Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica ed Informatica Applicata

Università di Salerno

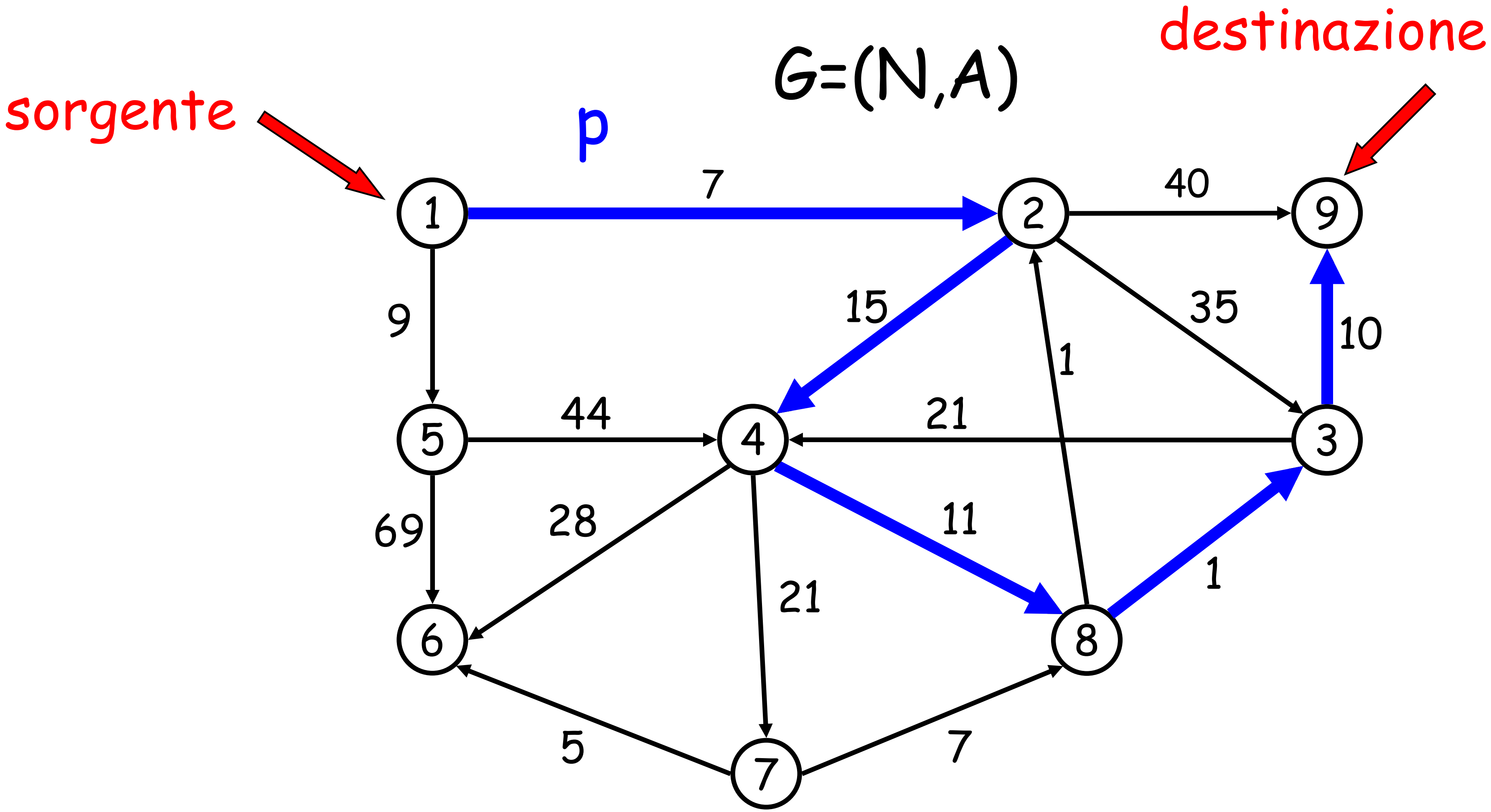
Lezione n° 22

Problema dell'albero dei cammini minimi

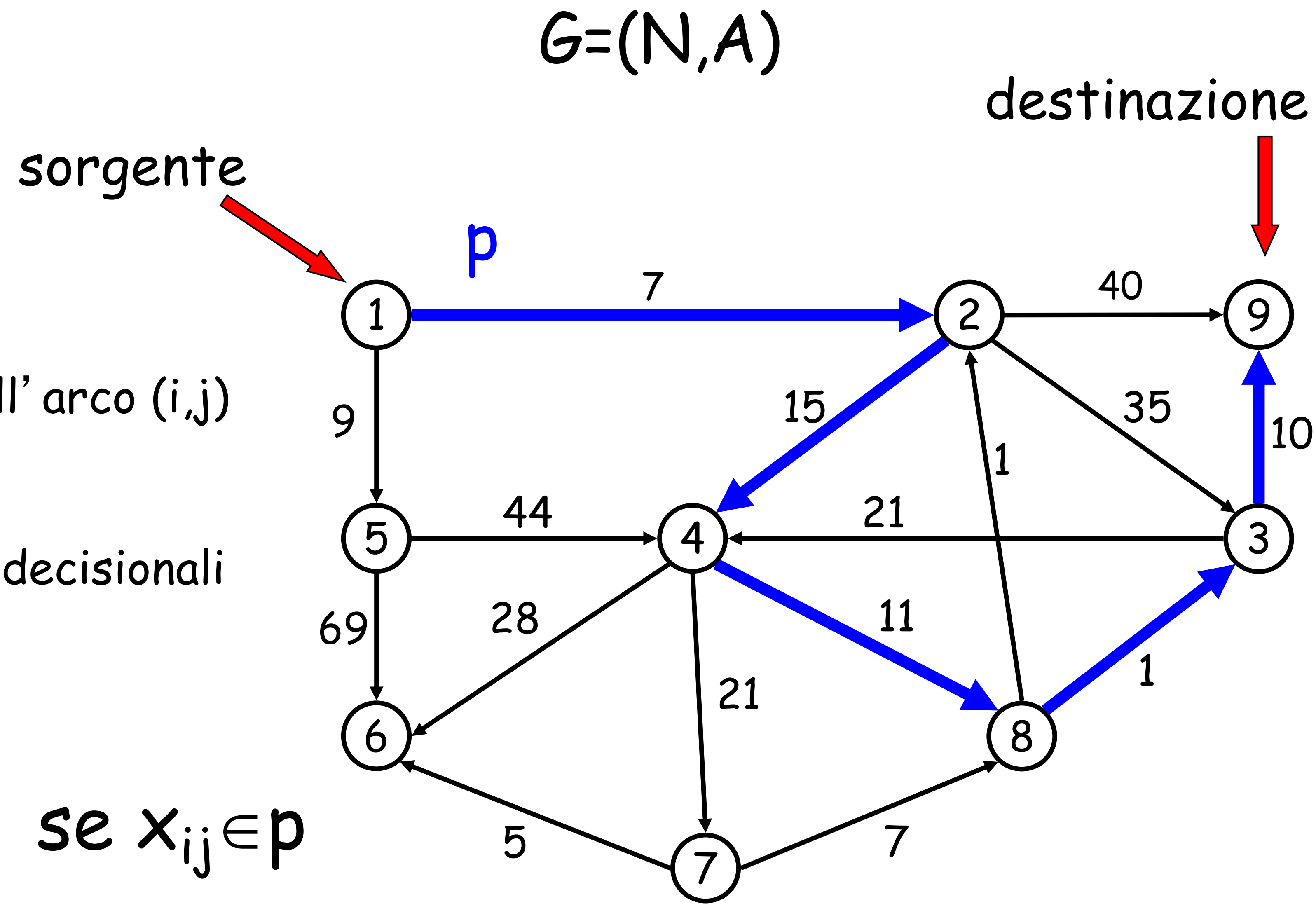
R. Cerulli – F. Carrabs

Il problema dei cammini minimi

[Versione uno a uno]
Sia G = (N,A) un grafo orientato su cui sia definito un vettore $\underline{c} = [c_{ij}]$ dei costi associati agli archi del grafo; inoltre, siano s e t due nodi distinti, detti rispettivamente *origine* e *destinazione*. Il problema dei cammini minimi 1 a 1 consiste nel determinare il percorso di costo minimo (più corto) da s a t in G.



