Lezioni di Ricerca Operativa

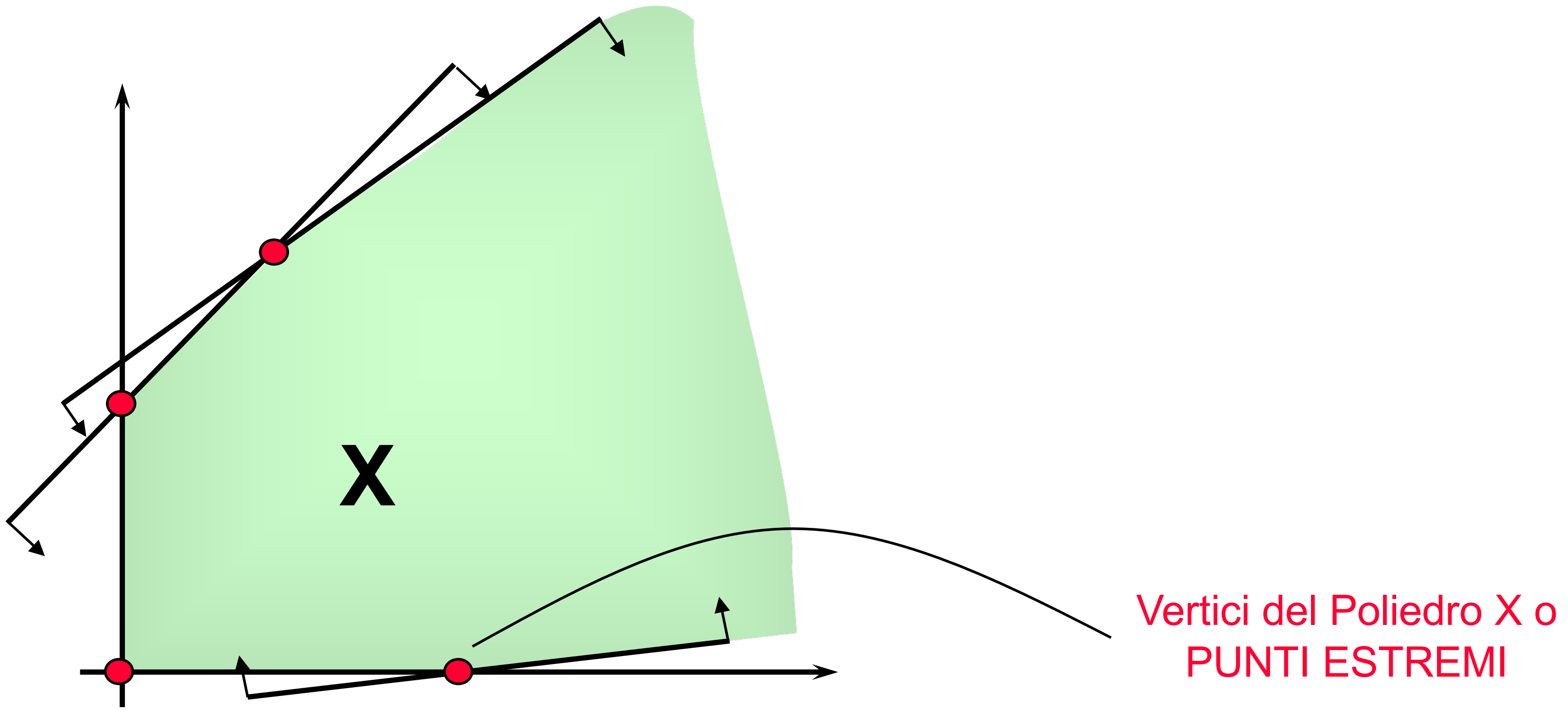
Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 7

- Cono di recessione.
- Teorema della rappresentazione.

R. Cerulli – F. Carrabs

Vertici di un poliedro



Definizione

Un punto di un poliedro X è un **punto estremo** se e solo se non può essere espresso come combinazione convessa STRETTA di altri punti di X. Formalmente:

$\underline{x} \in X$ è un vertice $\Leftrightarrow \nexists \underline{x}', \underline{x}'' \in X, \underline{x}' \neq \underline{x}'' : \underline{x} = \lambda \underline{x}' + (1-\lambda)\underline{x}''$ con $0<\lambda<1$

Teorema (no dim.)

(Proprietà dei punti estremi di un poliedro limitato)

Dato un poliedro X non vuoto e limitato con punti estremi $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2, \ldots,$ $\underline{x}_k$, ogni punto $\underline{y} \in X$ può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X, cioè:

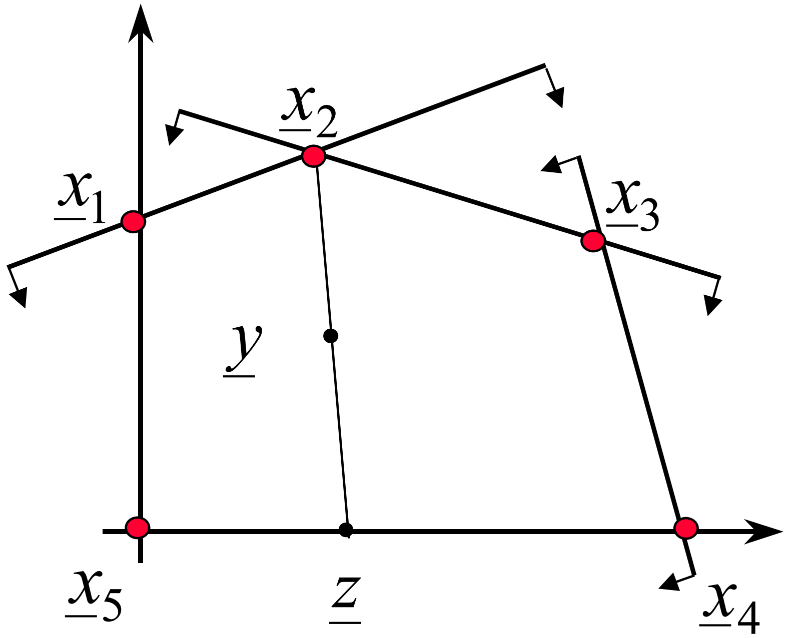
$$\underline{y} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \underline{x}_j$$

con

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \qquad \text{e} \qquad \lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, k$$

Esempio

Voglio dimostrare che è possible esprimere il vettore $\underline{y}$ come combinazione convessa dei vertici del politopo



$$\underline{y} = \lambda \underline{x}_2 + (1-\lambda)\underline{z} \qquad \lambda \in [0,1]$$

$$\underline{z} = \mu \underline{x}_5 + (1-\mu)x_4 \qquad \mu \in [0,1]$$

Sostituendo $\underline{z}$ nella prima equazione:

$$\underline{y} = \lambda \underline{x}_2 + \mu(1-\lambda)\underline{x}_5 + (1-\mu)(1-\lambda)\underline{x}_4$$

