ESERCIZIO 5

Si considerino quattro problemi A, B, C e D. Ognuno può appartenere o meno alla classe NP. Si conosca l'esistenza delle seguenti riduzioni:

$$A \le_p B \qquad B \le_p C \qquad D \le_p C$$

Per ognuna delle seguenti affermazioni indicate se è sicuramente VERA, sicuramente FALSA oppure NON SI SA (cioè dipende dai problemi e dalle relazione tra le classi P e NP). Giustificate brevemente le risposte.

1) se A è NP-completo, allora C è NP-completo.

NON SI SA. Affinché sia VERA, anche C deve appartenere a NP per la definizione di NP-completezza.

2) se A è NP-completo e $C \in P$, allora $A \in P$.

VERO. Dato che esiste una riduzione polinomiale da A a B, possiamo trasformare una istanza di A in una istanza di B in tempo polinomiale. Dato che esiste una riduzione polinomiale da B a C, possiamo trasformare una istanza di B in una di C in tempo polinomiale.

Per risolvere una istanza di A, la possiamo trasformare in una istanza di B in tempo polinomiale, per poi trasformare questa in una istanza di C in tempo polinomiale. Poiché $C \in P$, possiamo risolvere l'istanza di C in tempo polinomiale.

Il tempo totale delle due trasformazioni e della risoluzione del problema è polinomiale. Quindi, possiamo dedurre che $A \in P$.

3) se A è NP-completo e $B \in NP$, allora B è NP-completo.

VERO. Se A è NP-completo, per definizione di NP-completezza, ogni problema in NP è riducibile ad A. Dato che $A \le_p B$, per transitività, ogni problema in NP si può ridurre al problema B. Inoltre, $B \in NP$, quindi (per definizione), B è NP-completo.

4) Se C è NP-completo, allora $D \in NP$.

VERO.

a) Dato che $D \le_P C$, una istanza di D può essere trasformata in una istanza di C in tempo polinomiale. Dato che C è NP-completo, $C \in NP$, quindi, esiste un validatore per C. L'algoritmo per validare D può prevedere la conversione dell'istanza da D a C e la validazione di C. Quindi, $D \in NP$.

b) Se $D \in P$, allora $D \in NP$ poiché $P \subseteq NP$.

c) Poiché $D \le_P C$, D non può essere più complesso di C.