ESERCIZIO 3

Dimostrare che l'insieme di tutte le stringhe di lunghezza dispari su $\{a,b,c\}$ è numerabile.

1. Scriviamo tutte le stringhe di lunghezza dispari su $\{a,b,c\}^*$ e le raggruppiamo secondo la loro lunghezza.

   In altre parole, definiamo gli insiemi S_k contenenti le stringhe di lunghezza k su $\{a,b,c\}^*$.

   $S_1 = \{a,b,c\}$

   $S_3 = \{aaa, aab, aac, aba, \_\_\_, ccc\}$

   |

2. Ordiniamo gli insiemi in base al numero di parole contenute e ordiniamo gli elementi di ogni insieme in base all'ordine lessicografico.

   Costruiamo, quindi, la seguente lista infinita

   a, b, c, aaa, aab, aba, ___

3. La funzione biettiva $f: w_n \to n \in \mathbb{N}$ associa alla parola w di lunghezza k con $k = 2x+1$, $x \in \mathbb{N}$ il suo indice all'interno di questo ordinamento.

   La funzione f è definita nel modo seguente

$$f(w_n) = \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor - 1} 3^{2i+1} + y \quad , \text{ dove}$$

* $\displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor - 1} 3^{2i+1}$ rappresenta il numero di elementi nei blocchi precedenti
* y rappresenta la posizione di w_n in S_k secondo l'ordine lessicografico $(1 \le y \le |S_n|)$

Infatti, considerando la funzione f si ha che

k	$f(w_n)$
1	y
3	$3+y$
5	$(3+3^3)+y = 3+27+y = 30+y$
|	

! In un generico insieme S_k ci sono 3^k elementi