Modello matematico (uno a uno)

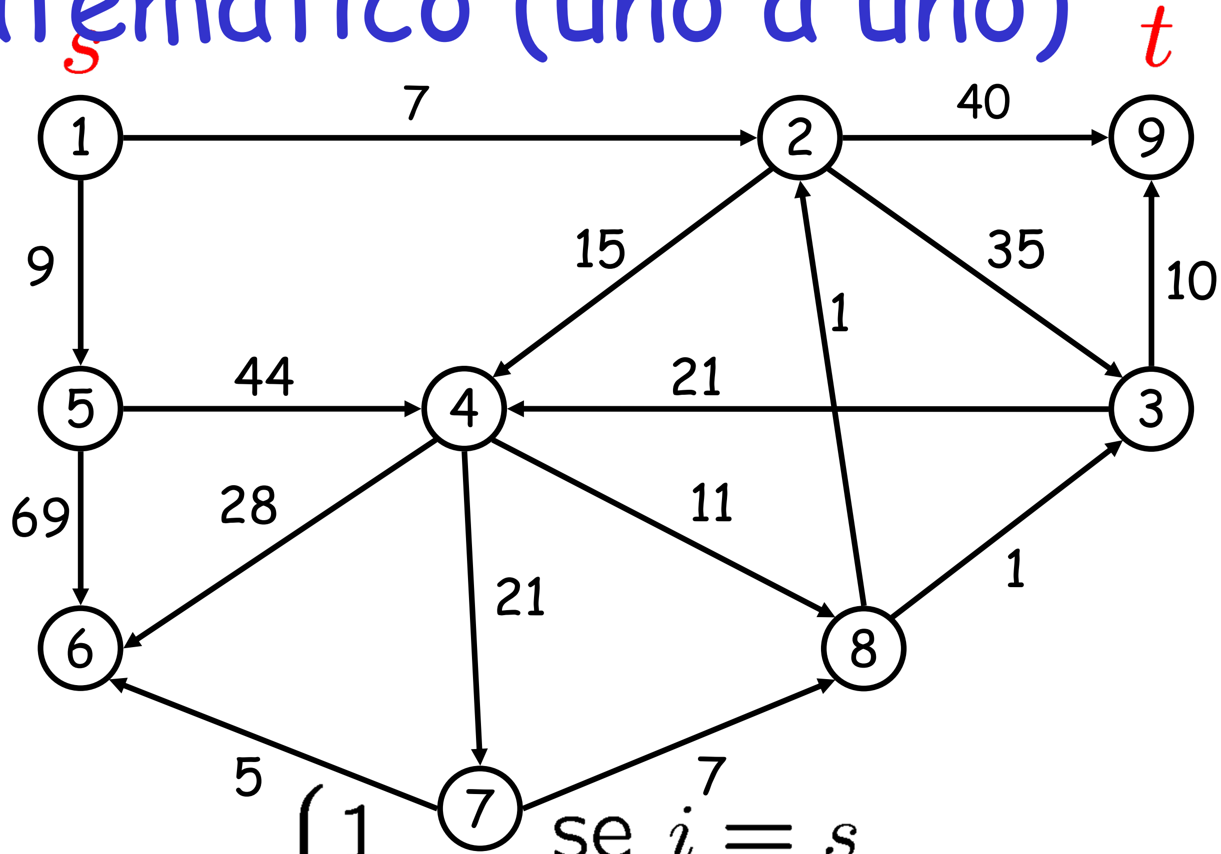


c_{ij} = costo dell'arco (i,j)

x_{ij} = variabili decisionali

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{ij} \in p \\ 0 & \text{se } x_{ij} \notin p \end{cases}$$

Modello matematico (uno a uno)



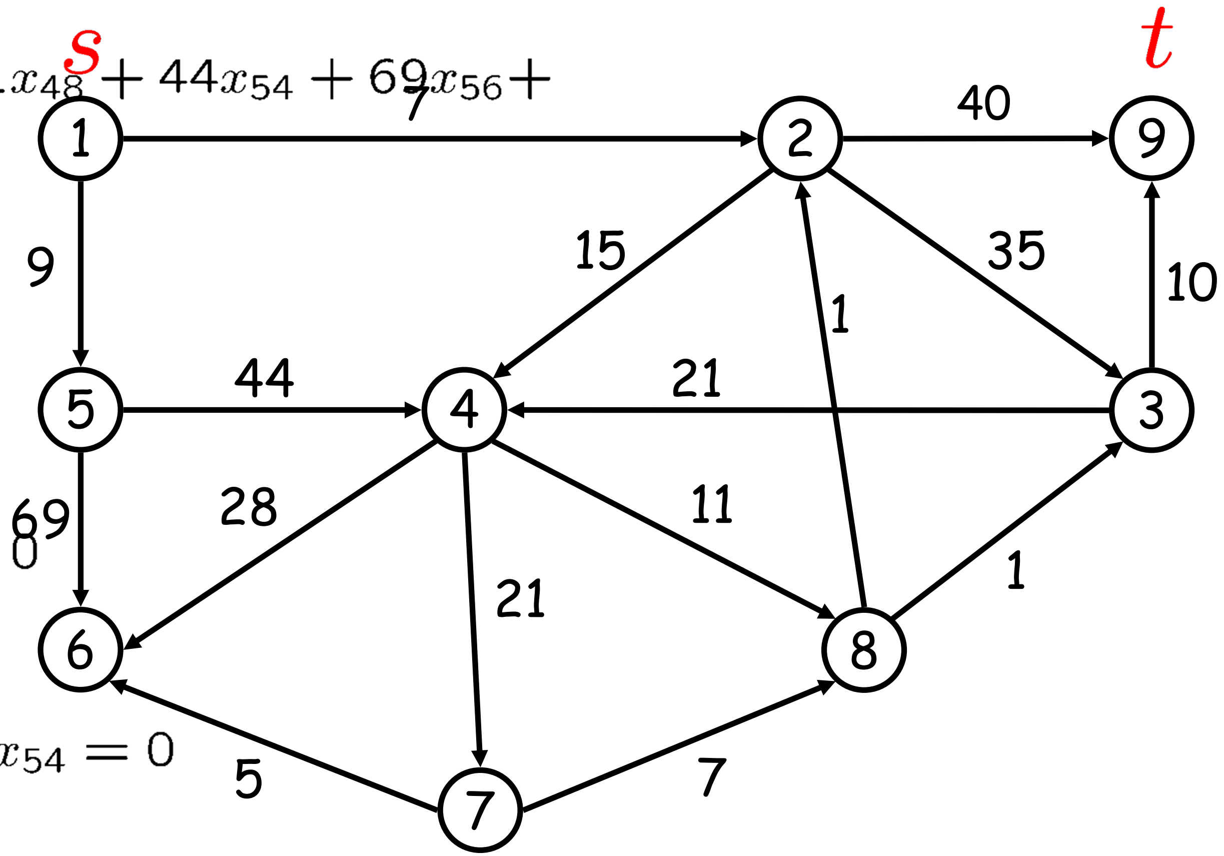
$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$\sum_{j\in FS(i)} x_{ij} - \sum_{j\in BS(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = s \\ 0 & \text{se } i \in N \setminus \{s,t\} \\ -1 & \text{se } i = t \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Modello matematico (uno a uno)

$$\min \; 7x_{12} + 9x_{15} + 40x_{29} + 35x_{23} + 15x_{24} + 10x_{39} +$$
$$+21x_{34} + 28x_{46} + 21x_{47} + 11x_{48} + 44x_{54} + 69x_{56} +$$
$$+5x_{76} + 7x_{78} + x_{82} + x_{83}$$



$$x_{12} + x_{15} - 0 = 1$$
$$0 - x_{29} - x_{39} = -1$$

$$x_{23} + x_{24} + x_{29} - x_{12} - x_{82} = 0$$
$$x_{39} + x_{34} - x_{23} - x_{83} = 0$$
$$x_{46} + x_{47} + x_{48} - x_{24} - x_{34} - x_{54} = 0$$
$$x_{54} + x_{56} - x_{15} = 0$$
$$0 - x_{46} - x_{56} - x_{76} = 0$$
$$x_{76} + x_{78} - x_{47} = 0$$
$$x_{82} + x_{83} - x_{48} - x_{78} = 0$$

