Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

Lezione n° 16

Analisi di Post-Ottimalità:

- Variazione dei coefficienti di costo
- Variazione dei termini noti

R. Cerulli – F. Carrabs

Esempio: **pianificare la produzione di una piccola azienda**

- L'azienda produce due tipi di prodotti, P_1 e P_2, usando due materie prime indicate con A e B.
- La disponibilità giornaliera di materia prima A è pari a 6 ton, mentre quella di materia prima B è di 8 ton.
- La quantità di A e B consumata per produrre una ton di prodotto P_1 e P_2 è riportata nella seguente tabella.

Prodotti

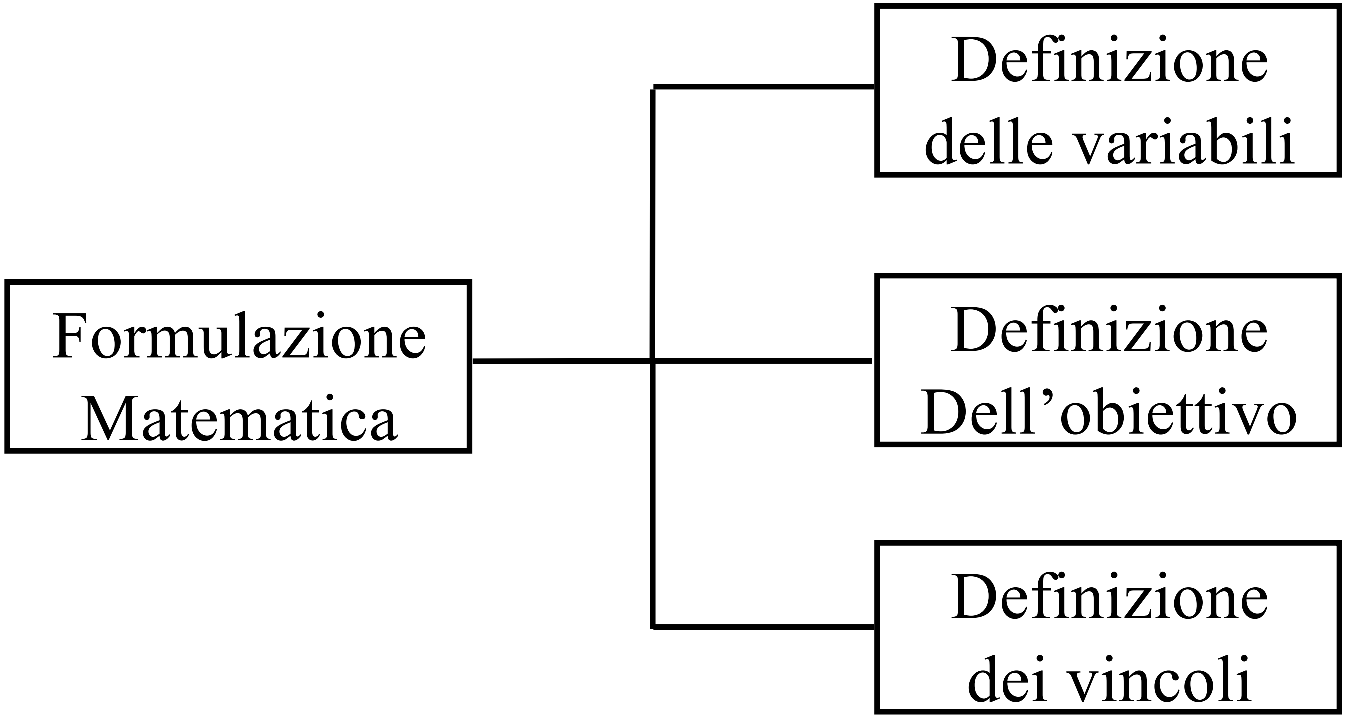
materie prime	P_1	P_2
A	1	2
B	2	1

- Si ipotizza che tutta la merce prodotta venga venduta.
- Il prezzo di vendita per tonnellata è pari a 3000€ per P_1 e 2000€ per P_2.
- L'azienda ha effettuato un'indagine di mercato con i seguenti esiti:
  - la domanda giornaliera di prodotto P_2 non supera mai per più di 1 ton quella di prodotto P_1,
  - la domanda massima giornaliera di prodotto P_2 è di 2 ton

Problema:

determinare le quantità di P_1 e P_2 che devono essere prodotte giornalmente in modo da rendere massimo il guadagno.

Esempio: formulare il modello matematico



Definizione delle variabili

Si introducono due variabili che rappresentano le quantità prodotte (e vendute) al giorno per P_1 e P_2 (ton):

- produzione di P_1: x_1
- produzione di P_2: x_2

Le due variabili sono continue.

Definizione dell' obiettivo

Il guadagno giornaliero (K€) è dato da $z = 3x_1 + 2x_2$

Definizione dei vincoli

- Vincoli sull'uso delle materie prime (l'uso giornaliero delle materie prime non può eccedere la disponibilità):

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \qquad \text{(A)}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \qquad (B)$$

- Vincoli scaturiti dalle indagini di mercato

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

- Non negatività delle variabili $x_1, x_2 \geq 0$

La formulazione definisce un **Problema di Programmazione Lineare a variabili continue**

