Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice) Anno Acc. 2017-2018
Prova scritta - 27 giugno 2018

Nome e Cognome, email: Matricola: **Firma**:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	**Tot.**	7
							SI NO

Leggere le tracce con attenzione!
La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.
È vietato copiare, collaborare o comunicare con altri studenti. È vietato l'utilizzo di libri, appunti o lucidi.

I risultati della prova scritta e le informazioni per la conclusione dell'esame saranno pubblicati sulla piattaforma e-learning.

1. *(15 punti)*

   (1) *(7 punti)*
   Fornire le definizioni di funzione di transizione estesa e di linguaggio riconosciuto da un automa finito non deterministico.

   (2) *(8 punti)*
   Si consideri l'automa finito non deterministico $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, dove $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $F = \{q_2\}$ e la cui funzione di transizione δ è definita dalla tabella seguente.

	a	b	c	ϵ
q_0	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

   È vero che $\mathcal{A}$ accetta ogni stringa di lunghezza due che inizia per a? Motivare la risposta, utilizzando la funzione di transizione estesa o la definizione formale di computazione di un automa. Risposte non motivate non saranno valutate.

2. *(15 punti)*

   (1) *(7 punti)*
   Fornire la definizione ricorsiva di espressione regolare, indicando con chiarezza il linguaggio associato.

   (2) *(8 punti)*
   Mostrare che l'espressione $E = (aa)^*b \cup (ab)^*a$ è ottenuta mediante la definizione fornita al punto precedente. Descrivere il linguaggio denotato da $E = (aa)^*b \cup (ab)^*a$.

3. *(15 punti)*

   Dimostrare formalmente che ogni linguaggio regolare è decidibile. Dato un DFA $\mathcal{A}$, occorre definire ogni termine della settupla del decider che riconosce lo stesso linguaggio di $\mathcal{A}$.

4. *(15 punti)*

   (1) *(7 punti)*
   Si consideri la seguente MdT $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$, dove $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_{accept}, q_{reject}\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \sqcup\}$ e la funzione $\delta : (Q \setminus \{q_{accept}, q_{reject}\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ è definita come segue

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, a) &= (q_0, b, R), \quad \delta(q_0, b) = (q_1, b, R), \quad \delta(q_0, \sqcup) = (q_{reject}, \sqcup, R), \\
\delta(q_1, a) &= (q_1, a, R), \quad \delta(q_1, b) = (q_1, b, R), \quad \delta(q_1, \sqcup) = (q_2, \sqcup, L), \\
\delta(q_2, a) &= (q_3, a, R), \quad \delta(q_2, b) = (q_3, b, L), \quad \delta(q_2, \sqcup) = (q_{reject}, \sqcup, R) \\
\delta(q_3, a) &= (q_{accept}, b, R), \quad \delta(q_3, b) = (q_{reject}, b, R), \quad \delta(q_3, \sqcup) = (q_{accept}, \sqcup, R)
\end{aligned}
$$

   Descrivere il diagramma di stato di M e la sua computazione, dalla configurazione iniziale a una configurazione di arresto, sull'input *abba*. Occorre specificare tutti i passi della computazione e tutte le configurazioni intermedie che intervengono nella computazione.

   (2) *(8 punti)*
   Fornire la definizione di linguaggio riconosciuto da una macchina di Turing.

5. *(15 punti)*
   Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, con insieme V di nodi e insieme E di archi. Un sottoinsieme V' di nodi di G è un *independent set* in G se per ogni u, v in V', la coppia (u, v) non è un arco, cioè u e v non sono adiacenti.

   (a) *(5 punti)*
   Definire il linguaggio $INDEPENDENT\text{-}SET$ associato al seguente problema di decisione:

   > Sia G un grafo non orientato e k un intero positivo. G ha un independent set di cardinalità k?

   (b) *(10 punti)*
   Provare che il linguaggio $INDEPENDENT\text{-}SET$ è in NP.

6. *(15 punti)*

   (a) *(8 punti)*
   Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, si consideri il grafo non orientato $G' = (V, E')$, con

$$E' = \{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v \text{ e } (u, v) \notin E\}.$$

   Provare formalmente che la funzione f che associa alla stringa $\langle G, k\rangle$ la stringa $\langle G', k\rangle$, è una riduzione polinomiale da $CLIQUE$ a $INDEPENDENT\text{-}SET$.

   (b) *(7 punti)*
   Utilizzando (a) e (b) del precedente esercizio, possiamo concludere che $INDEPENDENT\text{-}SET$ è NP-completo? Motivare la risposta. Risposte non motivate non saranno valutate.

7. Un'espressione booleana ϕ è detta essere **in forma normale disgiuntiva** o **espressione booleana DNF** se è un OR di AND di letterali. Cioè ϕ è della forma $\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant n} C_i = C_1 \vee \ldots \vee C_n$, dove i disgiunti hanno la forma $C_i = \bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant k_i} l_{i,j}$, con $l_{i,j}$ letterali:

$$\phi = (l_{1,1} \wedge \ldots \wedge l_{1,k_1}) \vee \ldots \vee (l_{n,1} \wedge \ldots \wedge l_{n,k_n}).$$

   Ad esempio $(x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3)$ è un'espressione booleana in forma normale disgiuntiva. Si consideri il linguaggio SAT_{DNF}, così definito:

$$SAT_{DNF} = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ è un'espressione booleana in forma normale disgiuntiva e } \phi \text{ è soddisfacibile}\}.$$

   Dimostrare che SAT_{DNF} appartiene alla classe P.