

# Lezioni di Ricerca Operativa

Università degli Studi di Salerno

## Lezione n° 3

Richiami di Algebra vettoriale:

- Matrici ed Operazioni tra matrici
- Inversa di una matrice
- Risoluzione di un sistema di equazioni lineari
- Metodo di Gauss

# Matrici

**Definizione (Matrice):** Prende il nome di **matrice** di dimensione  $m \times n$  una tabella di elementi ordinatamente disposti su  $m$  righe ed  $n$  colonne.

**Notazione:** Indicheremo le matrici con lettere maiuscole  $A$ ,  $B$ , .... o per esteso con le seguenti notazioni:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

# Matrici: Notazione

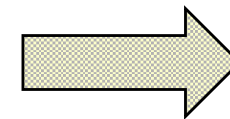
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

generico elemento  $a_{ij}$  della matrice  
nella **riga**  $i$  e nella **colonna**  $j$

numero di righe

A è una matrice (3 x 4)

numero di colonne



$$A_{m \times n} = \{a_{ij}\}$$

# Matrici: Notazione

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \underline{a}_3 \quad \underline{a}_4$

$\underline{a}^1$   
 $\underline{a}^2$   
 $\underline{a}^3$

A si può indicare anche come un insieme di vettori riga:  $A = \begin{bmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a}^3 \end{bmatrix}$

oppure come un insieme di vettori colonna:  $A = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4]$

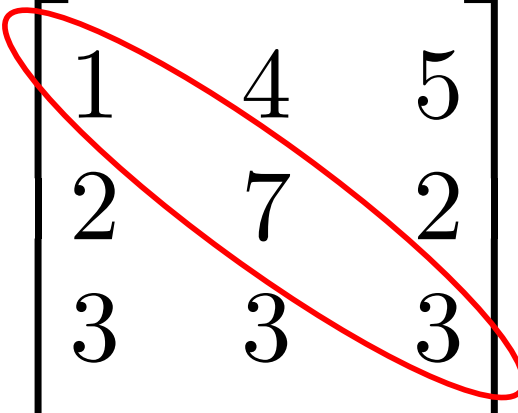
# Matrici

- Se  $m \neq n$  la matrice si dice **rettangolare**;
- Se  $m = n$  la matrice si dice **quadrata**.
- In una matrice quadrata di ordine  $n$  gli elementi  $a_{ii}$  ( $i=1, \dots, n$ ) costituiscono la **diagonale principale**.

matrice rettangolare

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice quadrata

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$


# Moltiplicazione per uno scalare

$$A_{m \times n} = \{a_{ij}\} \quad k \text{ scalare} \quad \longrightarrow \quad k A_{m \times n} = \{k \cdot a_{ij}\}$$

## Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad k = 2$$

$$kA = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 & 4 \\ 4 & 14 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

# Addizione tra matrici

$$A_{m \times n} = \{a_{ij}\}$$

$$B_{m \times n} = \{b_{ij}\}$$

$$A + B = C \quad \longrightarrow \quad C_{m \times n} = \{c_{ij}\}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Condizione necessaria: le matrici devono avere le stesse dimensioni

Esempio:

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad A + B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

# Prodotto righe per colonne tra matrici

$$A = \{a_{ij}\}_{m \times n} \quad B = \{b_{ij}\}_{n \times p}$$


Condizione necessaria

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall j = 1, \dots, p$$

Ciascun elemento  $c_{ij}$ , della matrice risultante  $C$ , è il prodotto interno della riga  $i$ -esima di  $A$  con la colonna  $j$ -esima di  $B$ .



