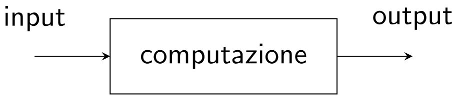
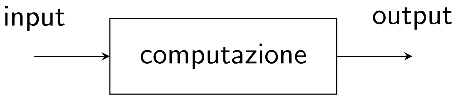
Computazione

- Computazione: un processo che associa un input a un output

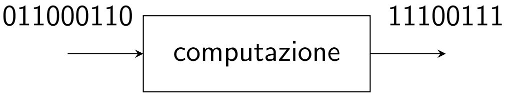


Computazione

- Computazione: un processo che associa un input a un output

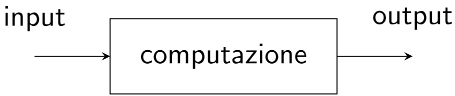


- Rappresentiamo numeri, testi, immagini, ... usando stringhe di 0 e 1.

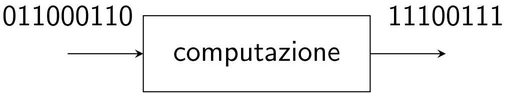


Computazione

- Computazione: un processo che associa un input a un output



- Rappresentiamo numeri, testi, immagini, ... usando stringhe di 0 e 1.



- Calcolare una funzione $F : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$.
  Ciò comprende non solo calcoli aritmetici, ma moltissimi altri compiti che sorgono in settori diversi come il calcolo scientifico, l'intelligenza artificiale, l'elaborazione delle immagini, data mining, ...

Insiemi

- **Def.** Un insieme è una collezione non ordinata di oggetti o elementi
  Gli elementi di un insieme sono scritti tra parentesi graffe $\{\quad\}$
  Esempio: $\{0, 3, 5, 15\}$

Insiemi

- **Def.** Un insieme è una collezione non ordinata di oggetti o elementi
  Gli elementi di un insieme sono scritti tra parentesi graffe $\{\quad\}$
  Esempio: $\{0, 3, 5, 15\}$
- **Def.** Per ogni insieme S, $w \in S$ indica che w è un elemento di S
  Nota: Notazione di insiemi per specificare un insieme

$$A = \{x | x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$$

$\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali, f è una qualche funzione

Insiemi

- **Ordine e ridondanza non contano**
  $\{a, b, c\}$ ha elementi a, b, c.
  $\{a, b, c\}$ e $\{b, a, b, c, c\}$ sono lo stesso insieme.

Insiemi

- **Ordine e ridondanza non contano**
  $\{a, b, c\}$ ha elementi a, b, c.
  $\{a, b, c\}$ e $\{b, a, b, c, c\}$ sono lo stesso insieme.

- $\{a\}$ ed a **sono cose diverse**
  $\{a\}$ insieme che contiene solo elemento a.

Insiemi

- **Es:** L'insieme dei numeri naturali è $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
- **Es:** L' insieme dei numeri pari è

  $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\} = \{2n \mid n = 0, 1, 2, 3, ...\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

  L' insieme dei pari positivi è

  $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\} = \{2n \mid n = 1, 2, 3, ...\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$

  L' insieme dei numeri dispari è

  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...\} = \{2n+1 \mid n = 0, 1, 2, ...\} = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$

- **Es:** Se $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, allora $4 \in A$, ma $5 \notin A$.

Cardinalità

- **Def.** La cardinalità $|S|$ di S è il numero di elementi in S.
- **Es.**

  Se $S = \{ab, bb\}$ allora $|S| = 2$

  Se $T = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}, n > 1\}$, allora $|T| = \infty$

  Se $T = \emptyset$, allora $|T| = 0$

Insiemi Finiti ed Infiniti

- **Def.** Un insieme S è finito se esiste $n \geq 0$ tale che $|S| \leq n$,
  Se S non è finito, allora è detto infinito.
- **Es.**
  Se $S = \{ab, bb\}$ allora $|S| = 2$ e S è finito
  Se $T = \{2^n \mid n \in \mathbb{N},\ n > 1\}$, allora $|T| = \infty$ e T è infinito

Alfabeto

- Un **alfabeto** è un insieme finito di elementi fondamentali (chiamati lettere o simboli)
- **Es:** L' alfabeto delle lettere romane minuscole è

$$\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$$

- **Es:** L' alfabeto delle cifre arabe è

$$\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$$

- **Es:** L' alfabeto binario è

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

Stringhe

- Una **stringa** su un alfabeto è una sequenza finita di simboli dell' alfabeto.
- **Es:** gatto, cibo, c, babbz sono stringhe sull' alfabeto $A = \{a, b, c, ..., z\}$.

