Lezioni di Ricerca Operativa

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 21

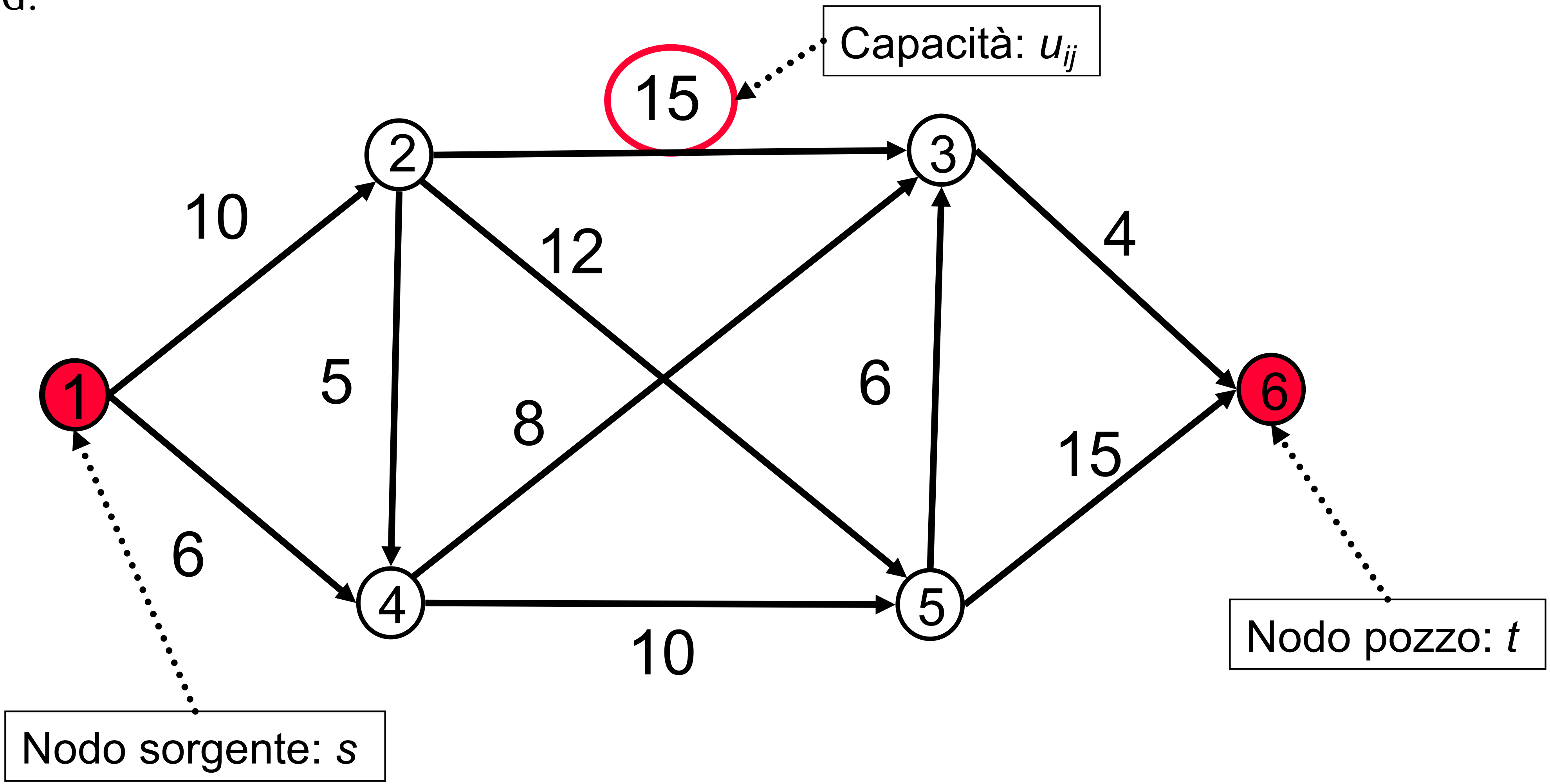
Problema del Massimo Flusso:

- Formulazione Matematica
- Teorema flusso massimo / taglio minimo
- Algoritmo del Grafo Ausiliario

R. Cerulli – F. Carrabs

Il Problema del Massimo Flusso

Sia $G = (V, A)$ un grafo orientato su cui sia definito un vettore $\underline{u} = [u_{ij}]$ delle capacità associate agli archi del grafo; inoltre, siano s e t due nodi distinti, detti rispettivamente ***sorgente*** *(o origine)* e ***pozzo*** *(o destinazione)*. Il problema del flusso massimo consiste nel determinare la massima quantità di flusso che è possibile inviare da s a t attraverso G.



Il Problema del Massimo Flusso

Nodo sorgente fornisce flusso → *f*

Nodo destinazione assorbe flusso → *-f*

Tutti gli altri nodi sono nodi di transito

$$\Downarrow$$

Voglio spedire dalla sorgente *s* al pozzo *t* la massima quantità di flusso *f* senza violare i vincoli di capacità degli archi.

Il Problema del Massimo Flusso: formulazione

Vincoli di **bilanciamento del flusso**

$$\max \; f$$

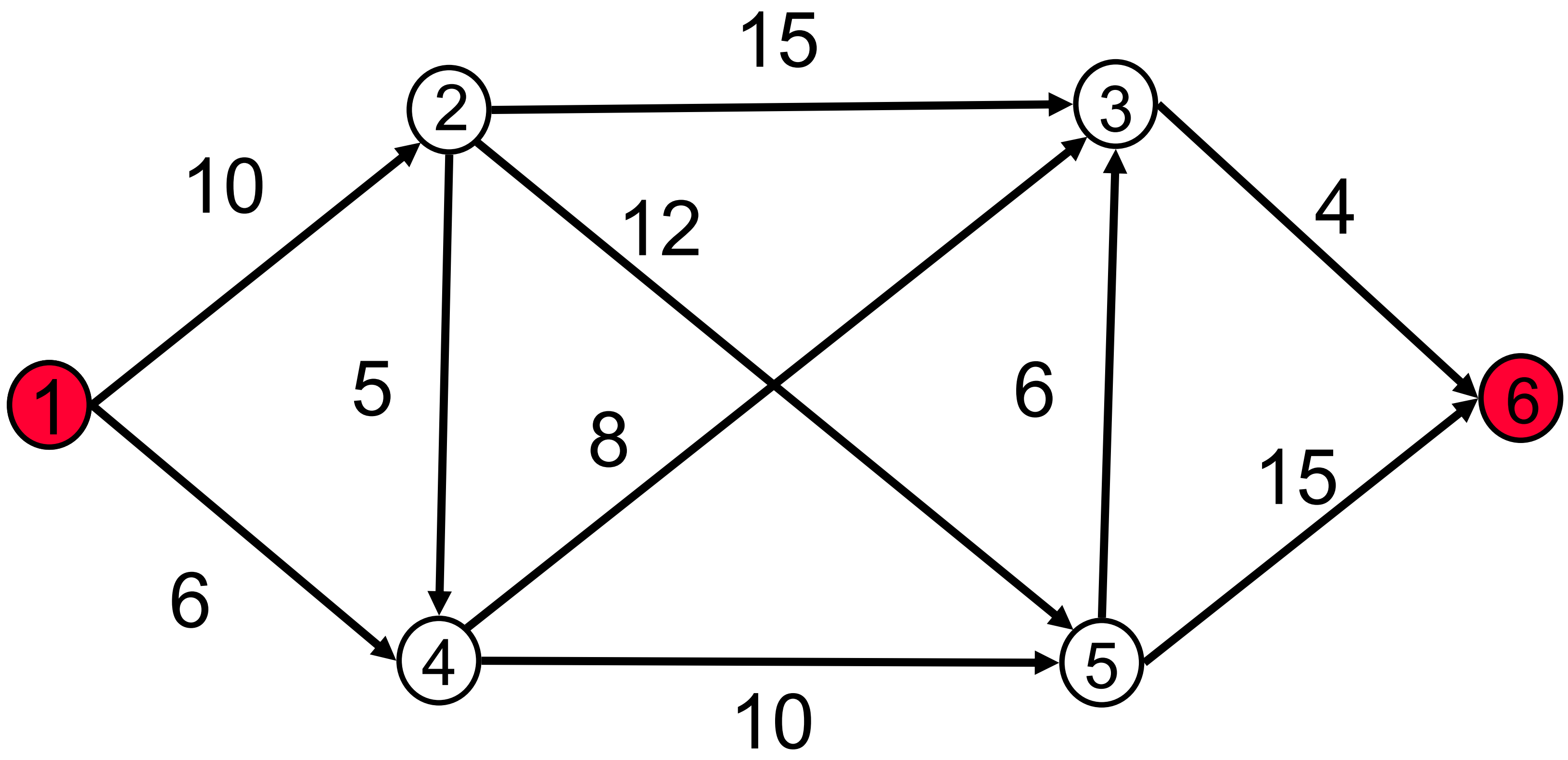
$$\sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k \in BS(i)} x_{ki} = \begin{cases} f & se \quad i = s \\ -f & se \quad i = t \\ 0 & altrimenti \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \qquad (2)$$

