}$ Le condizioni su d si ottengono imponendo che:
$z'_j - c_j = (z_j - c_j) + \delta (A_B^{-1})^i \underline{a}_j \leq 0 \quad \forall\, j \in N$

Caso 2) variazione del termine noto di un vincolo.
Sia b_i , i=1,...,m, il termine noto del i-esimo vincolo che viene variato in: $b'_i = b_i + \delta \Longrightarrow b' = b + \delta e_i$.
A causa di tale variazione si modificano i valori delle variabili di base:

$$\underline{x}'_B = A_B^{-1}\underline{b}' = A_B^{-1}(\underline{b} + \delta \underline{e}_i) = A_B^{-1}\underline{b} + \delta (A_B^{-1})_i \rightarrow \underline{x}'_B = \underline{x}_B + \delta (A_B^{-1})_i \quad \text{dove}$$

$$A_B^{-1}\underline{e}_i = (A_B^{-1})_i \quad \grave{e}\ la\, colonna\, i-esima\, di\ A_B^{-1}$$

Le condizioni su δ si ottengono imponendo che: $\underline{x}'_B = \underline{x}_B + \delta (A_B^{-1})_i \geq 0$

Esempio: Analisi di Sensibilità

Dato il seguente problema di P.L.

$$\begin{aligned} &\min -2x_1 + x_2 - x_3 \\ &x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ &-x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ &\underline{x} \geq 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\min -2x_1 + x_2 - x_3 \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad = 6 \\ &-x_1 + 2x_2 + \quad x_5 = 4 \\ &\underline{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Base ottima: $B = \{1,5\}; \quad N = \{2,3,4\}; \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Infatti:

$$z_2 - c_2 = -3; \qquad \underline{x}_B = A_B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix};$$

$$z_3 - c_3 = -1;$$

$$z_4 - c_4 = -2 \qquad z^* = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} = -12$$

Esempio: caso 1.1) variazione di un coefficiente di costo c_k relativo ad una variabile x_k non in base.

Di quanto può variare il coefficiente c_2 prima di cambiare la base ottima?

$$z_2 - c'_2 = (z_2 - c_2) - \delta \le 0 \Rightarrow -3 - \delta \le 0 \Rightarrow \delta \ge -3$$

Verifichiamo cosa succede se scegliamo un $\delta < -3$ per esempio $\delta = -4$.

Poiché x_2 non è in base il valore $z_j = \underline{c}_B A_B^{-1} \underline{a}_j$ non cambia per nessun indice $j \in N$.
L'unico coeff. di costo ridotto che cambia è:

$$z_2 - c'_2 = (z_2 - c_2) - \delta = -3 + 4 = 1 > 0$$

Poiché z_2-c'_2 è maggiore di zero la soluzione non è più ottima. Bisogna fare entrare in base x_2.

Esempio: caso 1.2) variazione di un coefficiente di costo c_k relativo ad una variabile x_k in base.

Di quanto può variare il coefficiente c_1 prima di cambiare la base ottima?

$$z'_j - c_j = (z_j - c_j) + \delta (A_B^{-1})^i \underline{a}_j \le 0 \quad \forall j \in N \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z'_2 - c_2 = (z_2 - c_2) + \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \le 0 \Rightarrow -3 + \delta \le 0 \Rightarrow \delta \le 3$$

$$z'_3 - c_3 = (z_3 - c_3) + \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \le 0 \Rightarrow -1 + \delta \le 0 \Rightarrow \delta \le 1$$

$$z'_4 - c_4 = (z_4 - c_4) + \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \le 0 \Rightarrow -2 + \delta \le 0 \Rightarrow \delta \le 2$$

Verifichiamo cosa succede se scegliamo un $\delta > 1$ per esempio $\delta = 2$.

Poiché x_1 è in base il valore z_j cambia per ciascun indice $j \in N$ secondo la relazione: $z'_j - c_j = (z_j - c_j) + \delta (A_B^{-1})^i \underline{a}_j \le 0 \quad \forall j \in N$

$$z'_2 - c_2 = -3 + 2[1\ ,\ 0]\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = -3 + 2 \times 1 = -1$$

$$z'_3 - c_3 = -1 + 2[1\ ,\ 0]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = -1 + 2 \times 1 = 1$$

$$z'_4 - c_4 = -2 + 2[1\ ,\ 0]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = -2 + 2 \times 1 = 0$$

Esempio: caso 2) variazione del termine noto di un vincolo.

Di quanto può variare al più il termine noto b_1 prima di rendere inammissibile la base ottima?

$$\underline{x}'_B = A_B^{-1}\underline{b}' = A_B^{-1}(\underline{b} + \delta \underline{e}_i) = A_B^{-1}\underline{b} + \delta (A_B^{-1})_i \quad \Rightarrow \quad \underline{x}'_B = \underline{x}_B + \delta (A_B^{-1})_i$$

$$\underline{x}'_B = \begin{bmatrix}x_1\\x_5\end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\10\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\delta\\\delta\end{bmatrix} = \begin{cases}6 + \delta \ge 0 \Rightarrow \delta \ge -6\\ 10 + \delta \ge 0 \Rightarrow \delta \ge -10\end{cases}$$

Verificiamo cosa succede se scegliamo $\delta = -7$. $\underline{x}'_B = \underline{x}_B + \delta (A_B^{-1})_i$

$$\underline{x}'_B = \begin{bmatrix}x_1\\x_5\end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\10\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-7\\-7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$$

Parte 2 end

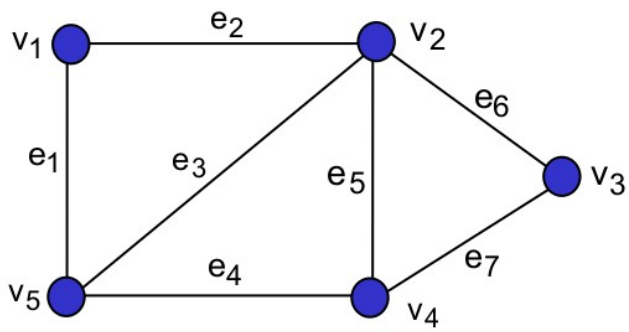
Cosa abbiamo imparato:

Abbiamo imparato ad usare Excel.

Teoria dei Grafi: Concetti Fondamentali
Un grafo non orientato G=(V,E) è dato da una coppia di insiemi finiti:

- $V=\{v_1 ,...,v_n \}$ l'insieme degli n Nodi di G
- $E=\{e_1 ,..,e_m \} \subseteq V\mathrm{x}V$ l'insieme degli m *archi non orientati* di G

Ogni arco non orientato di G corrisponde ad una *coppia non ordinata* di nodi di G e k $=(v_i ,v_j)$.
La presenza di un arco tra una coppia di nodi indica una relazione tra i nodi stessi.



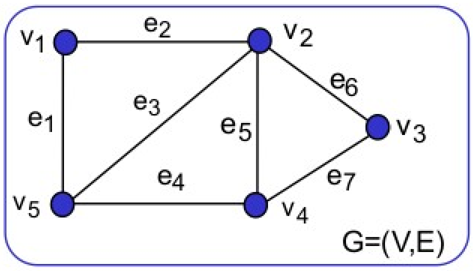
$V=\{v_{1,} v_{2,} v_{3,} v_4 , v_5\}$
$E=\{e_{1,} e_{2,} e_{3,} e_4 , e_{5,} e_{6,} e_7\}$
$e_1=(v_{1,} v_5) \qquad e_2=(v_{1,} v_2) \quad ...$

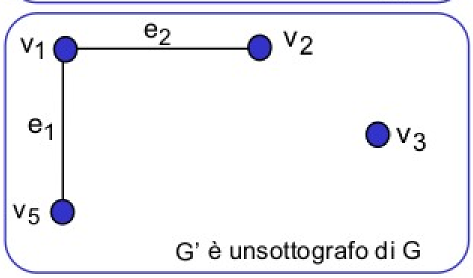
Definizione di base:

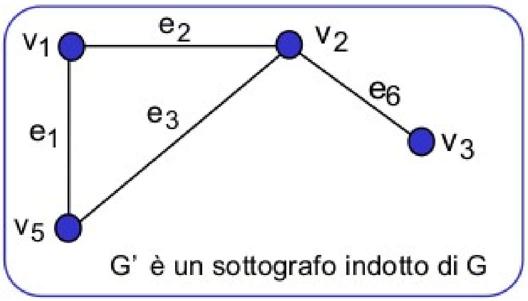
- un arco (v,v) è detto loop
- un arco $e=(u,v)\in E$ si dice incidente su u e su v
- due nodi $u,v\in V$ sono detti adiacenti $\Leftrightarrow (u,v)\in E$
- due archi $e_1 ,e_2 \in$ E sono detti adiacenti $\Leftrightarrow e_1=(u,v)\, ed\, e_2=(v,w)$ (hanno un nodo in comune)
- l'insieme di nodi N(u)={v ∈ V: v adiacente a u} è detto intorno di u in G
- l'insieme di archi d (u)={e ∈ E: e incide su u} è detto stella di u in G
- |d(u)| è detto grado del nodo u

Grafo semplice
Non esistono archi paralleli (al più un arco per ogni coppia di nodi) o "loop" .

Grafi e Sottografi
G'=(V',E') è detto sotto-grafo di G=(V,E) $\Longleftrightarrow$ V' ⊆ V, E' ⊆ E e $(v_i ,v_j) \in$ E' $\Longrightarrow v_i ,v_j \in$ V'
G'=(V',E') è detto sotto-grafo indotto da V in G=(V,E) $\Longleftrightarrow$ V' ⊆V, ∀u,v∈V' se (u,v) ∈ E allora (u,v) ∈ E'

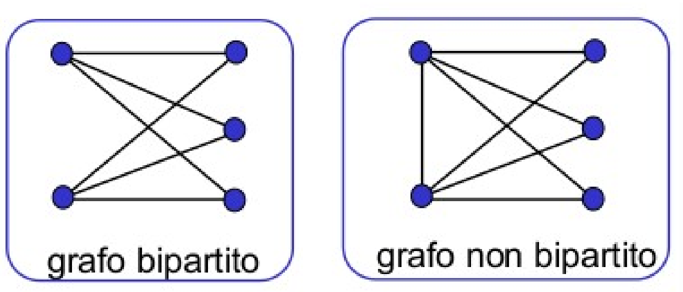




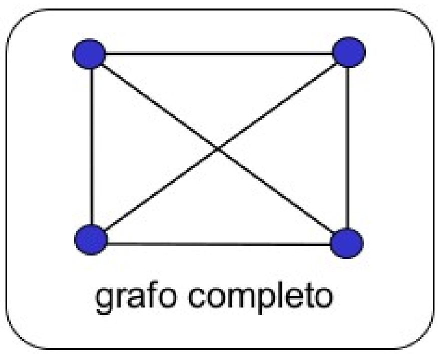


Grafo Bipartito
G è detto grafo bipartito se esiste una partizione di $V = V_1 \cup V_2$ tale che:

- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- $\forall e=(u,v)\in E \; se\, u\in V_1 \, allora\, v\in V_2 \, oppure\; se\, u\in V_2 \, allora\, v\in V_1$

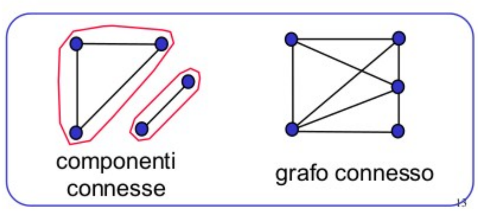


Grafo Completo
G è un grafo completo $\leftrightarrow$ contiene tutti i possibili archi, ovvero $|\delta(v)|=n-1\,\forall\, v\in V$ e il numero di archi in un grafo completo è: $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$



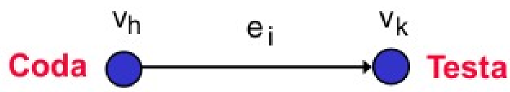
Grafo Connesso
Dato G=(V,E), un nodo v∈V si dice connesso ad un nodo u∈V se esiste un cammino tra u e v in G
v∈V è connesso a v (riflessività)
v∈V è connesso a u∈V $\rightarrow$ u∈V è connesso a v∈V (simmetria)
se v∈V è connesso a u∈V e u∈V è connesso a w∈V $\rightarrow$ v∈V è connesso a w∈V (transitività)
Un grafo G=(V,E) è connesso $\leftrightarrow$ tutti i suoi nodi sono connessi tra loro.

Componenti Connesse
L'insieme V può essere partizionato in sottoinsiemi
C_i ={v∈V : v è connesso a u, $\forall u\in C_i$ }
Il sottografo indotto da C i in G è detto componente connessa di G
G è connesso $\leftrightarrow$ possiede una sola componente connessa (v è connesso a u , $\forall v,u\in V$)

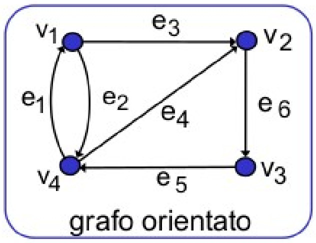


Grafi Orientati

G=(V,E) è detto orientato se, dato $V=\{v_1 ,...,v_n \}$, l'insieme degli archi $E=\{e_1 ,..,e_m \}$ è formato da coppie ordinate di nodi. Per un grafo orientato si ha che e i =(v_k ,v_h) 1 e j = (v_h ,v_k) , $e_i ,e_j \in E$



L'arco e i si dice uscente da v_h ed entrante in v_k.

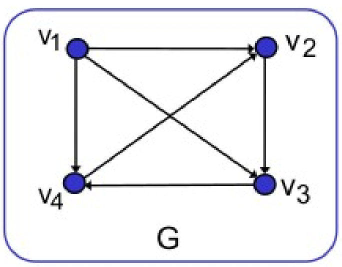


Fs(v) = {u∈V: (v,u) ∈E} è detto stella uscente di v. Fs(4) = $\{v_1, v_2\}$
Bs(v) = {u∈V: (u,v) ∈E} è detto stella entrante di v. Bs(4) = $\{v_1, v_3\}$
S(v) = Fs(v) È Bs(v) è detto stella di v. S(4) = $\{v_1, v_2, v_3\}$

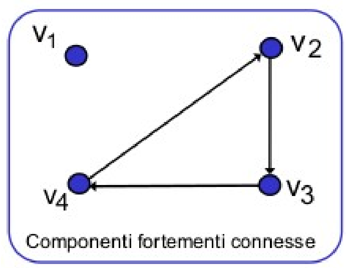
le definizioni di sotto-grafo, sotto-grafo indotto e componente connessa di un grafo orientato sono analoghe a quelle date per i grafi non orientati.

