

# **Lezioni di Ricerca Operativa**

Università degli Studi di Salerno

## **Lezione n° 13**

Teoria della dualità:

- Coppia di Problemi Primale/Duale
- Regole di Trasformazione
- Teorema debole della dualità

R. Cerulli – F. Carrabs

# Teoria della Dualità

Ad ogni problema di PL (Primale) è associato un problema Duale

(n variabili, m vincoli)

## Problema Primale (P)

$$\min c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

(m variabili, n vincoli)

## Problema Duale (D)

$$\max b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$$

s.t.

$$a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \leq c_1$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

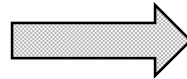
$$a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \leq c_n$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

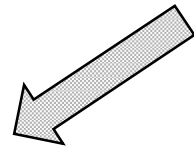
Il problema D ha tante variabili quanti sono i vincoli di P e tanti vincoli quante sono le variabili di P.

# Teoria della Dualità

$$\begin{aligned}
 & \min c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2 \\
 & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$w_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$b_1$
$w_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$b_2$
$w_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$b_3$
	$c_1$	$c_2$	$c_3$	



$$\begin{aligned}
 & \max b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3 \\
 \text{s.t.} \quad & a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 \leq c_1 \\
 & a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3 \leq c_2 \\
 & a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + a_{33}w_3 \leq c_3 \\
 & w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

## Problema Primale (P)

$$\min c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

## Problema Duale (D)

$$\max b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$$

s.t.

$$a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \leq c_1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \leq c_n$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

In forma matriciale:

$$(P) \quad \min \underline{c}^T \underline{x}$$

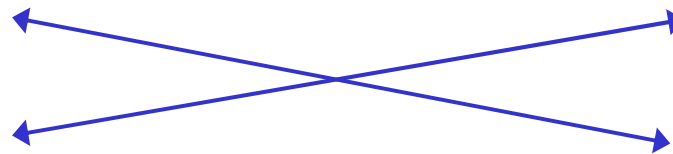
$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$(D) \quad \max \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A^T \underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$



# Teoria della Dualità

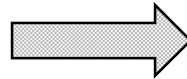
$$\min 3x_1 + 4x_2$$

$$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq 3$$

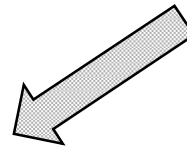
$$4x_1 + x_2 \geq 2$$

$$\frac{1}{5}x_1 \geq 7$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



	$x_1$	$x_2$	
$w_1$	2	$1/2$	3
$w_2$	4	1	2
$w_3$	$1/5$	0	7
	3	4	



$$\max 3w_1 + 2w_2 + 7w_3$$

$$2w_1 + 4w_2 + \frac{1}{5}w_3 \leq 3$$

$$\frac{1}{2}w_1 + w_2 \leq 4$$

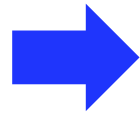
$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0$$

# Duale del problema duale

$$(P) \quad \max \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A^T \underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$



$$-\min - \underline{b}^T \underline{w}$$

$$-A^T \underline{w} \geq -\underline{c}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

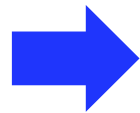
Il **duale** di questo problema è:

	$\underline{w}$	
$\underline{x}$	$-A^T$	$-\underline{c}$
	$-\underline{b}^T$	

$$-\max - \underline{c}^T \underline{x}$$

$$-A \underline{x} \leq -\underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$



$$(D) \quad \min \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A \underline{x} \geq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Il duale del problema duale è il problema primale.

## Duale di un Primale con vincoli di uguaglianza

$$(P) \quad \min \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Trasformiamo i vincoli di uguaglianza in vincoli di maggiore o uguale come segue:

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad \text{equivale a} \quad \begin{cases} A\underline{x} \geq \underline{b} \\ A\underline{x} \leq \underline{b} \end{cases} \Rightarrow -A\underline{x} \geq -\underline{b}$$

$$(P) \quad \min \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

$$-A\underline{x} \geq -\underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

	$\underline{x}$	
$\underline{u}$	$A$	$\underline{b}$
$\underline{v}$	$-A$	$-\underline{b}$
	$\underline{c}$	

quindi si introducono **2m variabili duali,  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$**

$$\max \quad (\underline{b}^T \underline{u} - \underline{b}^T \underline{v})$$

$$A^T \underline{u} - A^T \underline{v} \leq \underline{c}$$

$$\underline{u} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0}$$



$$\max \quad (\underline{b}^T \underline{u} - \underline{b}^T \underline{v})$$

$$A^T \underline{u} - A^T \underline{v} \leq \underline{c}$$

$$\underline{u} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0}$$

e sostituendo  $\underline{w} = \underline{u} - \underline{v}$  si ottiene (D)

$$(P) \quad \min \quad \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$(D) \quad \max \quad \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A^T \underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{w} \quad n.v.$$

## Calcolo del problema duale

- Dato un generico problema di PL, sarebbe possibile trasformarlo in uno equivalente in forma canonica di min/max per calcolarne il duale
- In realtà, questo non è necessario, in quanto è **sempre** possibile calcolare **direttamente** il duale del problema dato

