Lezioni di Ricerca Operativa

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 10

Algoritmo del Simplesso:
- Coefficienti di costo ridotto
- Condizioni di ottimalità
- Test dei minimi rapporti
- Cambio di base

R. Cerulli – F. Carrabs

Calcolo della soluzione ottima di un problema di PL.

Consideriamo il problema (PL) in Forma Standard

$$\min z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

Data una base B ammissibile, partizioniamo sia la matrice A che il vettore delle incognite $\underline{x}$ come segue:

$$A = [A_B \mid A_N] \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m \; componenti \\ n - m \; componenti \end{matrix}$$

Il sistema di equazioni lineari $A\underline{x} = \underline{b}$ si può riscrivere come

$$A_B \underline{x}_B + A_N \underline{x}_N = \underline{b} \Longrightarrow A_B \underline{x}_B = \underline{b} - A_N \underline{x}_N \Longrightarrow \underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N$$

Calcolo della soluzione ottima di un problema di PL.

Riscriviamo anche la funzione obiettivo come:

$$z = \underline{c}^T \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{c}_B^T & \underline{c}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} = \underline{c}_B^T \underline{x}_B + \underline{c}_N^T \underline{x}_N \qquad (1)$$

Sostituendo in (1) l'espressione delle variabili di base:

$$\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N \qquad (2)$$

otteniamo: $$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N \qquad (3)$$

Il valore della funzione obiettivo corrispondente alla base *B* è:

$$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b}$$

Le relazioni (2) e (3) esprimono rispettivamente i vincoli e la funzione obiettivo in funzione delle variabili fuori base.

$$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N$$

$$\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N$$

Indichiamo con $z_0 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b}$, $\bar{\underline{b}} = A_B^{-1} \underline{b}$ e poichè $A_N \underline{x}_N = \sum_{j \in N} \underline{a}_j x_j$ otteniamo:

$$z = z_0 - \sum_{j \in N} \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j$$

$$\underline{x}_B = \bar{\underline{b}} - \sum_{j \in N} A_B^{-1} \underline{a}_j x_j$$

dove $\underline{a}_j$ è la colonna di A che moltiplica la variabile fuori base x_j.

$$z = z_0 - \sum_{j \in N} \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j$$

Ponendo $z_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j$, la funzione obiettivo diventa:

$$z = z_0 - \sum_{j \in N} z_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j$$

I coefficienti $(z_j - c_j)$ vengono detti **coefficienti di costo ridotto**

Infine fissato $\underline{y}_j = A_B^{-1} \underline{a}_j$ i vincoli diventano:

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} A_B^{-1} \underline{a}_j x_j = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j$$

Forma canonica in funzione di una base B

Consideriamo il problema (PL) in Forma Standard

$$\min z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

Data una base B ammissibile, riscriviamo il problema in funzione di B come segue:

$$\min z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j$$

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j$$

$$\underline{x} \geq 0$$

$$z_0 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b}$$

$$z_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j$$

$$\underline{\bar{b}} = A_B^{-1} \underline{b}$$

$$\underline{y}_j = A_B^{-1} \underline{a}_j$$

Verifichiamo se la soluzione di base corrente è ottima o può essere migliorata

Consideriamo la funzione obiettivo: $$min\, z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j$$

Supponiamo che esista un coefficiente $k \in N$ tale che:

$$z_k - c_k > 0$$

Verifichiamo come cambia il valore della funzione obiettivo incrementando la variabile fuori base x_k che è attualmente nulla.

$$z = z_0 - \overbrace{(z_k - c_k)}^{>0} \underbrace{x_k}_{>0}$$

La funzione obiettivo migliora !

Teorema (Condizione di ottimalità)

Una soluzione di base non degenere di un problema di PL è ottima se e solo se:

1) $\bar{b}_i \geq 0$ $\quad$ *i=1…,m* $\quad$ (ammissibile)