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \qquad (1)$$

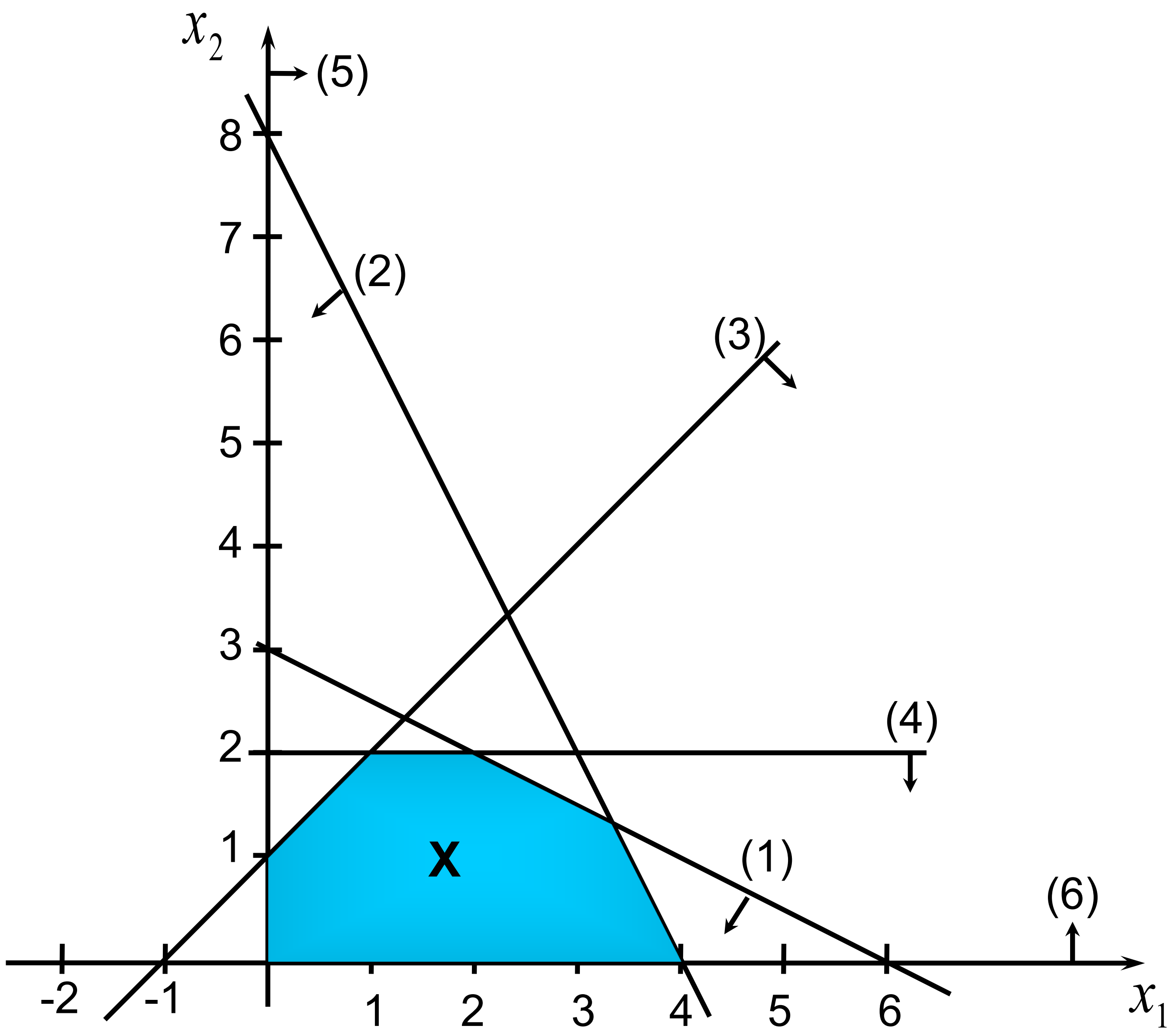
$$2x_1 + x_2 \leq 8 \qquad (2)$$

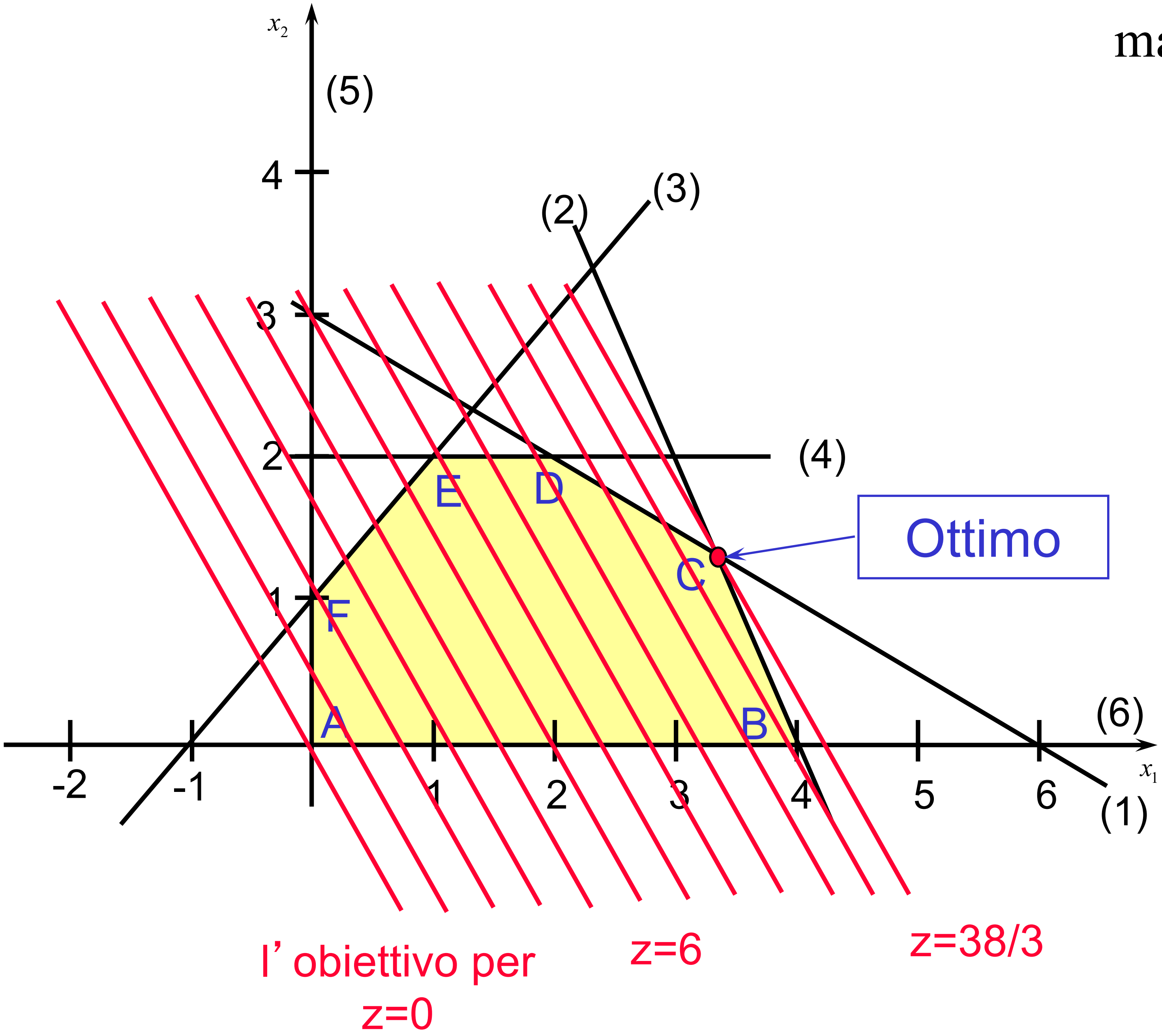
$$-x_1 + x_2 \leq 1 \qquad (3)$$

$$x_2 \leq 2 \qquad (4)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (5)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (6)$$





$\max z = 3x_1 + 2x_2$

A=(0,0)
B=(4,0)
$\boxed{\text{C=(10/3,4/3)}}$
D=(2,2)
E=(1,2)
F=(0,1)

Esempio: **sensitività della soluzione.**

Variazioni rispetto la disponibilità delle risorse.

(a) come aumentare le risorse per migliorare la soluzione ottima;

(b) come ridurre le risorse disponibili lasciando invariata la soluzione ottima.

I vincoli del problema hanno tutti la seguente forma

$$\boxed{\text{quantità di risorsa usata} \leq \text{disponibilità di risorsa}}$$

