ESERCIZIO 3 {ESERCIZIO 7, I prova intercorso, 19/04/2022}

Applicare il pumping lemma per dimostrare che il seguente linguaggio non è regolare

$L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid$ il numero di 0 in w è minore del numero di 1 in $w \}$

Supponiamo per assurdo che L sia regolare. Allora la proprietà del pumping lemma deve valere per il linguaggio L.

Mostriamo che

$\forall p > 0 \quad \exists w \in L, |w| \geq p$ tale che

$\forall x, y, z \in \Sigma^* \quad w = xyz, \ |xy| \leq p, \ y \neq \varepsilon$

$\exists k \geq 0$ tale che $xy^k z \notin L$

Sia p la costante del pumping.

Consideriamo la stringa $w = 0^p 1^{p+1} \in L$
Chiaramente, $w \in L$ e $|w| \geq p$.

Il pumping lemma garantisce che w può essere fattorizzata in tre sottostringhe $x, y, z \in \Sigma^*$ tali che

1. $|xy| \leq p$ 2. $y \neq \varepsilon$ 3. $\forall k \geq 0, \ xy^k z \in L$

La condizione 1) implica che xy è formata da soli 0. Di conseguenza, anche y è formata da soli 0 (almeno uno per la condizione 2).

Si ha, quindi, che $w = 0^p 1^{p+1} = xyz$ dove

$x = 0^i \qquad y = 0^j \qquad z = 0^{p-i-j} 1^{p+1}$, con $i \geq 0, j > 0, i+j \leq p$

Consideriamo $k = 3$. In questo modo, otteniamo la stringa

$xy^3z = 0^i 0^{3j} 0^{p-i-j} 1^{p+1} = 0^{p+2j} 1^{p+1}$

La stringa xy^3z, tuttavia, non appartiene al linguaggio L poiché

$xy^3z \in L \leftrightarrow xy^3z = 0^{p+2j} 1^{p+1}, \ p+2j < p+1$

Però, poiché $j > 0$, si ha che $p+2j > p+1$. Ciò implica che il numero di 0 in w è strettamente maggiore del numero di 1 in w

Questo risultato è in contraddizione con la terza condizione del pumping lemma. Ciò significa che L non può essere regolare.