ESERCIZIO 5

Usare il pumping lemma per dimostrare che

$L = \{ 1^n 0 \mid n = 2^i, i \geq 0 \}$

non è regolare.

Supponiamo per assurdo che L sia regolare. Allora la proprietà del pumping lemma deve valere per il linguaggio L.

Mostriamo che

$\forall p > 0 \quad \exists w \in L, |w| \geq p$ tale che

$\forall x, y, z \in \Sigma^* \quad w = xyz, |xy| \leq p, y \neq \varepsilon$

$\exists k \geq 0$ tale che $xy^kz \notin L$

Sia p la costante del pumping.

Consideriamo la stringa $w = 1^{2^p} 0$.
Chiaramente, $w \in L$ e $|w| \geq p$.

Il pumping lemma garantisce che w può essere fattorizzata in tre sottostringhe $x, y, z \in \Sigma^*$ tali che:

1. $|xy| \leq p$ 2. $y \neq \varepsilon$ 3. $\forall k \geq 0, xy^kz \in L$

La condizione 1) implica che xy è formata da soli 1. Di conseguenza, anche y è formata di soli 1 (almeno uno per la condizione 2).

Si ha, quindi, che $w = 1^{2^p} 0 = xyz$, dove

$x = 1^t \quad y = 1^j \quad z = 1^{2^p - t - j} 0$, con $t \geq 0, j > 0, t + j \leq p$

Consideriamo $k = 2$. In questo modo, otteniamo la stringa

$xy^2z = xyyz = 1^t 1^{2j} z^{2^p - t - j} 0 = 1^{2^p + j} 0$

La stringa xyyz, tuttavia, non appartiene al linguaggio L poiché

$xyyz \in L \leftrightarrow xyyz = 1^{2^p + j} 0$, con $(2^p + j)$ potenza di 2

Però, dato che $0 < j \leq p$, il numero $2^p + j$ è compreso strettamente tra due potenze consecutive del 2. Infatti,

$$2^p \underset{j>0}{<} 2^p + j \underset{j \leq p}{\leq} 2^p + p < 2^p + 2^p = 2^{(p+1)}$$

Ciò implica che il numero di 1 nella parola non è una potenza del 2 e non appartiene al linguaggio. Ciò è in contraddizione con la terza condizione del pumping lemma ed implica che L non può essere regolare.