# Prodotto righe per colonne tra matrici

## Esempio

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{3 \times 2} = AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 19 & 5 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

# Prodotto righe per colonne tra matrici

Da ricordare:  $A_{m \times n} = \{a_{ij}\}$   $B_{q \times p} = \{b_{ij}\}$

1. Il prodotto  $AB$  è definito solo se  $n=q$ .  $AB$  è allora una matrice di dimensione  $m \times p$ ;
2. Il prodotto  $BA$  è definito solo se  $m=p$ .  $BA$  è allora una matrice di dimensione  $q \times n$ ;
3. *NON necessariamente vale la proprietà commutativa*

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB \neq BA$$

# Trasposta di una matrice

## Definizione (Matrice trasposta)

Data una matrice  $A$ , con  $m$  righe ed  $n$  colonne, si definisce **matrice trasposta** di  $A$ , e si denota con  $A^T$ , la matrice  $n \times m$  che si ottiene da  $A$  scambiando le righe con le colonne.

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad A^T_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Trasposta di una matrice

## Proprietà

1.  $(A^T)^T = A$

2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$  (quando la somma è definita)

3.  $(AB)^T = B^T A^T$  (quando il prodotto è definito)

# Matrici partizionate

Una matrice  $A$  ( $m \times n$ ) può essere **partizionata** in sottomatrici.

$$A_{4 \times 4} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} & \\ & \begin{array}{cc} A_{21} & A_{22} \end{array} \end{array}$$

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$A_{11}$  e  $A_{12}$  hanno dimensione  $3 \times 2$

$A_{21}$  e  $A_{22}$  hanno dimensione  $1 \times 2$

# Alcune matrici particolari

## Definizione (Matrice identità)

La **matrice identità** di ordine  $n$ ,  $I_{n \times n}$ , è una matrice quadrata  $n \times n$  che ha tutti 1 sulla diagonale principale e zeri nelle restanti posizioni.

$$I_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Si osservi che pre-moltiplicando o post-moltiplicando una qualsiasi matrice  $A_{m \times n}$  per la matrice identità, il risultato sarà sempre la matrice  $A_{m \times n}$  ossia:

$$A_{m \times n} I_{n \times n} = A_{m \times n}$$

$$I_{m \times m} A_{m \times n} = A_{m \times n}$$

# Alcune matrici particolari

## Definizione (Matrice triangolare superiore)

Una matrice quadrata  $A$  si dice **triangolare superiore** se tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli. In altre parole  $a_{ij} = 0$  per ogni  $i > j$ .

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrice Triangolare superiore

## Definizione (Matrice triangolare inferiore)

Una matrice quadrata  $A$  si dice **triangolare inferiore** se tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli. In altre parole  $a_{ij} = 0$  per ogni  $i < j$ .

# Alcune matrici particolari

## Definizione (Pivot)

Data una matrice  $A_{m \times n}$  si definisce **pivot** della riga  $i$ -esima di  $A$  il primo elemento non nullo della riga.

## Esempio

Pivot?

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## Definizione (Matrice a scala per righe)

Una matrice  $A_{m \times n}$  si dice **a scala per righe** se:

- 1) tutte le eventuali righe nulle sono in fondo alla matrice;
- 2) il pivot della riga  $i$ -esima è strettamente "più a destra" del pivot della riga  $(i-1)$ -esima (con  $i \geq 2$ )



# Alcune matrici particolari

## Definizione (Matrice a scala per righe)

Una matrice  $A$  si dice **a scala per righe** se:  
 $m \times n$

- 1) tutte le eventuali righe nulle sono in fondo alla matrice;
- 2) il pivot della riga  $i$ -esima è strettamente "più a destra" del pivot della riga  $(i-1)$ -esima (con  $i \geq 2$ )

## Esempi

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

# Operazioni elementari

*Operazioni elementari* sulle righe di una matrice sono:

- **SCAMBIO**: scambio della riga  $i$  con la riga  $j$
- **MOLTIPLICAZIONE**: moltiplicazione di una riga per uno scalare (diverso da zero).
- **SOSTITUZIONE**: sostituzione della riga  $i$  con la somma della riga  $i$  e della riga  $j$  moltiplicata per uno scalare

Data una matrice  $A_{m \times n}$  è possibile utilizzare le **operazioni elementari** sulle righe per:

- Calcolare la matrice inversa di  $A$  (quando  $m=n$ );
- Risolvere un sistema di equazioni lineari;
- Calcolare il rango della matrice.