Nota che :

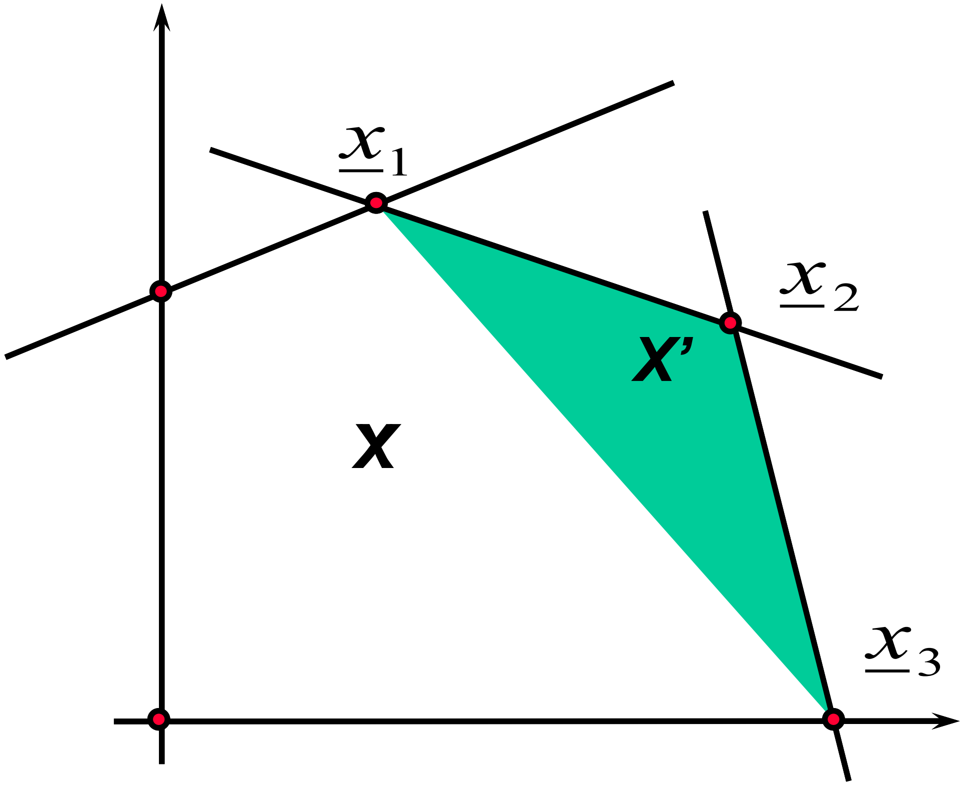
1) $\lambda \geq 0 \qquad \mu(1-\lambda) \geq 0 \qquad (1-\mu)(1-\lambda) \geq 0$

2) $\lambda + \mu(1-\lambda) + (1-\mu)(1-\lambda) = \lambda + (1-\lambda)(\mu + 1 - \mu) = 1$

c.v.d.

In generale:

Una combinazione convessa di $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ $\underline{x}_3$ permette di ottenere tutti i punti di $X' \subset X$



Quando un poliedro è illimitato?

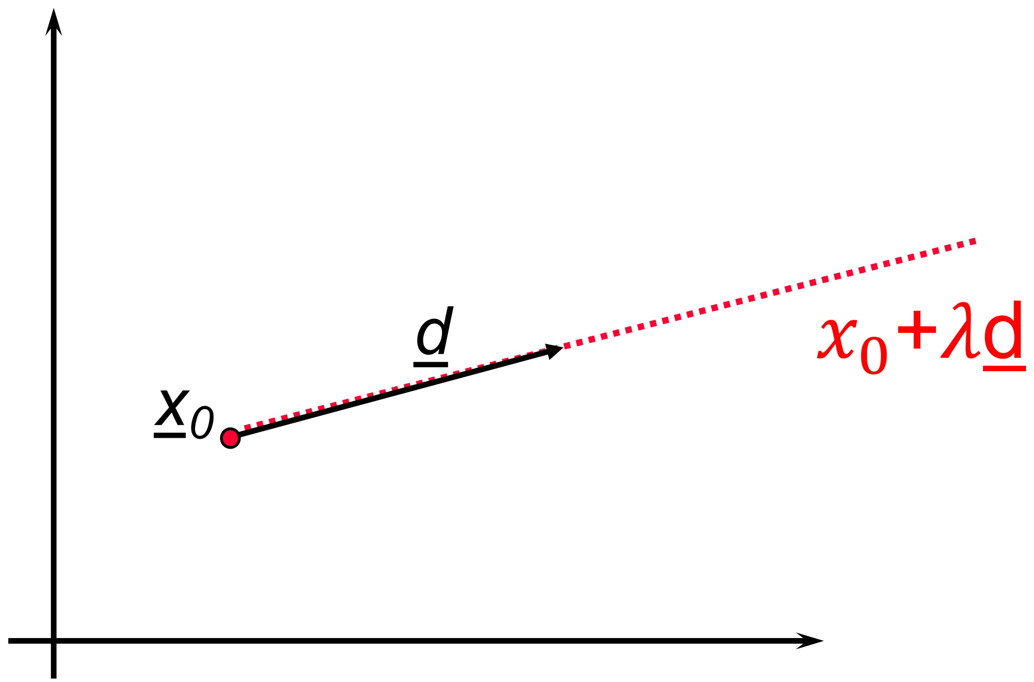
Bisogna considerare le sue direzioni estreme

Raggi e direzioni di un poliedro

Definizione.

Un **raggio** R, di vertice $\underline{x}_0$ e di direzione $\underline{d}$, è l'insieme di punti:

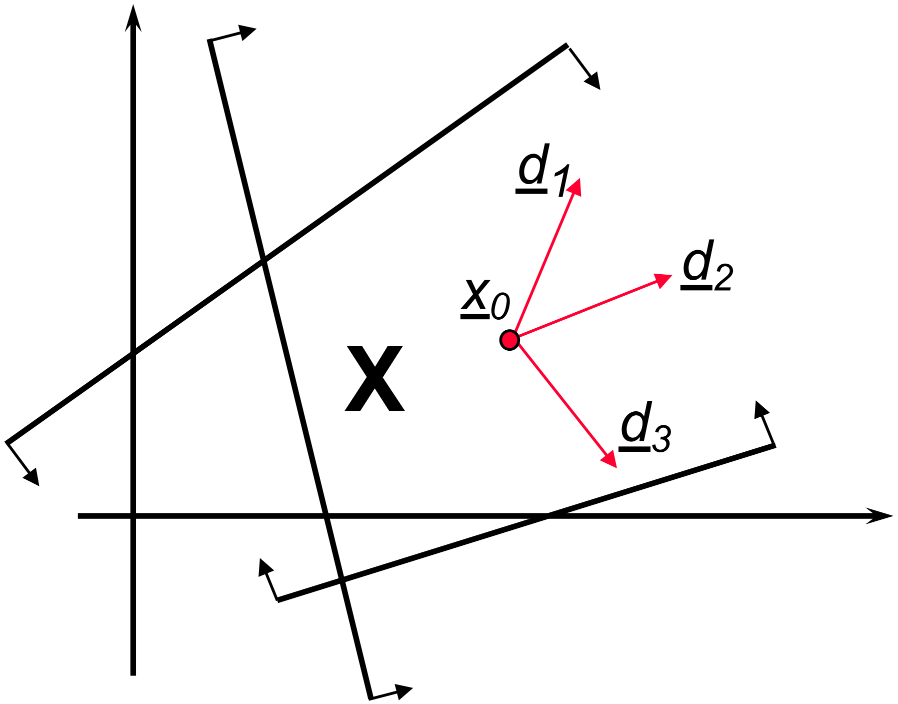
$$R = \{\underline{x}_0 + \lambda \underline{d} : \lambda \geq 0\}$$