  0131 è una stringa sull' alfabeto $B = \{0, 1, 2, ..., 9\}$.

  0101 è una stringa sull' alfabeto $B = \{0, 1\}$.

Stringhe

- Data una stringa s, la lunghezza di s è il numero di simboli in s.
- La lunghezza di s è denotata con $lunghezza(s)$ o $|s|$.
- **Es:** $lunghezza(ciao) = |ciao| = 4$.
- La **stringa vuota**, indicata con ϵ, è la stringa contenente nessun simbolo, $|\epsilon| = 0$.

Kleene Star

- **Def.** Dato l'alfabeto Σ,
  la chiusura di Kleene di Σ, indicata con Σ^*, è l' insieme di tutte le possibili stringhe su Σ.
- **Es:** se $\Sigma = \{a, b\}$, allora
  $\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, ...\}$

Concatenazione

- **Def.** Date due stringhe $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, la concatenazione di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è la stringa $\mathbf{uv}$.
- **Es:** $\mathbf{u} = abb$ e $\mathbf{v} = ab$, allora $\mathbf{uv} = abbab$ e $\mathbf{vu} = ababb$

  $\mathbf{u} = \epsilon$ e $\mathbf{v} = ab$, allora $\mathbf{uv} = ab$

  $\mathbf{u} = bb$ e $\mathbf{v} = \epsilon$, allora $\mathbf{uv} = bb$

  $\mathbf{u} = \epsilon$ e $\mathbf{v} = \epsilon$, allora $\mathbf{uv} = \epsilon$; cioè $\epsilon\epsilon = \epsilon$

Concatenazione

- **Def.** Per una stringa $\mathbf{w}$, definiamo $\mathbf{w}^n$ per $n \geq 0$ induttivamente:

  $\mathbf{w}^0 = \epsilon$
  $\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{w}^n\mathbf{w}$, per ogni $n \geq 1$.

Concatenazione

- **Def.** Per una stringa $\mathbf{w}$, definiamo $\mathbf{w}^n$ per $n \geq 0$ induttivamente:

  $\mathbf{w}^0 = \epsilon$
  $\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{w}^n\mathbf{w}$, per ogni $n \geq 1$.

- **Es:** Se $\mathbf{w} = cat$, allora $\mathbf{w}^0 = \epsilon$,
  $\mathbf{w}^1 = cat$,
  $\mathbf{w}^2 = catcat$,
  $\mathbf{w}^3 = catcatcat$,
  $\ldots$

Concatenazione

- **Def.** Per una stringa $\mathbf{w}$, definiamo $\mathbf{w}^n$ per $n \geq 0$ induttivamente:

  $\mathbf{w}^0 = \epsilon$
  $\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{w}^n\mathbf{w}$, per ogni $n \geq 1$.

- **Es:** Se $\mathbf{w} = cat$, allora $\mathbf{w}^0 = \epsilon$,
  $\mathbf{w}^1 = cat$,
  $\mathbf{w}^2 = catcat$,
  $\mathbf{w}^3 = catcatcat$,
  $\ldots$
- **Es:** Dato simbolo a
  $a^3 = aaa$
  $a^0 = \epsilon$

Sottostringa

- **Def.** Data una stringa $\mathbf{s}$, una *sottostringa* di $\mathbf{s}$ è una qualsiasi parte di simboli consecutivi della stringa $\mathbf{s}$ cioè,
  $\mathbf{w}$ è una sottostringa di $\mathbf{s}$ se esistono stringhe $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (eventualmente vuote) tali che

$$\mathbf{s} = \mathbf{xwy}$$

Sottostringa

- **Def.** Data una stringa $\mathbf{s}$, una *sottostringa* di $\mathbf{s}$ è una qualsiasi parte di simboli consecutivi della stringa $\mathbf{s}$ cioè,
$\mathbf{w}$ è una sottostringa di $\mathbf{s}$ se esistono stringhe $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (eventualmente vuote) tali che

$$\mathbf{s} = \mathbf{xwy}$$

- **Es:**
567 è sottostringa di 56789
567 è sottostringa di 45678
567 è sottostringa di 34567
567 è sottostringa di 567

