Lezioni di Ricerca Operativa

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 13

Teoria della dualità:

- Coppia di Problemi Primale/Duale
- Regole di Trasformazione
- Teorema debole della dualità

R. Cerulli – F. Carrabs

Teoria della Dualità

Ad ogni problema di PL (Primale) è associato un problema Duale

(n variabili, m vincoli)

Problema Primale (P)

$$min \;\; c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

s.t.

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{array}$$

(m variabili, n vincoli)

Problema Duale (D)

$$max \;\; b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$$

s.t.

$$\begin{array}{ccc} a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \leq c_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \leq c_n \\ \underline{w} \geq \underline{0} \end{array}$$

Il problema D ha tante variabili quanti sono i vincoli di P e tanti vincoli quante sono le variabili di P.

Teoria della Dualità

$$min \;\; c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
w_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\
w_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\
w_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\
\hline
 & c_1 & c_2 & c_3 &
\end{array}$$

$$max \;\; b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3$$

s.t.

$$a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 \leq c_1$$
$$a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3 \leq c_2$$
$$a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + a_{33}w_3 \leq c_3$$
$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0$$

Problema Primale (P)

$$min \ \ c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Problema Duale (D)

$$max \ \ b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$$

s.t.

$$a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \leq c_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \leq c_n$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

In forma matriciale:

$$(P) \quad min \ \ \underline{c}^T\underline{x} \qquad\qquad (D) \quad max \ \ \underline{b}^T\underline{w}$$

$$\mathrm{A}\underline{x} \geq \underline{b} \qquad\qquad \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \qquad\qquad \underline{w} \geq \underline{0}$$

Teoria della Dualità

$$min\ \ 3x_1 + 4x_2$$

$$2x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \geq 3$$

$$4x_1 + x_2 \geq 2$$

$$\tfrac{1}{5}x_1 \geq 7$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

	x_1	x_2	
w_1	2	1/2	3
w_2	4	1	2
w_3	1/5	0	7
	3	4	

$$max\ \ 3w_1 + 2w_2 + 7w_3$$

$$2w_1 + 4w_2 + \tfrac{1}{5}w_3 \leq 3$$

$$\tfrac{1}{2}w_1 + w_2 \leq 4$$

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0$$

Duale del problema duale

$$(P) \quad max \ \underline{b}^T \underline{w}$$
$$A^T \underline{w} \leq \underline{c}$$
$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

$$-min \ - \ \underline{b}^T \underline{w}$$
$$-AT\underline{w} \geq -\underline{c}$$
$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

Il **duale** di questo problema è:

	w	
x	$-A^T$	$-\underline{c}$
	$-\underline{b}^T$	

$$-max \ - \ \underline{c}^T \underline{x}$$
$$-A\underline{x} \leq -b$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$(D) \quad min \ \underline{c}^T \underline{x}$$
$$A\underline{x} \geq b$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Il duale del problema duale è il problema primale.

Duale di un Primale con vincoli di uguaglianza

$$(P) \quad min \ \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Trasformiamo i vincoli di uguaglianza in vincoli di maggiore o uguale come segue:

$A\underline{x} = \underline{b}$ equivale a $\begin{cases} A\underline{x} \geq \underline{b} \\ A\underline{x} \leq \underline{b} \Longrightarrow -A\underline{x} \geq -\underline{b} \end{cases}$

$$(P) \quad min \;\; \underline{c}^T \underline{x}$$

$$\mathrm{A}\underline{x} \geq \underline{b}$$

$$-\mathrm{A}\underline{x} \geq -\underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \underline{x} & \\
\hline
\underline{u} & A & \underline{b} \\
\underline{v} & -A & -\underline{b} \\
\hline
 & \underline{c} &
\end{array}$$

quindi si introducono 2m variabili duali, $\underline{u}$ e $\underline{v}$

$$\max \quad (\underline{b}^T \underline{u} - \underline{b}^T v)$$

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\underline{u} - \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\underline{v} \leq \underline{c}$$

$$\underline{u} \geq \underline{0}, v \geq \underline{0}$$

$$\max \quad (\underline{b}^T \underline{u} - \underline{b}^T v)$$

$$A^T\underline{u} - A^T\underline{v} \leq \underline{c}$$

$$\underline{u} \geq \underline{0}, v \geq \underline{0}$$

e sostituendo $\underline{w} = \underline{u} - \underline{v}$ si ottiene (D)

$$(P) \quad min \ \ \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$(D) \quad max \ \ \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A^T\underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{w} \quad n.v.$$

Calcolo del problema duale

- Dato un generico problema di PL, sarebbe possibile trasformarlo in uno equivalente in forma canonica di min/max per calcolarne il duale

- In realtà, questo non è necessario, in quanto è **sempre** possibile calcolare **direttamente** il duale del problema dato

Teoria della Dualità

$$
\begin{aligned}
&\max \quad 5x_1 + 3x_2 \\
&s.t. \\
&x_1 + 4x_2 - 8x_3 \quad \geq 2 \\
&7x_2 + 12x_3 \quad \leq 4 \\
&9x_1 - 8x_2 + x_3 \quad = 7 \\
&x_1, x_2, x_3 \quad \geq 0
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	x_3	
w_1	1	4	-8	2
w_2	0	7	12	4
w_3	9	-8	1	7
	5	3	0	

$$
\begin{aligned}
&\min \quad 2w_1 + 4w_2 + 7w_3 \\
&s.t. \\
&w_1 + 9w_3 \quad \geq 5 \\
&4w_1 + 7w_2 - 8w_3 \quad \geq 3 \\
&-8w_1 + 12w_2 + w_3 \quad \geq 0 \\
&w_1 \leq 0, w_2 \geq 0, w_3 \ n.v.
\end{aligned}
$$

