

Lezioni di Ricerca Operativa

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 10

Algoritmo del Simplexso:

- Coefficienti di costo ridotto
- Condizioni di ottimalità
- Test dei minimi rapporti
- Cambio di base

R. Cerulli — F. Carrabs

Calcolo della soluzione ottima di un problema di PL.

Consideriamo il problema (PL) in **Forma Standard**

$$\min z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

Data una base B ammissibile, partizioniamo sia la matrice A che il vettore delle incognite \underline{x} come segue:

$$A = [A_B \mid A_N] \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} m \text{ componenti} \\ n - m \text{ componenti} \end{array}$$

Il sistema di equazioni lineari $A \underline{x} = \underline{b}$ si può riscrivere come

$$A_B \underline{x}_B + A_N \underline{x}_N = \underline{b} \Rightarrow A_B \underline{x}_B = \underline{b} - A_N \underline{x}_N \Rightarrow \underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N$$

Calcolo della soluzione ottima di un problema di PL.

Riscriviamo anche la funzione obiettivo come:

$$z = \underline{c}^T \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{c}_B^T & \underline{c}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} = \underline{c}_B^T \underline{x}_B + \underline{c}_N^T \underline{x}_N \quad (1)$$

Sostituendo in (1) l'espressione delle variabili di base:

$$\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N \quad (2)$$

otteniamo:
$$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N \quad (3)$$

Il **valore della funzione obiettivo** corrispondente alla base B è:

$$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b}$$

Le relazioni (2) e (3) esprimono rispettivamente i vincoli e la funzione obiettivo in funzione delle variabili fuori base.

$$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N$$

$$\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N$$

Indichiamo con $z_0 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b}$, $\bar{\underline{b}} = A_B^{-1} \underline{b}$ e poichè $A_N \underline{x}_N = \sum_{j \in N} \underline{a}_j x_j$ otteniamo:

$$z = z_0 - \sum_{j \in N} \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j$$

$$\underline{x}_B = \bar{\underline{b}} - \sum_{j \in N} A_B^{-1} \underline{a}_j x_j$$

dove \underline{a}_j è la colonna di A che moltiplica la variabile fuori base x_j .

$$z = z_0 - \sum_{j \in N} \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j$$

Ponendo $\underline{z}_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j$, la funzione obiettivo diventa:

$$z = z_0 - \sum_{j \in N} \underline{z}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j = z_0 - \sum_{j \in N} (\underline{z}_j - c_j) x_j$$

I coefficienti $(\underline{z}_j - c_j)$ vengono detti **coefficienti di costo ridotto**

Infine fissato $\underline{y}_j = A_B^{-1} \underline{a}_j$ i vincoli diventano:

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} A_B^{-1} \underline{a}_j x_j = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j$$

Forma canonica in funzione di una base B

Consideriamo il problema (PL) in **Forma Standard**

$$\min z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

Data una base B ammissibile, riscriviamo il problema in funzione di B come segue:

$$\min z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j)x_j$$

$$\underline{x}_B = \bar{\underline{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j$$

$$\underline{x} \geq 0$$

$$z_0 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b}$$

$$z_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j$$

$$\bar{\underline{b}} = A_B^{-1} \underline{b}$$

$$\underline{y}_j = A_B^{-1} \underline{a}_j$$

Verifichiamo se la soluzione di base corrente è ottima o può essere migliorata

Consideriamo la funzione obiettivo: $\min z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j)x_j$

Supponiamo che esista un coefficiente $k \in N$ tale che:

$$z_k - c_k > 0$$

Verifichiamo come cambia il valore della funzione obiettivo incrementando la variabile fuori base x_k che è attualmente nulla.

$$z = z_0 - \overbrace{(z_k - c_k)}^{> 0} \underbrace{x_k}_{> 0}$$

La funzione obiettivo migliora !

