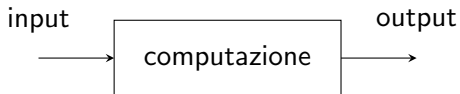


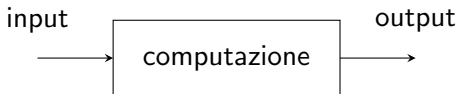
# Computazione

- Computazione: un processo che associa un input a un output

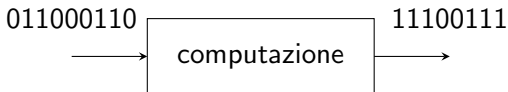


# Computazione

- Computazione: un processo che associa un input a un output

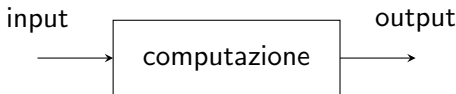


- Rappresentiamo numeri, testi, immagini, ... usando stringhe di 0 e 1.

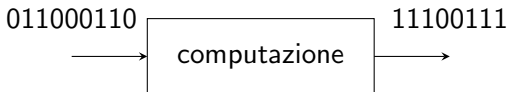


# Computazione

- Computazione: un processo che associa un input a un output



- Rappresentiamo numeri, testi, immagini, ... usando stringhe di 0 e 1.



- Calcolare una funzione  $F : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ .  
Ciò comprende non solo calcoli aritmetici, ma moltissimi altri compiti che sorgono in settori diversi come il calcolo scientifico, l'intelligenza artificiale, l'elaborazione delle immagini, data mining, ....

# Insiemi

- **Def.** Un insieme è una collezione non ordinata di oggetti o elementi

Gli elementi di un insieme sono scritti tra parentesi graffe { }

Esempio:  $\{0, 3, 5, 15\}$

# Insiemi

- **Def.** Un insieme è una collezione non ordinata di oggetti o elementi  
Gli elementi di un insieme sono scritti tra parentesi graffe  $\{ \quad \}$   
Esempio:  $\{0, 3, 5, 15\}$
- **Def.** Per ogni insieme  $S$ ,  $w \in S$  indica che  $w$  è un elemento di  $S$   
Nota: Notazione di insiemi per specificare un insieme

$$A = \{x | x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$$

$\mathbb{R}$  è l'insieme dei numeri reali,  $f$  è una qualche funzione

# Insiemi

- **Ordine e ridondanza non contano**  
 $\{a, b, c\}$  ha elementi  $a, b, c$ .  
 $\{a, b, c\}$  e  $\{b, a, b, c, c\}$  sono lo stesso insieme.

# Insiemi

- **Ordine e ridondanza non contano**  
 $\{a, b, c\}$  ha elementi  $a, b, c$ .  
 $\{a, b, c\}$  e  $\{b, a, b, c, c\}$  sono lo stesso insieme.
- $\{a\}$  ed  $a$  **sono cose diverse**  
 $\{a\}$  insieme che contiene solo elemento  $a$ .

# Insiemi

- **Es:** L'insieme dei numeri naturali è  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- **Es:** L'insieme dei numeri pari è

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\} = \{2n \mid n = 0, 1, 2, 3, \dots\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

L'insieme dei pari positivi è

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\} = \{2n \mid n = 1, 2, 3, \dots\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$$

L'insieme dei numeri dispari è

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\} = \{2n+1 \mid n = 0, 1, 2, \dots\} = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- **Es:** Se  $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , allora  $4 \in A$ , ma  $5 \notin A$ .



# Cardinalità

- **Def.** La cardinalità  $|S|$  di  $S$  è il numero di elementi in  $S$ .