Dualità: regole di trasformazione generali

	min		max	
Coefficienti f.o.	$\underline{c}^T$	$\Longleftrightarrow$	$\underline{c}$	Termini noti vincoli
Termini noti vincoli	$\underline{b}$	$\Longleftrightarrow$	$\underline{b}^T$	Coefficienti f.o.
Coefficienti vincoli	A	$\Longleftrightarrow$	A^T	Coefficienti vincoli
	$\geq$		≥ 0	
i-mo vincolo (i=1…m)	$\leq$	$\Longleftrightarrow$	≤ 0	*i*-ma variabile (i=1…m)
	$=$		n.v.	
	≥ 0		$\leq$	
j-ma variabile (j=1...n)	≤ 0	$\Longleftrightarrow$	$\geq$	*j*-mo vincolo (j=1...n)
	n.v.		$=$	

La teoria della Dualità è importante perchè:

- le soluzioni di (P) e (D) sono legate tra loro;
- la soluzione ottima del duale è un bound sulla soluzione ottima del primale.
- le soluzioni duali hanno un’interpretazione economica utile per l’analisi di sensitività (post-ottimalità);
- sulla teoria della dualità sono basati algoritmi, quali il Simplesso Duale, l’Algoritmo Primale-Duale, il Delayed Column Generation alternativi al Simplesso (Primale) utili per certe classi di problemi;
- può in certi casi essere conveniente risolvere D al posto di P (conviene risolvere il problema con il minor numero di vincoli)

Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Siano dati i problemi

$$(P) \quad \min \ \underline{c}^T \underline{x} \qquad\qquad (D) \quad \max \ \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A\underline{x} \geq \underline{b} \qquad\qquad A^T\underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \qquad\qquad \underline{w} \geq \underline{0}$$

1. Teorema (debole) della dualità

Siano $\underline{x}$ e $\underline{w}$ soluzioni ammissibili rispettivamente per (P) e (D), allora

$$\underline{c}^T \underline{x} \geq \underline{b}^T \underline{w}$$

$$(P) \quad min \ \underline{c}^T \underline{x} \qquad\qquad (D) \quad max \ \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A\underline{x} \geq \underline{b} \qquad\qquad A^T\underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \qquad\qquad \underline{w} \geq \underline{0}$$

Dimostrazione:

$\underline{\hat{x}}$ soluzione ammissibile di P $\Longrightarrow$ $A\underline{\hat{x}} \geq \underline{b}$ (1)

Poichè $\underline{\hat{w}} \geq 0$, premoltiplicando la (1) per $\underline{\hat{w}}$ si ottiene: $\underline{\hat{w}}^T A\underline{\hat{x}} \geq \underline{\hat{w}}^T \underline{b}$ (2)

Poichè $\underline{\hat{w}}$ soluzione ammissibile di D $\Longrightarrow$ $\underline{c}^T \geq \underline{\hat{w}}^T A$ (3)

Dalle disequazioni (2) e (3), sapendo che $\underline{\hat{x}} \geq 0$ si ha: $\underline{c}^T \underline{\hat{x}} \geq \underline{\hat{w}}^T A\underline{\hat{x}} \geq \underline{\hat{w}}^T \underline{b}$

■

Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Corollario 1

Se $\underline{x}$ è una soluzione ammissibile per (P) e $\underline{w}$ una soluzione ammissibile per (D) tali che $\underline{c}^T\underline{x}=\underline{b}^T\underline{w}$ allora $\underline{x}$ e $\underline{w}$ sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi.

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che $\underline{x}$ non sia ottimo per (P). Quindi esiste un'altra soluzione ammissibile $\underline{x}^*$ di (P) tale che $\underline{c}^T\underline{x}^* < \underline{c}^T\underline{x}$. Ma poiché per ipotesi $\underline{c}^T\underline{x}=\underline{b}^T\underline{w}$ si ha che $\underline{c}^T\underline{x}^*<\underline{b}^T\underline{w}$. Assurdo perchè va contro la tesi del teorema debole della dualità.

Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Corollario 2

Se il problema primale (P) è illimitato inferiormente allora il duale (D) è inammissibile. Viceversa se il duale (D) è illimitato superiormente il primale (P) è inammissibile.

Dimostrazione.

Supponiamo che il valore ottimo del primale (P) sia $-\infty$ e che il problema duale ammetta una soluzione $\underline{w}$. Dal teorema della dualità debole si ha che $\underline{c}^T\underline{x} \geq \underline{b}^T\underline{w}$ per una qualsiasi soluzione ammissibile x di (P). Questo implica che $\underline{b}^T\underline{w} \leq -\infty$. Assurdo.

Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Il corollario 2 stabilisce che l'illimitatezza di un problema implica l'inammissibilità del suo duale. Tuttavia questa non è una proprietà simmetrica ossia se un problema è inammissibile non è detto che il suo duale sia illimitato. Per esempio:

$$min \;\; -x_1 - x_2$$

$$-x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 - x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Calcolare il duale di *(P)* e risolvere entrambi i problemi graficamente