Teorema (Condizione di ottimalità)

Una soluzione di base non degenera di un problema di PL è ottima se e solo se:

$$1) \bar{b}_i \geq 0 \quad i=1 \dots, m \quad (\text{ammissibile})$$

$$2) z_j - c_j \leq 0 \quad \forall j \in N \quad (\text{non migliorabile})$$

- Nel caso di soluzione degenera possono esistere soluzioni ottime in cui il punto (2) del teorema non è soddisfatto!
- Tuttavia, se un problema ammette una soluzione ottima finita allora ammette una soluzione di base ottima che soddisfa le condizioni (1) e (2) del teorema.

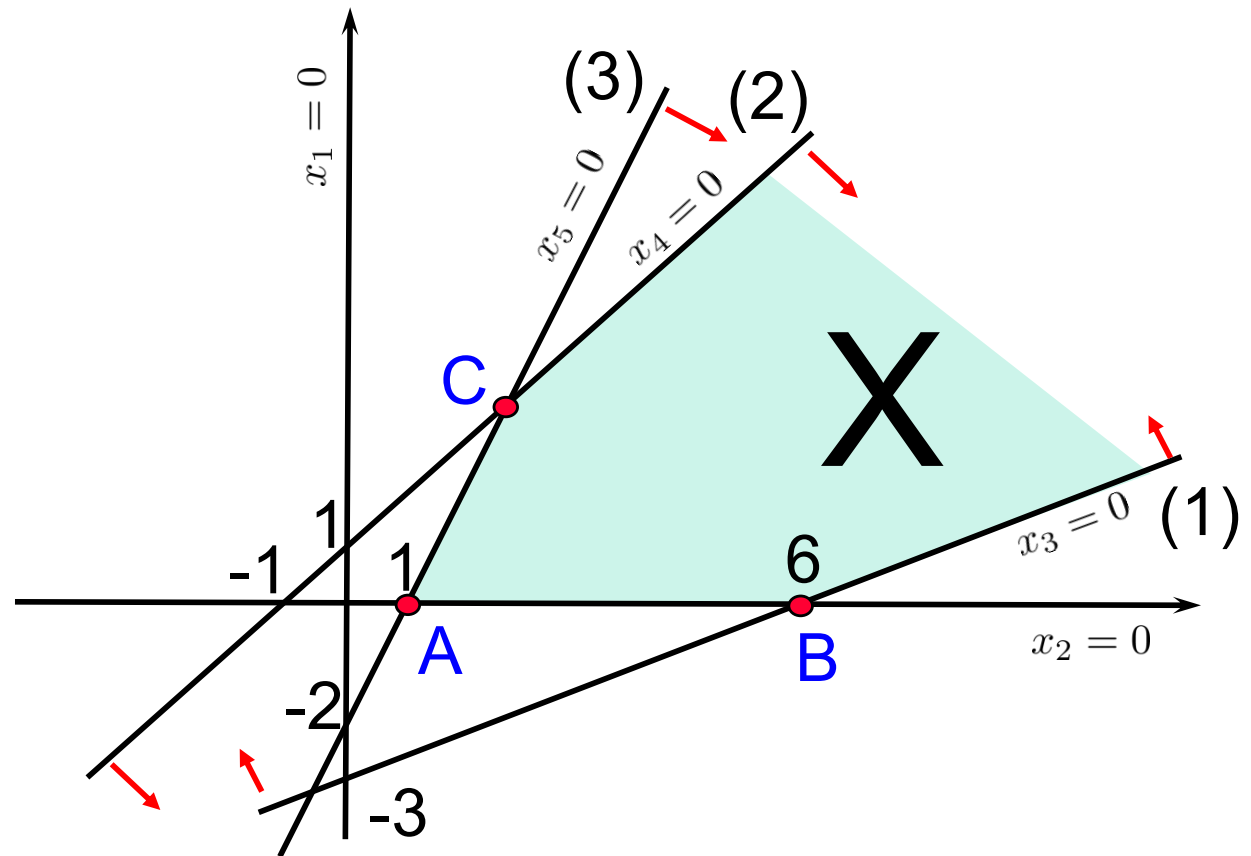
$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 \leq 3$$