Modello matematico (uno a uno)

$$\min \; 7x_{12} + 9x_{15} + 40x_{29} + 35x_{23} + 15x_{24} + 10x_{39} +$$

$$+21x_{34} + 28x_{46} + 21x_{47} + 11x_{48} + 44x_{54} + 69x_{56} +$$

$$+5x_{76} + 7x_{78} + x_{82} + x_{83}$$

$$x_{12} + x_{15} - 0 = 1$$

$$0 - x_{29} - x_{39} = -1$$

$$x_{23} + x_{24} + x_{29} - x_{12} - x_{82} = 0$$

$$x_{39} + x_{34} - x_{23} - x_{83} = 0$$

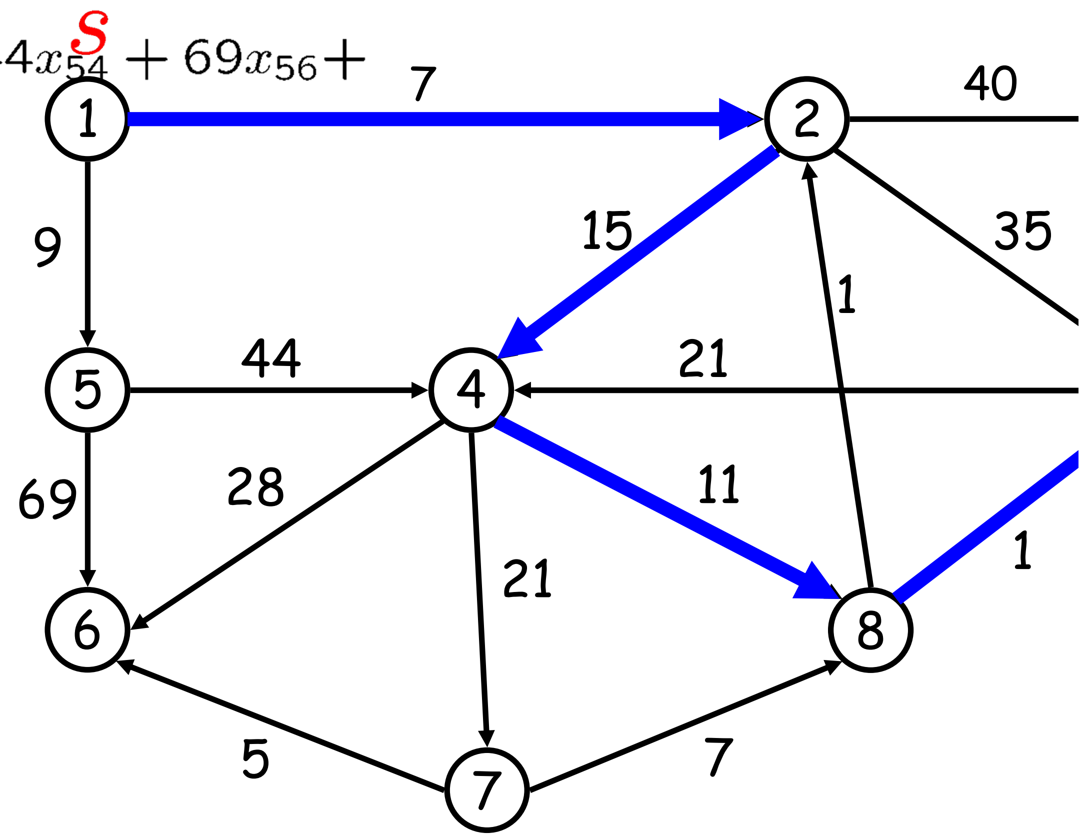
$$x_{46} + x_{47} + x_{48} - x_{24} - x_{34} - x_{54} = 0$$

$$x_{54} + x_{56} - x_{15} = 0$$

$$0 - x_{46} - x_{56} - x_{76} = 0$$

$$x_{76} + x_{78} - x_{47} = 0$$

$$x_{82} + x_{83} - x_{48} - x_{78} = 0$$



$$x_{12} = 1, x_{24} = 1, x_{48} = 1, x_{83} = 1, x_{39} = 1$$

$$z = 44$$

Il problema dei cammini minimi (varianti)

