Università degli Studi di Salerno
Insegnamento: Ricerca Operativa
Esame del 22/06/2022

Nome: Cognome: Matricola:

1. Per ognuno dei seguenti punti non rispettati dall'elaborato **verrà sottratto un punto** al punteggio finale:
   (a) Scrivere nome, cognome e matricola sia su questo foglio che su tutti i fogli consegnati.
   (b) Contrassegnare con una crocetta sulla traccia **tutti e soli** i punti degli esercizi che sono stati svolti.
   (c) Ricordarsi di consegnare **sempre** la presente traccia e **solo** i fogli da correggere (niente brutta copia).

2. Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min\ & x_2 \\ & x_2 \leq 4 \\ & -2x_1 + 2x_2 \geq -4 \\ & x_1 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   (a) (3 punti) Risolvere graficamente il problema, individuando il punto di ottimo, se esiste, ed il valore ottimo;
   (b) (2 punti) Individuare le basi associate ai vertici del poliedro;
   (c) (3 punti) Risolvere nuovamente il problema tramite il teorema della rappresentazione.
   (d) (3 punti) La soluzione ottima individuata al punto (a) è unica? Quale test nel Simplesso permette di stabilire se esistono infiniti punti di ottimo?

3. (3 punti) Scrivere l'enunciato del teorema teorema debole della dualità e dei relativi corollari.

4. (3 punti) Scrivere il duale del seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 - x_2 \\ & x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1 - x_3 \geq 1 \\ & x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2\ n.v., x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

5. (5 punti) Applicare l'Algoritmo del Simplesso al seguente problema di programmazione lineare [P] (non usare il tableau):

$$\begin{aligned} \max z = & x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & 3x_2 + x_3 \leq 1 \\ & -4x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$\min\{15, 13\} = 13$

(I) $P = \{s, 3, 5, t\}$ $f = 13$

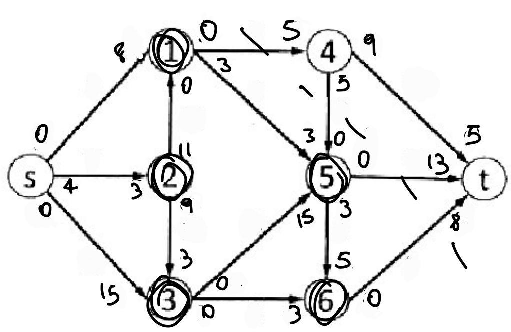
(II) $P = \{s, 3, 5, 6, t\}$ $f = 15$

III $P = \{s, 2, 3, 6, t\}$ $f = 18$

$P = \{s, 1, 5, 6, t\}$ $f = 21$

$P = \{s, 1, 4, t\}$ $f = 26$

6. Dato il seguente grafo G:



   (a). (4 punti) Individuare il flusso massimo da s a t in G mediante l'algoritmo dei cammini aumentanti.
   (b) (3 punti) Con riferimento alla soluzione ottima calcolata nel punto precedente, riportare la quantità di flusso che transita su ogni arco di questa soluzione.
   (c) (2 punti) Individuare il taglio di capacità minima corrispondente alla soluzione ottima ottenuta al punto (a).

b = $x_{s1} = 8$ $x_{14} = 5$ $x_{23} = 9$ $x_{36} = 3$ $x_{4t} = 5$ $x_{6t} = 8$

$x_{s2} = 3$ $x_{15} = 3$ $x_{35} = 15$ $x_{45} = 0$ $x_{5t} = 13$

$x_{s3} = 15$ $x_{56} = 5$

2. Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min x_2$$
$$x_2 \le 4$$
$$-2x_1 + 2x_2 \ge -4$$
$$x_1 \le 4$$
$$-x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

(a) (3 punti) Risolvere graficamente il problema, individuando il punto di ottimo, se esiste, ed il valore ottimo;

(b) (2 punti) Individuare le basi associate ai vertici del poliedro;

(c) (3 punti) Risolvere nuovamente il problema tramite il teorema della rappresentazione.

(d) (3 punti) La soluzione ottima individuata al punto (a) è unica? Quale test nel Simplesso permette di stabilire se esistono infiniti punti di ottimo?

