Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice) Anno Acc. 2016-2017
Prova scritta - 13 novembre 2017

Nome e Cognome, email: Matricola: **Firma**:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	**Tot.**	7
							SI NO

Leggere le tracce con attenzione!
Giustificare le risposte, risposte non giustificate non saranno valutate.
La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.
È vietato copiare, collaborare o comunicare con altri studenti.
È vietato l'utilizzo di libri, appunti o lucidi.

I risultati della prova scritta e le informazioni per la conclusione dell'esame saranno pubblicati sulla piattaforma e-learning mercoledì 22 novembre.

1. *(15 punti)*
   - Dare la definizione di espressione regolare, indicando anche il linguaggio rappresentato.
   - Definire un'espressione regolare che denoti il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ di lunghezza pari e che contengono al più un'occorrenza della lettera a.
   - Definire un automa finito deterministico che riconosca il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ di lunghezza pari e che contengono al più un'occorrenza della lettera a.

2. *(15 punti)*
   - Definire il concetto di chiusura di un insieme rispetto a un'operazione.
   - Definire l'operazione concatenazione di due linguaggi L ed M.
   - Fornire il risultato dell'operazione concatenazione applicata ai linguaggi $L = \emptyset$ ed $M = \{\epsilon\}$.
   - Provare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto alla concatenazione.

3. *(15 punti)* Dare le definizioni di:
   - Macchina di Turing deterministica;
   - Configurazione di una Macchina di Turing deterministica;
   - Linguaggio riconosciuto da Macchina di Turing deterministica;
   - Linguaggio decidibile;
   - Macchina di Turing deterministica a k nastri.

4. *(15 punti)*

   (1) Fornire le definizioni formali di
   - Funzione calcolabile
   - Linguaggio A riducibile mediante funzione a un linguaggio B

- Riduzione da A a B, dove A e B sono linguaggi.

(2) Sia f la funzione da $\{a,b\}^*$ in $\{a,b\}^*$ tale che $f(w) = w^R$, dove w^R denota l'inversione di w, cioè la stringa w letta da destra verso sinistra. Provare formalmente e con precisione che f è una riduzione da $\{a^n b \mid n \geq 0\}$ a $\{ba^n \mid n \geq 0\}$. È possibile limitarsi a una descrizione ad alto livello delle macchine di Turing utilizzate.

5. *(15 punti)*

   (a) Definire le classi P ed NP. Fornire la definizione di linguaggio NP-completo.

   (b) Sia $L = \{a^n b \mid n \geq 0\}$. Rispondere alle seguenti domande, giustificando la risposta. È possibile limitarsi a una descrizione ad alto livello delle macchine di Turing utilizzate. Enunciare con precisione eventuali risultati presenti nel libro di Sipser che vengono utilizzati, senza necessariamente dimostrarli.

   – L appartiene a P?
   – L appartiene a NP?
   – Cosa potremmo dedurre se sapessimo che L è NP-completo?

6. *(15 punti)*

   (a) Fornire il concetto di problema di decisione e di linguaggio associato. Definire la classe NP.

   (b) Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato e sia $I \subseteq V$. Diciamo che I è un insieme indipendente in G se nessuna coppia di nodi in I è connessa da un arco. Formalmente, $I \times I \subseteq (V \times V) \setminus E$. Il problema di decisione $INDEPENDENT$-SET è: Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ e un intero positivo k, esiste un insieme indipendente I in G di cardinalità k?
   Definire il linguaggio associato a $INDEPENDENT$-SET e provare che esso appartiene ad NP.

7. Si considerino i linguaggi

$$E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una macchina di Turing ed } L(M) = \emptyset\},$$

$$L = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1 \text{ ed } M_2 \text{ sono macchine di Turing ed } L(M_1) \cap L(M_2) = \emptyset\}.$$

Mostrare che esiste una riduzione da E_{TM} a L.