Raggi e direzioni di un poliedro

Definizione

Dato un poliedro X, il vettore $\underline{d}$ è una **direzione** di X se e solo se per ogni punto $\underline{x}_0 \in X$, il raggio $\underline{x}_0 + \lambda \underline{d}$ appartiene ad X $\forall \lambda \geq 0$.



$\underline{d}_1$ NON è direzione

$\underline{d}_2$ è direzione

$\underline{d}_3$ NON è direzione

Come si calcolano le direzioni di un poliedro?

(Procedimento algebrico)

$$X = \{\underline{x} : A\underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\} \quad \text{(poliedro)}$$

Dato un qualsiasi punto $\underline{x}_0 \in X$, il vettore $\underline{d}$ è una direzione del poliedro X se:

(i) $A\left(\underline{x}_0 + \lambda \underline{d}\right) \leq \underline{b}$

(ii) $\underline{x}_0 + \lambda \underline{d} \geq \underline{0}$

(iii) $\underline{d} \neq \underline{0}$

(i) $A(\underline{x}_0 + \lambda \underline{d}) \leq \underline{b}$

(ii) $\underline{x}_0 + \lambda \underline{d} \geq \underline{0}$

(iii) $\underline{d} \neq \underline{0}$

(i) poiché $\underline{x}_0 \in X$:

$$A(\underline{x}_0 + \lambda \underline{d}) \leq \underline{b} \Leftrightarrow A\underline{x}_0 + A\lambda \underline{d} \leq \underline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda A \underline{d} \leq \underline{0} \Leftrightarrow A\underline{d} \leq \underline{0}$$

(ii) $\underline{x}_0 + \lambda \underline{d} \geq \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{d} \geq \underline{0}$

Quindi le direzioni $\underline{d}$ del poliedro X sono tutti e soli i vettori tali che:

$$A\underline{d} \leq \underline{0}$$

$$\underline{d} \geq \underline{0}$$

$$\underline{d} \neq \underline{0}$$

Esempio 1

$$X = \left\{ \begin{matrix} (x_{1,}x_2): -3x_1 + x_2 \leq -2, -x_1 + x_2 \leq 2, -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{matrix} \right\}$$

L'insieme delle direzioni di X è dato dai vettori $\underline{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

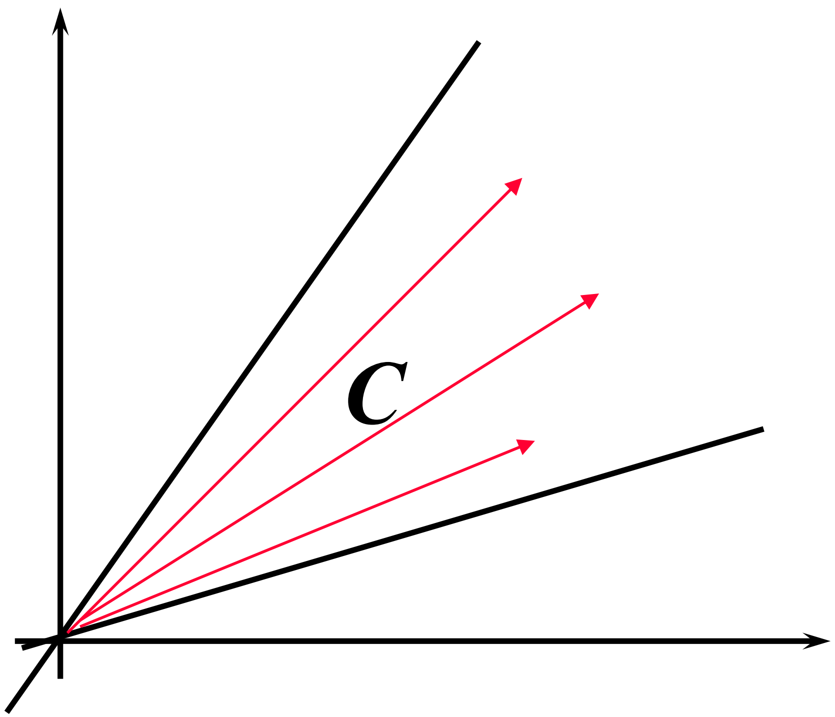
$$D = \left\{ \begin{matrix} (d_{1,}d_2): -3d_1 + d_2 \leq 0, -d_1 + d_2 \leq 0, -d_1 + 2d_2 \leq 0 \\ d_1 + d_2 = 1, \qquad d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\underline{d}' = \begin{bmatrix} {}^{2}/_{3} \\ {}^{1}/_{3} \end{bmatrix} \qquad \underline{d}'' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

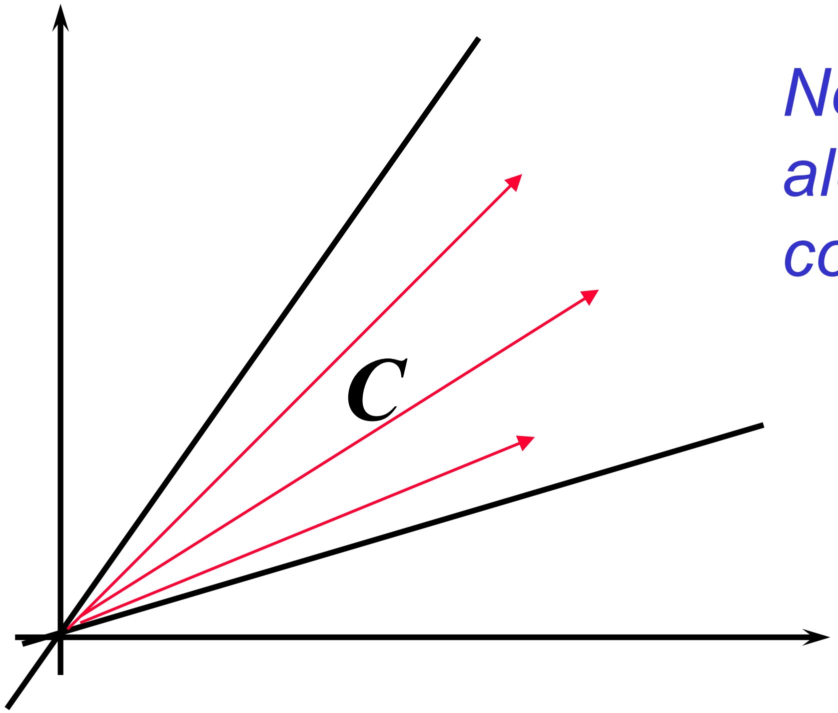
N.B. Poiché $d_1 + d_2 = 1$ e $d_1 \geq 0, d_2 \geq 0$ le componenti dei vettori direzione saranno SEMPRE compresi tra 0 e 1 ossia $0 \leq d_1 \leq 1$ e $0 \leq d_2 \leq 1$