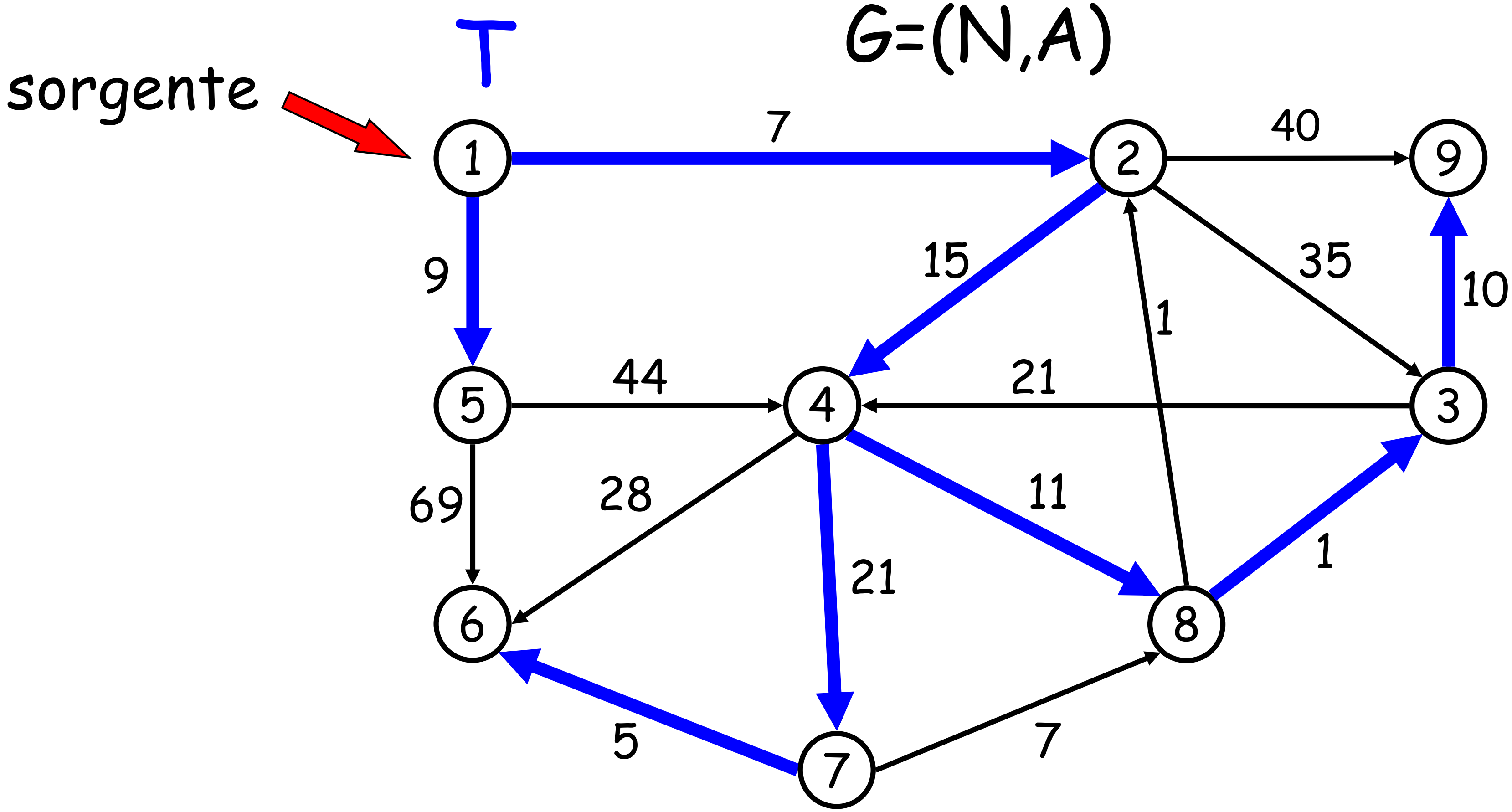
- Uno ad uno

- Uno a tutti

- Tutti a tutti

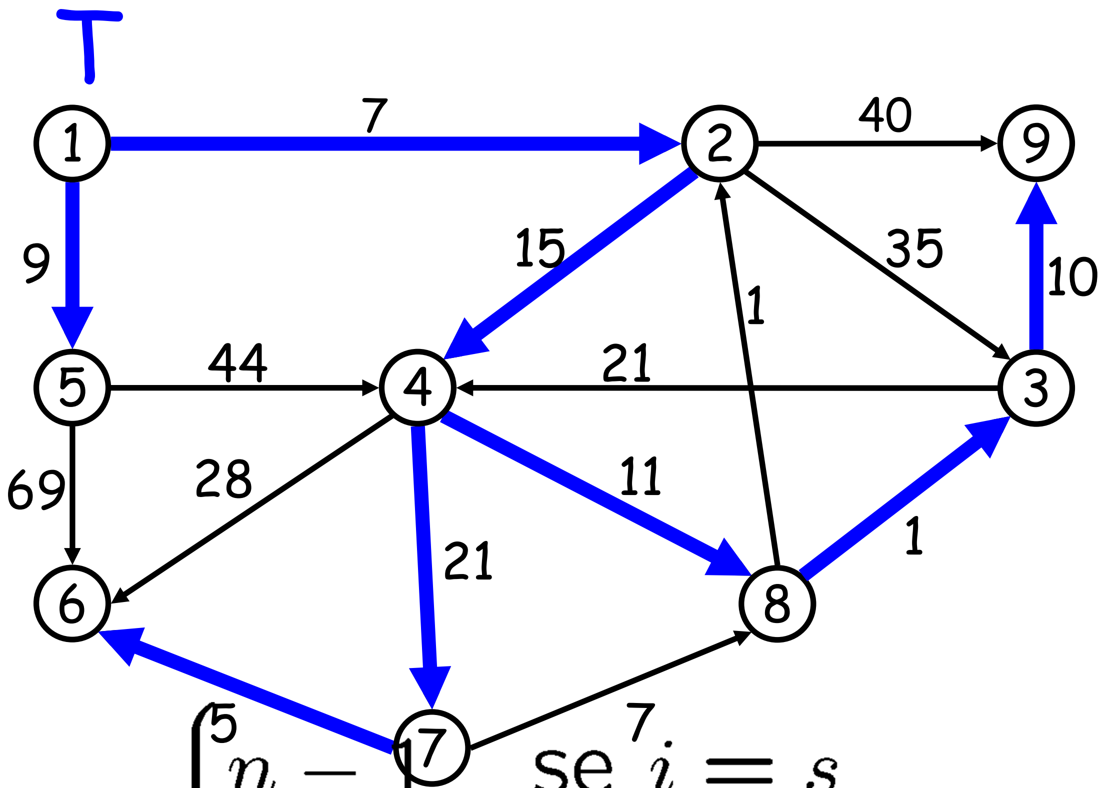
Il problema dei cammini minimi (uno a tutti)

[Versione uno a tutti]
Sia *G* = (N,*A*) un *grafo orientato* su cui sia definito un vettore $\underline{c} = [c_{ij}]$ dei costi associati agli archi del grafo; inoltre, siano *s* il nodo *origine*. Il problema dei cammini minimi 1 a tutti consiste nel determinare l'albero dei cammini minimi da s a tutti gli altri nodi di *G*.



Qual' è il modello matematico per la versione uno a tutti?

Il problema dei cammini minimi (uno a tutti)



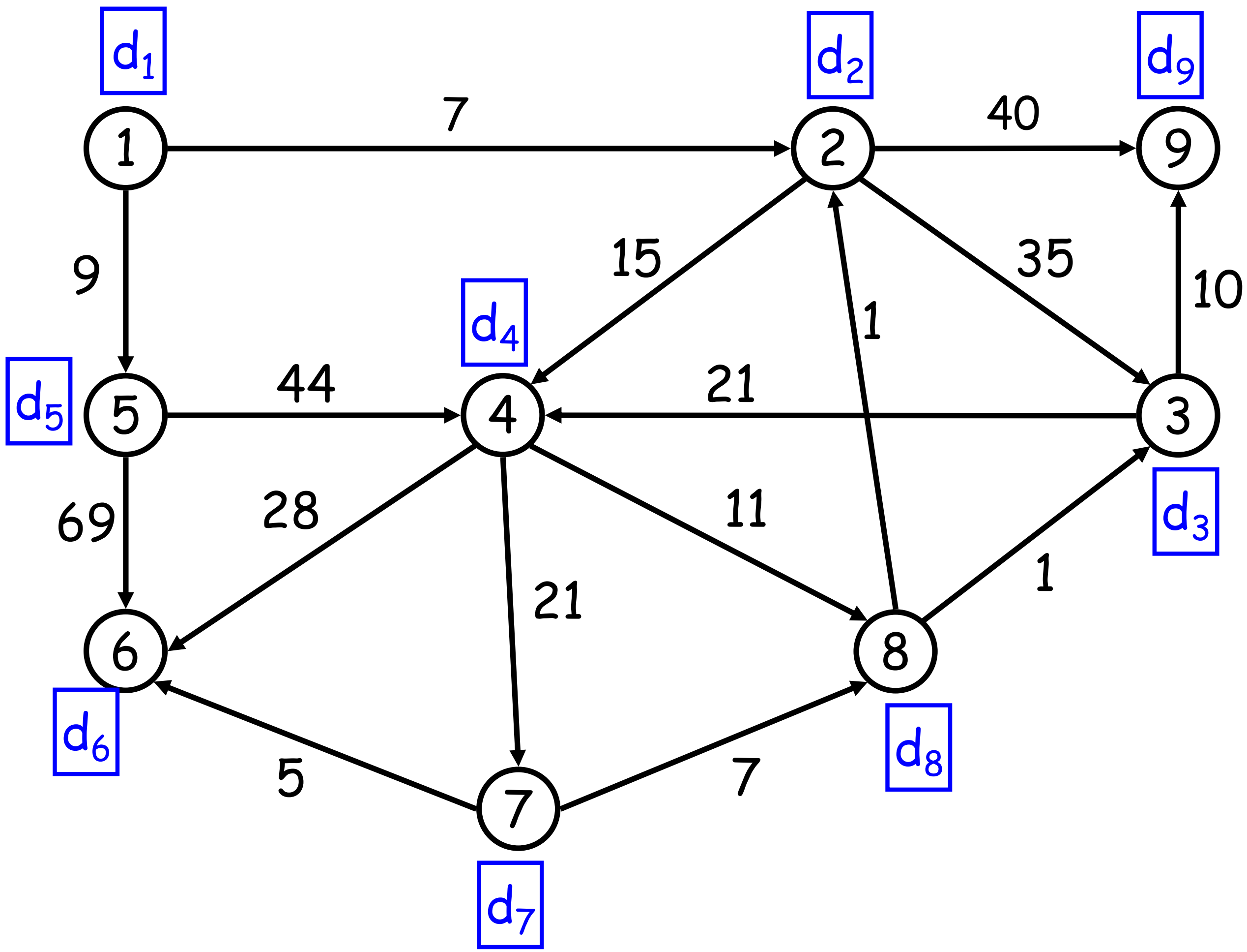
$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j\in FS(i)} x_{ij} - \sum_{j\in BS(i)} x_{ji} = \begin{cases} n-1 & \text{se } i = s \\ -1 & \text{se } i \neq s \end{cases}$$

$$x_{ij} \in Z^{+} \cup \{0\}$$

Etichette dei nodi

$G=(N,A)$



Algoritmo prototipo

Passo 1: *Inizializzazione.*

$d_s=0$, $P_s=NULL$, $d_k=\infty$, $P_k=s$ $\forall k \in N \setminus \{s\}$,
$Q=\{s\}$;

Passo 2: *Estrai un vertice x da Q ($Q= Q \setminus \{x\}$) ed aggiorna quando possibile le etichette dei vertici in FS(x):*

$\forall y \in FS(x)$ se $d_x + c_{xy} < d_y$ allora

$d_y = d_x + c_{xy}$, $P_y= x$ e se $y \notin Q$ inserscilo in Q ($Q= Q \cup \{y\}$) (*Relaxing*)

Aggiornamento delle etichette

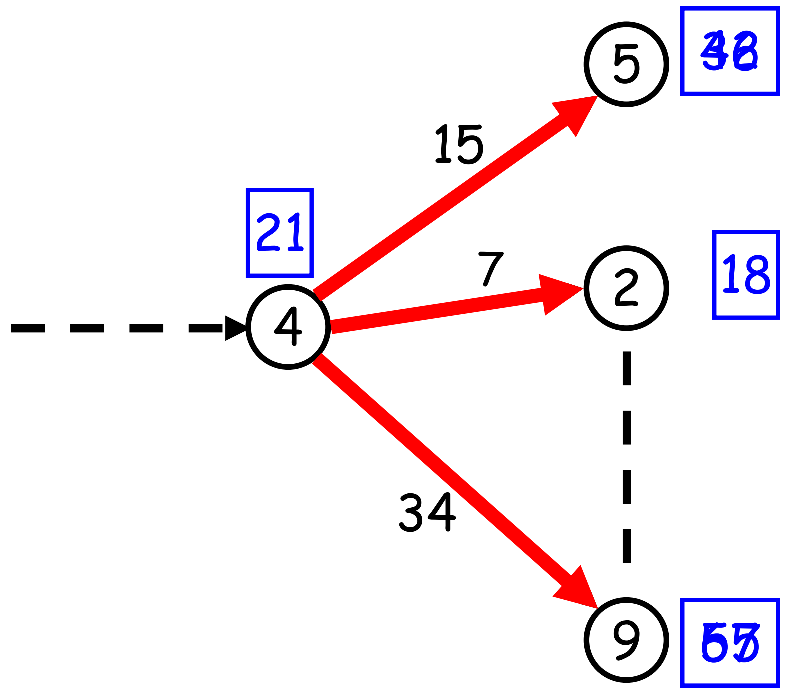
$\forall y \in FS(x)$ se $d_x + c_{xy} < d_y$ allora $d_y = d_x + c_{xy}$ e $P_y = x$

- $x=4,\ y=5$
  $d_4 + c_{45} < d_5$?
  $d_5 = d_4 + c_{45}$ e $P_5 = 4$

- $x=4,\ y=2$
  $d_4 + c_{42} < d_2$?

