Lezioni di Ricerca Operativa

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 4

- Problemi di Programmazione Matematica
- Problemi Lineari e Problemi Lineari Interi
- Forma Canonica. Forma Standard

R. Cerulli – F. Carrabs

Problema di Ottimizzazione

Data una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un **problema di Ottimizzazione** (PO) può essere formulato come:

funzione obiettivo

vettore delle variabili decisionali

$$\min f(\underline{x})$$
s.t.
$$\underline{x} \in X$$

insieme delle soluzioni ammissibili

Quindi un problema di Ottimizzazione consiste nel determinare, se esiste, un punto di minimo della funzione f tra i punti dell'insieme X.

Problemi di Programmazione Matematica

Quando l'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di ottimizzazione viene espresso attraverso un sistema di equazioni e disequazioni, tale problema prende il nome di **problema di Programmazione Matematica** (PM).

i-esimo vincolo del sistema

$$\min f(\underline{x})$$
s.t.
$$g_i(\underline{x}) \geq b_i \qquad i=1,\dots,m$$

i-esima componente del vettore dei termini noti

Problemi di Programmazione Lineare

Un problema di Programmazione Matematica è **lineare** quando:

- la funzione obiettivo è lineare: $f(\underline{x}) = \underline{c}^T\underline{x}$
- l'insieme X è espresso in termini di relazioni (uguaglianze e disuguaglianze) lineari

$$\begin{aligned} &\min f(\underline{x}) \\ &\textit{s.t.} \\ &g_i(\underline{x}) \geq b_i \qquad i=1,\dots,m \end{aligned}$$

Forma esplicita

$$\begin{array}{lrrrrl} \min & c_1x_1 & +\, c_2x_2 & +\ldots+ & c_nx_n & \\ \text{s.t.} & a_{11}x_1 & +\, a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & \geq b_1 \\ & a_{21}x_1 & +\, a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & \geq b_2 \\ & a_{m1}x_1 & +\, a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & \geq b_m \end{array}$$

Forma compatta

$$\begin{array}{ll} \min & \underline{c}^T\underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x} \geq \underline{b} \end{array}$$

$$X \rightarrow \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} \geq \underline{b}\}$$

variabili $\underline{x}$ continue

Programmazione Lineare Continua (PL)

$$X \rightarrow \{\underline{x} \in \mathbb{Z}^n : A\underline{x} \geq \underline{b}\}$$

variabili $\underline{x}$ intere

Programmazione Lineare Intera (PLI)

Esempio

Forma esplicita

$$\min \quad 500x_1 + 700x_2 + 350x_3 + 400x_4 + 200x_5$$

$s.t.$ left hand side right hand side

$$\boxed{8x_1 + 10x_2 + 5x_4 + 7x_5} = \boxed{96}$$

$$5x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 96$$

$$20x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 20x_5 = 384$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Forma compatta

$$\begin{array}{ll} \min & \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq 0 \end{array}$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 500 & 700 & 350 & 400 & 200 \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 0 & 5 & 7 \\ 5 & 12 & 4 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 96 \\ 96 \\ 384 \end{bmatrix}$$

- $\underline{x}$ è il vettore *nx1* delle **variabili decisionali**;
- $\underline{c}$ è il vettore *nx1* dei **coefficienti di costo** della funzione obiettivo;
- $\underline{b}$ è il vettore *mx1* dei **termini noti** dei vincoli;
- A è la matrice *mxn* dei **coefficienti tecnologici**.

Esempio

Forma esplicita

$$\min \quad 500x_1 + 700x_2 + 350x_3 + 400x_4 + 200x_5$$

$s.t.$ left hand side right hand side

$$\boxed{8x_1 + 10x_2 + 5x_4 + 7x_5} = \boxed{96}$$

$$5x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 96$$

$$20x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 20x_5 = 384$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Forma compatta

$$\begin{array}{ll} \min & \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq 0 \end{array}$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 500 & 700 & 350 & 400 & 200 \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 0 & 5 & 7 \\ 5 & 12 & 4 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 96 \\ 96 \\ 384 \end{bmatrix}$$

Combinazione lineare delle colonne di A

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 20 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} 96 \\ 96 \\ 384 \end{bmatrix}$$