$$(2) \quad -x_1 + x_2 \leq 1$$

$$(3) \quad 2x_1 - x_2 \geq 2$$

$$(4) \quad x_1, x_2 \geq 0$$



Forma Standard

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$(2) \quad -x_1 + x_2 + x_4 = 1$$

$$(3) \quad 2x_1 - x_2 - x_5 = 2$$

$$(4) \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Verificare algebricamente se la soluzione di base associata al punto A soddisfa il test di ottimalità.

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$(2) \quad -x_1 + x_2 + x_4 = 1$$

$$(3) \quad 2x_1 - x_2 - x_5 = 2$$

$$(4) \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

$$A_{B_A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_4 \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

$$A_{B_A}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \end{array}$$

$$B_A = \{1, 3, 4\} \quad N_A = \{2, 5\}$$

$$\underline{c}_B^T = [3, 0, 0]$$

$$z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j$$

$$z_2 - c_2 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_2 - c_2 = (3, 0, 0) A_B^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = (0, 0, \frac{3}{2}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$$

$$z_5 - c_5 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_5 - c_5 = (3, 0, 0) A_B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = (0, 0, \frac{3}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{3}{2} - 0 = -\frac{3}{2}$$

$$\min z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j)x_j$$

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j$$

$$\underline{x} \geq 0$$

- Poichè incrementando il valore della variabile fuori base x_k il valore della funzione obiettivo migliora, si potrebbe pensare di aumentare indefinitivamente x_k .
- Tuttavia, aumentando x_k anche il vettore delle variabili in base \underline{x}_B viene modificato in accordo all'equazione dei vincoli.

Dal momento che le x_j sono uguali a zero, per $j \in N \setminus \{k\}$, la relazione:

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j$$

diventa:

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \underline{y}_k x_k$$

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \underline{y}_k x_k$$

In forma vettoriale:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_r} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

Se $y_{ik} \leq 0 \ \forall i \in B$ allora x_{B_i} cresce al crescere di x_k e così x_{B_i} continua a essere non negativo. (**ottimo illimitato**)

