ESERCIZIO 3

Un grafo $G = (V, E)$ contiene una clique di dimensione k se esistono nodi $v_1, \ldots, v_k \in V$ tali che $(v_i, v_j) \in E \quad \forall\, i,j = 1, \ldots, k$ con $i \neq j$.

CLIQUE: dato un grafo G ed un intero k, il grafo G contiene una clique di dimensione k?

Mostrare che CLIQUE risulta NP-completo.

Sugg. Riduzione da INDEPENDENT-SET.

INDEPENDENT-SET $\leq_p$ CLIQUE

COSTRUZIONE DELL'ISTANZA

Dato un grafo $G = (V, E)$, contenente un independent-set S di dimensione $|S| = k$, costruiamo il grafo $G^c = (V^c, E^c)$, dove

* $V^c = V$
* $\forall\, u, v \in V \quad (u,v) \in E^c$ sse $(u,v) \notin E$

Mostriamo che G ha un insieme indipendente di dimensione k sse G^c ha una clique di dimensione k.

FATTO

S è un independent-set in G sse S è una clique in G^c.

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$ Sia S un independent set in G di dimensione k.

Per definizione, $\forall\, u,v \in S$ $(u,v) \notin E$.
Allora, per costruzione, $(u,v) \in E^c$.

Generalizzando $\forall\, u,v \in S$, possiamo concludere che S è una clique in G^c.

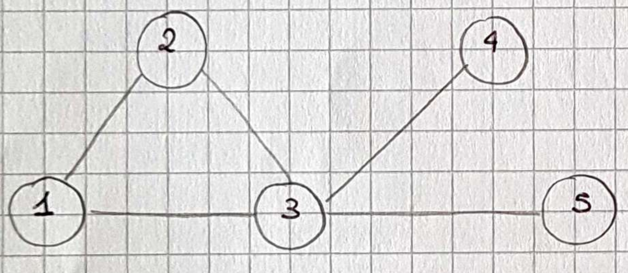
$\Leftarrow$ Sia S una clique in G^c.

Per definizione, $\forall\, u,v \in S$ $(u,v) \in E^c$ e, per costruzione di G^c, $(u,v) \notin E$.

Generalizzando $\forall\, u,v \in S$, possiamo concludere che S è un independent-set in G.

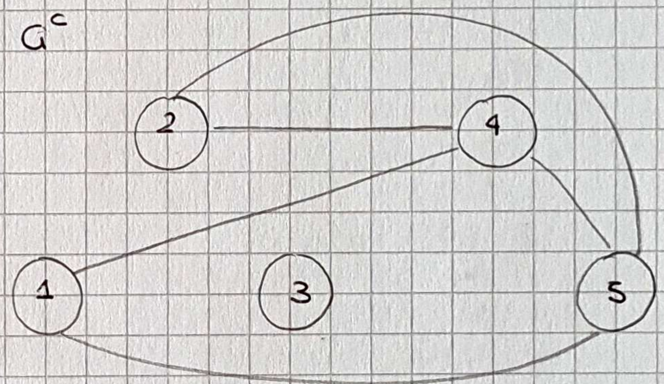
ESEMPIO

G



$S = \{2, 4, 5\}$ // INDEPENDENT-SET

G^c



$S = \{2, 4, 5\}$ // CLIQUE

CLIQUE $\in$ NP

Dato un grafo $G = (V, E)$ e un insieme S, per controllare se S è una clique di dimensione k in G, il verificatore:

1. verifica se $|S| = k$
2. verifica se $\forall\, u,v \in S$, $(u,v) \in E$

Questo verificatore ha complessità $O(|S|^2)$, quindi polinomiale.