Problemi di Programmazione Lineare

Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\min f(\underline{x})$$
$$s.t.$$
$$g_i(\underline{x}) \geq b_i \qquad i=1,\ldots,m$$

un vettore $\underline{x}'$ di $\mathbb{R}^n$:

- **soddisfa** il vincolo $g_i(\underline{x}) \geq b_i$ se $g_i(\underline{x}') \geq b_i$
- **viola** il vincolo $g_i(\underline{x}) \geq b_i$ se $g_i(\underline{x}') < b_i$
- **satura** (o rende attivo) il vincolo $g_i(\underline{x}) \geq b_i$ se $g_i(\underline{x}') = b_i$

Un vettore $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^n$ è **soluzione ammissibile** per il problema di PL se e solo se soddisfa <u>tutti</u> i vincoli del problema.

Soluzioni di un problema di PL

$$\min f(\underline{x})$$
$$\textit{s.t.}$$
$$g_i(\underline{x}) \geq b_i \qquad i=1,\ldots,m$$

Un problema di programmazione lineare risulta:

- **Inammissibile** se la regione ammissibile è vuota ossia $X=\emptyset$.
- **Illimitato inferiormente** (perchè il problema è di minimo) se scelto un qualsiasi scalare k, esiste sempre un punto $\underline{x} \in X$ tale che $f(\underline{x}) < k$.
- **Ammettere soluzione ottima finita** se esiste un punto $\underline{x}^* \in X$ tale che $f(\underline{x}^*) \leq f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in X$.

Definizione (Ottimo Globale)
Un punto $\underline{x}^* \in X$ è un **ottimo globale** per la funzione di minimo $f(\underline{x})$ se e solo se: $f(\underline{x}^*) \leq f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in X$.

Esempio 1: Piano di produzione aziendale

Un’azienda produce tre tipi di elettrodomestici: lavatrici, frigoriferi e forni.

Per produrre una lavatrice occorrono 9 ore di lavorazione sulla macchina M1 e 8 ore di lavorazione sulla macchina M2; mentre per produrre un frigorifero occorrono 11 ore di lavorazione sulla macchina M2; infine per produrre un forno occorrono 4 ore sulla macchina M1 e 6 sulla macchina M2.

La macchina M1 è disponibile per 137 ore settimanali, mentre la macchina M2 è disponibile per 149 ore settimanali. Il numero di forni prodotti non può essere superiore alla somma dei frigoriferi e delle lavatrici prodotte. Tuttavia devono essere prodotti almeno 5 forni. Inoltre il numero di lavatrici prodotte non può essere superiore al numero di frigoriferi prodotti per al più 5 unità.

Il guadagno ottenuto dalla vendita di una lavatrice è di 375 euro, quello ottenuto per un frigorifero è 320 euro e quello per un forno è 170 euro. Si vuole conoscere la quantità di lavatrici, frigoriferi e forni da produrre settimanalmente per massimizzare il guadagno totale nel rispetto dei vincoli di produzione.

a) Si formuli il corrispondente modello di programmazione matematica.

Esempio 1: Piano di produzione aziendale

La prima cosa da fare per poter formulare un problema è individuare le variabili decisionali.

Poiché il nostro obiettivo è quello di definire il numero di lavatrici, frigoriferi e forni da produrre, associamo ad ogni tipo di elettrodomestico una variabile distinta:

x_1 = numero di lavatrici da produrre

x_2 = numero di frigoriferi da produrre

x_3 = numero di forni da produrre

$$\begin{aligned} \max \ z = 375x_1 + 320x_2 + 170x_3 & \\ 9x_1 + 4x_3 &\leq 137 \\ 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 &\leq 149 \\ x_3 &\leq x_1 + x_2 \\ x_3 &\geq 5 \\ x_1 &\leq 5 + x_2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0, intere \end{aligned}$$

Scrivere quali sono i vettori <u>c</u> e <u>b</u> e quale è la matrice A per questo problema.