Componenti Fortemente Connesse

Dato G=(V,E), un nodo v∈V si dice fortemente connesso ad un nodo u∈V se esiste una path (cammino orientato) tra v e u in G. v∈V è connesso a v (riflessività), se v∈V è fortemente connesso a u∈V e u∈V è fortemente connesso a w∈V → v∈V è fortemente connesso a w∈V (transitività)
Un grafo G=(V,E) è fortemente connesso ↔ tutti i suoi nodi sono fortemente connessi tra loro.



Ci sono in G componenti fortemente connesse?



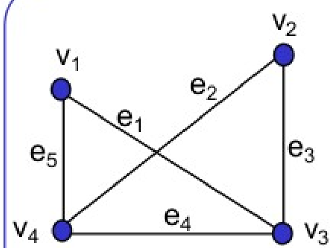
Rappresentazioni di un Grafo

- Liste di adiacenza: ad ogni vertice è associata la lista dei vertici adiacenti (può essere una tabella o una lista concatenata). Memoria usata O(m), Vantaggi: permette di scorrere i nodi adiacenti a v in O(grado(v)), Svantaggi: inserimenti e cancellazioni su liste concatenate in O(grado(v))
- Matrice di adiacenza (n x n) : a_{ij} = 1 se $(v_i , v_j) \in E$, a_{ij} = 0 altrimenti, memoria usata $O(n^2)$, Vantaggi: Inserimenti e cancellazioni in O(1), Svantaggi: permette di scorrere i nodi adiacenti a v in O(n).
- Matrice di incidenza (n x m) : a_{ij} = 1 se $v_i \in e_j$, a_{ij} = 0 altrimenti, memoria usata n x n n-1, la ricerca richiede O(m), la cancellazione richiede $O(m^2)$ per via degli shift logici, per migliorarla si può sostituire la riga da cancellare con l'ultima (O(m)).

Matrice di Incidenza dei Grafi

Dato G=(V,E) grafo non orientato, A G =[a_{ij}], con i=1,...,n e j=1,...,m è la matrice di incidenza di G, dove n=|V| ed m=|E|, e tale che:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \text{ è testa o coda di } e_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



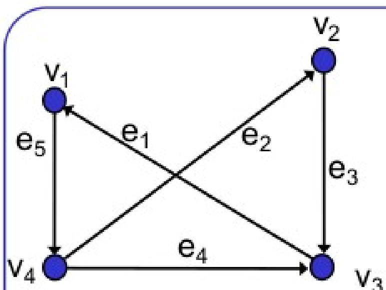
$$A_G = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}$$

matrice di incidenza di un grafo non orientato

Matrice di Incidenza dei Grafi Orientati

Dato G=(V,E) grafo orientato, A G =[a_{ij}], con i=1,...,n e j=1,...,m è la matrice di incidenza di G, dove n=|V| ed m=|E| e tale che:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \text{ è coda di } e_j \text{ (arco uscente da } v_i\text{)} \\ -1 & \text{se } v_i \text{ è testa di } e_j \text{ (arco entrante in } v_i\text{)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$A_G = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}$$

matrice di incidenza di un grafo orientato

Problema del Flusso a Costo Minimo

Sia G=(V,E) un **grafo connesso e orientato** in cui:

- Ad ogni arco (i,j) è associato un costo c_{ij} che rappresenta il costo da pagare per ogni unità di flusso che transita sull'arco (i,j).
- Ad ogni vertice v∈V è associato un valore intero b_v dove:
  - $b_v > 0$ indica che il nodo v è un nodo di offerta
  - $b_v < 0$ indica che il nodo v è un nodo di domanda
  - $b_v = 0$ indica che il nodo v è un nodo di passaggio
- La somma di tutti i b_v deve essere uguale a zero (condizione di bilanciamento). Ciò che viene prodotto dalle sorgenti viene consumato dalle destinazioni.

Nel problema del flusso a costo minimo bisogna far giungere la merce prodotta (dai nodi di offerta) alle destinazioni (nodi di domanda) minimizzando i costi di trasporto.

24

Formulazione del modello matematico

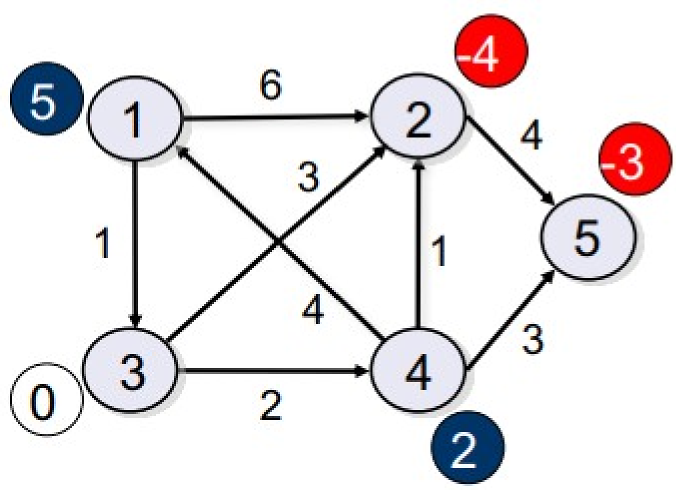
- **variabili decisionali:** x_{ij} = quantità di flusso sull' arco (i, j)
- **funzione obbiettivo**: $min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\, x_{ij}$
- **vincoli:** $\sum_{j\in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k\in BS(i)} x_{ki} = b_v$ (somma del flusso entrante – somma del flusso uscente = al valore del nodo b_v)
  $x_{ij} \geq 0 \quad i\in A$

Nota:
c_{ij} = costo di trasporto di un' unità di flusso sull' arco (i, j)
b_i = valore associato al nodo i :

- se $b_i > 0$: nodo offerta
- se $b_i < 0$: nodo domanda
- se $b_i = 0$: nodo di passaggio

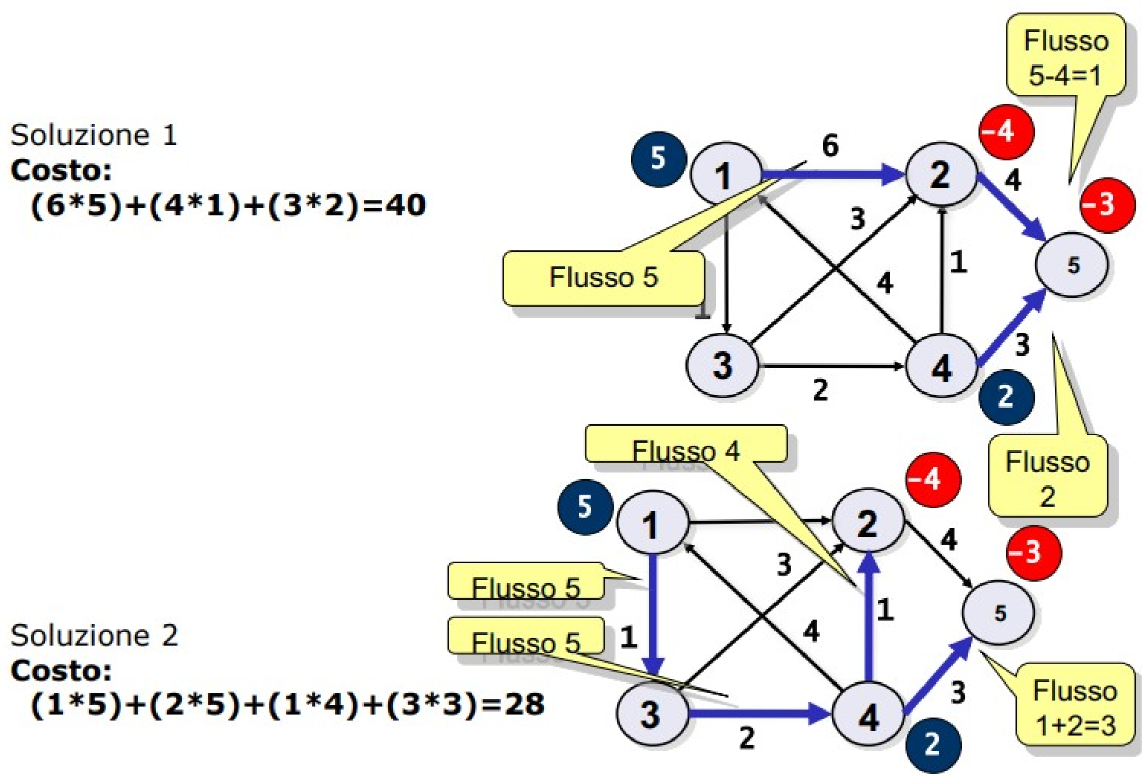
Problema del Flusso a Costo Minimo: Esempio

Consideriamo un grafo orientato G=(V,E) rappresentante una rete di trasporto.
L'obiettivo è quello di far viaggiare ("fluire"), al minimo costo, determinate quantità di merce (unità di flusso) dai nodi di offerta a quelli di domanda (eventualmente passando per dei nodi di passaggio).



Abbiamo:

- Una quantità b_i >0 per i nodi offerta, <0 per i nodi domanda, =0 per i nodi di passaggio (quantità di offerta/domanda)
- Un costo $c_{ij} \geq 0$ per ogni arco (costo per il trasporto di una unità di merce)



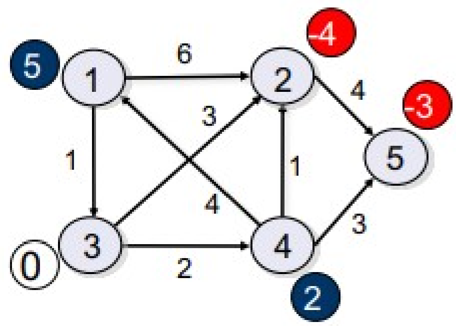
Modelliamo il problema

- Consideriamo una variabile $x_{ij} \geq 0$, $\forall(i,j) \in E$, rappresentante la quantità di flusso che attraverserà tale arco nella soluzione.

$$\min 6x_{12} + x_{13} + 4x_{25} + 3x_{32} + 2x_{34} + 4x_{41} + x_{42} + 3x_{45}$$

soggetto ai vincoli

$$\begin{aligned} x_{12}+x_{13}-x_{41} &= 5 \\ x_{25}-x_{12}-x_{32}-x_{42} &= -4 \\ x_{32}+x_{34}-x_{13} &= 0 \\ x_{41}+x_{42}+x_{45}-x_{34} &= 2 \\ -x_{25}-x_{45} &= -3 \end{aligned}$$

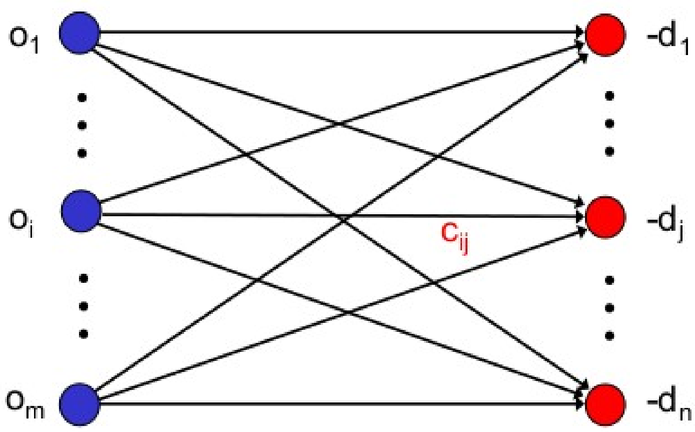


Rappresentiamo il grafo mediante una matrice di incidenza nodo-arco A; per ogni nodo v ed arco e, la corrispondente entrata a_{ve} varrà:

- 1 se e esce da v (v è la coda di e)
- -1 se e entra in v (v è la testa di e)
- 0 altrimenti

A	(1,2)	(1,3)	(2,5)	(3,2)	(3,4)	(4,1)	(4,2)	(4,5)
1	1	1	0	0	0	-1	0	0
2	-1	0	1	-1	0	0	-1	0
3	0	-1	0	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	-1	1	1	1
5	0	0	-1	0	0	0	0	-1

Il Problema del Trasporto
m fornitori producono $o_1, \dots, o_m$ quantità di un certo prodotto, n clienti richiedono $d_1, \dots, d_n$ quantità di prodotto, il prodotto può essere trasportato da ogni fornitore ad ogni cliente. Il grafo sottostante è un grafo bipartito dove i nodi origine (fornitori) hanno solo archi uscenti ed i nodi destinazione (clienti) hanno solo archi entranti. Ad ogni arco (i,j) è associato un costo c_{ij} positivo.
Il suo obiettivo è determinare la quantità di merce da trasportare su ogni arco (i,j) (fornitore-cliente) affinché ogni fornitore i invii la merce o_i prodotta, ogni cliente j riceva la quantità d_j richiesta ed il costo complessivo di trasporto sia minimizzato.



Formulazione del modello matematico
variabili decisionali: x_{ij} = quantità di flusso sull' arco (i, j)
funzione obbiettivo: $min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$

vincoli: $\sum_{j\in FS(i)} x_{ij} - 0 = o_i$ i = 1,...m

$0 - \sum_{i\in BS(i)} x_{ij} = -d_j$ j = 1,...n

$x_{ij} \geq 0 \quad x_{ij} \in A$

Ipotesi di ammissibilità (condizioni di bilanciamento)
Affinché il problema possa ammettere una soluzione deve essere verificata la seguente condizione sui dati: $\sum_{i=1}^{m} o_i - \sum_{j=1}^{n} d_j = 0$ ossia, la quantità totale di prodotto disponibile deve essere uguale alla richiesta totale del prodotto stesso. Nel caso in cui abbiamo più o_i (offerta) di d_j (domanda) possiamo aggiungere un nodo fittizio per bilanciare tutto, connettendo questo nuovo nodo di d_j con tutti i nodi di offerta, inserendo come costo per raggiungerlo 0 e la quantità da ricevere sarà quella rimanente inizialmente, esempio se abbiamo 100 scorte di un prodotto e abbiamo una domanda di 80, aggiungeremo un nuoco nodo con domanda 20 e costo per raggiungerlo 0 questo farà si che la nostra soluzione sia corretta perché l'algoritmo dirotterà le risorse che non vendiamo li.

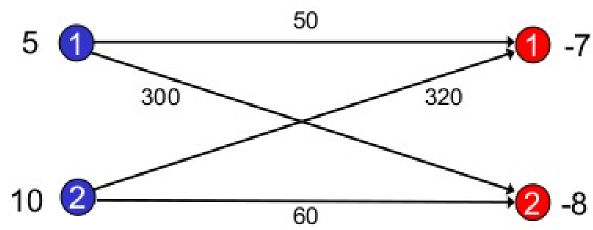
Nota: abbiamo m + n vincoli, quindi avremo un rango pari a m + n - 1, e quindi abbiamo m + n – 1 variabili in base.

