

# **Lezioni di Ricerca Operativa**

F. Carrabs

Università degli Studi di Salerno

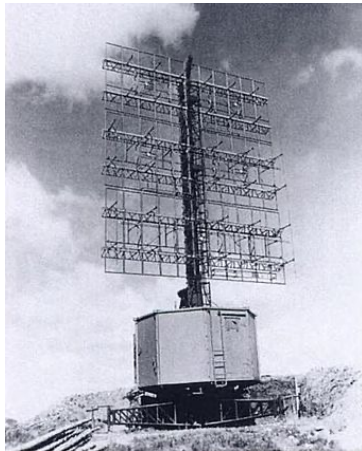
# LA RICERCA OPERATIVA

Si occupa dello sviluppo e dell'applicazione di metodi matematici per la risoluzione di problemi di decisione che si presentano in molteplici e diversi settori della vita reale.

Aiuta a determinare le decisioni da prendere per gestire nel modo più efficiente un sistema reale utilizzando strumenti matematici / informatici.

# La Ricerca Operativa (Operations Research)

- Metodi matematici rivolti alla soluzione di problemi decisionali
- Nata durante la seconda guerra mondiale (gestione di risorse limitate e problemi logistici)



- Si è sviluppata grazie alla disponibilità di strumenti automatici di calcolo (computer)
- Scopo: determinare la decisione ottima dato un problema in presenza di risorse limitate

# Esempi Applicativi

## ● Problemi in ambito industriale

### ➤ *Pianificazione della produzione*

determinare i livelli di produzione e/o l'utilizzazione di risorse; ad es. allocazione ottima di risorse = distribuzione di risorse limitate tra alternative concorrenti in modo da minimizzare il costo o massimizzare il guadagno.

### ➤ *Localizzazione e dimensione degli impianti*

decidere dove installare impianti di produzione per rifornire in modo ottimale aree distribuite su un territorio, ad es. dove costruire le stazioni base di una rete di telecomunicazioni (GSM/UMTS) e la potenza di trasmissione per coprire il territorio.

### ➤ *Controllo delle scorte*

decidere quando e quanto, durante un processo produttivo, si devono immagazzinare prodotti in modo da rispettare le consegne minimizzando i costi.

### ➤ *Scheduling*

# Esempi Applicativi

- Problemi di progettazione ottima

- *Progettazione di reti e loro gestione*

definire i collegamenti e dimensionare le capacità di una rete stradale, di telecomunicazione, di trasmissione dati, di circuiti, in modo da garantire il traffico tra le varie origini e destinazioni e minimizzare il costo complessivo

- *Progettazione strutturale*

definire il progetto di un edificio, in modo che resista al meglio a sollecitazioni derivanti da agenti esterni (terremoti, venti forti) oppure il progetto del profilo di un'ala di un aereo in modo che, ad esempio, sia massimizzata la portanza

- *VLSI design (allocazione ottima di componenti elettroniche)*

disegnare una piastra madre in modo che, ad esempio, siano minimizzate le lunghezze dei percorsi dei segnali elettrici

- ...

# Esempi Applicativi

- Problemi di organizzazione
  - *Instradamento di veicoli (Routing)*
  - *Manutenzione dei beni*
  - *Definizione dei turni di lavoro*
  - *Gestione ottima di risorse idriche*
  - *Ottimizzazione di politiche di controllo*
  - *Gestione ottima di aree di carico/scarico*
  - *Problemi in reti di comunicazione e distribuzione*
- Problemi decisionali di tipo economico
  - *Allocazione di capitali*
  - *Acquisto/Produzione di beni*
  - *Scelta di investimenti*

# La Ricerca Operativa (Operations Research)

- I problemi reali vengono affrontati definendone una rappresentazione quantitativa (modello matematico)
- La soluzione dei problemi è cercata per mezzo di tecniche (algoritmi) di ottimizzazione

## Problema Reale



## Formulazione



## Modello matematico

$$\text{Min } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$x_1 + 3x_2 - \dots - 4x_n \leq 4$$

$$x_2 - 4x_3 + \dots + 2x_n \geq 1$$

.....

.....

