

Lezioni di Ricerca Operativa

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 18

- Teoria dei grafi: definizioni di base
- Problema del flusso a costo minimo

R. Cerulli — F. Carrabs

Grafo Non Orientati: Definizioni di base

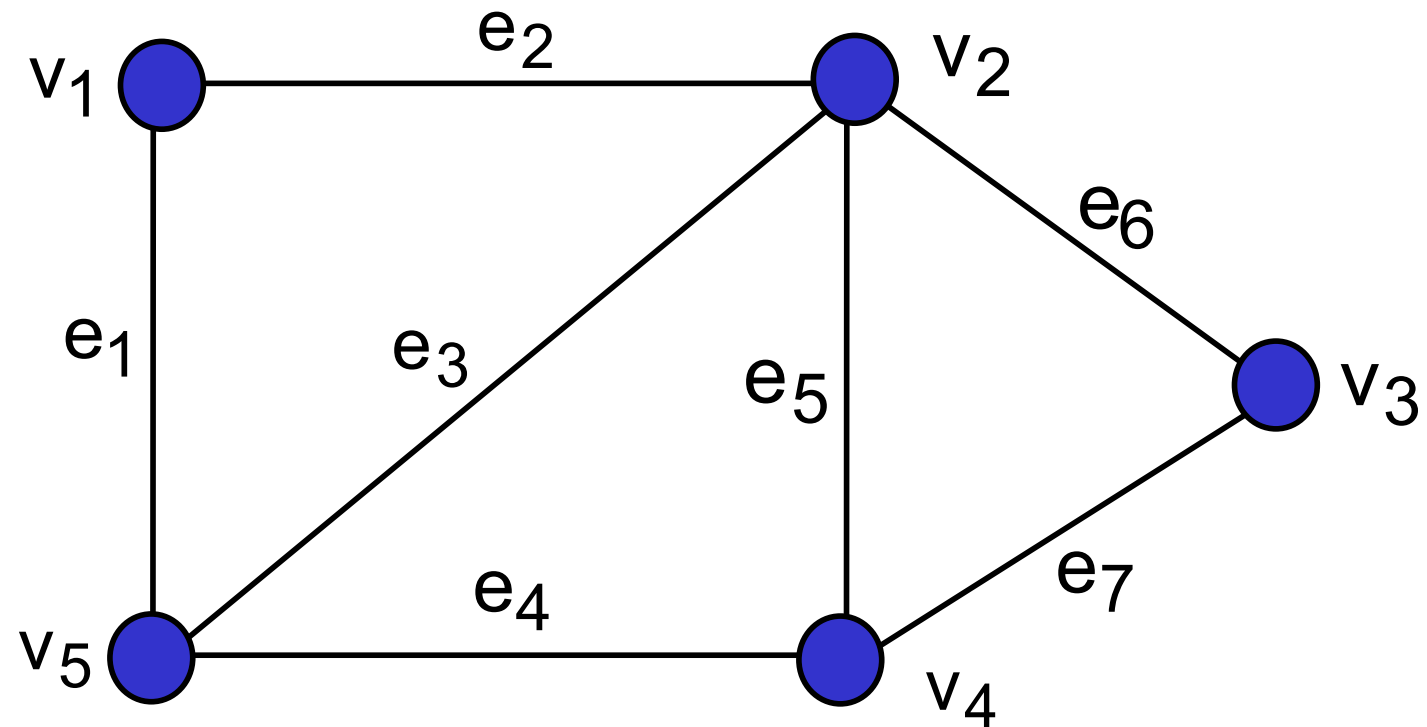
Un grafo **non orientato** $G=(V,E)$ è dato da una coppia di insiemi finiti:

- $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ l'insieme degli n **Nodi** di G
- $E=\{e_1,\dots,e_m\}\subseteq V\times V$ l'insieme degli m **Archi non orientati** di G

Ogni arco non orientato $e_k=(v_i,v_j)$ di G corrisponde ad una **coppia non ordinata** di nodi v_i e v_j di G . I nodi v_i e v_j sono gli **estremi** dell'arco e_k .

La presenza di un arco tra una coppia di nodi indica una relazione tra i nodi stessi.

Un esempio: $G=(V,E)$

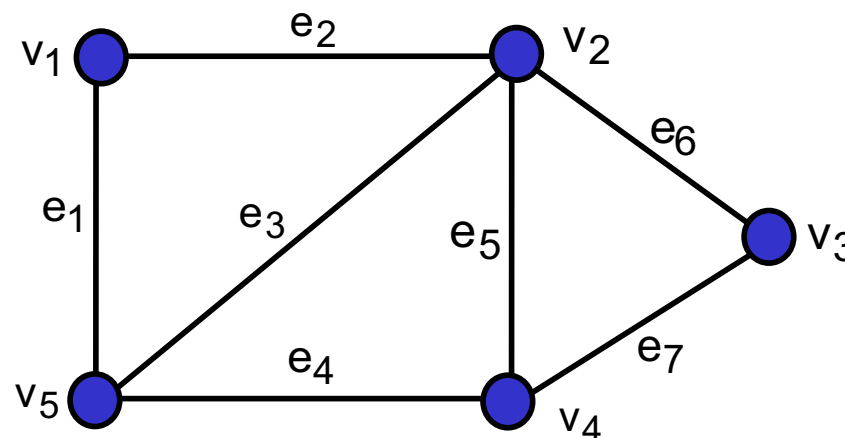


$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

$$e_1 = (v_1, v_5) \quad e_2 = (v_1, v_2) \quad \dots$$

Grafo Non Orientati: Definizioni di base



- un arco (v,v) è detto **loop**;
- un arco $e=(u,v) \in E$ si dice **incidente** su u e su v ;
- due nodi $u,v \in V$ sono detti **adiacenti** $\Leftrightarrow (u,v) \in E$;
- due archi $e_1, e_2 \in E$ sono detti **adiacenti** $\Leftrightarrow e_1=(u,v)$ ed $e_2=(v,w)$ (hanno un estremo in comune);
- l'insieme di nodi $N(u)=\{v \in V: v \text{ adiacente a } u\}$ è detto **intorno** di u in G ;
- l'insieme di archi $\delta(u)=\{e \in E: e \text{ incide su } u\}$ è detto **stella** di u in G ;
- $|\delta(u)|$ è detto **grado del nodo** u .

Teoria dei Grafi: Concetti Base

I grafi sono un mezzo per rappresentare relazioni binarie

Ad esempio:

- due città connesse da una strada
- due calcolatori connessi in una rete telematica
- due persone legate da una relazione di parentela (come, padre-figlio)
- due persone che condividono una stanza
- il collegamento tra due componenti elettronici
- un'operazione che deve essere eseguita da una certa macchina
- ...

Applicazioni

I grafi possono essere usati come strumento per modellare in maniera schematica un vastissimo numero di problemi decisionali.

Ad esempio:

- determinare il percorso più breve che connette due città
- determinare come connettere nella maniera più economica (più efficiente) un insieme di calcolatori in una rete telematica
- assegnare un insieme di operazioni ad un insieme di macchine
- determinare il percorso più conveniente da far percorrere ad una flotta di veicoli commerciali per effettuare delle consegne e quindi rientrare al deposito
- ...