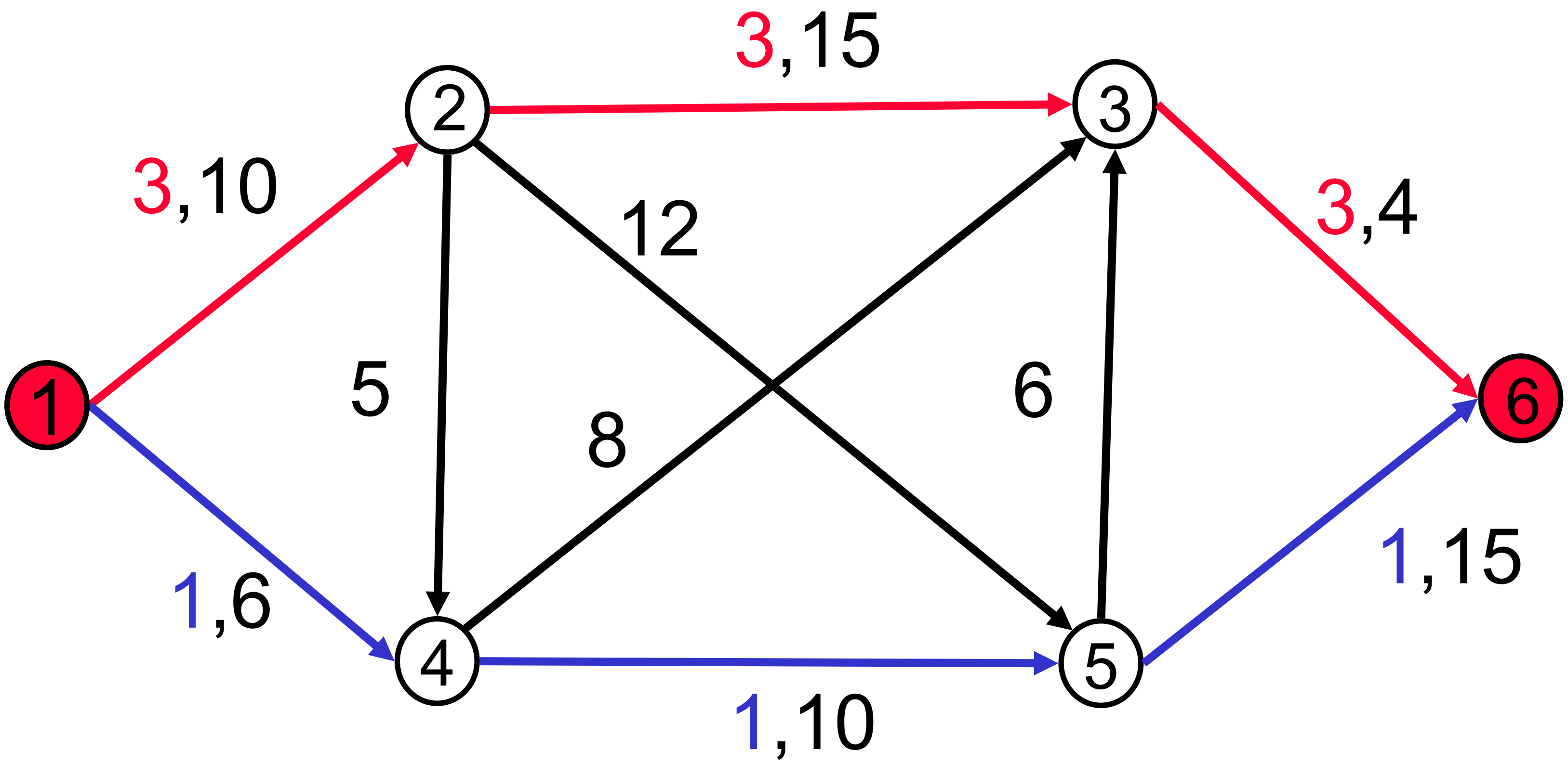
Vincoli di **capacità**

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in A \qquad (3)$$

Il Problema del Massimo Flusso: esempio



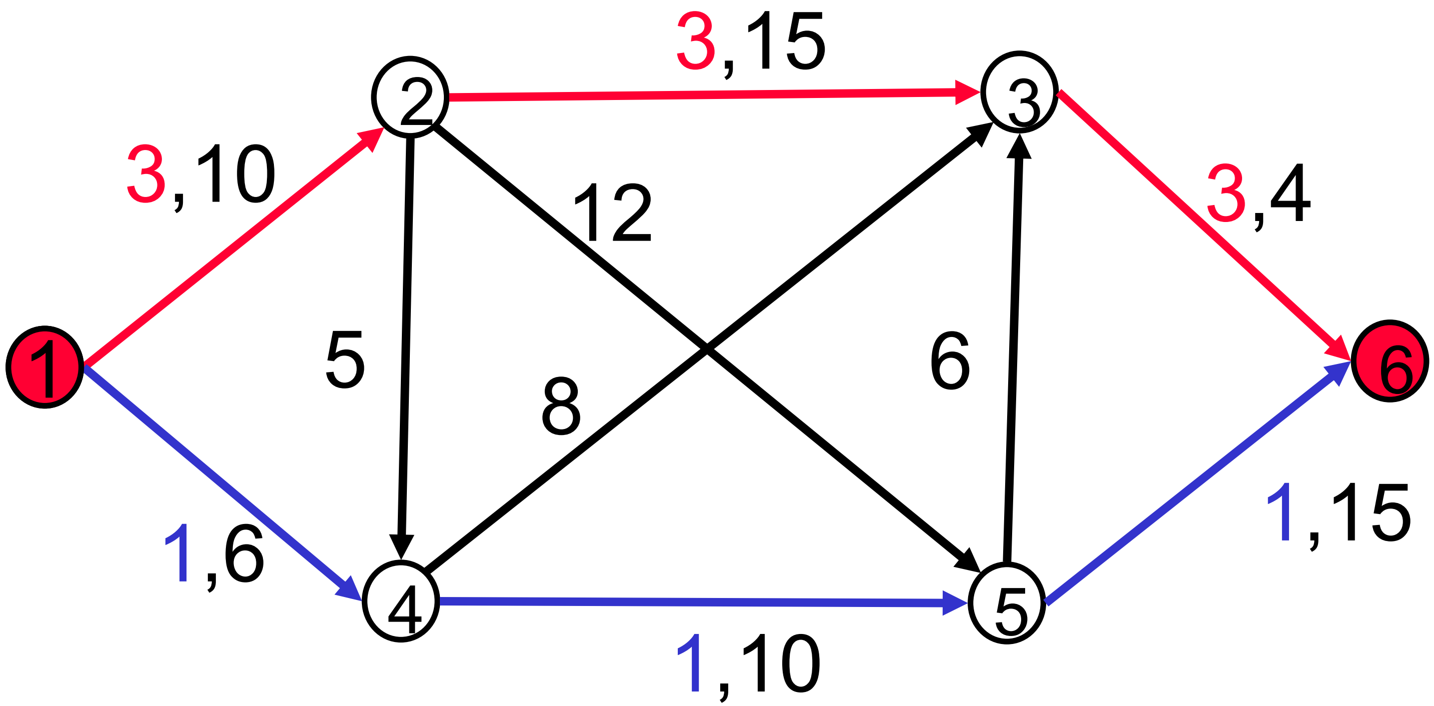
Il Problema del Massimo Flusso: esempio



$$x_{12} = 3, x_{23} = 3, x_{36} = 3, \quad x_{14} = 1, x_{45} = 1, x_{56} = 1$$

Il Problema del Massimo Flusso: esempio

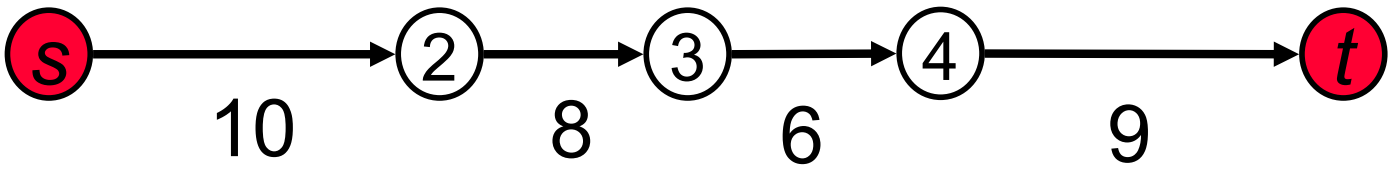
$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{14} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{25} \\ x_{36} \\ x_{43} \\ x_{45} \\ x_{53} \\ x_{56} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



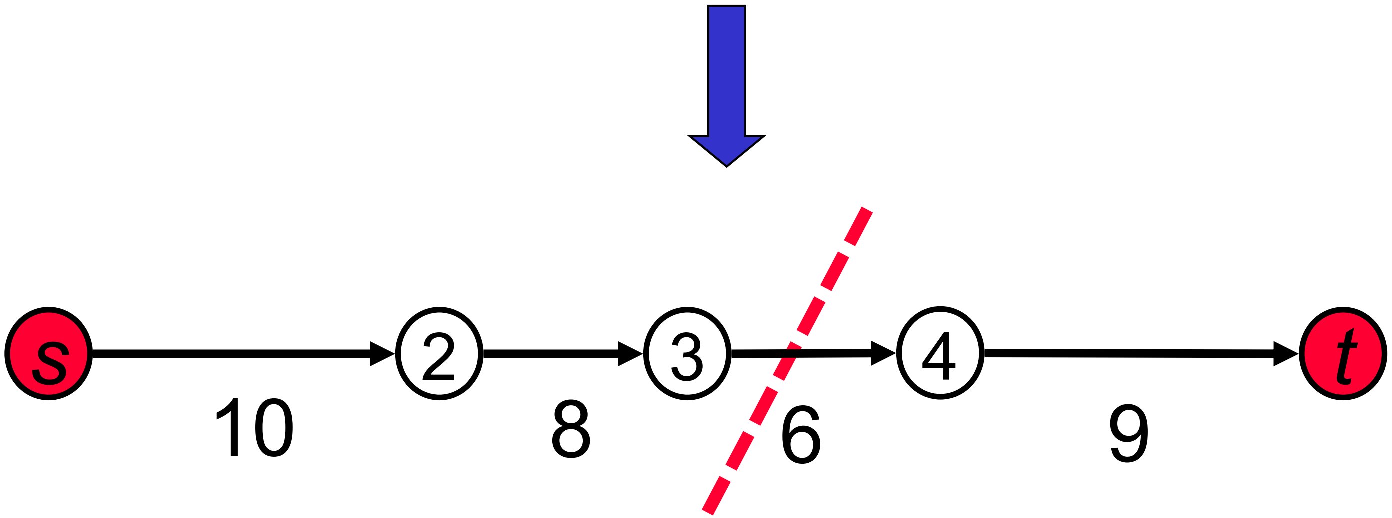
Definizione:
Un vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ è un **flusso ammissibile** per G se soddisfa i vincoli (1), (2) e (3) del modello matematico.

Il vettore $\underline{x}$ dell'esempio è un flusso ammissibile con valore $f = 4$.

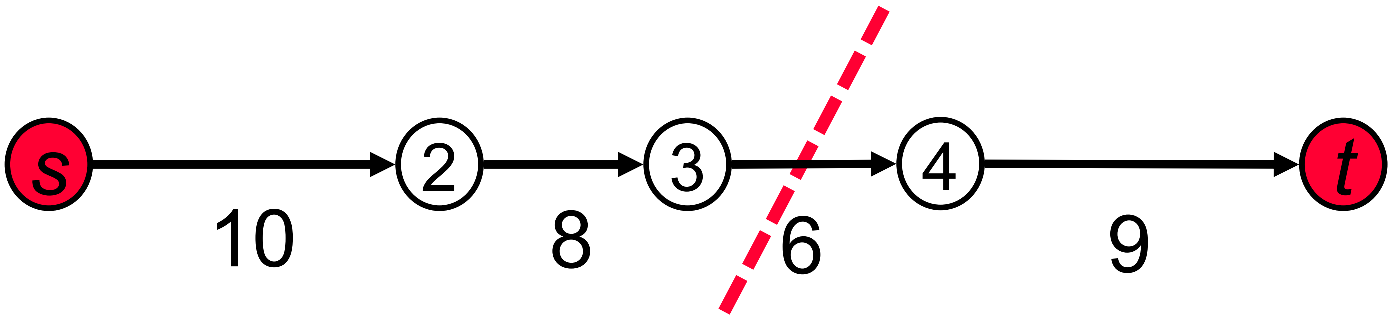
Il Problema del Massimo Flusso: concetti fondamentali



Il flusso massimo su questo grafo è pari a 6 (corrispondente alla capacità minima degli archi dell'unico cammino da *s* a *t*).



