ESERCIZIO 2

Mostrare che l'insieme di tutte le stringhe di lunghezza pari su $\{a,b\}^*$ è numerabile.

1. Scriviamo tutte le stringhe di lunghezza pari su $\{a,b\}^*$ e le raggruppiamo secondo la loro lunghezza.

   In altre parole, definiamo gli insiemi S_k contenenti le stringhe di lunghezza k su $\{a,b\}^*$.

   $S_0 = \{\varepsilon\}$

   $S_2 = \{aa, ab, ba, bb\}$

   $S_4 = \{aaaa, \_\_\_\_\_\_, bbbb\}$

   |

2. Ordiniamo gli insiemi in base al numero di parole contenute e ordiniamo gli elementi di ogni insieme in base all'ordine lessicografico.

   Costruiamo, quindi, la seguente lista infinita.

   ε, aa, ab, ba, aa, aaaa, ______

3. La funzione biettiva $f: w_k \longrightarrow \mathbb{N}$ associa alla parola w di lunghezza k con $k = 2x$, $x \in \mathbb{N}$ il suo indice all'interno di questo ordinamento.

   La funzione f è definita nel modo seguente:

   $$f(w_k) = \sum_{i=0}^{k/2-1} 2^{2i} + y \quad \text{, dove}$$

   * $\sum_{i=0}^{k/2-1} 2^{2i}$ rappresenta il numero di elementi nei blocchi precedenti
   * y rappresenta la posizione di w_k in S_k secondo l'ordine lessicografico.

Infatti, se consideriamo l'indice della prima parola di ogni blocco (cioè $y=1$), si ha che:

$|w_k| = 0 \rightarrow f(w_k) = 0 + 1 = 1$

$|w_k| = 2 \rightarrow f(w_k) = 2^0 + 1 = 2$

$|w_k| = 4 \rightarrow f(w_k) = 2^0 + 2^2 + 1 = 6$

$|w_k| = 6 \rightarrow f(w_k) = 2^0 + 2^2 + 2^4 + 1 = 22$