Lezioni di Ricerca Operativa

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 3

Richiami di Algebra vettoriale:

- Matrici ed Operazioni tra matrici
- Inversa di una matrice
- Risoluzione di un sistema di equazioni lineari
- Metodo di Gauss

Matrici

Definizione (Matrice): Prende il nome di **matrice** di dimensione *m*x*n* una tabella di elementi ordinatamente disposti su *m* righe ed *n* colonne.

Notazione: Indicheremo le matrici con lettere maiuscole A, B,…. o per esteso con le seguenti notazioni:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Matrici: Notazione

numero di righe

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

A è una matrice (3 x 4)

numero di colonne

generico elemento a_{ij} della matrice
nella **riga i** e nella **colonna j**

$$\underset{mxn}{A} = \{a_{ij}\}$$

Matrici: Notazione

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a}^3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 & \underline{a}_4 \end{array} & \end{array}$$

A si può indicare anche come un insieme di vettori riga: $A = \begin{bmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a}^3 \end{bmatrix}$

oppure come un insieme di vettori colonna: $A = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4]$

Matrici

- Se $m \neq n$ la matrice si dice **rettangolare**;
- Se $m = n$ la matrice si dice **quadrata**.
- In una matrice quadrata di ordine n gli elementi a_{ii} ($i=1,\ldots n$) costituiscono la **diagonale principale**.

matrice rettangolare

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice quadrata

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Moltiplicazione per uno scalare

$$\underset{mxn}{A} = \{a_{ij}\} \quad \text{k scalare} \quad \Longrightarrow \quad k \underset{mxn}{A} = \{k \cdot a_{ij}\}$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad k = 2$$

$$kA = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 & 4 \\ 4 & 14 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Addizione tra matrici

$$\underset{mxn}{A} = \{a_{ij}\} \qquad \underset{mxn}{B} = \{b_{ij}\}$$

$$A + B = C \quad \Longrightarrow \quad \underset{mxn}{C} = \{c_{ij}\}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \forall i = 1, \dots m, \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

Condizione necessaria: le matrici devono avere le stesse dimensioni

Esempio:

$$\underset{2x2}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \underset{2x2}{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underset{2x2}{A+B} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Prodotto righe per colonne tra matrici

$$\underset{mxn}{A} = \{a_{ij}\} \qquad \underset{nxp}{B} = \{b_{ij}\}$$

Condizione necessaria

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad \forall i = 1, \dots m, \qquad \forall j = 1, \dots, p$$

Ciascun elemento c_{ij}, della matrice risultante C, è il prodotto interno della riga *i*-esima di A con la colonna *j*-esima di B.

Prodotto righe per colonne tra matrici

Esempio

$$\underset{3x3}{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{3x2}{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{3x2}{C} = AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 19 & 5 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

Prodotto righe per colonne tra matrici

Da ricordare: $\underset{mxn}{A} = \{a_{ij}\}$ $\underset{qxp}{B} = \{b_{ij}\}$

1. Il prodotto AB è definito solo se *n*=*q*. AB è allora una matrice di dimensione *m*x*p;*

2. Il prodotto BA è definito solo se *m*=*p*. BA è allora una matrice di dimensione *q*x*n;*

3. NON <u>necessariamente</u> vale la proprietà commutativa

$$\underset{2x2}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \underset{2x2}{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB \neq BA$$

Trasposta di una matrice

Definizione (Matrice trasposta)

Data una matrice A, con *m* righe ed *n* colonne, si definisce **matrice trasposta** di A, e si denota con A^T, la matrice *nxm* che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne.

$$\underset{3x2}{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{2x3}{A}^{T} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasposta di una matrice

Proprietà

1. $(A^T)^T = A$

2. $(A + B)^T = A^T + B^T$ (quando la somma è definita)

3. $(AB)^T = B^T A^T$ (quando il prodotto è definito)

Matrici partizionate

Una matrice A (*m*x*n*) può essere ***partizionata*** in sottomatrici.

$$
\begin{array}{cc}
\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\
\end{array}
$$

$$
\underset{4x4}{A} = \left[\begin{array}{cc|cc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
\hline
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{cc}
\mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \\
\end{array}
$$

$$
\underset{4x4}{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}
$$

A_{11} e A_{12} hanno dimensione 3x2

A_{21} e A_{22} hanno dimensione 1x2

Alcune matrici particolari

Definizione (Matrice identità)
La **matrice identità** di ordine n, $\underset{nxn}{I}$, è una matrice quadrata *nxn* che ha tutti 1 sulla diagonale principale e zeri nelle restanti posizioni.