- **Es.**

Se  $S = \{ab, bb\}$  allora  $|S| = 2$

Se  $T = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}, n > 1\}$ , allora  $|T| = \infty$

Se  $T = \emptyset$ , allora  $|T| = 0$

# Insiemi Finiti ed Infiniti

- **Def.** Un insieme  $S$  è finito se esiste  $n \geq 0$  tale che  $|S| \leq n$ ,  
Se  $S$  non è finito, allora è detto infinito.
- **Es.**  
Se  $S = \{ab, bb\}$  allora  $|S| = 2$  e  $S$  è finito  
Se  $T = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}, n > 1\}$ , allora  $|T| = \infty$  e  $T$  è infinito

# Alfabeto

- Un **alfabeto** è un insieme finito di elementi fondamentali (chiamati lettere o simboli)
- **Es:** L' alfabeto delle lettere romane minuscole è

$$\Sigma = \{a, b, c, \dots, z\}$$

- **Es:** L' alfabeto delle cifre arabe è

$$\Sigma = \{0, 1, \dots, 9\}$$

- **Es:** L' alfabeto binario è

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

# Stringhe

- Una **stringa** su un alfabeto è una sequenza finita di simboli dell' alfabeto.
- **Es:** gatto, cibo, c, babbz sono stringhe sull' alfabeto  $A = \{a, b, c, \dots, z\}$ .

0131 è una stringa sull' alfabeto  $B = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ .

0101 è una stringa sull' alfabeto  $B = \{0, 1\}$ .

# Stringhe

- Data una stringa  $s$ , la lunghezza di  $s$  è il numero di simboli in  $s$ .
- La lunghezza di  $s$  è denotata con  $lunghezza(s)$  o  $|s|$ .
- **Es:**  $lunghezza(ciao) = |ciao| = 4$ .
- La **stringa vuota**, indicata con  $\epsilon$ , è la stringa contenente nessun simbolo,  $|\epsilon| = 0$ .

# Kleene Star

- **Def.** Dato l'alfabeto  $\Sigma$ ,  
la chiusura di Kleene di  $\Sigma$ , indicata con  $\Sigma^*$ , è l'insieme di  
tutte le possibili stringhe su  $\Sigma$ .
- **Es:** se  $\Sigma = \{a, b\}$ , allora  
 $\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, \dots\}$

# Concatenazione

- **Def.** Date due stringhe  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , la concatenazione di  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  è la stringa  $\mathbf{uv}$ .
- **Es:**  $\mathbf{u} = abb$  e  $\mathbf{v} = ab$ , allora  $\mathbf{uv} = abbab$  e  $\mathbf{vu} = ababb$   
 $\mathbf{u} = \epsilon$  e  $\mathbf{v} = ab$ , allora  $\mathbf{uv} = ab$   
 $\mathbf{u} = bb$  e  $\mathbf{v} = \epsilon$ , allora  $\mathbf{uv} = bb$   
 $\mathbf{u} = \epsilon$  e  $\mathbf{v} = \epsilon$ , allora  $\mathbf{uv} = \epsilon$ ; cioè  $\epsilon\epsilon = \epsilon$

## Concatenazione

- **Def.** Per una stringa  $w$ , definiamo  $w^n$  per  $n \geq 0$  induttivamente:

$$w^0 = \epsilon$$

$$w^{n+1} = w^n w, \text{ per ogni } n \geq 1.$$



# Concatenazione

- **Def.** Per una stringa  $w$ , definiamo  $w^n$  per  $n \geq 0$  induttivamente:

$$w^0 = \epsilon$$

$$w^{n+1} = w^n w, \text{ per ogni } n \geq 1.$$

- **Es:** Se  $w = cat$ , allora  $w^0 = \epsilon$ ,  
 $w^1 = cat$ ,  
 $w^2 = catcat$ ,  
 $w^3 = catcatcat$ ,  
...

# Concatenazione

- **Def.** Per una stringa  $w$ , definiamo  $w^n$  per  $n \geq 0$  induttivamente:

$$w^0 = \epsilon$$

$$w^{n+1} = w^n w, \text{ per ogni } n \geq 1.$$

- **Es:** Se  $w = cat$ , allora  $w^0 = \epsilon$ ,  
 $w^1 = cat$ ,  
 $w^2 = catcat$ ,  
 $w^3 = catcatcat$ ,  
...