Sottostringa

- **Def.** Data una stringa $\mathbf{s}$, una *sottostringa* di $\mathbf{s}$ è una qualsiasi parte di simboli consecutivi della stringa $\mathbf{s}$ cioè,
  $\mathbf{w}$ è una sottostringa di $\mathbf{s}$ se esistono stringhe $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (eventualmente vuote) tali che

$$\mathbf{s} = \mathbf{xwy}$$

- **Es:**
  567 è sottostringa di 56789
  567 è sottostringa di 45678
  567 è sottostringa di 34567
  567 è sottostringa di 567
- **Es:** Stringa 472 ha sottostringhe

$$\epsilon, 4, 7, 2, 47, 72, 472$$

Ma 42 non è sottostringa di 472.

Linguaggi

- **Def.** Un Linguaggio formale (linguaggio) è un insieme di stringhe su un alfabeto.

Linguaggi

- **Def.** Un Linguaggio formale (linguaggio) è un insieme di stringhe su un alfabeto.
- **Es:** Linguaggi di programmazione, quali C, C^{++} o Java, sono linguaggi formali con alfabeto

  $$\{a, b, ..., z, A, B, ..., Z, 0, 1, 2, ..., 9, >, <, =, +, -, *, /, (,), \cdots\}$$

  Le regole della sintassi definiscono le regole del linguaggio. L'insieme di nomi validi di variabili è, esso stesso, un linguaggio formale.

Linguaggi

- Nota: non solo insiemi finiti.

  Infatti insiemi finiti non sono di solito linguaggi intereressanti

  Tutti i nostri alfabeti sono finiti,
  ma la maggior parte dei linguaggi che incontreremo sono infiniti.

Esempi di linguaggi

- **Es.** Alfabeto $A = \{x\}$.
  Linguaggio
  $L = \{\epsilon, x, xx, xxx, xxxx, ...\} = \{x^n | n = 0, 1, 2, 3...\}$
  Nota: $x^0 = \epsilon$, quindi la stringa vuota è in L

Esempi di linguaggi

- **Es.** Alfabeto $A = \{x\}$.
  Linguaggio
  $L = \{\epsilon, x, xx, xxx, xxxx, ...\} = \{x^n | n = 0, 1, 2, 3...\}$
  Nota: $x^0 = \epsilon$, quindi la stringa vuota è in L
- **Es.** Alfabeto $A = \{x\}$.
  Linguaggio
  $L = \{x, xxx, xxxxx, ...\} = \{x^{2n+1} | n = 0, 1, 2, 3...\}$

Esempi di linguaggi

- **Es.** Alfabeto $A = \{x\}$.
  Linguaggio
  $L = \{\epsilon, x, xx, xxx, xxxx, ...\} = \{x^n | n = 0, 1, 2, 3...\}$
  Nota: $x^0 = \epsilon$, quindi la stringa vuota è in L
- **Es.** Alfabeto $A = \{x\}$.
  Linguaggio
  $L = \{x, xxx, xxxxx, ...\} = \{x^{2n+1} | n = 0, 1, 2, 3...\}$
- **Es.** Alfabeto $A = \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Linguaggio
  $L = \{\text{qualsiasi stringa che non inizia con } 0\} =$
  $\{\epsilon, 1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, ...\}$

Esempi di linguaggi

- **Es.** Sia $A = \{a, b\}$, definiamo il linguaggio L formato da tutte le stringhe che iniziano con a e seguono con 0 o più b;
  Cioè $L = \{a, ab, abb, abbb, ...\} = \{ab^n | n \geq 0\}$

Esempi di linguaggi

- **Es.** Sia $A = \{a, b\}$, definiamo il linguaggio L formato da tutte le stringhe che iniziano con a e seguono con 0 o più b;
  Cioè $L = \{a, ab, abb, abbb, ...\} = \{ab^n | n \geq 0\}$
- Nota. L'insieme vuoto $\emptyset$ è l' insieme che non contiene alcun elemento.
  - $\emptyset \neq \{\epsilon\}$
    poichè $\emptyset$ non ha elementi.