Il Problema del Massimo Flusso: concetti fondamentali



Il segmento tratteggiato in figura mostra un **taglio s-t** del grafo, ossia un **partizionamento dei vertici** del grafo in due sottoinsiemi $V_1 = \{s, 2{,}3\}$ e $V_2 = \{4, t\}$ tali che:

- Il nodo sorgente appartiene a V_1 ;
- Il nodo pozzo appartiene a V_2 ;
- $V_1 \cup V_2 = V$;
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

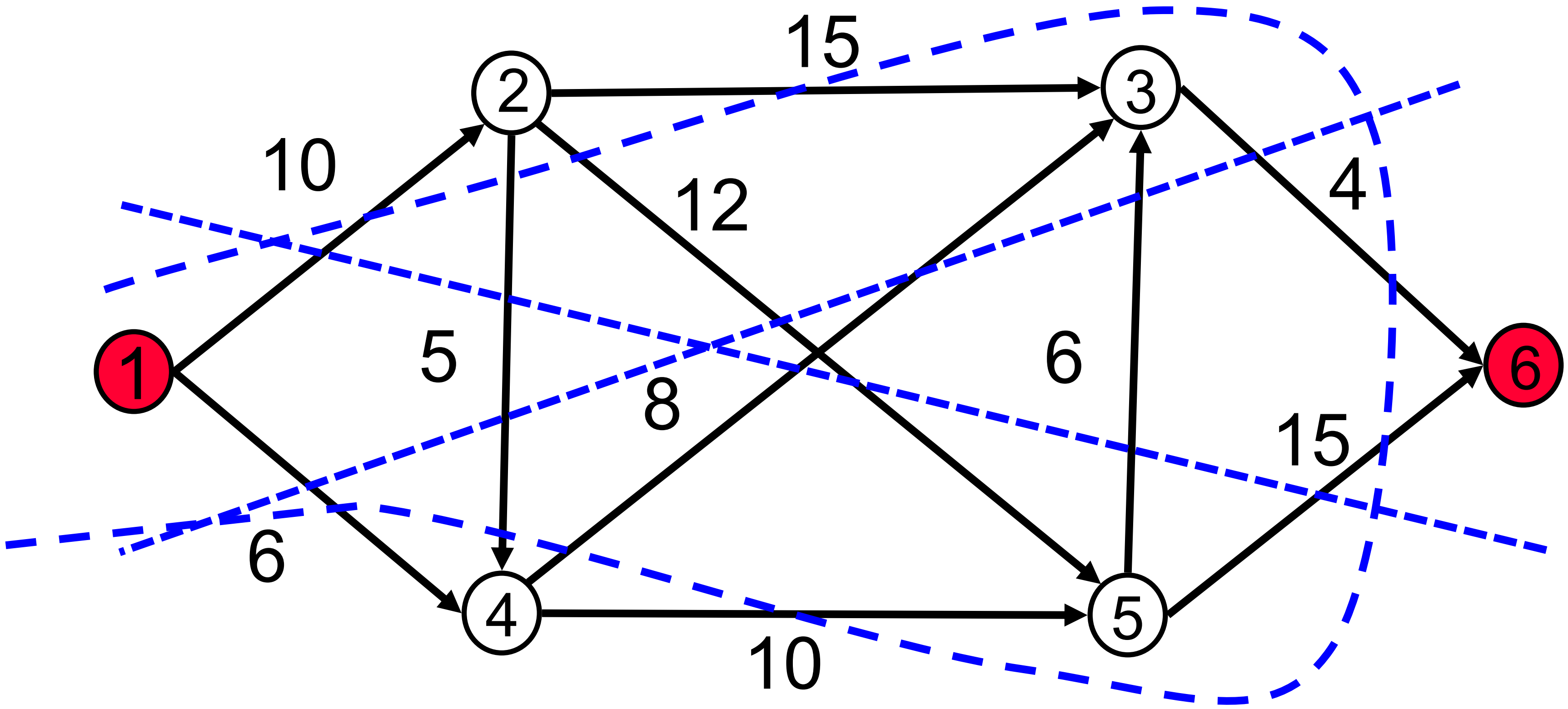
Definizioni:

➢ **Archi diretti** del taglio $[V_1, V_2]$: l'insieme $\{(i, j) : i \in V_1, j \in V_2\}$;

➢ **Archi inversi** del taglio $[V_1, V_2]$: l'insieme $\{(p, q) : p \in V_2, q \in V_1\}$;

Estendiamo questo concetto di taglio s-t ad un grafo più complesso.

Taglio di un grafo e archi del taglio

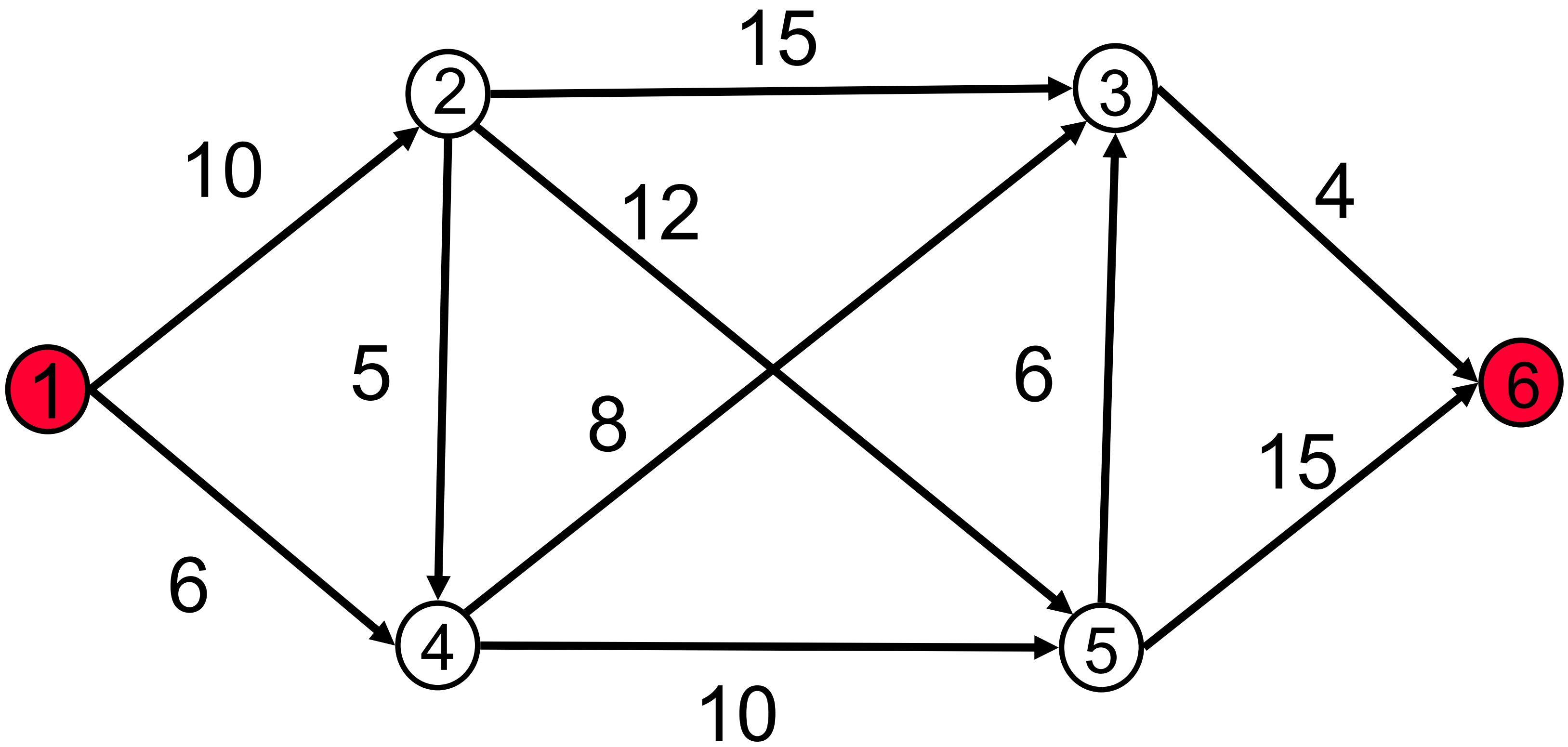


Taglio 1: V_1 ={1,2,3} V_2 = {4,5,6} → archi “diretti” del taglio = {(1,4) (2,4) (2,5) (3,6)}

Taglio 2: V_1 ={1,3,5} V_2 = {2,4,6} → archi “diretti” del taglio = {(1,2) (1,4) (3,6) (5,6)}

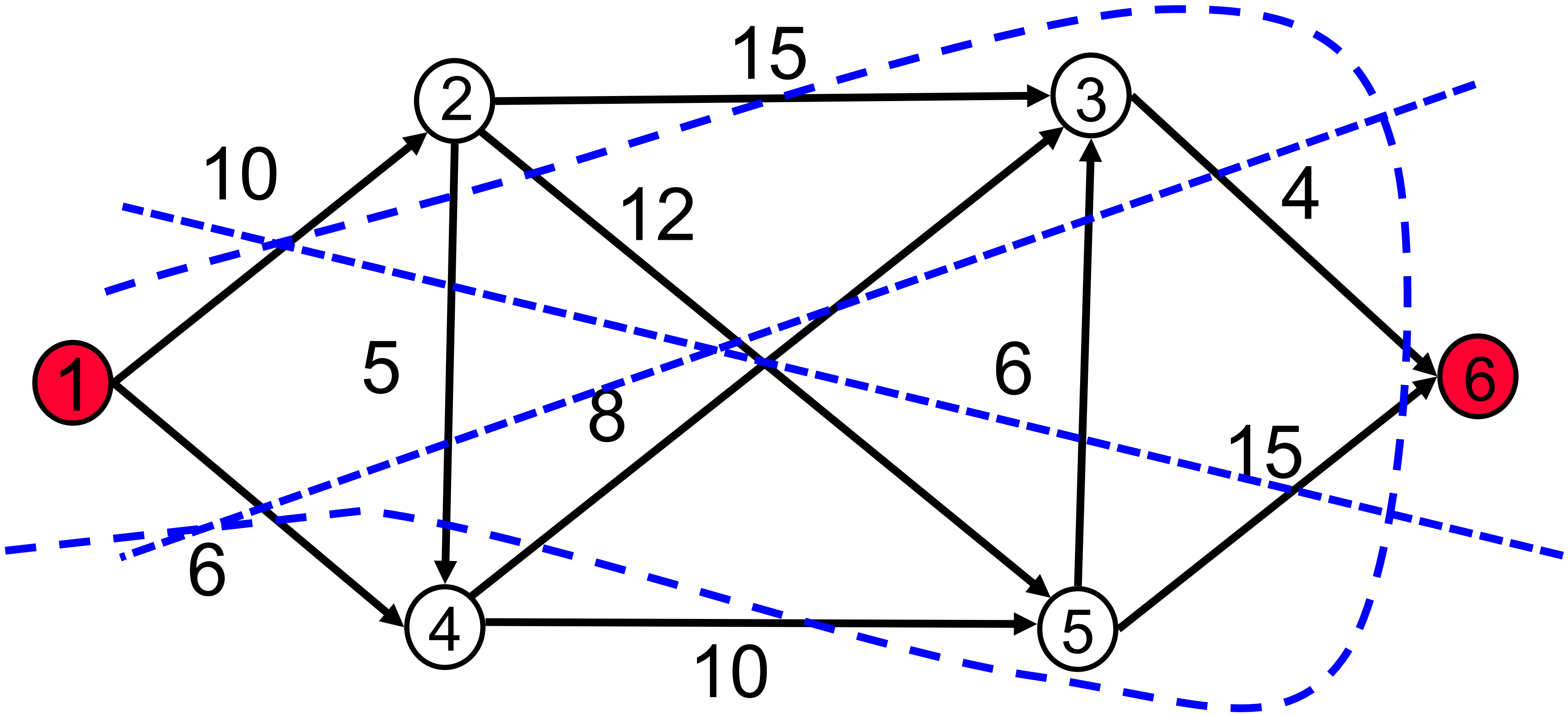
Taglio 3: V_1 ={1,4,5} V_2 = {2,3,6} → archi “diretti” del taglio = {(1,2) (4,3) (5,3) (5,6)}