- **Es:** Dato simbolo  $a$

$$a^3 = aaa$$

$$a^0 = \epsilon$$

## Sottostringa

- **Def.** Data una stringa  $s$ , una *sottostringa* di  $s$  è una qualsiasi parte di simboli consecutivi della stringa  $s$  cioè,  $w$  è una sottostringa di  $s$  se esistono stringhe  $x$  e  $y$  (eventualmente vuote) tali che

$$s = xwy$$

# Sottostringa

- **Def.** Data una stringa  $s$ , una *sottostringa* di  $s$  è una qualsiasi parte di simboli consecutivi della stringa  $s$  cioè,  $w$  è una sottostringa di  $s$  se esistono stringhe  $x$  e  $y$  (eventualmente vuote) tali che

$$s = xwy$$

- **Es:**
  - 567 è sottostringa di 56789
  - 567 è sottostringa di 45678
  - 567 è sottostringa di 34567
  - 567 è sottostringa di 567

# Sottostringa

- **Def.** Data una stringa  $s$ , una *sottostringa* di  $s$  è una qualsiasi parte di simboli consecutivi della stringa  $s$  cioè,  $w$  è una sottostringa di  $s$  se esistono stringhe  $x$  e  $y$  (eventualmente vuote) tali che

$$s = xwy$$

- **Es:**  
567 è sottostringa di 56789  
567 è sottostringa di 45678  
567 è sottostringa di 34567  
567 è sottostringa di 567
- **Es:** Stringa 472 ha sottostringhe

$$\epsilon, 4, 7, 2, 47, 72, 472$$

Ma 42 non è sottostringa di 472.

# Linguaggi

- **Def.** Un Linguaggio formale (Linguaggio) è un insieme di stringhe su un alfabeto.

# Linguaggi

- **Def.** Un Linguaggio formale (Linguaggio) è un insieme di stringhe su un alfabeto.
- **Es:** Linguaggi per computer, quali C, C<sup>++</sup> o Java, sono linguaggi formali con alfabeto

$$\{a, b, \dots, z, A, B, \dots, Z, 0, 1, 2, \dots, 9, >, <, =, +, -, *, /, (, ), \dots\}$$

Le regole della sintassi definiscono le regole del linguaggio.  
L'insieme di nomi validi di variabili è, esso stesso, un linguaggio formale.

# Linguaggi

- Nota: non solo insiemi finiti.

Infatti insiemi finiti non sono di solito linguaggi interessanti

Tutti i nostri alfabeti sono finiti,  
ma la maggior parte dei linguaggi che incontreremo sono  
infiniti.



## Esempi di linguaggi

- **Es.** Alfabeto  $A = \{x\}$ .

Linguaggio

$$L = \{\epsilon, x, xx, xxx, xxxx, \dots\} = \{x^n | n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Nota:  $x^0 = \epsilon$ , quindi la stringa vuota è in L

## Esempi di linguaggi

- **Es.** Alfabeto  $A = \{x\}$ .

Linguaggio

$$L = \{\epsilon, x, xx, xxx, xxxx, \dots\} = \{x^n | n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Nota:  $x^0 = \epsilon$ , quindi la stringa vuota è in L

- **Es.** Alfabeto  $A = \{x\}$ .

Linguaggio

$$L = \{x, xxx, xxxxx, \dots\} = \{x^{2n+1} | n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

## Esempi di linguaggi

- **Es.** Alfabeto  $A = \{x\}$ .

Linguaggio

$$L = \{\epsilon, x, xx, xxx, xxxx, \dots\} = \{x^n | n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Nota:  $x^0 = \epsilon$ , quindi la stringa vuota è in L

- **Es.** Alfabeto  $A = \{x\}$ .

Linguaggio

$$L = \{x, xxx, xxxxx, \dots\} = \{x^{2n+1} | n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- **Es.** Alfabeto  $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Linguaggio

$$L = \{\text{qualsiasi stringa che non inizia con } 0\} = \{\epsilon, 1, 2, 3, \dots, 9, 10, 11, \dots\}$$

## Esempi di linguaggi

- **Es.** Sia  $A = \{a, b\}$ , definiamo il linguaggio  $L$  formato da tutte le stringhe che iniziano con  $a$  e seguono con 0 o più  $b$ ;  
Cioè  $L = \{a, ab, abb, abbb, \dots\} = \{ab^n | n \geq 0\}$

## Esempi di linguaggi

- **Es.** Sia  $A = \{a, b\}$ , definiamo il linguaggio  $L$  formato da tutte le stringhe che iniziano con  $a$  e seguono con 0 o più  $b$ ;  
Cioè  $L = \{a, ab, abb, abbb, \dots\} = \{ab^n | n \geq 0\}$
- Nota. L'insieme vuoto  $\emptyset$  è l'insieme che non contiene alcun elemento.
  - $\emptyset \neq \{\epsilon\}$   
poichè  $\emptyset$  non ha elementi.