### Aspetto fondamentale della Ricerca Operativa:

Identificare un modello matematico con cui studiare in modo sistematico il problema decisionale



# Approccio Modellistico

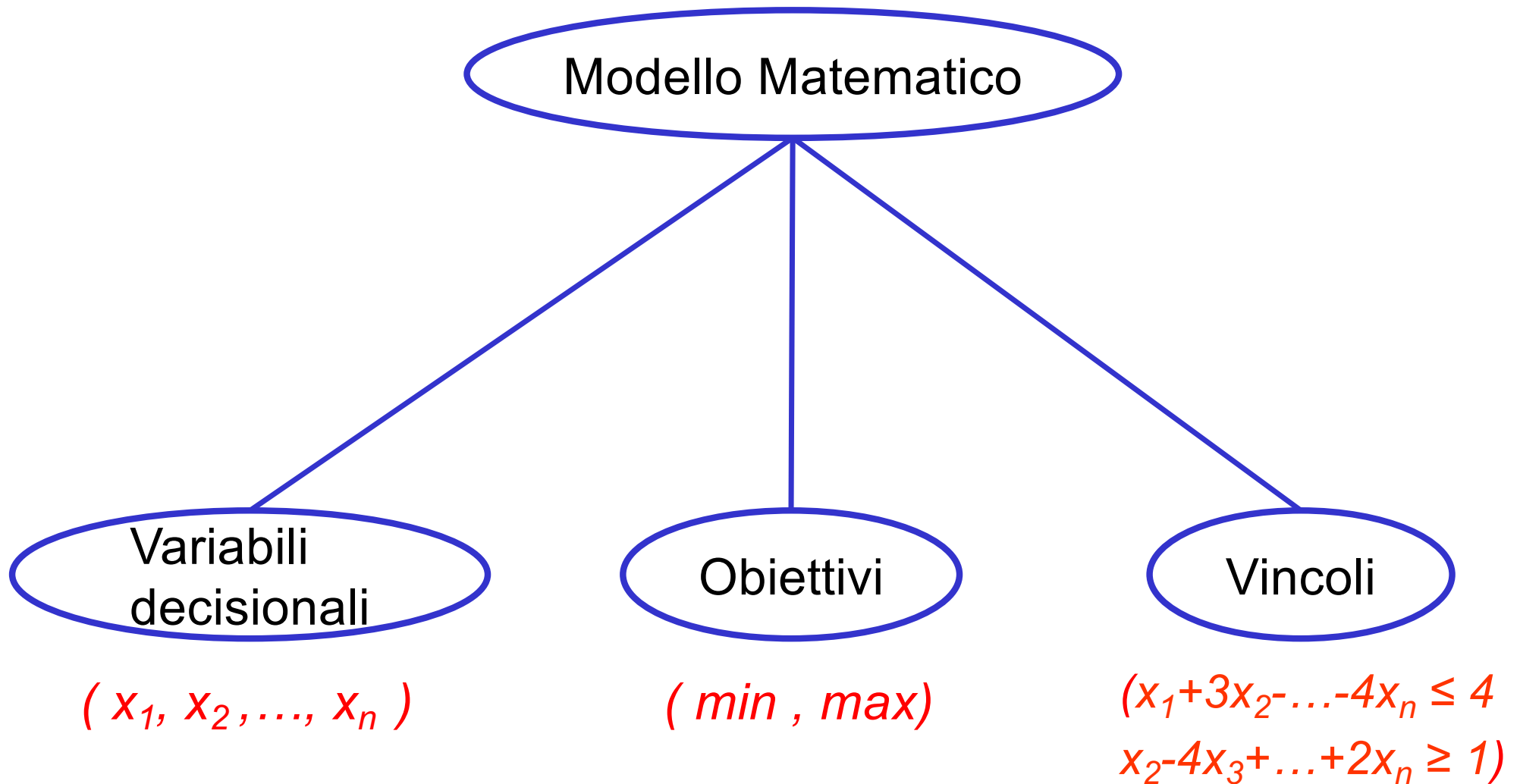
La costruzione di modelli matematici per la soluzione di problemi reali avviene attraverso diverse fasi:

- Analisi del problema
- Costruzione del modello
- Analisi del modello
- Soluzione numerica
- Validazione del modello

# Approccio Modellistico

- **Analisi del problema:** consiste nell'analisi della struttura del problema per individuare i legami logico funzionali e gli obiettivi.
- **Costruzione del modello:** si descrivono in termini matematici le caratteristiche principali del problema.
- **Analisi del modello:** prevede la deduzione per via analitica, in riferimento a determinate classi di problemi, di alcune importanti proprietà quali esistenza ed unicità della soluzione ottima, condizioni di ottimalità e stabilità in caso di variazioni.
- **Soluzione numerica:** si individua mediante opportuni algoritmi di calcolo la cui soluzione deve essere verificata dal punto di vista applicativo.
- **Validazione:** avviene attraverso una verifica sperimentale oppure con metodi di simulazione.

# Struttura dei problemi decisionali



# Formulazione dei problemi decisionali

- Decisione: processo di selezione tra più alternative
- Alternative finite o infinite
- Alternative definite esplicitamente o implicitamente
- Scelta sulla base di uno o più criteri (obiettivi)
- Condizioni di certezza e incertezza

*Caratteristiche dei problemi che saranno considerati:*

- ❑ *Condizioni di certezza (problemi deterministici)*
- ❑ *Presenza di un solo criterio (singolo obiettivo)*

# Esempio

Supponiamo che ci siano tre lavori da svolgere: **stuccare, imbiancare e levigare**. Abbiamo a disposizione tre persone **Mario, Luca ed Andrea** che sanno svolgere questi tre lavori ma con differenti tempistiche come indicato nella seguente tabella (i valori rappresentano le ore necessarie ad ogni persona per portare a termine il rispettivo lavoro).

	<b>STUCCA</b>	<b>IMBIANCA</b>	<b>LEVIGA</b>
<b>MARIO</b>	3	1	2
<b>LUCA</b>	2	1.5	1.5
<b>ANDREA</b>	3	1.5	3

Il nostro obiettivo è quello di assegnare ad ogni persona un lavoro e ad ogni lavoro una persona al fine di minimizzare le ore totali necessarie per svolgere i tre lavori.

# Consideriamo tutte le possibili soluzioni

MARIO - STUCCA: 3  
LUCA – IMBIANCA: 1.5  
ANDREA – LEVIGA: 3

→ 7.5

MARIO - STUCCA: 3  
LUCA – LEVIGA: 1.5  
ANDREA–IMBIANCA: 1.5

→ 6

MARIO - IMBIANCA: 1  
LUCA – STUCCA: 2  
ANDREA – LEVIGA: 3

→ 6

MARIO - LEVIGA:2  
LUCA – STUCCA: 2  
ANDREA–IMBIANCA:1.5

→ 5.5

MARIO - LEVIGA: 2  
LUCA – IMBIANCA: 1.5  
ANDREA – STUCCA: 3

→ 6.5

MARIO - IMBIANCA: 1  
LUCA – LEVIGA: 1.5  
ANDREA – STUCCA: 3

→ 5.5

# Algoritmi

- Per risolvere i problemi decisionali sono usati **algoritmi**
- Un algoritmo è una procedura iterativa costituita da un numero finito di passi
- Esistono problemi facili (pochi) e difficili
- La facilità di un problema è legata all'esistenza di un algoritmo di soluzione efficiente

## Un esempio: Assegnare 70 lavori a 70 persone

- Si indichino con  $i=1,\dots,70$  i lavori e con  $j=1,\dots,70$  le persone.
- Se la  $i$ -esima persona esegue il  $j$ -esimo lavoro si paga un costo  $c_{ij}$ .
- Una persona può eseguire solo un lavoro (vincolo)
- Ogni lavoro deve essere eseguito (vincolo)
- Lo scopo (decisione) è stabilire chi fa che cosa in modo che il costo pagato sia minimo (obiettivo).



Un possibile algoritmo di soluzione (**Brute Force**):

- 1) costruire tutte le possibili assegnazioni persone-lavori e calcolarne il costo
- 2) scegliere l'assegnazione con il costo più piccolo

Le assegnazioni alternative sono **70!** (le permutazioni di 70 numeri)

$1^a$

Persone	1	2	...	70
Lavori	1	2	...	70

$2^a$

Persone	1	2	...	70
Lavori	2	1	...	70

...