…………………

- $x=4,\ y=9$
  $d_4 + c_{49} < d_9$?
  $d_9 = d_4 + c_{49}$ e $P_9 = 4$



Algoritmo prototipo

Passo 1: *Inizializzazione.*

d_s=0, P_s=NULL, $d_k=\infty$, P_k=s $\forall k \in N \setminus \{s\}$,
Q={s};

Passo 2: *Estrai un vertice x da Q (Q= Q \{x}) ed aggiorna quando possibile le etichette dei vertici in FS(x):*

$\forall y \in FS(x)$ se $d_x + c_{xy} < d_y$ allora
$d_y = d_x + c_{xy}$, P_y= x e se y $\notin$Q inseriscilo in Q *(Q= Q $\cup$ {y})* *(Relaxing)*

Passo 3: *Fino a quando Q $\neq \emptyset$ ripeti il passo 2 ;*

Differenti implementazioni

Gli algoritmi per l' SPT si distinguono per:

- La politica di estrazione del nodo da Q
  (label setting e label correcting)

- La struttura dati utilizzata per implementare Q

Label Correcting

Algoritmi label correcting [Bellman-Ford]:

- I nodi vengono estratti dalla coda Q in ordine FIFO (è una delle possibili implementazioni dell'algoritmo)

- Le etichette dei nodi sono temporanee per tutta la durata della computazione. Solo al termine dell'algoritmo tali etichette rappresenteranno le distanze minime.

- L'algoritmo è in grado di risolvere il problema dei cammini minimi su un qualsiasi grafo che non presenta cicli di peso negativo.

Label Setting

Algoritmi label setting [Dijkstra]:

- Ad ogni iterazione viene estratto dalla coda Q il nodo x con etichetta minima.

- L'etichetta del nodo x estratto rappresenta la distanza minima dalla sorgente al nodo stesso. Tale etichetta viene fissata in modo permanente e non viene più aggiornata (quindi una volta estratto un nodo non può essere reinserito in Q).

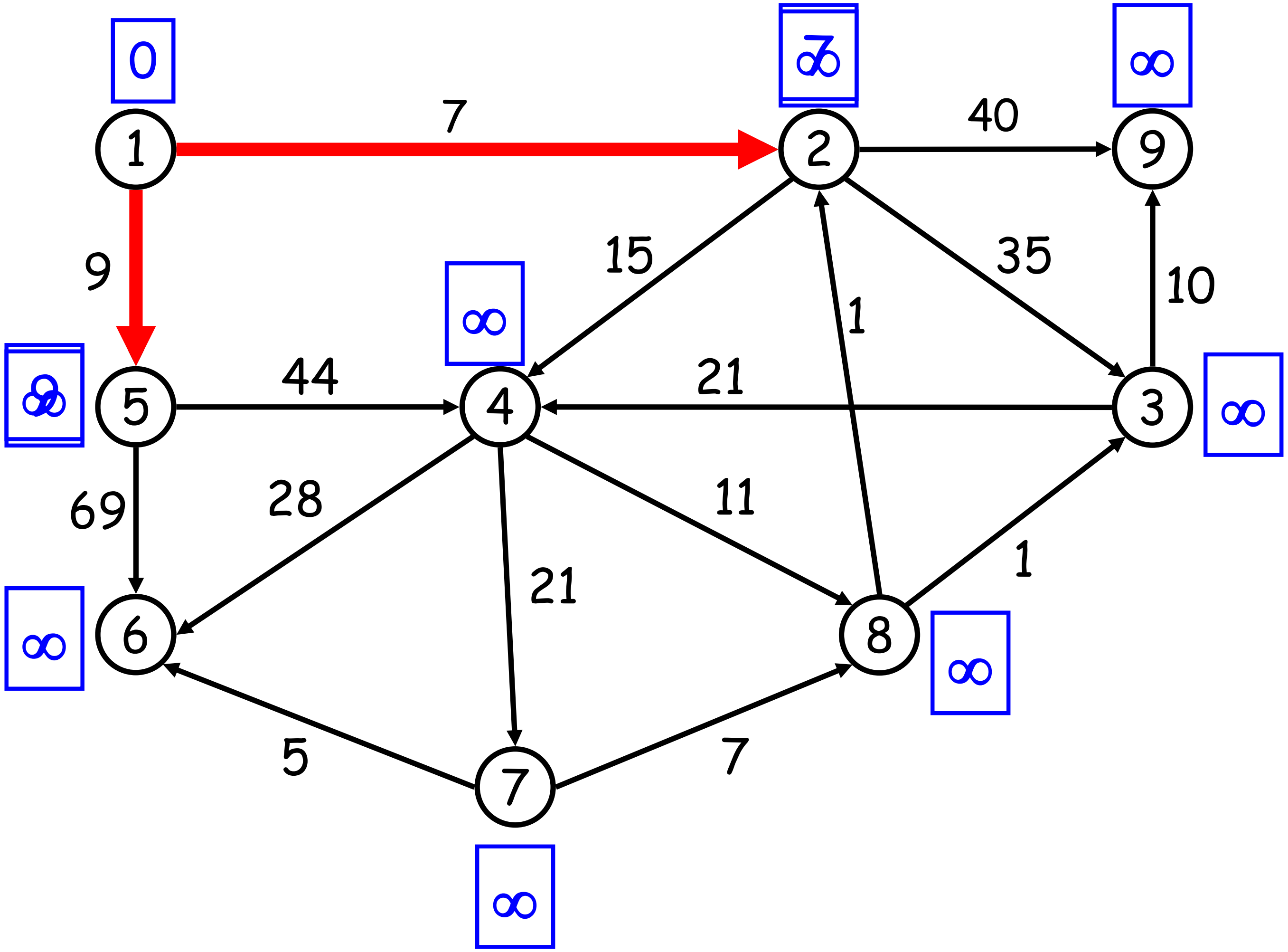
- Gli algoritmi label setting sono più efficienti dei label correcting, ma possono essere applicati solo su grafi dove $c_{ij} \geq 0$.

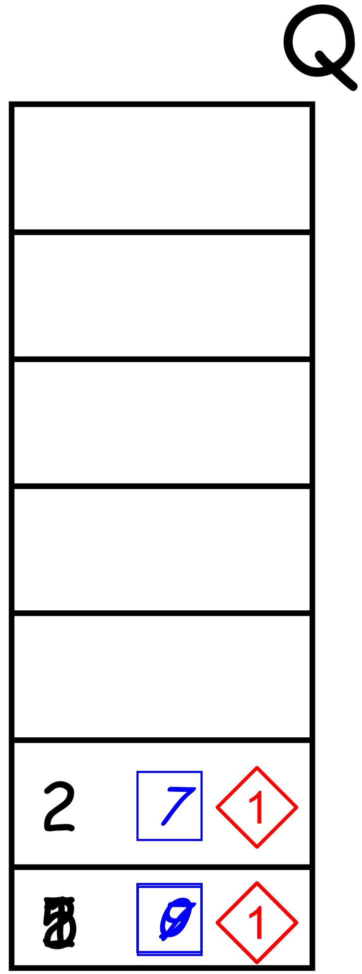
Algoritmo di Dijkstra (label setting)

```
Dijkstra (G,s)

  Inizializzazione; ( ds=0, Ps=NULL,   dk=∞, Pk=s ∀k∈N\{s} , Q={s})

  while ( Q ≠ ∅){
            x = Extract_min(Q);
            Relax(x,y);     con y∈FS(x);
  }
```

L'algoritmo di Dijkstra (label setting)

