Lezioni di Ricerca Operativa

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 6

- Ottimi globali e locali
- Risoluzione grafica di un problema di PL
- Definizione di Iperpiano e Semispazi.
- Insiemi convessi.
- Politopi e poliedri.

R. Cerulli – F. Carrabs

Ottimi globali e ottimi locali

$$\min f(\underline{x})$$

$$\text{s.t.}$$
$$\underline{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$$

Definizione (Ottimo Globale)

Un punto $\underline{x}^* \in X$ è un **ottimo globale** per la funzione di minimo $f(\underline{x})$ se e solo se: $f(\underline{x}^*) \leq f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in X$.

Definizione (Ottimo Locale)

Un punto $\underline{x}' \in X$ è un **ottimo locale** per la funzione di minimo $f(\underline{x})$ se e solo se: $f(\underline{x}') \leq f(\underline{x})$ $\forall \underline{x} \in N(\underline{x}';\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$.

- *Ogni ottimo globale è anche ottimo locale, in generale non è vero il viceversa*

- *Ci sono però casi particolari in cui tutti gli ottimi locali sono anche ottimi globali*

Un esempio

L’azienda Rossi &C. ha vinto una gara d’appalto per la produzione di due tipologie di leghe di acciaio L1 ed L2. Il contratto prevede il pagamento di 10 milioni di euro a condizione che siano rispettate le seguenti proporzioni tra le tonnellate delle due leghe prodotte.

- La metà delle tonnellate di L1 prodotte non devono superare, per al più 3 unità, le tonnellate di L2 prodotte;
- Le tonnellate di L2 possono essere al più di uno superiori a quelle di L1;
- Le tonnellate di L2 prodotte non devono mai superare il doppio delle tonnellate di L1 decrementate di 2.

Sapendo che l’azienda spende 3 milioni di euro per produrre una tonnellata della lega L1 ed un milione di euro per la lega L2, individuare un piano di produzione che rispetti i vincoli di produzione minimizzando però i costi di produzione.

L’attuale piano di produzione individuato prevede la produzione di 2 tonnellate di L1 e mezza tonnellata di L2 per una spesa totale di 6,5 milioni di euro e un profitto finale pari a 10 - 6,5 = 3,5 milioni. Si può fare di meglio?

$$\min \quad z = 3x_1 + x_2$$

La metà delle tonnellate di L1 prodotte non devono superare, per al più 3 unità, le tonnellate di L2 prodotte

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

$$\min \quad z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

La metà delle tonnellate di L1 prodotte non devono superare, per al più 3 unità, le tonnellate di L2 prodotte

Le tonnellate di L2 possono essere al più di uno superiori a quelle di L1

$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

(1)	$\frac{1}{2}x_1 - x_2$	≤ 3	La metà delle tonnellate di L1 prodotte non devono superare, per al più 3 unità, le tonnellate di L2 prodotte
(2)	$-x_1 + x_2$	≤ 1	Le tonnellate di L2 possono essere al più di uno superiori a quelle di L1
(3)	$2x_1 - x_2$	≥ 2	Le tonnellate di L2 prodotte non devono mai superare il doppio delle tonnellate di L1 decrementate di 2
(4)	x_1, x_2	≥ 0	

a) Risolvere graficamente il problema

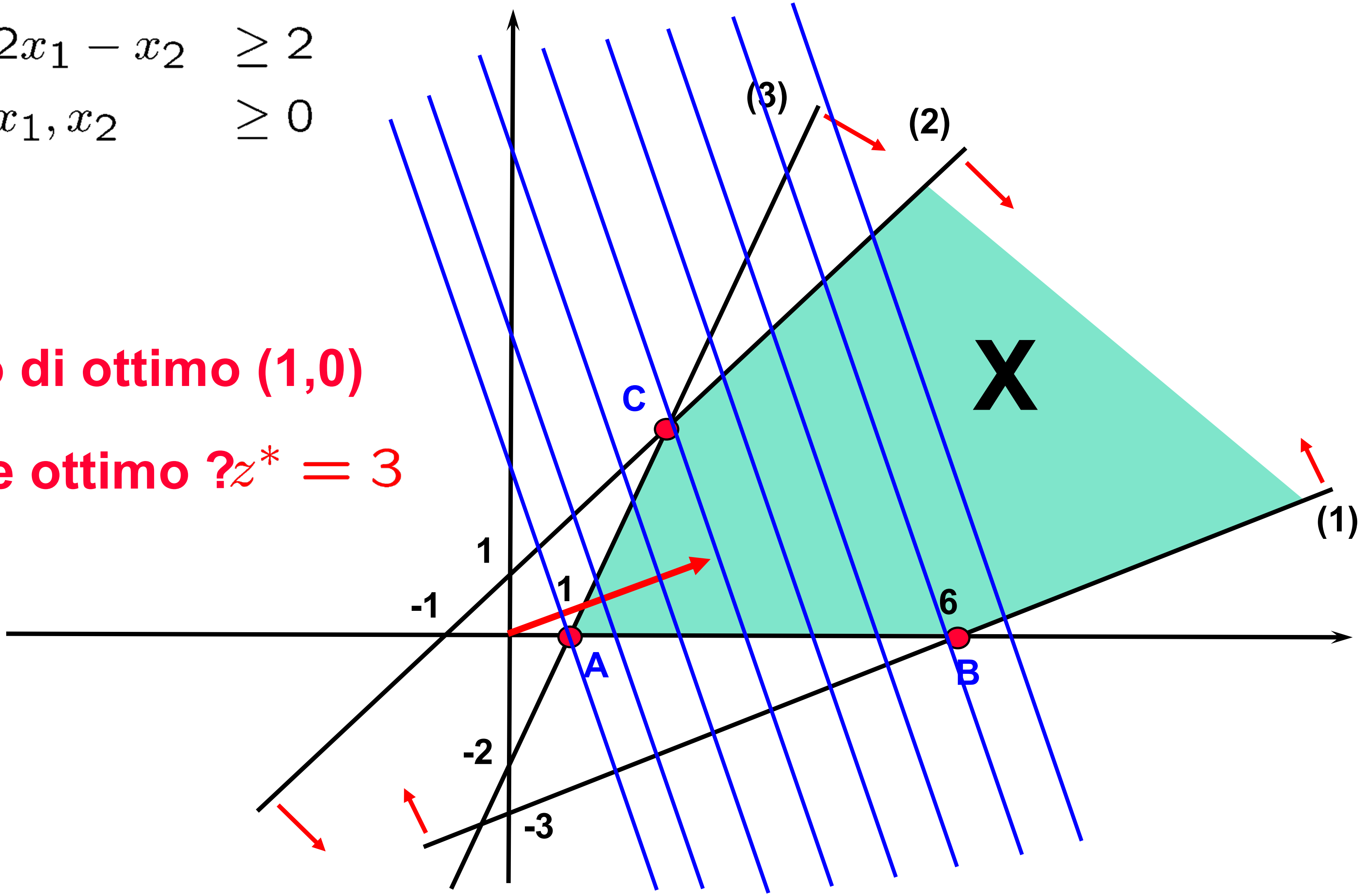
$$\min \quad z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Gradiente (3,1)

Punto di ottimo (1,0)

Valore ottimo ? $z^* = 3$



Un problema di PL può essere:

- **Non Ammissibile**

  quando $X = \emptyset$ ossia quando non esistono soluzioni ammissibili

- **Ammissibile con valore ottimo illimitato**

  quando $z^* = -\infty$ (PL di minimo) oppure $z^* = +\infty$ (PL di massimo)