$$\underset{nxn}{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Si osservi che pre-moltiplicando o post-moltiplicando una qualsiasi matrice $\underset{mxn}{A}$ per la matrice identità, il risultato sarà sempre la matrice $\underset{mxn}{A}$ ossia:

$$\underset{mxn}{A} \; \underset{nxn}{I} = \underset{mxn}{A}$$

$$\underset{mxm}{I} \; \underset{mxn}{A} = \underset{mxn}{A}$$

Alcune matrici particolari

Definizione (Matrice triangolare superiore)

Una matrice quadrata $\underset{nxn}{A}$ si dice **triangolare superiore** se tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli. In altre parole $a_{ij} = 0$ per ogni i > j.

$$\underset{nxn}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrice Triangolare superiore

Definizione (Matrice triangolare inferiore)

Una matrice quadrata $\underset{nxn}{A}$ si dice **triangolare inferiore** se tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli. In altre parole $a_{ij} = 0$ per ogni i < j.

Alcune matrici particolari

Definizione (Pivot)

Data una matrice $\underset{mxn}{A}$ si definisce **pivot** della riga *i*-esima di A il primo elemento non nullo della riga.

Esempio

Pivot?

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definizione (Matrice a scala per righe)

Una matrice $\underset{mxn}{A}$ si dice **a scala per righe** se:

1) tutte le eventuali righe nulle sono in fondo alla matrice;

2) il pivot della riga *i*-esima è strettamente "più a destra" del pivot della riga (*i-1*)-esima (con $i \geq 2$)

Alcune matrici particolari

Definizione (Matrice a scala per righe)

Una matrice $\underset{mxn}{A}$ si dice **a scala per righe** se:

1) tutte le eventuali righe nulle sono in fondo alla matrice;

2) il pivot della riga *i*-esima è strettamente "più a destra" del pivot della riga (*i-1*)-esima (con i ≥ 2)

Esempi

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Operazioni elementari

Operazioni elementari sulle righe di una matrice sono:

- **SCAMBIO**: scambio della riga *i* con la riga *j*

- **MOLTIPLICAZIONE**: moltiplicazione di una riga per uno scalare (diverso da zero).

- **SOSTITUZIONE**: sostituzione della riga *i* con la somma della riga *i* e della riga *j* moltiplicata per uno scalare

Data una matrice $\underset{mxn}{A}$ è possibile utilizzare le **operazioni elementari** sulle righe per:

- Calcolare la matrice inversa di A (quando *m*=*n*);
- Risolvere un sistema di equazioni lineari;
- Calcolare il rango della matrice.

Inversa di una matrice

Definizione (Matrice inversa)

Data una matrice quadrata $\underset{nxn}{A}$, una matrice $\underset{nxn}{B}$ è *l'***inversa** di $\underset{nxn}{A}$ se e solo se:

$$\underset{nxn}{A}\,\underset{nxn}{B} = \underset{nxn}{I}$$

$$\underset{nxn}{B}\,\underset{nxn}{A} = \underset{nxn}{I}$$

Da ricordare:

- l'inversa di una matrice quadrata A (se esiste) è **UNICA** e si denota con A^{-1}

- se una matrice ammette l'inversa allora è detta matrice **NON SINGOLARE**

- una matrice quadrata è non singolare se e solo se le sue righe sono linearmente indipendenti o equivalentemente se e solo se le sue colonne sono linearmente indipendenti

Calcolo dell'inversa di una matrice

L'inversa di una matrice quadrata $\underset{nxn}{A}$ può essere calcolata attraverso un numero finito di operazioni elementari nel seguente modo:

1. Si affianca ad *A* la matrice identità *I* di ordine *n*. Si ottiene, in questo modo, la **matrice estesa** *[A I]* di dimensione *n*x*2n*;

2. Si effettuano una serie di operazioni elementari sulle righe della matrice estesa per fare in modo che *A* diventi la matrice identità *I*;

3. Dopo il passo 2, la matrice estesa risultante sarà $[\, I \; A^{-1}]$ le cui ultime *n* colonne compongono la matrice inversa di *A*.