Esistenza di una soluzione ammissibile
Dim:
Sia $x_{ij} = \frac{o_i d_j}{\Delta} \quad i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,n$ e $\Delta = \sum_{i=1}^{m} o_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$, Vogliamo dimostrare che la precedente soluzione è ammissibile per il problema del trasporto. Per farlo bisogna dimostrare che i vincoli del sistema siano soddisfatti:

Per l'offerta: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{o_i d_j}{\Delta} = \frac{o_i}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} d_j = \frac{o_i}{\Delta} \Delta = o_i$

Per la domanda: $-\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{o_i d_j}{\Delta} = -\frac{d_j}{\Delta} \sum_{i=1}^{m} o_i = -\frac{d_j}{\Delta} \Delta = -d_j$

Problema del Trasporto: Esempio

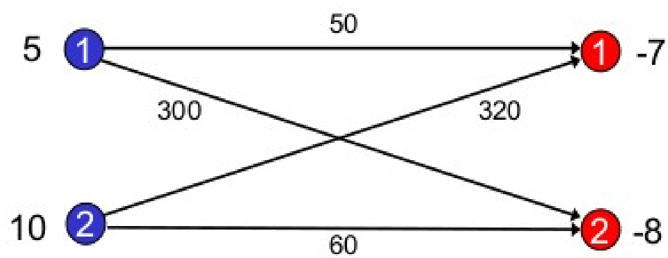


Soluzione ottima: $x_{11}=5$, $x_{12}=0$, $x_{21}=2$, $x_{22}=8$ con $z^*=1370$

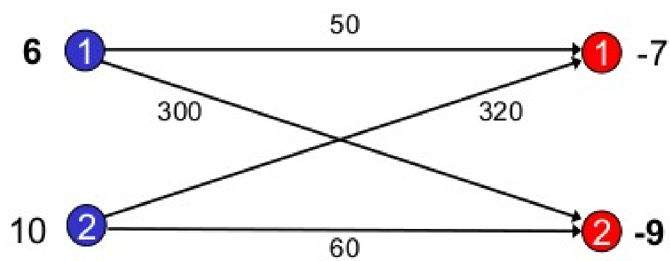
Data la soluzione ottima precedentemente calcolata, è possibile **migliorare** tale soluzione se si incrementano la domanda e l'offerta?

In alcuni casi è possibile!!!

Il Paradosso del Trasporto



Soluzione ottima: $x_{11}=5$, $x_{12}=0$, $x_{21}=2$, $x_{22}=8$ con $z^*=1370$



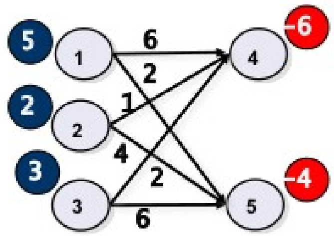
Soluzione ottima: $x_{11}=6$, $x_{12}=0$, $x_{21}=1$, $x_{22}=9$ con $z^*=1160$

Esempio di esercizio:

Il problema del trasporto

Sottocaso particolare del flusso a costo minimo

- Non esistono nodi di passaggio.
- E' possibile andare da **ogni nodo offerta** (insieme **O**) a **ogni nodo richiesta** (insieme **D**).
- Il grafo sottostante è un **grafo bipartito.**

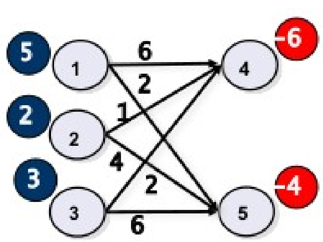


$$\min 6x_{14} + 2x_{15} + x_{24} + 4x_{25} + 2x_{34} + 6x_{35}$$

soggetto ai vincoli

$$\begin{aligned} x_{14} + x_{15} &= 5 \\ x_{24} + x_{25} &= 2 \\ x_{34} + x_{35} &= 3 \\ -x_{14} - x_{24} - x_{34} &= -6 \\ -x_{15} - x_{25} - x_{35} &= -4 \qquad x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

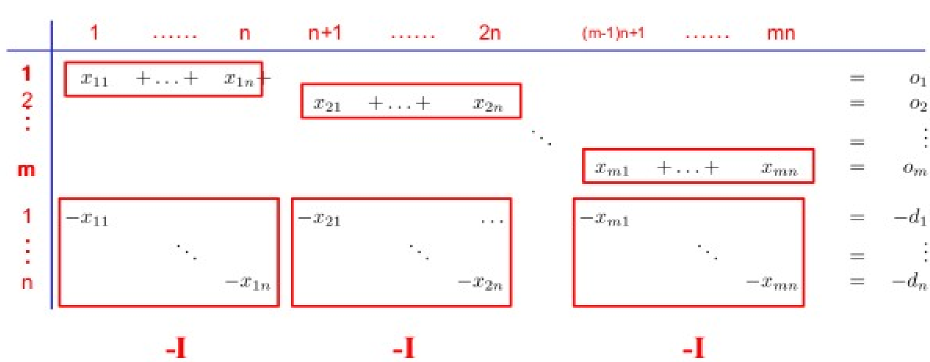
Consideriamo la matrice di incidenza nodo-arco A per il problema del trasporto:



A	(1,4)	(1,5)	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(3,5)
1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	0	1	1
4	-1	0	-1	0	-1	0
5	0	-1	0	-1	0	-1

-I -I -I

Struttura della matrice dei vincoli



Rango della matrice dei vincoli
Eliminando l’ultima riga della matrice e selezionando le seguenti m+n-1 colonne: n, 2n, 3n,...,mn,1,2,3,...,n-1 (nell’ordine indicato) otteniamo la seguente sottomatrice quadrata (triangolare superiore):

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & n & 2n & 3n & \dots\dots & mn & 1 & 2 & \dots\dots & n-1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
m & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1
\end{array}
$$

Se A è una matrice diagonale o triangolare superiore o triangolare inferiore allora il determinante di A è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale. Quindi la sotto-matrice costruita è invertibile ed il rango di A è pari ad m+n-1.

Problema del trasporto: Risoluzione
Possiamo rappresentare il problema tramite due tabelle, una relativa alle variabili l’altra relativa ai costi:

variabili costi

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 2 & \dots & \dots & n & \\
\hline
1 & x_{11} & x_{12} & \dots & \dots & x_{1n} & O_1 \\
2 & x_{21} & x_{22} & \dots & \dots & x_{2n} & O_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
m & x_{m1} & x_{m2} & \dots & \dots & x_{mn} & O_m \\
\hline
 & d_1 & d_2 & \dots & \dots & d_n &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & \dots & \dots & n \\
\hline
1 & c_{11} & c_{12} & \dots & \dots & c_{1n} \\
2 & c_{21} & c_{22} & \dots & \dots & c_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
m & c_{m1} & c_{m2} & \dots & \dots & c_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

Utilizziamo queste due tabelle per risolvere il problema.
Per risolvere il problema dobbiamo:

1. Trovare una soluzione ammissibile iniziale: ***METODO DELL’ANGOLO DI NORD-OVEST.***
2. Migliorare la soluzione ammissibile trovata fino a soddisfare le condizioni di ottimalità: ***REGOLA DEL CICLO.***

Metodo dell'Angolo di Nord-Ovest

Passo 0: Poni x_{ij} =0 per ogni i e per ogni j.

Passo 1: i=1, j=1.

Passo 2: x_{ij} =minimo { o_i , d_j }. Se il minimo è uguale a o_i allora vai al passo 3, Se il minimo è uguale a d_j allora vai al passo 4.

Passo 3: Poni i=i+1; d_j =d_j - o_i e vai al passo 2.

Passo 4: Poni j=j+1; o_i = o_i - d_j e vai al passo 2.

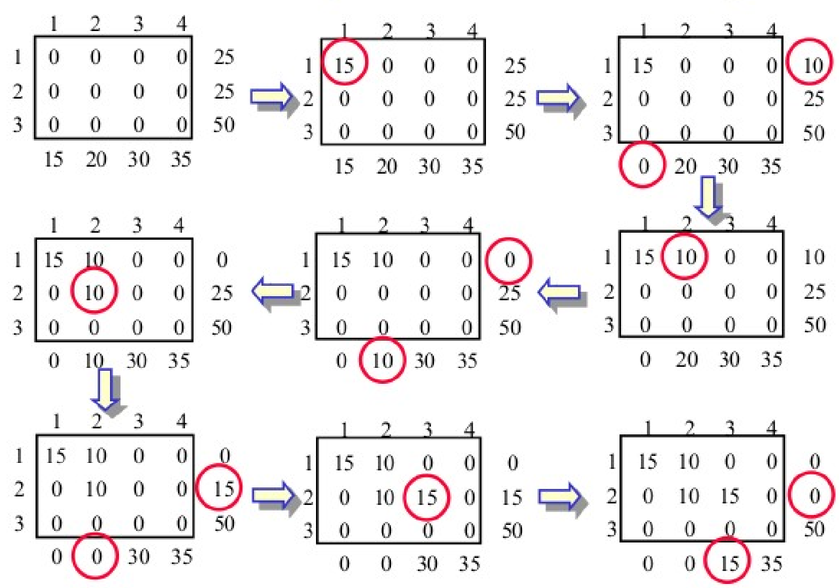
Esempio:

Consideriamo la seguente tabella dei costi:

	1	2	3	4	
1	10	5	6	7	25
2	8	2	7	6	25
3	9	3	4	8	50
	15	20	30	35	

NOTA:
m=3, n=4 quindi il rango della matrice A è r(A)=3+4-1=6.
Quindi dobbiamo selezionare 6 variabili per ottenere una soluzione di base.

Le iterazioni dell'algoritmo danno luogo alle seguenti tabelle di variabili:



	1	2	3	4	
1	15	10	0	0	25
2	0	10	15	0	25
3	0	0	15	35	50
	15	20	30	35	

Le variabili di base della soluzione ammissibile iniziale sono: x_{11} , x_{12} , x_{22} , x_{23} , x_{33} , x_{34} (se in un momento ci si esaurisce una risorsa pensiamo a x_{12}, la prossima risorsa ad essa collegata (x_{22}) dovrà essere in base con valore 0 perché avremo una base degenere). Ora dobbiamo verificare se questa soluzione è ottima, se non è ottima cerchiamo un'altra soluzione con la regola del ciclo.

Come capire se la base è ottima nel problema del trasporto

Per prima cosa facciamo il duale del problema del trasporto:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$(u_i) \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = o_i \qquad i=1,\dots,m; \qquad (1)$$

$$(v_j) \quad -\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = -d_j \qquad j=1,\dots,n; \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i=1,\dots,m; \quad j=1,\dots,n \qquad (3)$$

$$x_{ij} \in R \quad i=1,\dots,m; \quad j=1,\dots,n$$

Il vettore w ha grandezza m +n, e possiamo mostrarlo nel seguente modo: w = [u_1, u_2, …, u_m | v_1, v_2, …, v_n]

$$\Downarrow$$

$$\max \sum_{i=1}^{m} o_i u_i - \sum_{j=1}^{n} d_j v_j$$

$$u_i - v_j \leq c_{ij} \qquad i=1,\dots,m; \; j=1,\dots,n;$$

Condizioni di Ottimalità

Dobbiamo verificare i valori z_{ij} - c_{ij} per ogni x_{ij} non in base. Il calcolo di queste differenze si riduce al calcolo delle differenze dei valori delle variabili duali associate ai vincoli:

$$z_{ij}-c_{ij}\leq 0\ \forall (i,j)\in N \rightarrow c_B^T A_B^{-1}\underline{a_{ij}}-c_{ij}\leq 0 \rightarrow \underline{w}\, a_{ij}-c_{ij}\leq 0 \rightarrow u_i-v_j-c_{ij}\leq 0$$

dove abbiamo che:

- u_i è la variabile duale associata all'i-simo vincolo di offerta
- v_j è la variabile duale associata all' j-simo vincolo di domanda.

Consideriamo la matrice dei costi iniziali e la matrice delle variabili corrispondente alla soluzione di base trovata:

costo dell'arco

	1	2	3	4	
1	10	5	6	7	25
2	8	2	7	6	25
3	9	3	4	8	50
	15	20	30	35	

flusso che passa da un nodo ad un altro

	1	2	3	4	
1	15	10	0	0	25
2	0	10	15	0	25
3	0	0	15	35	50
	15	20	30	35	

Le variabili duali sono 7 (4 associate ai vincoli di destinazione: v_1 ,v_2 ,v_3 ,v_4 e 3 associate ai vincoli di origine: u_1 ,u_2 ,u_3).
Possiamo determinare questi valori sapendo che $z_{ij} - c_{ij} = 0$ per ogni variabile x_{ij} in base. Per cui otteniamo:

$$x_{11} \Rightarrow u_1 - v_1 = c_{11} = 10$$
$$x_{12} \Rightarrow u_1 - v_2 = c_{12} = 5$$
$$x_{22} \Rightarrow u_2 - v_2 = c_{22} = 2$$
$$x_{23} \Rightarrow u_2 - v_3 = c_{23} = 7$$
$$x_{33} \Rightarrow u_3 - v_3 = c_{33} = 4$$
$$x_{34} \Rightarrow u_3 - v_4 = c_{34} = 8$$

Questo è un sistema di 6 equazioni in 7 incognite, per cui fissando a zero il valore di una variabile otteniamo i valori delle altre.

Fissando u_1 =0 otteniamo: v_1 = -10 , v_2 = - 5 , v_3 = -10 , v_4 = -14 , u_2 = -3 , u_3 = -6, da cui otteniamo :

x_{13} = $$z_{13} - c_{13} = u_1 - v_3 - c_{13} = 10 - 6 = 4$$

x_{14} = $$z_{14} - c_{14} = u_1 - v_4 - c_{14} = 14 - 7 = 7$$

x_{21} = $$z_{21} - c_{21} = u_2 - v_1 - c_{21} = -3 + 10 - 8 = -1$$

x_{24} = $$z_{24} - c_{24} = u_2 - v_4 - c_{24} = -3 + 14 - 6 = 5$$

x_{31} = $$z_{31} - c_{31} = u_3 - v_1 - c_{31} = -6 + 10 - 9 = -5$$

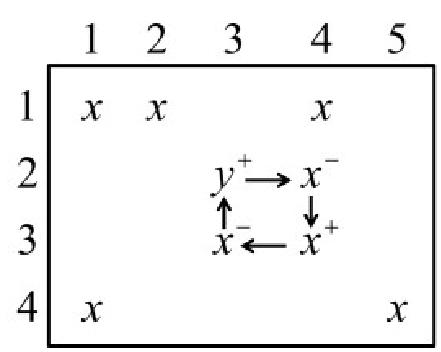
x_{32} = $$z_{32} - c_{32} = u_3 - v_2 - c_{32} = -6 + 5 - 3 = -4$$

La soluzione non è ottima, quindi dobbiamo scegliere una variabile non in base da introdurre in base. Facciamo entrare in base la variabile con coefficiente di costo massimo ossia x_{14} .

Variabile Uscente: Regola del Ciclo

Supponiamo di avere la seguente tabella in cui le x rapresentano le variabili di base e la y la nuova variabile entrante.

