Lezioni di Ricerca Operativa

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 2: Richiami di Algebra vettoriale.

- Operazioni sui vettori
- Combinazione lineare, combinazione conica, combinazione convessa
- Indipendenza lineare tra vettori
- Base di uno spazio

Vettori

Definizione (Vettore): Prende il nome di vettore ad *n* componenti reali una *n*-pla ordinata di numeri reali.

Esempio: La coppia $\underline{x} = [-1 \quad 4.3]$ è un esempio di vettore a 2 componenti, la prima è $x_1 = -1$ e la seconda è $x_2 = 4.3$

Definizione (Vettore colonna): Prende il nome di vettore colonna il vettore le cui componenti sono disposte lungo una linea verticale (colonna). Lo si indica con la seguente notazione:

$$\underline{x} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \end{array}$$

vettore colonna di dimensione $n=3$

Vettori

Definizione (Vettore riga): Prende il nome di vettore riga il vettore le cui componenti sono disposte lungo una linea orizzontale (riga). Lo si indica con la seguente notazioni:

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \underline{x}^T = & [3 & -1 & 7] \end{array}$$

vettore riga di dimensione *n=3*

Definizione (Trasposizione): Si chiama trasposizione l'operazione unaria che trasforma un vettore riga (colonna) in un vettore colonna (riga).

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^T = [1\ 2\ 3\ -4\ -6\ 7]$$

Vettori

Definizione (Vettore nullo): Prende il nome di vettore nullo, e lo si indica con $\underline{0}^T = [0\ 0\ \ldots\ 0]$, il vettore le cui componenti sono tutte nulle.

Definizione (i-esimo vettore fondamendale): Prende il nome di *i*-esimo vettore fondamentale, e lo si indica con

$$\underline{e}_i^T = [0\ 0\ \overbrace{\ldots 1 \ldots}^{\text{i-esima componente}}\ 0],$$

il vettore avente tutte le componenti nulle tranne la *i*-esima che è uguale a 1.

Definizione (Scalare): Prende il nome di scalare un qualsiasi numero reale.

Operatori $\leq$, $\geq$, $\neq$ sui vettori

Siano $\underline{u}$ e $\underline{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^n$.

Le notazioni $\underline{u} \leq \underline{v}$ e $\underline{u} \geq \underline{v}$ corrispondono alle disuguaglianze *componente per componente* ossia:

$$\underline{u} \leq \underline{v} \quad \Leftrightarrow \quad u_i \leq v_i \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\underline{u} \geq \underline{v} \quad \Leftrightarrow \quad u_i \geq v_i \qquad i = 1, \dots, n$$

Esempio:

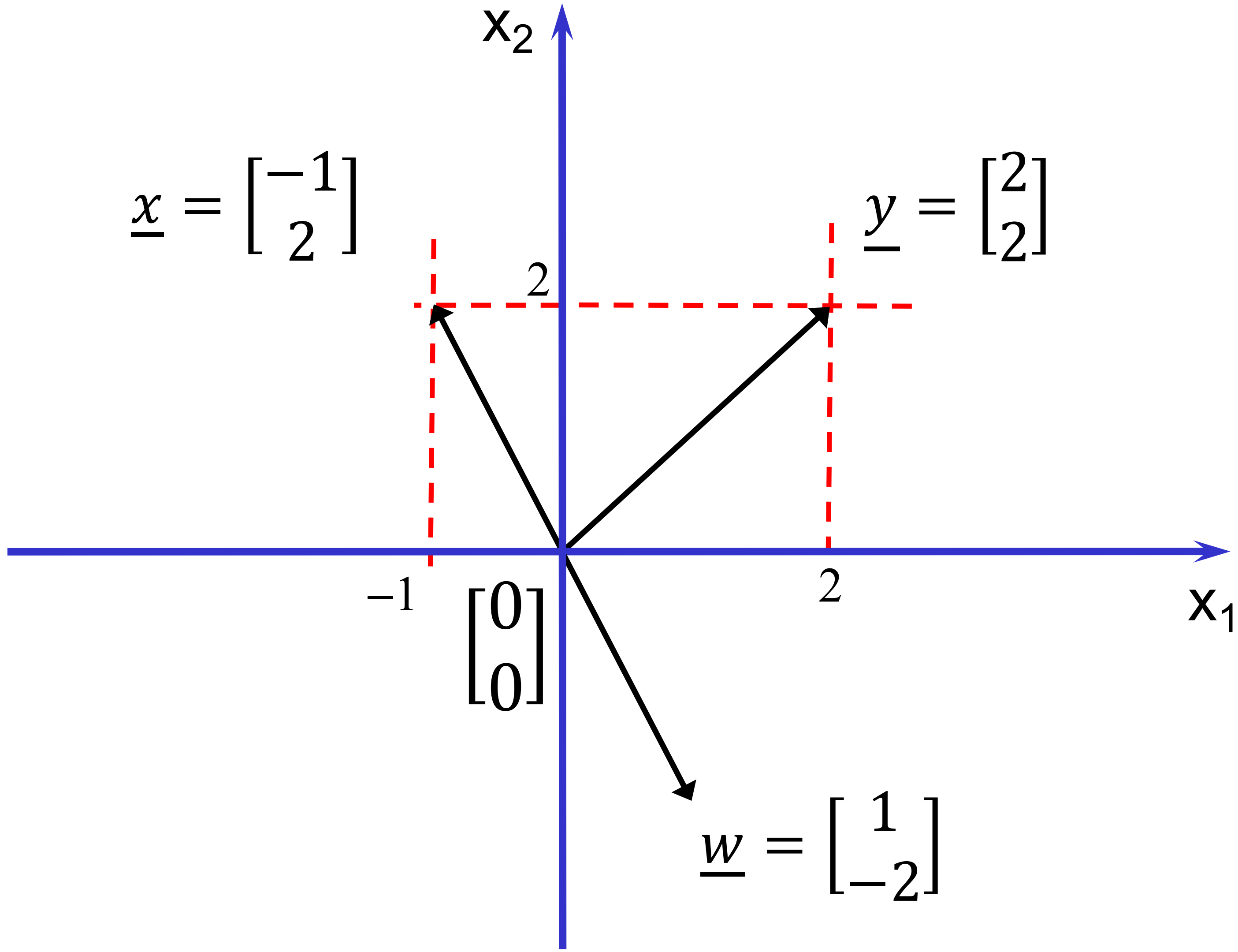
$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{v}$$

Invece, la notazione $\underline{u} \neq \underline{v}$ è definita in questo modo:

$$\underline{u} \neq \underline{v} \quad \Leftrightarrow \quad \exists i : \; u_i \neq v_i$$