  In generale
- $\epsilon \notin \emptyset$

Perché i linguaggi?

- Vedremo che
  Risolvere un problema (con risposta sì/no) $\equiv$ riconoscere un linguaggio.

  riconoscere un linguaggio L su un alfabeto Σ significa stabilire per ogni stringa $\mathbf{x} \in \Sigma^*$ se $\mathbf{x} \in L$ oppure $\mathbf{x} \notin L$.

Perché i linguaggi?

- Vedremo che
  Risolvere un problema (con risposta sì/no) $\equiv$ riconoscere un linguaggio.

  riconoscere un linguaggio L su un alfabeto Σ significa stabilire per ogni stringa $\mathbf{x} \in \Sigma^*$ se $\mathbf{x} \in L$ oppure $\mathbf{x} \notin L$.
- Es.
  Problema: dato un intero x, x è primo?
  Possiamo anche scriverlo come: data una stringa binaria $\mathbf{b}$,
  $\mathbf{b} \in \{$stringhe che sono rappresentazioni binarie di un primo$\}$
  $= \{1, 10, 11, 101, 111, 1011, ...\}$?

- **Def.** Siano S e T insiemi.
  Diciamo che
  $S \subseteq T$ (S sottoinsieme di T) se $w \in S$ implica $w \in T$.
  Cioè ogni elemento di S è anche un elemento di T.

Insiemi: Relazioni ed Operazioni

- **Def.** Siano S e T insiemi.
  Diciamo che
  $S \subseteq T$ (S sottoinsieme di T) se $w \in S$ implica $w \in T$.
  Cioè ogni elemento di S è anche un elemento di T.

- **Es.**
  $S = \{ab, ba\}$ e $T = \{ab, ba, aaa\}$ allora $S \subseteq T$ ma $T \not\subseteq S$.

  $S = \{ba, ab\}$ e $T = \{aa, ba\}$ allora $S \not\subseteq T$ e $T \not\subseteq S$.

Insiemi uguali

- **Def.** Insiemi S e T sono uguali ($S = T$) se e solo se

$$S \subseteq T \text{ e } T \subseteq S.$$

- **Es.**
  Siano $S = \{ab, ba\}$ e $T = \{ba, ab\}$
  allora $S \subseteq T$ e $T \subseteq S$; quindi $S = T$.

  Siano $S = \{ab, ba\}$ e $T = \{ba, ab, aaa\}$,
  allora $S \subseteq T$ ma $T \not\subseteq S$; quindi $S \neq T$.

Unione

- **Def.** Dati due insiemi S e T, definiamo la loro unione

$$S \cup T = \{w \mid w \in S \text{ oppure } w \in T\}$$

  $S \cup T$ contiene tutti gli elementi contenuti in S oppure in T (o in entrambi).

- **Es.**
  - $S = \{ab, bb\}$ e $T = \{aa, bb, a\}$ allora $S \cup T = \{ab, bb, aa, a\}$
  - $S = \{a, ba\}$ e $T = \emptyset$, allora $S \cup T = S$.
  - $S = \{a, ba\}$ e $T = \{\epsilon\}$ allora $S \cup T = \{\epsilon, a, ba\}$

Intersezione

- **Def.** Dati due insiemi S e T, definiamo la loro intersezione

$$S \cap T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \in T\}$$

$S \cap T$ contiene tutti gli elementi comuni ad S e T

Intersezione

- **Def.** Dati due insiemi S e T, definiamo la loro intersezione

$$S \cap T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \in T\}$$

  $S \cap T$ contiene tutti gli elementi comuni ad S e T

- **Def.** insiemi S e T si dicono disgiunti se $S \cap T = \emptyset$

Intersezione

- **Def.** Dati due insiemi S e T, definiamo la loro intersezione

$$S \cap T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \in T\}$$

  $S \cap T$ contiene tutti gli elementi comuni ad S e T

- **Def.** insiemi S e T si dicono disgiunti se $S \cap T = \emptyset$
- **Es.**
  - Sia $S = \{ab, bb\}$ e $T = \{aa, bb, a\}$ allora $S \cap T = \{bb\}$