anche se solamente i vincoli (1) e (2) rappresentano effettivamente il consumo delle materie prime A e B.

Poiché i vincoli (1) e (2) sono soddisfatti all'uguaglianza dalla soluzione ottima corrispondente al punto C=(10/3,4/3), il livello ottimo di produzione per i due prodotti è tale da utilizzare tutte le materie prime disponibili.

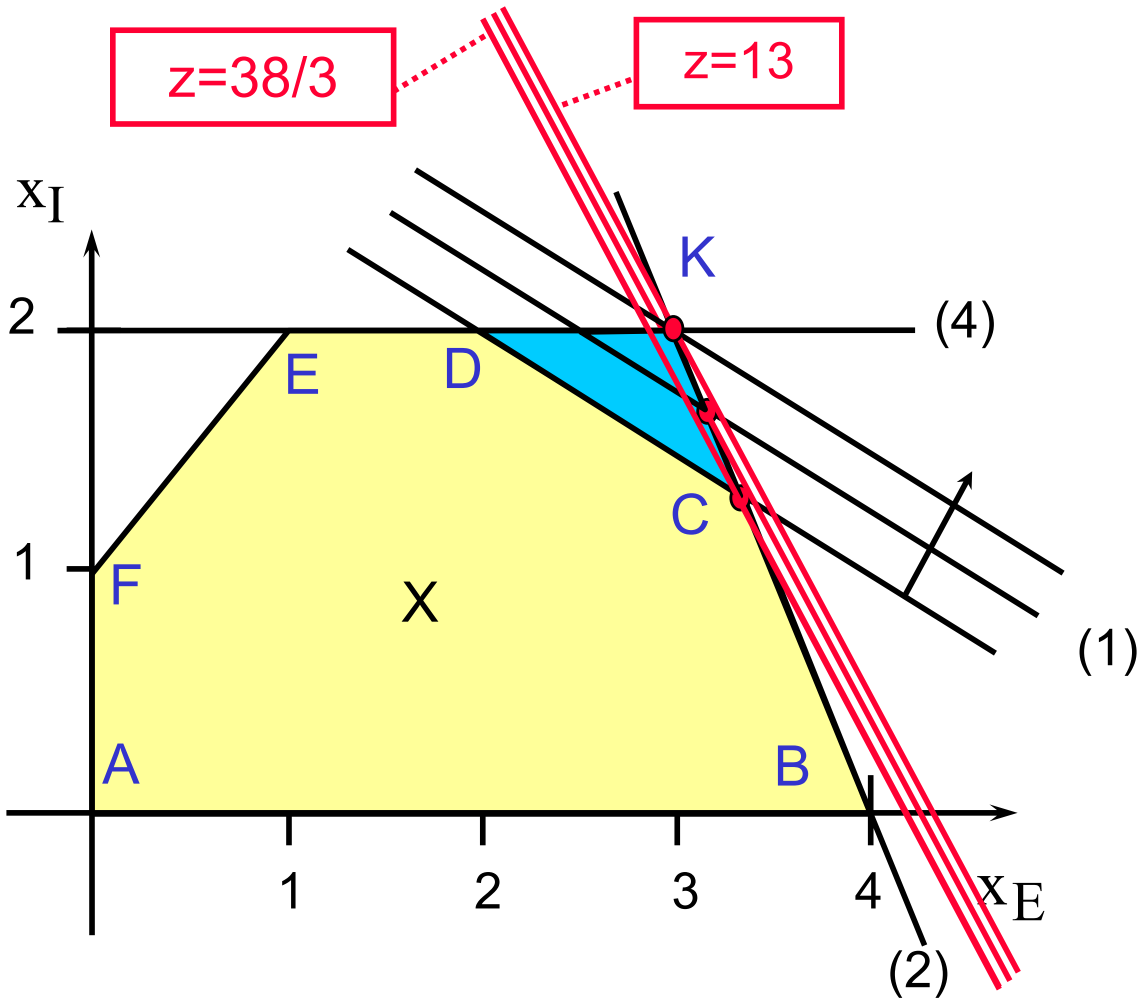
I vincoli (1) e (2) sono **saturi**, quindi le materie prime A e B sono utilizzate completamente, ovvero sono **risorse scarse**.

Vincolo saturo $\Rightarrow$ Risorsa scarsa

Vincolo non saturo $\Rightarrow$ Risorsa abbondante

- E' possibile aumentare la disponibilità di una risorsa scarsa per migliorare la soluzione ottima (caso (a)).
- E' possibile diminuire la disponibilità di una risorsa abbondante senza variare la soluzione ottima (caso (b)).