Esempio 1: Piano di produzione aziendale

$$\begin{aligned} \max \quad 375x_1 + 320x_2 + 170x_3 & \\ 9x_1 + 4x_3 &\leq 137 \\ 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 &\leq 149 \\ x_3 &\leq x_1 + x_2 \\ x_3 &\geq 5 \\ x_1 &\leq 5 + x_2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0, intere \end{aligned}$$

x_1 = numero di lavatrici da produrre

x_2 = numero di frigoriferi da produrre

x_3 = numero di forni da produrre

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}$$

Soluzione ammissibile

$$z = \underline{c}^T \underline{x} = 375 \cdot 9 + 320 \cdot 4 + 170 \cdot 5 = 5505$$

Valore della funzione obiettivo in $\underline{x}$

Ci sono vincoli attivi associati alla soluzione $\underline{x}$?

Forma Canonica di Minimo

Definizione (Forma Canonica di Minimo)

Un problema di programmazione lineare di minimo è in **forma canonica** se tutti i suoi vincoli sono di maggiore o uguale e tutte le sue variabili sono maggiori o uguali a zero.

$$\begin{aligned} \min z = \quad & \underline{c}^T \underline{x} \\ & A\underline{x} \,\underline{\geq}\, \underline{b} \\ & \underline{x} \,\underline{\geq}\, 0,\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Forma Standard di Minimo

Definizione (Forma Standard di Minimo)

Un problema di programmazione lineare di minimo è in **forma standard** se tutti i suoi vincoli sono di uguaglianza e tutte le sue variabili sono maggiori o uguali a zero. Inoltre vale che $\underline{b} \geq \underline{0}$.

$$
\begin{aligned}
\min z = \quad & \underline{c}^T \underline{x} & \\
& A\underline{x} = \underline{b} & (1) \\
& \underline{x} \underline{\geq} 0,\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n & (2)
\end{aligned}
$$

- Un vettore $\underline{x}$ che soddisfano i vincoli (1) rappresenta una **soluzioni** del sistema di equazioni.
- Un vettore $\underline{x}$ che soddisfano i vincoli (1) e (2) rappresenta una **soluzioni ammissibili** del problema di PL.

D'ora in avanti si assumono soddisfatte le seguenti ipotesi:

- $m < n$
- $m = \text{rango}(A)$

L'ipotesi $m<n$ (più variabili che vincoli) non rappresenta una perdita di generalità.

E' noto infatti che il sistema di equazioni lineari (1), se consistente, può:

- ammettere una soluzione unica se $m=n$
- ammettere ∞^{n-m} soluzioni se $m<n$

Solo il secondo caso è significativo dal punto di vista dei problemi di ottimizzazione.

Definizione (Problemi equivalenti)

Due problemi di programmazione lineare (P) e (P'), di minimo (di massimo) sono **equivalenti** se, per ogni soluzione ammissibile $\underline{x}$ di (P) con valore obiettivo z, possiamo costruire una soluzione ammissibile $\underline{x}'$ di (P') con lo stesso valore z e, per ogni soluzione ammissibile $\underline{x}'$ di (P') con valore obiettivo z, possiamo costruire una soluzione ammissibile $\underline{x}$ di (P) con lo stesso valore z.

Osservazione 1

Se due problemi di programmazione lineare sono equivalenti allora i valori delle rispettive soluzioni ottime coincidono.

Osservazione 2

Qualunque problema di PL può essere trasformato in un problema equivalente in forma canonica o standard.

Formulazioni equivalenti:

Funzione Obiettivo

$$\max \ \underline{c}^T \underline{x} \iff -\min \ -\underline{c}^T \underline{x}$$

Esempio

$$\max 3x_1 + 5x_2 \iff -\min \ -3x_1 - 5x_2$$

Formulazioni equivalenti:

Vincoli

$$A\underline{x} \underline{\geq} \underline{b} \quad \Longleftrightarrow \quad -A\underline{x} \underline{\leq} -\underline{b}$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A\underline{x} \underline{\geq} \underline{b} \\ A\underline{x} \underline{\leq} \underline{b} \end{cases}$$

Formulazioni equivalenti: vincoli ≤

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

$$x_{n+i} \geq 0$$

La nuova variabile x_{n+i} introdotta prende il nome di **variabile di slack *(scarto)*** ed il suo valore è pari a:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

Esempio:

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 7 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 7$$

$$x_4 \geq 0$$

Formulazioni equivalenti: vincoli ≥

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

$$x_{n+i} \geq 0$$

La nuova variabile x_{n+i} introdotta prende il nome di **variabile di surplus *(scarto)*** ed il suo valore è pari a:

$$x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$$

Esempio:

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 7 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 7$$

$$x_4 \geq 0$$

Formulazioni equivalenti: variabili non vincolate

x_j n.v. $\quad \Longrightarrow \quad x_j = \left(x_j' - x_j''\right) \quad$ con $\quad x_j' \geq 0, \;\; x_j'' \geq 0$

<u>Sostituiamo</u> la variabile x_j, con la differenza tra x_j' e x_j'', ovunque appaia nel modello matematico (vincoli e funzione obiettivo).