Intersezione

- **Def.** Dati due insiemi S e T, definiamo la loro intersezione

$$S \cap T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \in T\}$$

  $S \cap T$ contiene tutti gli elementi comuni ad S e T

- **Def.** insiemi S e T si dicono disgiunti se $S \cap T = \emptyset$
- **Es.**
  - Sia $S = \{ab, bb\}$ e $T = \{aa, bb, a\}$ allora $S \cap T = \{bb\}$
  - Sia $S = \{ab, bb\}$ e $T = \{aa, ba, a\}$ allora $S \cap T = \emptyset$, quindi S e T sono disgiunti

Cardinalità

- **Proposizione.** Se S e T sono disgiunti (cioè $S \cap T = \emptyset$), allora $|S \cup T| = |S| + |T|$

Sottrazione

- **Def.** Dati due insiemi S e T,

$$S \setminus T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \notin T\}$$

- **Es.**
  - Sia $S = \{a, b, bb, bbb\}$ e $T = \{a, bb, bab\}$ allora $S \setminus T = \{b, bbb\}$
  - Sia $S = \{ab, ba\}$ e $T = \{ab, ba\}$ allora $S \setminus T = \emptyset$

Sottrazione

- **Def.** Dati due insiemi S e T,

$$S \setminus T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \notin T\}$$

- **Es.**
  - Sia $S = \{a, b, bb, bbb\}$ e $T = \{a, bb, bab\}$ allora $S \setminus T = \{b, bbb\}$
  - Sia $S = \{ab, ba\}$ e $T = \{ab, ba\}$ allora $S \setminus T = \emptyset$

- **Proposizione.** In generale vale:

$$|S \cup T| = |S| + |T| \setminus |S \cap T|$$

Complemento

- **Def.** Dato un universo U (insieme di tutti gli elementi in considerazione), il complemento di un insieme $S \subseteq U$ (rispetto a tale universo U) è

$$\overline{S} = \{w \mid w \in U,\ w \notin S\}$$

  $\overline{S}$ è l' insieme di tutti quegli elementi in esame (elementi di U) che non sono in S (quindi $\overline{S} = U \setminus S$).

Complemento

- **Def.** Dato un universo U (insieme di tutti gli elementi in considerazione), il complemento di un insieme $S \subseteq U$ (rispetto a tale universo U) è

$$\overline{S} = \{w \mid w \in U,\ w \notin S\}$$

  $\overline{S}$ è l' insieme di tutti quegli elementi in esame (elementi di U) che non sono in S (quindi $\overline{S} = U \setminus S$).

- **Es.**
  U: insieme delle stringhe su alfabeto $\{a, b\}$
  S: insieme delle stringhe su alfabeto $\{a, b\}$ che iniziano con b.
  $\overline{S}$: insieme delle stringhe su alfabeto $\{a, b\}$ che non iniziano con b,
  N.B.: <u>NON</u> insieme stringhe che iniziano con a ($\overline{S}$ contiene anche la stringa vuota ϵ)

Concatenazione

- **Def.** Dati 2 insiemi S e T di stringhe, la concatenazione (o prodotto) di S e T è

  $$S \circ T = \{uv \mid u \in S,\ v \in T\}$$

  $S \circ T$ è l' insieme di stringhe che possono essere divise in 2 parti: la prima parte coincide con una stringa in S la seconda parte coincide con una stringa in T.

- **Es.** Se $S = \{a, aa\}$ e $T = \{\epsilon, a, ba\}$, allora

  $$S \circ T = \{a, aa, aba, aaa, aaba\}, \quad T \circ S = \{a, aa, aaa, baa, baaa\}$$

  $aba \in S \circ T$, ma $aba \notin T \circ S$. Quindi $S \circ T \neq T \circ S$

Sequenze e tuple

- **Def.** Una sequenza di oggetti è una lista di questi oggetti in qualche ordine.
  Ordine e ridondanza sono importanti in una sequenza (non in un insieme).

Sequenze e tuple

- **Def.** Una sequenza di oggetti è una lista di questi oggetti in qualche ordine.
  Ordine e ridondanza sono importanti in una sequenza (non in un insieme).
- **Def.** Sequenze finite sono dette tuple. Una k—tupla ha k elementi nella sequenza.