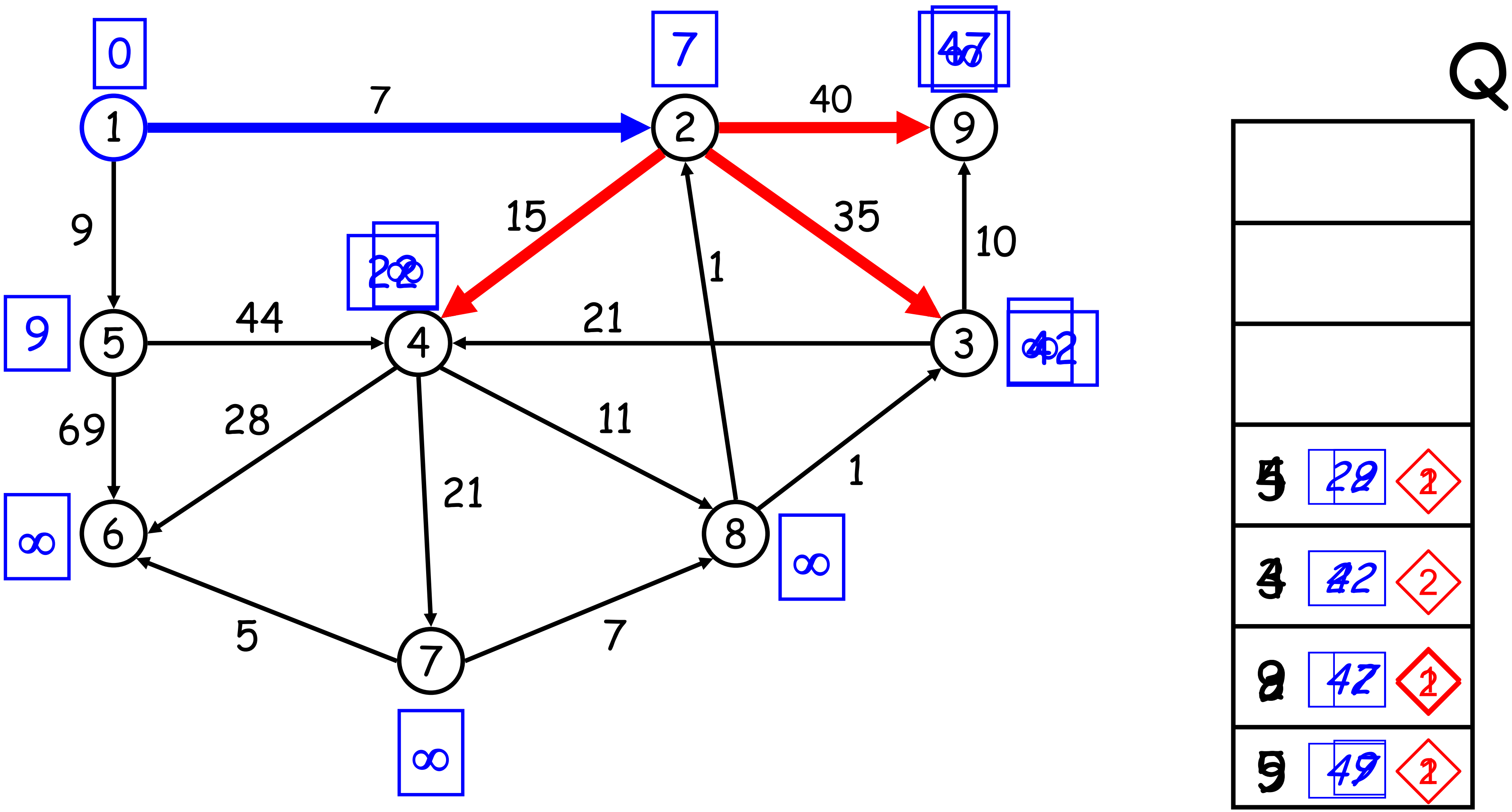
G=(N,A)





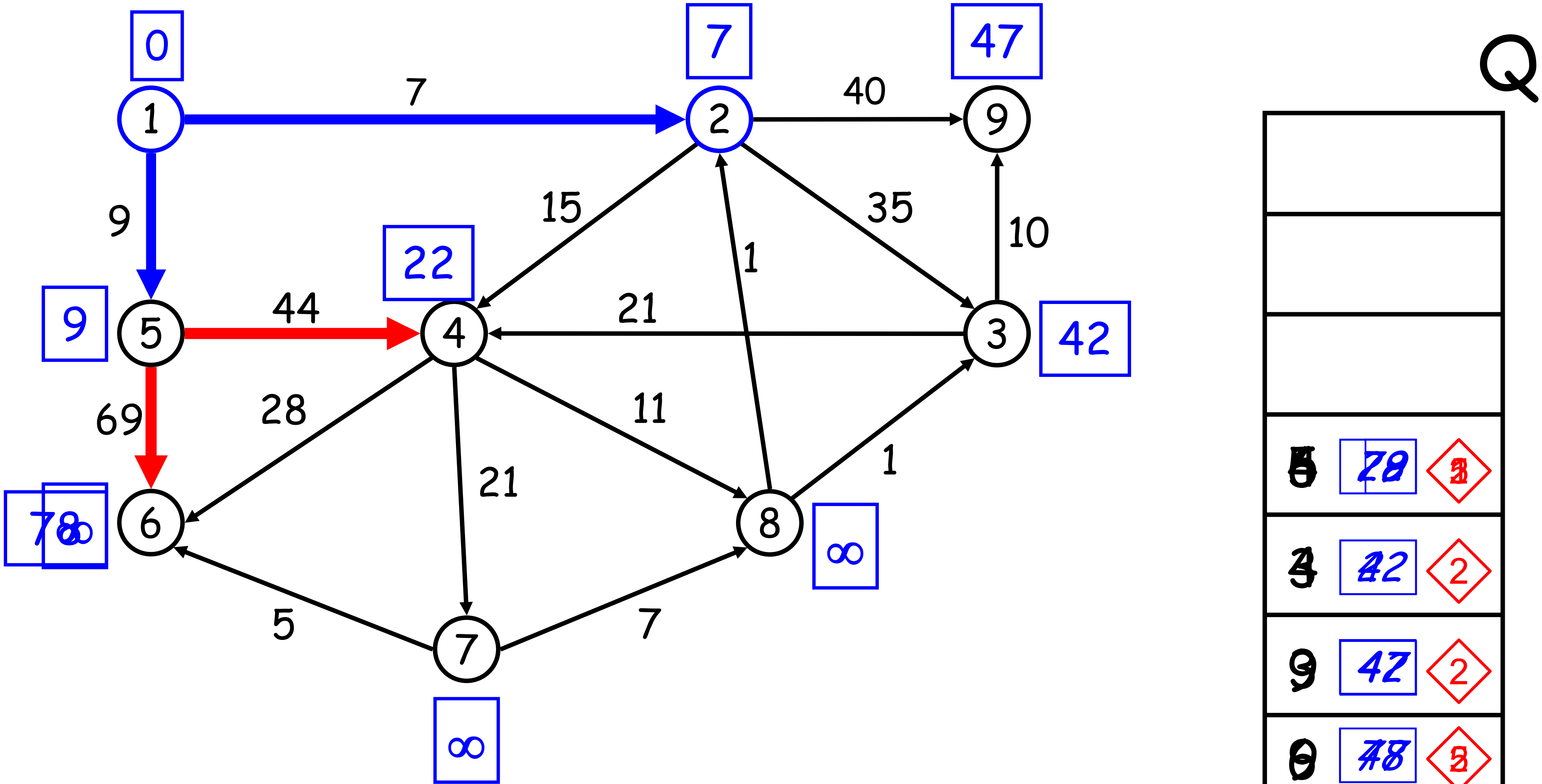
L'algoritmo di Dijkstra (label setting)

G=(N,A)