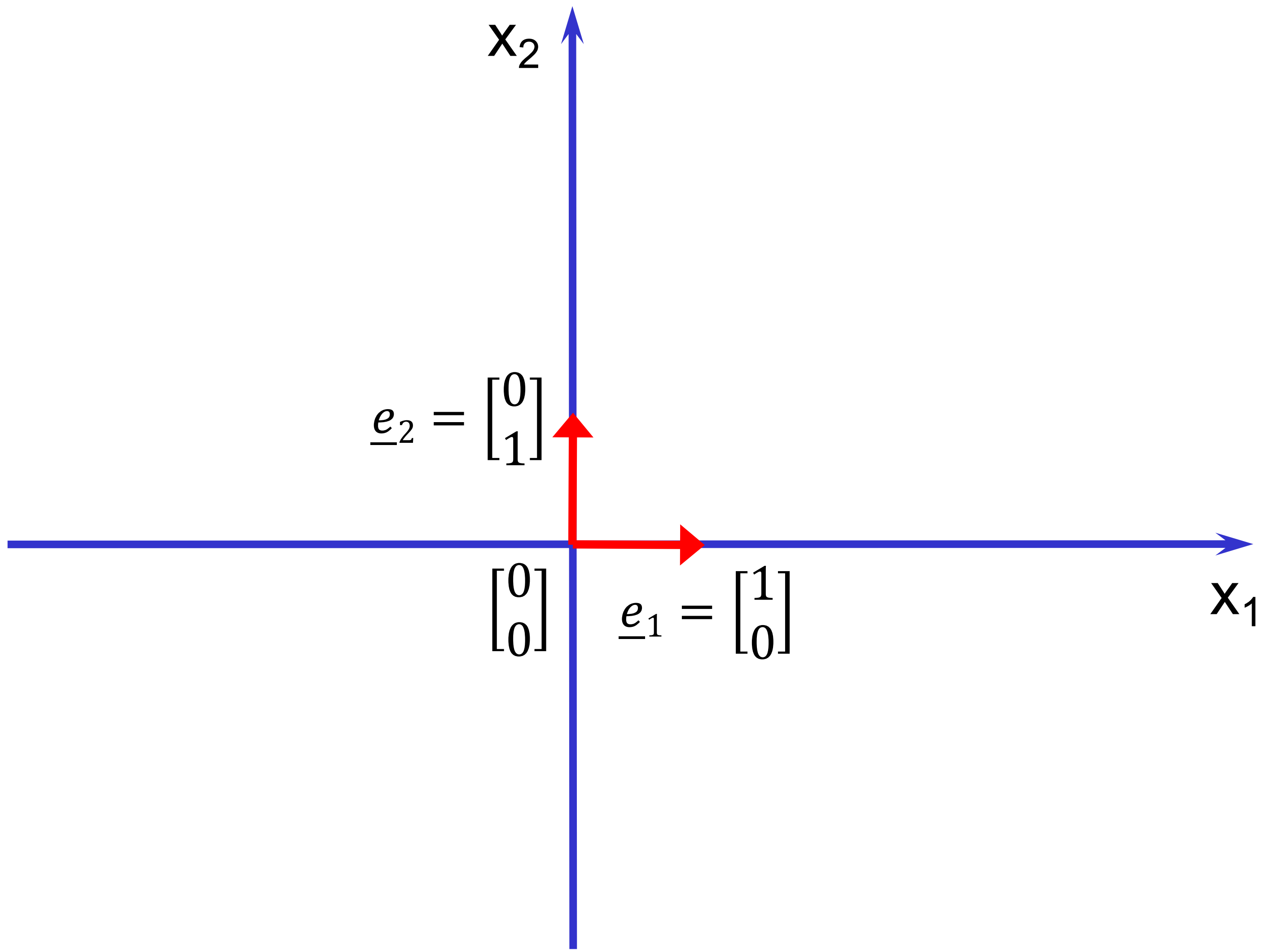
Esempio: vettori di dimensione 2

Dato un sistema di assi cartesiani, ogni vettore $\underline{x}^T = (p_1, p_2)$ può essere rappresentato nel sistema tramite un **punto** (p_1, p_2) oppure da una **segmento** che connette l'origine degli assi al punto (p_1, p_2) (in questo corso il punto di applicazione di un vettore sarà (quasi) sempre l'origine degli assi [0 0]).



Esempio: vettori fondamentali di dimensione 2

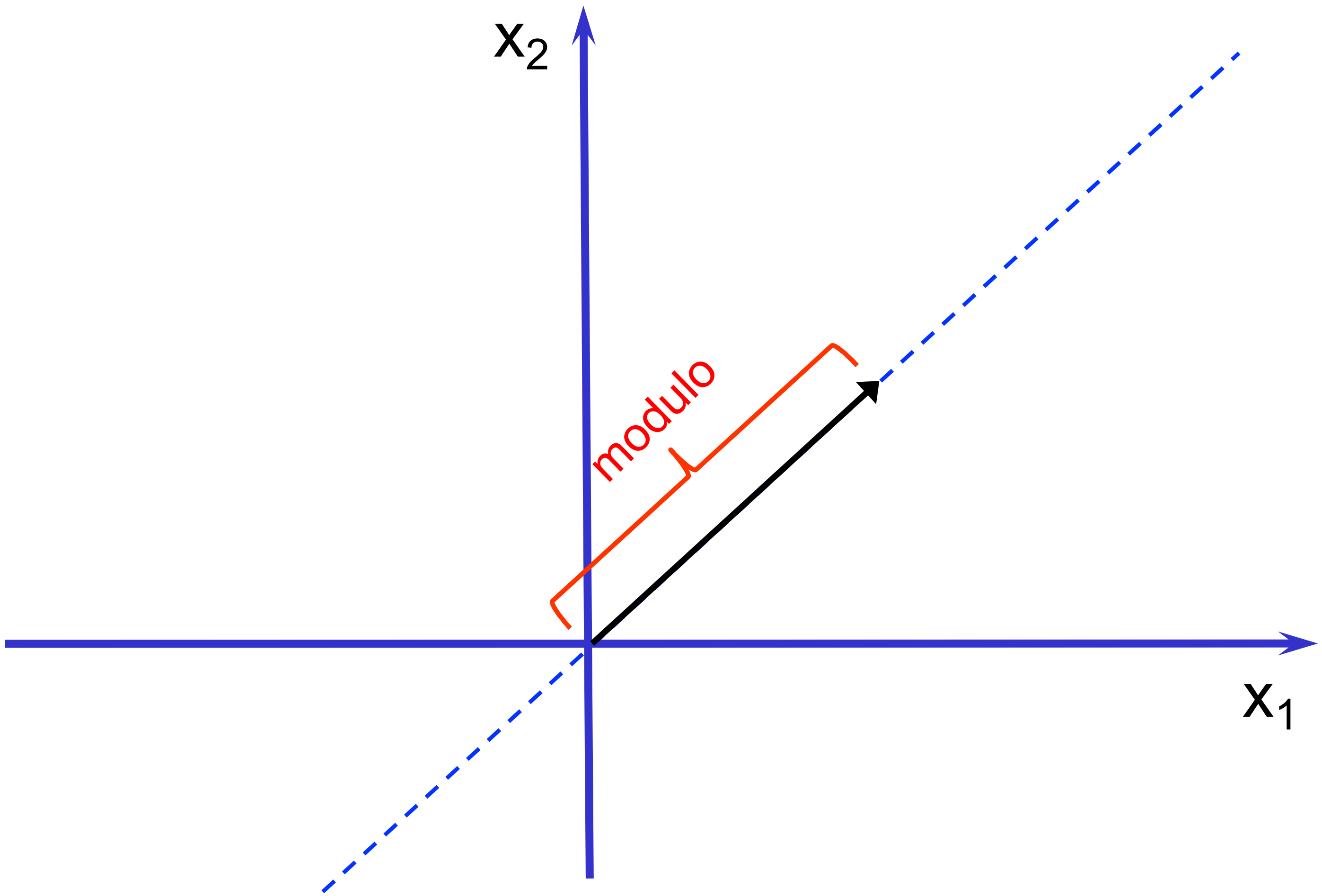
In figura sono rappresentati i due vettori fondamentali $\underline{e}_1$ ed $\underline{e}_2$ di $\mathbb{R}^2$.