La variabile entrante forma un ciclo con le variabili x_{24}, x_{34}, x_{33}. Tra queste dobbiamo selezionarne una da far uscire dalla base. La scelta viene effettuata nel seguente modo:

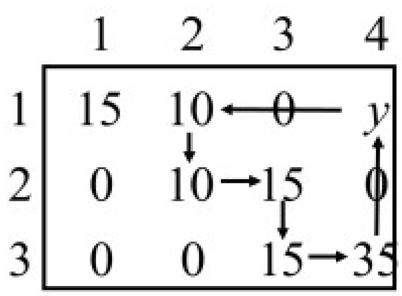


1. *Consideriamo le variabili in base che formano un ciclo con la variabile entrante;*
2. *I segni + e – sono assegnati in modo alternato negli angoli del ciclo partendo dalla variabile fuori base y a cui viene assegnato il + perchè deve essere incrementata di un nuovo valore $\Delta \geq 0$;*
3. *Le variabili di base che si trovano negli angoli del ciclo verranno incrementate di Δ, se hanno segno positivo, e decrementate di Δ, se hanno segno negative;*
4. *La variabile uscente sarà quella che si azzererà per prima.*

Nella matrice incrementiamo y, decrementiamo x_{24}, incrementiamo x_{34} e decrementiamo x_{41}. **Quanto vale Δ ?**

Δ = minimo{ x_{ij}: x_{ij} è coinvolta nel ciclo con segno meno }

Ritorniamo al nostro esempio. Scegliamo come variabile entrante x_{14}. Il ciclo introdotto da y è disegnato in figura e $\Delta = 10$.



esce la variabile x_{12}

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 15 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 20 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 25 & 25 \\ \hline \end{array}$$

Metodo del simplesso per il problema del trasporto

Passo 1: Trova una soluzione di base ammissibile con la regola dell’ angolo di Nord-Ovest

Passo 2: Calcola $z_{ij} - c_{ij}$ per ogni variabile non in base (con $z_{ij} - c_{ij} = u_i – v_j - c_{ij}$)

- Se $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ per ogni variabile non in base: STOP;
- Altrimenti seleziona la variabile entrante con il massimo $z_{ij} – c_{ij}$;

Passo 3: Determina la variabile uscente applicando la regola del ciclo;

Passo 4: Ricalcola la nuova soluzione di base ammissibile e torna al passo 2;

Esercizio (continuo dell'esempio precedente):

	1	2	3	4	
1	10	5	6	7	25
2	8	2	7	6	25
3	9	3	4	8	50
	15	20	30	35	

	1	2	3	4
1	15	0	0	10
2	0	20	5	0
3	0	0	25	25

Ricaviamo il sistema:

$x_{11}=u_1-v_1-10=0$ $\quad$ $v_1=-10$
$x_{14}=u_1-v_4-7=0$ $\quad$ $v_4=-7$
$x_{22}=u_2-v_2-2=0$ con $u_1 = 0$ otteniamo $v_2=2$
$x_{23}=u_2-v_3-7=0$ $\quad$ $u_2=4$
$x_{33}=u_3-v_3-4=0$ $\quad$ $v_3=-3$
$x_{34}=u_3-v_4-8=0$ $\quad$ $u_3=1$

verifichiamo ora se la base è ottima:

$x_{12}=u_1-v_2-5=-7<0$
$x_{13}=u_1-v_3-6=-3<0$
$x_{21}=u_2-v_1-8=6>0$ $\quad$ x_{21} entra nella base
$x_{24}=u_2-v_4-6=5>0$
$x_{31}=u_3-v_1-9=2>0$
$x_{32}=u_3-v_2-3=-4>0$

Applichiamo la regola del ciclo

	1	2	3	4
1	15^-			10^+
2	y^+	~~20~~	5^-	
3			25^+	25^-

esce x_{32}

	1	2	3	4
1	10			15
2	5	20		
3			30	20

Verifichiamo se la base è ottima:

	1	2	3	4	
1	10	5	6	7	25
2	8	2	7	6	25
3	9	3	4	8	50
	15	20	30	35	

	1	2	3	4
1	10			15
2	5	20		
3			30	20

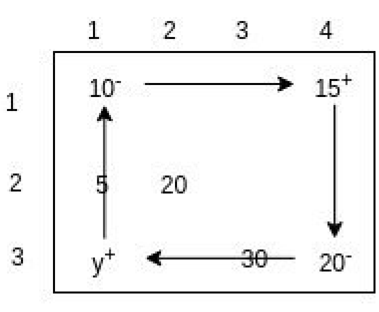
Ricaviamo il sistema:

$$
\begin{array}{lcl}
x_{11}=u_1-v_1-10=0 & & v_1=-10 \\
x_{14}=u_1-v_4-7=0 & & v_4=-7 \\
x_{21}=u_2-v_1-8=0 & \text{con } u_1 = 0 \text{ otteniamo} & u_2=-2 \\
x_{22}=u_2-v_2-2=0 & & v_2=-4 \\
x_{33}=u_3-v_3-4=0 & & v_3=-3 \\
x_{34}=u_3-v_4-8=0 & & u_3=1
\end{array}
$$

controlliamo che gli $z_{ij} - c_{ij} < 0$

$$
\begin{array}{ll}
x_{12}=u_1-v_2-5=-1<0 & \\
x_{13}=u_1-v_3-6=-3<0 & \\
x_{23}=u_2-v_3-7=-6<0 & \text{entra } x_{31} \text{ in base} \\
x_{24}=u_2-v_4-6=-1<0 & \\
x_{31}=u_3-v_1-9=2>0 & \\
x_{32}=u_3-v_2-3=2>0 &
\end{array}
$$

Applichiamo la regola del ciclo



x_{11} esce dalla base

	1	2	3	4
1				25
2	5	20		
3	10		30	10

Verifichiamo se la base è ottima:

	1	2	3	4	
1	10	5	6	7	25
2	8	2	7	6	25
3	9	3	4	8	50
	15	20	30	35	

	1	2	3	4
1				25
2	5	20		
3	10		30	10

Ricaviamo il sistema:

$$x_{14}=u_1-v_4-7=0 \qquad v_4=-7$$
$$x_{21}=u_2-v_1-8=0 \qquad u_2=-4$$
$$x_{22}=u_2-v_2-2=0 \quad \text{con } u_1 = 0 \text{ otteniamo} \quad v_2=-6$$
$$x_{31}=u_3-v_1-9=0 \qquad v_1=-12$$
$$x_{33}=u_3-v_3-4=0 \qquad v_3=-3$$
$$x_{34}=u_3-v_4-8=0 \qquad u_3=1$$

controlliamo che gli $z_{ij} - c_{ij} < 0$

$$x_{11}=u_1-v_1-10=2>0$$
$$x_{12}=u_1-v_2-5=2>0$$
$$x_{13}=u_1-v_3-6=-2<0 \quad \text{entra } x_{32} \text{ in base}$$
$$x_{23}=u_2-v_3-7=-7<0$$
$$x_{24}=u_2-v_4-6=-3<0$$
$$x_{32}=u_3-v_2-3=4>0$$

Applichiamo la regola del ciclo

	1	2	3	4
1				25
2	$5^+ \rightarrow$	20^-		
3	10^-	$\leftarrow y^+$	30	10

esce dalla base x_{31}

	1	2	3	4
1				25
2	15	10		
3		10	30	10

Verifichiamo se la base è ottima:

	1	2	3	4	
1	10	5	6	7	25
2	8	2	7	6	25
3	9	3	4	8	50
	15	20	30	35	

	1	2	3	4
1				25
2	15	10		
3		10	30	10

Ricaviamo il sistema:

$x_{14}=u_1-v_4-7=0$

$x_{21}=u_2-v_1-8=0$

$x_{22}=u_2-v_2-2=0$

$x_{32}=u_3-v_2-3=0$

$x_{33}=u_3-v_3-4=0$

$x_{34}=u_3-v_4-8=0$

con $u_1 = 0$ otteniamo

$v_4=-7$

$v_1=-8$

$u_2=0$

$v_2=-2$

$v_3=-3$

$u_3=1$

controlliamo che gli $z_{ij} - c_{ij} < 0$

$x_{11}=u_1-v_1-10=-2<0$

$x_{12}=u_1-v_2-5=-3<0$

$x_{13}=u_1-v_3-6=-3<0$

$x_{23}=u_2-v_3-7=-4<0$

$x_{24}=u_2-v_4-6=1>0$

$x_{31}=u_3-v_1-9=0$

entra x_{24} in base

Applichiamo la regola del ciclo

	1	2	3	4
1				25
2	15	10^-		y^+
3		10^+	30	10^-

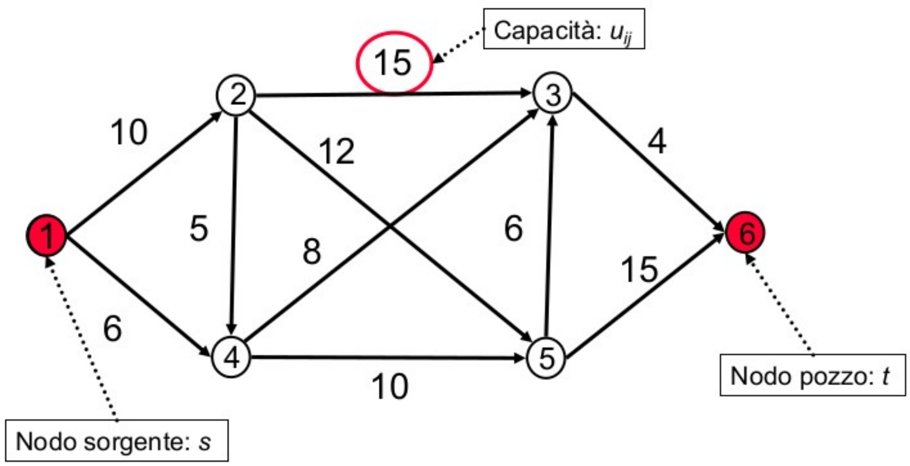
x_{22} esce dalla base

	1	2	3	4
1				25
2	15	0		10
3		20	30	

abbiamo una base degenere. Termino perché mi sono rotto il cazzo.

Il Problema del Massimo Flusso

Sia G = (V,A) un grafo orientato su cui sia definito un vettore $u = [u_{ij}]$ delle capacità associate agli archi del grafo; inoltre, siano s e t due nodi distinti, detti rispettivamente sorgente (o origine) e pozzo (o destinazione). Il problema del flusso massimo consiste nel determinare la massima quantità di flusso che è possibile inviare da *s* a *t* attraverso G.



Definizione: Nodo sorgente fornisce flusso f, nodo destinazione assorbe flusso -f, tutti gli altri nodi sono nodi di transito. Voglio spedire dalla sorgente la massima quantità di flusso f fino al pozzo senza violare i vincoli di capacità.

Formulazione

variabili di istanza: x_{ij} = # flusso sull'arco (i,j)

$$\max f$$

con vincoli:

Vincoli di bilanciamento del flusso

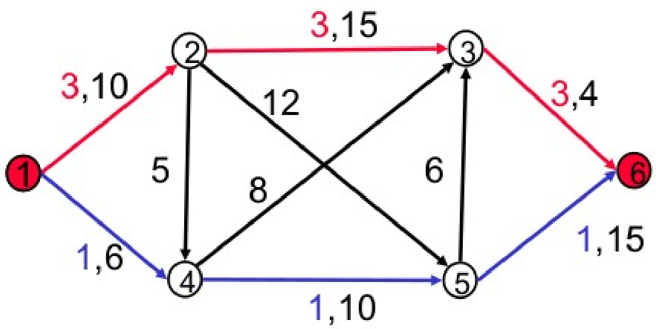
$$\sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k \in BS(i)} x_{ki} = \begin{cases} 0 & \forall i \in V \; i \neq s,t \\ f & se \;\; i = s \\ -f & se \;\; i = t \end{cases} \qquad (1)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall \, (i, j) \in A \qquad (2)$$

Vincoli di capacità

Domanda d'esame: Cosa succede se togliamo il vincolo $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ alla soluzione ottima?
La soluzione ottima diventa +∞.

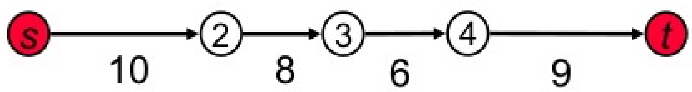
Esempio di massimo flusso



$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{14} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{25} \\ x_{36} \\ x_{43} \\ x_{45} \\ x_{53} \\ x_{56} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

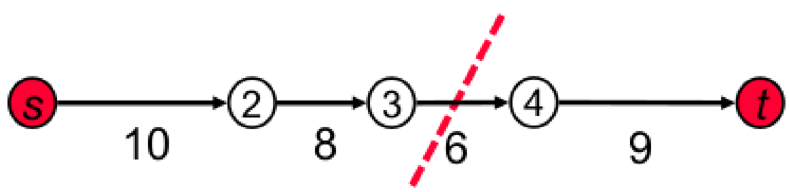
x rappresenta un **flusso ammissibile,** con valore *f*=4, per il grafo G.

Concetti fondamentali



Il flusso massimo su questo grafo è pari a 6 (corrispondente alla capacità minima degli archi del cammino).