# Inversa di una matrice

## Definizione (Matrice inversa)

Data una matrice quadrata  $A_{n \times n}$ , una matrice  $B_{n \times n}$  è l'**inversa** di  $A_{n \times n}$  se e solo se:

$$A_{n \times n} B_{n \times n} = I_{n \times n}$$

$$B_{n \times n} A_{n \times n} = I_{n \times n}$$

## Da ricordare:

- l'inversa di una matrice quadrata  $A$  (se esiste) è **UNICA** e si denota con  $A^{-1}$
- se una matrice ammette l'inversa allora è detta matrice **NON SINGOLARE**
- una matrice quadrata è non singolare se e solo se le sue righe sono linearmente indipendenti o equivalentemente se e solo se le sue colonne sono linearmente indipendenti

# Calcolo dell'inversa di una matrice

L'inversa di una matrice quadrata  $A_{n \times n}$  può essere calcolata attraverso un numero finito di operazioni elementari nel seguente modo:

1. Si affianca ad  $A$  la matrice identità  $I$  di ordine  $n$ . Si ottiene, in questo modo, la **matrice estesa**  $[A \ I]$  di dimensione  $n \times 2n$ ;
2. Si effettuano una serie di operazioni elementari sulle righe della matrice estesa per fare in modo che  $A$  diventi la matrice identità  $I$ ;
3. Dopo il passo 2, la matrice estesa risultante sarà  $[I \ A^{-1}]$  le cui ultime  $n$  colonne compongono la matrice inversa di  $A$ .

**N.B.** Se durante il passo 2 una o più righe della matrice  $A$  si annullano allora  $A$  non è invertibile.

## Calcolo dell'inversa di una matrice: esempio (1/4)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- Per ottenere l'uno nella posizione  $a_{11}$ , sommiamo la 2° riga alla 1°

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- Per ottenere lo zero nella posizione  $a_{21}$ , sommiamo la 3° riga alla 2° :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

## Calcolo dell'inversa di una matrice: esempio (2/4)

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ \textcircled{1} & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- Per ottenere l'uno nella posizione  $a_{31}$ , moltiplichiamo per -1 la 1° riga e la sommiamo alla 3° riga:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \textcircled{3} & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

- Per ottenere lo zero nella posizione  $a_{12}$ , moltiplichiamo per -3 la 2° e la sommiamo alla 1° :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

## Calcolo dell'inversa di una matrice: esempio (3/4)

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

- Per ottenere lo zero nella posizione  $a_{32}$ , moltiplichiamo per 4 la 2° riga e la sommiamo alla 3° riga:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & 3 & 5 \end{array} \right]$$

- Per ottenere l'uno nella posizione  $a_{33}$ , dividiamo per 12 la 3° riga:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & 1/4 & 5/12 \end{array} \right]$$

## Calcolo dell'inversa di una matrice: esempio (4/4)

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & 1/4 & 5/12 \end{array} \right]$$

- Per ottenere lo zero nella posizione  $a_{13}$ , moltiplichiamo per 7 la 3° riga e la sommiamo alla 1° riga:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/12 & -1/4 & -1/12 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & 1/4 & 5/12 \end{array} \right]$$

- Per ottenere lo zero nella posizione  $a_{23}$ , moltiplichiamo per -3 la 3° riga e la sommiamo alla 2° :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/12 & -1/4 & -1/12 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & 1/4 & 5/12 \end{array} \right] A^{-1}$$



# Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata  $A$  è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \text{minor}(A_{ij})$$