Il numero delle assegnazioni alternative è molto grande

$$70! > 10^{100}$$

Si supponga di disporre di un calcolatore che è in grado di calcolare  $10^6$  assegnazioni alternative (soluzioni) al secondo.

Quanto impiega l' algoritmo a risolvere il problema?

Supponendo di dover “esplorare”  $10^{100}$  assegnazioni sono necessari  $10^{94}$  secondi.

In un anno ci sono:

$$365(\text{gg}) \times 24(\text{h}) \times 60(\text{min}) \times 60(\text{sec}) \approx 31 \times 10^6 \approx 10^7 \text{ sec}$$

Per risolvere il problema sono necessari  $10^{87}$  anni !

Il Big Bang (data di inizio dell' universo)  
è avvenuto circa  $15 \times 10^9$  anni fa!

...ma se si disponesse di un calcolatore 1000 volte più veloce?

...si impiegherebbero  $10^{84}$  anni.

...e se si usassero  $10^9$  calcolatori in parallelo?

...si impiegherebbero  $10^{75}$  anni.

## Conclusioni:

- L' algoritmo Brute Force non è efficiente!
- Se questo fosse l'unico algoritmo utilizzabile per il problema dell'assegnazione persone-lavori, il problema sarebbe difficile
- La soluzione ottima dei problemi difficili può essere trovata solo per casi di ridotte dimensioni

- I problemi in cui la scelta è tra un numero finito di alternative (le variabili decisionali possono assumere solo un numero discreto di valori) si dicono combinatorici.
- La teoria della complessità è una parte della Ricerca Operativa che studia la difficoltà della soluzione dei problemi.
- Conoscere se un problema è difficile permette la scelta di un appropriato algoritmo:
  - ❑ Algoritmi esatti basati sull'enumerazione esplicita delle soluzioni
  - ❑ Algoritmi esatti basati sull'enumerazione implicita delle soluzioni
  - ❑ Algoritmi approssimati
  - ❑ Algoritmi euristici

# Risolvere i seguenti problemi

Il signor Rossi possiede un'azienda che produce due versioni di una bevanda energetica: normale e super. Per ogni quintale di bevanda venduta, l'azienda ha un profitto pari ad 1000 euro per il tipo normale e 1200 euro per il tipo super. Nella produzione è necessario utilizzare in sequenza tre tipi di macchinari, A, B, C, che ogni giorno possono lavorare un numero di ore massimo come riportato nella tabella seguente:

	<b>ORE</b>	<b>NORMALE</b>	<b>SUPER</b>
<b>A</b>	4	1	0.4
<b>B</b>	6	0.75	1
<b>C</b>	3.5	1	0

Per produrre un quintale di bevanda (normale o super) è richiesto l'utilizzo delle macchine per il tempo indicato nella stessa tabella. L'obiettivo del signor Rossi è quello di pianificare la produzione giornaliera dei due tipi di bevande al fine di massimizzare il profitto.

## **PROBLEMA 2:**

Il cuoco del ristorante dove lavoriamo ci ha assegnato il compito di andare a comprare le mele e le arance con 20 euro in tasca. Il costo di ogni kg di mele è pari a 5 euro mentre ogni kg di arance costa 2 euro. Inoltre il cuoco non vuole che acquistiamo più di 3.5 kg di mele. Infine il fruttivendolo questa settimana offre un buono sconto da 1 euro su ogni kg di mele e di 1.2 euro su ogni kg di arance acquistato. Questi buoni sconto sono però offerti a condizione che il numero di kg di mele, moltiplicato per 3, più il numero di kg di arance, moltiplicato per 4, non superi i 24 kg. L'obiettivo da raggiungere è quello di massimizzare lo sconto totale (da utilizzare per spese successive), ottenibile in base alla spesa fatta, rispettando però le indicazioni sia del cuoco che del fruttivendolo.

