ESERCIZIO 1

Fornire la definizione di insieme numerabile.

Un insieme si dice numerabile se è finito o se ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.

Dimostrare che l'insieme di tutte le coppie (i,j) dove $i,j \in \mathbb{N}$ e $i<j$ risulta numerabile.

1. Scriviamo tutte le coppie (i,j), con $i<j$ e $i,j \in \mathbb{N}$ e le raggruppiamo per il valore della somma $i+j$.

In altre parole, definiamo gli insiemi S_k contenenti le coppie (i,j) con $i<j$ e $k=i+j$.

$S_1 = \{(0,1)\}$

$S_2 = \{(0,2)\}$

$S_3 = \{(0,3),(1,2)\}$

$|$

$S_k = \{(i,j) \mid i<j,\ i+j=k\}$

$i \backslash j$	0	1	2	3	...
0		(0,1)	(0,2)	(0,3)	
1			(1,2)	(1,3)	
2				(2,3)	

2. Ordiniamo gli insiemi in base al valore della somma $i+j$ e ordiniamo gli elementi di ogni insieme in base al valore della prima componente, cioè i.

Trasformiamo, quindi, la matrice infinita in una lista

$(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), \_\_\_\_\_\_$

3. La funzione biettiva $f: (i,j) \to \mathbb{N}$ associa alla coppia (i,j) il suo indice all'interno di questo ordinamento.

La funzione f è definita nel modo seguente:

$$f((i,j)) = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{n}{2} + y \quad \text{con } i+j=k \text{, dove}$$

$i+j$	$f((i,j))$, $y=1$
1	$0+1=1$
2	$(0+1)+1=2$
3	$(0+1+1)+1=3$

* $\sum_{n=1}^{k-1} \frac{n}{2}$ rappresenta il numero di elementi nei blocchi precedenti

* y rappresenta la posizione della coppia (i,j) all'interno dell'insieme $S_{(i+j)}$

Consideriamo che un generico insieme $S_{k=i+j}$ ha $\lceil k/2 \rceil$ coppie. Infatti,

$$\underbrace{(0,1)}_{S_1}, \underbrace{(0,2)}_{S_2}, \underbrace{(0,3)(1,2)}_{S_3}, \underbrace{(0,4)(1,3)}_{S_4}, \underbrace{(0,5)(1,4)(2,3)}_{S_5}\ \underbrace{(0,6)(1,5)(2,4)}_{S_6} \_\_\_\_$$