  (N.B. non esiste un punto di ottimo $\underline{x}^*$)

- **Ammissibile con soluzione ottima finita:**

  (PL di minimo) se esiste un punto $\underline{x}^* \in X : f(\underline{x}^*) \leq f(\underline{x}) \ \forall \underline{x} \in X$

  (PL di massimo) se esiste un punto $\underline{x}^* \in X : f(\underline{x}^*) \geq f(\underline{x}) \ \forall \underline{x} \in X$

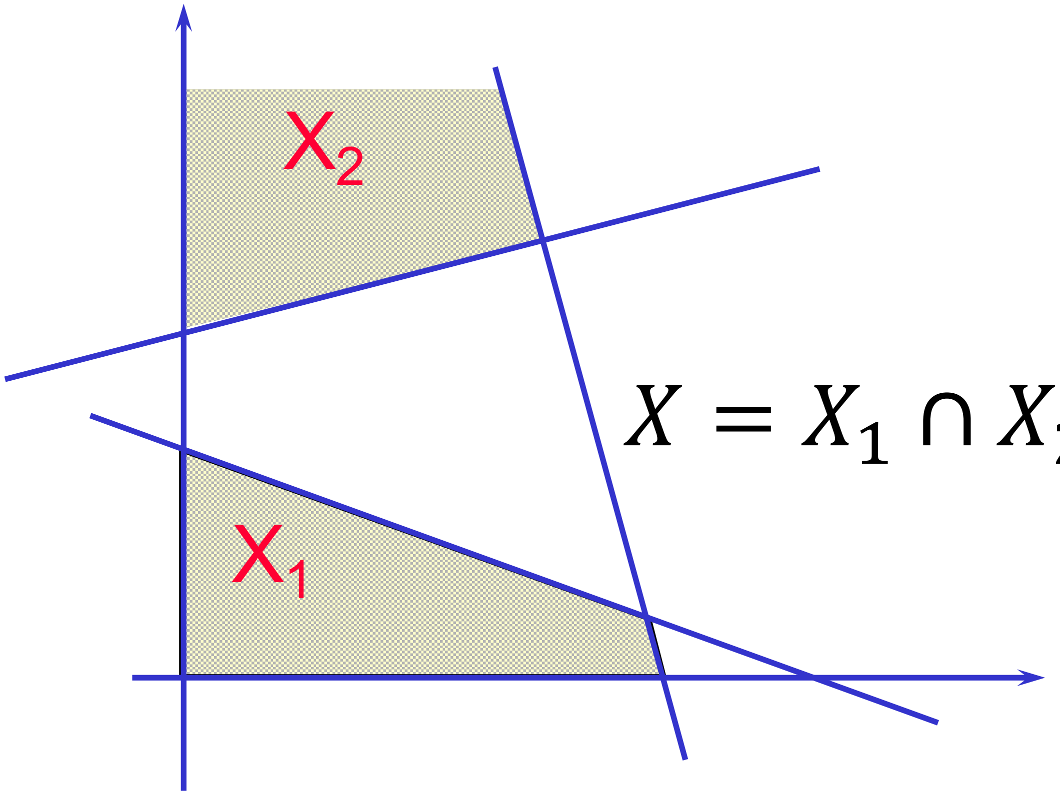
  - **unico punto di ottimo**
  - **infiniti punti di ottimo**

La risoluzione di un problema di PL comporta sempre la restituzione di una delle precedenti tre risposte.

Definizione (Problema inammissibile)

Un problema di ottimizzazione si dice **inammissibile** se X= $\emptyset$, cioè non esistono soluzioni ammissibili.

Graficamente:



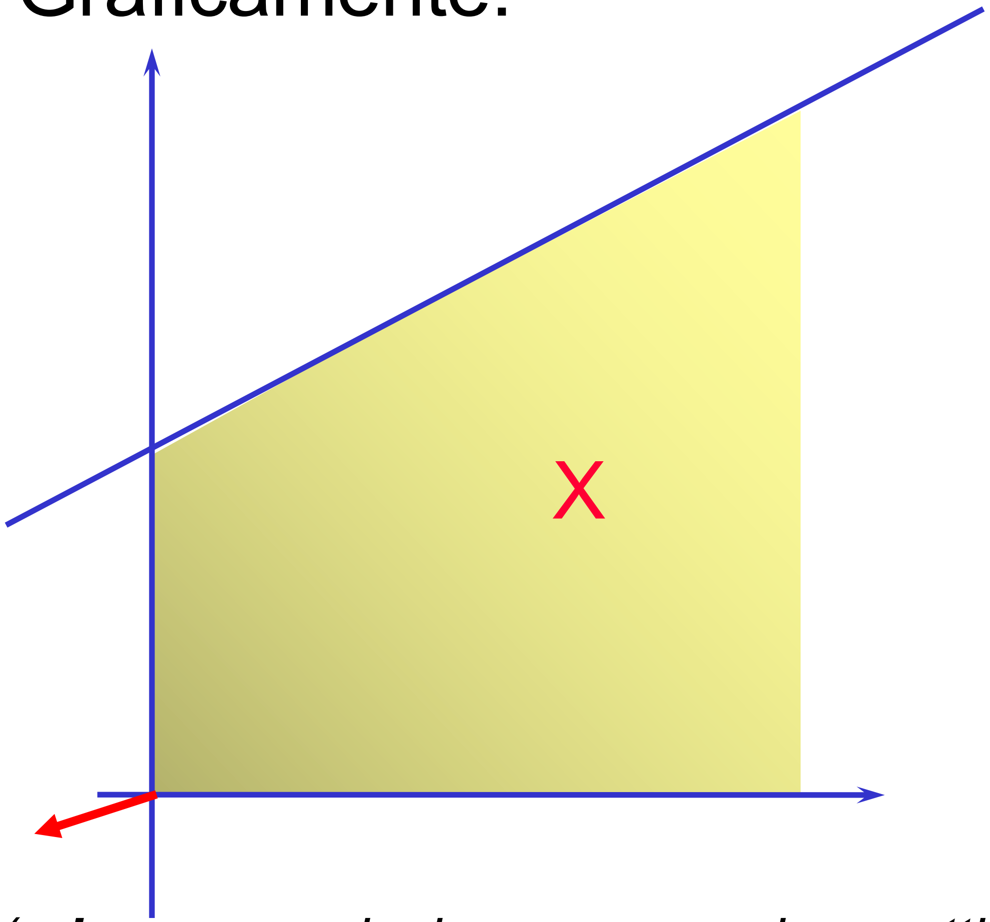
$$X = X_1 \cap X_2 = \emptyset$$

$$X = \emptyset \Longrightarrow \nexists \underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} \geq b, \underline{x} \geq \underline{0}$$

Definizione (Ottimo illimitato)

Un problema di ottimizzazione di minimo si dice **illimitato inferiormente** se scelto un qualsiasi scalare k, esiste sempre un punto $\underline{x} \in X$ tale che $f(\underline{x}) < k$.