Verifichiamo fino a che valore ha senso aumentare la materia prima A.



$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \quad (2)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \quad (3)$$

$$x_2 \leq 2 \quad (4)$$

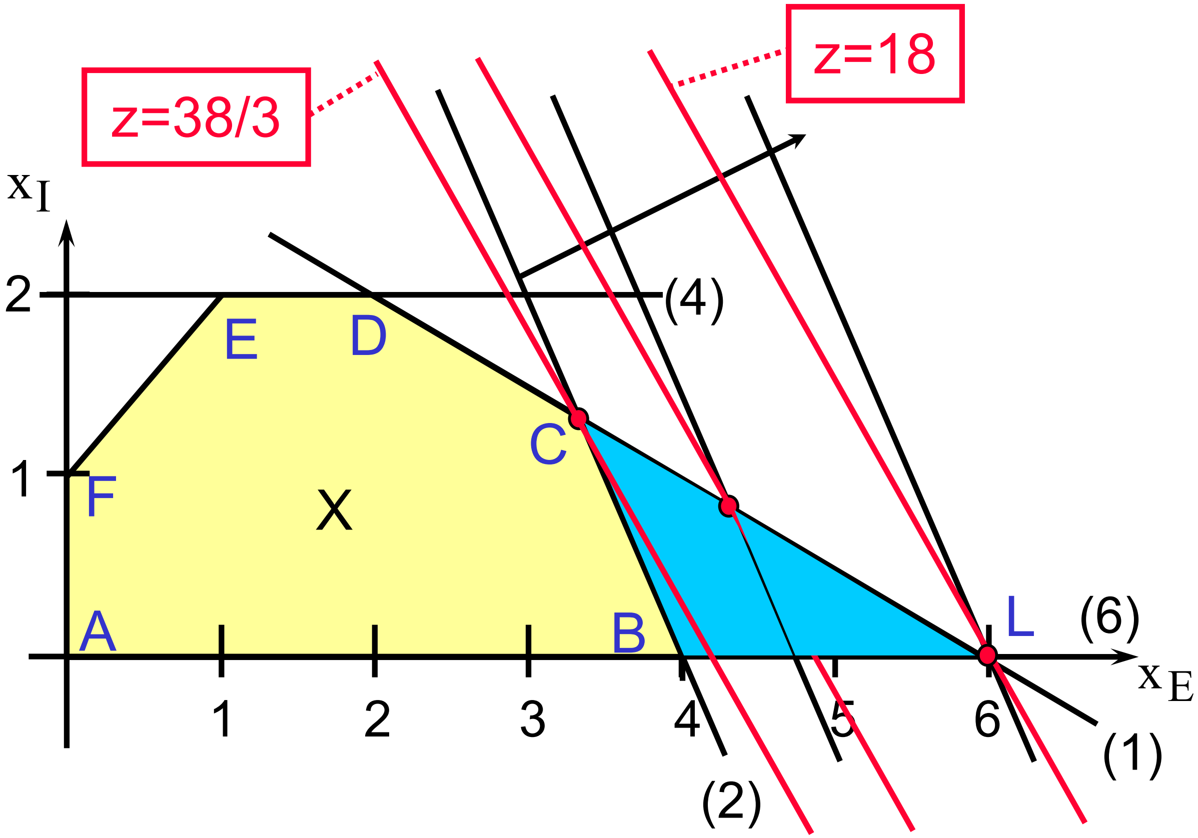
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Aumentando la risorsa A il vincolo (1) viene traslato e, di conseguenza, cambia il punto di ottimo.

Oltre il punto K=(3,2) (intersezione dei vincoli (2) e (4)) non ha più senso aumentare la risorsa A.

Quindi il nuovo valore di b_1 è 7.

Analoga verifica può essere fatta per la materia prima B.



$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \quad (2)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \quad (3)$$

$$x_2 \leq 2 \quad (4)$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

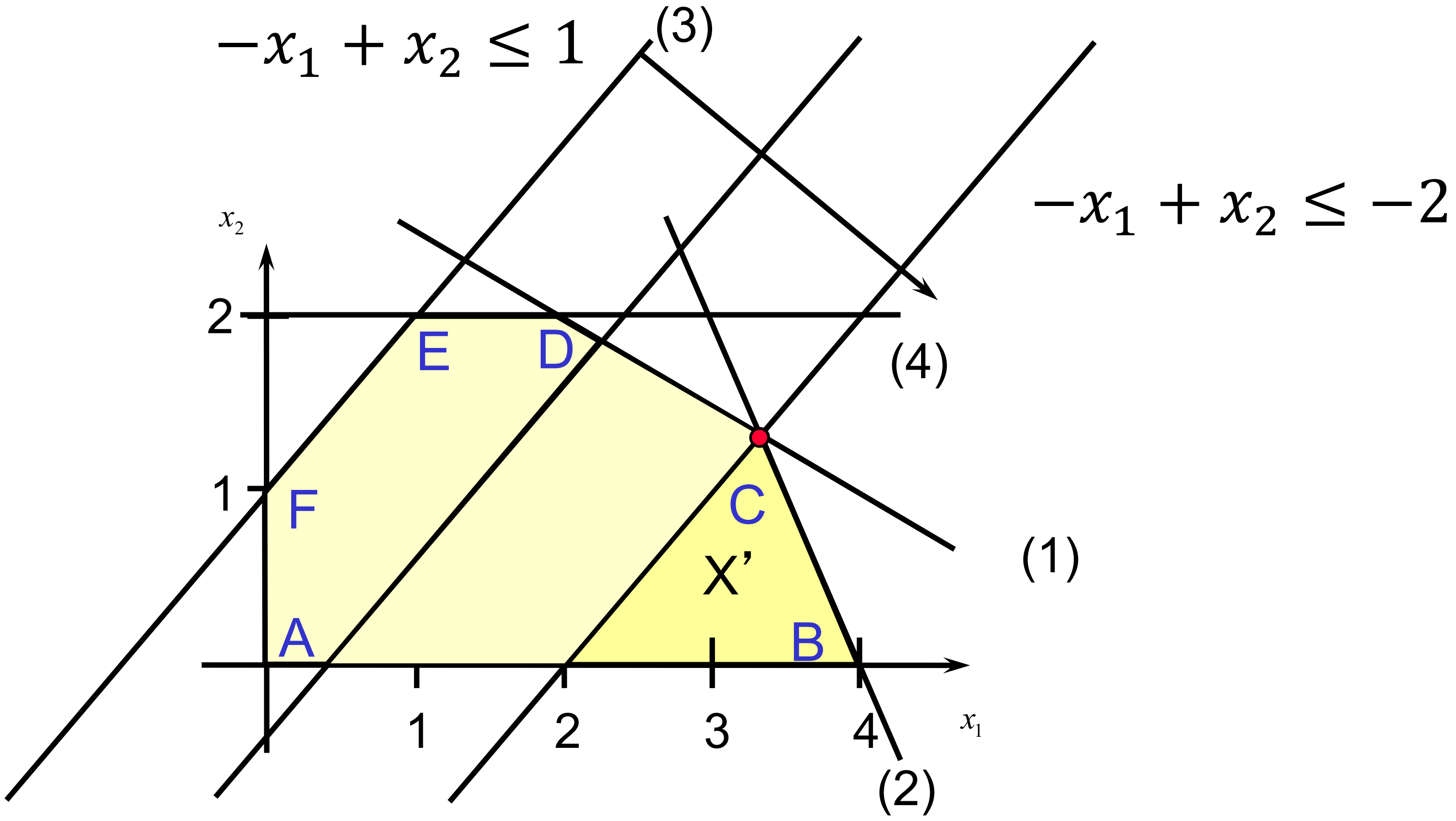
Aumentando la risorsa B il vincolo (2) si sposta e di conseguenza varia il punto di ottimo.