Capacità di un taglio



Dato il taglio s-t $[V_1, V_2]$, la **capacità del taglio $\boldsymbol{u\,[V_1, V_2]}$** è pari alla somma delle <u>capacità degli archi diretti</u> del taglio.

Capacità di un taglio



Taglio 1: $V_1 = \{1,2,3\}$ $V_2 = \{4,5,6\}$ → archi diretti del taglio ={(1,4) (2,4) (2,5) (3,6)}
Capacità $u[V_1,V_2] = 6 + 5 + 12 + 4 = 27$

Taglio 2: $V_1 = \{1,3,5\}$ $V_2 = \{2,4,6\}$ → archi diretti del taglio ={(1,2) (1,4) (3,6) (5,6)}
Capacità $u\,[V_1,V_2] = 10 + 6 + 4 + 15 = 35$

Taglio 3: $V_1 = \{1,4,5\}$ $V_2 = \{2,3,6\}$ → archi diretti del taglio ={(1,2) (4,3) (5,3) (5,6)}
Capacità $u\,[V_1,V_2] = 10 + 8 + 6 + 15 = 39$

Relazione tra il massimo flusso e la capacità di un taglio

$$\sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k \in BS(i)} x_{ki} = \begin{cases} f & se \quad i = s \\ -f & se \quad i = t \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Proprietà 1:

Il valore di un qualunque flusso ammissibile di G è minore o uguale alla capacità di un qualunque taglio s-t del grafo.

Dim.

Sia $\underline{x}$ un flusso ammissibile e $[V_1, V_2]$ un qualunque taglio s-t del grafo. Sommando i vincoli di bilanciamento del flusso relativi ai nodi in V_1 otteniamo:

$$f = \sum_{i \in V_1} \left[\sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k \in BS(i)} x_{ki} \right]$$

Relazione tra il massimo flusso e la capacità di un taglio

Si ha che

$$f = \underbrace{\sum_{i \in V_1} \left[\sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k \in BS(i)} x_{ki} \right]}_{(1)} = \sum_{(i,j) \in [V_1, V_2]} x_{ij} - \sum_{(p,q) \in [V_2, V_1]} x_{pq}$$

Infatti:

- Per ogni arco *(i,j)* con i e j in V_1, x_{ij} appare due volte in (1), una volta con coefficiente 1 ed una volta con coefficiente -1;
- Per ogni arco *(i,j)* con i in V_1 e j in V_2, x_{ij} appare in (1) con coefficiente 1;
- Per ogni arco *(i,j)* con i in V_2 e j in V_1, x_{ij} appare in (1) con coefficiente -1;
- Per ogni arco *(i,j)* con i e j in V_2, x_{ij} non appare in (1).

Relazione tra il massimo flusso e la capacità di un taglio

Si ha che

$$f = \sum_{i \in V_1} \left[\sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k \in BS(i)} x_{ki} \right] = \sum_{(i,j) \in [V_1, V_2]} x_{ij} - \sum_{(p,q) \in [V_2, V_1]} x_{pq}$$

$$\Downarrow$$

$$f = \sum_{(i,j) \in [V_1, V_2]} x_{ij} - \sum_{(p,q) \in [V_2, V_1]} x_{pq} \leq \sum_{(i,j) \in [V_1, V_2]} x_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in [V_1, V_2]} u_{ij} = u[V_1, V_2]$$

Relazione tra il massimo flusso e la capacità di un taglio

La capacità di un taglio s-t fornisce un limite superiore al valore del flusso *f* che posso spedire dalla sorgente al pozzo.

Se ho un flusso ammissibile di valore *f* e riesco a trovare un taglio s-t la cui capacità è uguale ad *f* allora posso concludere che il flusso che ho trovato è massimo.

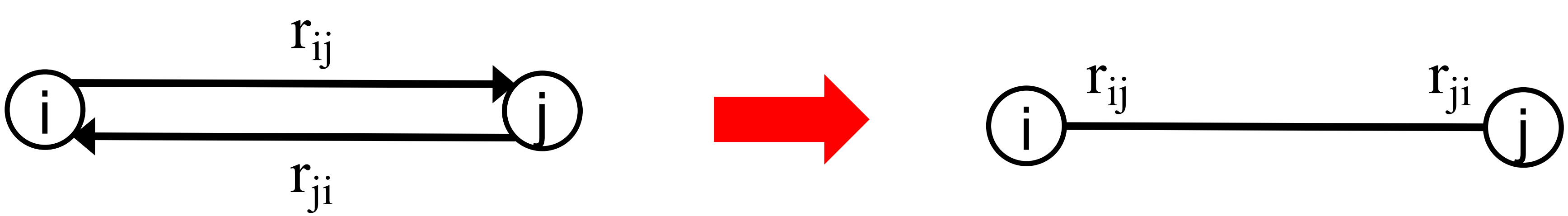
Teorema (Max Flow- Min Cut)
Il flusso massimo che può essere spedito dalla sorgente al pozzo su un grafo orientato G è uguale alla capacità del taglio s-t minimo di G.

Grafo ausiliario e capacità residue

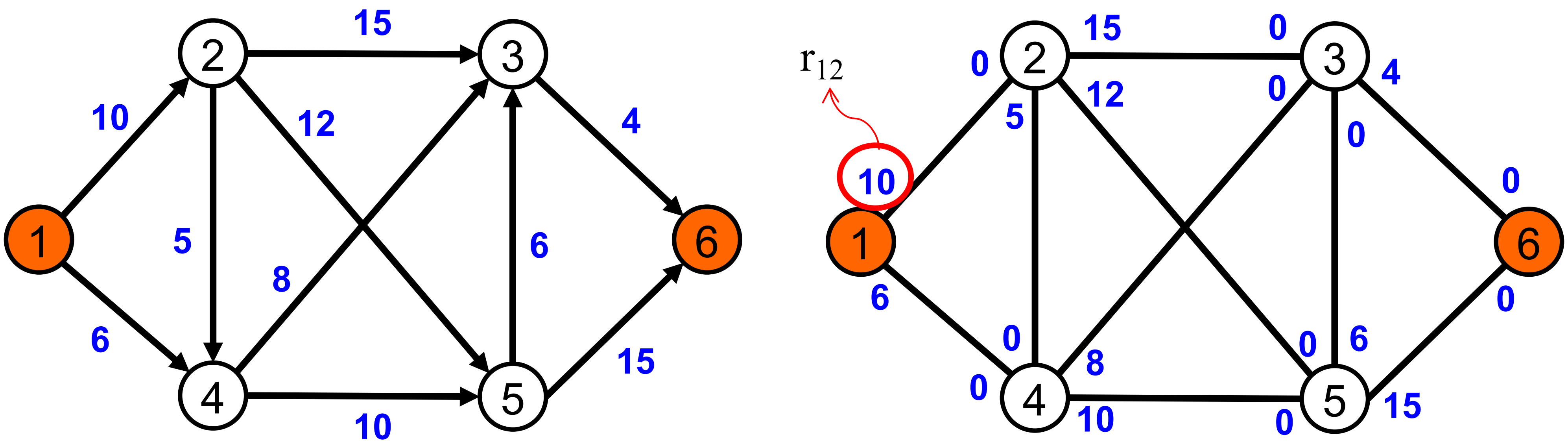
Dato un grafo $G = (V, A)$ ed un flusso ammissibile $\underline{x}$ su G, il **grafo ausiliario** **(o rete residua)** $G(x) = (V', A')$ è così costruito:

- ✓ $V' = V$
- ✓ Per ogni arco $(i, j) \in A$, A' conterrà gli archi (i, j) e (j, i); la capacità u_{ij} di ogni arco $(i, j) \notin A$ è pari a 0.
- ✓ Ad ogni arco di A' è associata una **capacità residua:** $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij} + x_{ji}$.

Utilizzeremo la seguente notazione:



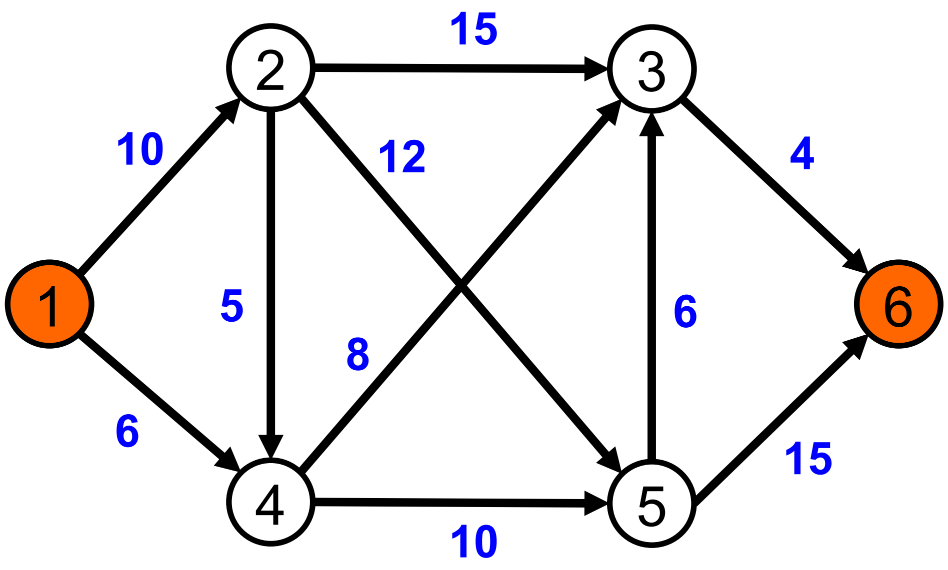
Grafo ausiliario e capacità residue

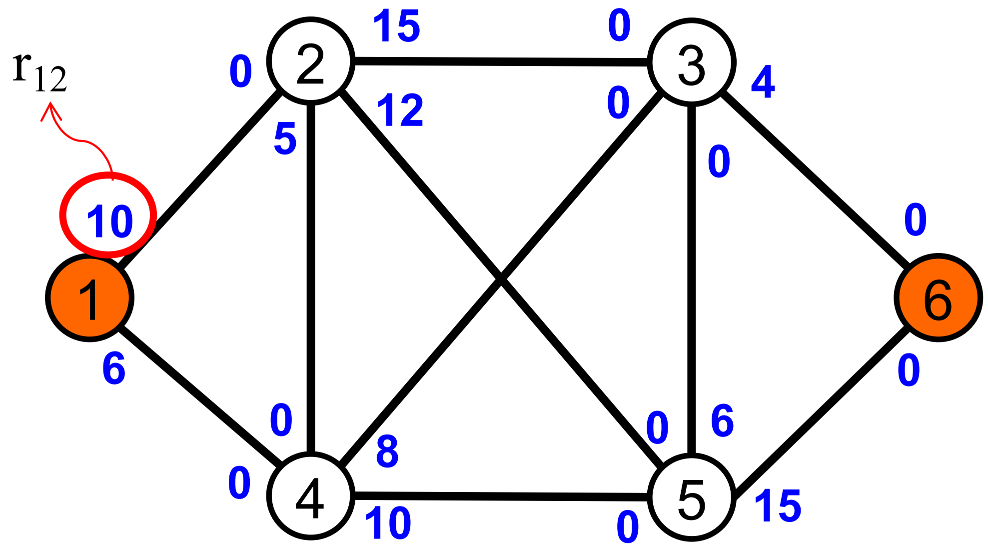


Calcoliamo la rete residua prodotta dal seguente flusso ammissibile $\underline{x}$:

$$\underline{x}^T = \left[x_{12} \ x_{14} \ x_{23} \ x_{24} \ x_{25} \ x_{36} \ x_{43} \ x_{45} \ x_{53} \ x_{56} \right] = \left[3 \ 1 \ 3 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \right]$$

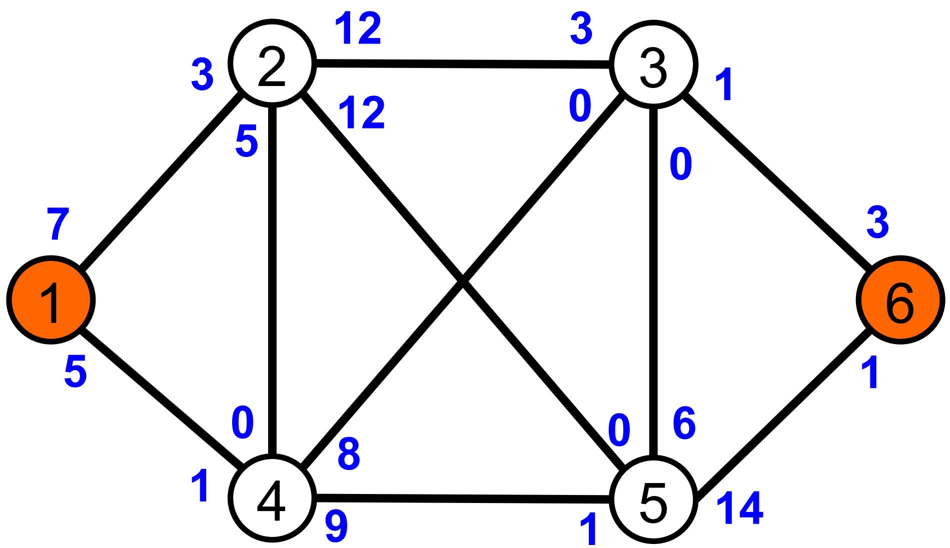
Grafo ausiliario e capacità residue





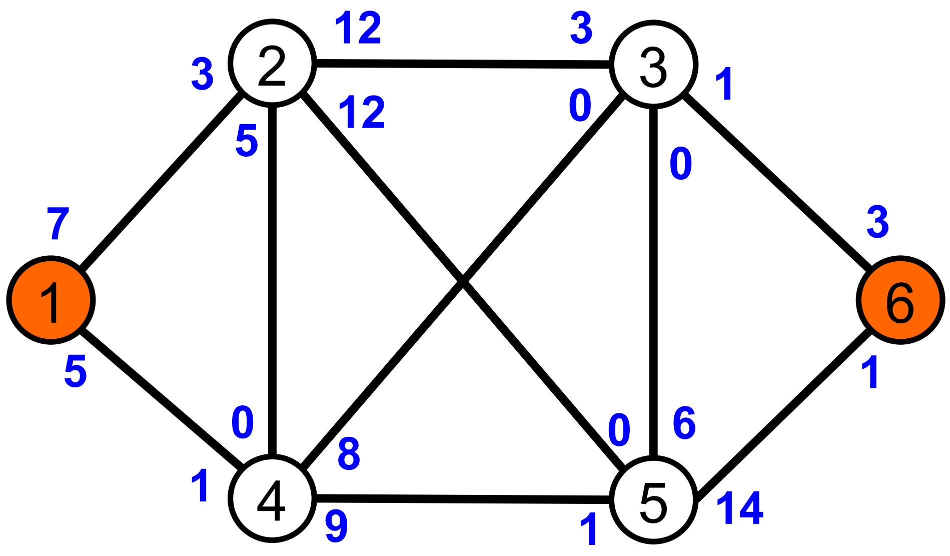
Calcoliamo la rete residua prodotta dal seguente flusso ammissibile $\underline{x}$:

$$\underline{x}^T = [x_{12}\ x_{14}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{25}\ x_{36}\ x_{43}\ x_{45}\ x_{53}\ x_{56}] = [3\ 1\ 3\ 0\ 0\ 3\ 0\ 1\ 0\ 1]$$



$$r_{12} = 10 - 3 + 0 = 7$$
$$r_{21} = 0 - 0 + 3 = 3$$
$$r_{23} = 15 - 3 + 0 = 12$$
$$r_{32} = 0 - 0 + 3 = 3$$
$$\ldots$$

Grafo ausiliario e capacità residue



➢Se un arco ha capacità residua maggiore di zero, significa che posso spedire ancora del flusso attraverso quell'arco.

➢Se riesco ad individuare un cammino da *s* a *t* sul grafo ausiliario, allora posso spedire del flusso addizionale dalla sorgente al pozzo.

➢Un cammino da *s* a *t* sul grafo ausiliario viene definito **cammino aumentante**.

➢Fino a quando nel grafo ausiliario sono presenti cammini aumentanti è sempre possibile incrementare il flusso da *s* a *t*.

Algoritmo dei Cammini Aumentanti (Ford-Fulkerson)

L'algoritmo dei cammini aumentanti risolve il problema del flusso massimo utilizzando il grafo ausiliario (o delle capacità residue) per stabilire come instradare il flusso sulla rete.

Consideriamo un grafo $G = (V, A)$ ed un flusso ammissibile $\underline{x}$ (inizialmente il metodo considera il flusso nullo ossia $x_{ij} = 0 \ \ \forall(i, j) \in A$).

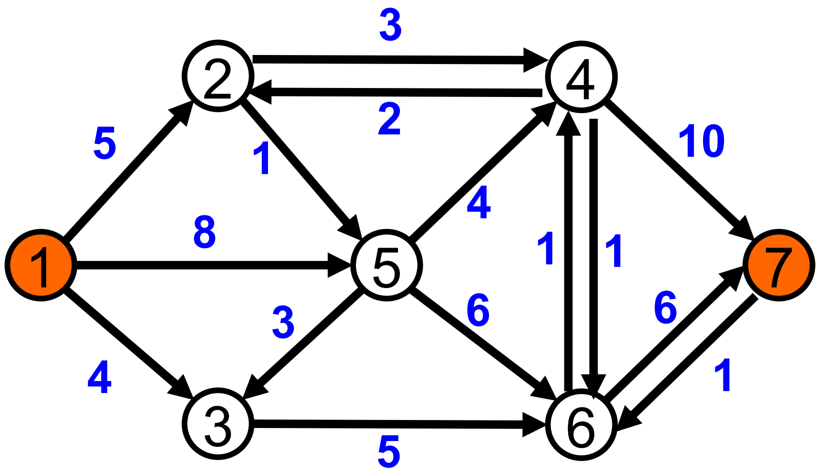
I passi principali dell'algoritmo dei cammini aumentanti sono:

1. Individuare nel grafo ausiliario un qualsiasi cammino p dal nodo sorgente al nodo pozzo su cui è possibile far transitare una quantità di flusso $\Delta > 0$ (cammino aumentante). Se non esiste tale cammino, l'algoritmo si arresta.

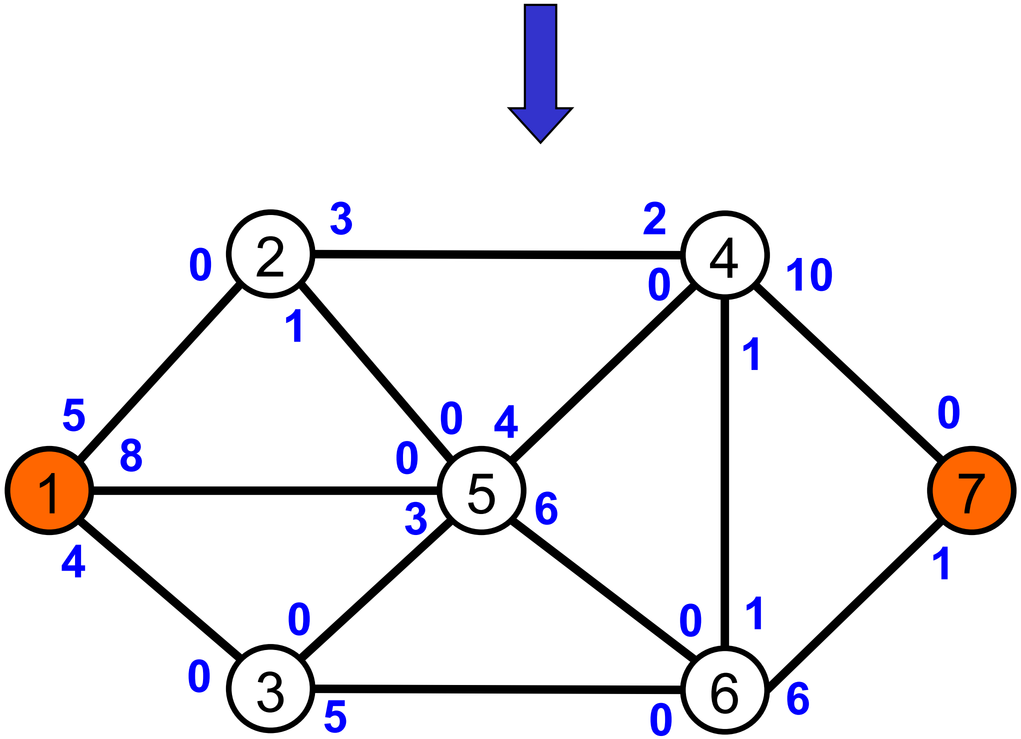
2. Il valore del flusso da inviare lungo il cammino p è pari alla capacità residua minima degli archi in p (i.e. $\Delta = \min\{r_{ij}: (i, j) \in p\}$)

3. Incrementare di Δ il valore del flusso f corrente, quindi $f = f + \Delta$, e aggiornare le capacità residue degli archi lungo il cammino p nel seguente modo: $r_{ij} = r_{ij} - \Delta$ e $r_{ji} = r_{ji} + \Delta$.