- Ogni soluzione $\underline{\hat{x}}$ del nuovo problema (P') corrisponde ad una soluzione ammissibile $\underline{x}$ del problema originale (P) dove $x_j = \hat{x}_j' - \hat{x}_j''$ ed il valore della funzione obiettivo è lo stesso.

- Ogni soluzione ammissibile $\underline{x}$ del problema originale (P) corrisponde ad una soluzione $\underline{\hat{x}}$ del nuovo problema (P') dove:

  - $\hat{x}_j' = x_j \quad$ e $\quad \hat{x}_j'' = 0 \quad$ se $\quad x_j \geq 0$
  - $\hat{x}_j' = 0 \quad$ e $\quad \hat{x}_j'' = -x_j \quad$ se $\quad x_j < 0$

  I due problemi hanno lo stesso valore della funzione obiettivo a prescindere dal segno della variabile x_j.

Per quanto detto sopra abbiamo che (P) e (P') sono equivalenti.

Formulazioni equivalenti: variabili non vincolate

$$x_j \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad x_j = -x_j' \quad \text{con} \quad x_j' \geq 0$$

Sostituiamo la variabile x_j, con $-x_j'$, ovunque appaia nel modello matematico (vincoli e funzione obiettivo).

- Ogni soluzione $\underline{\hat{x}}$ del nuovo problema (P') corrisponde ad una soluzione ammissibile $\underline{x}$ del problema originale (P) dove $x_j = -\hat{x}_j'$ ed il valore della funzione obiettivo è lo stesso.

- Ogni soluzione ammissibile $\underline{x}$ del problema originale (P) corrisponde ad una soluzione $\underline{\hat{x}}$ del nuovo problema (P') dove $\hat{x}_j' = -x_j$ ed il valore della funzione obiettivo è lo stesso.

Per quanto detto sopra abbiamo che (P) e (P') sono equivalenti.

Esercizio

Scrivere la forma canonica e la forma standard per il seguente problema di programmazione lineare.

$$\max \; x_1 + 3x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned}
-3x_1 - x_2 + x_3 \quad &\leq \quad -3 \\
2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \quad &\geq \quad 4 \\
2x_1 - x_2 \quad &= \quad 2 \\
x_1 \quad &\geq \quad 0 \\
x_2 \quad &\leq \quad 0 \\
x_3 \quad & n.v.
\end{aligned}$$

Esercizio

$$\max \; x_1 + 3x_2 + 3x_3$$

$$\begin{array}{rcl} -3x_1 - x_2 + x_3 & \leq & -3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 & \geq & 4 \\ 2x_1 - x_2 & = & 2 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \leq & 0 \\ x_3 & n.v. & \end{array}$$

Soluzione ottima

$$x_2 = -x_2' = 0$$

$$x_3 = x_3' - x_3'' = 0 - 1 = -1$$

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \underline{x}^* = & [\,1 & 0 & -1\,] \end{array}$$

Valore ottimo

$$z^* = -2$$

Forma standard

$$-\min \; -x_1 + 3x_2' - 3x_3' + 3x_3''$$

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' - x_4 & = & 3 \\ 2x_1 + 3x_2' - 2x_3' + 2x_3'' - x_5 & = & 4 \\ 2x_1 + x_2' & = & 2 \\ x_1, x_2', x_3', x_3'', x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Soluzione ottima

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2' & x_3' & x_3'' & x_4 & x_5 \\ \underline{x}^* = & [\,1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\,] \end{array}$$

Valore ottimo (trascurando il meno davanti la f.o.)

$$z^* = 2$$

tramite il segno meno davanti alla funzione obiettivo si ottiene il valore ottimo (-2) del problema di partenza.