Caratteristiche di un vettore

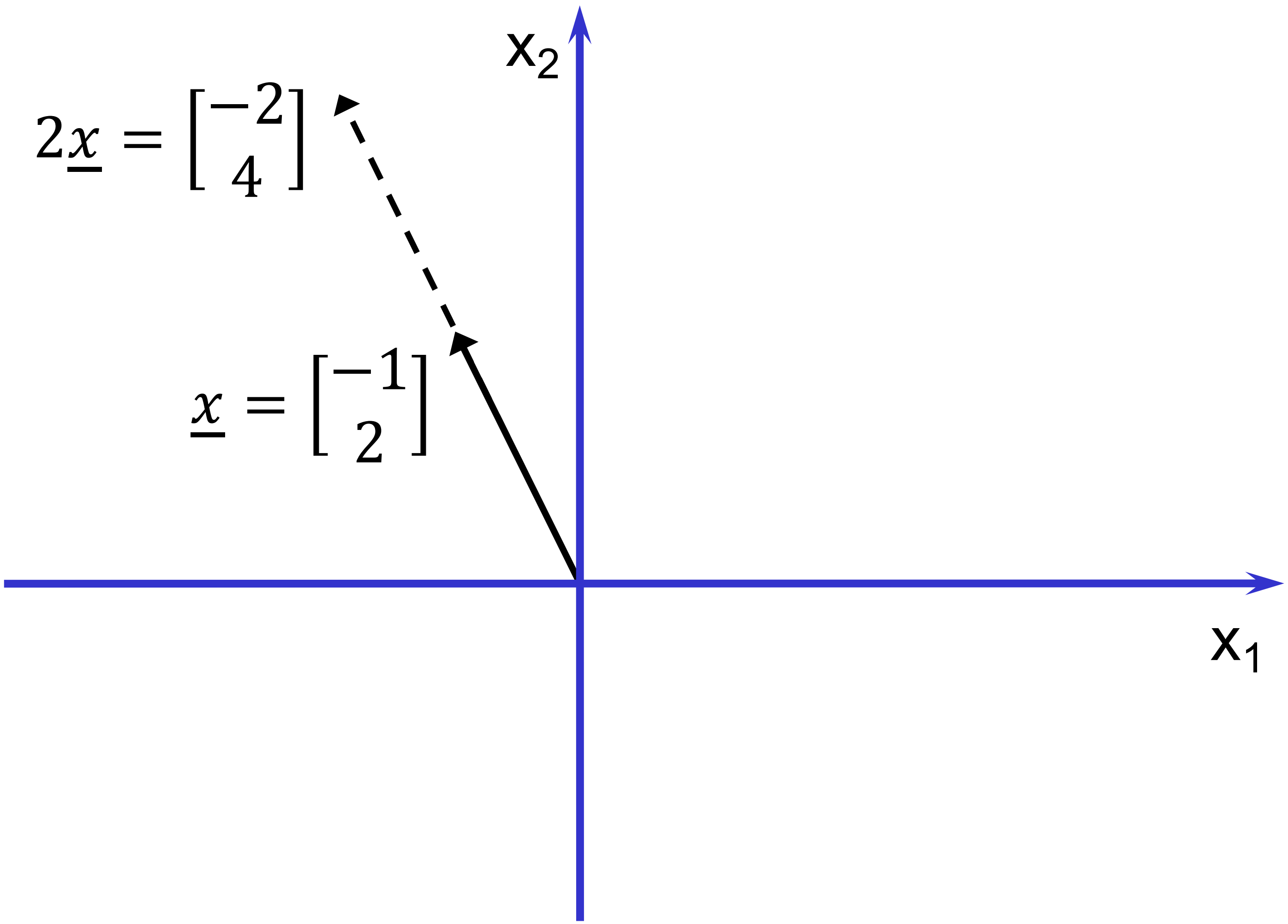
Ogni vettore è caratterizzato da:

- un **modulo**, cioè la lunghezza del vettore;
- una **direzione**, data dalla retta sulla quale giace il vettore;
- un **verso**, uno dei due alternativi sulla retta direzione del vettore.



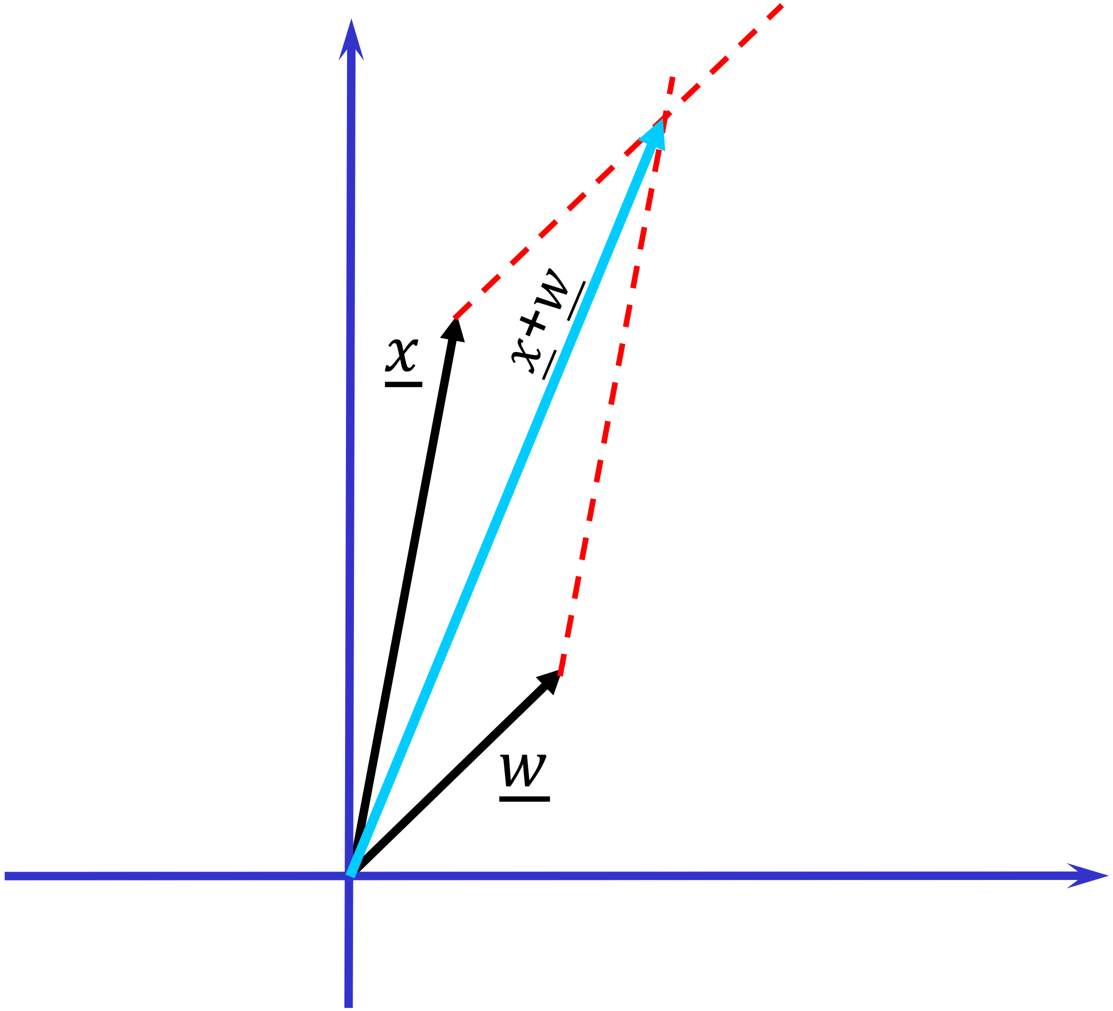
Moltiplicazione per uno scalare

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2\underline{x} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$