Graficamente:



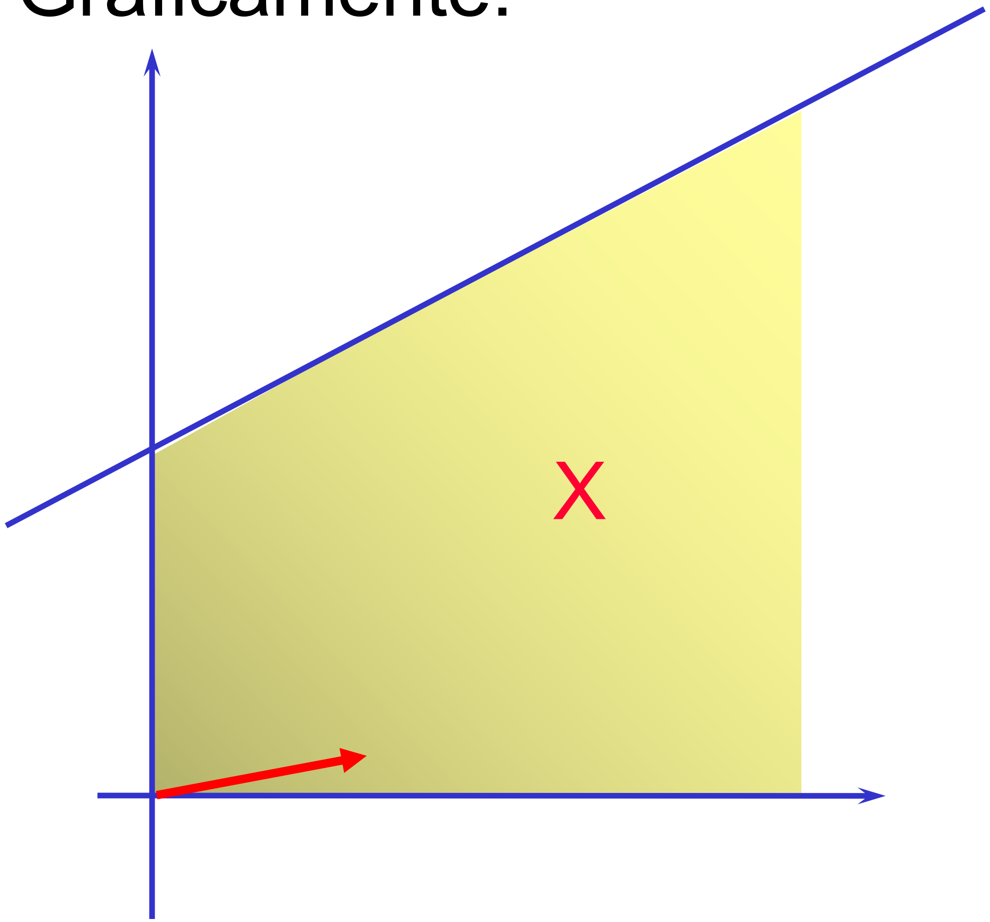
X illimitato

*(**n.b.** una soluzione con valore ottimo illimitato implica un insieme di ammissibilità X illimitato, ma non è vero il viceversa)*

Definizione (Ottimo illimitato)

Un problema di ottimizzazione di massimo si dice **illimitato superiormente** se scelto un qualsiasi scalare k, esiste sempre un punto $\underline{x} \in X$ tale che $f(\underline{x}) > k$.

Graficamente:

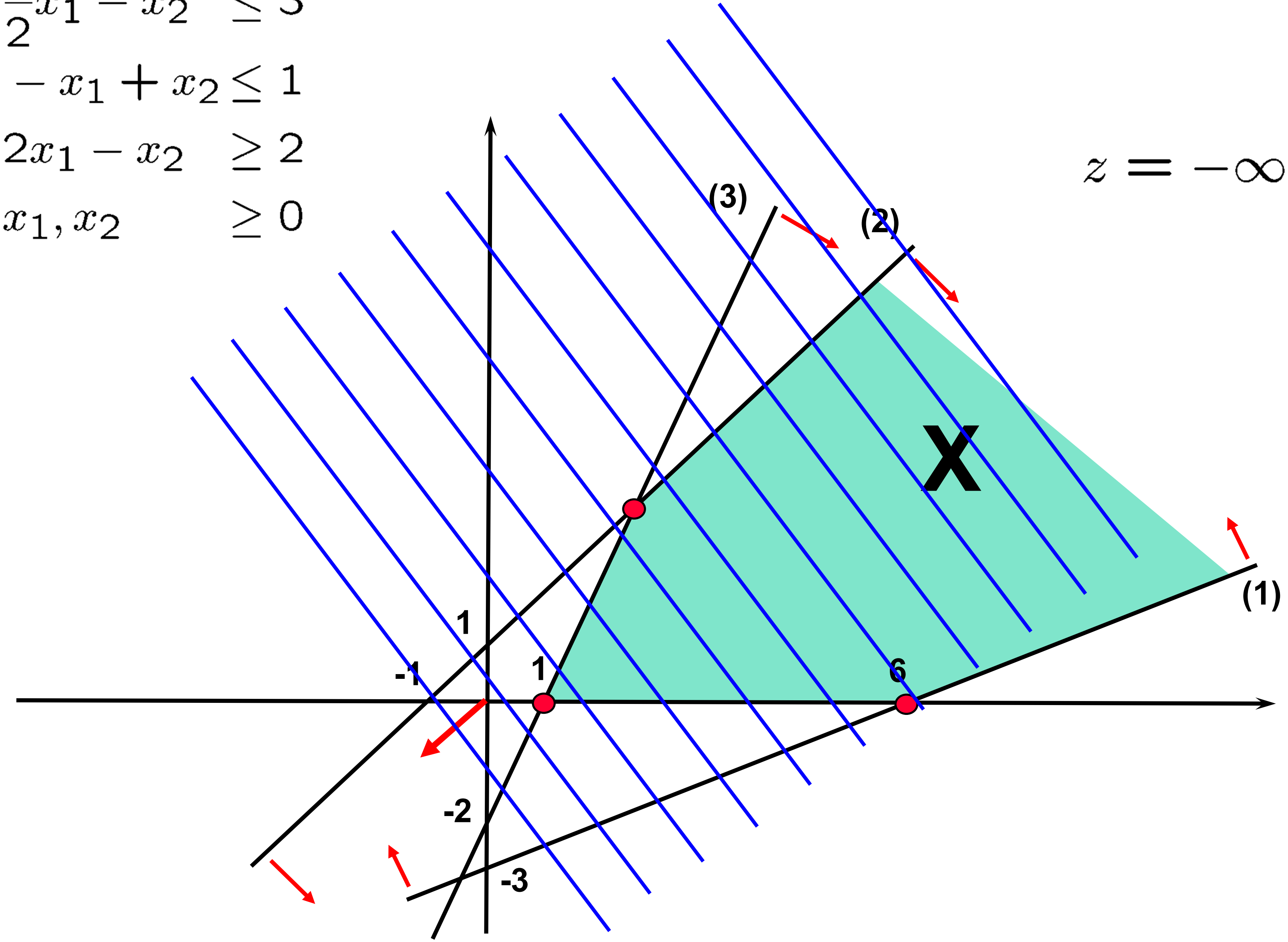


X illimitato

$$\min \quad z = -x_1 - x_2$$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