# Teoria della Dualità

$$\max \quad 5x_1 + 3x_2$$

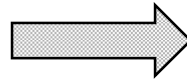
*s.t.*

$$x_1 + 4x_2 - 8x_3 \geq 2$$

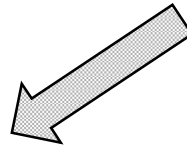
$$7x_2 + 12x_3 \leq 4$$

$$9x_1 - 8x_2 + x_3 = 7$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$w_1$	1	4	-8	2
$w_2$	0	7	12	4
$w_3$	9	-8	1	7
	5	3	0	



$$\min \quad 2w_1 + 4w_2 + 7w_3$$

*s.t.*







$$w_1 + 9w_3 \geq 5$$

$$4w_1 + 7w_2 - 8w_3 \geq 3$$

$$-8w_1 + 12w_2 + w_3 \geq 0$$

$$w_1 \leq 0, w_2 \geq 0, w_3 \text{ n.v.}$$

## Dualità: regole di trasformazione generali

	min		max	
Coefficienti f.o.	$\underline{c}^T$		$\underline{c}$	Termini noti vincoli
Termini noti vincoli	$\underline{b}$		$\underline{b}^T$	Coefficienti f.o.
Coefficienti vincoli	$A$		$A^T$	Coefficienti vincoli
	$\geq$		$\geq 0$	
$i$ -mo vincolo ( $i=1\dots m$ )	$\leq$		$\leq 0$	$i$ -ma variabile ( $i=1\dots m$ )
	$=$		n.v.	
	$\geq 0$		$\leq$	
$j$ -ma variabile ( $j=1\dots n$ )	$\leq 0$		$\geq$	$j$ -mo vincolo ( $j=1\dots n$ )
	n.v.		$=$	

La teoria della Dualità è importante perchè:

- le soluzioni di (P) e (D) sono legate tra loro;
- la soluzione ottima del duale è un bound sulla soluzione ottima del primale.
- le soluzioni duali hanno un'interpretazione economica utile per l'analisi di sensitività (post-ottimalità);
- sulla teoria della dualità sono basati algoritmi, quali il Simplex Duale, l'Algoritmo Primale-Duale, il Delayed Column Generation alternativi al Simplex (Primale) utili per certe classi di problemi;
- può in certi casi essere conveniente risolvere D al posto di P (conviene risolvere il problema con il minor numero di vincoli)

# Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Siano dati i problemi

$$(P) \quad \min \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$(D) \quad \max \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A^T \underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

## 1. Teorema (debole) della dualità

Siano  $\underline{x}$  e  $\underline{w}$  soluzioni ammissibili rispettivamente per (P) e (D), allora

$$\underline{c}^T \underline{x} \geq \underline{b}^T \underline{w}$$

$$(P) \quad \min \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$(D) \quad \max \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A^T \underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

**Dimostrazione:**

$$\underline{\hat{x}} \text{ soluzione ammissibile di P} \implies A\underline{\hat{x}} \geq \underline{b} \quad (1)$$

$$\text{Poichè } \underline{\hat{w}} \geq 0, \text{ premoltiplicando la (1) per } \underline{\hat{w}} \text{ si ottiene: } \underline{\hat{w}}^T A\underline{\hat{x}} \geq \underline{\hat{w}}^T \underline{b} \quad (2)$$

$$\text{Poichè } \underline{\hat{w}} \text{ soluzione ammissibile di D} \implies \underline{c}^T \geq \underline{\hat{w}}^T A \quad (3)$$

$$\text{Dalle disequazioni (2) e (3), sapendo che } \underline{\hat{x}} \geq 0 \text{ si ha: } \underline{c}^T \underline{\hat{x}} \geq \underline{\hat{w}}^T A\underline{\hat{x}} \geq \underline{\hat{w}}^T \underline{b}$$



# Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

## Corollario 1

Se  $\underline{x}$  è una soluzione ammissibile per (P) e  $\underline{w}$  una soluzione ammissibile per (D) tali che  $\underline{c}^T \underline{x} = \underline{b}^T \underline{w}$  allora  $\underline{x}$  e  $\underline{w}$  sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi.

### ***Dimostrazione.***

Supponiamo per assurdo che  $\underline{x}$  non sia ottimo per (P). Quindi esiste un'altra soluzione ammissibile  $\underline{x}^*$  di (P) tale che  $\underline{c}^T \underline{x}^* < \underline{c}^T \underline{x}$ . Ma poiché per ipotesi  $\underline{c}^T \underline{x} = \underline{b}^T \underline{w}$  si ha che  $\underline{c}^T \underline{x}^* < \underline{b}^T \underline{w}$ . Assurdo perché va contro la tesi del teorema debole della dualità.



# Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

## Corollario 2

Se il problema primale (P) è illimitato inferiormente allora il duale (D) è inammissibile. Viceversa se il duale (D) è illimitato superiormente il primale (P) è inammissibile.

### ***Dimostrazione.***

Supponiamo che il valore ottimo del primale (P) sia  $-\infty$  e che il problema duale ammetta una soluzione  $\underline{w}$ . Dal teorema della dualità debole si ha che  $\underline{c}^T \underline{x} \geq \underline{b}^T \underline{w}$  per una qualsiasi soluzione ammissibile  $\underline{x}$  di (P). Questo implica che  $\underline{b}^T \underline{w} \leq -\infty$ . Assurdo.

# Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Il corollario 2 stabilisce che l'illimitatezza di un problema implica l'inammissibilità del suo duale. Tuttavia questa non è una proprietà simmetrica ossia se un problema è inammissibile non è detto che il suo duale sia illimitato. Per esempio:

$$\min -x_1 - x_2$$

$$-x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 - x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Calcolare il duale di  $(P)$  e risolvere entrambi i problemi graficamente