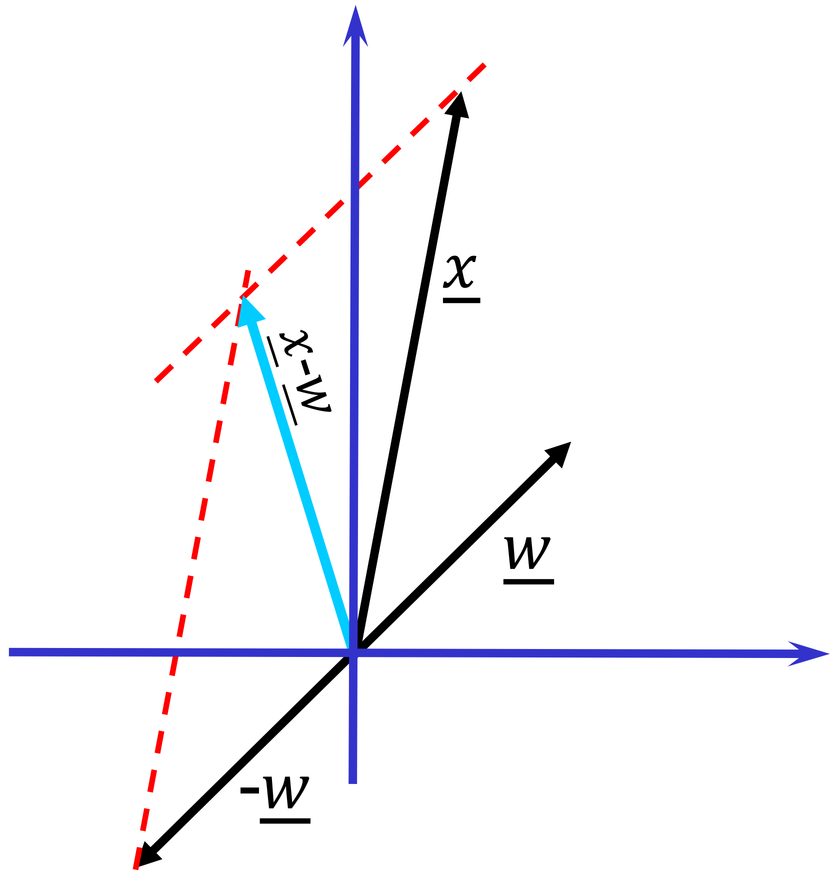
Addizione di vettori: regola del parallelogramma

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \underline{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{x} + \underline{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$



Sottrazione tra vettori: regola del parallelogramma

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \underline{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{x} - \underline{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Prodotto Interno (o prodotto scalare) tra vettori

$$\underline{x}^T \underline{w} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n$$

$$\underline{x}^T = [0,2] \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{x}^T \underline{w} = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 8$$

Per il prodotto scalare vale la proprietà commutativa ossia:

$$\underline{x}^T \underline{w} = \underline{w}^T \underline{x}$$

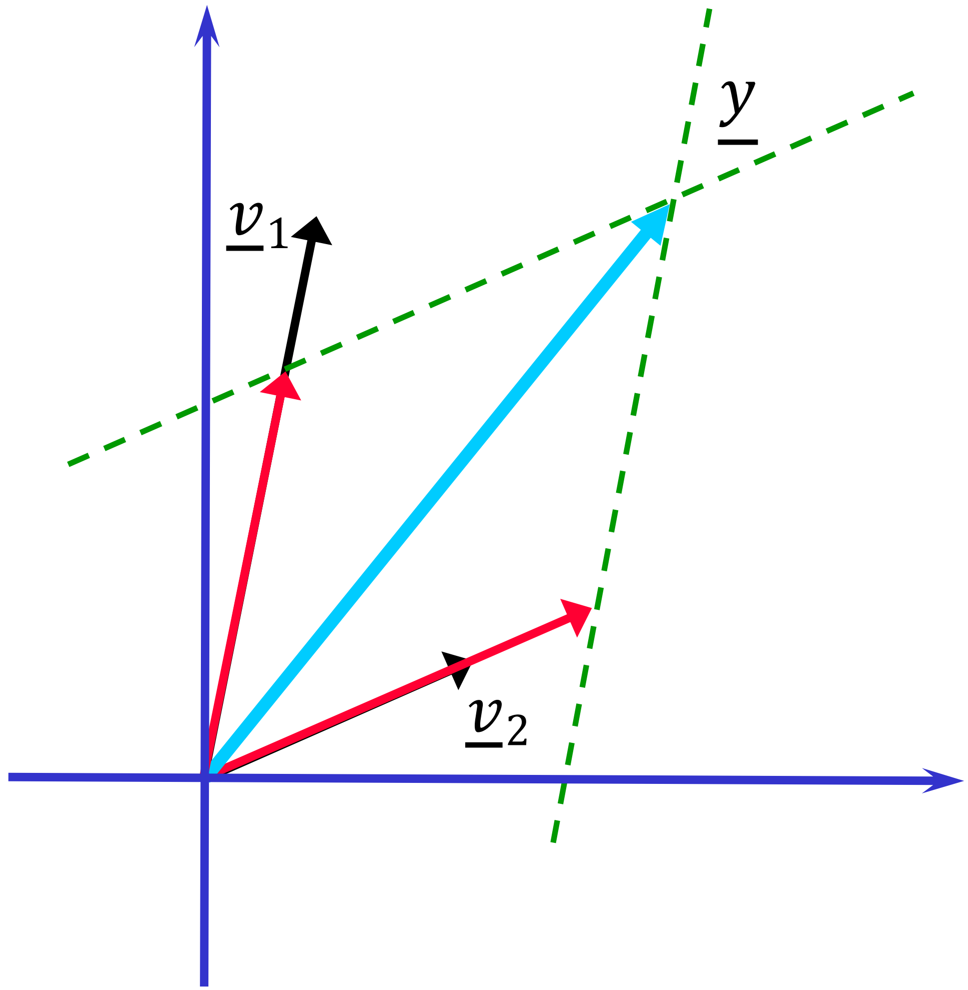
Combinazione LINEARE tra vettori

Un vettore $\underline{y}$ è combinazione LINEARE dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ se esistono dei coefficienti reali $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tali che:

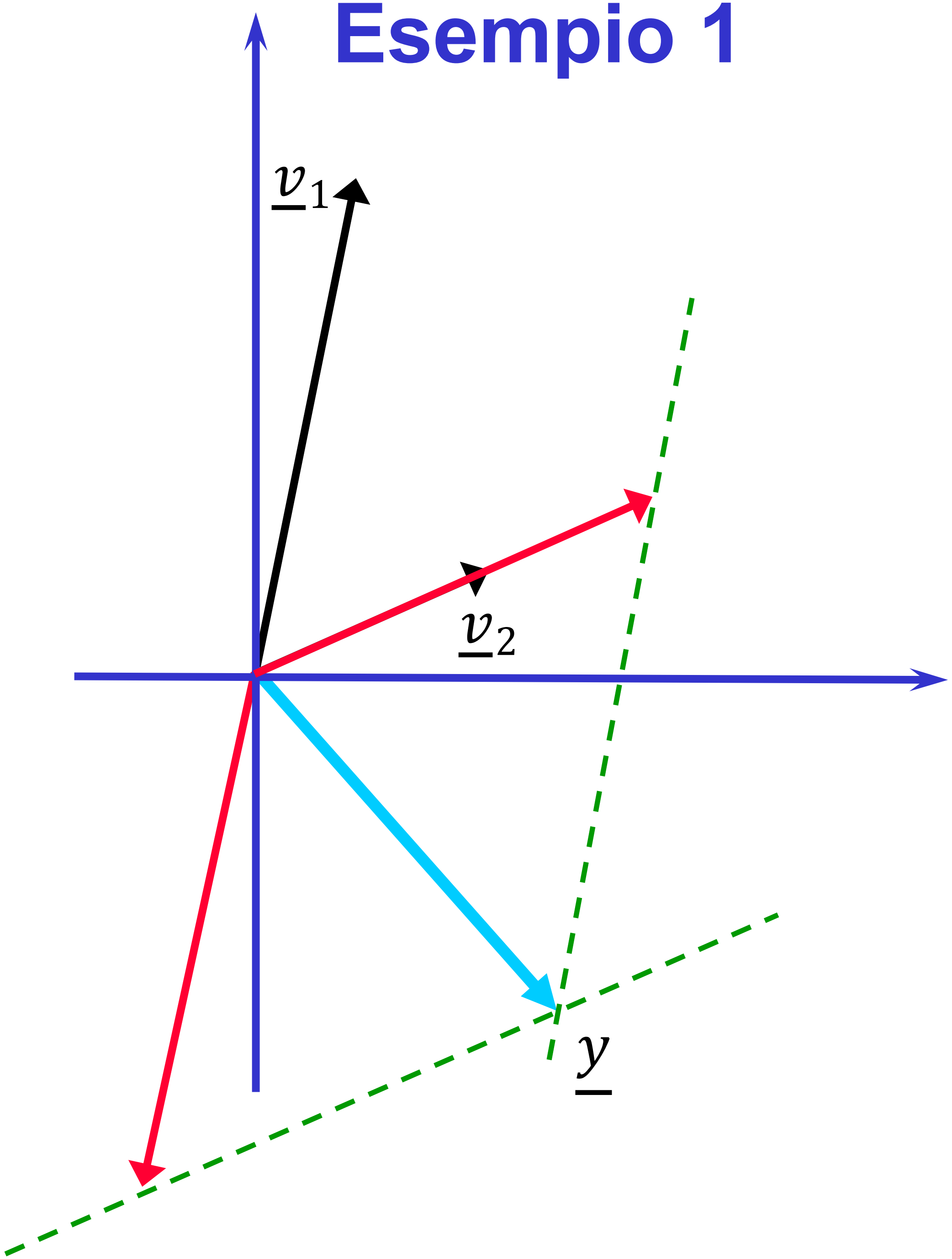
$$\underline{y} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n$$

$\underline{y}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$?

I valori di λ_1 e λ_2 sono maggiori o minori di 1?



