

Esercizio 1

Descrivere una riduzione polinomiale da 3SAT a INDEPENDENT SET.

DEFINIZIONE DEI PROBLEMI 3SAT e INDEPENDENT SET

▷ 3SAT

- * VARIABILE BOOLEANA : variabile che può assumere valore 0 o 1
- * LETTERALE : variabile booleana o la sua negazione (x_i o \bar{x}_i)
- * CLAUSOLA : OR di letterali ($C_i = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$)
- * FORMA NORMALE CONGIUNTIVA (CNF) : formula booleana ϕ descritta da un AND di clausole.
($\phi = C_1 \wedge C_2$)

SAT : data una CNF ϕ , esiste un assegnamento di verità alle sue variabili che la soddisfa.

$\{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ è una formula booleana soddisfacibile} \}$

3SAT : SAT dove ogni clausola contiene esattamente tre letterali.

$\{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ è una formula 3CNF soddisfacibile} \}$

▷ INDEPENDENT - SET

Dato un grafo $G = (V, E)$ e un intero k , esiste un sottoinsieme di vertici $S \subseteq V$ tale che $|S| \geq k$ e, per ogni arco, al più uno dei due estremi è in S .

3SAT \leq_p INDEPENDENT SET

Data un'istanza ϕ di 3SAT, costruiamo un'istanza (G, k) di INDEPENDENT-SET che ha un insieme indipendente di dimensione k se e solo se ϕ è soddisfacibile.

COSTRUZIONE DELL'ISTANZA

- * G contiene 3 vertici per ogni clausola, uno per ogni letterale
- * Connettiamo i 3 letterali di ogni clausola in un triangolo
- * Connettiamo ogni letterale al suo negato.

FATTO

G contiene un independent set di dimensione $k = |\Phi|$ se Φ è soddisfacibile (dove $|\Phi|$ indica il numero di clausole di Φ)

DIMOSTRAZIONE

\Rightarrow Sia S un insieme indipendente di dimensione k .
Allora,

1. S deve contenere ESATTAMENTE un vertice per ogni triangolo.
 - * per massimizzare il valore di k , consideriamo almeno un vertice per triangolo. Non possiamo prenderne più di 1 poiché sono collegati tra loro.
2. S non può contenere due vertici associati a un letterale e al suo negato.

Poniamo i letterali associati ai vertici nell'insieme S a TRUE.

Questo è un assegnamento di verità consistente e tutte le clausole sono soddisfatte.

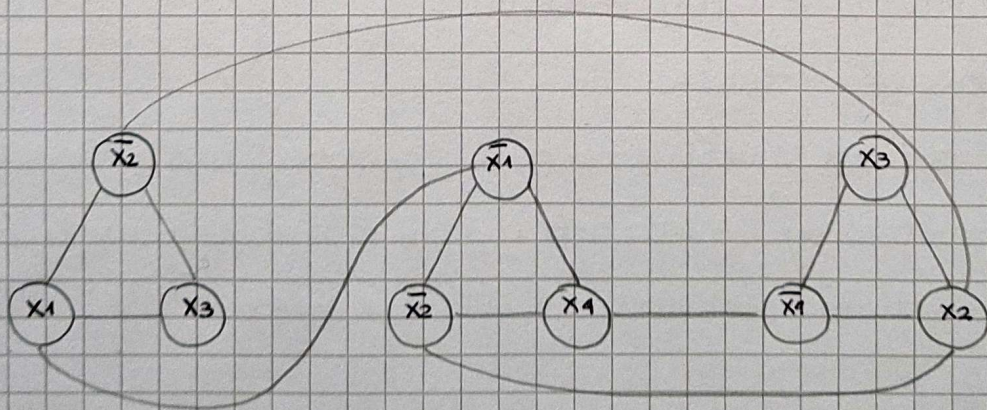
\Leftarrow Dato un assegnamento di verità alle variabili di Φ che lo soddisfa, selezioniamo un letterale TRUE per ogni triangolo.

I vertici associati a tali letterali rappresentano un insieme indipendente di taglia k .

Data la formula

$$\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$$

trovare una soluzione e determinare l'istanza di INDEPENDENT-SET corrispondente a Φ e la soluzione corrispondente.



$$S = \{x_1, x_4, x_3\}$$

Poniamo $x_1, x_3, x_4 = 1$