Coni Convessi

Definizione:
Un **cono convesso** *C* è un insieme convesso tale che se $\underline{x} \in C$ allora anche $\lambda \underline{x} \in C \quad \forall \lambda \geq 0$.



Un cono convesso è un insieme convesso che contiene raggi che partono dall'origine (perché?)



Nota:
alcuni raggi possono essere espressi come combinazione conica di altri

In generale:
un cono convesso può essere espresso in funzione dei suoi raggi

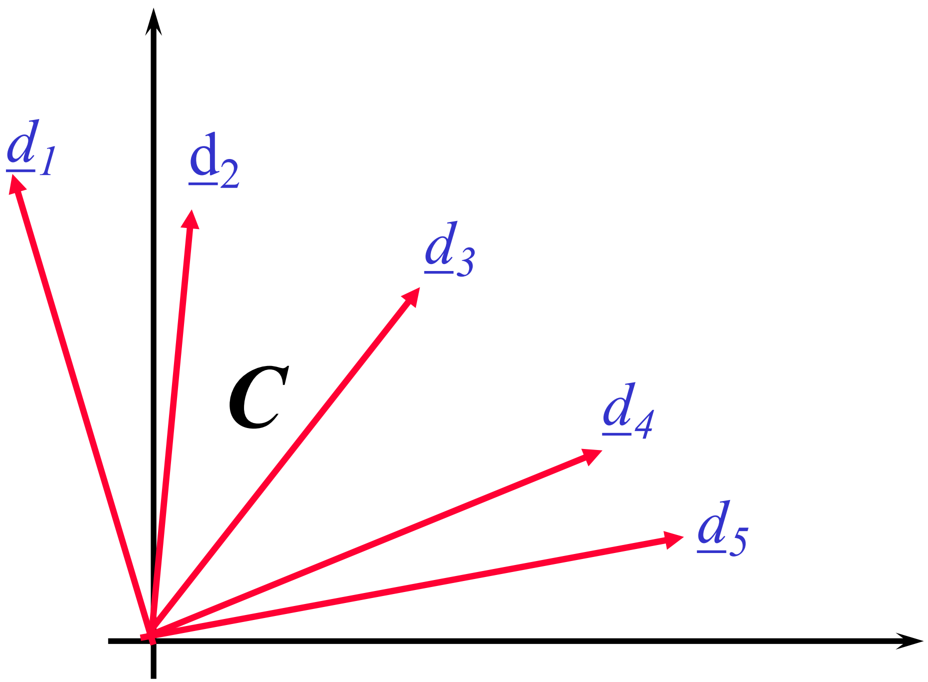
⬇

*Solo alcuni raggi sono sufficienti (detti **raggi estremi**) perché gli altri sono espressi come combinazione conica di questi*

Coni Convessi

Dato un insieme di vettori $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \ldots, \underline{d}_k$ il cono convesso generato da questi vettori è dato da:

$$C = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \underline{d}_j \; : \; \lambda_j \geq 0 \right\}$$



Direzioni estreme di un poliedro

Definizione.
Una direzione $\underline{d}$ di un poliedro X, è una **direzione estrema** di X se e solo se non è esprimibile come combinazione conica di altre direzioni di X.

Come si calcolano le direzioni di un poliedro?

(Procedimento geometrico)

$$X = \{\underline{x} : A\underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$$ (poliedro)

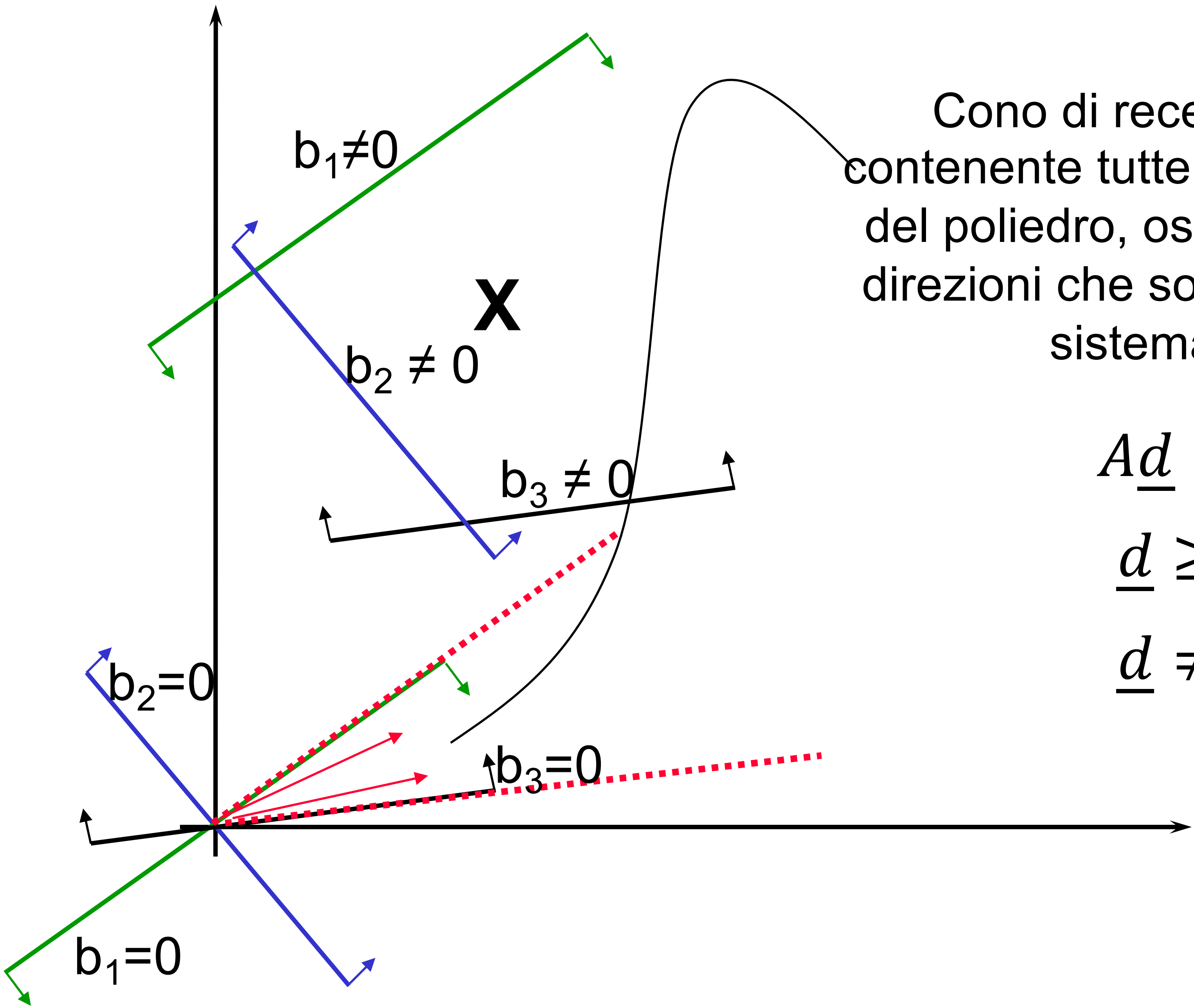
Abbiamo visto che *d* è una a direzione del poliedro se:

$$A\underline{d} \leq \underline{0}$$

$$\underline{d} \geq \underline{0}$$

$$\underline{d} \neq \underline{0}$$

Questo è un sistema omogeneo che definisce un cono poliedrico (detto **cono di recessione**) ottenuto traslando gli iperpiani che definiscono X parallelamente a se stessi fino all'origine

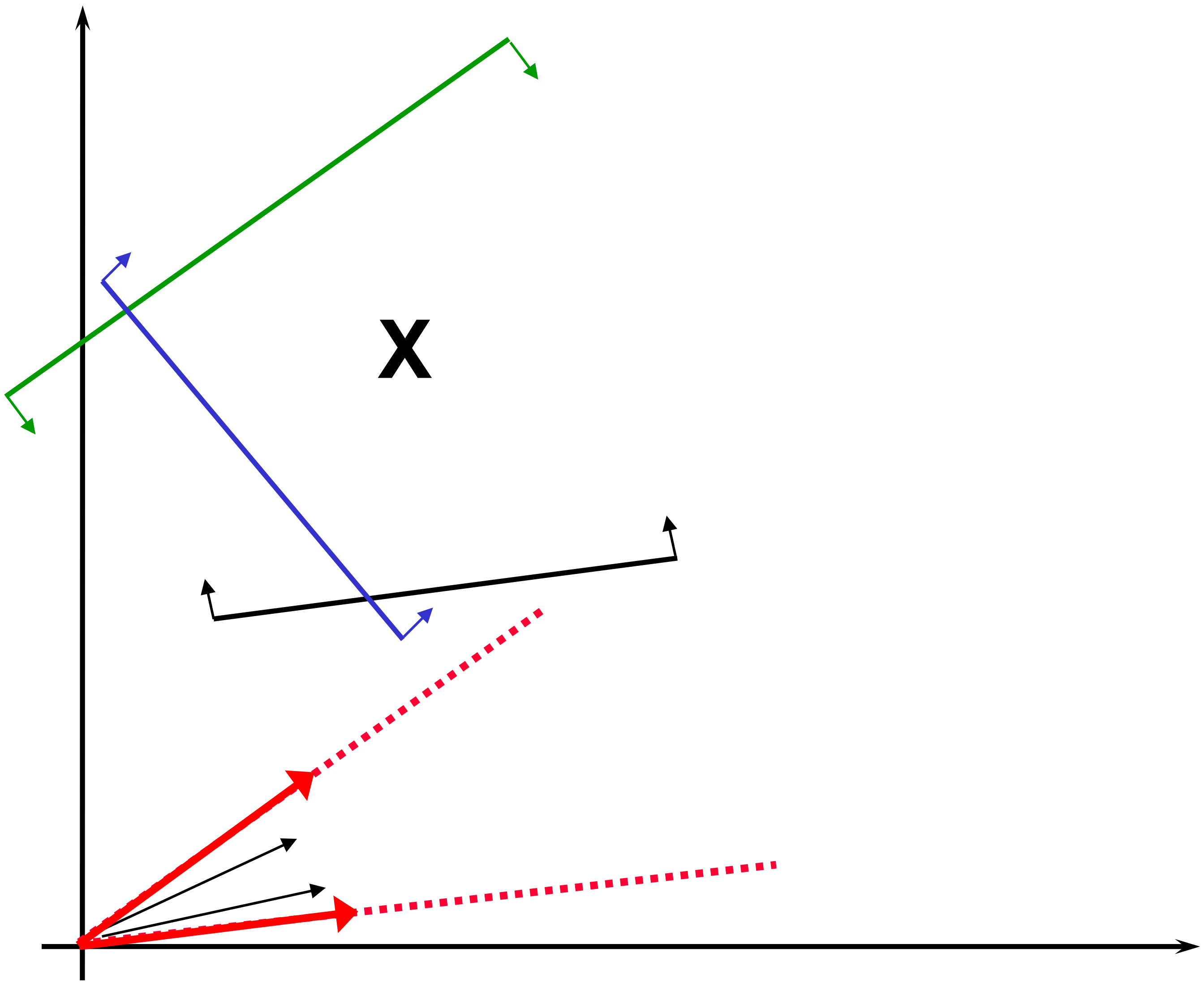


Cono di recessione contenente tutte le direzioni del poliedro, ossia tutte le direzioni che soddisfano il sistema:

$$A\underline{d} \leq \underline{0}$$

$$\underline{d} \geq \underline{0}$$

$$\underline{d} \neq \underline{0}$$



Direzioni estreme del poliedro (direzioni estreme del cono di recessione)