In generale

- $\epsilon \notin \emptyset$

## Perché i linguaggi?

- Vedremo che

Risolvere un problema (con risposta sì/no)  $\equiv$  riconoscere un linguaggio.

riconoscere un linguaggio  $L$  su un alfabeto  $\Sigma$  significa stabilire per ogni stringa  $x \in \Sigma^*$  se  $x \in L$  oppure  $x \notin L$ .

## Perché i linguaggi?

- Vedremo che

Risolvere un problema (con risposta sì/no)  $\equiv$  riconoscere un linguaggio.

riconoscere un linguaggio  $L$  su un alfabeto  $\Sigma$  significa stabilire per ogni stringa  $\mathbf{x} \in \Sigma^*$  se  $\mathbf{x} \in L$  oppure  $\mathbf{x} \notin L$ .

- Es.

Problema: dato un intero  $x$ ,  $x$  è primo?

Possiamo anche scriverlo come: data una stringa binaria  $\mathbf{b}$ ,  
 $\mathbf{b} \in \{\text{stringhe che sono rappresentazioni binarie di un primo}\}$   
 $= \{1, 10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$ ?

# Insiemi: Relazioni ed Operazioni

- **Def.** Siano  $S$  e  $T$  insiemi.

Diciamo che

$S \subseteq T$  ( $S$  sottoinsieme di  $T$ ) se  $w \in S$  implica  $w \in T$ .

Cioè ogni elemento di  $S$  è anche un elemento di  $T$ .



# Insiemi: Relazioni ed Operazioni

- **Def.** Siano  $S$  e  $T$  insiemi.

Diciamo che

$S \subseteq T$  ( $S$  sottoinsieme di  $T$ ) se  $w \in S$  implica  $w \in T$ .

Cioè ogni elemento di  $S$  è anche un elemento di  $T$ .

- **Es.**

$S = \{ab, ba\}$  e  $T = \{ab, ba, aaa\}$  allora  $S \subseteq T$  ma  $T \not\subseteq S$ .

$S = \{ba, ab\}$  e  $T = \{aa, ba\}$  allora  $S \not\subseteq T$  e  $T \not\subseteq S$ .

# Insiemi uguali

- **Def.** Insiemi  $S$  e  $T$  sono uguali ( $S = T$ ) se e solo se

$$S \subseteq T \text{ e } T \subseteq S.$$

- **Es.**

Siano  $S = \{ab, ba\}$  e  $T = \{ba, ab\}$   
allora  $S \subseteq T$  e  $T \subseteq S$ ; quindi  $S = T$ .

Siano  $S = \{ab, ba\}$  e  $T = \{ba, ab, aaa\}$ ,  
allora  $S \subseteq T$  ma  $T \not\subseteq S$ ; quindi  $S \neq T$ .

# Unione

- **Def.** Dati due insiemi  $S$  e  $T$ , definiamo la loro unione

$$S \cup T = \{w \mid w \in S \text{ oppure } w \in T\}$$

$S \cup T$  contiene tutti gli elementi contenuti in  $S$  oppure in  $T$  (o in entrambi).