N.B. *Se durante il passo 2 una o più righe della matrice A si annullano allora A non è invertibile.*

Calcolo dell' inversa di una matrice: esempio (1/4)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Per ottenere l'uno nella posizione a_{11}, sommiamo la 2° riga alla 1°

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Per ottenere lo zero nella posizione a_{21}, sommiamo la 3° riga alla 2° :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Calcolo dell' inversa di una matrice: esempio (2/4)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Per ottenere l'uno nella posizione a_{31}, moltiplichiamo per -1 la 1° riga e la sommiamo alla 3° riga:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

- Per ottenere lo zero nella posizione a_{12}, moltiplichiamo per -3 la 2° e la sommiamo alla 1° :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Calcolo dell' inversa di una matrice: esempio (3/4)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

- Per ottenere lo zero nella posizione a_{32}, moltiplichiamo per 4 la 2° riga e la sommiamo alla 3° riga:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

- Per ottenere l'uno nella posizione a_{33}, dividiamo per 12 la 3° riga:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & 1/4 & 5/12 \end{array}\right]$$

Calcolo dell'inversa di una matrice: esempio (4/4)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & 1/4 & 5/12 \end{array}\right]$$

- Per ottenere lo zero nella posizione a_{13}, moltiplichiamo per 7 la 3° riga e la sommiamo alla 1° riga:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/12 & -1/4 & -1/12 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & 1/4 & 5/12 \end{array}\right]$$

- Per ottenere lo zero nella posizione a_{23}, moltiplichiamo per -3 la 3° riga e la sommiamo alla 2° :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/12 & -1/4 & -1/12 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & 1/4 & 5/12 \end{array}\right] \quad A^{-1}$$

Calcolo dell' inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata A è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot minor(A_{ij})$$

fissata una riga i

N.B. è possibile anche fissare la colonna *j* e far variare *i*.

$$i = 1 \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_{11}$$

N.B. *minor(A_{ij})* è il determinante della sottomatrice di A ottenuta rimuovendo la *i*-esima riga e la *j*–esima colonna

$$det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} +$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata A è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot minor(A_{ij})$$

fissata una riga i

$$\begin{array}{l} i = 1 \\ \longrightarrow \end{array} \quad A = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ -1 & \cancel{2} & 1 \\ 1 & \cancel{-1} & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} +$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata A è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot minor(A_{ij})$$

fissata una riga i

$$A = \begin{array}{r} i = 1 \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolo dell' inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) = 12$$

Matrice trasposta dei cofattori

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} cof(A_{11}) & cof(A_{21}) & \dots & cof(A_{n1}) \\ cof(A_{12}) & cof(A_{22}) & \dots & cof(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cof(A_{1n}) & cof(A_{2n}) & \dots & cof(A_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$cof(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot minor(A_{ij})$$

Calcolo dell' inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 12 \qquad cof(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot minor(A_{ij})$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} cof(A_{11}) & cof(A_{21}) & \dots & cof(A_{n1}) \\ cof(A_{12}) & cof(A_{22}) & \dots & cof(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cof(A_{1n}) & cof(A_{2n}) & \dots & cof(A_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$cof(A_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot minor(A_{11}) = (-1)^2 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Calcolo dell' inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 12 \qquad cof(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot minor(A_{ij})$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} cof(A_{11}) & cof(A_{21}) & ... & cof(A_{n1}) \\ cof(A_{12}) & cof(A_{22}) & ... & cof(A_{n2}) \\ ... & ... & ... & ... \\ cof(A_{1n}) & cof(A_{2n}) & ... & cof(A_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$cof(A_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot minor(A_{21}) = (-1)^3 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -3$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{3}{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Rango di una matrice

Definizione (Rango di riga)

Data una matrice A, quadrata o rettangolare, il **rango di riga** di A è il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A.

Definizione (Rango di colonna)

Data una matrice A, quadrata o rettangolare, il **rango di colonna** di A è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A.

Teorema

Data una matrice A, quadrata o rettangolare, il rango di riga di A coincide con il rango di colonna di A.

Definizione (Rango di una matrice)

Data una matrice A, quadrata o rettangolare, il **rango** di A coincide con il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A o, equivalentemente, con il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A.

Rango di una matrice

$$\text{rango}\left(\underset{mxn}{A}\right) \leq \min\{m, n\}$$

Se $\text{rango}\left(\underset{mxn}{A}\right) = \min\{m, n\}$ allora A è una matrice a **rango pieno**.