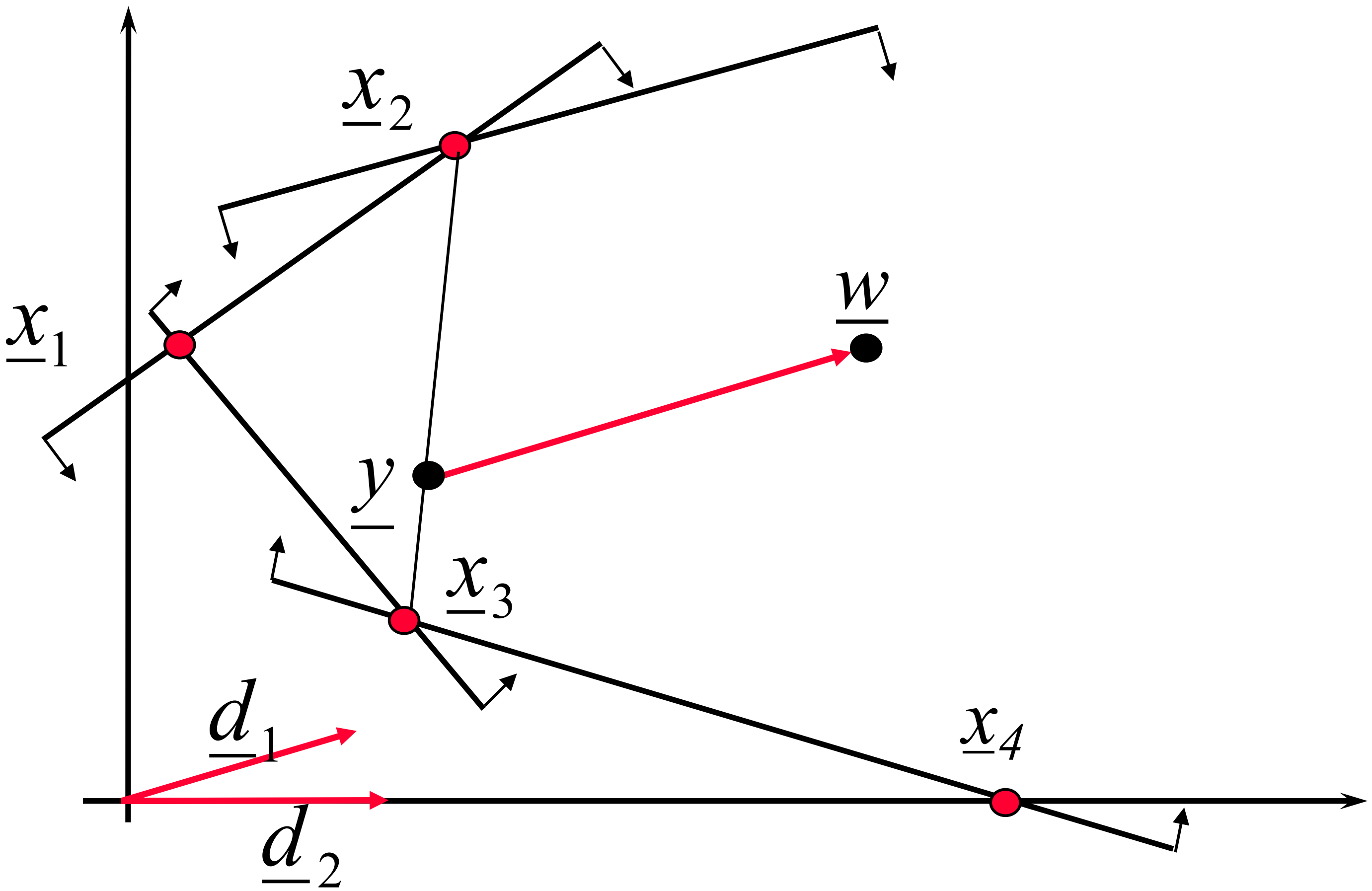
Teorema (di rappresentazione di poliedri)

Dato un poliedro X non vuoto con punti estremi $\underline{x}_i$ con $i=1,\ldots,k$ e direzioni estreme $\underline{d}_j$ con $j=1,\ldots,t$, ogni punto $\underline{x} \in X$ può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X e combinazione lineare non negativa (conica) delle sue direzioni estreme:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i + \sum_{j=1}^{t} \mu_j \underline{d}_j$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \qquad \lambda_i \geq 0, \qquad i = 1,2,\ldots k$$

$$\mu_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,t$$



$$\underline{y} = \lambda \underline{x}_2 + (1-\lambda)\underline{x}_3 \qquad \lambda \in [0,1]$$

$$\underline{w} = \underline{y} + \mu \underline{d}_1 \qquad \mu \geq 0$$

quindi: $\underline{w} = \lambda \underline{x}_2 + (1-\lambda)\underline{x}_3 + \mu \underline{d}_1$

Soluzione dei problemi di PL

Consideriamo il problema (PL) in Forma Standard

$$\min z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

Siano $\underline{x}_i$, con $i = 1,2,\ldots,k$, i punti estremi e $\underline{d}_j$, con $j = 1,2,\ldots,t$ le direzioni estreme di X

Ogni punto $\underline{x} \in X$ può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X e combinazione lineare non negativa delle sue direzioni estreme:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i + \sum_{j=1}^{t} \mu_j \underline{d}_j$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \qquad \lambda_i \geq 0, \qquad i = 1,2,\ldots k$$

$$\mu_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,t$$

Possiamo trasformare il problema di PL in un nuovo problema con incognite:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \text{ e } \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t$$

$$\min z = \sum_{i=1}^{k} (\underline{c}^T \underline{x}_i)\lambda_i + \sum_{j=1}^{t} (\underline{c}^T \underline{d}_j)\mu_j$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1,2, \ldots k, \qquad \mu_j \geq 0 \quad j = 1,2, \ldots, t$$

Nota:

1. se esiste una direzione $\underline{d}_j$ tale che $\underline{c}^T \underline{d}_j < 0 \Rightarrow$ *l'ottimo del problema è illimitato*

2. se $\underline{c}^T \underline{d}_j \geq 0$ per ogni $\underline{d}_j \Rightarrow$

   - *le corrispondenti variabili $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t$ sono scelte uguali a zero*

   - *per minimizzare il resto della sommatoria basta calcolare tutti i valori $\underline{c}^T \underline{x}_i$, scegliere il minimo ad esempio $\underline{c}^T \underline{x}_p$ e fissare $\lambda_p = 1$ e tutti gli altri uguali a zero*

RIASSUMENDO:

1. la soluzione ottima di un problema di minimo è finita se e solo se $\underline{c}^T \underline{d}_j \geq 0$ per ogni $\underline{d}_j$

2. in questo caso una soluzione ottima si trova su uno dei vertici del poliedro

3. se esistono più vertici ottimi allora ogni combinazione convessa di questi punti è una soluzione ottima