Algoritmo dei Cammini Aumentanti (Ford-Fulkerson)

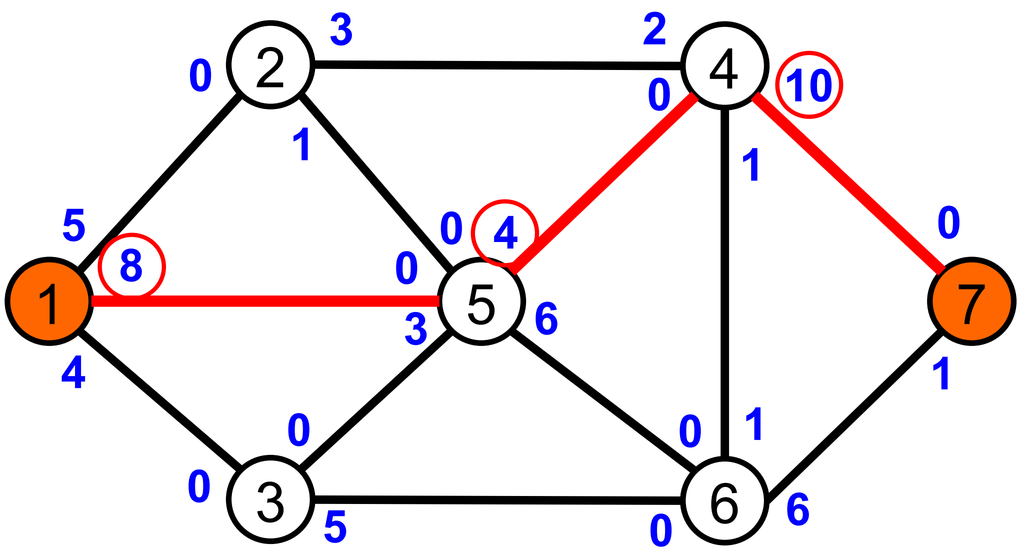


G(V,A) grafo in input
s=1 Nodo sorgente
t=7 nodo pozzo
$x_{ij}=0$ $\forall(i,j)\in A$ *flusso ammissibile iniziale*



f = 0

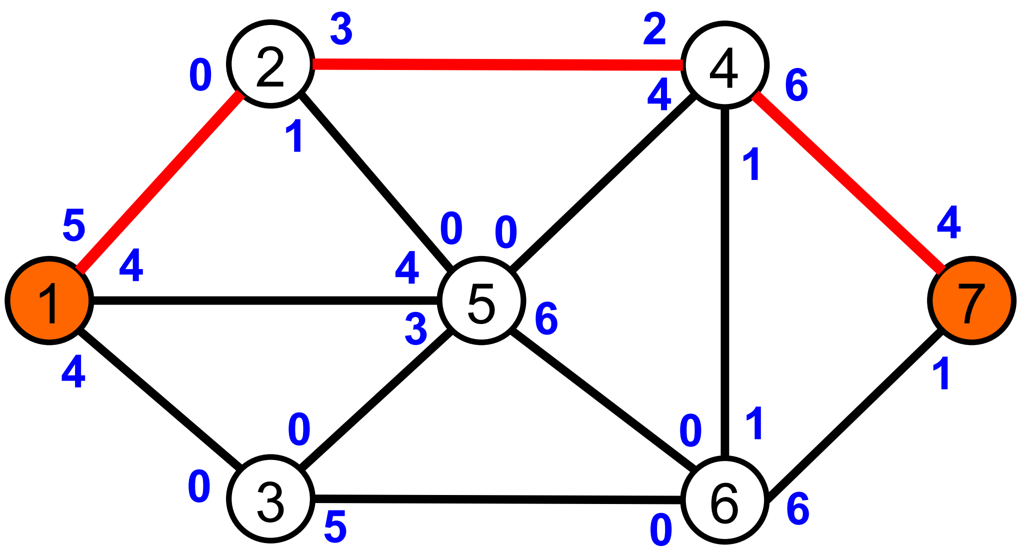
Algoritmo dei Cammini Aumentanti (Ford-Fulkerson)



Un path aumentante è un path da s a t sul grafo ausiliario.
Viene chiamato ''aumentante'' perché permette di aumentare il flusso sul grafo da s a t utilizzando gli archi del path.
Il flusso che posso spedire è uguale alla minima capacità residua degli archi del path.

P = 1-5-4-7

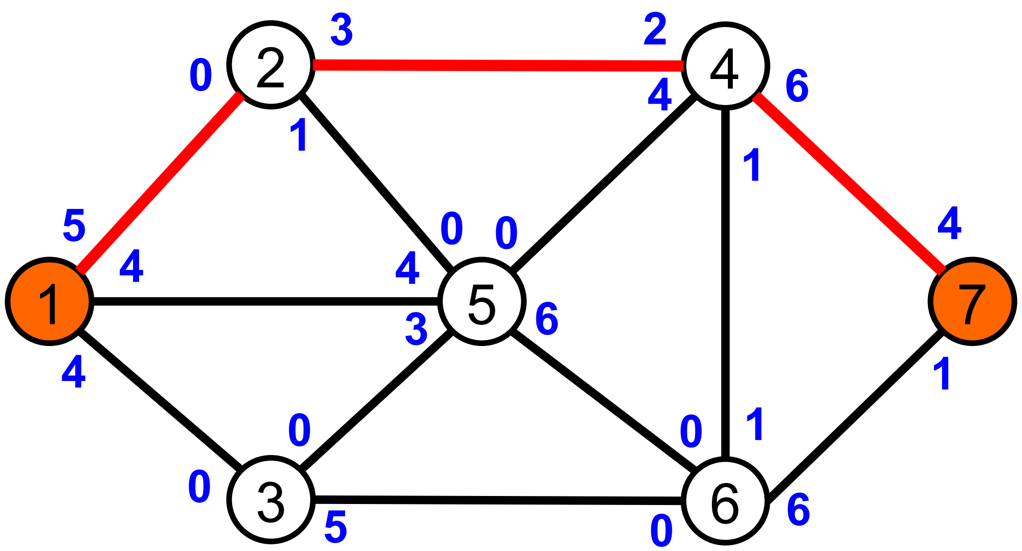
Δ=4 **f = 4**



P = 1-2-4-7

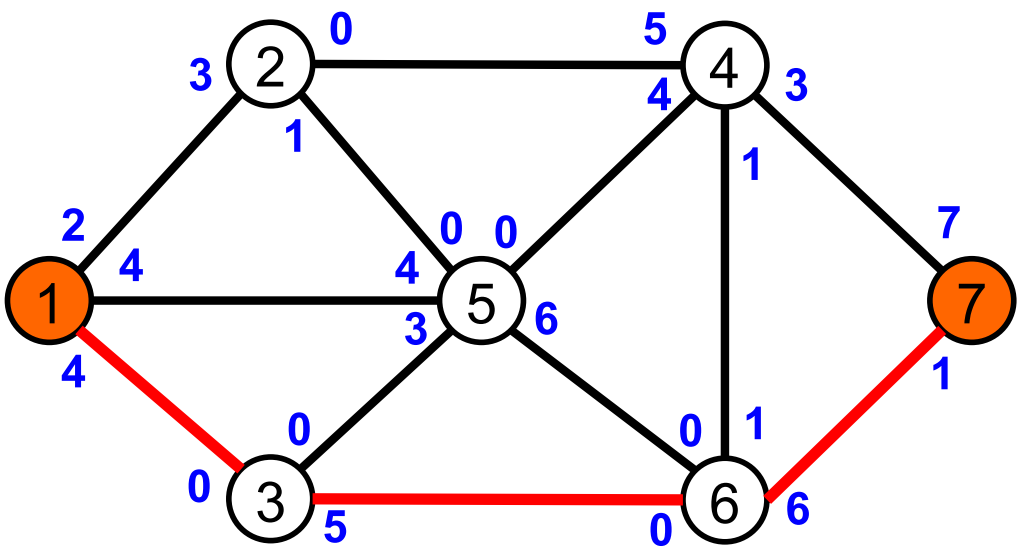
Δ=3 **f = f+Δ = 7**

Algoritmo dei Cammini Aumentanti (Ford-Fulkerson)