Rango di una matrice e sistema di equazioni lineari

Dato il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\underset{mxn}{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$

Individuare una soluzione ad sistema di equazioni lineari significa trovare dei valori da assegnare a x_1, x_2, …, x_n affinchè il vettore $\underline{b}$ possa essere espresso come combinazione lineare delle colonne della matrice A.

OSSERVAZIONE: Un sistema di equazioni lineari può:

- non ammettere soluzioni (sistema inconsistente);
- ammettere un’unica soluzione (sistema consistente);
- ammettere infinite soluzioni (sistema consistente).

Rango di una matrice e sistema di equazioni lineari

Dato il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\underset{mxn}{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$

La matrice $[A\ \underline{b}]$ è detta **matrice completa** del sistema e vale quanto segue:

1. $rango([A\ \underline{b}]) > rango(A)$ $\Rightarrow$ il sistema non ha soluzione

2. $rango([A\ \underline{b}]) = rango(A)$ $\Rightarrow$ il sistema ha soluzione

Il numero di soluzioni del sistema è pari a $\infty^{n-rango(A)}$

Risoluzione sistema di equazioni lineari attraverso le operazioni elementari

Dato un sistema di *m* equazioni lineari ed *n* incognite

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

matrice dei coefficienti di dimensione *(mxn)*

Vettore delle incognite di dimensione *(nx1)*

vettore dei termini noti di dimensione *(mx1)*

è equivalente al sistema: $A'\,\underline{x} = \underline{b}'$

dove la matrice $[A'\ \underline{b}']$ è ottenuta dalla matrice $[A\ \underline{b}]$ attraverso un numero finito di operazione elementari.

Risolvere un sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 \qquad\quad &= 2 \end{aligned}$$

La matrice dei coefficienti ha rango =3 < 4 $\Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni

---

Metodo di Gauss:

ridurre la matrice dei coefficienti ad una matrice a scala attraverso un numero finito di operazioni elementari

Risolvere un sistema di equazioni lineari

Metodo di Gauss

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad A \qquad\qquad\qquad\quad b \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

Aggiungiamo la prima riga alla seconda.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Divididiamo la 2° riga per 4 e sottraiamola alla 3° riga.

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad A' \qquad\qquad\qquad\quad b' \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -2 \end{array}\right] \end{array}$$

Risolvere un sistema di equazioni lineari

Metodo di Gauss

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 \qquad &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ x_2 \qquad - \tfrac{1}{4}x_4 &= 4 \\ x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Assegnando un qualsiasi valore λ a x_4, si ottengono infinite soluzioni del sistema:

$$x_4 = \lambda$$

$$x_3 + \tfrac{1}{4}\lambda = -2 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = -2 - \tfrac{1}{4}\lambda$$

$$x_2 - \tfrac{1}{4}\lambda = 4 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 4 + \tfrac{1}{4}\lambda$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 10 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 10 - 2(4 + \tfrac{1}{4}\lambda) - (-2 - \tfrac{1}{4}\lambda) + 2\lambda = 4 + \tfrac{7}{4}\lambda$$

Risolvere un sistema di equazioni lineari

Metodo di Gauss

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \atop \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -2 \end{array}\right]$$

Al variare di λ, si ottengono infinite soluzioni al sistema:

$$x_4 = \lambda$$

$$x_3 + \tfrac{1}{4}\lambda = -2 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = -2 - \tfrac{1}{4}\lambda$$

$$x_2 - \tfrac{1}{4}\lambda = 4 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 4 + \tfrac{1}{4}\lambda$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 10 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 10 - 2(4 + \tfrac{1}{4}\lambda) - (-2 - \tfrac{1}{4}\lambda) + 2\lambda = 4 + \tfrac{7}{4}\lambda$$

ESERCIZI

1. Dati i vettori $\underline{v}_1^T$=[4,1,2], $\underline{v}_2^T$ =[7, -8, 0] e $\underline{v}_3^T$=[4, 1, 3] determinare i coefficienti x_1,x_2, x_3 tramite i quali il vettore $\underline{y}$=[1 2 3] sia espresso come combinazione lineare dei tre vettori dati.

2. Dati i vettori $\underline{v}_1^T$ = [1, 3, - 4], $\underline{v}_2^T$ = [0, 3, 2], $\underline{v}_3^T$ = [1 0 1], si verifichi tramite il determinante se i vettori dati costituiscono una base di R^3.

3. Calcolare l'inversa, se esiste, delle seguenti matrici con i due metodi presentati in questa lezione:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$