$\min X_2$

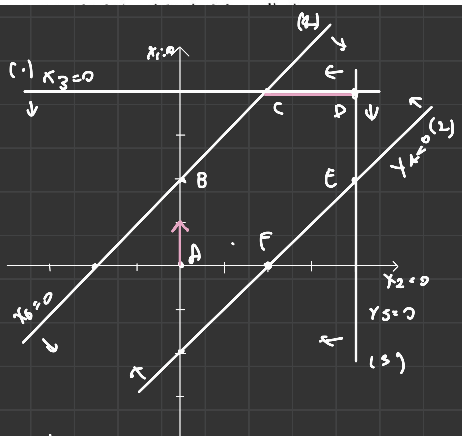
$X_2 \le 4$ (1)

$-2X_1 + 2X_2 \ge -4$ (2)

$X_1 \le 4$ (3)

$-X_1 + X_2 \le 2$ (4)

$\underline{X} \ge 0$



$A=(0,0)$
$B=(0,2)$
$C=(2,4)$
$D=(4,4)$
$E=(4,2)$
$F=(2,0)$

il segmento CD ha infiniti punti di ottimo

$z^* = c^T x = (0\ 1)\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 4$

b)

FRM STD

min x_2

$X_2 + X_3 = 4$ (1) $X_3 = 0$

$-2x_1 + 2x_2 - X_4 = -4$ (2) $x_4 = 0$

$X_1 + X_5 = 4$ (3) $X_5 = 0$

$-X_1 + x_2 + X_6 = 2$ (4) $X_6 = 0$

$B_A = \{3,4,5,6\}$ $B_B = \{2,3,4,5\}$

$B_C = \{1,2,4,5\}$ $B_D = \{1,2,4,6\}$

$B_E = \{1,2,3,6\}$ $B_F = \{1,3,5,6\}$

c) Le dir estreme essendo un politopo non esistono

d) La soluz. ott. è unica ma corrisponde a inf. punti di ottimo

Nel simplesso con il test di ottimalità se i coeff di costo ridotto sono tutti ≤ 0 quelli $= 0$ indicano che è possibile per entrare in base

4. (3 punti) Scrivere il duale del seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 - x_2 \\ & x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1 - x_3 \geq 1 \\ & x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2\ n.v., x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max\ & b^T w \\ & A^T w \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min\ & b^T w \\ & A^T w \geq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	
v_1	0	1	-1	1
v_2	1	0	-1	1
v_3	1	-1	-1	0
	1	-1	0	

$$\begin{aligned} \min\ & w_1 + w_2 \\ & w_2 + w_3 \geq 1 \\ & w_1 - w_3 = -1 \\ & -w_1 - w_2 - w_3 \leq 0 \\ & w_1 \geq 0\quad w_2 \leq 0\quad w_3\ n.v. \end{aligned}$$

5. (5 punti) Applicare l'Algoritmo del Simplesso al seguente problema di programmazione lineare [P] (non usare il tableau)

$$\max z = x_1 - 3x_2 + 2x_3$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4$$
$$3x_2 + x_3 \leq 1$$
$$-4x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$-\min z = -x_1 + 3x_2 - 2x_3$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 4$$
$$3x_2 + x_3 + x_5 = 1$$
$$-4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_6 = 2$$
$$\underline{x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Metodo delle due fasi

$$\min g = x_7 + x_8$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_7 = 4$$
$$3x_2 + x_3 + x_5 = 1$$
$$-4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_6 + x_8 = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \{7, 5, 8\} \quad N = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A_B^{-1} \quad c_B^T = (1\ 0\ 1)$$

TEST OTT

$$z_1 - c_1 = (1\ 0\ 1)\, I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -3$$
$$z_2 - c_2 = (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$
$$z_3 - c_3 = (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$$ x_3 entra
$$z_4 - c_4 = (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$
$$z_6 - c_6 = (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$$

TEST MIN RAPP.

$$y_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 5 \\ 8 \end{matrix} \end{array} \quad \min\left\{\frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$$ x_8 esce

$B=\{7,5,3\}$ $N=\{1,2,4,6,8\}$ $C_B^T=\{1,0,0\}$ $A_B=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&3\end{pmatrix}$

$\det(A_B)=1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}=3$ $A_B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\text{MAT}\\ \text{COF } A_B\end{pmatrix}^T$

$A_B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&-3\\0&3&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&1/3\end{pmatrix}$

$X_{11}=3$ $X_{12}=0$ $X_{13}=0$
$X_{21}=0$ $X_{22}=3$ $X_{23}=0$
$X_{31}=-3$ $X_{32}=-1$ $X_{33}=1$

OT

$z_1-c_1=(1\,0\,0)\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1/3\\0&0&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}=(1\,0\,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}=5$

$z_2-c_2=(1\,0\,-1)\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}=2$

$z_4-c_4=(1\,0\,-1)\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=-1$

x_1 entra

$z_6-c_6=(1\,0\,-1)\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=1$

$z_8-c_8=(1\,0\,-1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-1$

$Y_1=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1/3\\0&0&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\-4\\-12\end{pmatrix}$

La sol. è illimitata