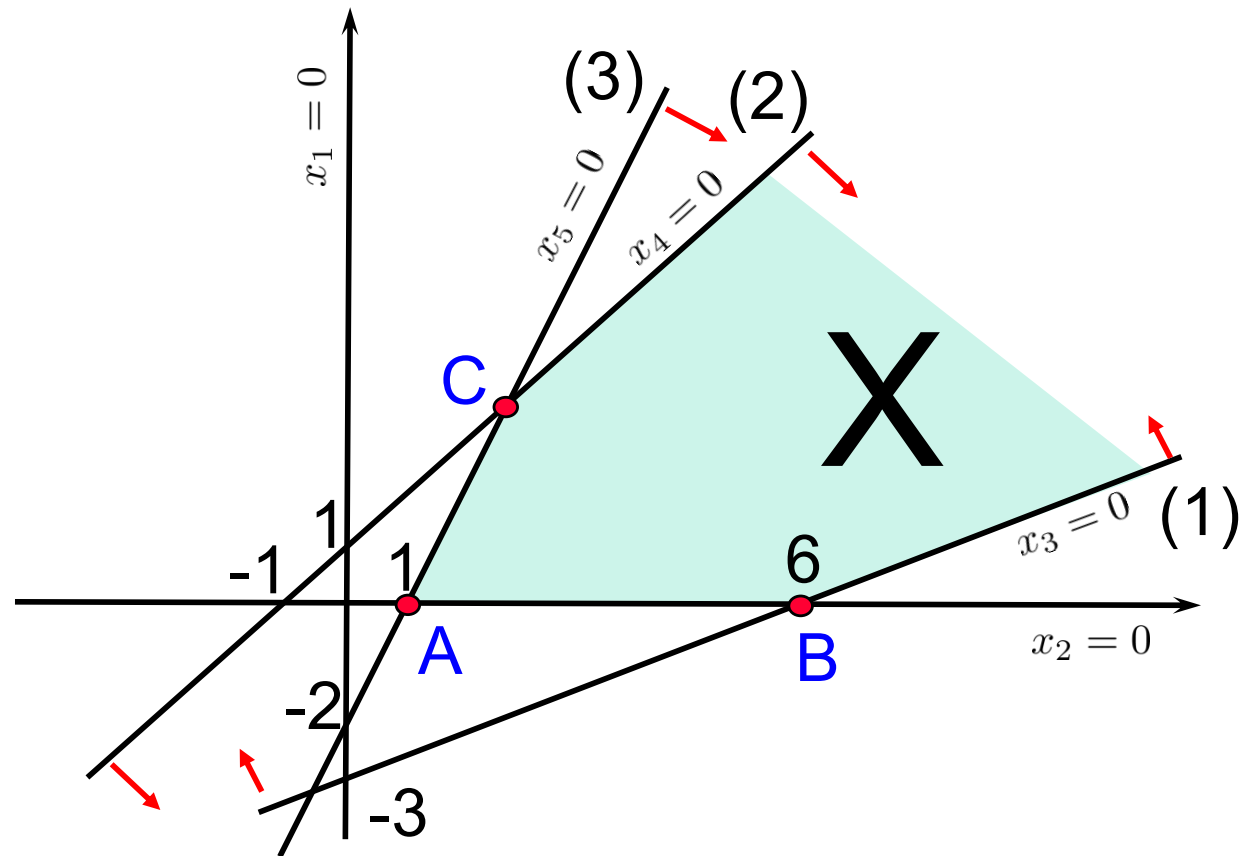
$$\max \quad z = 3x_1 + x_2$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 \leq 3$$

$$(2) \quad -x_1 + x_2 \leq 1$$

$$(3) \quad 2x_1 - x_2 \geq 2$$

$$(4) \quad x_1, x_2 \geq 0$$



Forma Standard

$$-\min \quad -z = -3x_1 - x_2$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$(2) \quad -x_1 + x_2 + x_4 = 1$$

$$(3) \quad 2x_1 - x_2 - x_5 = 2$$

$$(4) \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Verificare algebricamente se la soluzione di base associata al punto C soddisfa il test di ottimalità e in caso negativo verificare il test di illimitatezza

$$-min \quad -z = -3x_1 - x_2$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$(2) \quad -x_1 + x_2 + x_4 = 1$$

$$(3) \quad 2x_1 - x_2 - x_5 = 2$$

$$(4) \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{B_C} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{B_C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$B_C = \{1, 2, 3\} \quad N_C = \{4, 5\}$$

$$\underline{c}_B^T = [-3, -1, 0]$$

$$z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j$$

$$z_4 - c_4 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_4 - c_4 = [-3, -1, 0] A_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = [0, -5, -4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -5 < 0$$

$$z_5 - c_5 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_5 - c_5 = [-3, -1, 0] A_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = [0, -5, -4] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 4 > 0$$



x_5 entra in base

$$\underline{y}_5 = A_B^{-1} \underline{a}_5 = A_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ottimo illimitato!

Se esiste una componente i tale che $y_{ik} > 0$ allora x_{B_i} decresce al crescere di x_k .

Il valore di x_k verrà incrementato finché una delle variabili in base assumerà valore zero. Infatti noi vogliamo che:

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - y_{1k}x_k \geq 0$$

$$x_{B_2} = \bar{b}_2 - y_{2k}x_k \geq 0$$

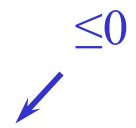
.....