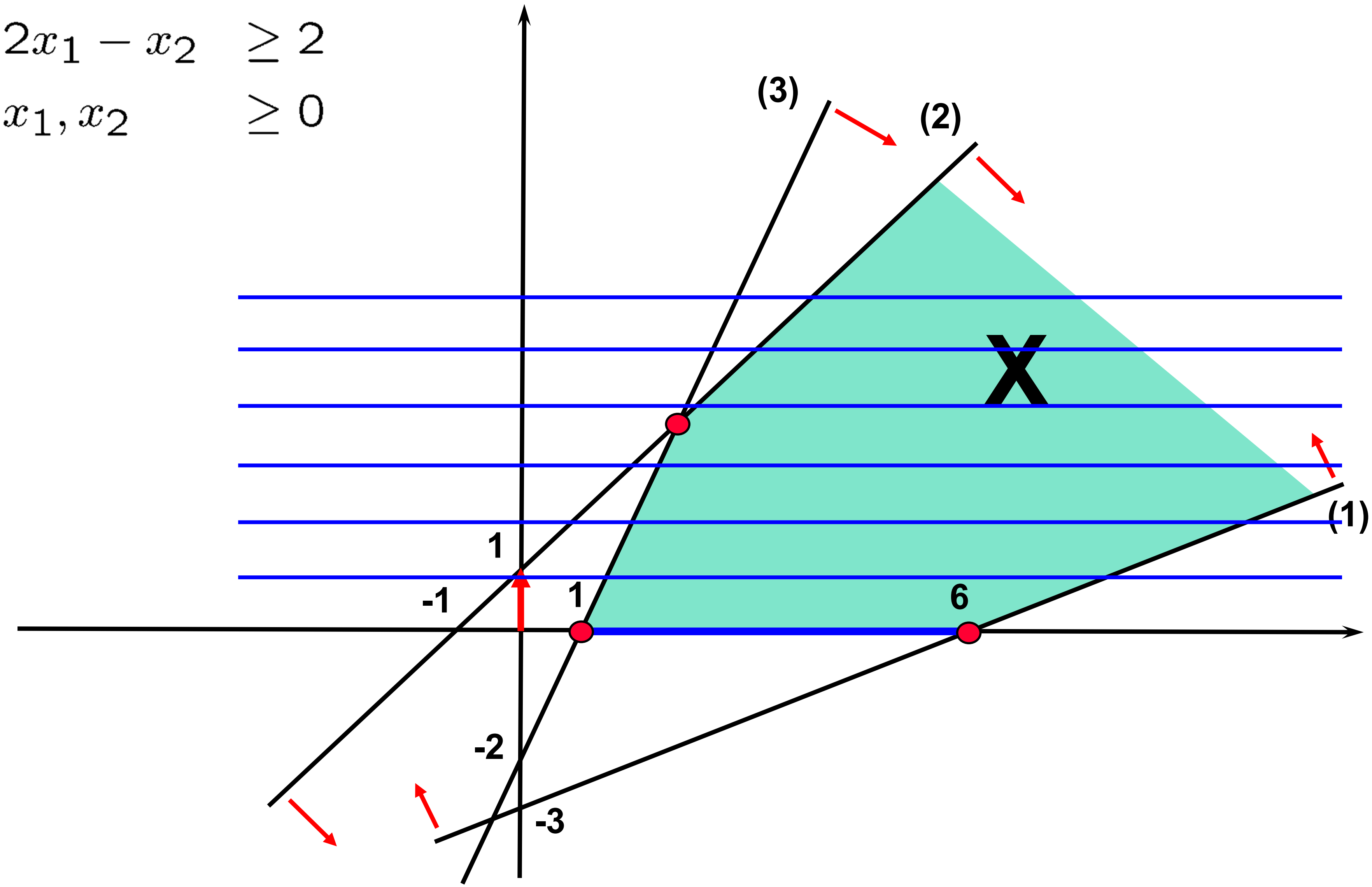
b) Determinare una nuova funzione obiettivo che abbia ottimo illimitato



$$\min \quad z = x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$

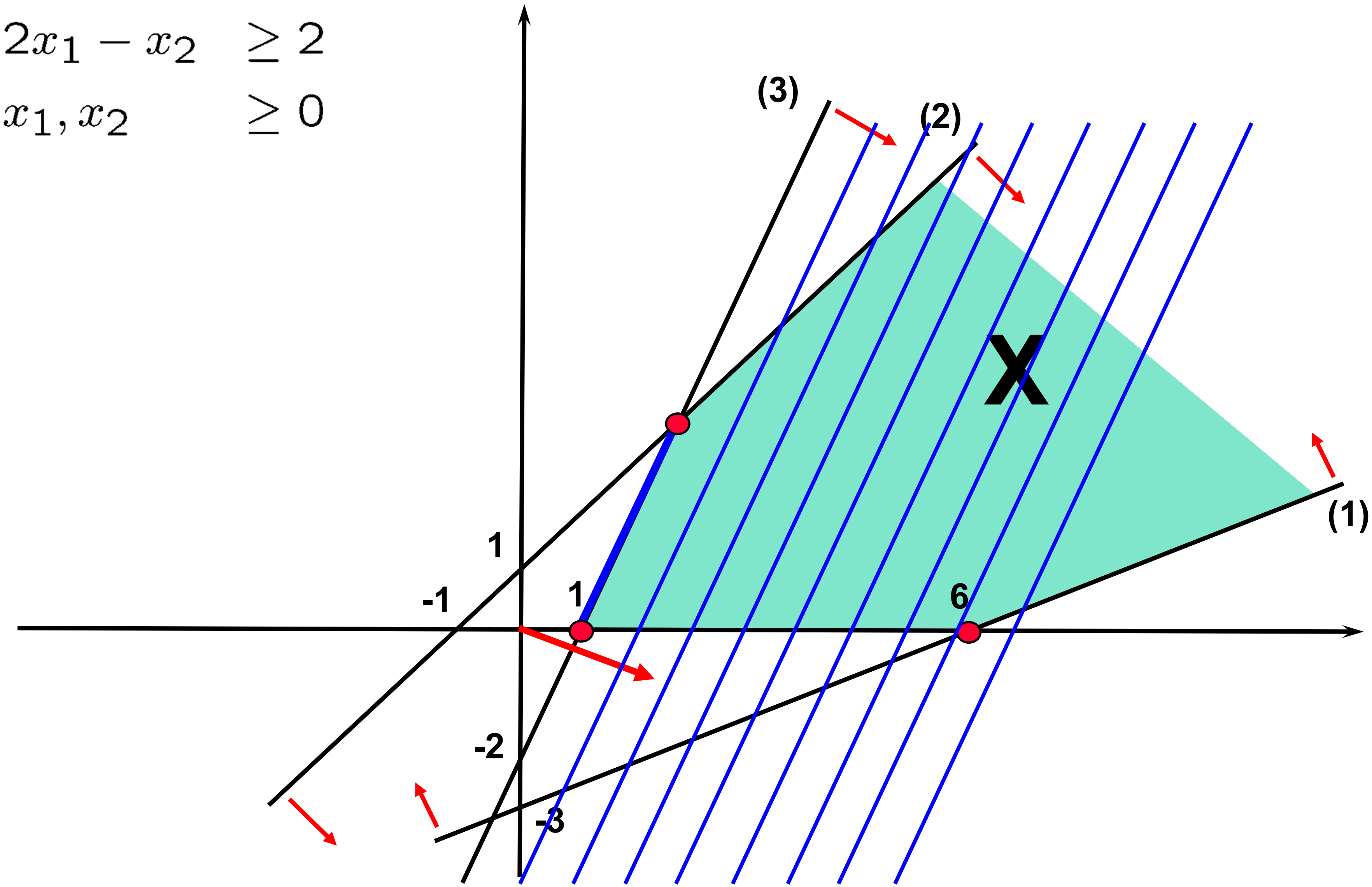
c) Determinare una nuova funzione obiettivo che abbia infiniti punti di ottimo



$$\min \; z = 2x_1 - x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

c) Determinare una nuova funzione obiettivo che abbia infiniti punti di ottimo



Due problemi di PL

PROBLEMA 1:

Una multinazionale produce due versioni di una bevanda energetica: normale e super. Per ogni quintale di bevanda venduta, l'azienda ha un profitto pari ad 1000 euro per il tipo normale e 1200 euro per il tipo super. Nella produzione è necessario utilizzare in sequenza tre tipi di macchinari, A, B, C, che ogni giorno possono lavorare un numero di ore massimo come riportato nella tabella seguente:

	ORE	NORMALE	SUPER
A	4	1	0.4
B	6	0.75	1
C	3.5	1	0

Per produrre un quintale di bevanda (normale o super) è richiesto l'utilizzo delle macchine per il tempo indicato nella stessa tabella. L'obiettivo del signor Rossi è quello di pianificare la produzione giornaliera dei due tipi di bevande al fine di massimizzare il profitto (supponendo che l'intera produzione verrà venduta).