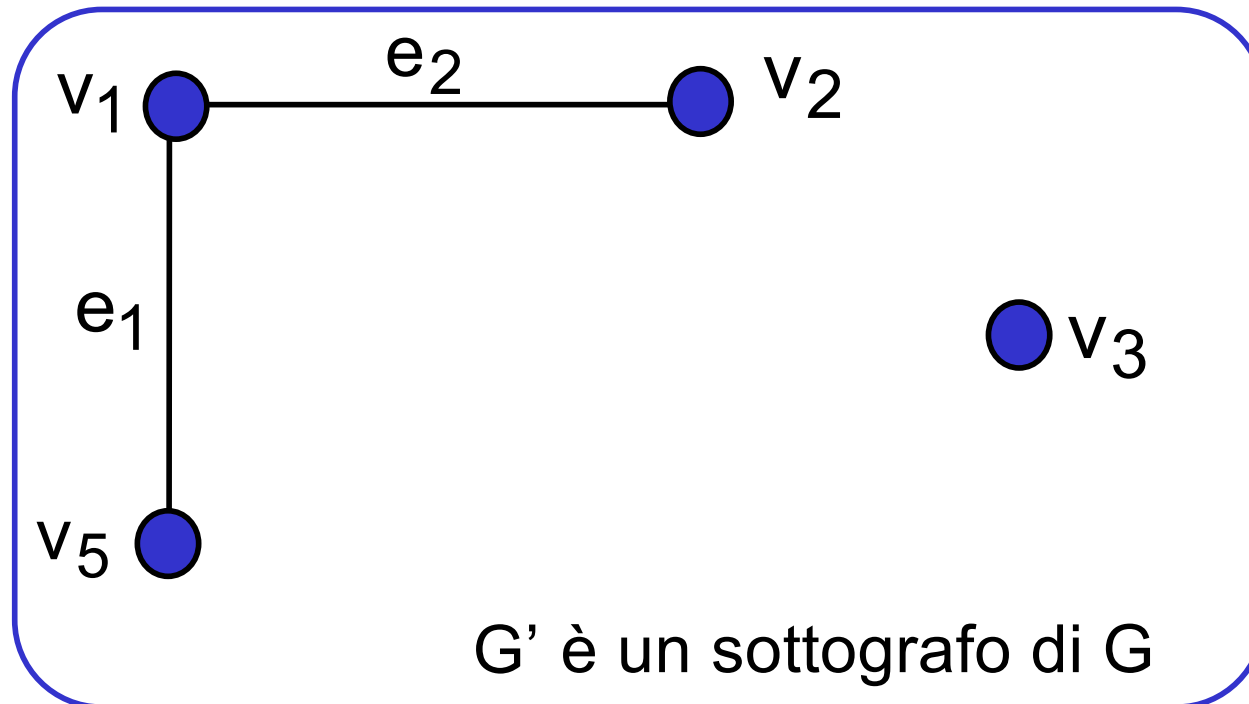
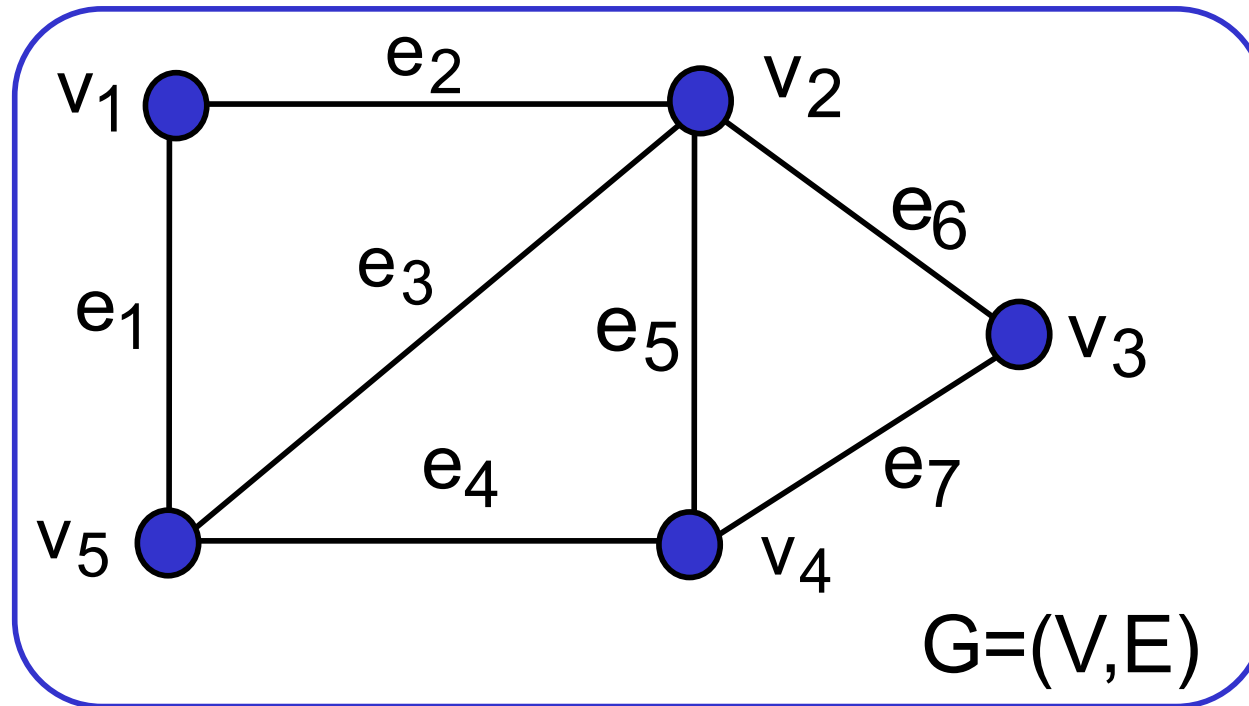
Grafo semplice:

Non esistono “loop” o archi paralleli (ossia tra due nodi ci può essere più di un arco).

