STATISTICA E ANALISI DEI DATI

Capitolo 13 – Verifica delle Ipotesi

Dott. Stefano Cirillo
Dott. Luigi Di Biasi

a.a. 2025-2026

Verifica Delle Ipotesi

- Le aree più importanti dell'inferenza statistica sono:
  - la stima dei parametri
  - la verifica delle ipotesi
- La **verifica delle ipotesi** interviene spesso:
  - nelle ricerche di mercato
  - nelle indagini sperimentali e industriali
  - nei sondaggi di opinione
  - nelle indagini sulle condizioni sociali degli abitanti di una città o di una nazione
- Interviene, ad esempio, quando
  - si desidera determinare se un nuovo metodo di costruzione di lampadine aumenta la durata delle stesse;
  - si deve decidere se un nuovo prodotto farmaceutico è più efficace nel trattamento di una certa infezione rispetto ad un altro prodotto in commercio;

Verifica Delle Ipotesi

- Nel procedimento di verifica delle ipotesi consideriamo:
  - una **popolazione** descritta da una **variabile aleatoria** X caratterizzata da una funzione di probabilità o densità di probabilità $f(x;\vartheta)$
  - un'**ipotesi** su di un parametro non noto ϑ della popolazione
  - un campione casuale $X_1, X_2, \ldots, X_n$
- **Definizione**:
  - Un'**ipotesi statistica** è un'affermazione o una **congettura** sul parametro non noto ϑ
  - Se l'ipotesi statistica specifica completamente la funzione di distribuzione e\o densità $f(x;\vartheta)$ è detta <u>ipotesi semplice</u>, altrimenti è chiamata <u>ipotesi composita</u> <u>(o composta)</u>

Ipotesi Semplice e Composta

- Un'ipotesi è detta **semplice** se specifica completamente la distribuzione della popolazione, incluso ogni parametro necessario
  - In pratica, un'ipotesi è semplice se non lascia ambiguità sui valori dei parametri.
  - **Esempio**: $H_0: \mu = 100$ e $\sigma^2 = 25$ dove μ è la media e σ^2 la varianza della popolazione (assumendo una distribuzione normale)
    - Qui, la media e la varianza sono entrambe specificate
- Un'ipotesi è detta **composta** se non specifica completamente la distribuzione della popolazione o lascia uno o più parametri indeterminati.
  - In pratica, un'ipotesi è composta quando copre un'intera famiglia di distribuzioni.
  - **Esempio**:
    - $H_0: \mu = 100$, senza specificare σ^2 (varianza non nota).
    - $H_1: \mu \neq 100$, che rappresenta un'intera classe di distribuzioni con medie diverse da 100
- **Notazione:**
  - Per denotare un'ipotesi statistica si utilizza il carattere **H** seguito dai due punti ('**:**') e successivamente dall'affermazione che specifica l'ipotesi.