- **Es.**
  - $S = \{ab, bb\}$  e  $T = \{aa, bb, a\}$  allora  $S \cup T = \{ab, bb, aa, a\}$
  - $S = \{a, ba\}$  e  $T = \emptyset$ , allora  $S \cup T = S$ .
  - $S = \{a, ba\}$  e  $T = \{\epsilon\}$  allora  $S \cup T = \{\epsilon, a, ba\}$

# Intersezione

- **Def.** Dati due insiemi  $S$  e  $T$ , definiamo la loro intersezione

$$S \cap T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \in T\}$$

$S \cap T$  contiene tutti gli elementi comuni ad  $S$  e  $T$

# Intersezione

- **Def.** Dati due insiemi  $S$  e  $T$ , definiamo la loro intersezione

$$S \cap T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \in T\}$$

$S \cap T$  contiene tutti gli elementi comuni ad  $S$  e  $T$

- **Def.** insiemi  $S$  e  $T$  si dicono disgiunti se  $S \cap T = \emptyset$

# Intersezione

- **Def.** Dati due insiemi  $S$  e  $T$ , definiamo la loro intersezione

$$S \cap T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \in T\}$$

$S \cap T$  contiene tutti gli elementi comuni ad  $S$  e  $T$

- **Def.** insiemi  $S$  e  $T$  si dicono disgiunti se  $S \cap T = \emptyset$
- **Es.**
  - Sia  $S = \{ab, bb\}$  e  $T = \{aa, bb, a\}$  allora  $S \cap T = \{bb\}$

# Intersezione

- **Def.** Dati due insiemi  $S$  e  $T$ , definiamo la loro intersezione

$$S \cap T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \in T\}$$

$S \cap T$  contiene tutti gli elementi comuni ad  $S$  e  $T$

- **Def.** insiemi  $S$  e  $T$  si dicono disgiunti se  $S \cap T = \emptyset$
- **Es.**
  - Sia  $S = \{ab, bb\}$  e  $T = \{aa, bb, a\}$  allora  $S \cap T = \{bb\}$
  - Sia  $S = \{ab, bb\}$  e  $T = \{aa, ba, a\}$  allora  $S \cap T = \emptyset$ , quindi  $S$  e  $T$  sono disgiunti

# Cardinalità

- **Lemma.** Se  $S$  e  $T$  sono disgiunti (cioè  $S \cap T = \emptyset$ ), allora  
 $|S \cup T| = |S| + |T|$



# Cardinalità

- **Lemma.** Se  $S$  e  $T$  sono disgiunti (cioè  $S \cap T = \emptyset$ ), allora  $|S \cup T| = |S| + |T|$
- **Lemma.** In generale  $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$

# Sottrazione

- **Def.** Dati due insiemi  $S$  e  $T$ ,

$$S \setminus T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \notin T\}$$

- **Es.**
  - Sia  $S = \{a, b, bb, bbb\}$  e  $T = \{a, bb, bab\}$  allora  $S \setminus T = \{b, bbb\}$
  - Sia  $S = \{ab, ba\}$  e  $T = \{ab, ba\}$  allora  $S \setminus T = \emptyset$

# Complemento

- **Def.** Dato un universo  $U$  (insieme di tutti gli elementi in considerazione), il complemento di un insieme  $S \subseteq U$  (rispetto a tale universo  $U$ ) è

$$\overline{S} = \{w \mid w \in U, w \notin S\}$$

$\overline{S}$  è l'insieme di tutti quegli elementi in esame (elementi di  $U$ ) che non sono in  $S$  (quindi  $\overline{S} = U \setminus S$ ).

# Complemento

- **Def.** Dato un universo  $U$  (insieme di tutti gli elementi in considerazione), il complemento di un insieme  $S \subseteq U$  (rispetto a tale universo  $U$ ) è

$$\overline{S} = \{w \mid w \in U, w \notin S\}$$

$\overline{S}$  è l'insieme di tutti quegli elementi in esame (elementi di  $U$ ) che non sono in  $S$  (quindi  $\overline{S} = U \setminus S$ ).

- **Es.**  
 $U$ : insieme delle stringhe su alfabeto  $\{a, b\}$   
 $S$ : insieme delle stringhe su alfabeto  $\{a, b\}$  che iniziano con b.  
 $\overline{S}$ : insieme delle stringhe su alfabeto  $\{a, b\}$  che non iniziano con b,  
**N.B.:** NON insieme stringhe che iniziano con a ( $\overline{S}$  contiene anche la stringa vuota  $\epsilon$ )

# Concatenazione

- **Def.** Dati 2 insiemi  $S$  e  $T$  di stringhe, la concatenazione (o prodotto) di  $S$  e  $T$  è

$$ST = \{uv \mid u \in S, v \in T\}$$

$ST$  è l'insieme di stringhe che possono essere divise in 2 parti: la prima parte coincide con una stringa in  $S$  la seconda parte coincide con una stringa in  $T$ .