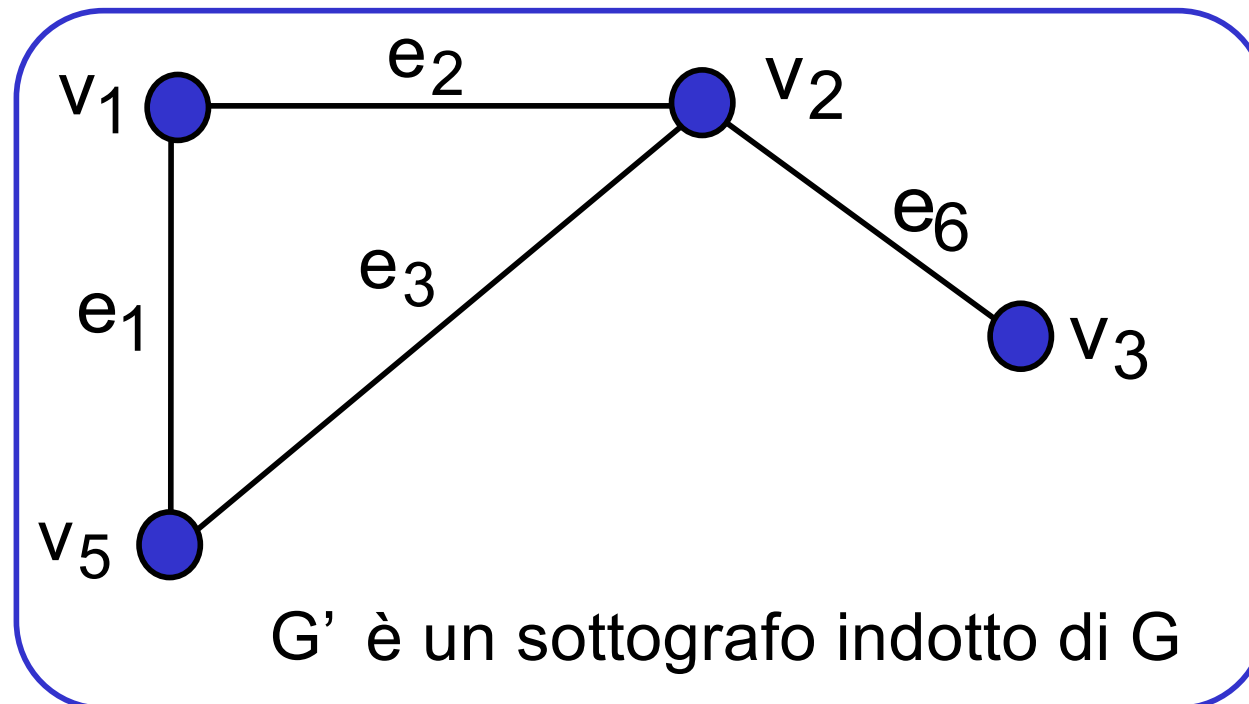
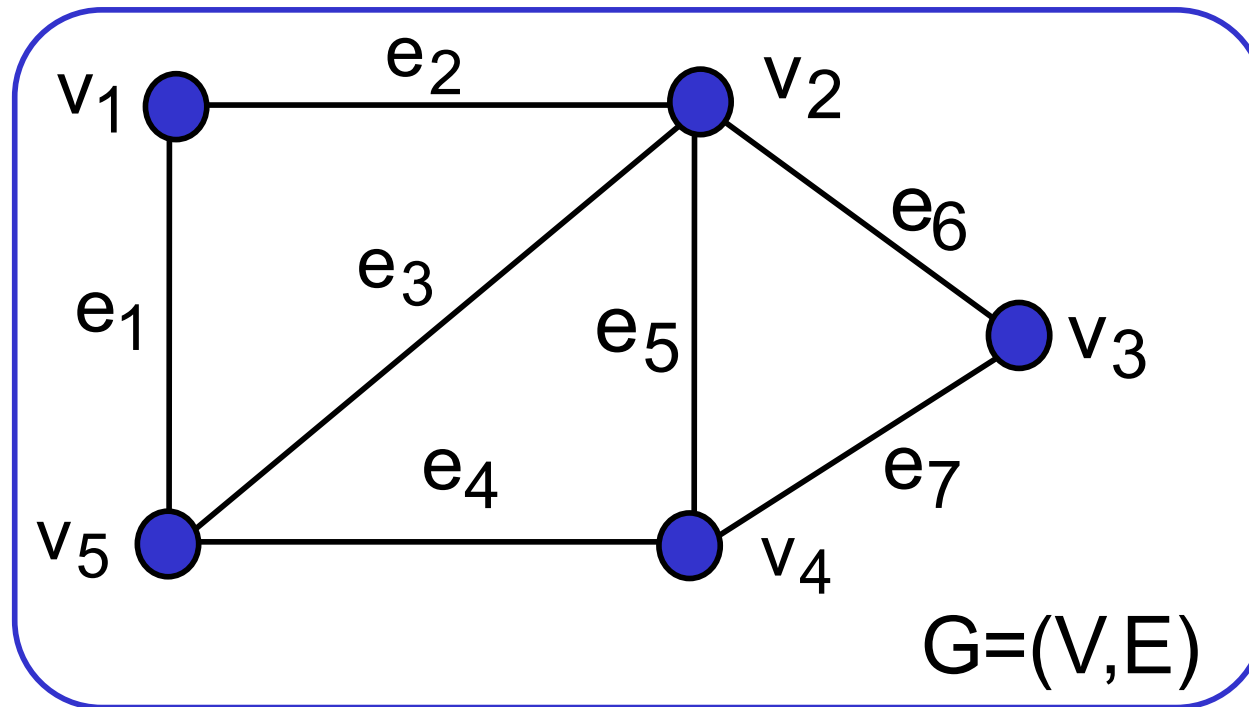
Grafì e Sottografi

- $G'=(V',E')$ è detto **sottografo** di $G=(V,E)$ \Leftrightarrow
 - $V' \subseteq V$
 - $E' \subseteq E$ e $(v_i,v_j) \in E' \Rightarrow v_i,v_j \in V'$
- $G'=(V',E')$ è detto **sottografo indotto** da V' in $G=(V,E)$ \Leftrightarrow
 - $V' \subseteq V$
 - $\forall u,v \in V'$ se $(u,v) \in E$ allora $(u,v) \in E'$

Esempio



Esempio

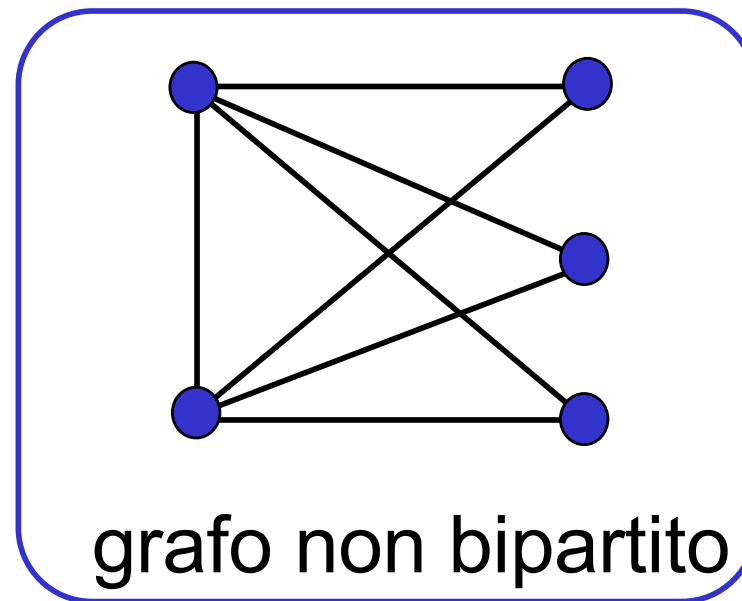
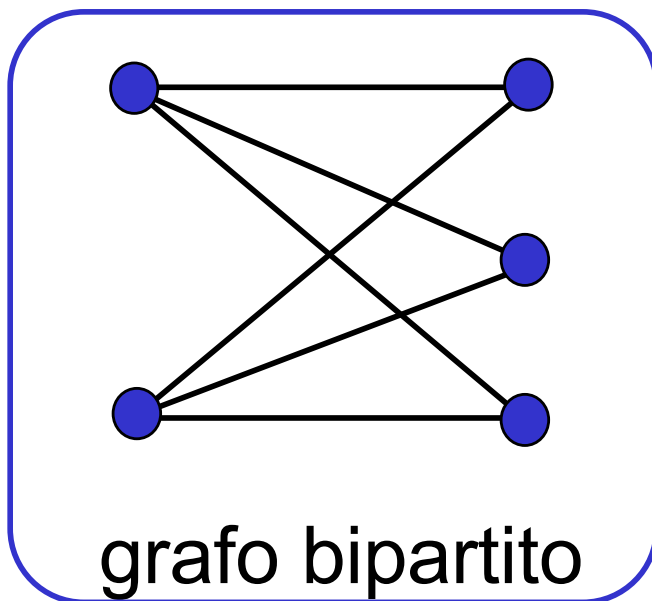


Grafo Non Orientato Bipartito

G è detto **grafo bipartito** se esiste una partizione di V in due sottoinsiemi V_1 e V_2 tali che:

- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- $V_1 \cup V_2 = V$
- $\forall e=(u,v) \in E$ se $u \in V_1$ allora $v \in V_2$ oppure se $u \in V_2$ allora $v \in V_1$