Soluzione dei problemi di PL: esempio

$$\min z = x_1 - 3x_2$$

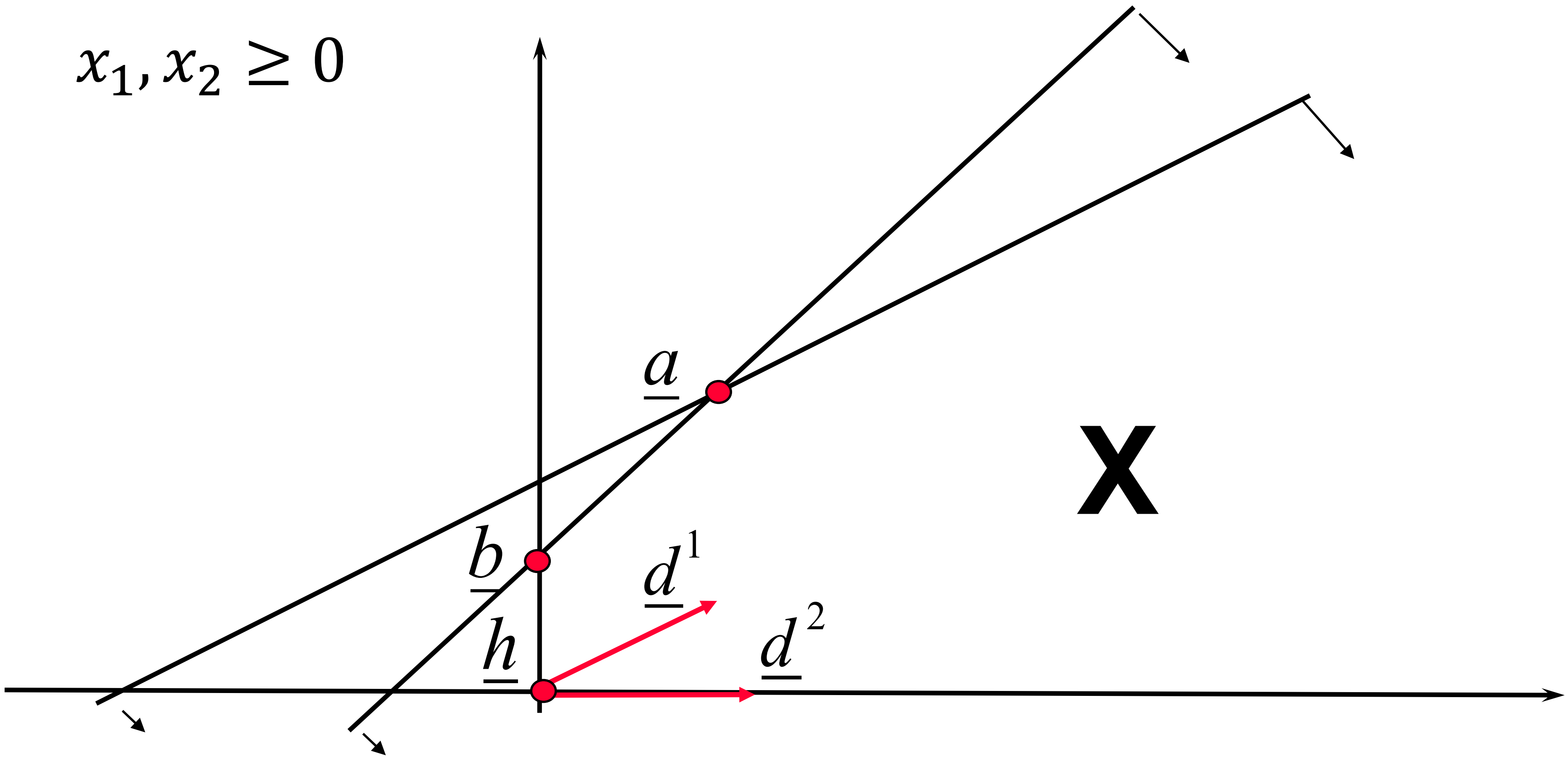
$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Calcoliamo punti estremi

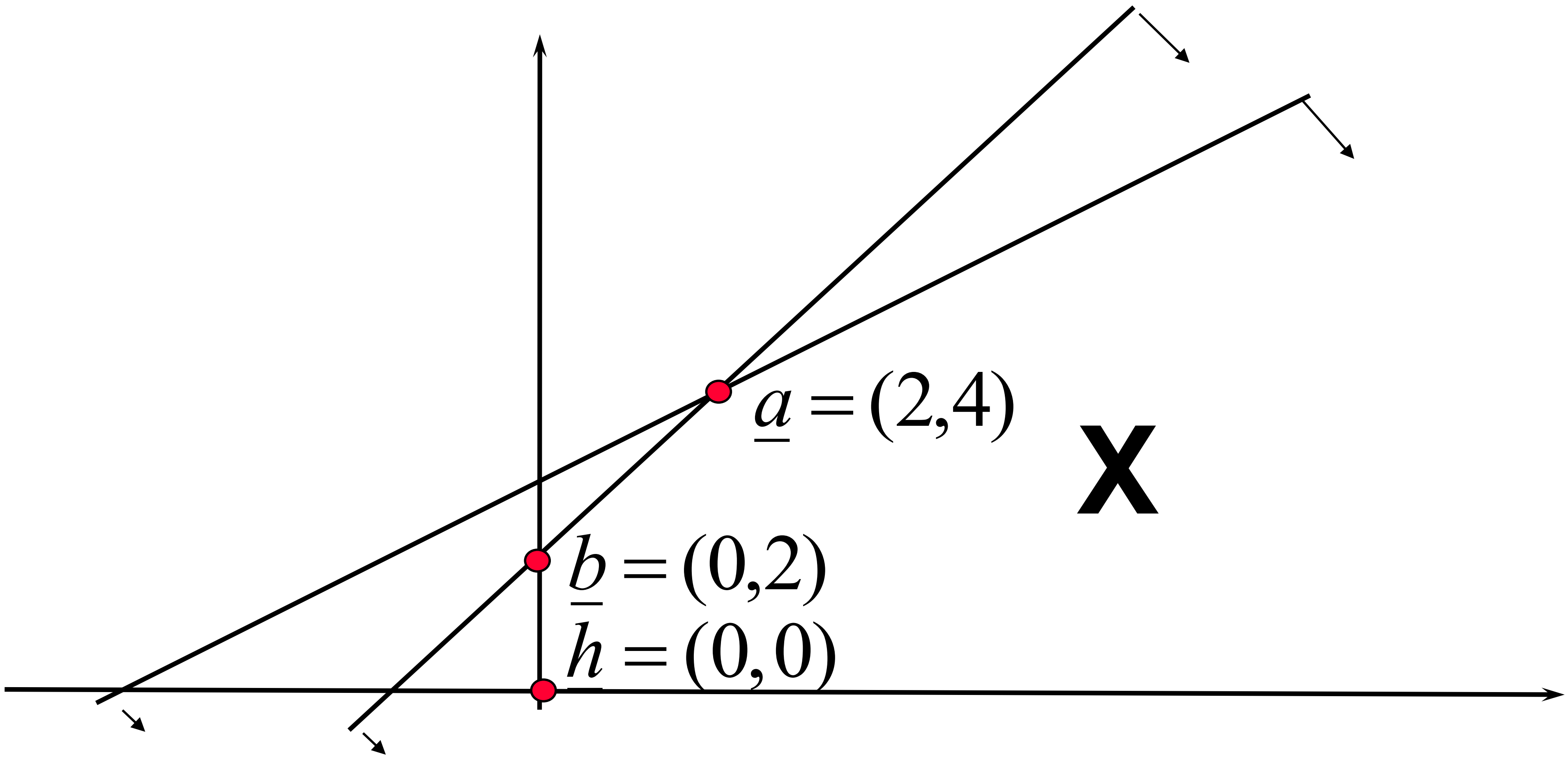
e direzioni estreme



Soluzione dei problemi di PL: esempio(2)

