ESERCIZIO 2

Utilizzate le riduzioni studiate per descrivere una riduzione polinomiale da 3SAT a VERTEX-COVER.

Sugg. 3SAT $\leq_p$ INDEPENDENT-SET $\leq_p$ VERTEX-COVER

DEFINIZIONE DEL PROBLEMA VERTEX-COVER

Dato un grafo $G = (V, E)$ e un intero k, esiste un sottoinsieme di vertici $S \subseteq V$ tale che $|S| \leq k$ e, per ogni arco, almeno uno dei due estremi è in S.

DIMOSTRAZIONE (IDEA)

Nell'esercizio 1, abbiamo dimostrato che 3SAT $\leq_p$ INDEPENDENT-SET.
Qui dimostriamo che INDEPENDENT-SET $\leq_p$ VERTEX-COVER.
Per la proprietà transitiva delle riduzioni polinomiali, possiamo poi concludere che 3SAT $\leq_p$ VERTEX-COVER.

INDEPENDENT-SET $\leq_p$ VERTEX-COVER (FATTO)

Mostriamo che un insieme S di vertici è un independent set in G sse $V - S$ è un vertex cover in G.

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$ Sia S un independent set.
Consideriamo un generico arco $(u, v) \in E$.

Per definizione di independent set, $u \in S$, $v \in S$ o nessuno dei due $\in S$.

Ciò significa che:

$$u \notin S \text{ o } v \notin S \Rightarrow u \in V-S \text{ o } v \in V-S$$

Quindi, $V - S$ copre l'arco (u, v).

Ripetiamo questo ragionamento $\forall (u, v) \in E$.
$V - S$ è, quindi, un vertex cover per G.

$\Leftarrow$ Sia $V - S$ un vertex-cover.

Consideriamo due nodi $u, v \in S$.

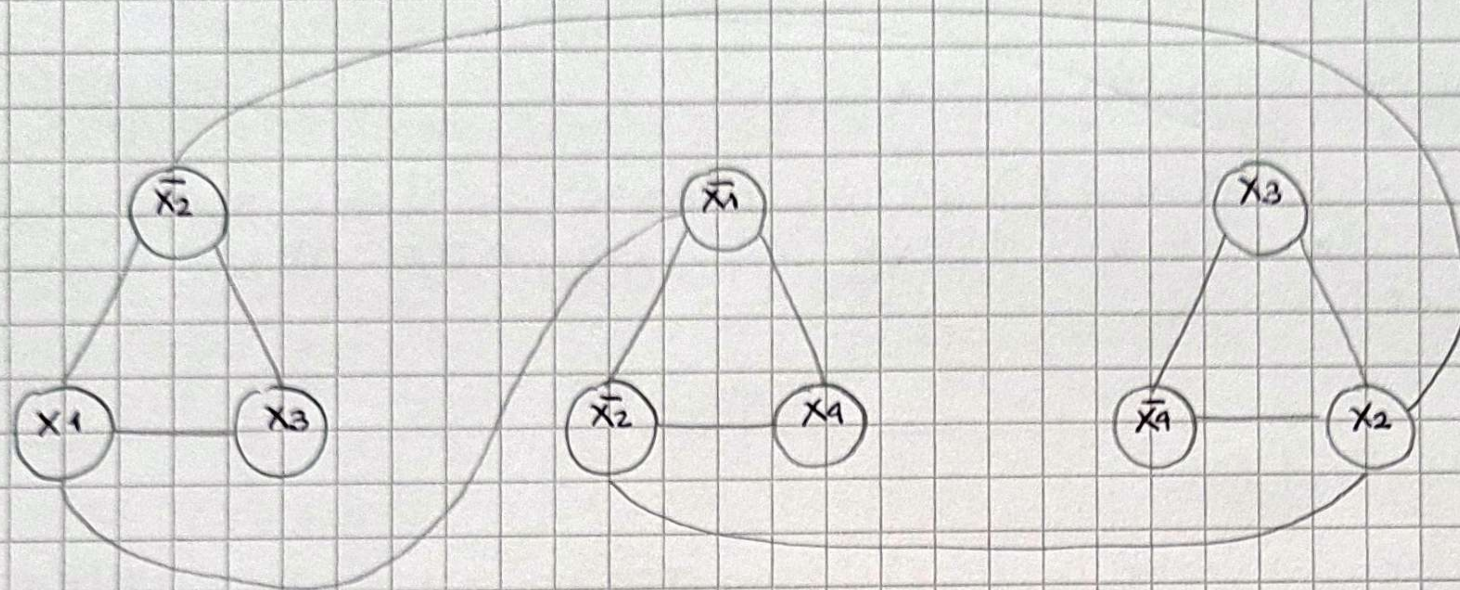
Notiamo che non può esistere l'arco (u, v) in G. Infatti, se esistesse, non sarebbe coperto da nessun nodo in $V - S$, contraddicendo il fatto che $V - S$ è un vertex-cover.

Quindi, S è un independent-set per G.

Data la formula

$$\phi = (x_1 \cup \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$$

trovarne una soluzione e determinare l'istanza di vertex-cover corrispondente a ϕ e la soluzione corrispondente.



$V = \{ x_1, \bar{x}_2, x_3, \bar{x}_2, \bar{x}_1, x_4, \bar{x}_4, x_3, x_2 \}$

$S = \{ x_1, x_4, x_3 \}$ // INDEPENDENT-SET

$V - S = \{ \bar{x}_2, x_3, \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_4, x_2 \}$ //VERTEX-COVER

$x_1, x_3, x_4 = 1$ // ASSEGNAMENTO DI VERITA' ALLE VARIABILI DI ϕ CHE LA RENDE VERA