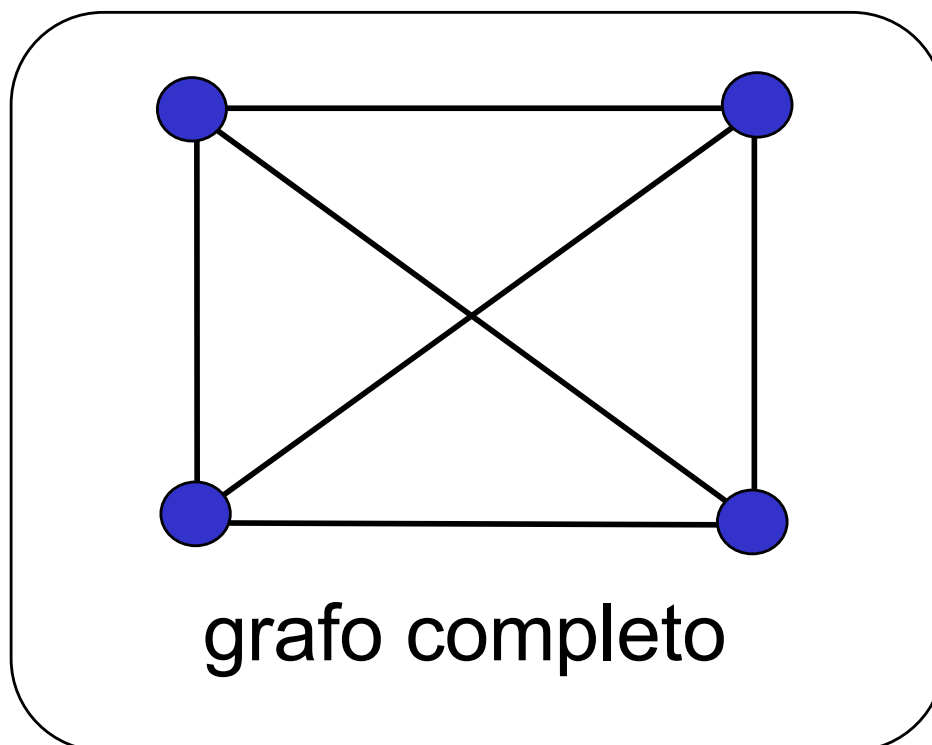
Esempio



Grafo Non Orientato Completo

- G è un grafo **completo** \Leftrightarrow contiene tutti i possibili archi, ovvero $|\delta(v)| = n-1 \quad \forall v \in V$
- il numero di archi in un grafo completo è: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

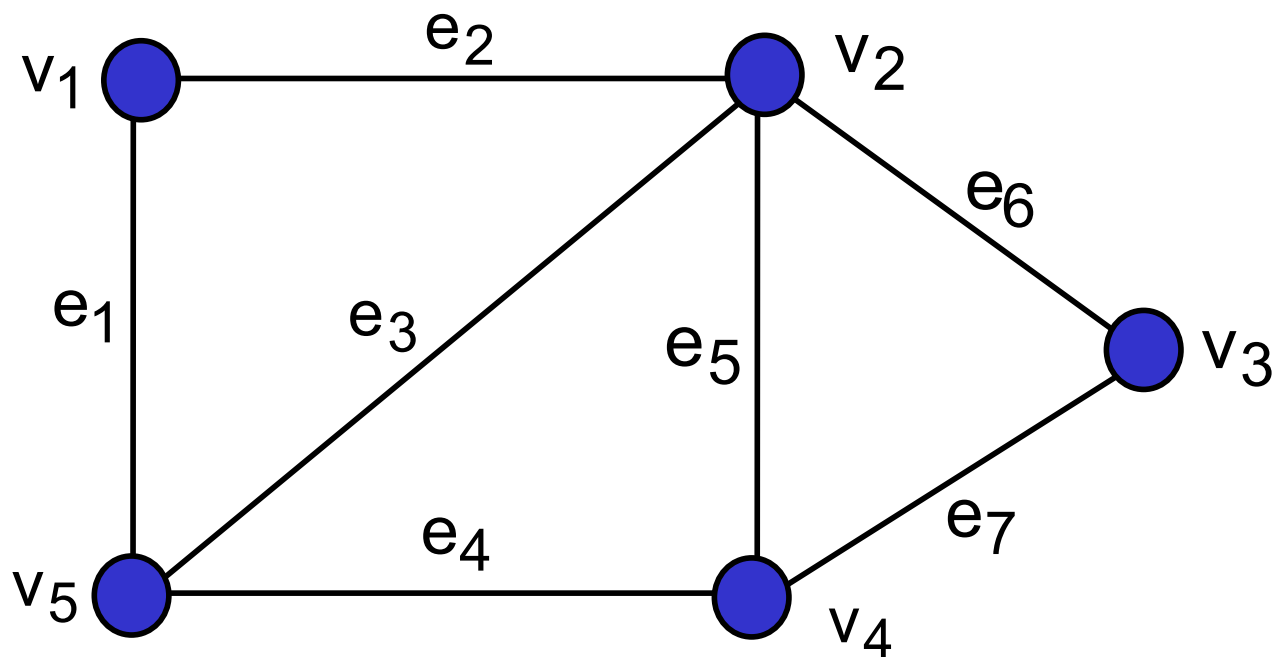
Esempio



Grafo Non Orientato: Connettività

- Una **path** di lunghezza k da un vertice u ad un vertice u' in un grafo non orientato $G=(V,E)$ è una sequenza $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ di vertici tali che $v_0 = u$ e $v_k = u'$ e $(v_{i-1}, v_i) \in E$ per $i = 1, 2, \dots, k$;
- La **lunghezza di una path** è data dal numero di archi che compongono la path;
- La **path contiene** i vertici v_0, v_1, \dots, v_k e gli archi $(v_0, v_1), (v_1, v_2) \dots, (v_{k-1}, v_k)$. (Per definizione c'è sempre una path di lunghezza zero da u a se stesso);
- Una path si dice **semplice** se tutti i vertici che la compongono sono distinti.
- Se esiste una path p dal vertice u ad un vertice u' in G allora u è **connesso** ad u' tramite p . Si noti che:
 - Se u è connesso a u' allora anche u' è connesso ad u ;
 - Se u è connesso a u' e u' è connesso ad w allora u è connesso a w ;
- Un **grafo non orientato è connesso** se e solo se tutti i suoi vertici sono connessi tra loro;
- Una path $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ forma un **ciclo** se $k \geq 3$ e $v_0 = v_k$.

Grafo Non Orientato: Connettività



Esempi:

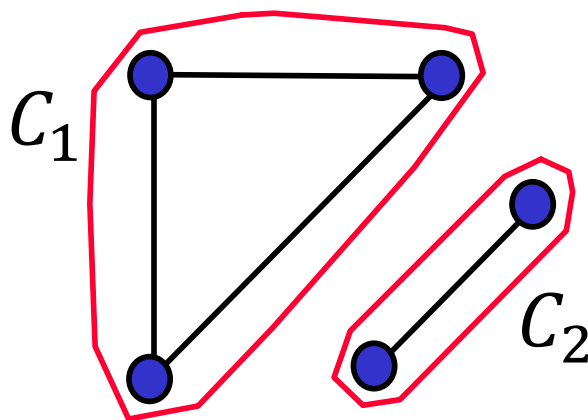
- $\langle v_1, v_2, v_5, v_4 \rangle$ è un path semplice di lunghezza 3 che contiene gli archi e_2, e_3 ed e_4 ;
- $\langle v_1, v_2, v_5, v_4, v_5 \rangle$ è un path (non semplice) di lunghezza 4;
- $\langle v_2, v_3, v_4, v_2 \rangle$ è un ciclo;
- Il grafo in figura è connesso.

Grafo Non Orientato: Componenti Connesse

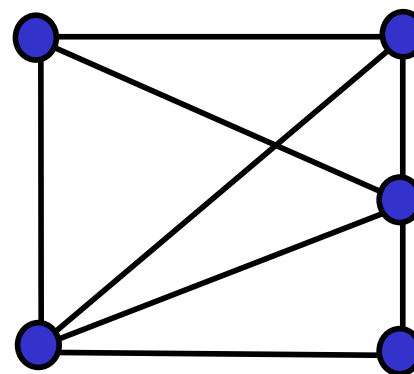
Quando un grafo G non è connesso è utile determinare quali siano i sottografi di G che risultano connessi.

- Una **componente connessa** $C_i = (V_i, E_i)$ di G è un sottografo di G in cui ogni coppia di vertici $u \in V_i$ e $v \in V_i$ è connessa;
- G è **connesso** \Leftrightarrow è composto da una sola componente connessa.