Oltre L=(6,0) (intersezione di (1) e (6)) non ha più senso aumentare la risorsa B.

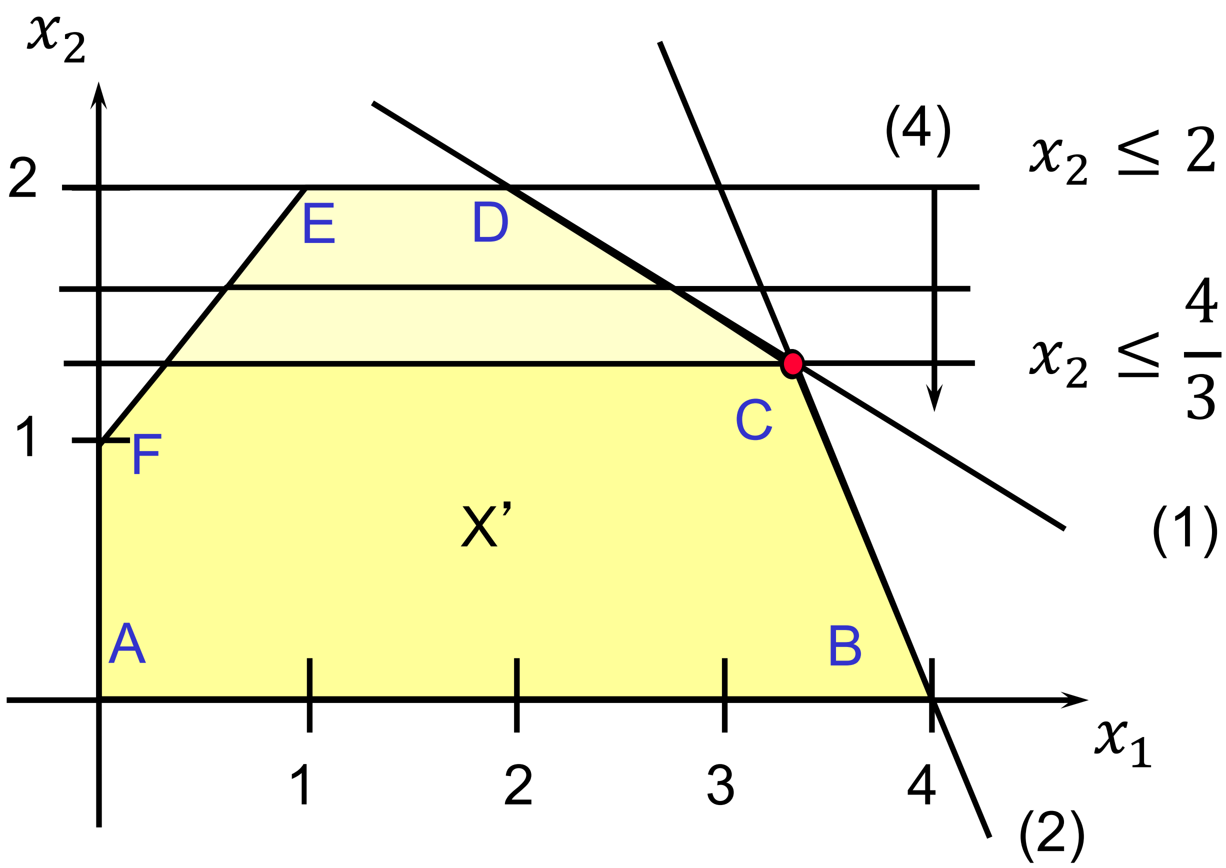
Il nuovo valore di b_2 è 12.

Supponendo i vincoli (3) e (4) relativi al consumo di due ulteriori risorse abbondanti, è possibile verificare di quanto diminuirne la disponibilità senza modificare la soluzione ottima.

Per il vincolo (3)



Per il vincolo (4)



- Dopo aver verificato la convenienza di una possibile maggiore disponibilità delle risorse A e B, è interessante determinare quale sia la risorsa che di più convenga aumentare.

- Nell'esempio, l'azienda potrebbe avere una limitata disponibilità finanziaria che vorrebbe far fruttare al meglio, acquisendo un'ulteriore quantità di una delle risorse in modo da incrementare maggiormente i propri profitti.

