ESERCIZIO 2

Usare il pumping lemma per dimostrare che

$$L = \{ a^h b^k \mid h > k \}$$

non è regolare.

Supponiamo per assurdo che L sia regolare. Allora la proprietà del pumping lemma deve valere per il linguaggio L.

Mostriamo che

$\forall\, p > 0 \quad \exists\, w \in L,\ |w| \geq p$ tale che

$\forall\, x, y, z \in \Sigma^* \quad w = xyz,\ |xy| \leq p,\ y \neq \varepsilon$

$\exists\, k \geq 0$ tale che $xy^kz \notin L$

Sia p la costante del pumping.

Consideriamo la stringa $w = a^{p+1} b^p \in L$.
Chiaramente, $w \in L$ e $|w| \geq p$.

Il pumping lemma garantisce che w può essere fattorizzata in tre sottostringhe $x, y, z \in \Sigma^*$ tali che:

1. $|xy| \leq p$ 2. $y \neq \varepsilon$ 3. $\forall\, i \geq 0,\ xy^iz \in L$

La condizione 1) implica che xy è formata da sole a. Di conseguenza, anche y è formata da sole a (almeno una per la condizione 2).

Si ha, quindi, che $w = a^{p+1} b^p = xyz$ dove

$x = a^t \qquad y = a^j \qquad z = a^{(p+1)-t-j} b^p$, con $t \geq 0, j > 0, t+j \leq p$

Consideriamo $i=0$. In questo modo, otteniamo la stringa

$$xy^0z = xz = a^t a^{(p+1)-t-j} b^p = a^{p+1-j} b^p$$

La stringa xz, tuttavia, non appartiene al linguaggio L poiché

$$xz \in L \leftrightarrow xz = a^h b^k,\ h > k$$

Riscriviamo la condizione $j > 0$ come $j \geq 1$, quindi come $1 - j \leq 0$.

Ciò implica che $p + (1-j) \leq p$, quindi che $|a| \leq |b|$ in xz.

Questo risultato è in contraddizione con la terza condizione del pumping lemma. Ciò significa che non può essere regolare.