Taglio di un grafo



Il segmento tratteggiato in figura mostra un **taglio s-t** del grafo, ossia un **partizionamento dei vertici** del grafo in due sottoinsiemi V_1={s,2,3} e V_2={4,t} tali che:

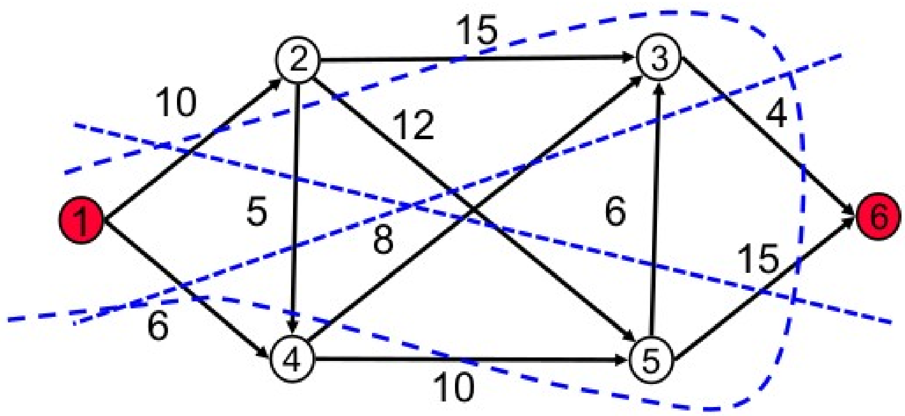
- Il nodo sorgente appartiene a V_1
- Il nodo pozzo appartiene a V_2
- $V_1 \cup V_2 = V$
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Definizione:

➢ **Archi diretti** del taglio [V_1,V_2]: {(i,j):i$\in V_1$ e j$\in V_2$}

➢ **Archi inversi** del taglio [V_1,V_2]: {(p,q):p$\in V_2$ e q$\in V_1$}

Taglio di un grafo e archi del taglio

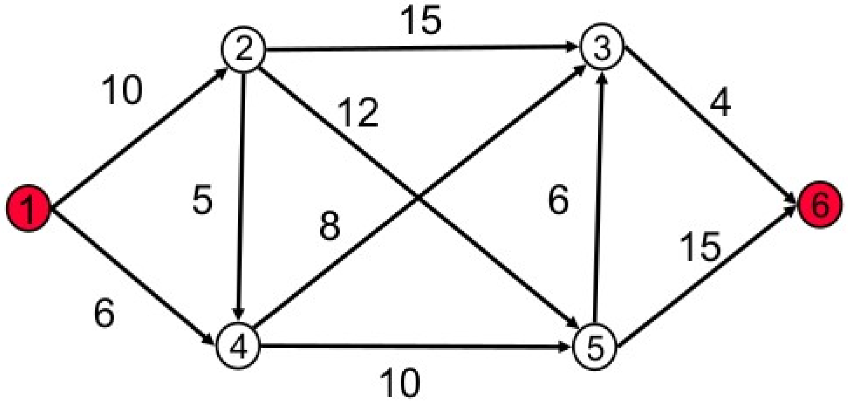


Taglio 1: V_1 ={1,2,3} V_2 = {4,5,6} → archi "diretti" del taglio = {(1,4) (2,4) (2,5) (3,6)}

Taglio 2: V_1 ={1,3,5} V_2 = {2,4,6} → archi "diretti" del taglio = {(1,2) (1,4) (3,6) (5,6)}

Taglio 3: V_1 ={1,4,5} V_2 = {2,3,6} → archi "diretti" del taglio = {(1,2) (4,3) (5,3) (5,6)}

Capacità di un taglio



Dato il taglio [V_1 ,V_2] la capacità del taglio u[V_1 ,V_2] è pari alla somma delle capacità degli archi diretti del taglio.

Taglio 1: V_1 ={1,2,3} V_2 = {4,5,6} → archi diretti del taglio ={(1,4) (2,4) (2,5) (3,6)}
Capacità $u[V_1,V_2]$ = 6 + 5 + 12 + 4 =27

Taglio 2: V_1 ={1,3,5} V_2 = {2,4,6} → archi diretti del taglio ={(1,2) (1,4) (3,6) (5,6)}
Capacità u $[V_1,V_2]$ = 10 + 6 + 4 + 15 = 35

Taglio 3: V_1 ={1,4,5} V_2 = {2,3,6} → archi diretti del taglio ={(1,2) (4,3) (5,3) (5,6)}
Capacità u $[V_1,V_2]$ = 10 + 8 + 6 + 15 = 39

Relazione tra il massimo flusso e la capacità di un taglio
Proprietà 1: Il valore di un qualunque flusso ammissibile è minore o uguale alla capacità di un qualunque taglio.

Dim:
Sia $\underline{x}$ un flusso ammissibile e $[V_1, V_2]$ un qualunque taglio del grafo. Sommando i vincoli di bilanciamento del flusso relativi ai nodi in V_1 otteniamo:

$$f = \sum_{i \in V_1} \left[\sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k \in BS(i)} x_{ki} \right]$$

Si ha che

$$f = \sum_{i \in V_1} \overbrace{\left(\sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k \in BS(i)} x_{ki} \right)}^{1} = \sum_{(i,j) \in [V_1, V_2]} x_{ij} - \sum_{(p,q) \in [V_2, V_1]} x_{pq}$$

che implica

$$f = \sum_{(i,j) \in [V_1, V_2]} x_{ij} - \sum_{(p,q) \in [V_2, V_1]} x_{pq} \le \sum_{(i,j) \in [V_1, V_2]} x_{ij} \le \sum_{(i,j) \in [V_1, V_2]} u_{ij} = u[V_1, V_2]$$

Infatti:

- Per ogni arco (i,j) con i e j in V_1, x_{ij} appare due volte in (1), una volta con coefficiente 1 ed una volta con coefficiente -1;
- Per ogni arco (i,j) con i in V_1 e j in V_2, x_{ij} appare in (1) con coefficiente 1;
- Per ogni arco (i,j) con i in V_2 e j in V_1, x_{ij} appare in (1) con coefficiente -1;
- Per ogni arco (i,j) con i e j in V_2, x_{ij} non appare in (1).

Relazione tra il massimo flusso e la capacità di un taglio
La capacità di un taglio fornisce un limite superiore al valore del flusso f che posso spedire dalla sorgente al pozzo. Se ho un flusso ammissibile di valore f e riesco a trovare un taglio la cui capacità è uguale ad f allora posso concludere che il flusso che ho trovato è massimo.

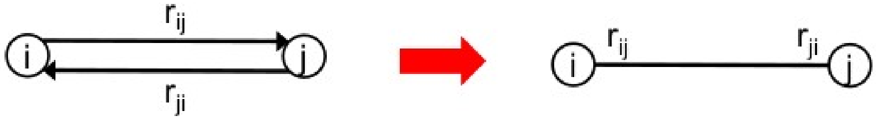
Teorema (Max Flow- Min Cut)
Il flusso massimo che può essere spedito dalla sorgente al pozzo su un grafo orientato G è uguale alla capacità del taglio minimo di G.

Grafo ausiliario e capacità residue

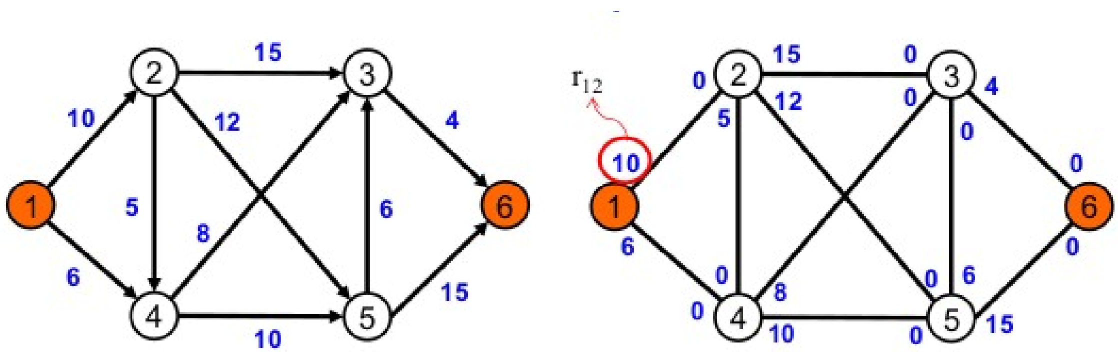
Dato un grafo G=(V,A) ed un flusso ammissibile $\underline{x}$ su G, il **grafo ausiliario** G($\underline{x}$)=(V',A') è così costruito:

- ✓ V'=V
- ✓ Per ogni arco (i,j) in A, A' contiene gli archi (i,j) e (j,i); la capacità u_{ij} di ogni arco $(i,j)\notin A$ è pari a 0.
- ✓ Ad ogni arco di A' è associata una **capacità residua:** $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij} + x_{ji}$.

Utilizzeremo la seguente notazione:

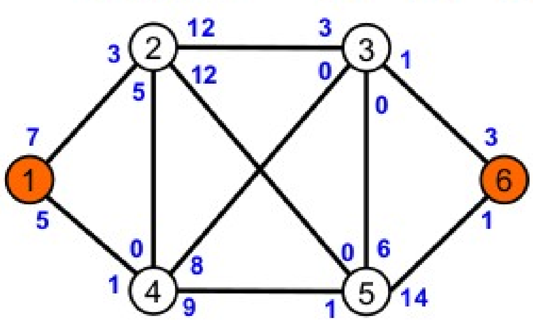


Esempio



Calcoliamo la rete residua prodotta dal seguente flusso ammissibile $\underline{x}$:

$$\underline{x}^T = [x_{12}\ x_{14}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{25}\ x_{36}\ x_{43}\ x_{45}\ x_{53}\ x_{56}] = [3\ 1\ 3\ 0\ 0\ 3\ 0\ 1\ 0\ 1]$$



r_{12}=10-3+0=7
r_{21}=0-0+3=3
r_{23}=15-3+0=12
r_{32}=0-0+3=3
…

Alcune note

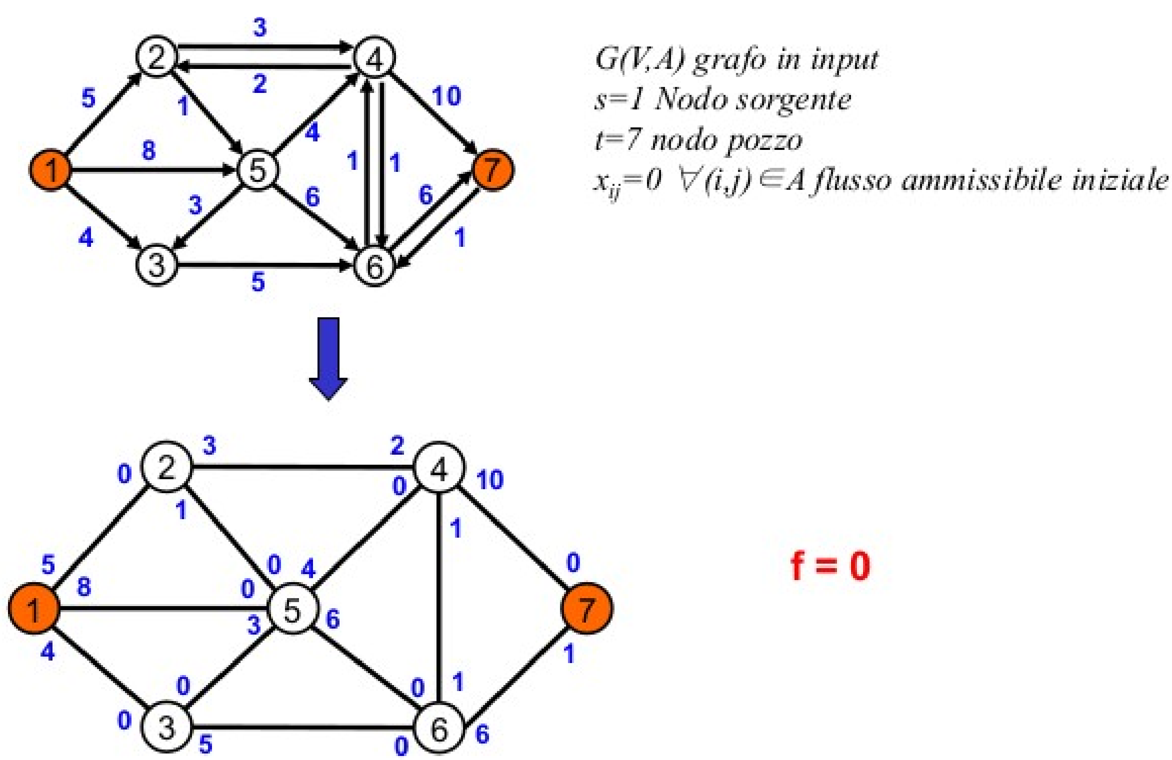
- Se un arco ha capacità residua maggiore di zero, significa che posso spedire ancora del flusso attraverso quell'arco.
- Se riesco ad individuare un cammino da s a t sul grafo ausiliario allora posso spedire del flusso addizionale dalla sorgente al pozzo.
- Un cammino da s a t sul grafo ausiliario viene definito cammino aumentante.
- Fino a quando nel grafo ausiliario sono presenti cammini aumentanti è sempre possibile incrementare il flusso da s a t.

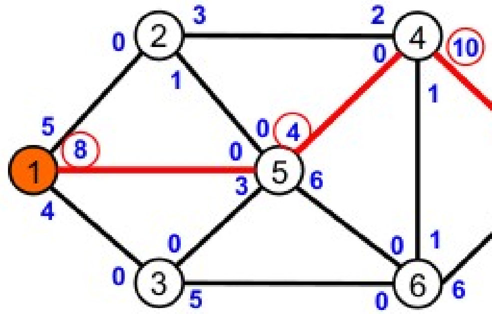
Algoritmo dei Cammini Aumentanti

L'algoritmo dei cammini aumentanti risolve il problema del flusso massimo utilizzando il grafo ausiliario (o delle capacità residue) per stabilire come instradare il flusso sulla rete.
Consideriamo un grafo G=(V,A) ed un flusso ammissibile x (inizialmente il metodo considera il flusso nullo ossia $x_{ij} = 0\ \forall (i,j) \in A$.
I passi principali dell'algoritmo dei cammini aumentanti sono:

1. Individuare nel grafo ausiliario un qualsiasi cammino p dal nodo sorgente al nodo pozzo su cui è possibile far transitare una quantità di flusso $\Delta>0$ (cammino aumentante). Se non esiste tale cammino, l'algoritmo si arresta.
2. Il valore del flusso da inviare lungo il cammino p è pari alla capacità residua minima degli archi in p (i.e. $\Delta=\min\{r_{ij} :(i,j) \in p)\}$)
3. Incrementare di Δ il valore del flusso f corrente, quindi $f=f+\Delta$, e aggiornare le capacità residue degli archi lungo il cammino p nel seguente modo: $r_{ij} = r_{ij} - \Delta$ e $r_{ji} = r_{ji} + \Delta$.

Esempio dell'applicazione dell'algoritmo

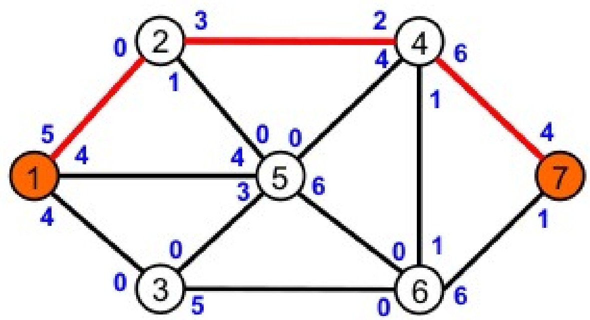




Un path aumentante è un path da s a t sul grafo ausiliario.
Viene chiamato ''aumentante'' perché permette di aumentare il flusso sul grafo da s a t utilizzando gli archi del path.
Il flusso che posso spedire è uguale alla minima capacità residua degli archi del path.