- **Es.** Se  $S = \{a, aa\}$  e  $T = \{\epsilon, a, ba\}$ , allora

$$ST = \{a, aa, aba, aaa, aaba\}, \quad TS = \{a, aa, aaa, baa, baaa\}$$

$aba \in ST$ , ma  $aba \notin TS$ . Quindi  $ST \neq TS$

## Sequenze e tuple

- **Def.** Una sequenza di oggetti è una lista di questi oggetti in qualche ordine.  
Ordine e ridondanza sono importanti in una sequenza (non in un insieme).

# Sequenze e tuple

- **Def.** Una sequenza di oggetti è una lista di questi oggetti in qualche ordine.  
Ordine e ridondanza sono importanti in una sequenza (non in un insieme).
- **Def.** Sequenze finite sono dette tuple. Una  $k$ —tupla ha  $k$  elementi nella sequenza.

# Sequenze e tuple

- **Def.** Una sequenza di oggetti è una lista di questi oggetti in qualche ordine.  
Ordine e ridondanza sono importanti in una sequenza (non in un insieme).
- **Def.** Sequenze finite sono dette tuple. Una  $k$ —tupla ha  $k$  elementi nella sequenza.
- **Es.**  
(4, 2, 7) è una 3-tupla o tripla  
(9, 23) è una 2-tupla o coppia  
(9, 23)  $\neq$  (23, 9)    importanza dell'ordine  
(2, 2, 3)  $\neq$  (2, 3)    importanza della ridondanza



## Prodotto Cartesiano

- **Def.** Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , il prodotto Cartesiano  $A \times B$  è l'insieme delle coppie  $(x, y)$  dove  $x \in A$  e  $y \in B$ . Cioè

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

# Prodotto Cartesiano

- **Def.** Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , il prodotto Cartesiano  $A \times B$  è l'insieme delle coppie  $(x, y)$  dove  $x \in A$  e  $y \in B$ . Cioè

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

- **Es.**

Siano  $A = \{a, ba, bb\}$  e  $B = \{\epsilon, ba\}$ , allora

$$A \times B = \{(a, \epsilon), (a, ba), (ba, \epsilon), (ba, ba), (bb, \epsilon), (bb, ba)\}$$

$$B \times A = \{(\epsilon, a), (\epsilon, ba), (\epsilon, bb), (ba, a), (ba, ba), (ba, bb)\}.$$

# Prodotto Cartesiano

- **Def.** Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , il prodotto Cartesiano  $A \times B$  è l'insieme delle coppie  $(x, y)$  dove  $x \in A$  e  $y \in B$ . Cioè

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

- **Es.**

Siano  $A = \{a, ba, bb\}$  e  $B = \{\epsilon, ba\}$ , allora

$$A \times B = \{(a, \epsilon), (a, ba), (ba, \epsilon), (ba, ba), (bb, \epsilon), (bb, ba)\}$$

$$B \times A = \{(\epsilon, a), (\epsilon, ba), (\epsilon, bb), (ba, a), (ba, ba), (ba, bb)\}.$$

- **Nota**  $(ba, a) \in B \times A$ , ma  $(ba, a) \notin A \times B$ ,  
Quindi  $B \times A \neq A \times B$ .

## Prodotto Cartesiano

- **Def.** Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , il prodotto Cartesiano  $A \times B$  è l'insieme delle coppie  $(x, y)$  dove  $x \in A$  e  $y \in B$ . Cioè

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

- **Es.**

Siano  $A = \{a, ba, bb\}$  e  $B = \{\epsilon, ba\}$ , allora

$$A \times B = \{(a, \epsilon), (a, ba), (ba, \epsilon), (ba, ba), (bb, \epsilon), (bb, ba)\}$$

$$B \times A = \{(\epsilon, a), (\epsilon, ba), (\epsilon, bb), (ba, a), (ba, ba), (ba, bb)\}.$$