Esempio



componenti
connesse



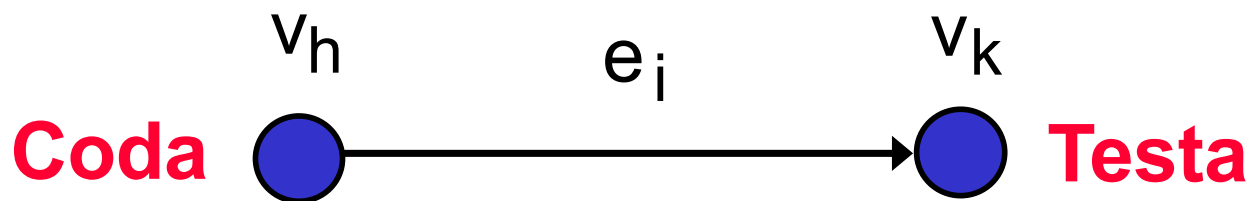
grafo connesso

In questo corso considereremo solo **grafi semplici e connessi**.

Grafi Orientati: Definizioni di base

- $G=(V,E)$ è un **grafo orientato** se, dato $V=\{v_1,\dots,v_n\}$, l'insieme degli archi $E=\{e_1,\dots,e_m\}$ è formato da **coppie ordinate** di nodi.

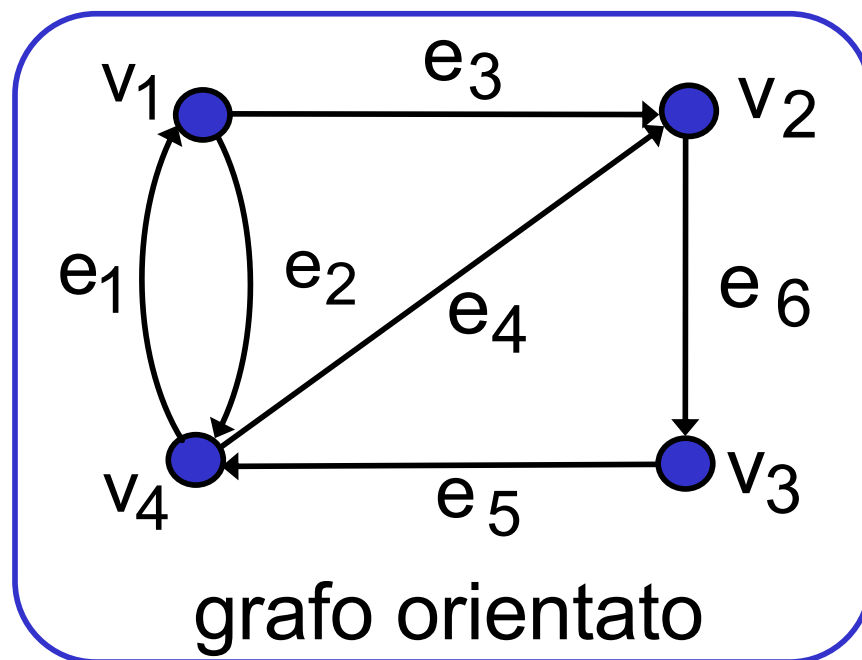
Per un grafo orientato si ha che $e_i=(v_k,v_h) \neq e_j = (v_h,v_k)$ con $e_i, e_j \in E$



L'arco e_i si dice **uscente** da v_h ed **entrante** in v_k ;

v_h e v_k sono la **coda** e la **testa** di e_i rispettivamente.

Grafi Orientati: Definizioni di base



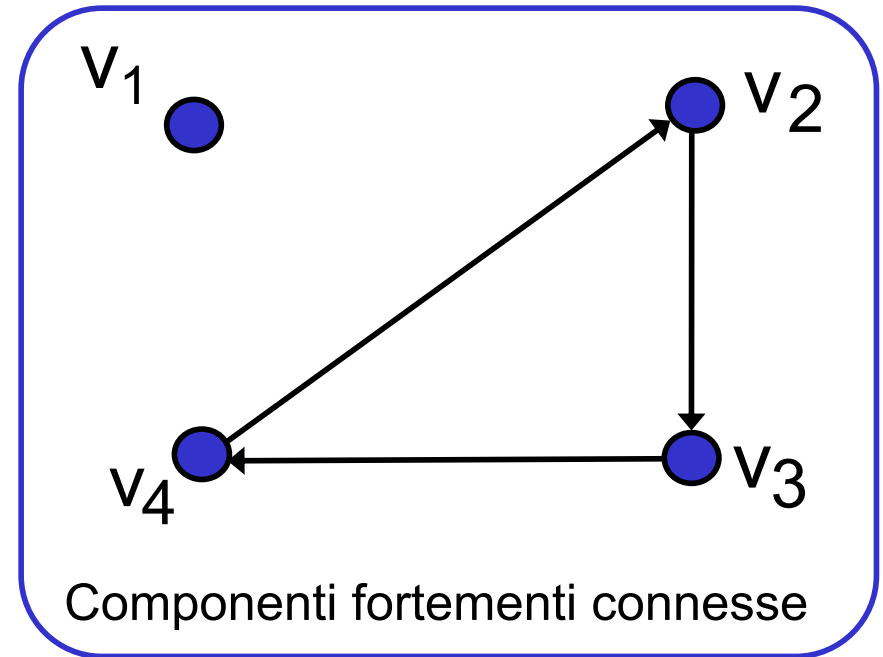
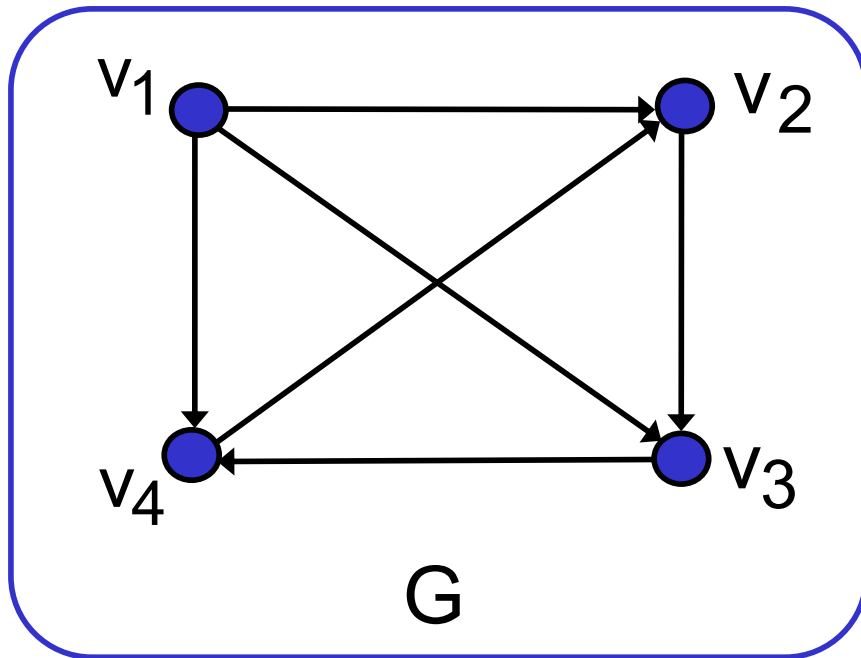
Nell'esempio $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$
 $e_1 = (v_4, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_4)$...

- $Fs(v) = \{u \in V: (v, u) \in E\}$ è detto **stella uscente** di v ;
- $Bs(v) = \{u \in V: (u, v) \in E\}$ è detto **stella entrante** di v ;
- $S(v) = Fs(v) \cup Bs(v)$ è detto **stella** di v ;
- le definizioni di **sottografo** e **sottografo indotto** di un grafo orientato sono analoghe a quelle date per i grafi non orientati.