P = 1-2-4-7

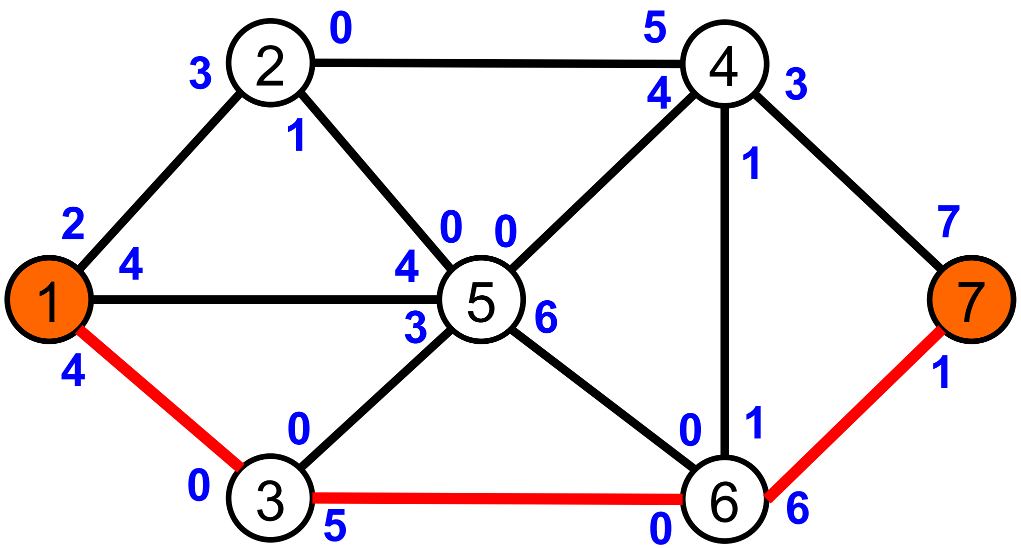
Δ=3 **f = f+Δ = 7**



P = 1-3-6-7

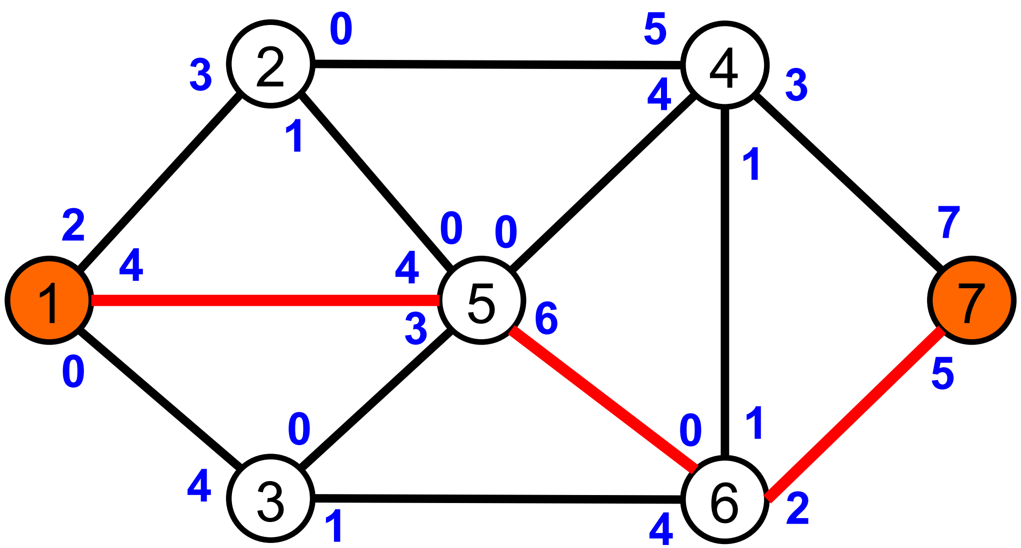
Δ=4 **f = f+Δ = 11**

Algoritmo dei Cammini Aumentanti (Ford-Fulkerson)



P = 1-3-6-7

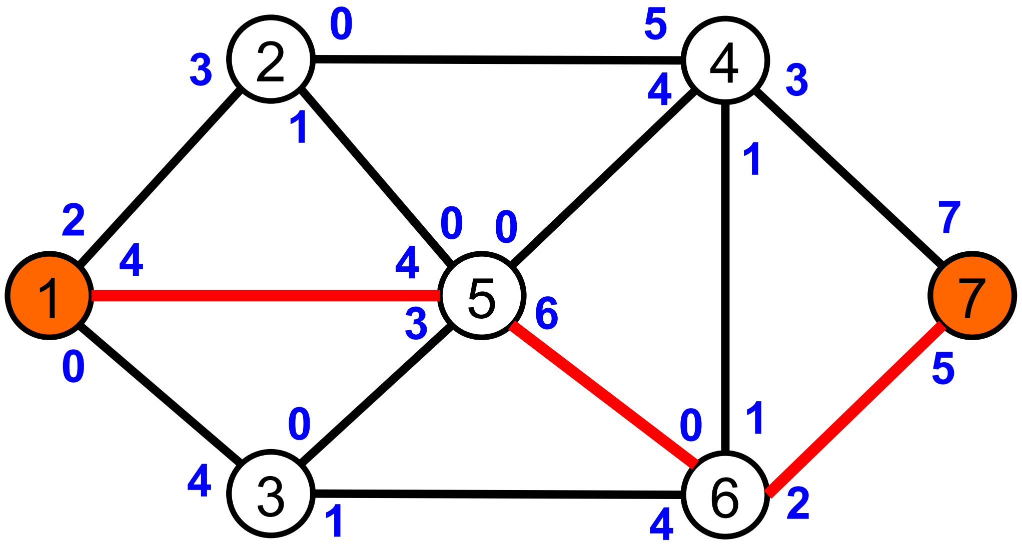
$\Delta=4$ $f = f+\Delta = 11$



P = 1-5-6-7

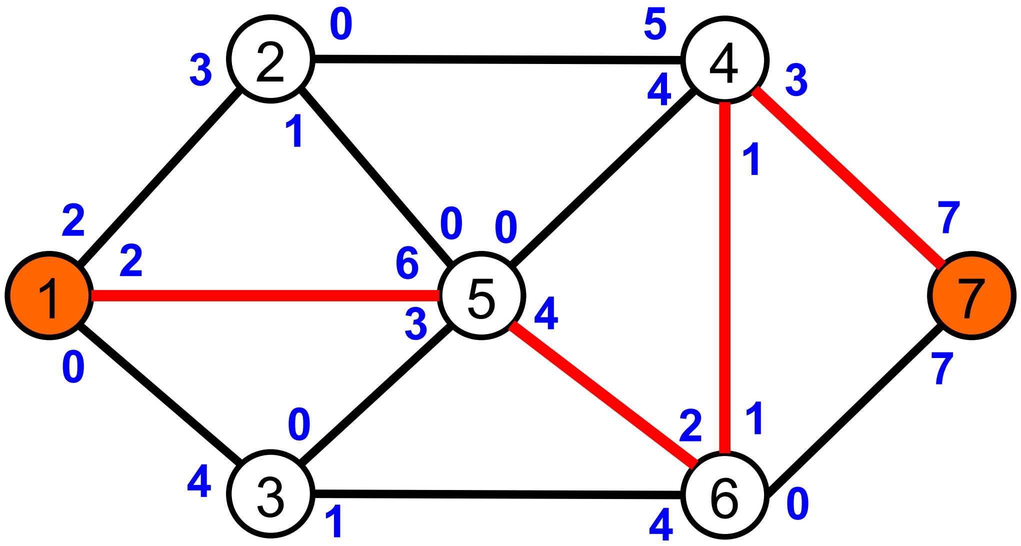
$\Delta=2$ $f = f+\Delta = 13$

Algoritmo dei Cammini Aumentanti (Ford-Fulkerson)



P = 1-5-6-7

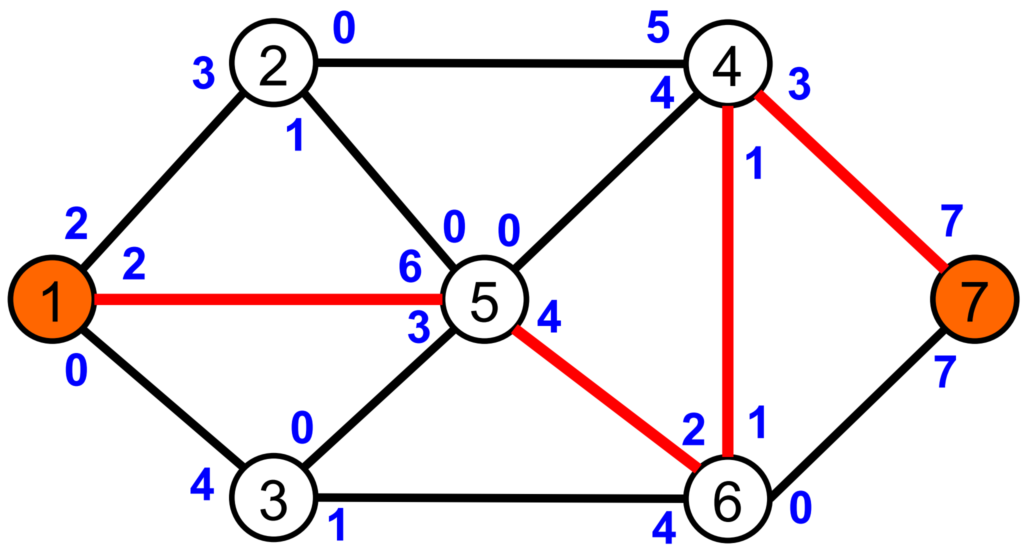
Δ=2 **f = f+Δ = 13**



P = 1-5-6-4-7

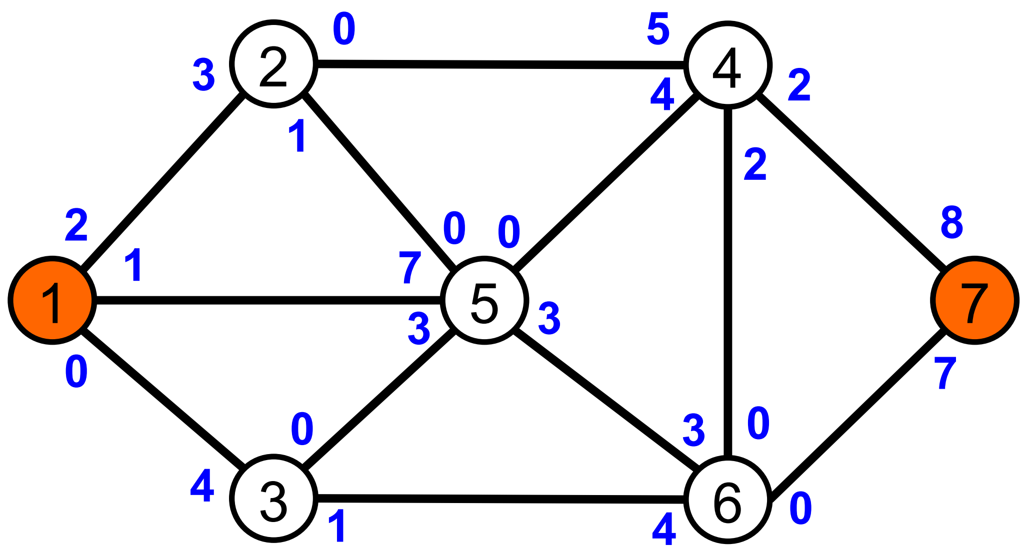
Δ=1 **f = f+Δ = 14**

Algoritmo dei Cammini Aumentanti (Ford-Fulkerson)