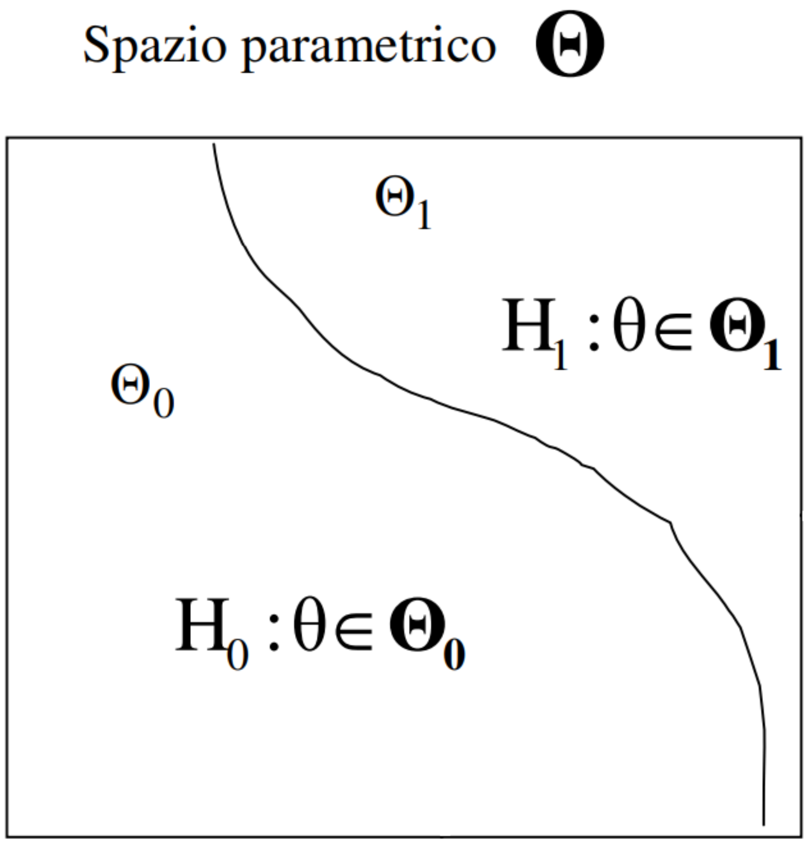
Verifica Delle Ipotesi

- L'ipotesi soggetta a verifica è denotata con $\mathbf{H_0}$ ed è chiamata **ipotesi nulla**
- Si chiama **test di ipotesi** il procedimento o regola con cui si decide, sulla base dei dati del campione, se **accettare** o **rifiutare** $\mathbf{H_0}$
- La costruzione del test richiede la formulazione, in **contrapposizione** all'ipotesi nulla, di una proposizione alternativa
  - Questa proposizione prende il nome di **ipotesi alternativa** ed è di solito indicata con $\mathbf{H_1}$
- L'ipotesi **nulla**, cioè l'ipotesi soggetta a verifica, si ha quando $\vartheta \in \theta_0$
- L'ipotesi **alternativa** si ha quando $\vartheta \in \theta_1$

$$\mathbf{H_0}: \vartheta \in \theta_0 \qquad \mathbf{H_1}: \vartheta \in \theta_1$$

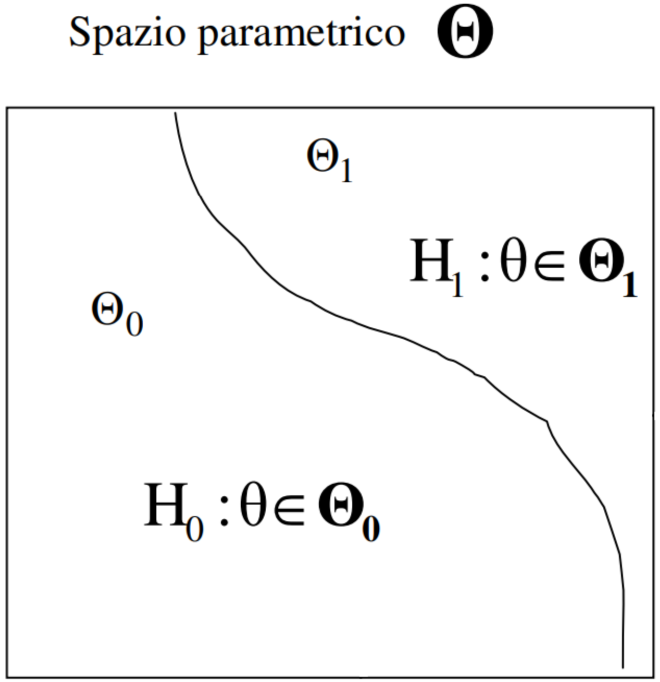
- Si ha quindi che:

$$Spazio\ parametrico\ \theta = \theta_1 \cup \theta_2$$
$$\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$$