# Argomenti del corso

## ● Programmazione Lineare

- *Richiami di Algebra vettoriale*
- *Problemi di Programmazione Matematica*
- *Definizione di Iperpiani, insiemi convessi, soluzioni di base*
- *Th. Rappresentazione*
- *L' algoritmo del simplesso*
- *Teoria della dualità*
- *L' analisi di sensitività della soluzione*

## ● Teoria dei Grafi

- *Definizioni fondamentali*
- *Problemi di ottimizzazione sui grafi (Flusso a Costo Minimo, Massimo Flusso, Trasporto, Cammini minimi, Albero di Copertura Minimo)*

## ● Teoria della Complessità

- *Definizioni fondamentali*

# Ulteriori informazioni

## Libro di riferimento:

*Linear Programming and Network Flows*

di: Mokhtar S. Bazaraa - John Jeff Jarvis - Hanif D. Sherali

## Orario di Ricevimento

**Cerulli:** Martedì 15:00 – 17:00      Mercoledì: 15:00 – 16:00

**Carrabs:** Lunedì: 16:00 – 17:00      Martedì: 15:00 – 17:00

Alternativamente, richiedere appuntamento via email al docente.

## Email:

**Cerulli:** [raffaele@unisa.it](mailto:raffaele@unisa.it)

**Carrabs:** [fcarrabs@unisa.it](mailto:fcarrabs@unisa.it)

## Homepage:

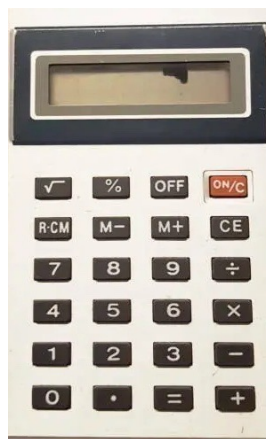
(<https://docenti.unisa.it/001227/home>)

(<https://docenti.unisa.it/020511/home>)

# Modalità d'esame

- L'esame consisterà di una prova scritta e di una prova orale.
- La **prova scritta** è tesa a valutare le capacità di risoluzione dei problemi di ottimizzazione ed ha, di norma, una durata di 120 minuti. Essa è composta da 4 o 5 esercizi e eventuali domande a risposta aperta, a cui è associato un punteggio. La somma di questi punteggi è pari a 30. La prova è ritenuta superata con una votazione di almeno 18/30.

**N.B.** Nell'elaborato bisogna riportare i calcoli effettuati ed è consentito l'uso delle calcolatrici **NON PROGRAMMABILI** (vedere foto). Avete tre mesi per trovarne una!



- Con il **colloquio orale** saranno valutate le conoscenze acquisite in merito alla modellazione e risoluzione di problemi di programmazione lineare. Il colloquio prevede la preliminare discussione del compito e varie domande riguardanti gli argomenti del programma del corso. La prova è ritenuta superata con una votazione di almeno 18/30.




# Modalità d'esame

- I **risultati** della prova scritta e la convocazione per la prova orale e la visione degli elaborati saranno pubblicati sulla mia homepage;
- E' possibile conservare il voto dello scritto all'interno della **stessa sessione d'esame** (giugno-luglio) per poter svolgere l'orale nell'appello successivo;
- Le slide **NON** sono sufficienti per poter superare l'esame. Bisogna studiare dagli appunti presi durante il corso e dal libro.
- Non ci sono **prove intercorso**.
- La frequenza non è obbligatoria ma **caldamente consigliata**;
- Per poter partecipare ad un appello è **INDISPENDABILE** la prenotazione sulla piattaforma esse3. Se avete problemi con la prenotazione contattate **PER TEMPO** l'Ufficio Didattica.
- Ulteriori informazioni sul corso, il materiale didattico e le tracce degli anni precedenti sono disponibili sulla mia homepage: <http://docenti.unisa.it/020511/home>

**Controllare sempre questo sito per avvisi e news.**

# Homepage



Docenti

Home

Curriculum

Didattica

Ricerca

**Materiali e Risorse**

🏠 / Docenti / Materiali e Risorse

CONDIVIDI

## Francesco CARRABS | Materiali e Risorse

Tutte le Categorie ▾

### Materiali Didattici

- Ricerca Operativa  
Dispense del Corso
- Ricerca Operativa  
Programma del Corso
- Ricerca Operativa 2  
Dispense del Corso
- Ricerca Operativa 2  
Programma del Corso