P = 1-5-6-4-7

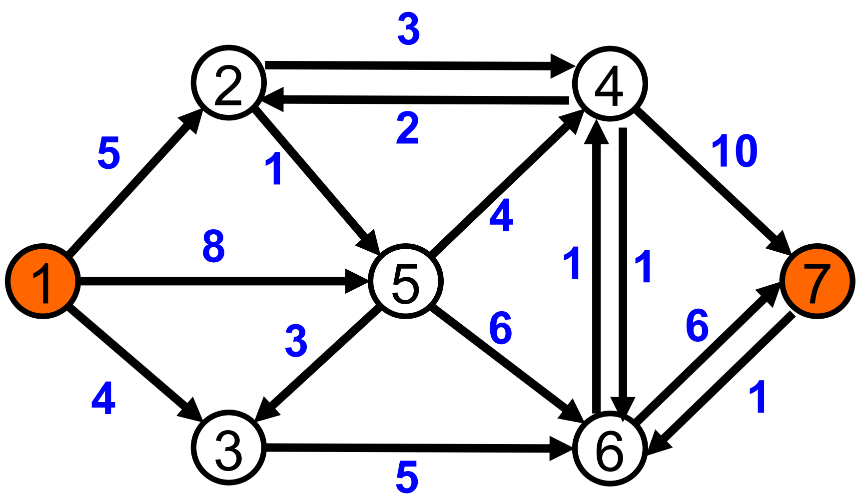
Δ=1 **f = f+Δ = 14**



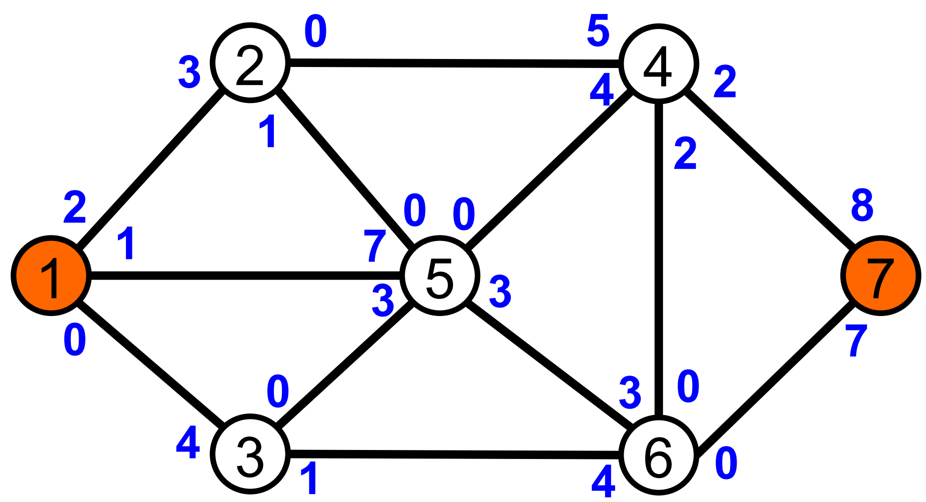
Non riesco ad individuare un cammino aumentante → Il flusso che ho individuato è ottimo

Algoritmo dei Cammini Aumentanti (Ford-Fulkerson)

Grafo iniziale



Grafo ausiliario finale



Il valore delle variabili decisionali, per ogni arco del grafo di partenza, è pari alla differenza tra la capacità originale dell'arco meno quella residua nell'ultimo grafo ausiliario (se tale valore è negativo la variabile decisionale varrà zero). Formalmente: $x_{ij} = \max\{0, u_{ij} - r_{ij}\}$.

Ad esempio per l'arco (1,2) abbiamo una capacità iniziale pari a 5 e una finale pari a 2 quindi $x_{12} = 3$.

Analogamente abbiamo

$x_{15} = 8 - 1 = 7$, $x_{13} = 4 - 0 = 4$,

$x_{25} = 1 - 1 = 0$, $x_{24} = 3 - 0 = 3$, … …

Correttezza e Dettagli Implementativi

Si noti che nello schema generale del metodo dei cammini aumentanti ci sono dei dettagli che devono essere meglio chiariti:

- Come si individua un cammino aumentante o come si mostra che non esiste un cammino aumentante?
- Come certificare che il flusso ottenuto è quello massimo?

La risposta a queste domande puo' essere ottenuta considerando una particolare implementazione dell'algoritmo del cammino aumentante che da luogo al ***Labeling Algorithm di Ford and Fulkerson***

Labeling Algorithm di Ford e Fulkerson

Idea Principale:

➢Tramite opportuni algoritmi di visita è possibile etichettare tutti i nodi che possono essere raggiunti dalla sorgente nel grafo ausiliario <u>tramite archi con capacità residua positiva</u>;

➢Se il pozzo viene etichettato durante la precedente visita, allora esiste un cammino aumentante da s a t tramite il quale è possibile inviare ulteriori unità di flusso;

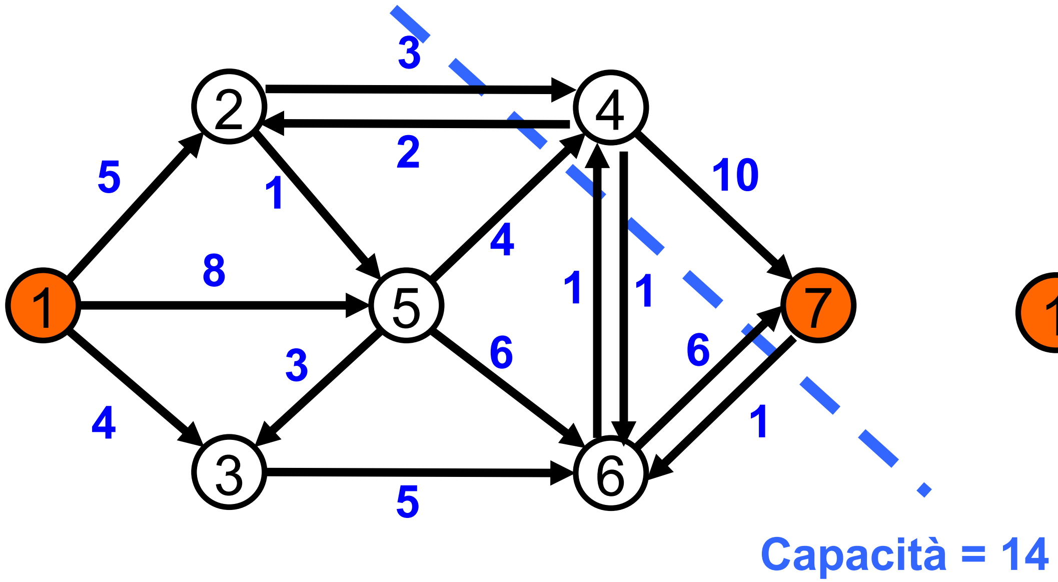
➢Se il pozzo non viene etichettato allora si costruisce un taglio nel seguente modo:

- in V_1 si inseriscono i nodi etichettati (ovvero raggiungibili da s);
- in V_2 si inseriscono i nodi non etichettati;

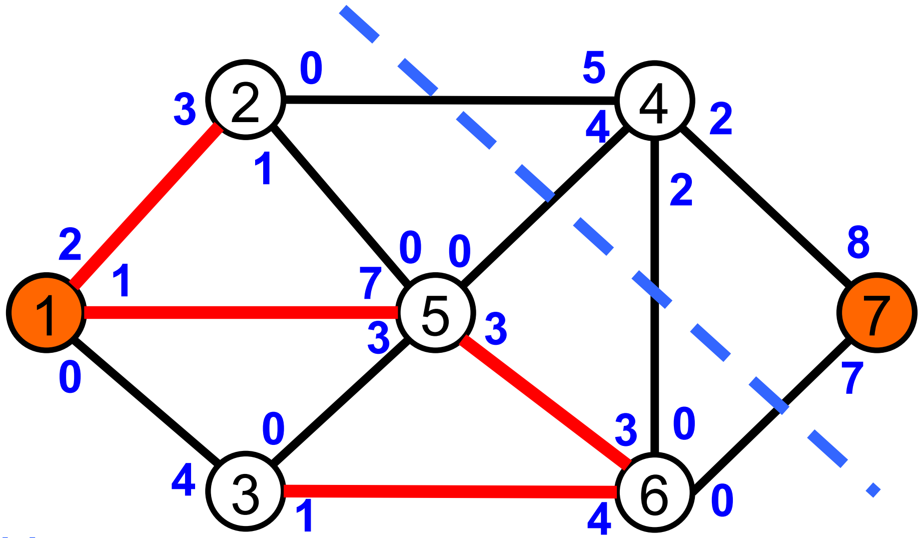
➢ Poichè la capacità del taglio così costruito è pari al flusso f inviato fino a quel momento, dal teorema MinCut/MaxFlow tale flusso f è massimo.

Individuazione taglio minimo

Grafo iniziale



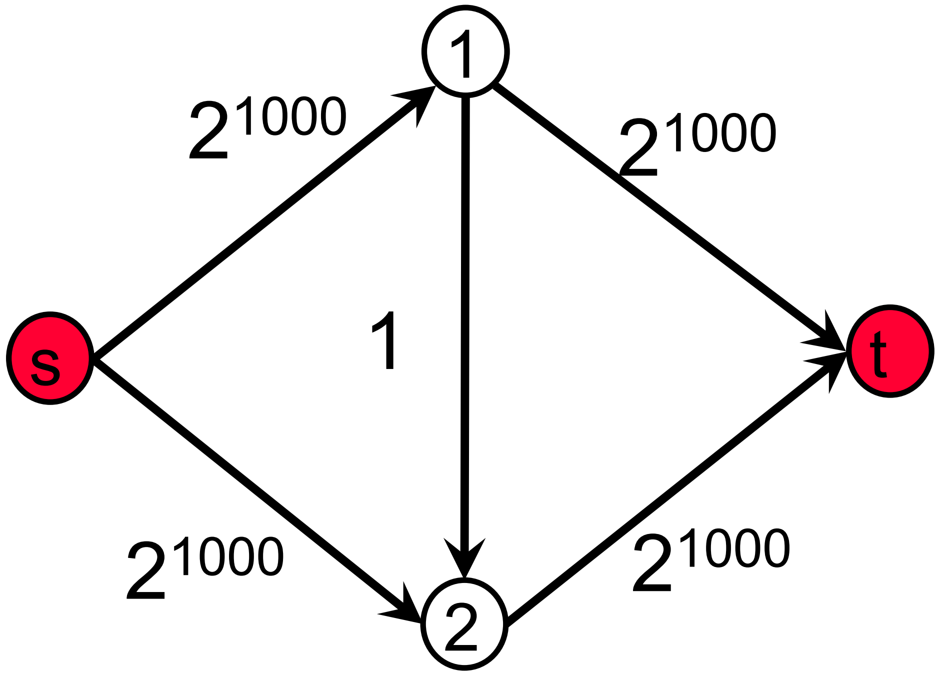
Grafo ausiliario finale



Taglio : V_1 ={1,2,3,5,6}, V_2 = {4,7}

Per poter individuare il taglio minimo, la cui capacità sarà uguale al flusso massimo *f=14*, è sufficiente controllare quali sono i nodi raggiungibili dalla sorgente *1* attraverso archi con capacità residua maggiore di 0 nell'ultimo grafo ausiliario.

Complessità dell'algoritmo dei cammini aumentanti



Potremmo idealmente utilizzare in sequenza i cammini aumentanti *s-1-2-t*, *s-2-1-t*, *s-1-2-t*, *s-2-1-t* …

Approcci alternativi

Per migliorare la complessità dell'algoritmo ci sono diversi approcci:

- cercare un cammino con il numero minimo di archi (shortest augmenting path algorithm);

- posso cercare un cammino con una capacità almeno pari ad una quantità Δ fissata di volta in volta (capacity scaling algorithm);

- algoritmi di preflow push.