- **Nota**  $(ba, a) \in B \times A$ , ma  $(ba, a) \notin A \times B$ ,  
Quindi  $B \times A \neq A \times B$ .
- **Nota** il prodotto Cartesiano è diverso dalla Concatenazione

$$AB = \{a, aba, ba, baba, bb, bbba\} \neq A \times B$$

# Prodotto Cartesiano

- **Nota**  $|A \times B| = |A||B|$

# Prodotto Cartesiano

- **Nota**  $|A \times B| = |A||B|$
- Possiamo anche definire prodotto cartesiano di più di 2 insiemi.  $A_1 \times \dots \times A_k$  è l'insieme di k-tuple

$$A_1 \times \dots \times A_k = \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_i \in A_i, \quad 1 \leq i \leq k\}$$

# Prodotto Cartesiano

**Es.** Siano

$$A_1 = \{ab, ba, bbb\}$$

$$A_2 = \{a, bb\},$$

$$A_3 = \{ab, b\}.$$

allora

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{ (ab, a, ab), (ab, a, b), (ab, bb, ab), (ab, bb, b), \\ (ba, a, ab), (ba, a, b), (ba, bb, ab), (ba, bb, b), \\ (bbb, a, ab), (bbb, a, b), (bbb, bb, ab), (bbb, bb, b) \}.$$

# Insieme potenza

- **Def.** Per ogni insieme  $S$ , l'insieme potenza  $\mathcal{P}(S)$  è

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$$

cioè l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di  $S$  (inclusi  $\emptyset$  e  $S$  stesso).



# Insieme potenza

- **Def.** Per ogni insieme  $S$ , l'insieme potenza  $\mathcal{P}(S)$  è

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$$

cioè l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di  $S$  (inclusi  $\emptyset$  e  $S$  stesso).

- **Es.** Se  $S = \{a, bb\}$ , allora

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{bb\}, \{a, bb\}\}$$

# Insieme potenza

- **Def.** Per ogni insieme  $S$ , l' insieme potenza  $\mathcal{P}(S)$  è

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$$

cioè l' insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di  $S$  (inclusi  $\emptyset$  e  $S$  stesso).

- **Es.** Se  $S = \{a, bb\}$ , allora

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{bb\}, \{a, bb\}\}$$

- **Lemma** Se  $|S| < \infty$ , allora  $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$   
Cioè, ci sono  $2^{|S|}$  differenti sottoinsiemi di  $S$ . **Perchè?**

# Chiusura

- **Def.** Dato un insieme  $S$  di stringhe, sia

$$S^0 = \{\epsilon\},$$

$$S^k = \{w_1w_2 \dots w_k \mid w_i \in S, i = 1, 2, \dots, k\} = SS \dots S, \quad k > 1.$$

concatenazione di  $S$  con se stesso per  $k$  volte

# Chiusura

- **Def.** Dato un insieme  $S$  di stringhe, sia

$$S^0 = \{\epsilon\},$$

$$S^k = \{w_1w_2 \dots w_k \mid w_i \in S, i = 1, 2, \dots, k\} = SS \dots S, \quad k > 1.$$

concatenazione di  $S$  con se stesso per  $k$  volte

- **Nota.**  $S^k$  è l'insieme delle stringhe ottenute concatenando  $k$  stringhe di  $S$ , con possibili ripetizioni. In particolare,  $S^1 = S$ .

# Chiusura

- **Def.** Dato un insieme  $S$  di stringhe, sia

$$S^0 = \{\epsilon\},$$

$$S^k = \{w_1 w_2 \dots w_k \mid w_i \in S, i = 1, 2, \dots, k\} = SS \dots S, \quad k > 1.$$

concatenazione di  $S$  con se stesso per  $k$  volte

- **Nota.**  $S^k$  è l'insieme delle stringhe ottenute concatenando  $k$  stringhe di  $S$ , con possibili ripetizioni. In particolare,  $S^1 = S$ .
- **Es.** Se  $S = \{a, bb\}$ , allora