- Il nostro obiettivo è decidere **quanti quintali** produrre per ogni tipologia di bevanda; assegniamo ad ogni **tipologia di bevanda** una **variabile** (x_1=normale, x_2=super)
- I **vincoli** del problema devono modellare il rispetto del numero massimo di ore di lavorazione per **ogni macchinario**

$$\max \quad 1000x_1 + 1200x_2$$
$$x_1 + 0.4x_2 \leq 4$$
$$x_1 \leq 3.5$$
$$0.75x_1 + x_2 \leq 6$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Due problemi di PL

PROBLEMA 2:

Il cuoco del ristorante dove lavoriamo ci ha assegnato il compito di andare a comprare le mele e le arance con 20 euro in tasca. Il costo di ogni kg di mele è pari a 5 euro mentre ogni kg di arance costa 2 euro. Inoltre il cuoco non vuole che acquistiamo più di 3.5 kg di mele. Infine il fruttivendolo questa settimana offre un buono sconto da 1 euro su ogni kg di mele e di 1.2 euro su ogni kg di arance acquistato. Questi buoni sconto sono però offerti a condizione che il numero di kg di mele, moltiplicato per 3, più il numero di kg di arance, moltiplicato per 4, non superi i 24 kg. L'obiettivo da raggiungere è quello di ottenere il massimo sconto (da utilizzare per spese successive), rispettando però le indicazioni sia del cuoco che del fruttivendolo.

- x_1=chili di mele da acquistare, x_2=chili di arance da acquistare
- Funzione obiettivo: Massimizzare il **valore totale** dei **buoni sconto** ottenuti
- Vincolo 1: rispetto del **limite di spesa**
- Vincolo 2: rispetto della **richiesta del cuoco**
- Vincolo 3: rispetto della **condizione imposta dal fruttivendolo** per avere accesso ai buoni sconto

$$\max \quad x_1 + 1.2x_2$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$x_1 \leq 3.5$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

P1

$$\begin{aligned} \max\quad & 1000x_1 + 1200x_2 \\ & x_1 + 0.4x_2 \le 4 \\ & x_1 \le 3.5 \\ & 0.75x_1 + x_2 \le 6 \\ & \underline{x} \ge \underline{0} \end{aligned}$$

P2

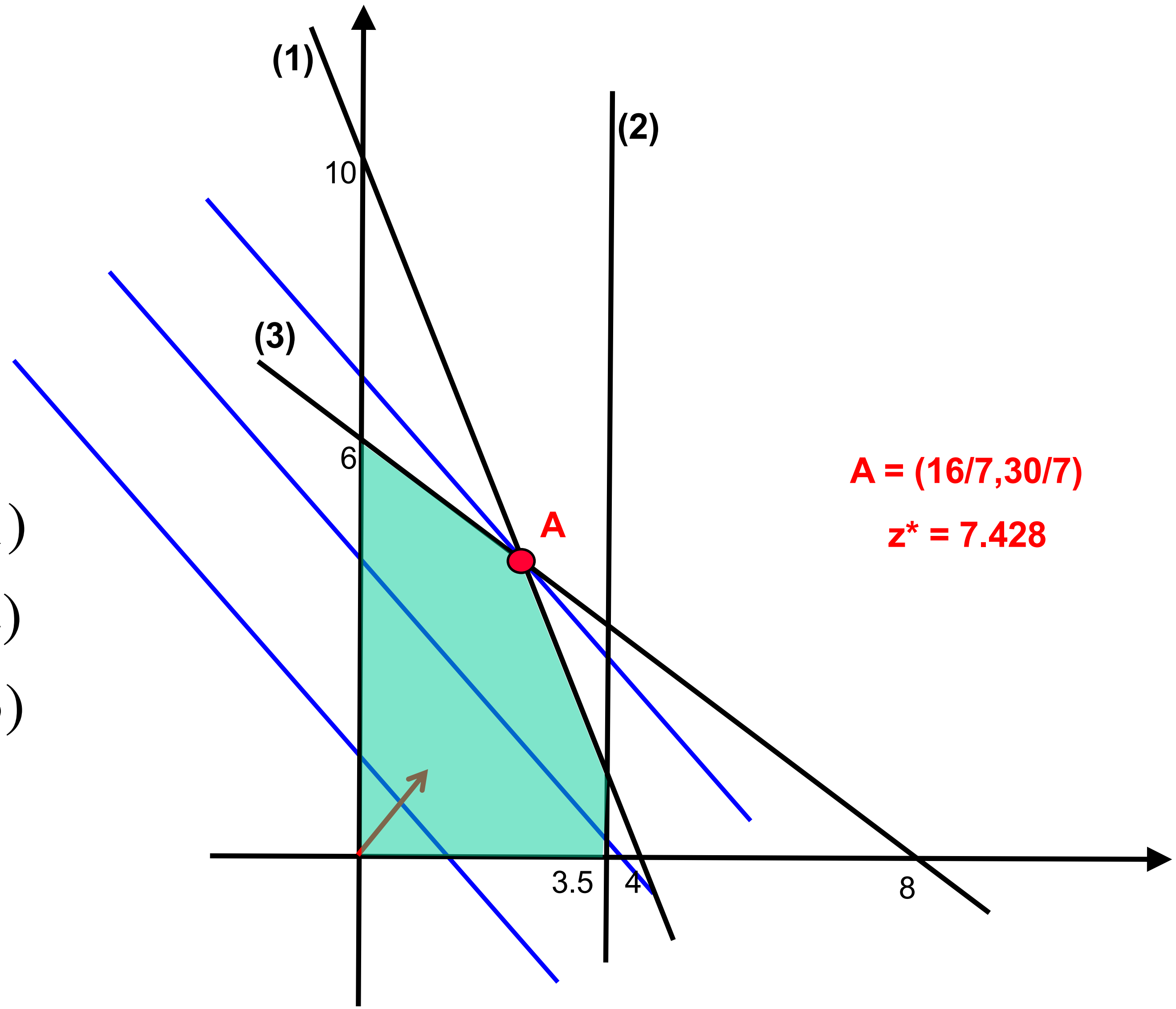
$$\begin{aligned} \max\quad & x_1 + 1.2x_2 \\ & 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ & x_1 \le 3.5 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 24 \\ & \underline{x} \ge \underline{0} \end{aligned}$$

- I vincoli dei due problemi definiscono lo **stesso insieme di soluzioni ammissibili** (possibili assegnamenti di valori alle variabili);
- Data la proporzionalità tra i coefficienti di costo delle due funzioni obiettivo**, le soluzioni ottime di P1 e P2 coincidono**;
- Il **valore** della funzione obiettivo all'ottimo per P1 ($\underline{c}^T\underline{x}$) sarà pari a 1000 volte quello di P2.