Grafo Orientato: Connettività

- Una **path** di lunghezza k da un vertice u ad un vertice u' in un grafo orientato $G=(V,E)$ è una sequenza $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ di vertici tali che $v_0 = u$ e $v_k = u'$ e $(v_{i-1}, v_i) \in E$ per $i = 1, 2, \dots, k$; (N.B. ogni arco della path è diretto verso v_k);
- Le definizioni di **lunghezza di una path**, **path semplice** e nodi e archi **contenuti** in una path sono analoghe a quelle date per i grafi non orientati;
- Una **catena (chain)** di lunghezza k da un vertice u ad un vertice u' in un grafo orientato $G=(V,E)$ è una sequenza $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ di vertici tali che $v_0 = u$ e $v_k = u'$ e $(v_{i-1}, v_i) \in E$ oppure $(v_i, v_{i-1}) \in E$ per $i = 1, 2, \dots, k$; (quindi ci possono essere archi nella catena che non sono diretti verso v_k)
- Se esiste una catena p_c dal vertice u ad un vertice u' in G allora u è **connesso** ad u' tramite p_c .
- Se esiste una path p dal vertice u ad un vertice u' in G allora u è **fortemente connesso** ad u' tramite p .
- Un grafo orientato
 - è **connesso** se e solo se tutti i suoi vertici sono connessi tra loro;
 - è **fortemente connesso** se e solo se tutti i suoi vertici sono fortemente connessi tra loro;
- Una path $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ forma un **ciclo** se $k \geq 2$ e $v_0 = v_k$.

Esempio



- La sequenza $\langle v_1, v_3, v_4, v_2 \rangle$ è una **path** da v_1 a v_2 mentre la sequenza $\langle v_1, v_3, v_2 \rangle$ è una **catena** da v_1 a v_2 ;
- Il vertice v_1 è fortemente connesso al vertice v_2 mentre v_2 è connesso, ma non fortemente connesso, a v_1 .
- La sequenza $\langle v_2, v_3, v_4 \rangle$ è un ciclo.
- Il grafo G è connesso ma non è fortemente connesso.
- **Ci sono in G componenti fortemente connesse?**

Rappresentazioni di un Grafo

- **Liste di adiacenza:**

ad ogni vertice è associata la lista dei vertici adiacenti (può essere una tabella o una lista concatenata).

- **Matrice di adiacenza** ($n \times n$) :

$a_{ij} = 1$ se $(v_i, v_j) \in E$, $a_{ij} = 0$ altrimenti

- **Matrice di incidenza** ($n \times m$) :

$a_{ij} = 1$ se $v_i \in e_j$, $a_{ij} = 0$ altrimenti

Rappresentazioni di un Grafo: Vantaggi e Svantaggi

- **Lista di adiacenza:** memoria $O(m)$
Vantaggi: permette di scorrere i nodi adiacenti a v in $O(\text{grado}(v))$
Svantaggi: inserimenti e cancellazioni su liste concatenate in $O(\text{grado}(v))$
- **Matrice di adiacenza:** memoria $O(n^2)$
Vantaggi: Inserimenti e cancellazioni in $O(1)$
Svantaggi: permette di scorrere i nodi adiacenti a v in $O(n)$
- D.: **matrice di incidenza ?**

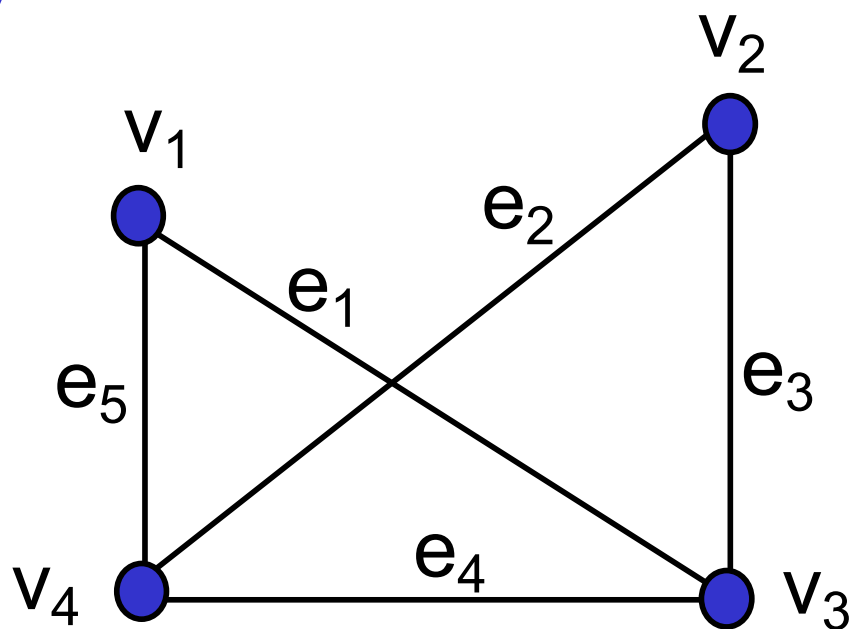
Matrice di Incidenza dei Grafi

- Sia $G=(V,E)$ un **grafo non orientato** con $|V|=n$ ed $|E|=m$. Denotiamo con $A=[a_{ij}]$, con $i=1,\dots,n$ e $j=1,\dots,m$, la **matrice di incidenza** di G , dove:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \text{ è un estremo di } e_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Matrice di Incidenza dei Grafi

Esempio



$$A = \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{array}$$

matrice di incidenza di un grafo non orientato

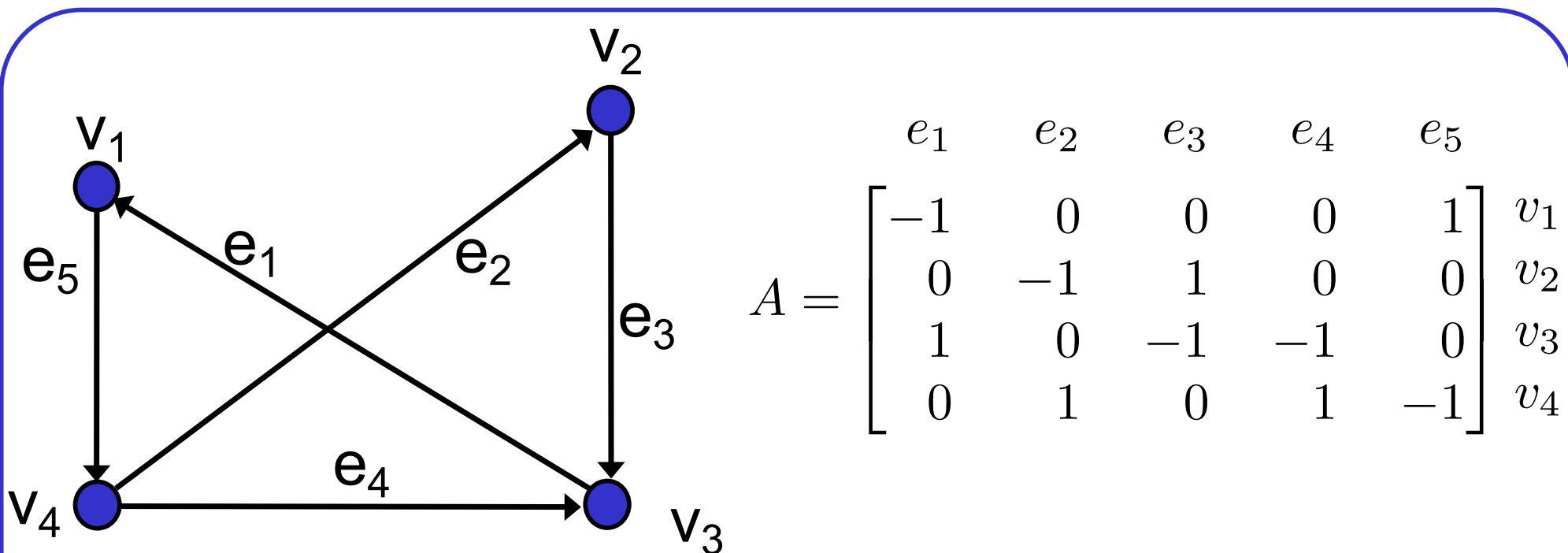
Matrice di Incidenza dei Grafi Orientati

- Sia $G=(V,E)$ un **grafo orientato** con $|V|=n$ ed $|E|=m$. Denotiamo con $A=[a_{ij}]$, con $i=1,\dots,n$ e $j=1,\dots,m$, la **matrice di incidenza** di G , dove:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \text{ è coda di } e_j \text{ (arco uscente da } v_i) \\ -1 & \text{se } v_i \text{ è testa di } e_j \text{ (arco entrante in } v_i) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Matrice di Incidenza dei Grafi Orientati

Esempio



matrice di incidenza di un grafo orientato

Problema del Flusso a Costo Minimo

Sia $G=(V,E)$ un **grafo connesso e orientato** in cui:

- Ad ogni arco (i,j) è associato un costo c_{ij} che rappresenta il costo da pagare per ogni **unità di flusso** che transita sull'arco (i,j) .
- Ad ogni vertice $v \in V$ è associato un valore intero b_v dove:
 - $b_v > 0$ indica che il nodo v è un nodo di **offerta**
 - $b_v < 0$ indica che il nodo v è un nodo di **domanda**
 - $b_v = 0$ indica che il nodo v è un nodo di **passaggio**
- La somma di tutti i b_v deve essere uguale a zero (**condizione di bilanciamento**). Ciò che viene prodotto dalle sorgenti viene consumato dalle destinazioni.