Esempio 1

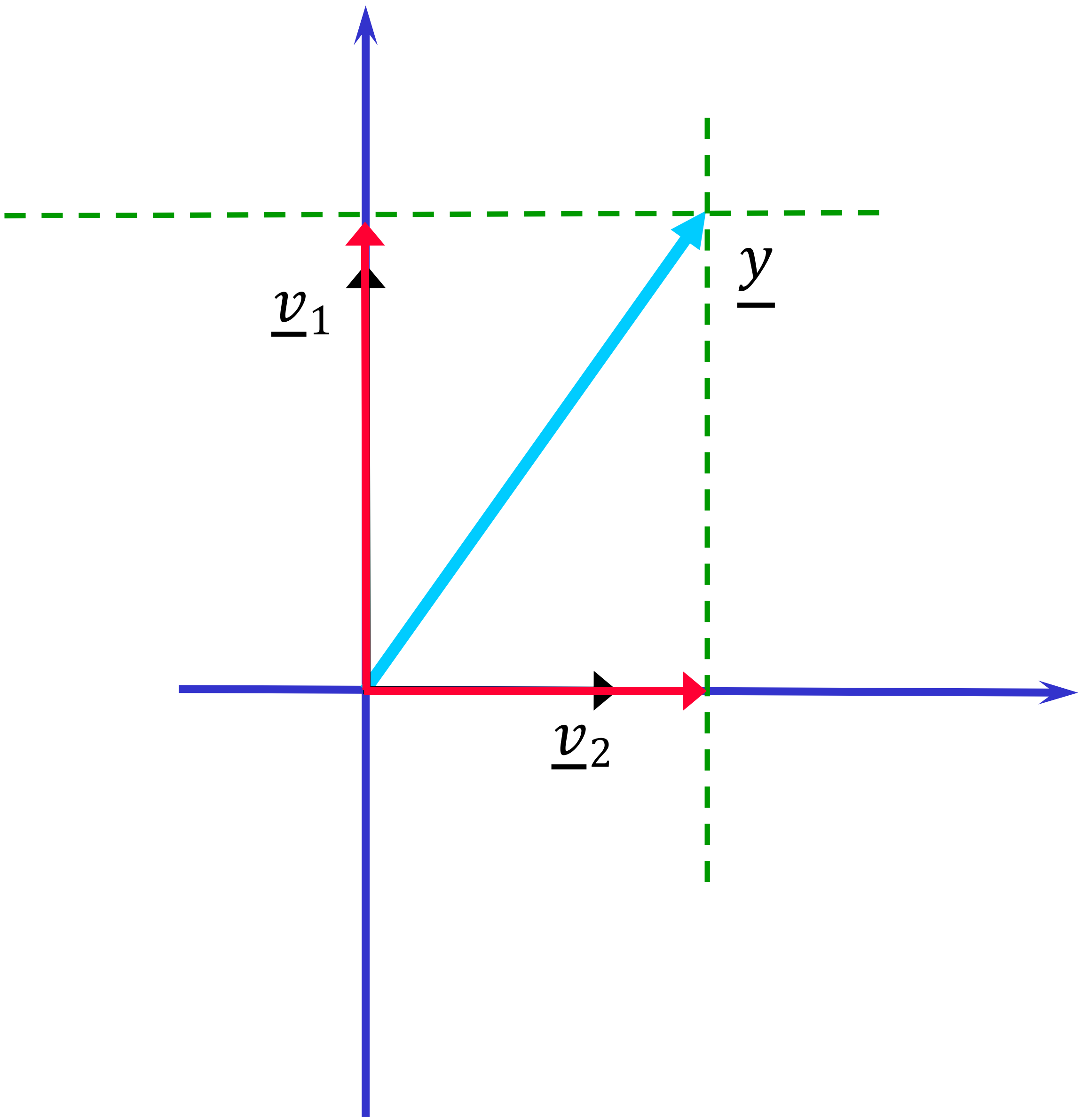


$\underline{y} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2$

$\lambda_1 < 0$

$\lambda_2 > 1$

Esempio 2

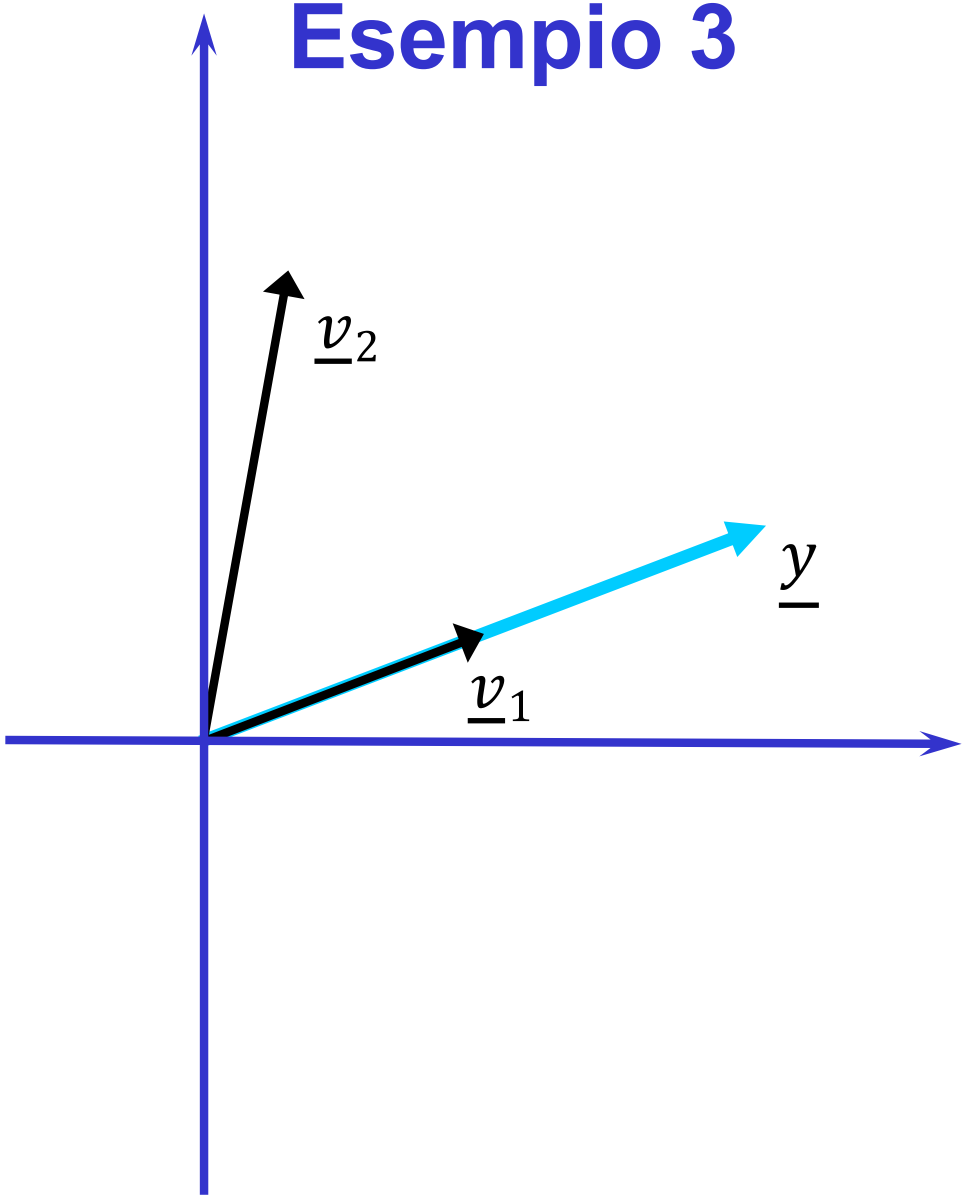


$\underline{y} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2$

$\lambda_1 > 1$

$\lambda_2 > 1$

Esempio 3



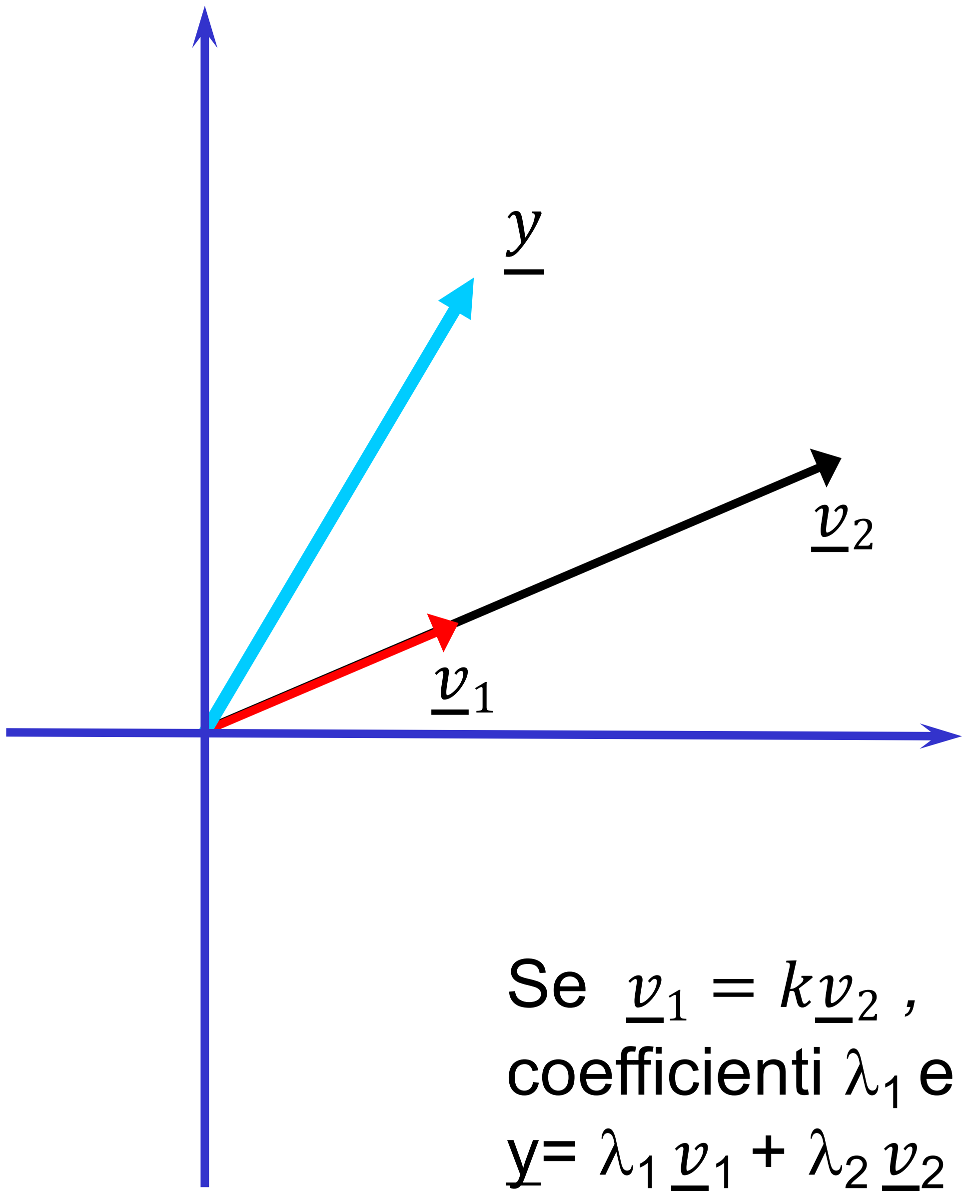
$\underline{y} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2$