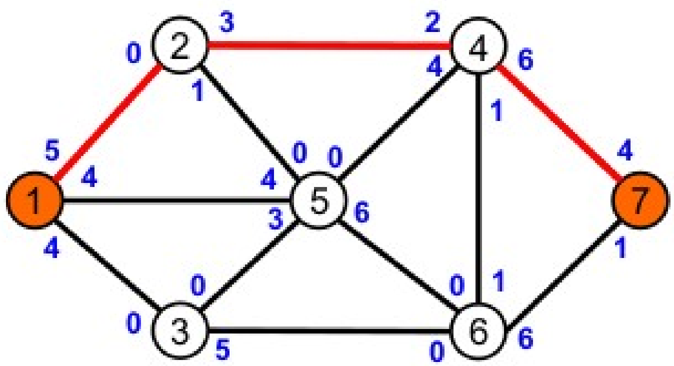
P = 1-5-4-7

Δ=4 f = 4



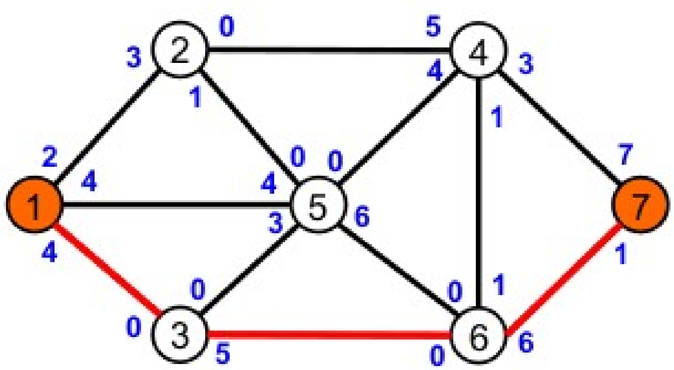
P = 1-2-4-7

Δ=3 f = f+Δ = 7



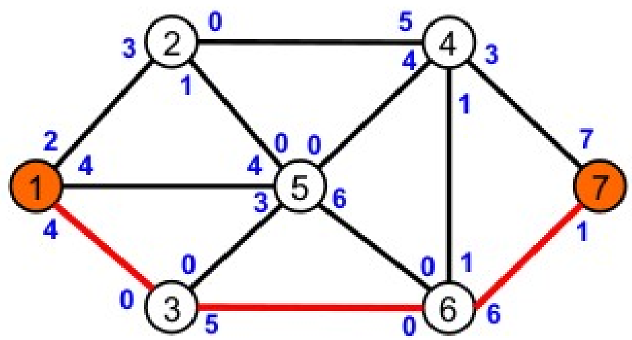
P = 1-2-4-7

Δ=3 f = f+Δ = 7



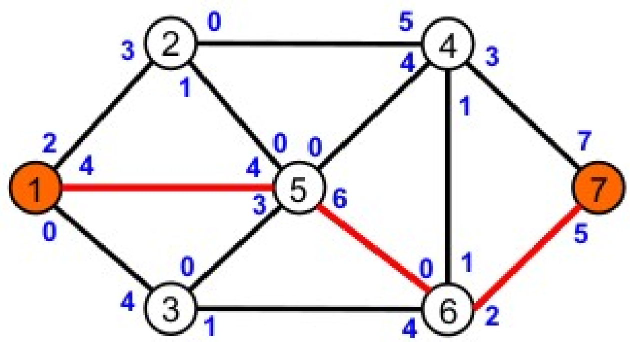
P = 1-3-6-7

Δ=4 f = f+Δ = 11



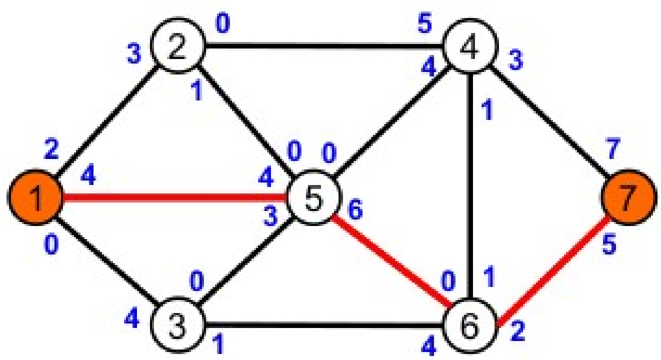
P = 1-3-6-7

Δ=4 **f = f+Δ = 11**



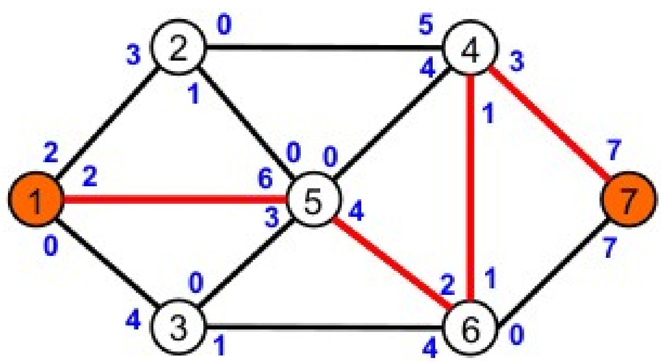
P = 1-5-6-7

Δ=2 **f = f+Δ = 13**



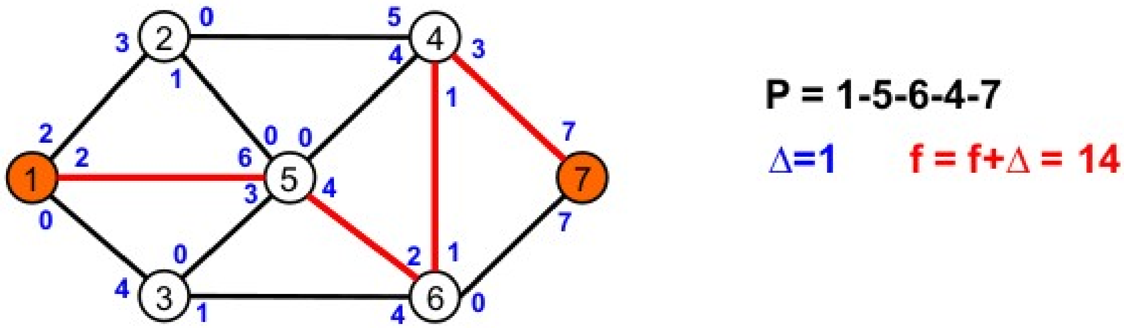
P = 1-5-6-7

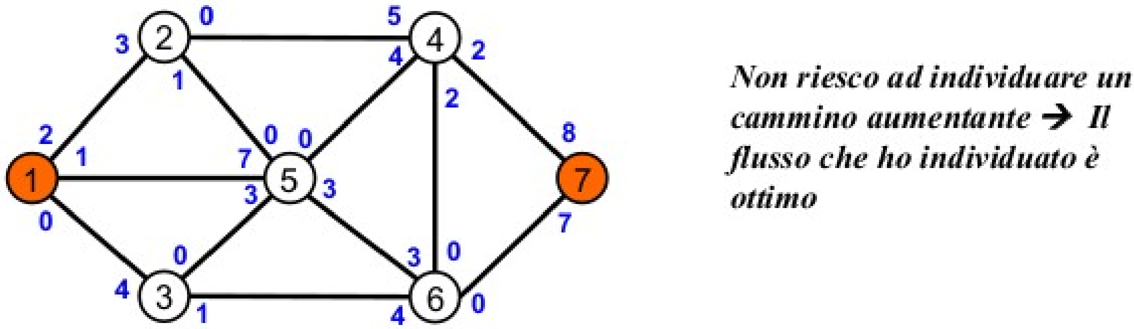
Δ=2 **f = f+Δ = 13**

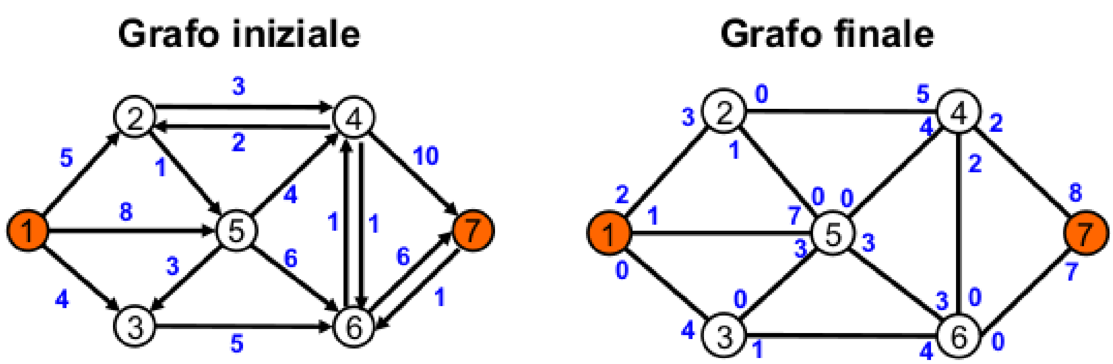


P = 1-5-6-4-7

Δ=1 **f = f+Δ = 14**







Il valore delle variabili decisionali, per ogni arco del grafo di partenza, è pari alla differenza tra la capacità originale dell'arco meno quella residua nell'ultimo grafo ausiliario (se tale valore è negativo la variabile decisionale varrà zero). Formalmente: $x_{ij} = \max\{0 , u_{ij} - r_{ij} \}$ (massimo tra 0 e capacità originale – capacità residua).

Ad esempio per l'arco (1,2) abbiamo una capacità iniziale pari a 5 e una finale pari a 2 quindi $x_{12} = 3$.

Analogamente abbiamo:

$x_{15} = 8-1=7$, $x_{13} = 4-0=4$,

$x_{25} = 1-1=0$, $x_{24} = 3-0=3$ ecc.

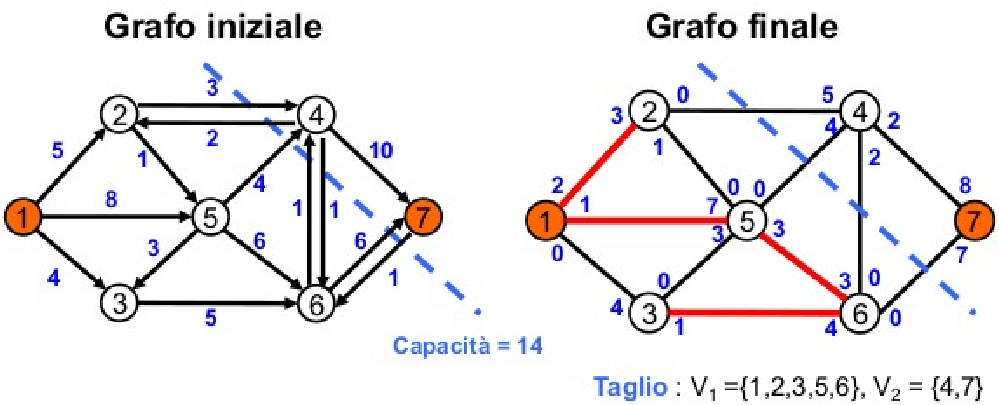
Dettagli per la correttezza e l’implementazione
Si noti che nello schema generale del metodo dei cammini aumentanti ci sono dei dettagli che devono essere meglio chiariti:
Come si individua un cammino aumentante o come si mostra che non esiste un cammino aumentante? Come certificare che il flusso ottenuto è quello massimo? La risposta a queste domande può essere ottenuta considerando una particolare implementazione dell’algoritmo del cammino aumentante che da luogo al Labeling Algorithm di Ford and Fulkerson.

Labeling Algorithm di Ford and Fulkerson
Idea Principale:
Tramite opportuni algoritmi di visita è possibile etichettare tutti i nodi che possono essere raggiunti dalla sorgente nel grafo ausiliario tramite archi con capacità residua positiva; Se il pozzo viene etichettato durante la precedente visita, allora esiste un cammino aumentante da s a t tramite il quale è possibile inviare ulteriori unità di flusso.; Se il pozzo non viene etichettato allora si costruisce un taglio nel seguente modo:

- in V_1 si inseriscono i nodi etichettati (ovvero raggiungibili da s)
- in V_2 si inseriscono i nodi non etichettati

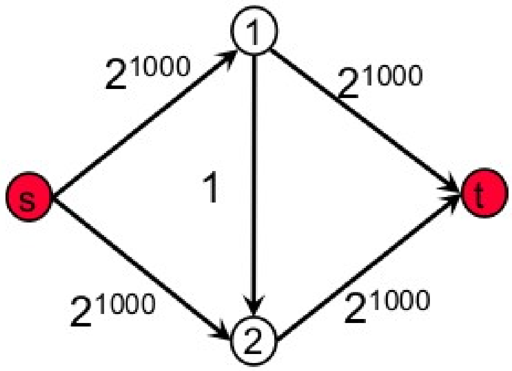
Poiché la capacità del taglio così costruito è pari al flusso f inviato fino a quel momento. Dal teorema MinCut/MaxFlow tale flusso f è massimo.

Individuazione del taglio minimo



Per poter individuare il taglio minimo, la cui capacità sarà uguale al flusso massimo f=14, è sufficiente controllare quali sono i nodi raggiungibili dalla sorgente 1 attraverso archi con capacità residua >0 nell’ultimo grafo ausiliario.

Complessità algoritmo del grafo ausiliare



Potremmo idealmente utilizzare in sequenza i cammini aumentanti s-1-2-t, s- 2-1-t, s-1-2-t, s-2-1-t …

Otteniamo come complessità O(m * n * u) è un algoritmo pseudo polinomiale.

Approcci alternativi

Per migliorare la complessità dell'algoritmo ci sono diversi approcci:

- cercare un cammino con il numero minimo di archi (shortest augmenting path algorithm).
- posso cercare un cammino con una capacità almeno pari ad una quantità D fissata di volta in volta (capacity scaling algorithm).
- algoritmi di preflow push.

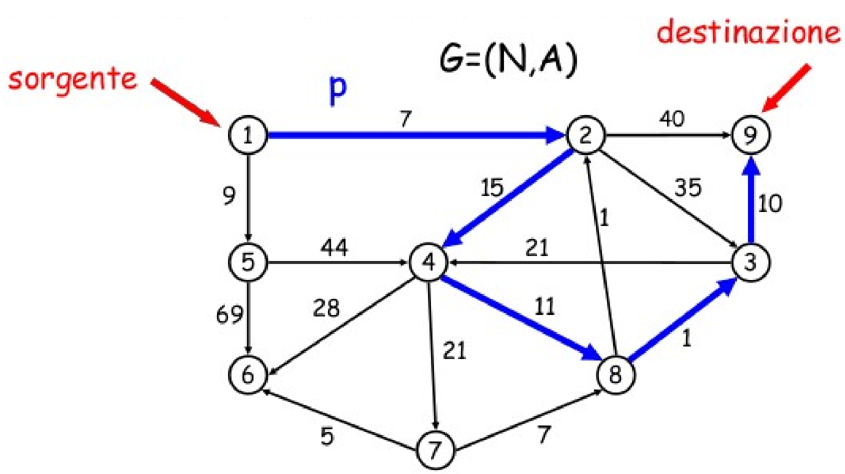
Il problema dei cammini minimi
[Versione uno a uno]

Sia G = (N,A) un grafo orientato su cui sia definito un vettore c = [c_{ij}] dei costi associati agli archi del grafo; inoltre, siano s e t due nodi distinti, detti rispettivamente origine e destinazione. Il problema dei cammini minimi 1 a 1 consiste nel determinare il percorso di costo minimo (più corto) da *s* a *t* in G.