Sequenze e tuple

- **Def.** Una sequenza di oggetti è una lista di questi oggetti in qualche ordine.
  Ordine e ridondanza sono importanti in una sequenza (non in un insieme).
- **Def.** Sequenze finite sono dette tuple. Una k—tupla ha k elementi nella sequenza.
- **Es.**
  (4, 2, 7) è una 3-tupla o tripla

  (9, 23) è una 2-tupla o coppia

  (9, 23) $\neq$ (23, 9) importanza dell'ordine

  (2, 2, 3) $\neq$ (2, 3) importanza della ridondanza

Prodotto Cartesiano

- **Def.** Dati due insiemi A e B, il prodotto Cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie (x, y) dove $x \in A$ e $y \in B$. Cioè

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

Prodotto Cartesiano

- **Def.** Dati due insiemi A e B, il prodotto Cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie (x, y) dove $x \in A$ e $y \in B$. Cioè

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

- **Es.**
  Siano $A = \{a, ba, bb\}$ e $B = \{\epsilon, ba\}$, allora

$$A \times B = \{(a, \epsilon), (a, ba), (ba, \epsilon), (ba, ba), (bb, \epsilon), (bb, ba)\}$$

$$B \times A = \{(\epsilon, a), (\epsilon, ba), (\epsilon, bb), (ba, a), (ba, ba), (ba, bb)\}.$$

Prodotto Cartesiano

- **Def.** Dati due insiemi A e B, il prodotto Cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie (x, y) dove $x \in A$ e $y \in B$. Cioè

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

- **Es.**
Siano $A = \{a, ba, bb\}$ e $B = \{\epsilon, ba\}$, allora

$$A \times B = \{(a, \epsilon), (a, ba), (ba, \epsilon), (ba, ba), (bb, \epsilon), (bb, ba)\}$$

$$B \times A = \{(\epsilon, a), (\epsilon, ba), (\epsilon, bb), (ba, a), (ba, ba), (ba, bb)\}.$$

- **Nota** $(ba, a) \in B \times A$, ma $(ba, a) \notin A \times B$,
Quindi $B \times A \neq A \times B$.

Prodotto Cartesiano

- **Def.** Dati due insiemi A e B, il prodotto Cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie (x, y) dove $x \in A$ e $y \in B$. Cioè

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

- **Es.**
  Siano $A = \{a, ba, bb\}$ e $B = \{\epsilon, ba\}$, allora

$$A \times B = \{(a, \epsilon), (a, ba), (ba, \epsilon), (ba, ba), (bb, \epsilon), (bb, ba)\}$$

$$B \times A = \{(\epsilon, a), (\epsilon, ba), (\epsilon, bb), (ba, a), (ba, ba), (ba, bb)\}.$$

- **Nota** $(ba, a) \in B \times A$, ma $(ba, a) \notin A \times B$,
  Quindi $B \times A \neq A \times B$.
- **Nota** il prodotto Cartesiano è diverso dalla Concatenazione

$$A \circ B = \{a, aba, ba, baba, bb, bbba\} \neq A \times B$$

Prodotto Cartesiano

- **Nota** $|A \times B| = |A||B|$

Prodotto Cartesiano

- **Nota** $|A \times B| = |A||B|$

- Possiamo anche definire prodotto cartesiano di più di 2 insiemi. $A_1 \times \ldots \times A_k$ è l' insieme di k–tuple

$$A_1 \times \ldots \times A_k = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_i \in A_i, \quad 1 \leq i \leq k\}$$

Prodotto Cartesiano

Es. Siano
$A_1 = \{ab, ba, bbb\}$
$A_2 = \{a, bb\}$,
$A_3 = \{ab, b\}$.
allora

$$\begin{aligned} A1 \times A2 \times A3 = \quad \{ \quad & (ab, a, ab), (ab, a, b), (ab, bb, ab), (ab, bb, b), \\ & (ba, a, ab), (ba, a, b), (ba, bb, ab), (ba, bb, b), \\ & (bbb, a, ab), (bbb, a, b), (bbb, bb, ab), (bbb, bb, b)\}. \end{aligned}$$

Insieme potenza

- **Def.** Per ogni insieme S, l' insieme potenza $\mathcal{P}(S)$ è

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$$

  cioè l' insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di S (inclusi $\emptyset$ e S stesso).