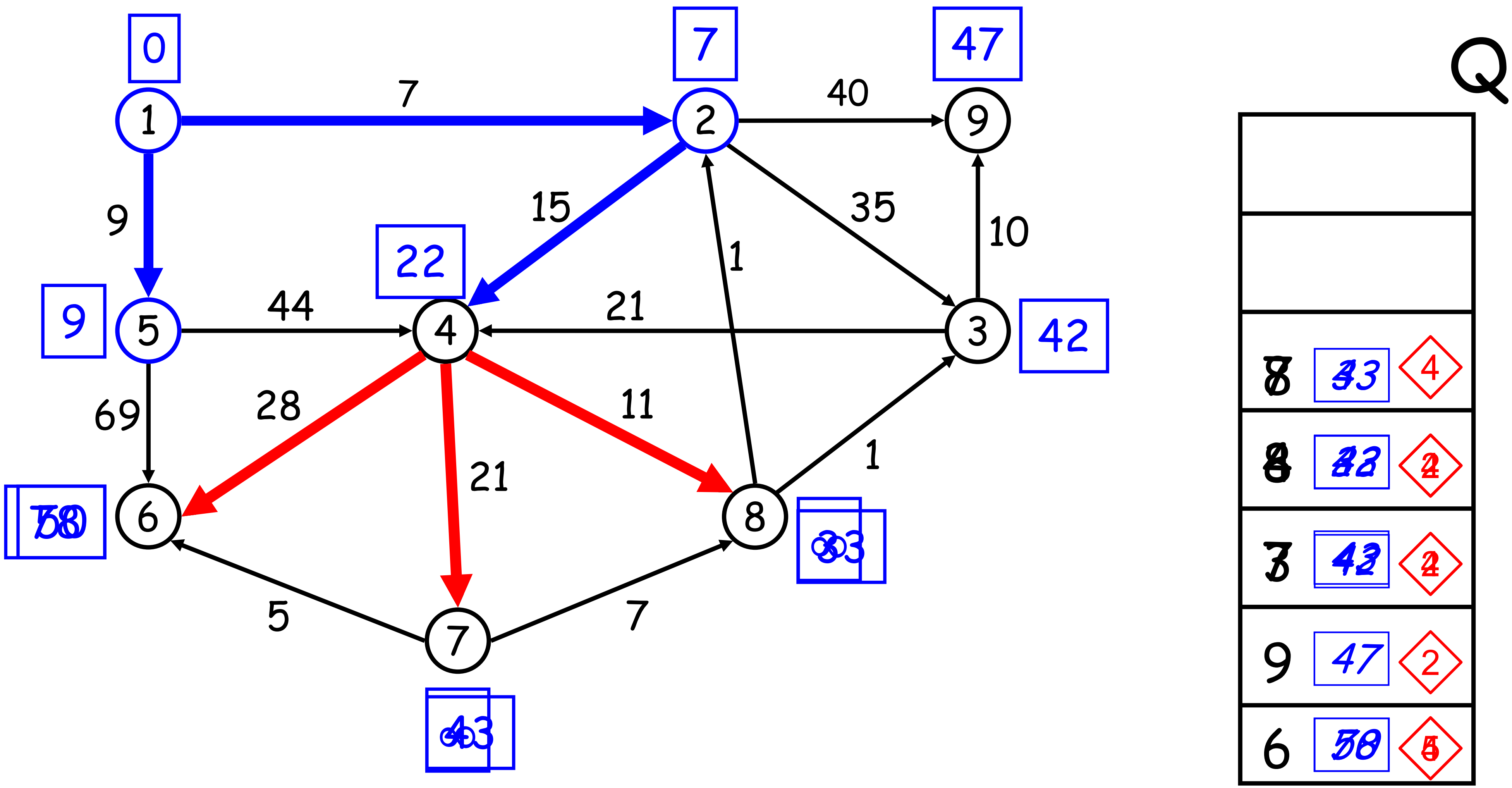
L'algoritmo di Dijkstra (label setting)

$G=(N,A)$



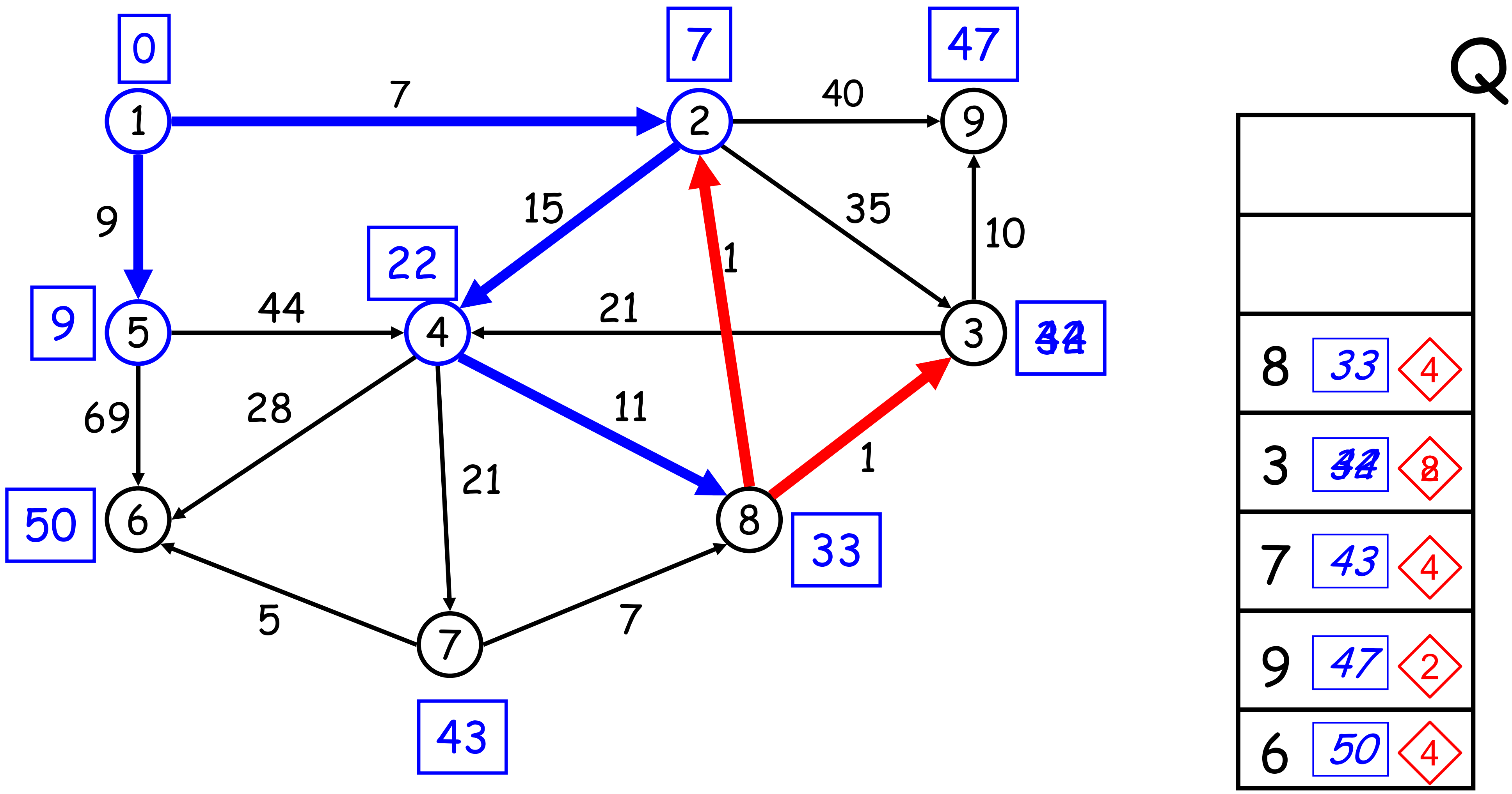
L'algoritmo di Dijkstra (label setting)