Modello matematico (uno a uno)

Variabili decisionali: $x_{ij}=\begin{cases}1 \text{ se (i,j) è selezionato}\\ 0\, altrimenti\end{cases}$ **funzione obiettivo:** $min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\, x_{ij}$

Vincoli: $\sum_{j\in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k\in BS(i)} x_{ki} = \begin{cases}1 & \text{se i = S}\\ -1 & \text{se i = T}\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$



Esercizio scrivere il modello matematico del grafo sopra e la sua soluzione ottimale

F.O: $min\, 7x_{12}+9x_{15}+40x_{29}+35x_{23}+15x_{24}+10x_{39}+21x_{34}+28x_{46}+21x_{47}+11x_{48}+44x_{54}+69x_{56}+$
$+5x_{76}+7x_{78}+x_{82}+x_{83}$

Vincoli:

$$\begin{aligned}
&x_{12}+x_{15}-0=1 \text{(Vincolo sulla sorgente)}\\
&x_{23}+x_{24}+x_{29}-x_{12}-x_{82}=0\\
&x_{39}+x_{34}-x_{23}-x_{83}=0\\
&x_{46}+x_{47}+x_{48}-x_{24}-x_{34}-x_{54}=0\\
&x_{54}+x_{56}-x_{15}=0\\
&0-x_{46}-x_{56}-x_{76}=0\\
&x_{76}+x_{78}-x_{47}=0\\
&x_{82}+x_{83}-x_{48}-x_{78}=0\\
&0-x_{29}-x_{39}=-1 \text{(Vincolo sulla destinazione)}
\end{aligned}$$

soluzione ottima: $x_{12}=1, x_{24}=1,$
$x_{48}=1, x_{83}=1, x_{39}=1$
$z=44$

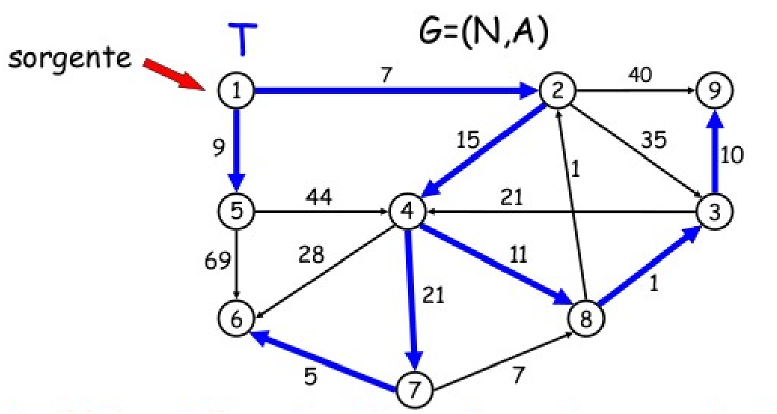
Il problema dei cammini minimi (varianti)

- **Uno ad uno:** un nodo sorgente e un nodo destinazione.
- **Uno a tutti:** un nodo sergente e tutti gli altri nodi destinazione.
- **Tutti a tutti:** tutti i nodi sono sia sorgente che destinazione (si applicano n uno a tutti).

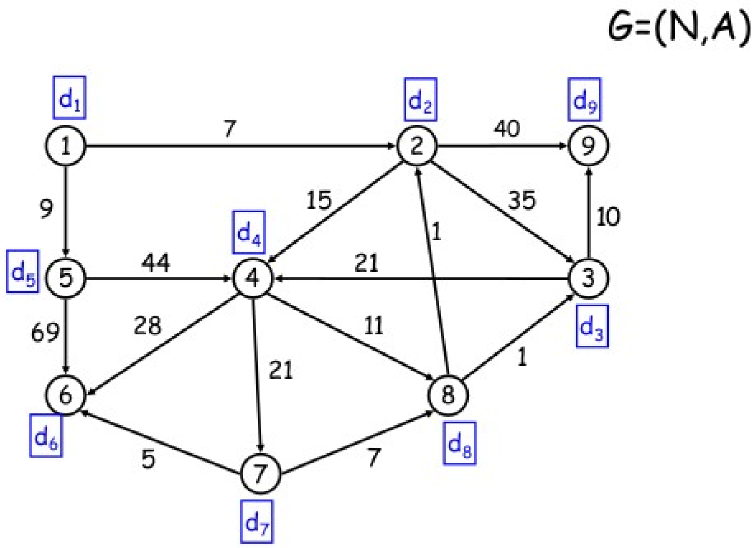
Il problema dei cammini minimi (uno a tutti)
[Versione uno a tutti]
Sia G = (N,A) un grafo orientato su cui sia definito un vettore c = [c_{ij}] dei costi associati agli archi del grafo; inoltre, siano s il nodo origine. Il problema dei cammini minimi 1 a tutti consiste nel determinare l'albero dei cammini minimi da s a tutti gli altri nodi di G.

Modello matematico (uno a tutti)
Variabili decisionali: $x_{ij}=\#\, del\, flusso\, su\,(i,j)$ **funzione obiettivo:** $min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$

Vincoli: $\sum_{j\in FS(i)} x_{ij}-\sum_{k\in BS(i)} x_{ki}=\begin{Bmatrix} n-1 & \text{se i = S} \\ -1 & \text{se i} \neq S \end{Bmatrix}$ $\quad con \quad x_{ij}\in Z^{+}\cup 0$



Etichette dei nodi



Si aggiungono delle etichette ai nodi che sarà il costo finale per raggiungerli.

Aggioramento delle etichette

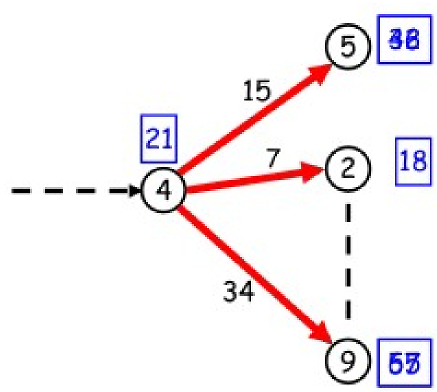
$\forall y \in FS(x)$ se $d_x + c_{xy} < d_y$ allora $d_y = d_x + c_{xy}$ e $P_y = x$

- $x=4,\ y=5$
  $d_4 + c_{45} < d_5$?
  $d_5 = d_4 + c_{45}$ e $P_5 = 4$

- $x=4,\ y=2$
  $d_4 + c_{42} < d_2$?

……………………

- $x=4,\ y=9$
  $d_4 + c_{49} < d_9$?
  $d_9 = d_4 + c_{49}$ e $P_9 = 4$



Algoritmo prototipo

Passo 1: *Inizializzazione.*

$d_s=0$, $P_s=NULL$, $d_k=\infty$, $P_k=s$ $\forall k \in N \setminus \{s\}$,
$Q=\{s\}$;

Passo 2: *Estrai un vertice x da Q ($Q= Q \setminus \{x\}$) ed aggiorna quando possibile le etichette dei vertici in FS(x):*

$\forall y \in FS(x)$ se $d_x + c_{xy} < d_y$ allora
$d_y = d_x + c_{xy}$, $P_y= x$ e se $y \notin Q$ inseriscilo in Q *($Q= Q \cup \{y\}$)* (test di ottimalità)

Passo 3: *Fino a quando $Q \neq \emptyset$ ripeti il passo 2 ;*

Differenti implementazioni
Gli algoritmi per l'SPT si distinguono per:

- La politica di estrazione del nodo da Q (label setting e label correcting)
- La struttura dati utilizzata per implementare Q

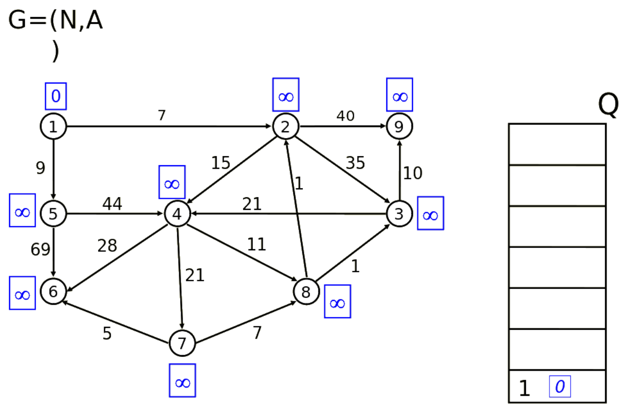
Label Correcting
Algoritmi label correcting [Bellman-Ford]:
I nodi vengono estratti dalla coda Q in ordine FIFO (è una delle possibili implementazioni dell'algoritmo). Le etichette dei nodi sono temporanee per tutta la durata della computazione. Solo al termine dell'algoritmo tali etichette rappresenteranno le distanze minime. L'algoritmo è in grado di risolvere il problema dei cammini minimi su un qualsiasi grafo che non presenta cicli di peso negativo.

Label Setting
Algoritmi label setting [Dijkstra]:
Ad ogni iterazione viene estratto dalla coda Q il nodo con x etichetta minima. L'etichetta del nodo x estratto rappresenta la distanza minima dall sorgente al nodo stesso. Tale etichetta viene fissata in modo permamente e non viene più aggiornata (quindi una volta estratto un nodo non può essere reinserito in Q). Gli algoritmi label setting sono più efficienti dei label correcting, ma possono essere applicati solo su grafi dove $c_{ij} \geq 0$.

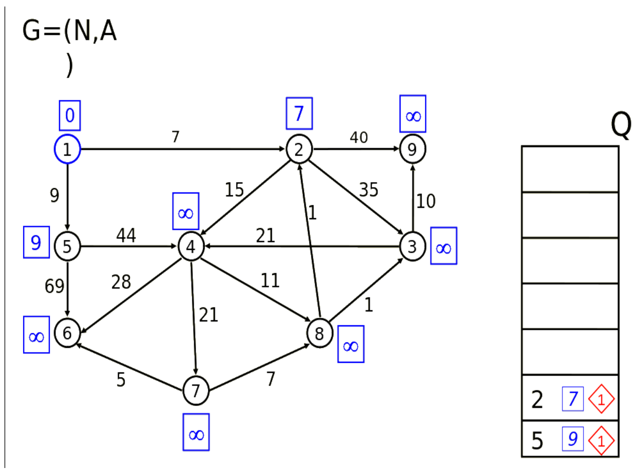
Algoritmo di Dijkstra (label setting):

```
Dijkstra (G,s)

  Inizializzazione; ( ds=0, Ps=NULL,  dk=∞, Pk=s ∀k∈N\{s} , Q={s})

  while ( Q ≠ ∅){
          x = Extract_min(Q);
          Test_ottimalità(x,y);     con y∈FS(x);

  }
```

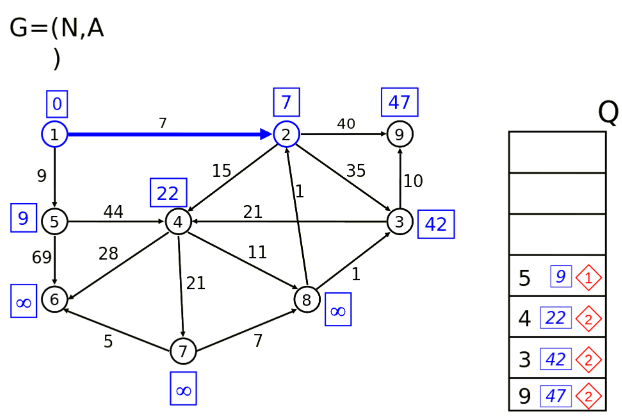
Esempio:



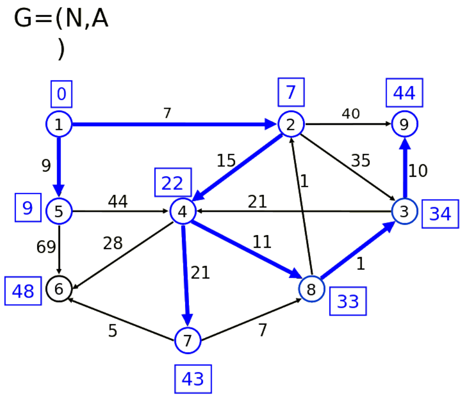
Inizialmente inizializziamo il noto sorgente con l’etichetta a 0 e gli altri nodi ad infinito.

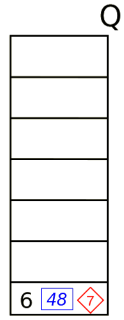


Partendo dal nodo sorgente sommiamo il costo dell’etichetta più il costo del flusso sull’arco. Questo si ripete per tutti gli archi uscenti dal nodo. In questo caso dal nodo 1 esce l’arco che porta al nodo 2 e al nodo 5, quindi procedendo in ordine sommiamo il costo dell’etichetta in questo caso 0 + 7 il costo del flusso. lo mettiamo nell’etichetta del nodo 2 e in una coda a priorità (cioè esce il nodo con il valore dell’etichetta più piccolo) inseriamo il nodo,il valore dell’etichetta e il padre. Ripetiamo l’operazione anche per il nodo 5. Ora dalla coda esce il nodo due quindi ripetiamo la stessa operazione ponendo 2 come nodo padre, tracciamo anche l’arco da 1 a 2 in quanto è quello di costo minimo

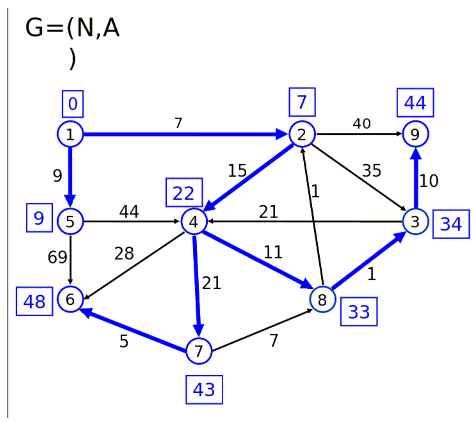


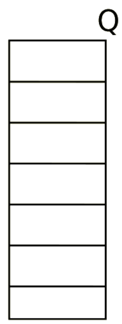
Ora partendo dal nodo 2 inseriamo in coda i nodi degli archi uscenti (nodo 9 ,4, 3) e ripetiamo le operazioni con nel punto 2





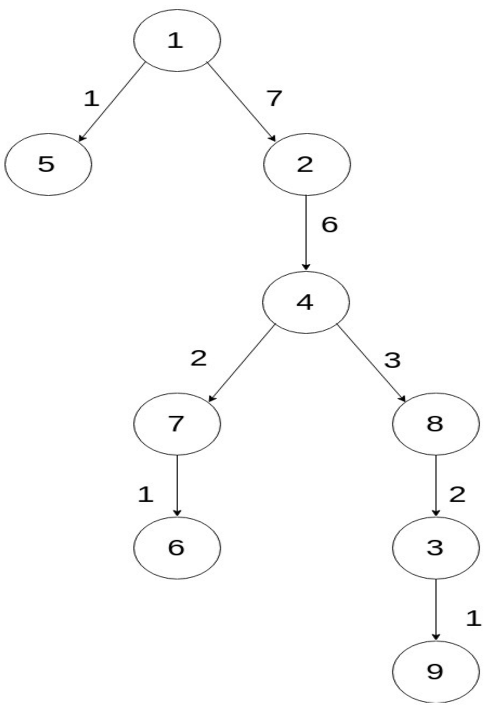
Come ultimo nodo da collegare resta il nodo 6 che ha padre il nodo 7 quindi di conseguenza il costo del flusso minimo è quello che va dal nodo 7 al nodo 6, quindi traccio l'arco e cancello il nodo 6 dalla coda





Ora siccome il nodo 6 non ha archi uscenti la cosa risulterà vuota e l'algoritmo si fermerà. E gli archi evidenziati risulteranno il minino albero di ricoprimento.