Risolvere i seguenti problemi

$$\max \quad 1000x_1 + 1200x_2$$
$$x_1 + 0.4x_2 \le 4$$
$$x_1 \le 3.5$$
$$0.75x_1 + x_2 \le 6$$
$$\underline{x} \ge \underline{0}$$

$$\max \quad x_1 + 1.2x_2$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 20 \qquad (1)$$
$$x_1 \le 3.5 \qquad (2)$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 24 \qquad (3)$$
$$\underline{x} \ge \underline{0}$$



Iperpiano: generalizzazione della retta

Definizione (Iperpiano)

Un **iperpiano** in $\mathbb{R}^n$ è l'insieme dei punti $H = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{p}^T \underline{x} = k\}$ dove $\underline{p}^T$ è un vettore non nullo in $\mathbb{R}^n$ e k è uno scalare.

- Il vettore $\underline{p}^T$ è il **gradiente** o **normale** dell'iperpiano.

- Il verso del gradiente indica la **direzione di crescita** dell'iperpiano.

Iperpiano

Consideriamo un punto $\underline{x}_0$ di H ed il gradiente $\underline{p}^T$. L'iperpiano H è l'insieme dei vettori $\underline{x}$ tali che il vettore $(\underline{x}-\underline{x}_0)$ è perpendicolare a $\underline{p}^T$.

$$\underline{x}_0 \in H \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{p}^T \underline{x}_0 = k$$

$$\underline{x} \in H \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{p}^T \underline{x} = k$$

sottraendo:

$$\underline{p}^T (\underline{x} - \underline{x}_0) = 0$$

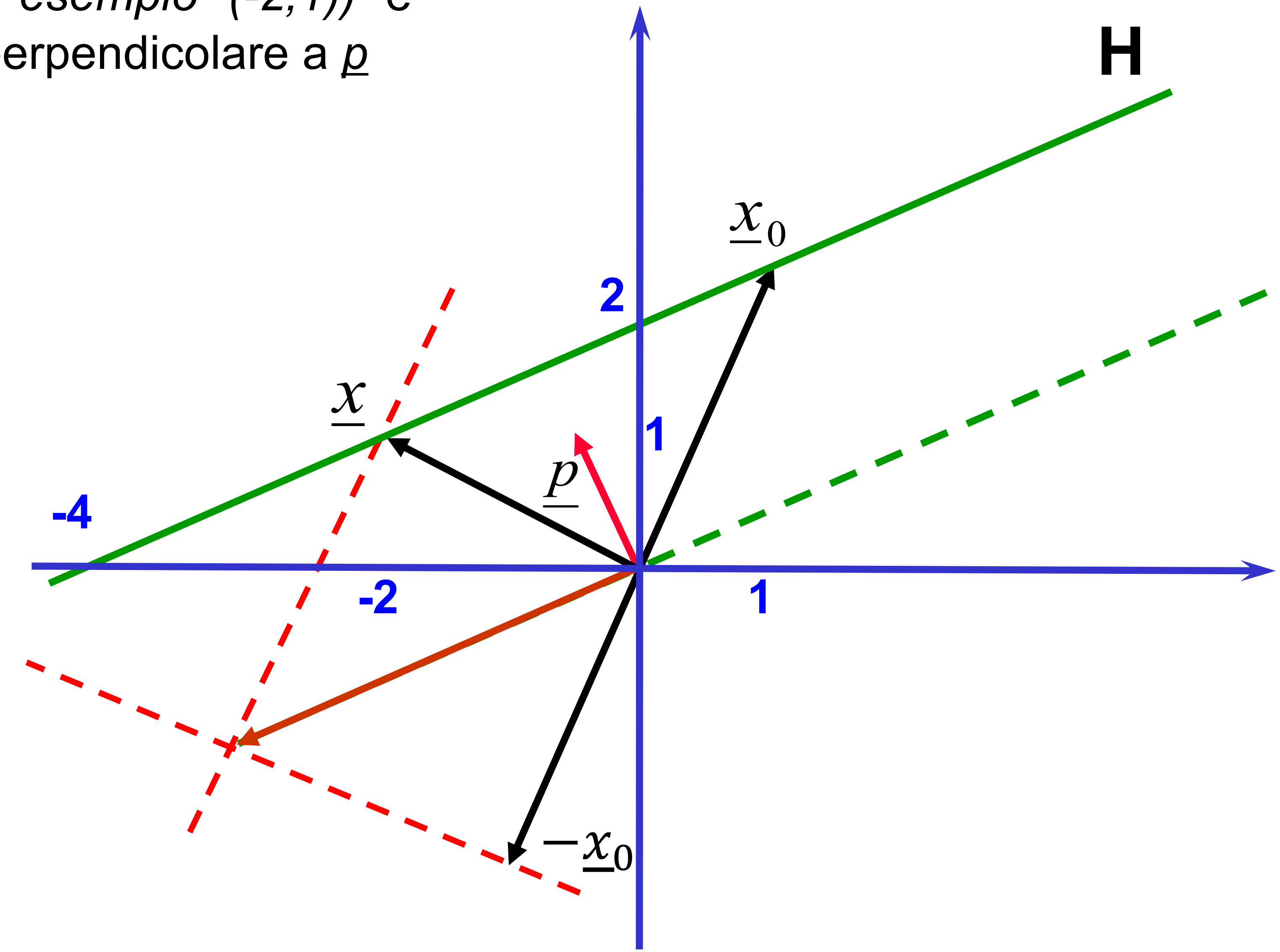
se due vettori hanno prodotto interno nullo allora sono perpendicolari.

Esempio in $\mathbb{R}^2$

$$H = \{ \ (x_1, x_2) : p_1 x_1 + p_2 x_2 = k \}$$

$$= -\frac{1}{2} x_1 + x_2 = 2$$

Sia $\underline{x}_0$=(1,5/2) un punto *di H*, e verifichiamo che un qualunque altro punto $\underline{x} \in H$ *(ad esempio (-2,1))* è tale che $\underline{x}$-$\underline{x}_0$ è perpendicolare a $\underline{p}$



Definizione (Semispazio)

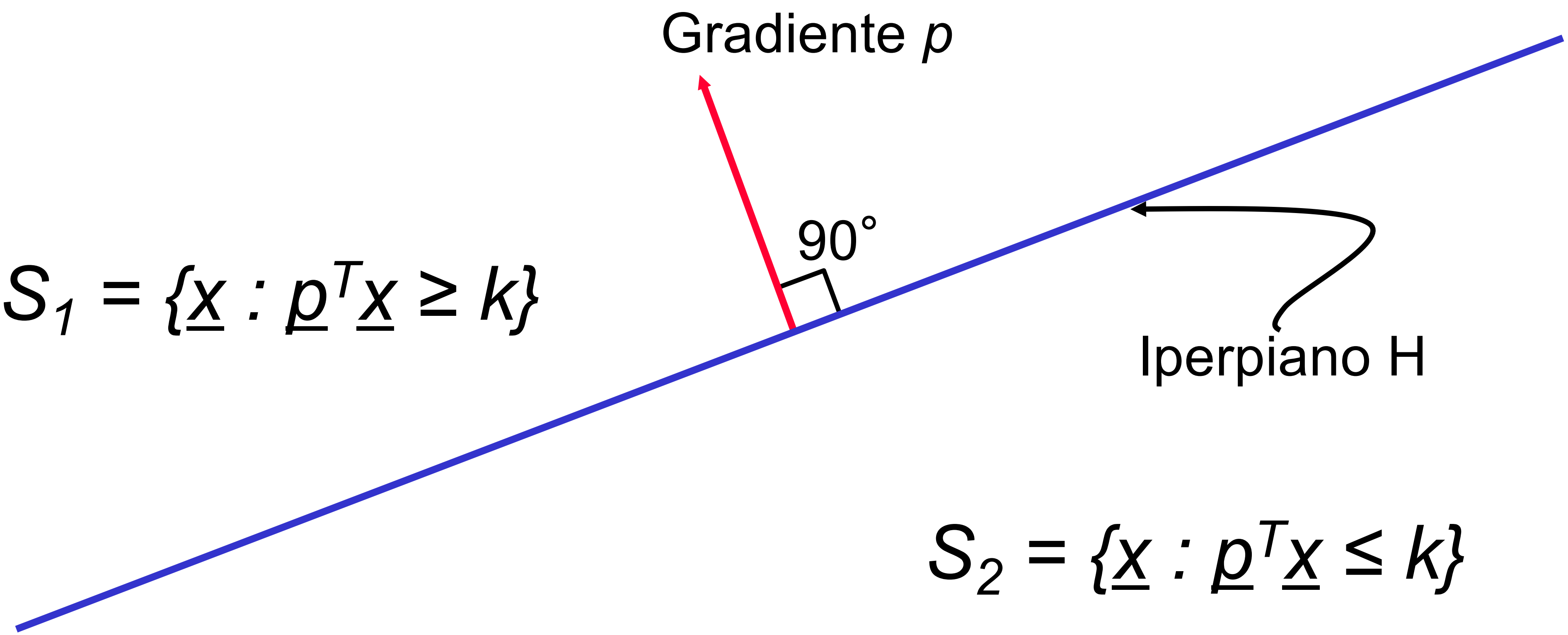
Un **semispazio** in $\mathbb{R}^n$ è l'insieme dei punti $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{p}^T \underline{x} \geq k\}$ oppure $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{p}^T \underline{x} \leq k\}$ dove $\underline{p}^T$ è un vettore non nullo in $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ e *k* è uno scalare.