*fissata una riga  $i$*

**N.B.** è possibile anche fissare la colonna  $j$  e far variare  $i$ .

**N.B.**  $\text{minor}(A_{ij})$  è il determinante della sottomatrice di  $A$  ottenuta rimuovendo la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna

$i = 1$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$A_{11}$


$$\det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} +$$

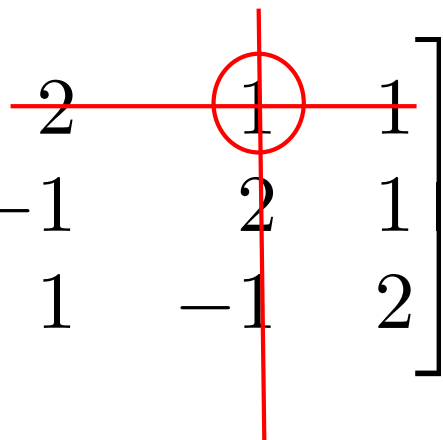
# Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata  $A$  è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \text{minor}(A_{ij}) \quad \text{fissata una riga } i$$

$i = 1$   


$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$


$$\det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} +$$

# Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata  $A$  è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \text{minor}(A_{ij}) \quad \text{fissata una riga } i$$

$$i = 1$$
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

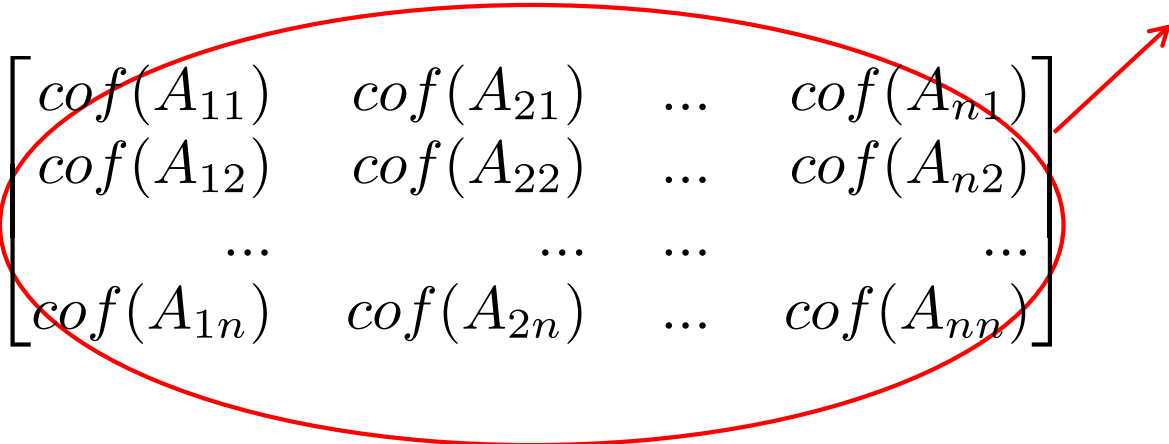
$$\det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

# Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) = 12 \end{aligned}$$

Matrice trasposta dei cofattori

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \text{cof}(A_{11}) & \text{cof}(A_{21}) & \dots & \text{cof}(A_{n1}) \\ \text{cof}(A_{12}) & \text{cof}(A_{22}) & \dots & \text{cof}(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cof}(A_{1n}) & \text{cof}(A_{2n}) & \dots & \text{cof}(A_{nn}) \end{bmatrix}$$


$$\text{cof}(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \text{minor}(A_{ij})$$

# Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 12 \quad \text{cof}(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \text{minor}(A_{ij})$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \text{cof}(A_{11}) & \text{cof}(A_{21}) & \dots & \text{cof}(A_{n1}) \\ \text{cof}(A_{12}) & \text{cof}(A_{22}) & \dots & \text{cof}(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cof}(A_{1n}) & \text{cof}(A_{2n}) & \dots & \text{cof}(A_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$\text{cof}(A_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot \text{minor}(A_{11}) = (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

# Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 12 \quad \text{cof}(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \text{minor}(A_{ij})$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \text{cof}(A_{11}) & \text{cof}(A_{21}) & \dots & \text{cof}(A_{n1}) \\ \text{cof}(A_{12}) & \text{cof}(A_{22}) & \dots & \text{cof}(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cof}(A_{1n}) & \text{cof}(A_{2n}) & \dots & \text{cof}(A_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$\text{cof}(A_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot \text{minor}(A_{21}) = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -3$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{3}{12} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

# Rango di una matrice

## Definizione (Rango di riga)

Data una matrice  $A$ , quadrata o rettangolare, il **rango di riga** di  $A$  è il massimo numero di righe linearmente indipendenti di  $A$ .

## Definizione (Rango di colonna)

Data una matrice  $A$ , quadrata o rettangolare, il **rango di colonna** di  $A$  è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di  $A$ .

## Teorema

Data una matrice  $A$ , quadrata o rettangolare, il rango di riga di  $A$  coincide con il rango di colonna di  $A$ .

## Definizione (Rango di una matrice)

Data una matrice  $A$ , quadrata o rettangolare, il **rango** di  $A$  coincide con il massimo numero di righe linearmente indipendenti di  $A$  o, equivalentemente, con il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di  $A$ .

# Rango di una matrice

$$\text{rango} \left( \begin{matrix} A \\ m \times n \end{matrix} \right) \leq \min\{m, n\}$$

Se  $\text{rango} \left( \begin{matrix} A \\ m \times n \end{matrix} \right) = \min\{m, n\}$  allora  $A$  è una matrice a **rango pieno**.



# Rango di una matrice e sistema di equazioni lineari

Dato il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\underset{m \times n}{A} \underset{n \times 1}{\underline{x}} = \underset{m \times 1}{\underline{b}}$$

Individuare una soluzione ad sistema di equazioni lineari significa trovare dei valori da assegnare a  $x_1, x_2, \dots, x_n$  affinché il vettore  $\underline{b}$  possa essere espresso come combinazione lineare delle colonne della matrice  $A$ .

**OSSERVAZIONE:** Un sistema di equazioni lineari può:

- non ammettere soluzioni (sistema inconsistente);
- ammettere un'unica soluzione (sistema consistente);
- ammettere infinite soluzioni (sistema consistente).

# Rango di una matrice e sistema di equazioni lineari

Dato il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\underset{m \times n}{A} \underset{n \times 1}{\underline{x}} = \underset{m \times 1}{\underline{b}}$$

La matrice  $[A \ \underline{b}]$  è detta **matrice completa** del sistema e vale quanto segue:

1.  $\text{rango}([A \ \underline{b}]) > \text{rango}(A) \quad \Rightarrow$  il sistema non ha soluzione
2.  $\text{rango}([A \ \underline{b}]) = \text{rango}(A) \quad \Rightarrow$  il sistema ha soluzione

Il numero di soluzioni del sistema è pari a  $\infty^{n-\text{rango}(A)}$

# Risoluzione sistema di equazioni lineari attraverso le operazioni elementari

Dato un sistema di  $m$  equazioni lineari ed  $n$  incognite

The diagram shows the linear system  $A\underline{x} = \underline{b}$ . The matrix  $A$  is circled in red, with a red line pointing to the text "matrice dei coefficienti di dimensione  $(mxn)$ ". The vector  $\underline{x}$  is underlined and circled in red, with a red line pointing to the text "Vettore delle incognite di dimensione  $(nx1)$ ". The vector  $\underline{b}$  is circled in red, with a red line pointing to the text "vettore dei termini noti di dimensione  $(mx1)$ ".

matrice dei coefficienti di dimensione  $(mxn)$

$A\underline{x} = \underline{b}$

vettore dei termini noti di dimensione  $(mx1)$

Vettore delle incognite di dimensione  $(nx1)$

è equivalente al sistema:  $A' \underline{x} = \underline{b'}$

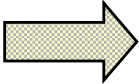
dove la matrice  $[A' \underline{b'}]$  è ottenuta dalla matrice  $[A \underline{b}]$  attraverso un numero finito di operazione elementari.