Insieme potenza

- **Def.** Per ogni insieme S, l' insieme potenza $\mathcal{P}(S)$ è

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$$

  cioè l' insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di S (inclusi $\emptyset$ e S stesso).

- **Es.** Se $S = \{a, bb\}$, allora

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{bb\}, \{a, bb\}\}$$

Insieme potenza

- **Def.** Per ogni insieme S, l' insieme potenza $\mathcal{P}(S)$ è

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$$

  cioè l' insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di S (inclusi $\emptyset$ e S stesso).

- **Es.** Se $S = \{a, bb\}$, allora

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{bb\}, \{a, bb\}\}$$

- **Lemma** Se $|S| < \infty$, allora $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$
  Cioè , ci sono $2^{|S|}$ differenti sottoinsiemi di S. Perchè?

Chiusura

- **Def.** Dato un insieme S di stringhe, sia

$$
\begin{aligned}
S^0 &= \{\epsilon\}, \\
S^k &= \{w_1 w_2 \ldots w_k \mid w_i \in S,\ i = 1, 2, ..., k\} = SS...S, \quad k \geq 1.
\end{aligned}
$$

concatenazione di S con se stesso per k volte

Chiusura

- **Def.** Dato un insieme S di stringhe, sia

$$\begin{aligned} S^0 &= \{\epsilon\}, \\ S^k &= \{w_1 w_2 \dots w_k \mid w_i \in S,\ i = 1, 2, ..., k\} = SS...S, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

  concatenazione di S con se stesso per k volte

- **Nota.** S^k è l'insieme delle stringhe ottenute concatenando k stringhe di S, con possibili ripetizioni. In particolare, $S^1 = S$.

Chiusura

- **Def.** Dato un insieme S di stringhe, sia

$$
\begin{aligned}
S^0 &= \{\epsilon\}, \\
S^k &= \{w_1 w_2 \ldots w_k \mid w_i \in S,\ i = 1, 2, ..., k\} = SS...S, \quad k \geq 1.
\end{aligned}
$$

  concatenazione di S con se stesso per k volte

- **Nota.** S^k è l'insieme delle stringhe ottenute concatenando k stringhe di S, con possibili ripetizioni. In particolare, $S^1 = S$.

- **Es.** Se $S = \{a, bb\}$, allora

$$
\begin{aligned}
S^0 &= \{\epsilon\}, \\
S^1 &= \{a, bb\}, \\
S^2 &= \{aa, abb, bba, bbbb\}, \\
S^3 &= \{aaa, aabb, abba, abbbb, bbaa, bbabb, bbbba, bbbbbb\}.
\end{aligned}
$$

Chiusura o Kleene Star

- **Def.** la Chiusura (o Kleene star) di un insieme di stringhe S è

$$S^* = S^0 \cup S^1 \cup S^2 \cup S^3 \cup \ldots$$

Chiusura o Kleene Star

- **Def.** la Chiusura (o Kleene star) di un insieme di stringhe S è

$$S^* = S^0 \cup S^1 \cup S^2 \cup S^3 \cup \ldots$$

- **Nota.** S^* è l' insieme di tutte le stringhe ottenute concatenando zero o più stringhe di S, potendo usare la stessa stringa più volte.

$$S^* = \{w_1 w_2 \ldots w_k \mid k \geq 0, \quad w_i \in S, \quad i = 1, 2, ..., k\},$$

dove per $k = 0$, la stringa $w_1 w_2 \ldots w_k = \epsilon$ è la stringa vuota.

Chiusura o Kleene Star

- **Es.** Se $S = \{ba, a\}$, allora

$$S^* = \{\epsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, ...\}$$

Se $w \in S^*$, può bb essere una sottostringa di w?

Chiusura o Kleene Star

- **Es.** Se $S = \{ba, a\}$, allora

$$S^* = \{\epsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, ...\}$$

  Se $w \in S^*$, può bb essere una sottostringa di w?

- **Es.** Se $A = \{a, b\}$, allora

$$A^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, ...\},$$

  tutte le possibili stringhe sull' alfabeto A.