- Questa informazione è ottenibile per mezzo della Programmazione Lineare.

Si può calcolare il **Valore di una Unità di Risorsa** w_i:

$$\boxed{w_i = \frac{\text{massima variazione di } z}{\text{massima variazione della risorsa } i}}$$

Per la risorsa A: $$w_A = \frac{13 - \frac{38}{3}}{7 - 6} = \frac{39 - 38}{3} = \frac{1}{3} \qquad (K€/ton)$$

Per la risorsa B: $$w_B = \frac{18 - \frac{38}{3}}{12 - 8} = \frac{\frac{54 - 38}{3}}{4} = \frac{4}{3} \qquad (K€/ton)$$

- La quantità w_i indica di quanto aumenta l'obiettivo in corrispondenza dell'acquisizione di un'ulteriore unità di risorsa.
- E' evidente come nell'esempio l'incremento unitario migliore è associato alla risorsa B.

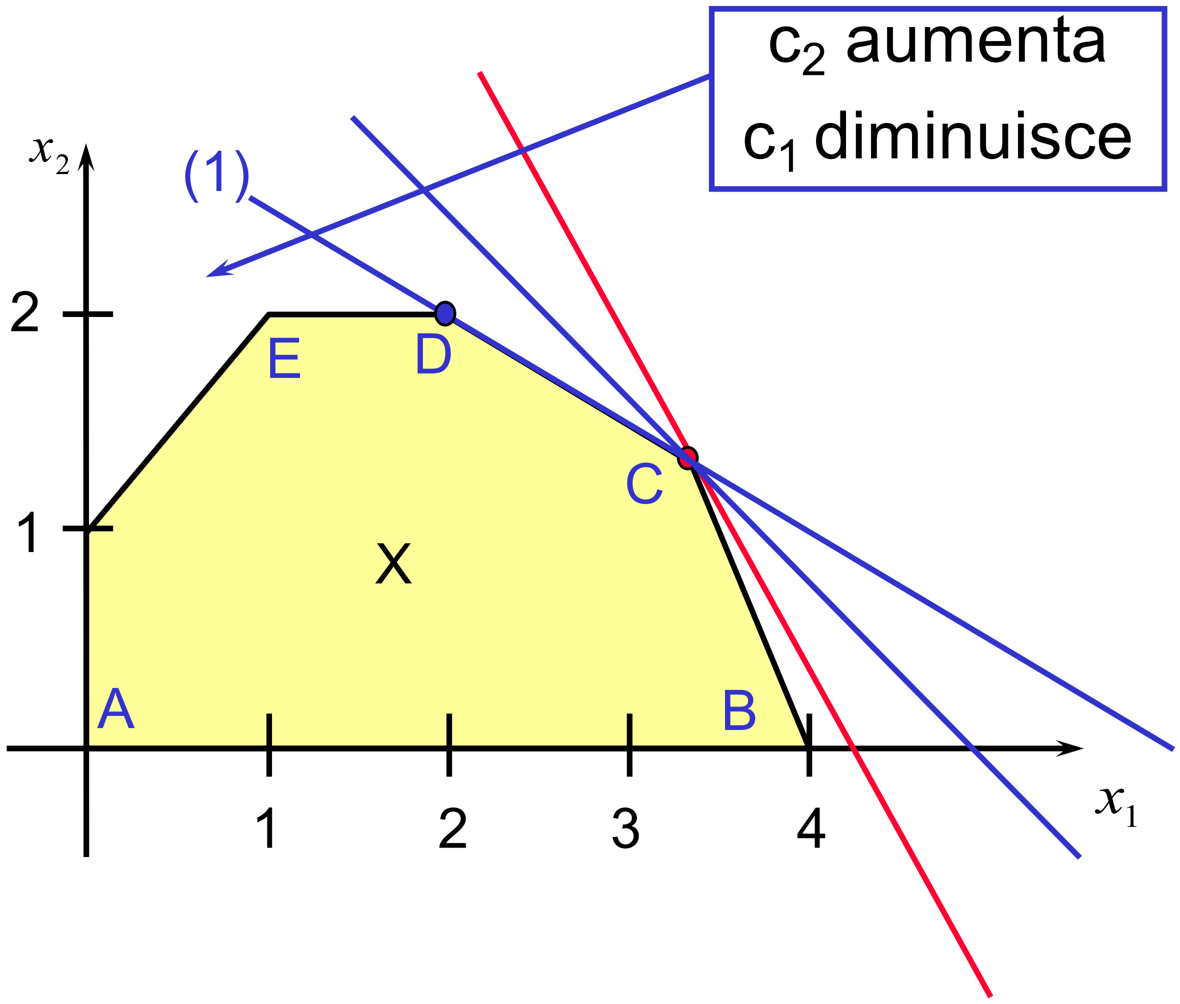
Variazioni del prezzo di vendita dei prodotti.

Si tratta di analizzare entro quali limiti di tolleranza possono variare i prezzi di vendita senza cambiare la base ottima (la produzione associata al punto C).

Variazioni del prezzo di vendita dei prodotti.

Variando c_1 e c_2 cambia la pendenza della funzione obiettivo:

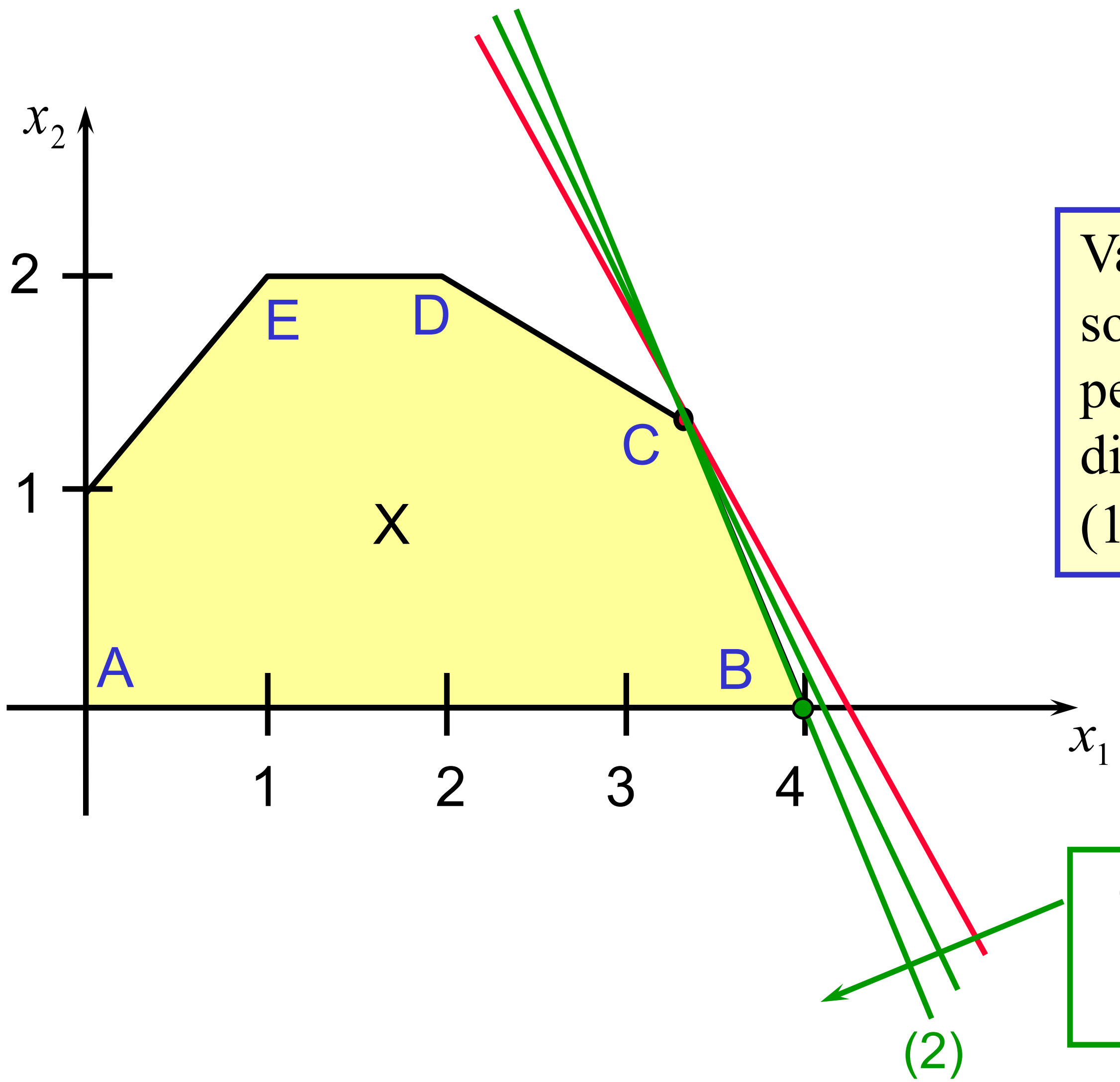
$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$



Variazioni del prezzo di vendita dei prodotti

Variando c_1 o c_2 cambia la pendenza della funzione obiettivo:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$



Variando c_1 e c_2 il punto C rimane soluzione ottima fino a che la pendenza della funzione obiettivo diventa uguale a quella dei vincoli (1) e (2).

c_2 diminuisce

c_1 aumenta

Analisi di Post-Ottimalità
(Analisi della Sensitività della Soluzione)

Dato un problema di programmazione lineare

$$\min \ \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

sia $\underline{x}^*$ la soluzione di base ammissibile ottima e B la base ottima associata a tale soluzione. Quindi:

$\underline{x}_B^* = A_B^{-1}\underline{b} \geq \underline{0}$ (Ammissibilità)

$z_j - c_j \leq 0 \quad \forall j \in N$ (Ottimalità)

Determinare come sia possibile variare i parametri del problema lasciando invariata tale base ottima.

Cinque casi:

1) variazione nel vettore dei costi $\underline{c}$;

2) variazione nel vettore dei termini noti $\underline{b}$;

3) variazione nella matrice di vincoli A;

4) aggiunta di una nuova variabile;

5) aggiunta di un nuovo vincolo.

Caso 1: variazione nel vettore dei costi $\underline{c}$.

Data una soluzione di base ammissibile ottima $\underline{x}^*$ (sia B la base associata a tale soluzione), supponiamo che il coefficiente di una delle variabili sia cambiato da c_k a c'_k. L'effetto di questo cambio si ripercuoterà solo sui coefficienti di costo ridotto.

Bisogna considerare i seguenti due casi:

caso 1.1) variazione di un coefficiente di costo relativo ad una variabile **non in base**;

caso 1.2) variazione di un coefficiente di costo relativo ad una variabile **in base**.

Caso 1.1) variazione di un coefficiente di costo c_k relativo ad una variabile x_k **non in base**:

Sia c_k , $k \in N$, il coefficiente che viene modificato come segue:

$$c'_k = c_k + \delta$$

In questo caso $\underline{c}_B^T$ non subisce variazioni e quindi

$z_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j$ rimane inalterato $\forall j \in N$.

Solo il coefficiente di costo ridotto $z_k - c_k$ cambia come segue:

$$z_k - c'_k = z_k - (c_k + \delta) = (z_k - c_k) - \delta$$

Se $z_k - c'_k \leq 0$ allora $\underline{x}^*$ è ancora la soluzione ottima.
Se $z_k - c'_k > 0$ allora $\underline{x}^*$ non è più la soluzione ottima e quindi occorre effettuare un'iterazione del simplesso per far entrare in base la variabile x_k .

Caso 1.1) variazione di un coefficiente di costo c_k relativo ad una variabile x_k **non in base**:

Quale è l'intervallo di valori che può assumere δ affinchè l'attuale base B continui a rimanere ottima?

$$z_k - c'_k = (z_k - c_k) - \delta \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta \geq (z_k - c_k)$$

Quindi per ogni valore di δ nell'intervallo $(z_k - c_k) \leq \delta \leq +\infty$ la base continua a rimanere ottima.