$-x_1 + x_2 = 2;\ x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 2 \quad (\underline{b})$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 2 \Longrightarrow x_2 = 2 + x_1 \\ -x_1 + 2x_2 = 6 \Longrightarrow -x_1 + 4 + 2x_2 = 6 \Longrightarrow x_1 = 2, x_2 = 4 \end{cases} \quad (\underline{a})$$



Soluzione dei problemi di PL: esempio(3)

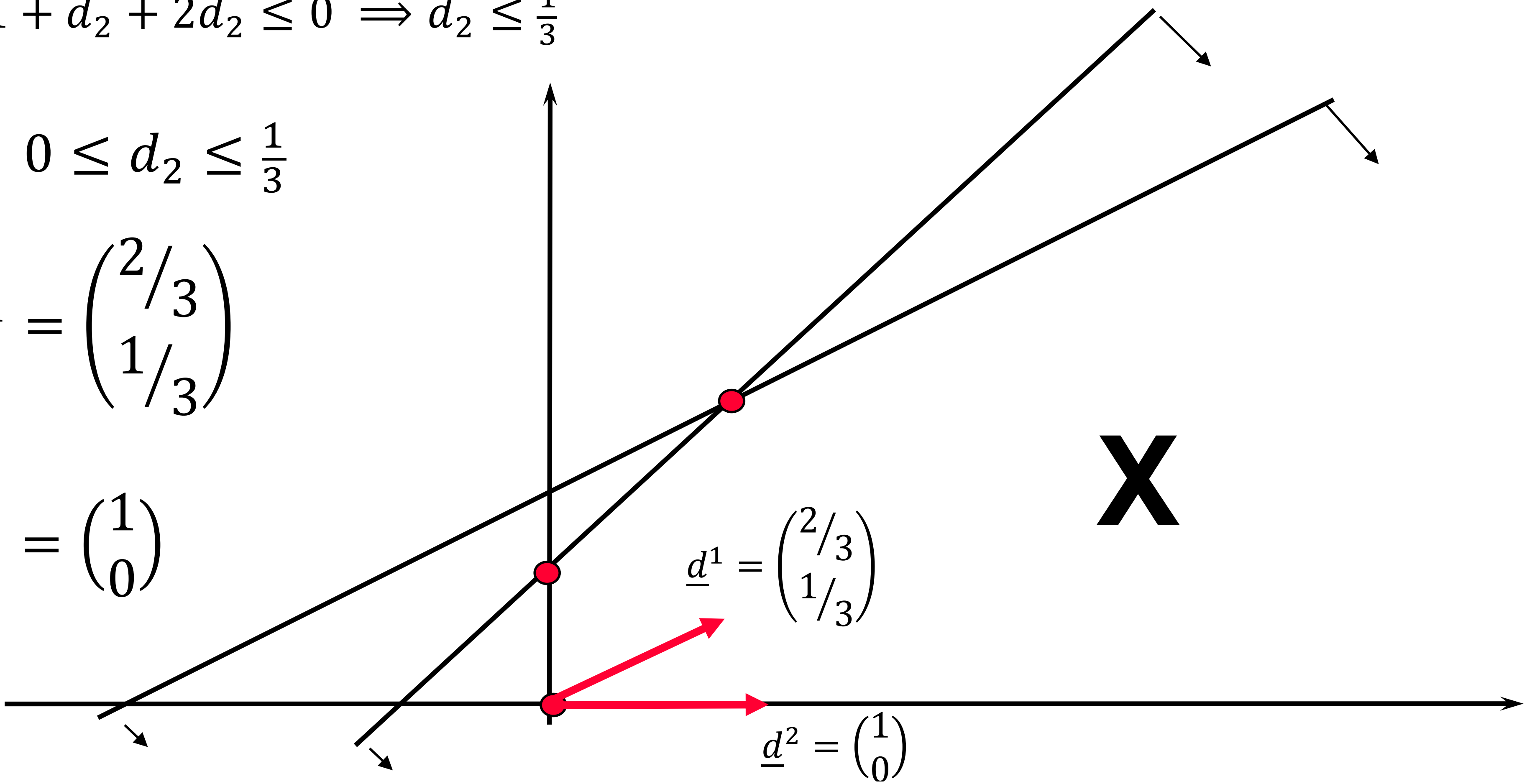
$$D = \left\{ \begin{matrix} (d_{1,}d_2): -d_1 + d_2 \leq 0, -d_1 + 2d_2 \leq 0, d_1 + d_2 = 1 \\ d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{cases} d_1 = 1 - d_2 \\ -1 + d_2 + d_2 \leq 0 \quad \Rightarrow \; d_2 \leq \frac{1}{2} \\ -1 + d_2 + 2d_2 \leq 0 \; \Rightarrow d_2 \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$0 \leq d_2 \leq \frac{1}{3}$$

$$\underline{d}^1 = \begin{pmatrix} {}^2/_3 \\ {}^1/_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{d}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Soluzione dei problemi di PL: esempio(4)

$$\min z = x_1 - 3x_2 \quad \Longrightarrow \quad \underline{c}^T = (1, -3)$$

$$\underline{c}^T \underline{h} = (1, -3)\binom{0}{0} = 0; \qquad \underline{c}^T \underline{d}^1 = (1, -3)\binom{2/3}{1/3} = -\frac{1}{3}$$

$$\underline{c}^T \underline{b} = (1, -3)\binom{0}{2} = -6; \qquad \underline{c}^T \underline{d}^2 = (1, -3)\binom{1}{0} = 1$$

$$\underline{c}^T \underline{a} = (1, -3)\binom{2}{4} = -10;$$

$$\min 0\lambda_1 - 6\lambda_2 - 10\lambda_3 - \frac{1}{3}\mu_1 + \mu_2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0$$

Ottimo illimitato

(facendo tendere μ_1 a ∞ la f.o. tende a - ∞ indipendentemente dai valori scelti per le altre variabili)

Soluzione dei problemi di PL: esempio(5)

Consideriamo una differente funzione obiettivo

$$\min z = 4x_1 - x_2 \quad \Longrightarrow \quad \underline{c}^T = (4, -1)$$

$$\underline{c}^T \underline{h} = (4, -1) \binom{0}{0} = 0; \qquad \underline{c}^T \underline{d}^1 = (4, -1) \binom{2/3}{1/3} = \frac{7}{3}$$

$$\underline{c}^T \underline{b} = (4, -1) \binom{0}{2} = -2; \qquad \underline{c}^T \underline{d}^2 = (4, -1) \binom{1}{0} = 4$$

$$\underline{c}^T \underline{a} = (4, -1) \binom{2}{4} = 4;$$

$$\min 0\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + \frac{7}{3}\mu_1 + 4\mu_2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0$$

Ottimo finito di valore -2 in corrispondenza del vertice <u>b</u> ottenuto assegnando alle variabili i valori

$\lambda_1, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 = 0$ **e** $\lambda_2 = 1$