

## ESERCIZIO 4

Considerare il seguente problema.

FESTA-PER-X : una persona riceve la visita di un vecchio amico  $x$ .  
Per l'occasione, vuole organizzare una festa scegliendo tra tutti i suoi amici almeno  $k$  persone che si conoscono e che conoscono  $x$ .

Mostrare che FESTA-per-X è NP-completo.

Sugg. Riduzione da INDEPENDENT-SET.

INDEPENDENT-SET  $\leq_p$  FESTA-PER-X

Costruzione dell'istanza

Sia  $S$  un independent-set su  $G=(V,E)$  di taglia  $k$ .  
Sia  $x$  un vertice tale che  $x \notin V$ .

Costruiamo il grafo  $G^c$ , il grafo complementato di  $G$ , dove  
 $G^c = (V \cup \{x\}, E^c)$

Aggiungiamo  $\forall u \in V$  l'arco  $(u,x)$  in  $G^c$ .

FATTO

$S$  è un independent-set di taglia  $k$  se e solo se l'insieme di invitati è  $S$ .

Dimostrazione

$\Rightarrow$   $S$  è un independent-set in  $G$ , con  $|S|=k$ .

Per costruzione,  $S$  è una clique in  $G^c$ : quindi, in  $S$  ci sono  $k$  persone e si conoscono tutte.

Dato che  $x$  è collegato a ogni nodo, ognuno conosce  $x$ .

Quindi, possiamo invitare tutti gli amici in  $S$ .

$\Leftarrow$  Se ho invitato gli amici in  $S$ , con  $|S|=k$ , allora si conoscono tutti, cioè:

$\forall u,v \in S \quad (u,v) \in E^c \rightarrow (u,v) \notin E$  per costruzione.

Generalizzando questa considerazione, possiamo concludere che  $S$  è un independent set in  $G$ .



FESTA-PER-X è NP-completo

Dato un insieme di invitati  $A$  alla festa per  $X$  e un insieme  $S$  di persone, per controllare se  $S$  è una soluzione al problema FESTA-PER-X, il verificatore

1. testa se  $S \subseteq A$  e  $|S| = k$ , cioè se  $S$  è un insieme di  $k$  persone e tutte sono state invitate
2. controlla che tutte le persone dell'insieme  $S$  si conoscano
3. controlla che tutte le persone dell'insieme  $S$  conoscano  $X$

Questo verificatore ha complessità  $O(|S|^2)$ , quindi polinomiale