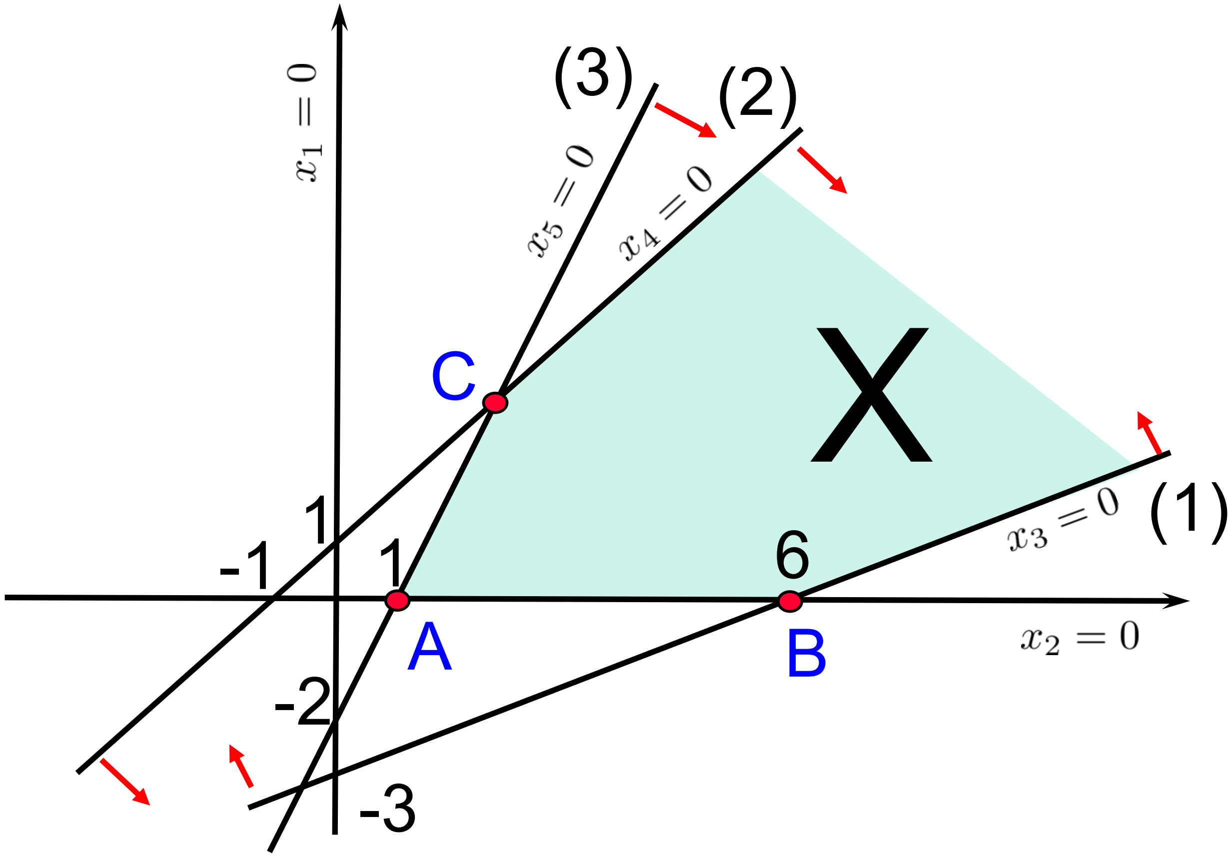
2) $z_j - c_j \leq 0 \quad \forall j \in N$ $\quad$ (non migliorabile)

- Nel caso di soluzione degenere possono esistere soluzioni ottime in cui il punto (2) del teorema non è soddisfatto!

- Tuttavia, se un problema ammette una soluzione ottima finita allora ammette una soluzione di base ottima che soddisfa le condizioni (1) e (2) del teorema.

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$



Forma Standard

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 & = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 & = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 & = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0
\end{array}$$

Verificare algebricamente se la soluzione di base associata al punto A soddisfa il test di ottimalità.

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 & = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 & = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 & = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 &
\end{array}
$$

$$
A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
A_{B_A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
A_{B_A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

$B_A=\{1,3,4\}$ $N_A=\{2,5\}$ $\underline{c}_B^T=[3,0,0]$ $z_j - cj = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - cj$

$$
z_2 - c_2 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_2 - c_2 = (3,0,0) A_B^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = (0,0,{}^{3}\!/\!{}_{2}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = -{}^{3}\!/\!{}_{2} - 1 = -{}^{5}\!/\!{}_{2}
$$

$$
z_5 - c_5 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_5 - c_5 = (3,0,0) A_B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = (0,0,{}^{3}\!/\!{}_{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -{}^{3}\!/\!{}_{2} - 0 = -{}^{3}\!/\!{}_{2}
$$

$$min\ z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j$$

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j$$

$$\underline{x} \geq 0$$

- Poichè incrementando il valore della variabile fuori base x_k il valore della funzione obiettivo migliora, si potrebbe pensare di aumentare indefinitivamente x_k.