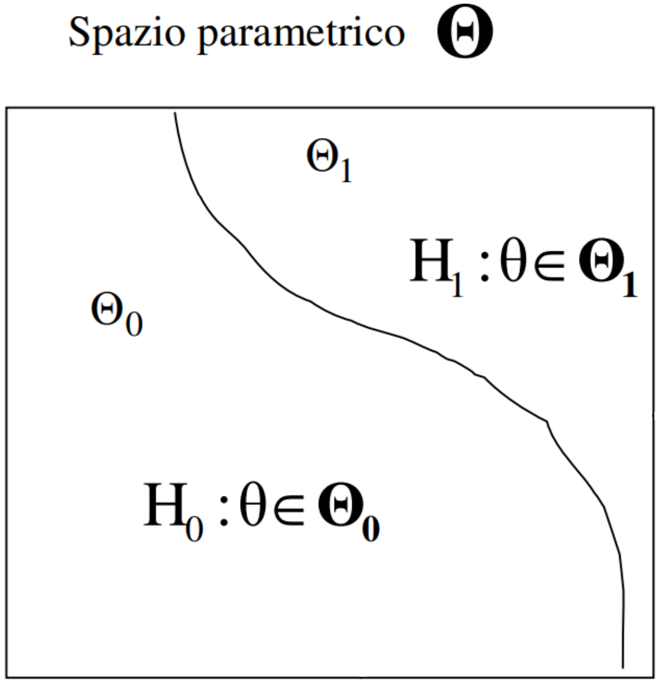
Problema Verifica Delle Ipotesi

- Il **problema della verifica delle ipotesi** consiste nel determinare un **test** ψ (Psi) che permetta di suddividere, mediante opportuni criteri, l'insieme dei possibili campioni, ossia l'insieme delle n–ple $x_1, x_2, \dots, x_n$ assumibili dal vettore aleatorio $X_1, X_2, \dots, X_n$ in due sottoinsiemi:
  - una regione di **accettazione** A dell'ipotesi nulla
  - una regione di **rifiuto** R dell'ipotesi nulla



Problema Verifica Delle Ipotesi

- Il **problema della verifica delle ipotesi** consiste nel determinare un **test** ψ (Psi) che permetta di suddividere, mediante opportuni criteri, l'insieme dei possibili campioni, ossia l'insieme delle n–ple $x_1, x_2, \dots, x_n$ assumibili dal vettore aleatorio $X_1, X_2, \dots, X_n$ in due sottoinsiemi:
  - una regione di **accettazione** A dell'ipotesi nulla
  - una regione di **rifiuto** R dell'ipotesi nulla
- Formulazione del test ψ:
  - **accettare** come valida l'ipotesi nulla se il campione osservato $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$
  - **rifiutare** l'ipotesi nulla se $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$



- **Nota**: Nel caso si verifichi che l'ipotesi nulla sia falsa, l'ipotesi alternativa sarà vera e viceversa
  - Spesso si usa dire che l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}$ deve essere verificata in alternativa all'ipotesi $\mathbf{H_1}$

Errore di Tipo I e II

- Nel seguire questo tipo di ragionamento si può incorrere in due tipi di errori:
  - rifiutare l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}$ nel caso in cui tale ipotesi sia vera;
    - si dice allora che si commette un **errore di tipo I** e si denota la probabilità di commettere tale errore con

$$\alpha(\vartheta)=P(\text{rifiutare } \mathbf{H_0}|\vartheta) \qquad \mathbf{H_0}: \vartheta \in \theta_0$$

  - accettare l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}$ nel caso in cui tale ipotesi sia falsa;
    - si dice allora che si commette un **errore di tipo II** e si denota la probabilità di commettere tale errore con

$$\beta(\vartheta)=P(\text{accettare } \mathbf{H_0}|\vartheta) \qquad \mathbf{H_0}: \vartheta \in \theta_1$$

	Rifiutare H_0	Accettare H_0
H_0 vera	Errore del I tipo Probabilità α	Decisione esatta Probabilità $1-\alpha$
H_0 falsa	Decisione esatta Probabilità $1-\beta$	Errore del II tipo Probabilità β

Esempio di Errore

- Esiste un'analogia in ambito giudiziario che può chiarire i concetti precedenti
- In tribunale una persona sottoposta ad un processo viene ritenuta innocente fino alla sentenza definitiva
  - L'ipotesi nulla è quindi "**l'imputato è innocente**"
  - L'ipotesi alternativa è "**l'imputato è colpevole**"
- In questo caso gli errori:
  - Di Tipo I: consiste nel condannare un innocente
  - Di Tipo II: consiste nell'assolvere un colpevole

Decisione statistica dopo il test	Imputato condannato	Imputato assolto
H_0 vera: l'imputato è innocente	Errore del I tipo Probabilità α	Decisione esatta Probabilità $1-\alpha$
H_0 falsa: l'imputato è colpevole	Decisione esatta Probabilità $1-\beta$	Errore del II tipo Probabilità β