Nel problema del **flusso a costo minimo** bisogna far giungere la merce prodotta dai nodi di offerta ai nodi di domanda minimizzando i costi di trasporto.

Problema del Flusso a Costo Minimo: Formulazione

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k \in BS(i)} x_{ki} = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \quad \text{Intere?}$$

x_{ij} = **quantità di flusso** che transita sull'arco (i,j)

c_{ij} = **costo** di trasporto di una unità di flusso sull'arco (i,j)

b_i = valore intero associato al nodo i (ne definisce il **ruolo** nel problema):

$b_i > 0$: nodo di offerta

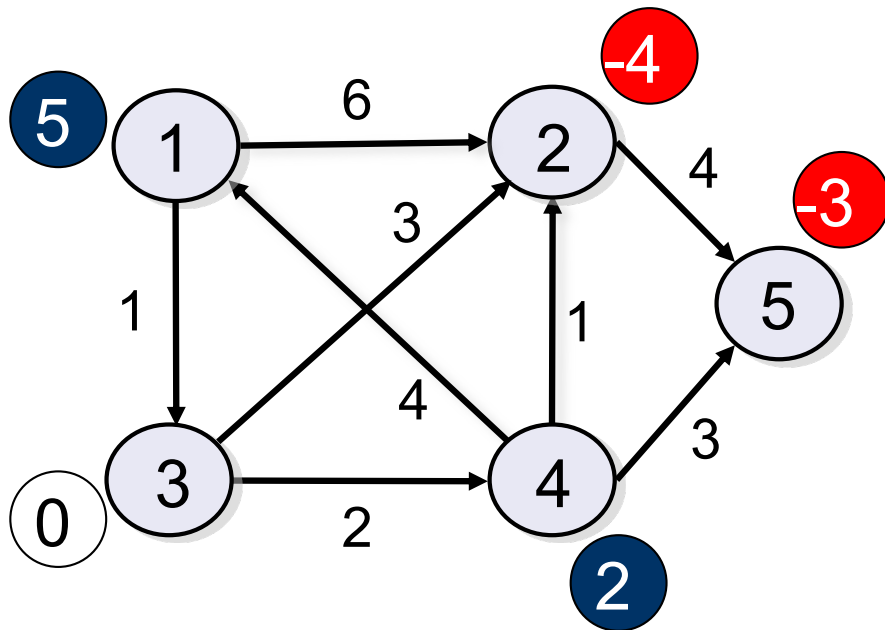
$b_i < 0$: nodo di domanda

$b_i = 0$: nodo di passaggio

Problema del Flusso a Costo Minimo: Esempio

Consideriamo un grafo orientato $G=(V,E)$ rappresentante una rete di trasporto.

L'obiettivo è quello di trasportare, al minimo costo, determinate quantità di merce (unità di flusso) dai nodi di **offerta** a quelli di **domanda** (eventualmente transitando per dei nodi di **passaggio**).



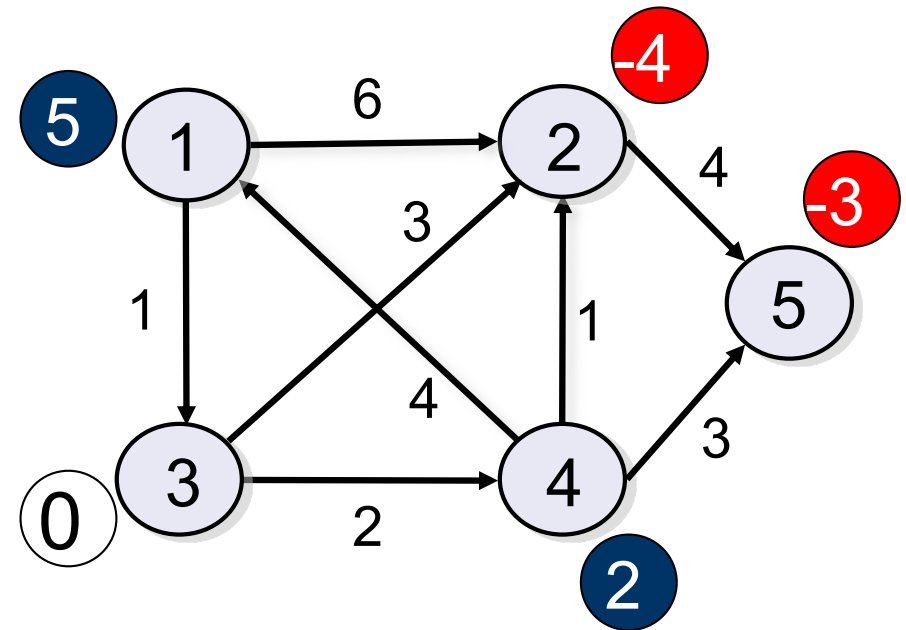
Abbiamo:

- $b_i > 0$: nodo di offerta
 $b_i < 0$: nodo di domanda
 $b_i = 0$: nodo di passaggio
- Un costo $c_{ij} \geq 0$ per ogni arco
(costo per il trasporto di una unità di flusso)

Problema del Flusso a Costo Minimo: Esempio

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k \in BS(i)} x_{ki} = b_i \quad i = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \end{aligned}$$

Consideriamo una variabile $x_{ij} \geq 0$, $\forall (i,j) \in E$, rappresentante la quantità di flusso che attraverserà tale arco nella soluzione.



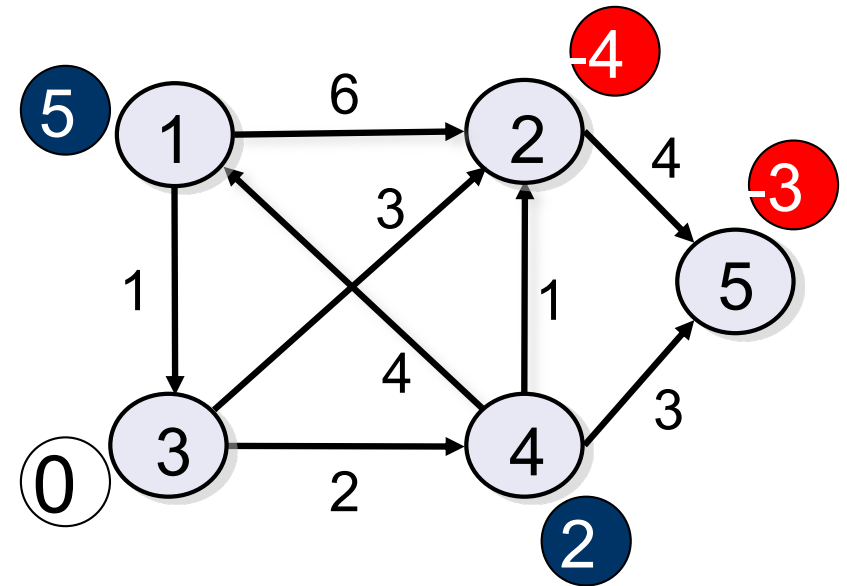
$$\min \quad 6x_{12} + x_{13} + 4x_{25} + 3x_{32} + 2x_{34} + 4x_{41} + x_{42} + 3x_{45}$$

x_{12}	$+x_{13}$		$-x_{41}$	$=$	5	<i>nodo 1</i>
$-x_{12}$		$+x_{25}$	$-x_{32}$		-4	<i>nodo 2</i>
	$-x_{13}$		$+x_{32}$	$+x_{34}$	$=$	0 <i>nodo 3</i>
			$-x_{34}$	$+x_{41}$	$+x_{42}$	$+x_{45} = 2$ <i>nodo 4</i>
		$-x_{25}$			$-x_{45} =$	-3 <i>nodo 5</i>