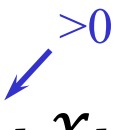
.....

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - y_{mk}x_k \geq 0$$

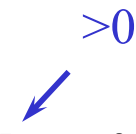
La variabile x_{B_i} che si **azzererà per prima** verrà rimossa dalle variabili di base e sarà rimpiazzata dalla variabile x_k .

Possiamo scrivere:

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - y_{1k} x_k \geq 0 \Leftrightarrow \text{sempre}$$


$$x_{B_2} = \bar{b}_2 - y_{2k} x_k \geq 0 \Leftrightarrow x_k \leq \frac{\bar{b}_2}{y_{2k}}$$


.....
.....

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - y_{mk} x_k \geq 0 \Leftrightarrow x_k \leq \frac{\bar{b}_m}{y_{mk}}$$


Dobbiamo considerare solo i rapporti in cui $y_{ik} > 0$

Quindi, considerando i rapporti in cui $y_{ik} > 0$, il valore assunto dalla variabile x_k sarà:

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Il precedente test viene chiamato **test dei minimi rapporti** ed è utilizzato per individuare la variabile in base x_{B_r} che si azzererà per prima, al crescere di x_k , e che quindi uscirà dalla base.

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - y_{1k}x_k \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_1 - y_{1k}\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \geq 0$$

.....

$$x_{B_r} = \bar{b}_r - y_{rk}x_k \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_r - y_{rk}\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \geq 0$$

.....

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - y_{mk}x_k \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_m - y_{mk}\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \geq 0$$

Riassumendo:

- Fare assumere ad x_k un valore positivo significa **portare la variabile x_k in base**.
- Nello stesso tempo il valore delle variabili di base:
 - Cresce se $y_{ik} < 0$;
 - Decresce se $y_{ik} > 0$;
 - Non cambia se $y_{ik} = 0$.
- Il valore che assume x_k in base è calcolato tramite il test dei minimi rapporti:

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

- La variabile x_{B_r} esce dalla base.

Il coefficiente y_{rk} è detto **Pivot**, (l'aggiornamento della base si dice **Pivoting**) e viene usato per aggiornare i valori delle variabili in base dopo l'ingresso in base di x_k .

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - y_{ik} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

**La nuova soluzione
di base**

$$x_j = 0 \quad \forall j \in N' \text{ con } N' = \{B_r\} \cup N \setminus \{k\}$$

**Le nuove variabili
fuori base**

Con il cambio delle variabili in base, la nuova matrice di base risulta composta dalle stesse colonne della vecchia base ad eccezione della colonna associata a x_{B_r} che è stata sostituita dalla colonna associata a x_k .

La nuova soluzione di base (a meno di casi degeneri) ha migliorato il valore della funzione obiettivo:

$$z = z_0 - \overbrace{(z_k - c_k)}^{>0} \frac{\overline{b}_r}{y_{rk}} < z_0$$

$\nearrow >0$ $\nearrow >0$

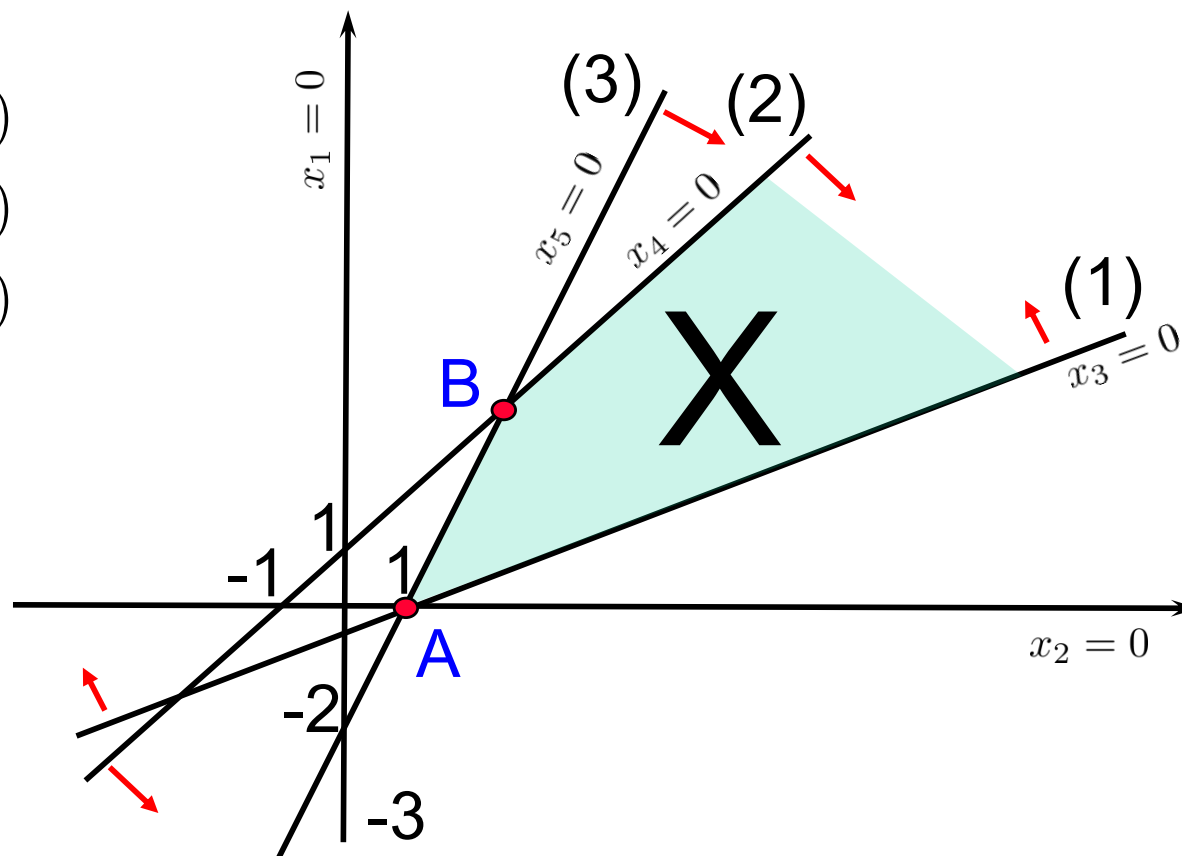
$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$3x_1 - 6x_2 \leq 3 \quad (1)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \quad (2)$$

$$2x_1 - x_2 \geq 2 \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



Forma Standard

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$3x_1 - 6x_2 + x_3 = 3 \quad (1)$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = 1 \quad (2)$$

$$2x_1 - x_2 - x_5 = 2 \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Quale è il punto di ottimo e la base ottima?

Verificare algebricamente se la soluzione di base associata alla base $\{1,4,5\}$ soddisfa il test di ottimalità.

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$3x_1 - 6x_2 + x_3 = 3$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = 1$$

$$2x_1 - x_2 - x_5 = 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$A = \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \\ \begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_{B_A} = \begin{array}{c} x_1 \quad x_4 \quad x_5 \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_{B_A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_A = \{1, 4, 5\} \quad N_A = \{2, 3\}$$

$$\underline{c}_B^T = [3, 0, 0]$$

$$z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j$$

$$z_2 - c_2 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_2 - c_2 = [3, 0, 0] A_B^{-1} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 = [1, 0, 0] \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -6 < 0$$

$$z_3 - c_3 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_3 - c_3 = [1, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 > 0$$

Test di ottimalità fallito. La variabile x_3 deve entrare in base.

Esercizio. 1) Utilizzare il test dei minimi rapporti per individuare la variabile che esce dalla base. 2) Verificare il valore assunto dalla variabile x_3 , una volta entrata in base, e come è cambiato il valore della funzione obiettivo.