$\lambda_1 > 1$

$\lambda_2 = 0$

Esempio 4

$\underline{y} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2$

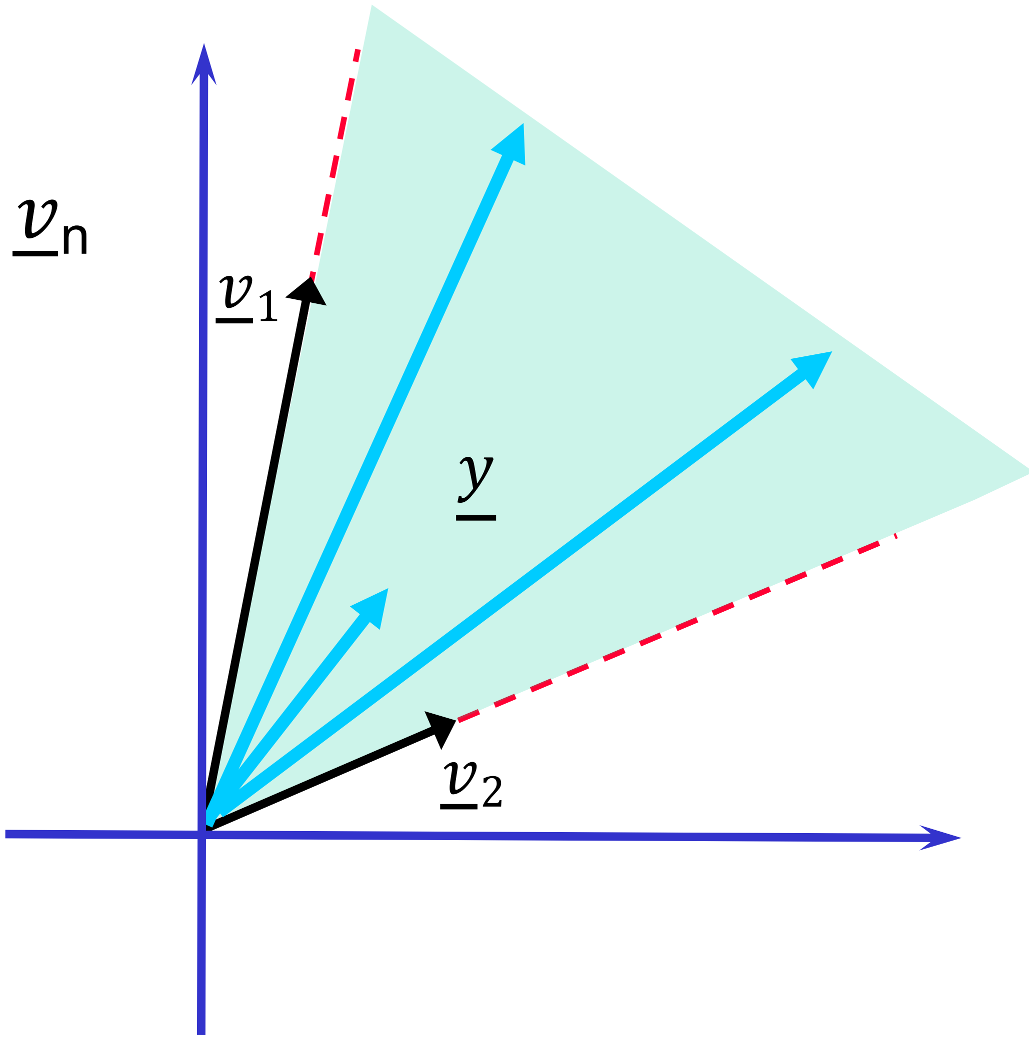


Se $\underline{v}_1 = k\underline{v}_2$, allora non esistono due coefficienti λ_1 e λ_2 per i quali vale
$\underline{y} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2$

Combinazione CONICA tra vettori

Un vettore $\underline{y}$ è combinazione CONICA dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ se esistono dei coefficienti reali $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tali che:

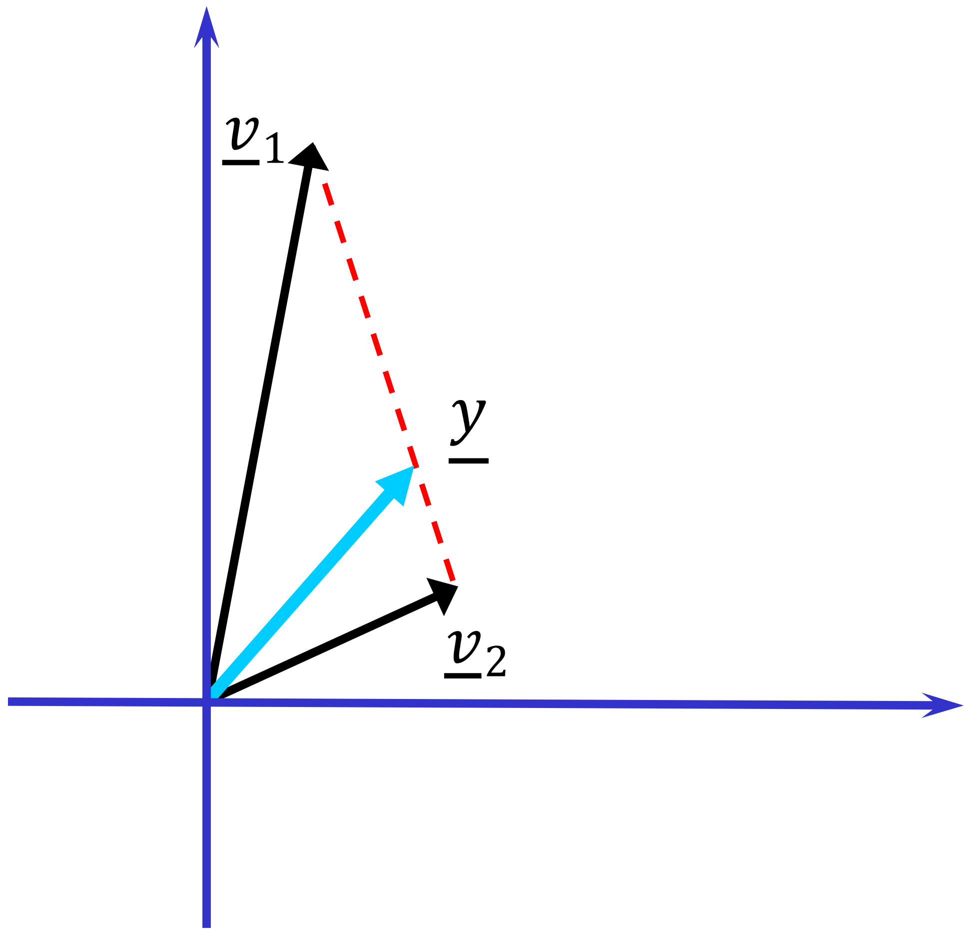
1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$
2. $\underline{y} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n$



Combinazione CONVESSA tra vettori

Un vettore $\underline{y}$ è combinazione CONVESSA dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ se esistono dei coefficienti reali $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tali che:

1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$
3. $\underline{y} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n$



Lineare indipendenza tra vettori

I vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$$

In altre parole, se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti allora **l'unico modo** per ottenere il vettore nullo, dalla loro combinazione lineare, è quello di porre tutti i coefficienti λ a zero.

I vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ **non tutti nulli**, tali che

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

Lineare indipendenza tra vettori
ESEMPIO

$\underline{v}_1^T = [1\ 2\ 3] \qquad \underline{v}_2^T = [-1\ \ 1\ -1] \qquad \underline{v}_3^T = [0\ 3\ 2]$

sono linearmente dipendenti perché

$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$ quando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$

$$1 * \overset{\underline{v}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} + 1 * \overset{\underline{v}_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} - 1 * \overset{\underline{v}_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lineare indipendenza tra vettori
in particolare...

I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, …, $\underline{v}_n$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI se uno di essi può essere espresso come combinazione lineare degli altri.