Calcolo del valore ottima



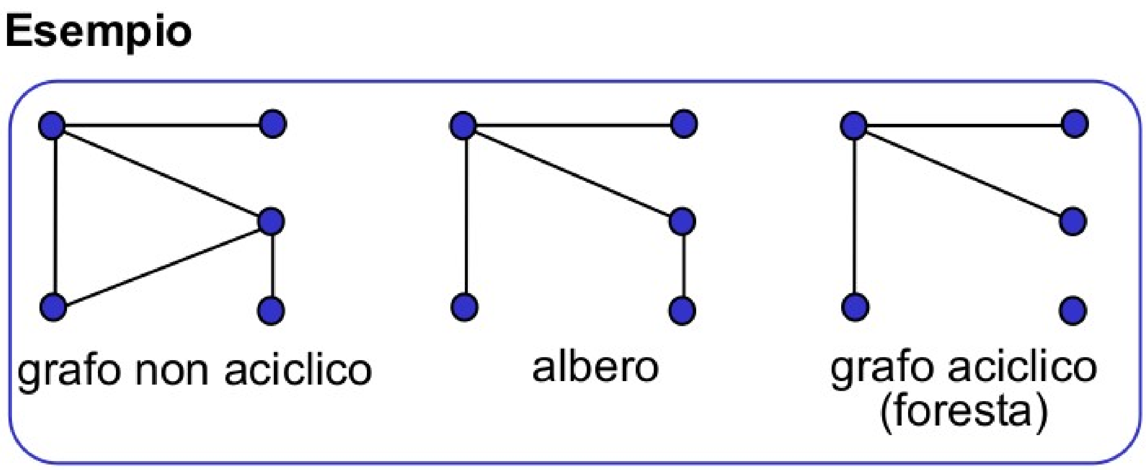
Come prima cosa costruiamo l'albero del cammino minimo ottenuto. Ad ogni arco si assegna come costo il numero di nodi che ha al di sotto.

$z = 1x_{15} + 7x_{12} + 6x_{24} + 2x_{47} + 3x_{48} + 1x_{76} + 2x_{83} + 1x_{39}$

quindi il valore di z = 240.

Minimum spanning tree (MST)
Alberi
Sia G=(V,E) un grafo non orientato e connesso:

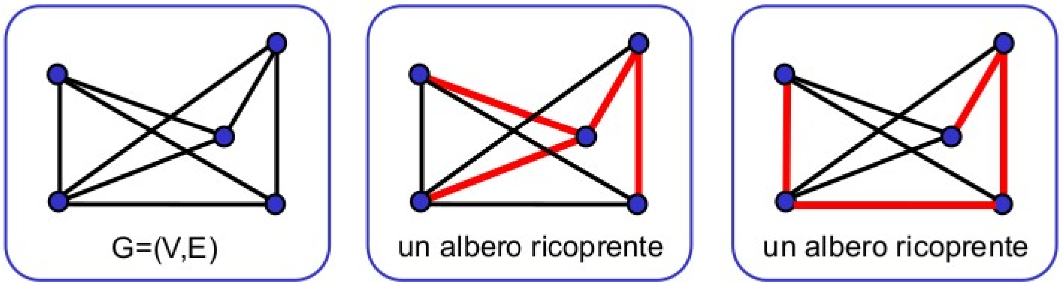
- G è aciclico se i suoi archi non formano cicli;
- Un albero è un grafo connesso ed aciclico;
- Ogni grafo aciclico è in generale l'unione di uno o più alberi e viene detto foresta;
- Un albero ha n - 1 archi dove n sono il numero dei vertici(nodi).



Proprietà degli alberi
Dato un grafo G=(V,E), le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- G è un albero;
- Ogni coppia di nodi di G è connessa da un unico cammino;
- G è aciclico e $|E| = |V| - 1$;
- G è connesso e $|E| = |V| - 1$;
- Se Il grafo G non è connesso e contiene n – 1 archi vuol dire che ha un ciclo.

Alberi Ricoprenti
Sia G=(V,E) un grafo non orientato e connesso. Un albero ricoprente (spanning tree) di G è un sottografo T di G tale che: T è un albero e contiene tutti i nodi di G.



Un grafo può avere più alberi ricoprenti.

Il Problema del Minimo Albero Ricoprente (Minimum Spanning Tree Problem)
Sia G=(V,E) un grafo non orientato e connesso dove ad ogni arco e i ∈ E è associato un costo c_i .
Il costo di un albero ricoprente T di G è dato dalla somma dei costi degli archi che lo compongono.
Il problema: determinare l'albero ricoprente di G di costo minimo.

Modelli matematici
Abbiamo due modelli matematici:

- **Modello matematico per la Subtour Elimination:**
  - **Variabili decisionali:** $x_{ij}=\begin{cases} 1 \text{ se (i,j) è selezionato} \\ 0\, altrimenti \end{cases}$
  - **funzione obiettivo:** $min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\, x_{ij}$
  - **Vincoli:** $\sum_{(i,j)\in E} x_{ij}=|V|-1$ la somma degli x_{ij} deve essere uguale a n - 1

    $\sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i\in S,\, j\in S}} x_{ij}\leq|S|-1 \qquad \forall S\subset V, |S|\geq 3$ *

    $x_{ij}\in 0,1 \qquad \forall (i,j)\in E$

Nota *: Per eliminare i cicli decidiamo che la somma degli archi scelti deve essere minore di |S| - 1, si effettua questo calcolo su tutti i possibili sottoinsiemi perché non sappiamo quanti sono i cicli creati a priore.

Nota efficienza: Il numero dei vincoli con questa proprietà è esponenziale, in poche parole in teoria è facilmente esprimibile mentre nella pratica è quasi impossibile scriverlo.

Nota esercizio esame: Se nell'esame viene chiesto di scrivere il modello matematico dell'MST bisogna scrivere quello generale e non quello del grafo dato in input.

Nota risoluzione di questo problema: Per risolvere questo problema l'idea è quella di aggiungere dinamicamente i vincoli sui cicli. L'algoritmo appena inserirà un arco controllerà con un altro algoritmo se questo forma un ciclo, in caso di esito positivo elimina l'arco che ha portato ad avere un ciclo, questo avviene tramite la regola del taglio (l'algoritmo sfrutta un grafo ad hoc in cui esegue il problema del massimo flusso, esegue poi una DFS, se trova due volte un nodo lo elimina).

- **Modello Matematico per la Cut Formulation:**
  - **Variabili decisionali:** $x_{ij}=\begin{cases} 1 \text{ se (i,j) è selezionato} \\ 0\, altrimenti \end{cases}$
  - **funzione obiettivo:** $min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\, x_{ij}$
  - **Vincoli:** $\sum_{(i,j)\in E} x_{ij}=n-1$

    $\sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i\in S,\, j\notin S}} x_{ij}\geq 1 \qquad \forall S\subset V, |S|\geq 1$

    $x_{ij}\in 0,1 \qquad \forall (i,j)\in E$

Algoritmi Risolutivi: algoritmo di Kruskal (Greedy Algorithm), algoritmo di Prim.

Algoritmo di Kruskal (Minimum Spanning Tree) (Proprietà del ciclo)

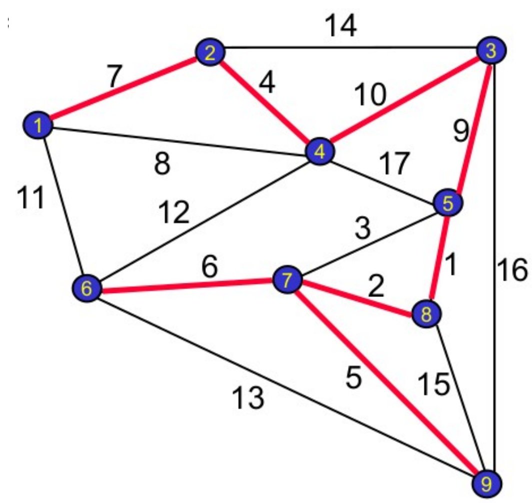
Sia G=(V,E) un grafo non orientato con *n* nodi ed *m* archi.

1. Ordinare gli archi $e_1, e_2, \ldots, e_m$ in modo non decrescente ($c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_m$). Siano $E^0 = \emptyset$, $ST^0 = (V, \emptyset)$ e $k=1$.

2. Se $(V, E^{k-1} \cup \{e_k\})$ è un grafo aciclico allora $ST^k = (V, E^k)$ con $E^k = E^{k-1} \cup \{e_k\}$, altrimenti e_k viene scartato, $E^k = E^{k-1}$ e $ST^k = ST^{k-1}$.

3. Se $|E^k| = n-1$ l'algoritmo si arresta ed ST^k è l'albero ricoprente cercato, altrimenti $k=k+1$ e si ritorna al passo (2).

Esempio



- Sia 4+k il nuovo peso dell'arco (2,4) nel grafo. Per quali valori di k l'albero di copertura minimo non cambia? Diminuendo k di infiniti valore l'arco rimarrà sempre all'interno del nostro MST, mentre possiamo aumentare k di al massimo di 3 affinché non crei un ciclo on il nodo (1,4), se aumentiamo di 4 la sua presenza dipende da chi è scelto prima da (2,4) e (1,4) mentre con k >= 5 sarà escluso perché sicuramente creerà un ciclo.

~~(5,8)~~	~~(7,8)~~	~~(5,7)~~	~~(2,4)~~	~~(7,9)~~	~~(6,7)~~	~~(1,2)~~	~~(1,4)~~	~~(3,5)~~	~~(3,4)~~	(1,6)	(4,6)	(6,9)	(2,3)	(8,9)	(3,9)	(4,5)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

- Sia 8+k il nuovo peso dell'arco (1,4) in G. Per quali valori di k l'arco (1,4) verrà inserito nella soluzione ottima? Per renderlo inserito all'intera del valore ottimo basta scegliere un qualunque k ≤ -1.

Algoritmo di Prim (Minimum Spanning Tree) (Proprietà del taglio)

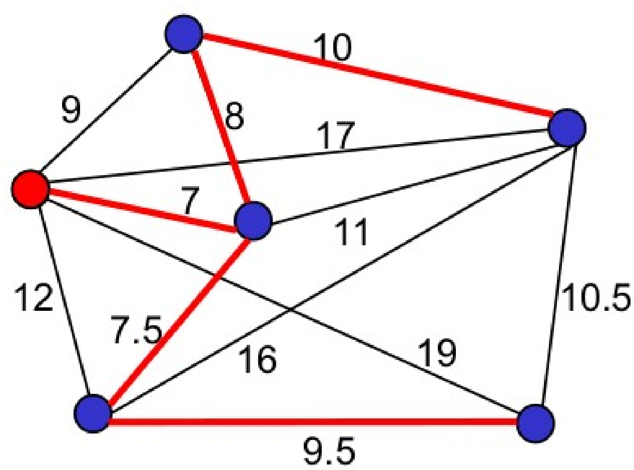
Sia G=(V,E) un grafo non orientato con *n* nodi ed *m* archi.

1. Selezionare un qualsiasi vertice $v_s \in V$ e porre $V^0=\{v_s\}$, $E^0=\varnothing$, k=1.

2. Dato il taglio $[V^{k-1}, V \setminus V^{k-1}]$, selezionare l'arco diretto del taglio (v_i,v_h) avente costo minimo e porre $V^k=V^{k-1} \cup \{v_h\}$ e $E^k=E^{k-1} \cup \{(v_i,v_h)\}$

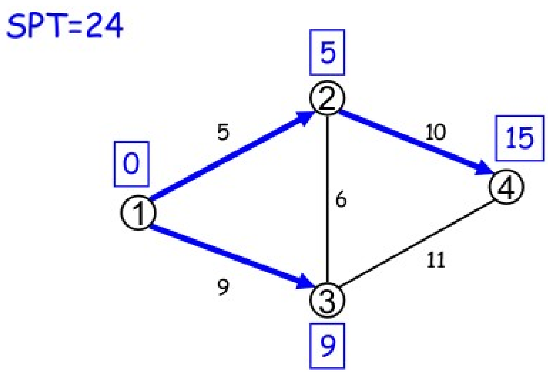
3. Se $|E^k|=n-1$ l'algoritmo si arresta ed $ST=(V^k,E^k)$ è l'albero ricoprente cercato, altrimenti k=k+1 e si ritorna al passo (2).

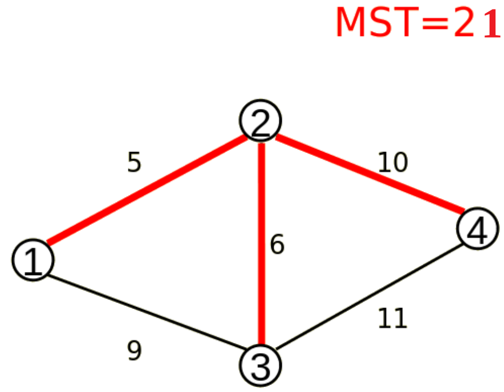
Esempio: n=6 m=12



L'algoritmo di Prim O(|E|log|V|) è più efficiente di quello di Kruskal O(|E|log|E|).

Albero dei Cammini minimi ≠ albero di copertura minimo





Nota: L'algoritmo di Dijkstra calcola l'albero dei cammini minimi (da una sorgente ai destinatari), mentre Kruskal e Prim calcolo un albero di copertura minimo (un albero che copre tutti i nodi con il costo minore).

Parte 3 end

Cosa abbiamo imparato:

Kruskal e Prim sono figli della gallina bianca.

Tutti i modelli matematici degli algoritmi sui grafi hanno copiato dal modello del flusso a costo minimo.

Carrabs e' di Atripalda ed e' sempre in coppia con Cerulli.