- Tuttavia, aumentando x_k anche il vettore delle variabili in base $\underline{x}_B$ viene modificato in accordo all'equazione dei vincoli.

Dal momento che le x_j sono uguali a zero, per $j \in N\backslash\{k\}$, la relazione:

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j$$

diventa: $$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \underline{y}_k x_k$$

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \underline{y}_k x_k$$

In forma vettoriale:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_r} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

Se $y_{ik} \leq 0 \ \forall i \in B$ allora x_{B_i} cresce al crescere di x_k e così x_{B_i} continua a essere non negativo. (**ottimo illimitato**)

Se esiste una componente i tale che $y_{ik} > 0$ allora x_{B_i} decresce al crescere di x_k.
Il valore di x_k verrà incrementato finché una delle variabili in base assumerà valore zero. Infatti noi vogliamo che:

$$x_{B_1} = \overline{b}_1 - y_{1k}x_k \geq 0$$

$$x_{B_2} = \overline{b}_2 - y_{2k}x_k \geq 0$$

……………………………

……………………………

$$x_{B_m} = \overline{b}_m - y_{mk}x_k \geq 0$$

La variabile x_{B_i} che si azzererà per prima verrà rimossa dalle variabili di base e sarà rimpiazzata dalla variabile x_k.

Possiamo scrivere:

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - \overset{\leq 0}{y_{1k}} x_k \geq 0 \Leftrightarrow \quad \text{sempre}$$

$$x_{B_2} = \bar{b}_2 - \overset{>0}{y_{2k}} x_k \geq 0 \Leftrightarrow x_k \leq \frac{\bar{b}_2}{y_{2k}}$$

....

....

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - \overset{>0}{y_{mk}} x_k \geq 0 \Leftrightarrow x_k \leq \frac{\bar{b}_m}{y_{mk}}$$

Dobbiamo considerare solo i rapporti in cui $y_{ik} > 0$

Quindi, considerando i rapporti in cui $y_{ik} > 0$, il valore assunto dalla variabile x_k sarà:

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1\leq i\leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Il precedente test viene chiamato **test dei minimi rapporti** ed è utilizzato per individuare la variabile in base x_{B_r} che si azzererà per prima, al crescere di x_k, e che quindi uscirà dalla base.

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - y_{1k}x_k \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_1 - y_{1k}\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \geq 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{B_r} = \bar{b}_r - y_{rk}x_k \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_r - y_{rk}\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \geq 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - y_{mk}x_k \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_m - y_{mk}\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \geq 0$$

Riassumendo:

- Fare assumere ad x_k un valore positivo significa portare la variabile x_k in base.
- Nello stesso tempo il valore delle variabili di base:
  - Cresce se $y_{ik} < 0$;
  - Decresce se $y_{ik} > 0$;
  - Non cambia se $y_{ik} = 0$.
- Il valore che assume x_k in base è calcolato tramite il test dei minimi rapporti:

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

- La variabile x_{B_r} esce dalla base.

Il coefficiente y_{rk} è detto **Pivot**, (l'aggiornamento della base si dice **Pivoting**) e viene usato per aggiornare i valori delle variabili in base dopo l'ingresso in base di x_k.

$$x_{B_i} = \overline{b}_i - y_{ik}\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}}$$

$$x_k = \frac{\overline{b}_r}{y_{rk}}$$

La nuova soluzione di base

$$x_j = 0 \quad \forall j \in N' \text{ con } N' = \{B_r\} \cup \mathrm{N} \setminus \{\mathrm{k}\}$$

Le nuove variabili fuori base

Con il cambio delle variabili in base, la nuova matrice di base risulta composta dalle stesse colonne della vecchia base ad eccezione della colonna associata a x_{B_r} che è stata sostituita dalla colonna associata a x_k.

La nuova soluzione di base (a meno di casi degeneri) ha migliorato il valore della funzione obiettivo:

$$z = z_0 - \overbrace{\underbrace{(z_k - c_k)}_{>0}\frac{\bar{b}_r}{\underbrace{y_{rk}}_{>0}}}^{>0} < z_0$$