Un iperpiano H divide lo spazio $\mathbb{R}^n$ cui appartiene in due semispazi.

$$\mathrm{H} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{p}^T \underline{x} = k\}$$

$$S_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{p}^T \underline{x} \geq k\} \qquad S_2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{p}^T \underline{x} \leq k\}$$

Esempio



$$S_1 = \{\underline{x} : \underline{p}^T\underline{x} \geq k\}$$

$$S_2 = \{\underline{x} : \underline{p}^T\underline{x} \leq k\}$$

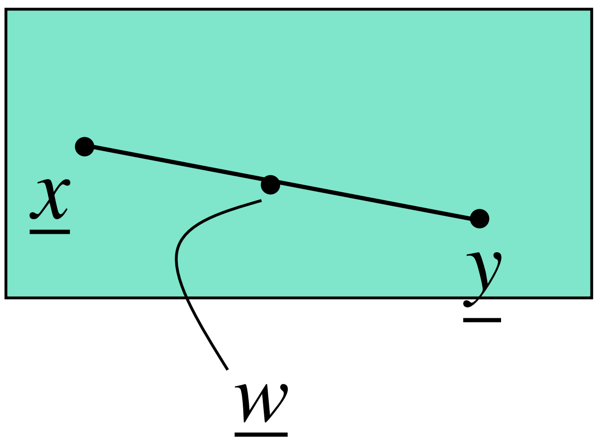
Insieme convesso

Definizione (Insieme Convesso)

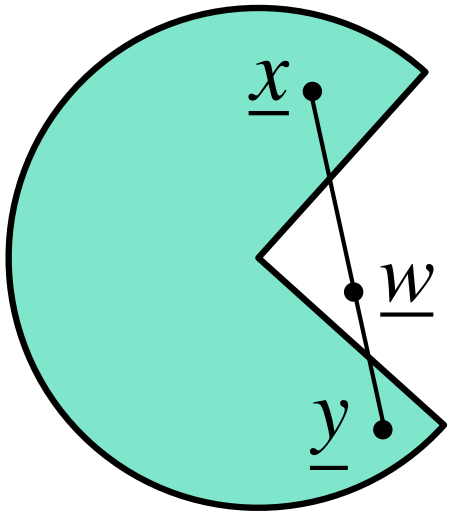
Un insieme X è **convesso** se e solo se dati due punti $\underline{x} \in X$ e $\underline{y} \in X$ ogni punto $\underline{w}$ ottenuto come loro combinazione convessa ossia

$$\underline{w} = \lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y} \qquad \lambda \in [0,1]$$

appartiene ad X.



insieme convesso



insieme NON convesso

Alcuni insiemi convessi

Lemma

L'insieme $X = \{\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq \underline{0}\ \}$ *è un insieme convesso*

DIM. Dobbiamo dimostrare che scelti due qualsiasi punti $\underline{x}$ e $\underline{y}$ di X, un qualunque punto $\underline{w}$ ottenuto dalla loro combinazione convessa appartiene ancora ad X. Poichè $\underline{x}$ e $\underline{y}$ appartengono ad X abbiamo che:

$\underline{x} \in X \implies A\underline{x} = b,\ \underline{x} \geq \underline{0}$ e $\underline{y} \in X \implies A\underline{y} = b, \underline{y} \geq \underline{0}$

Inoltre sia $\underline{w} = \lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$ con $\lambda \in [0,1]$. Premoltiplicando tutto per la matrice A otteniamo:

$A\underline{w} = \lambda A\underline{x} + (1-\lambda)A\underline{y}$ con $\lambda \in [0,1]$

Andando a sostituire ad $A\underline{x}$ e ad $A\underline{y}$ il valore $\underline{b}$ si ha che:

$A\underline{w} = \lambda\underline{b} + (1-\lambda)\underline{b} = \underline{b}$ quindi il sistema di equazioni è soddisfatto da $\underline{w}$

Infine poiché $\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{y} \geq \underline{0}$ e $\lambda \in [0,1]$ si ha che $w_i = \lambda x_i + (1-\lambda)y_i \geq 0 \quad \forall i$

In conclusione, poiché $A\underline{w} = \underline{b}$ e $\underline{w} \geq \underline{0}$ si ha che $\underline{w} \in X$. ■

Alcuni insiemi convessi

Lemma

L'iperpiano $H = \{\underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} = k\}$ *è un insieme convesso.*

Lemma

I semispazi $\{\underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} \geq k\}$ *e* $\{\underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} \leq k\}$ *sono insiemi convessi.*

Lemma

L'intersezione di iperpiani e semispazi genera un insieme convesso.

Poliedri

Definizione (Poliedro)

Un **poliedro** è l'insieme dei punti ottenuto dall'intersezione di un numero finite di iperpiani e semispazi.

Lemma

Il poliedro è un insieme convesso.