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

Problema del Flusso a Costo Minimo: Esempio

A	(1,2)	(1,3)	(2,5)	(3,2)	(3,4)	(4,1)	(4,2)	(4,5)
1	1	1	0	0	0	-1	0	0
2	-1	0	1	-1	0	0	-1	0
3	0	-1	0	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	-1	1	1	1
5	0	0	-1	0	0	0	0	-1



La matrice A dei vincoli del modello matematico corrisponde alla **matrice di incidenza nodo-arco** del grafo G.

$$\min \quad 6x_{12} + x_{13} + 4x_{25} + 3x_{32} + 2x_{34} + 4x_{41} + x_{42} + 3x_{45}$$

$$\begin{array}{rcll}
 x_{12} & +x_{13} & & -x_{41} & = & 5 & \text{nodo 1} \\
 -x_{12} & & +x_{25} & -x_{32} & & -x_{42} & = & -4 & \text{nodo 2} \\
 & -x_{13} & & +x_{32} & +x_{34} & & & = & 0 & \text{nodo 3} \\
 & & & & -x_{34} & +x_{41} & +x_{42} & +x_{45} & = & 2 & \text{nodo 4} \\
 & & & & & & & -x_{45} & = & -3 & \text{nodo 5}
 \end{array}$$

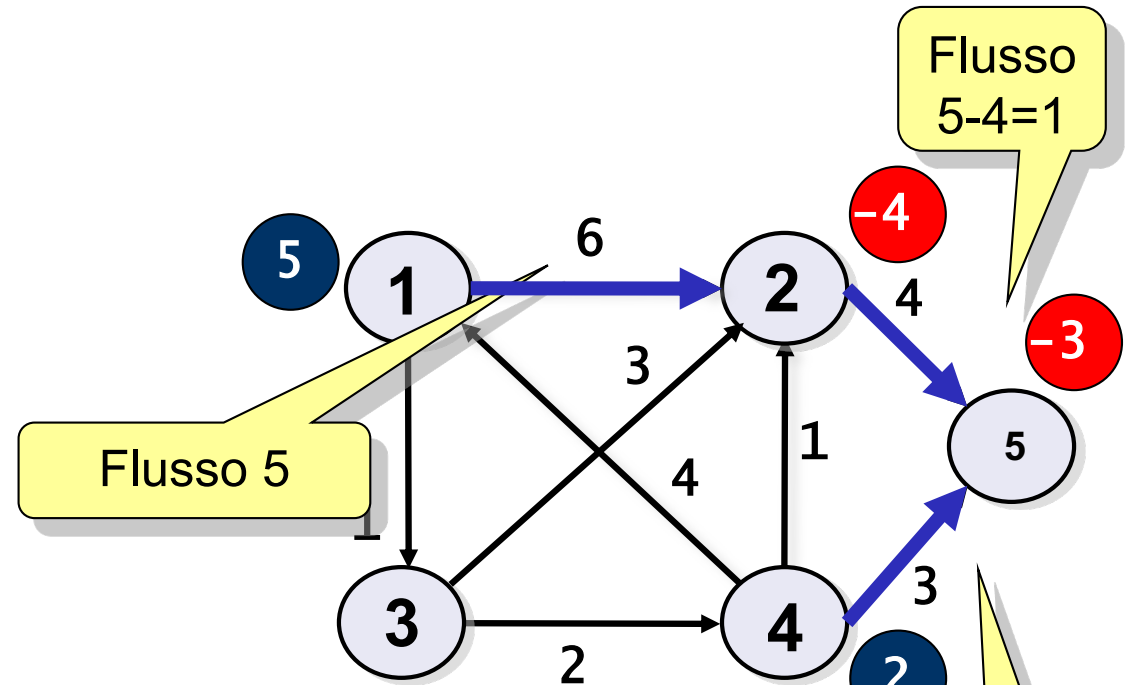
$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

Problema del Flusso a Costo Minimo: Esempio

Soluzione 1

Costo:

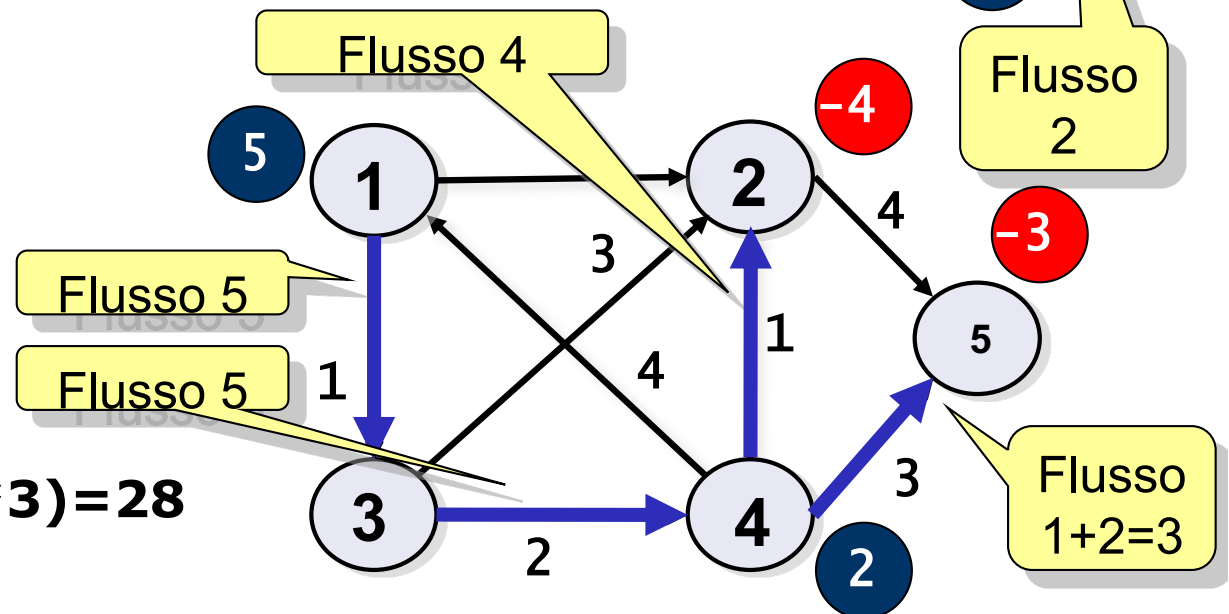
$$(6*5)+(4*1)+(3*2)=40$$



Soluzione 2

Costo:

$$(1*5)+(2*5)+(1*4)+(3*3)=28$$



Problema del Flusso a Costo Minimo: Formulazione

In forma matriciale:

$$\begin{aligned}\min \quad & \underline{c}^T \underline{x} \\ & A \underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0}\end{aligned}$$

Osservazioni:

1. La matrice A è la matrice di incidenza nodo-arco con dimensione $n \times m$. Ogni colonna \underline{a}_{ij} è associata all'arco (i,j) , ed in particolare abbiamo che: $\underline{a}_{ij} = \underline{e}_i - \underline{e}_j$

(\underline{e}_i vettore colonna con tutti 0 eccetto un 1 nella posizione i -ma)

2. Il rango di questa matrice è: $r(A) = n - 1$