ESERCIZIO 4

Applicare il pumping lemma per dimostrare che il seguente linguaggio non è regolare

$L = \{ a^n b^n a^n \mid n \geq 0 \}$

Supponiamo per assurdo che L sia regolare. Allora la proprietà del pumping lemma deve valere per il linguaggio L.

Mostriamo che

$\forall\, p > 0 \quad \exists\, w \in L, |w| \geq p$ tale che

$\forall\, x, y, z \in \Sigma^* \quad w = xyz\,,\ |xy| \leq p\,,\ y \neq \varepsilon$

$\exists\, k \geq 0$ tale che $xy^k z \notin L$

Sia p la costante del pumping.

Consideriamo la stringa $w = a^p b^p a^p$.
Chiaramente, $w \in L$ e $|w| \geq p$.

Il pumping lemma garantisce che w può essere fattorizzata in tre sottostringhe $x, y, z \in \Sigma^*$ tali che:

1. $|xy| \leq p$ 2. $y \neq \varepsilon$ 3. $\forall\, k \geq 0,\ xy^k z \in L$

La condizione 1) implica che xy è formata da sole a. Di conseguenza, anche y è formata da sole a (almeno una per la condizione 2).

Si ha, quindi, che $w = a^p b^p a^p = xyz$, dove

$x = a^i \qquad y = a^j \qquad z = a^{p-i-j} b^p a^p$, con $i \geq 0,\ j > 0,\ i+j \leq p$

Consideriamo $k = 0$. In questo modo, otteniamo la stringa

$xy^0 z = xz = a^i a^{p-i-j} b^p a^p = a^{p-j} b^p a^p$

La stringa xz, tuttavia, non appartiene al linguaggio L poiché

$xz \in L \leftrightarrow xz = a^{j} b^p a^p$, con $p - j = j$

Però, poiché $j > 0$, si ha che $p - j < p$. Ciò implica che il numero di a prima di p b è minore del numero di a della seconda parte della parola.

Questo risultato è in contraddizione con la terza condizione del pumping lemma. Ciò significa che L non può essere regolare.