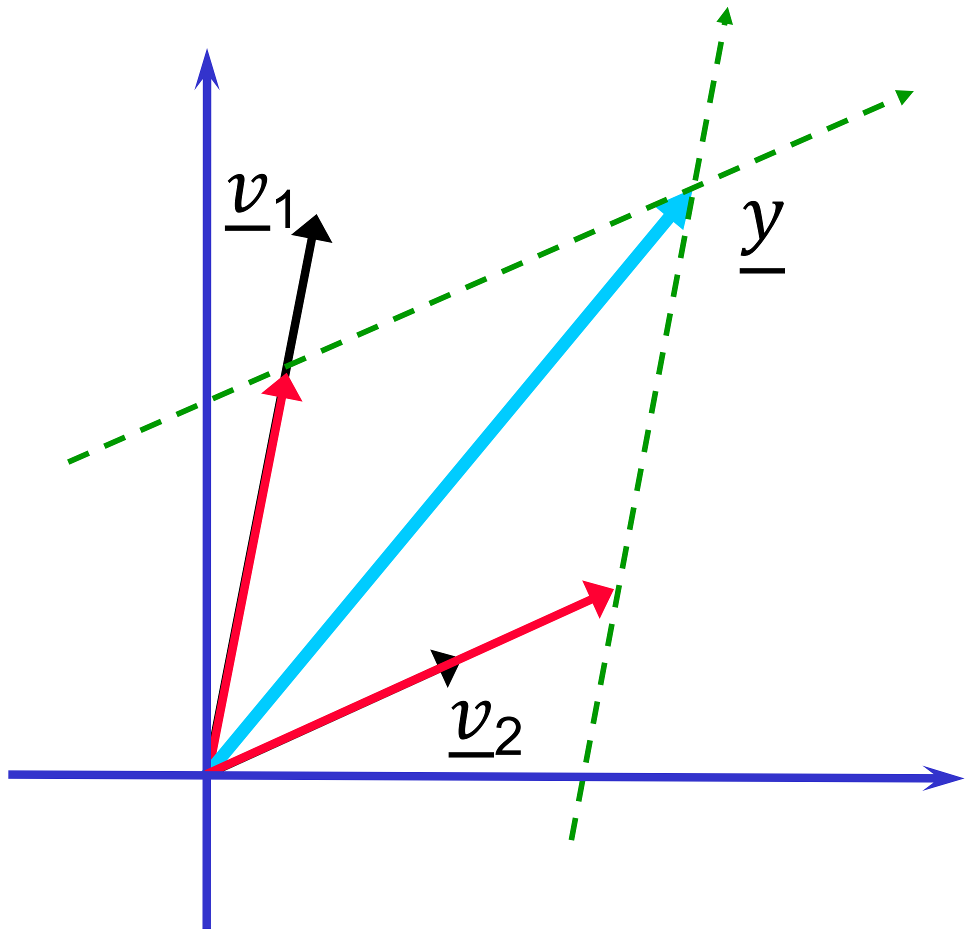
$$\underline{v}_1^T = [1\ 2\ 3]$$
$$\underline{v}_2^T = [-1\ 1\ -1]$$
$$\underline{v}_3^T = [0\ 3\ 2]$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v}_1^T + \underline{v}_2^T = \underline{v}_3^T$$

$$\begin{array}{ccccc} \underline{v}_1 & & \underline{v}_2 & & \underline{v}_3 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Lineare indipendenza tra vettori

$\underline{y}$, $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente DIPENDENTI



Spazio generato

Un insieme di vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, …, $\underline{v}_k$ di dimensione n genera l'insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$, se ogni vettore in $\mathbb{R}^n$ può essere rappresentato come combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, …, $\underline{v}_k$.

Base di uno spazio

Def.

Un insieme di vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ in $\mathbb{R}^n$ è una BASE di $\mathbb{R}^n$ se valgono le due seguenti condizioni:

1. $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ generano $\mathbb{R}^n$

2. Se uno solo dei vettori viene rimosso, i rimanenti *k-1* vettori non generano $\mathbb{R}^n$.

Base di uno spazio

Proprietà 1.

Un insieme di vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ in $\mathbb{R}^n$ è una BASE di $\mathbb{R}^n$ se e solo se:

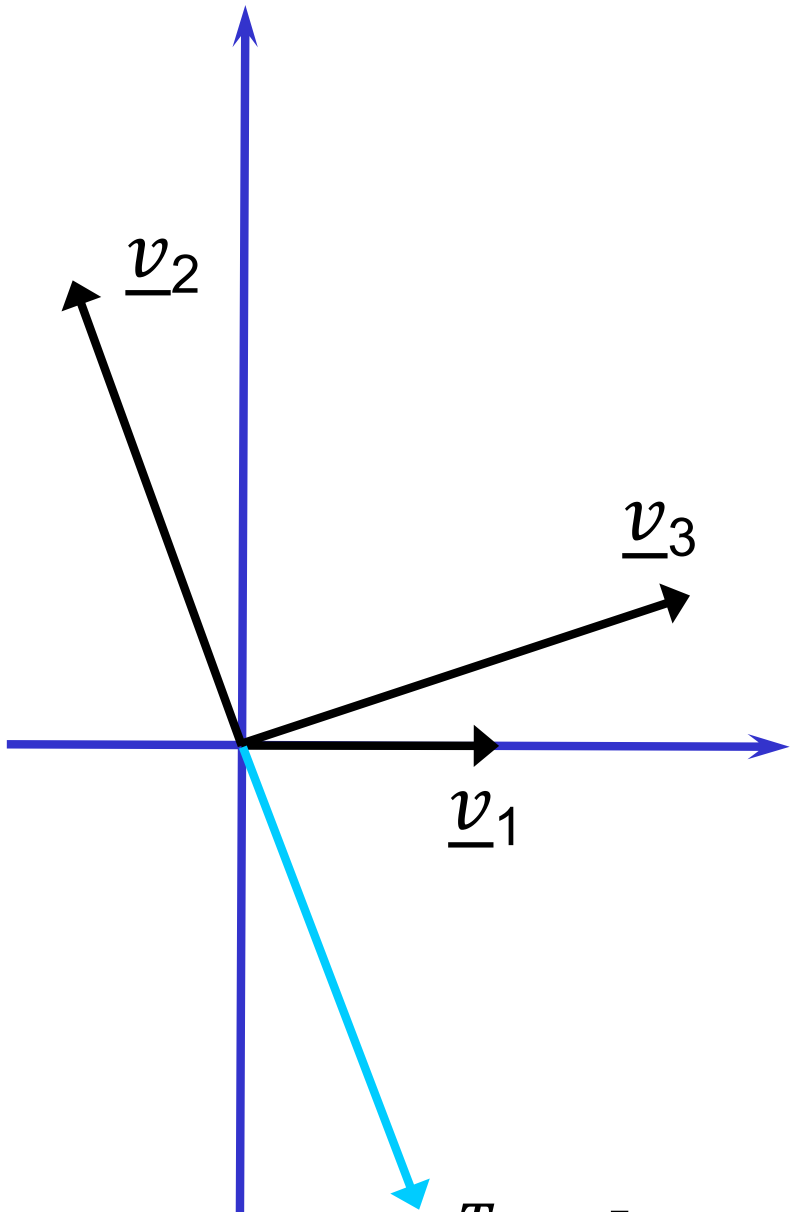
1. $k = n$

2. $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ sono linearmente indipendenti

Def.

Il numero di vettori che formano una base per $\mathbb{R}^n$ è detto *dimensione* dello spazio $\mathbb{R}^n$.

$\underline{v}_1^T = [1\ 0]$ $\quad$ $\underline{v}_2^T = [-1\ 3]$ $\quad$ $\underline{v}_3^T = [2\ 1]$



$\underline{v}_4^T = [1\ \ -3]$

$\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ generano $\mathbb{R}^2$?

$\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono una base di $\mathbb{R}^2$?

$\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ sono una base per $\mathbb{R}^2$?

$\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono una base per $\mathbb{R}^2$?

$\underline{v}_2$, $\underline{v}_4$ sono una base per $\mathbb{R}^2$?

Esercizio

Dati i seguenti vettori in $\mathbb{R}^3$

$$\underline{v}_1^T = [1\ 3\ 0]$$
$$\underline{v}_2^T = [2\ 0\ 1]$$
$$\underline{v}_3^T = [0\ 1\ 0]$$

1. Verificare che costituiscano una base;

2. Determinare i coefficienti λ tramite i quali è possibile esprimere il vettore $\underline{y}^T=[2\ 4\ 1]$ tramite i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$.