$$S^0 = \{\epsilon\},$$

$$S^1 = \{a, bb\},$$

$$S^2 = \{aa, abb, bba, bbbb\},$$

$$S^3 = \{aaa, aabb, abba, abbbb, bbaa, bbabb, bbbba, bbbbbb\}.$$

## Chiusura o Kleene Star

- **Def.** la Chiusura (o Kleene star) di un insieme di stringhe  $S$  è

$$S^* = S^0 \cup S^1 \cup S^2 \cup S^3 \cup \dots$$

## Chiusura o Kleene Star

- **Def.** la Chiusura (o Kleene star) di un insieme di stringhe  $S$  è

$$S^* = S^0 \cup S^1 \cup S^2 \cup S^3 \cup \dots$$

- **Nota.**  $S^*$  è l'insieme di tutte le stringhe ottenute concatenando zero o più stringhe di  $S$ , potendo usare la stessa stringa più volte.

$$S^* = \{w_1 w_2 \dots w_k \mid k \geq 0, \quad w_i \in S, \quad i = 1, 2, \dots, k\},$$

dove per  $k = 0$ , la stringa  $w_1 w_2 \dots w_k = \epsilon$  è la stringa vuota.

## Chiusura o Kleene Star

- **Es.** Se  $S = \{ba, a\}$ , allora

$$S^* = \{\epsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, \dots\}$$

Se  $w \in S^*$ , può  $bb$  essere una sottostringa di  $w$ ?



## Chiusura o Kleene Star

- **Es.** Se  $S = \{ba, a\}$ , allora

$$S^* = \{\epsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, \dots\}$$

Se  $w \in S^*$ , può  $bb$  essere una sottostringa di  $w$ ?

- **Es.** Se  $A = \{a, b\}$ , allora

$$A^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, \dots\},$$

tutte le possibili stringhe sull' alfabeto  $A$ .

## Chiusura o Kleene Star

- **Es.** Se  $S = \{ba, a\}$ , allora

$$S^* = \{\epsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, \dots\}$$

Se  $w \in S^*$ , può  $bb$  essere una sottostringa di  $w$ ?

- **Es.** Se  $A = \{a, b\}$ , allora

$$A^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, \dots\},$$

tutte le possibili stringhe sull' alfabeto  $A$ .

- **Es.** Se  $S = \emptyset$ , allora  $S^* = \{\epsilon\}$ .

# Chiusura o Kleene Star

- **Es.** Se  $S = \{ba, a\}$ , allora

$$S^* = \{\epsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, \dots\}$$

Se  $w \in S^*$ , può  $bb$  essere una sottostringa di  $w$ ?

- **Es.** Se  $A = \{a, b\}$ , allora

$$A^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, \dots\},$$

tutte le possibili stringhe sull' alfabeto  $A$ .

- **Es.** Se  $S = \emptyset$ , allora  $S^* = \{\epsilon\}$ .
- **Es.** Se  $S = \{\epsilon\}$ , allora  $S^* = \{\epsilon\}$

$$S^{**}$$

- $S^{**} = (S^*)^*$  è l' insieme di stringhe formate concatenando stringhe di  $S^*$

$$S^{**}$$

- $S^{**} = (S^*)^*$  è l'insieme di stringhe formate concatenando stringhe di  $S^*$
- **Nota.**  $S^{**} = S^*$  per ogni insieme  $S$  di stringhe.

# $S^+$

- $S^+$  è l'insieme di stringhe formate concatenando una o più stringhe di  $S$
- **Es.** Se  $S = \{x\}$ , allora

$$S^+ = \{x, xx, xxx, xxxx, \dots\},$$

# Inverso di stringhe

- Per ogni stringa  $\mathbf{w}$ , l'inverso di  $\mathbf{w}$ , scritto  $reverse(\mathbf{w})$  o  $\mathbf{w}^R$ , è la stessa stringa di simboli scritta in ordine inverso .  
Se  $\mathbf{w} = w_1 w_2 \dots w_n$ , dove ogni  $w_i$  è un simbolo, allora

$$\mathbf{w}^R = w_n w_{n-1} \dots w_1.$$

- **Es.**  $(cat)^R = tac$
- **Es.**  $\epsilon^R = \epsilon$ .

Domanda: Se  $S^R = \{\mathbf{w}^R \mid \mathbf{w} \in S\}$  risulta  $(S^R)^* = (S^*)^R$ ?