$G=(N,A)$



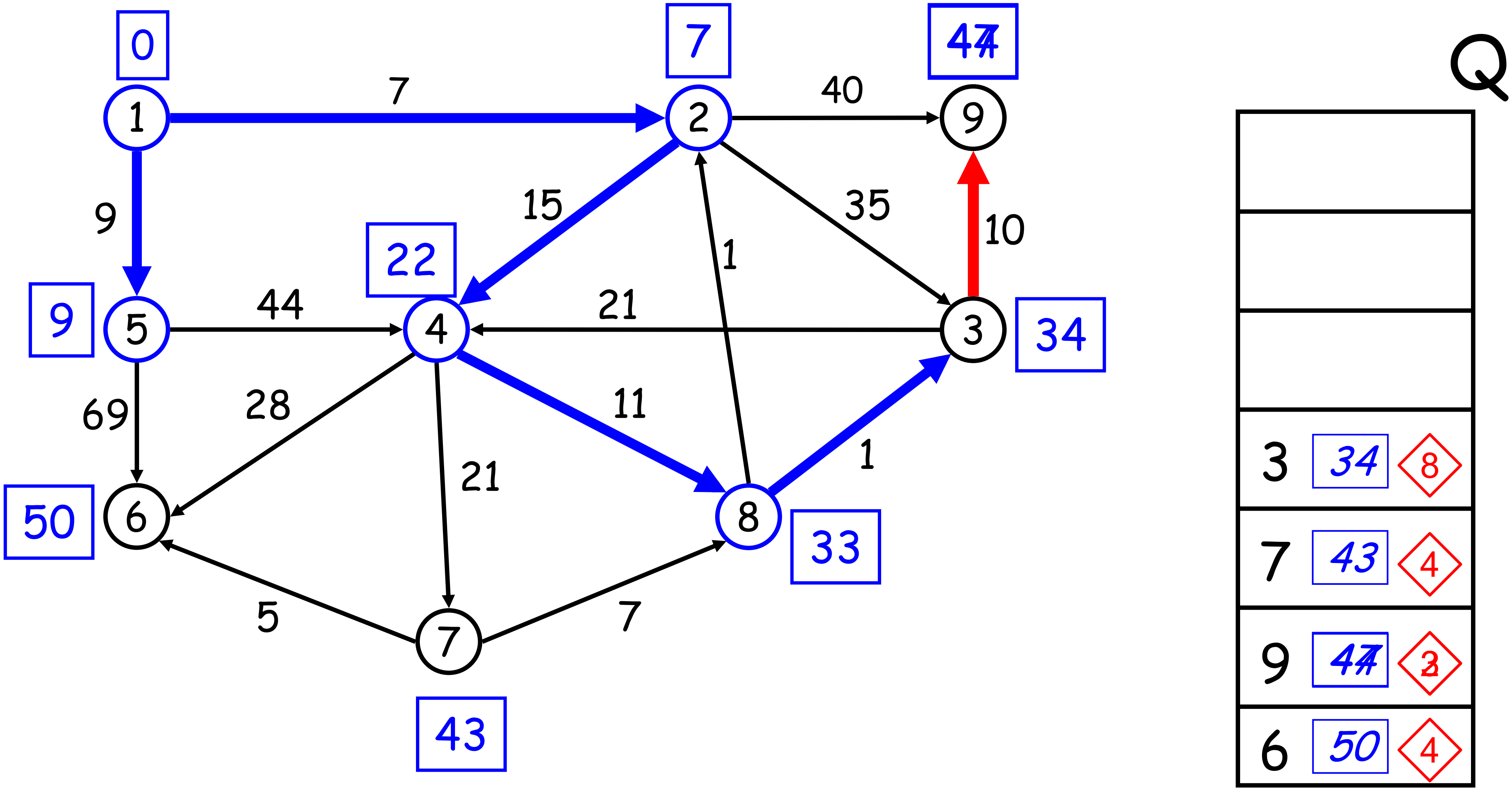
L'algoritmo di Dijkstra (label setting)

G=(N,A)



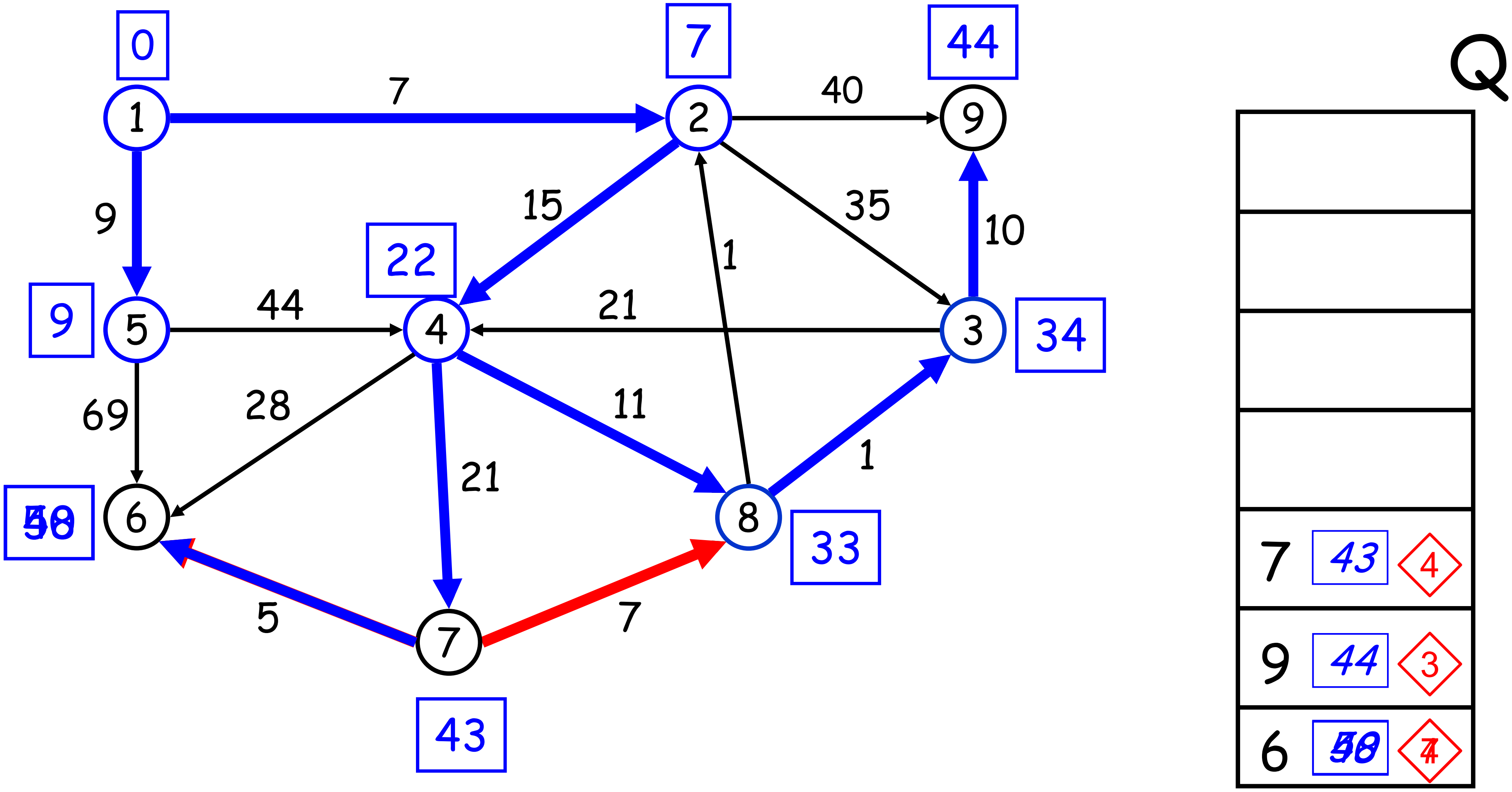
L'algoritmo di Dijkstra (label setting)

G=(N,A)



L'algoritmo di Dijkstra (label setting)

G=(N,A)

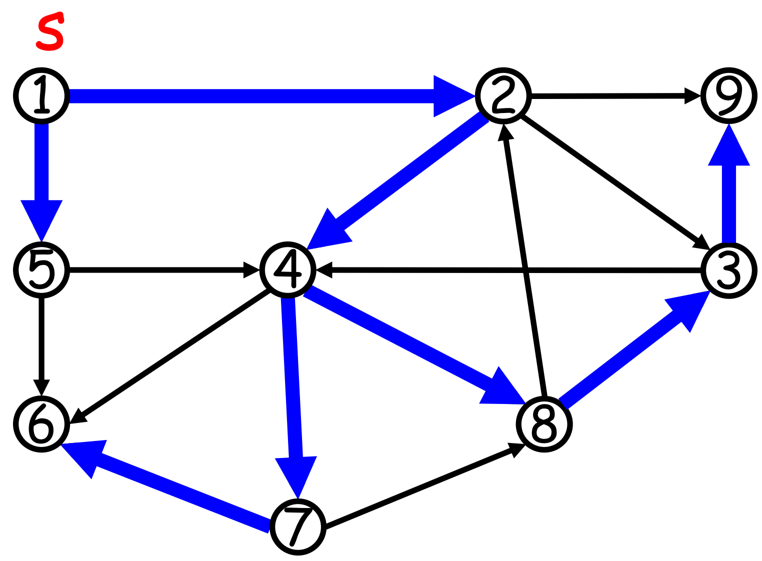


Il problema dei cammini minimi

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$\sum_{j\in FS(i)} x_{ij} - \sum_{j\in BS(i)} x_{ji} = \begin{cases} n-1 & \text{se } i = s \\ -1 & \text{se } i \neq s \end{cases}$$

$$x_{ij} \in Z^{+} \cup \{0\}$$



Quali sono i valori delle variabili x_{ij} nella soluzione ottima?

$$x_{76} = 1, x_{39} = 1, x_{15} = 1$$
$$x_{47} = 2, x_{83} = 2$$

……………………………