### Siti di Interesse

- Eventi  
Membro del Comitato Scientifico/Organizzatore
- Link Utili

### Prove di Esame

- Ricerca Operativa  
Tracce
- Ricerca Operativa  
Esercizi Svolti
- Ricerca Operativa  
Modalità d'esame
- Ricerca Operativa 2  
Tracce
- Ricerca Operativa 2  
Modalità d'esame

# Homepage



Docenti

Home

Curriculum

Didattica

Ricerca



Materiali e Risorse

[Home](#) / [Docenti](#) / [Materiali e Risorse](#)


[CONDIVIDI](#)

## Francesco CARRABS | Ricerca Operativa

### Dispense del Corso

	<a href="#">Introduzione al corso</a>	PDF
	<a href="#">Richiami di Algebra Vettoriale</a>	PDF
	<a href="#">Matrici e Sistemi di Equazioni Lineari</a>	PDF
	<a href="#">Problemi di Programmazione Matematica</a>	PDF
	<a href="#">Problemi di Programmazione Matematica (Matematica)</a>	PDF
	<a href="#">Formulazione di problemi di PL, combinazioni lineari, coniche e convesse</a>	PDF
	<a href="#">Risoluzione grafica dei problemi di pl, iperpiani e semispazi</a>	PDF
	<a href="#">Risoluzione grafica dei problemi di pl, iperpiani e semispazi (Matematica)</a>	PDF
	<a href="#">Punti e Direzioni estreme. Teorema della rappresentazione</a>	PDF
	<a href="#">Soluzioni di base ammissibili, teorema fondamentale della PL</a>	PDF
	<a href="#">Soluzioni di base ammissibili, teorema fondamentale della PL (matematica)</a>	PDF
	<a href="#">Individuazione delle direzioni estreme e delle basi associate ai vertici del poliedro</a>	PDF
	<a href="#">Metodo del simplesso: condizioni di ottimalità e di illimitatezza</a>	PDF
	<a href="#">Metodo del simplesso: condizioni di ottimalità e di illimitatezza (matematica)</a>	PDF
	<a href="#">Metodo del simplesso: passi ed esempio</a>	PDF
	<a href="#">Metodo delle due fasi e big-M</a>	PDF

# Homepage



Docenti

Home

Curriculum

Didattica

Ricerca

**Materiali e Risorse**

🏠 / Docenti / Materiali e Risorse

CONDIVIDI

## Francesco CARRABS | Materiali e Risorse

Tutte le Categorie

### Materiale Didattico

- Ricerca Operativa  
Dispense del Corso
- Ricerca Operativa  
Programma del Corso
- Ricerca Operativa 2  
Dispense del Corso
- Ricerca Operativa 2  
Programma del Corso

### Siti di Interesse

- Eventi  
Membro del Comitato Scientifico/Organizzatore
- Link Utili

### Procedure di Esame

- Ricerca Operativa  
Tracce
- Ricerca Operativa  
Esercizi Svolti
- Ricerca Operativa  
Modalità d'esame
- Ricerca Operativa 2  
Tracce
- Ricerca Operativa 2  
Modalità d'esame

# Homepage



**Docenti**

Home

Curriculum

Didattica

Ricerca





**Materiali e Risorse**

[Home](#) / [Docenti](#) / [Materiali e Risorse](#)

CONDIVIDI

## Francesco CARRABS | Ricerca Operativa

### Tracce

 Tracce fino al 2009	RAR
 14 Gennaio 2010	PDF
 22 Febbraio 2010	PDF
 Aprile 2010	PDF
 Luglio 2010	PDF
 Novembre 2010	PDF
 Gennaio 2011	PDF
 Febbraio 2011	PDF
 Aprile 2011	PDF
 Giugno 2011	PDF
 Settembre 2011	PDF
 Novembre 2011	PDF
 Febbraio 2012	PDF
 Luglio 2012	PDF
 Novembre 2012	PDF