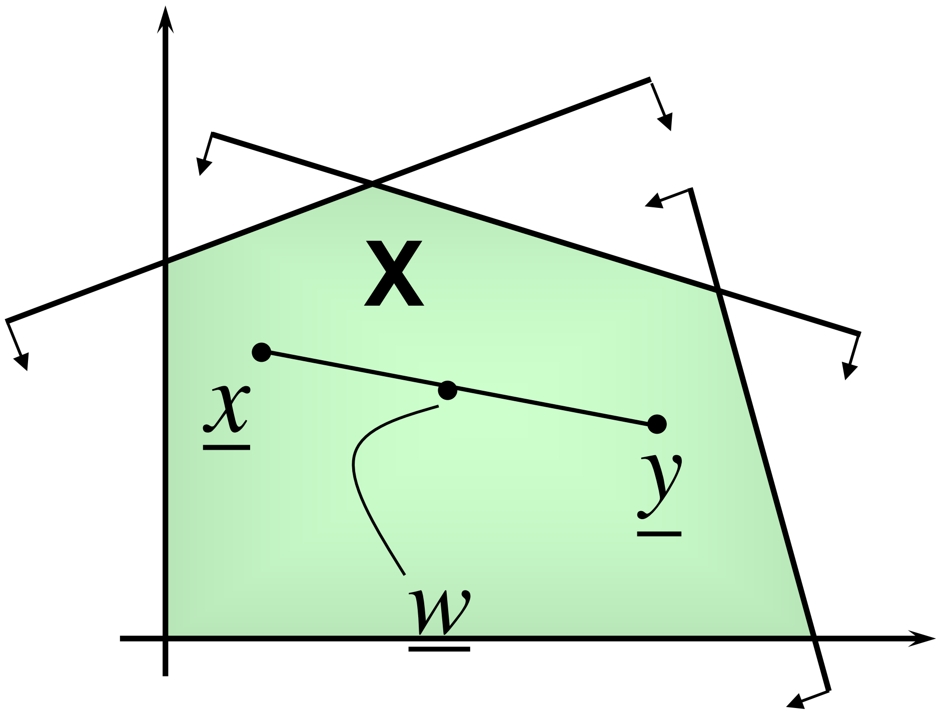
Un poliedro può essere:

- **Limitato (politopo)**

  Un poliedro X è limitato quando esiste uno scalare k tale che $\left\|\underline{x}\right\| \leq k \quad \forall \underline{x} \in X.$

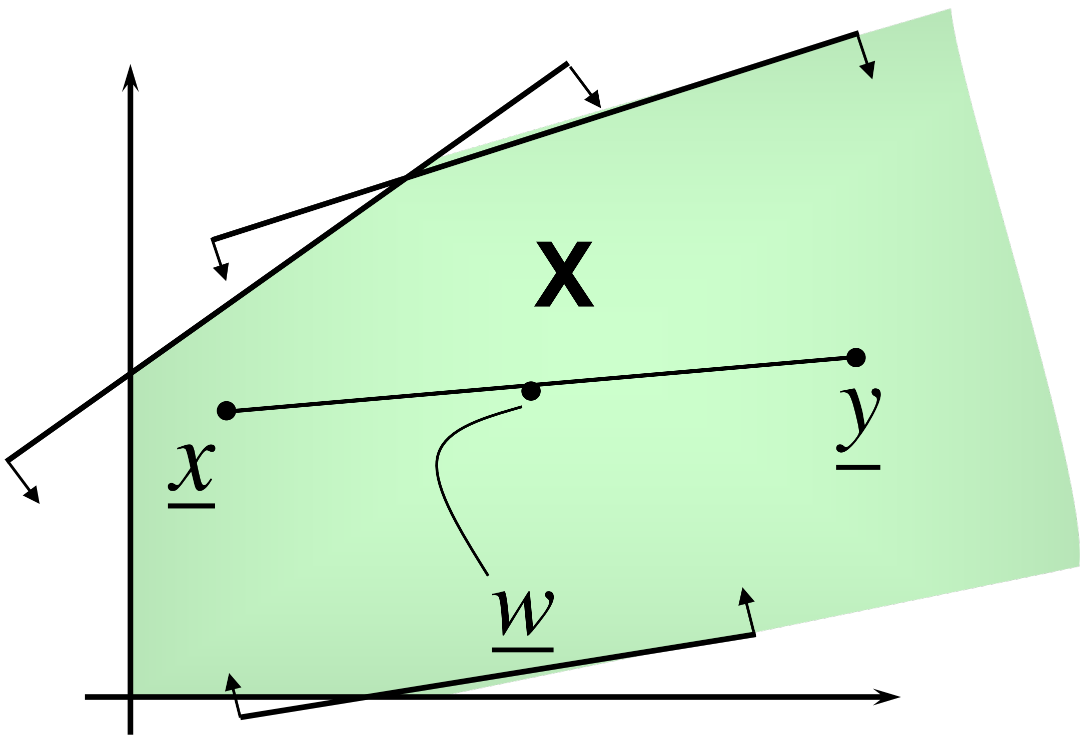
- **Illimitato**

Esempio: politopo



Insieme convesso

Esempio: poliedro illimitato



Insieme convesso

Funzione convessa

Definizione (Funzione convessa)

Una funzione $f(\underline{x})$ si dice convessa su insieme X se, presi comunque due punti $\underline{x}'$, $\underline{x}'' \in X$ risulta che: $f(\lambda\underline{x}' + (1-\lambda)\underline{x}'') \leq \lambda f(\underline{x}') + (1-\lambda)f(\underline{x}'')$ con $\lambda \in [0,1]$

Teorema (Funzione convessa)

Una funzione lineare del tipo $\underline{c}^T\underline{x}$ è una funzione convessa.

DIM. Dalla definizione di funzione convessa, sostituendo la $f(\underline{x})$ con $\underline{c}^T\underline{x}$ si ha:

$$\left.\begin{array}{lcl} f(\lambda\underline{x}' + (1-\lambda)\underline{x}'') & \longrightarrow & \underline{c}^T\lambda\underline{x}' + \underline{c}^T(1-\lambda)\underline{x}'' \\ \lambda f(\underline{x}') + (1-\lambda)f(\underline{x}'') & \longrightarrow & \lambda\underline{c}^T\underline{x}' + (1-\lambda)\underline{c}^T\underline{x}'' \end{array}\right\} \text{uguali}$$

Poiché $f(\lambda\underline{x}' + (1-\lambda)\underline{x}'') = \lambda f(\underline{x}') + (1-\lambda)f(\underline{x}'')$ la funzione $\underline{c}^T\underline{x}$ è convessa.

Ottimi globali e ottimi locali

Teorema (ottimi locali e globali)

Se f è una funzione di minimo convessa e X è un insieme convesso allora ogni ottimo locale $\underline{x}'$ *di f su X (se ne esistono) è anche un ottimo globale.*

DIM. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che l'ottimo locale $\underline{x}'$ non sia un ottimo globale. Quindi deve esistere un $\underline{x}'' \in X$ tale che $f(\underline{x}'') < f(\underline{x}')$. Il segmento $\lambda\underline{x}' + (1 - \lambda)\underline{x}''$, con $\lambda \in [0, 1]$, è interamente contenuto in X perché quest'ultimo è un insieme convesso. Inoltre la convessità di f implica che $\forall\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda\underline{x}'+(1-\lambda)\,\underline{x}'') \leq \lambda f(\underline{x}') + (1-\lambda)f(\underline{x}'') < \lambda f(\underline{x}') + (1-\lambda)f(\underline{x}') = f(\underline{x}')$$

Quindi il valore di f in un qualsiasi punto del segmento tra $\underline{x}'$ e $\underline{x}''$ è strettamente minore di $f(\underline{x}')$. Dal momento che, per ogni $\varepsilon > 0$, l'intorno $N(\underline{x}', \varepsilon)$ di $\underline{x}'$ contiene almeno un punto $\underline{w}$ del segmento diverso da $\underline{x}'$ e $f(\underline{w}) < f(\underline{x}')$ allora $\underline{x}'$ non è un ottimo locale. Assurdo. ■

Ottimi globali e ottimi locali

$$\begin{aligned} \min z = \quad & \underline{c}^T \underline{x} & \\ & A\underline{x} = \underline{b} & (1) \\ & \underline{x} \geq \underline{0} & (2) \end{aligned}$$

Poiché

- la funzione obiettivo $f(\underline{x}) = \underline{c}^T\underline{x}$ è una funzione convessa e
- l'insieme $X = \{\underline{x}: A\underline{x}=\underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$ è un insieme convesso

vale il teorema precedente e quindi **nei problemi di PL gli ottimi locali e globali coincidono**.