Caso 1.2) variazione di un coefficiente di costo c_{B_i} relativo ad una variabile x_{B_i} **in base**:

Sia c_{B_i}, $i = 1, \dots m$, il coefficiente che viene modificato come segue:

$$c'_{B_i} = c_{B_i} + \delta$$

Poiché $z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j \quad \forall j \in N$, la modifica di c_{B_i} implica la variazione di tutti i coefficienti di costo ridotto associati alle variabili fuori base. In particolare si ha che:

$$c'_{B_i} = c_{B_i} + \delta \quad \Longrightarrow \quad \underline{c}'_B = \underline{c}_B + \delta \underline{e}_i \qquad\qquad \underline{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (i - esimo\ elemento)$$

Caso 1.2) variazione di un coefficiente di costo c_{B_i} relativo ad una variabile x_{B_i} **in base**:

$$z_j' - c_j = (\underline{c}_B^T + \delta \underline{e}_i^T) A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j + \delta \underline{e}_i^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j$$

dove $\underline{e}_i^T A_B^{-1} = (A_B^{-1})^i$ è la i-esima riga della matrice A_B^{-1}.

Le condizioni su δ si ottengono imponendo che:

$$z_j' - c_j = (z_j - c_j) + \delta (A_B^{-1})^i \underline{a}_j \leq 0 \quad \forall j \in N$$

Caso 2) variazione del termine noto di un vincolo.

Sia b_i, $i = 1, \dots m$, il termine noto dell'i-esimo vincolo che viene modificato come segue:

$$b_i' = b_i + \delta \quad \Longrightarrow \quad \underline{b}' = \underline{b} + \delta \underline{e}_i$$

A causa di tale variazione, i valori delle variabili di base cambiano secondo la seguente formula:

$$\underline{x}_B' = A_B^{-1}\underline{b}' = A_B^{-1}\left(\underline{b} + \delta \underline{e}_i\right) = A_B^{-1}\underline{b} + \delta (A_B^{-1})_i \Longrightarrow \underline{x}_B' = \underline{x}_B + \delta (A_B^{-1})_i$$

dove $A_B^{-1}\underline{e}_i = (A_B^{-1})_i$ è la i-esima colonna della matrice A_B^{-1}.

Le condizioni su δ si ottengono imponendo che

$$\underline{x}_B' = \underline{x}_B + \delta (A_B^{-1})_i \geq \underline{0}$$

Esempio: Analisi di Sensibilità

Dato il seguente problema di P.L.

$$\min -2x_1 + x_2 - x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\Rightarrow$$

$$\min -2x_1 + x_2 - x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_5 = 4$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Base ottima: B={1,5}, N={2,3,4}

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti:

$$z_2 - c_2 = -3$$
$$z_3 - c_3 = -1$$
$$z_4 - c_4 = -2$$

$$\underline{x}_B = A_B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$z^* = \underline{c}_B^T A_B^{-1}\underline{b} = -12$$

Esempio: caso 1.1) variazione di un coefficiente di costo c_k relativo ad una variabile x_k **non in base**:

Di quanto può variare il coefficiente c_2 prima di cambiare la base ottima?

$$z_2 - c_2' = (z_2 - c_2) - \delta \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad -3 - \delta \leq 0 \quad \Longrightarrow \delta \geq -3$$

Verifichiamo cosa succede scegliendo un $\delta < -3$, ad esempio $\delta = -4$.

Poiché x_2 non è in base, il valore $z_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j$ non cambia per nessun indice $j \in N$. L'unico coefficiente di costo ridotto che cambia è:

$$z_2 - c_2' = (z_2 - c_2) - \delta = \; -3 + 4 > 0$$

Poiché $z_2 - c_2' > 0$, la soluzione non è più ottima. Bisogna fare entrare la variabile x_2 in base.

Esempio: caso 1.2) variazione di un coefficiente di costo c_k relativo ad una variabile x_k **in base**:

Di quanto può variare il coefficiente c_1 prima di cambiare la base ottima?

$$z'_j - c_j = (z_j - c_j) + \delta (A_B^{-1})^i \underline{a}_j \leq 0 \quad \forall j \in N \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z'_2 - c_2 = (z_2 - c_2) + \delta [1\ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \leq 0 \Rightarrow -3 + \delta \leq 0 \Rightarrow \delta \leq 3$$

$$z'_3 - c_3 = (z_3 - c_3) + \delta [1\ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0 \Rightarrow -1 + \delta \leq 0 \Rightarrow \delta \leq 1$$

$$z'_4 - c_4 = (z_4 - c_4) + \delta [1\ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0 \Rightarrow -2 + \delta \leq 0 \Rightarrow \delta \leq 2$$

Verifichiamo cosa succede scegliendo un $\delta > 1$, ad esempio $\delta = 2$.

Poiché x_1 è in base il valore z_j cambia per ciascun indice $j \in N$ secondo la relazione: $z_j' - c_j = (z_j - c_j) + \delta(A_B^{-1})^i \underline{a}_j \leq 0$

$$z_2' - c_2 = -3 + 2[1\ 0]\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = -3 + 2 \cdot 1 = -1$$

$$z_3' - c_3 = -1 + 2[1\ 0]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = -1 + 2 \cdot 1 = 1$$

La base non soddisfa più la condizione di ottimalità!

$$z_4' - c_4 = -2 + 2[1\ 0]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = -2 + 2 \cdot 1 = 0$$

Esempio: caso 2) variazione del termine noto di un vincolo.

Di quanto può variare al più il termine noto b_1 prima di rendere inammissibile la base ottima?

$$\underline{x}'_B = \underline{x}_B + \delta (A_B^{-1})_i \geq \underline{0}$$

$$\underline{x}'_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{cases} 6 + \delta \geq 0 \Longrightarrow \delta \geq -6 \\ 10 + \delta \geq 0 \Longrightarrow \delta \geq -10 \end{cases}$$

Verifichiamo cosa succede scegliendo $\delta = -7$.

$$\underline{x}'_B = \underline{x}_B + \delta (A_B^{-1})_i \geq \underline{0}$$

Soluzione inammissibile.

$$\underline{x}'_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$