# Risolvere un sistema di equazioni lineari

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 10$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6$$

$$x_2 + x_3 = 2$$

La matrice dei coefficienti ha rango  $= 3 < 4$   il sistema ha infinite soluzioni

---

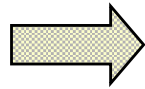
Metodo di Gauss:

ridurre la matrice dei coefficienti ad una matrice a scala attraverso un numero finito di operazioni elementari

# Risolvere un sistema di equazioni lineari

## Metodo di Gauss

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 2\end{aligned}$$



$$\begin{array}{c} \textcolor{red}{A} \qquad \qquad \textcolor{red}{b} \\ \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \end{array}$$

Aggiungiamo la prima riga alla seconda.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Dividiamo la 2° riga per 4 e sottraiamola alla 3° riga.

$$\begin{array}{c} \textcolor{red}{A'} \qquad \qquad \textcolor{red}{b'} \\ \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -2 \end{array} \right] \end{array}$$

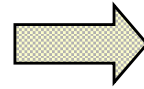
# Risolvere un sistema di equazioni lineari

## Metodo di Gauss

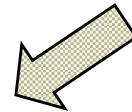
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 10$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6$$

$$x_2 + x_3 = 2$$



$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -2 \end{array}$$



$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 10$$

$$x_2 - \frac{1}{4}x_4 = 4$$

$$x_3 + \frac{1}{4}x_4 = -2$$

Assegnando un qualsiasi valore  $\lambda$  a  $x_4$ , si ottengono infinite soluzioni del sistema:

$$x_4 = \lambda$$

$$x_3 + \frac{1}{4}\lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -2 - \frac{1}{4}\lambda$$

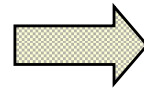
$$x_2 - \frac{1}{4}\lambda = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4 + \frac{1}{4}\lambda$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 10 - 2(4 + \frac{1}{4}\lambda) - (-2 - \frac{1}{4}\lambda) + 2\lambda = 4 + \frac{7}{4}\lambda$$

# Risolvere un sistema di equazioni lineari

## Metodo di Gauss

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 2\end{aligned}$$



$$\begin{array}{cccc|c}x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -2\end{array}$$

Al variare di  $\lambda$ , si ottengono infinite soluzioni al sistema:

$$x_4 = \lambda$$

$$x_3 + \frac{1}{4}\lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -2 - \frac{1}{4}\lambda$$

$$x_2 - \frac{1}{4}\lambda = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4 + \frac{1}{4}\lambda$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 10 - 2(4 + \frac{1}{4}\lambda) - (-2 - \frac{1}{4}\lambda) + 2\lambda = 4 + \frac{7}{4}\lambda$$

## ESERCIZI

1. Dati i vettori  $\underline{v}_1^T = [4, 1, 2]$ ,  $\underline{v}_2^T = [7, -8, 0]$  e  $\underline{v}_3^T = [4, 1, 3]$  determinare i coefficienti  $x_1, x_2, x_3$  tramite i quali il vettore  $\underline{y} = [1 \ 2 \ 3]$  sia espresso come combinazione lineare dei tre vettori dati.
2. Dati i vettori  $\underline{v}_1^T = [1, 3, -4]$ ,  $\underline{v}_2^T = [0, 3, 2]$ ,  $\underline{v}_3^T = [1 \ 0 \ 1]$ , si verifichi tramite il determinante se i vettori dati costituiscono una base di  $\mathbb{R}^3$ .
3. Calcolare l'inversa, se esiste, delle seguenti matrici con i due metodi presentati in questa lezione:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$