Chiusura o Kleene Star

- **Es.** Se $S = \{ba, a\}$, allora

  $$S^* = \{\epsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, ...\}$$

  Se $w \in S^*$, può bb essere una sottostringa di w?
- **Es.** Se $A = \{a, b\}$, allora

  $$A^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, ...\},$$

  tutte le possibili stringhe sull' alfabeto A.
- **Es.** Se $S = \emptyset$, allora $S^* = \{\epsilon\}$.

Chiusura o Kleene Star

- **Es.** Se $S = \{ba, a\}$, allora

$$S^* = \{\epsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, ...\}$$

  Se $w \in S^*$, può bb essere una sottostringa di w?

- **Es.** Se $A = \{a, b\}$, allora

$$A^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, ...\},$$

  tutte le possibili stringhe sull' alfabeto A.

- **Es.** Se $S = \emptyset$, allora $S^* = \{\epsilon\}$.
- **Es.** Se $S = \{\epsilon\}$, allora $S^* = \{\epsilon\}$

S^{*^*}

- $S^{*^*} = (S^*)^*$ è l' insieme di stringhe formate concatenando stringhe di S^*

${S^*}^*$

- ${S^*}^* = (S^*)^*$ è l' insieme di stringhe formate concatenando stringhe di S^*
- **Nota.** ${S^*}^* = S^*$ per ogni insieme S di stringhe.

S^+

- S^+ è l' insieme di stringhe formate concatenando <u>una o più</u> stringhe di S
- **Es.** Se $S = \{x\}$, allora

$$S^+ = \{x, xx, xxx, xxxx, ...\},$$

Inverso di stringhe

- Per ogni stringa $\mathbf{w}$, l'inverso di $\mathbf{w}$, scritto $reverse(\mathbf{w})$ o $\mathbf{w}^R$, è la stessa stringa di simboli scritta in ordine inverso .
  Se $\mathbf{w} = w_1 w_2 \ldots w_n$, dove ogni w_i è un simbolo, allora

$$\mathbf{w}^R = w_n w_{n-1} \ldots w_1.$$

- **Es.** $(cat)^R = tac$
- **Es.** $\epsilon^R = \epsilon$.

Domanda: Se $S^R = \{\mathbf{w}^R \mid \mathbf{w} \in S\}$ risulta $(S^R)^* = (S^*)^R$?

$(S^*)^R = (S^R)^*$?

Partiamo da un semplice esempio: $S = \{\text{ciccio}, \texttt{bello}\}$.

$S^* = \{\epsilon, \text{ciccio}, \texttt{bello}, \text{cicciociccio}, \text{ciccio}\texttt{bello}, \texttt{bello}\texttt{bello}, \ldots\}$

Notiamo che per ciccio`bello` $\in S^*$ vale:

$$(\text{cicciobello})^R = \text{olleboiccic} = \text{bello}^R \text{ciccio}^R$$

$(S^*)^R = (S^R)^*$?

Partiamo da un semplice esempio: $S = \{\text{ciccio}, \texttt{bello}\}$.

$S^* = \{\epsilon, \text{ciccio}, \texttt{bello}, \text{cicciociccio}, \text{ciccio}\texttt{bello}, \texttt{bellobello}, \ldots\}$

Notiamo che per ciccio`bello` $\in S^*$ vale:

$$(\text{cicciobello})^R = \text{olleboiccic} = \text{bello}^R\text{ciccio}^R$$

Per dimostrare che $(S^R)^* = (S^*)^R$, possiamo far vedere che dato un qualunque insieme S di stringhe:

- $(S^*)^R \subseteq (S^R)^*$.
- $(S^R)^* \subseteq (S^*)^R$.

$(S^*)^R \subseteq (S^R)^*$

Sia S un qualunque insieme di stringhe.

Prendiamo una stringa $w \in (S^*)^R$. Possiamo scrivere $w = (w_1 w_2 \cdots w_n)^R$, dove ogni $w_i \in S$.

$$(w_1 w_2 \cdots w_n)^R = w_n^R w_{n-1}^R \cdots w_1^R.$$

Quindi $w \in (S^R)^*$.

$(S^*)^R \supseteq (S^R)^*$

Sia S un qualunque insieme di stringhe.

Prendiamo ora una stringa $w \in (S^R)^*$.

$$w_1^R w_2^R \cdots w_n^R = (w_n w_{n-1} \cdots w_1)^R.$$

Quindi $w \in (S^*)^R$.