Esempio di Errore

Realtà Vera (sconosciuta)	Decisione del Tribunale / Test	Interpretazione
Imputato è INNOCENTE (H_0 vera)	**Condanna (Rifiuto H_0)**	⛔ **ERRORE DI TIPO I** Abbiamo condannato un innocente. Questo è il **falso positivo** del sistema giudiziario. È considerato l'errore più grave. In statistica, la sua probabilità è **α (alfa)**, chiamato **livello di significatività**.
Imputato è INNOCENTE (H_0 vera)	**Assoluzione (Non rifiuto H_0)**	✅ **DECISIONE CORRETTA** Abbiamo assolto un innocente. Probabilità: **1 - α**.
Imputato è COLPEVOLE (H_0 falsa)	**Condanna (Rifiuto H_0)**	✅ **DECISIONE CORRETTA** Abbiamo condannato un colpevole. La probabilità di fare questo è **1 - β**, chiamata **potenza del test**. Un buon test vuole massimizzare questa probabilità.
Imputato è COLPEVOLE (H_0 falsa)	**Assoluzione (Non rifiuto H_0)**	⛔ **ERRORE DI TIPO II** Abbiamo assolto un colpevole. È un **falso negativo**. La sua probabilità è **β (beta)**. Un sistema giusto cerca di minimizzarla, ma c'è sempre un **trade-off** con l'errore di Tipo I.

Esempio di Errore – Fraud Detection

- **Sistema di Allerta Frodi Creditizie**
  - Immaginiamo che una banca usi un modello predittivo per **rilevare transazioni fraudolente**
    - **Ipotesi Nulla (H_0):** "La transazione è **legittima**". *(Lo stato normale, che assumiamo vero fino a prova contraria)*
    - **Ipotesi Alternativa (H_1):** "La transazione è **fraudolenta**". *(L'anomalia che il modello cerca di individuare)*
  - Il modello prende una decisione binaria: **"ALLERTA"** (flagga la transazione come frode) o **"OK"** (la lascia passare)

Esempio di Errore – Fraud Detection

Realtà Vera	Decisione del Modello	Esito e Nome Comune
Transazione LEGITTIMA (H_0 vera)	**ALLERTA (Rifiuta H_0)**	⛔ **ERRORE DI TIPO I / FALSO POSITIVO** Il modello blocca una transazione onesta. **Conseguenze:** Cliente arrabbiato, perdita di vendita, costo del servizio clienti. Probabilità = **α**.
Transazione LEGITTIMA (H_0 vera)	**OK (Non rifiuta H_0)**	✅ **VERO NEGATIVO / CORRETTA ACCETTAZIONE** Il modello lascia passare una transazione onesta. Probabilità = **$1 - \alpha$**.
Transazione FRAUDOLENTA (H_0 falsa)	**ALLERTA (Rifiuta H_0)**	✅ **VERO POSITIVO / CORRETTA RIVELAZIONE** Il modello blocca una frode. Questa è la sua **potenza ($1 - \beta$)**.
Transazione FRAUDOLENTA (H_0 falsa)	**OK (Non rifiuta H_0)**	⛔ **ERRORE DI TIPO II / FALSO NEGATIVO** Il modello **non rileva una frode** e la lascia passare. **Conseguenze:** Perdita finanziaria diretta per la banca. Probabilità = **β**.

Trade-off Pratico e Regolazione del Modello

- Il modello predittivo genera solitamente un **punteggio di rischio** (es. da 0 a 100)
- La banca deve scegliere una **soglia di decisione** (es. se punteggio > 75 si ha un ALERT).
- **Se abbasso la soglia** (es. > 60 → ALERT):
  - Catturerà **MOLTE PIÙ frodi** (Aumenta la **Potenza = 1-β**, diminuiscono i **Falsi Negativi**).
  - Ma bloccherà anche **MOLTE PIÙ transazioni legittime** (Aumentano i **Falsi Positivi / Errore Tipo I**, α sale)
  - **Risultato:** Sistema "paranoico". I clienti legittimi sono infastiditi.
- **Se alzo la soglia** (es. > 90 → ALERT):
  - Bloccherà **SOLO le frodi più evidenti**, disturbando pochissimi clienti onesti (Diminuiscono i **Falsi Positivi / Errore Tipo I**, α scende).
  - Ma **lascerei passare MOLTE frodi** (Diminuisce la **Potenza**, aumentano i **Falsi Negativi / Errore Tipo II**, β sale).
  - **Risultato:** Sistema "permissivo". Le perdite per frodi aumentano.

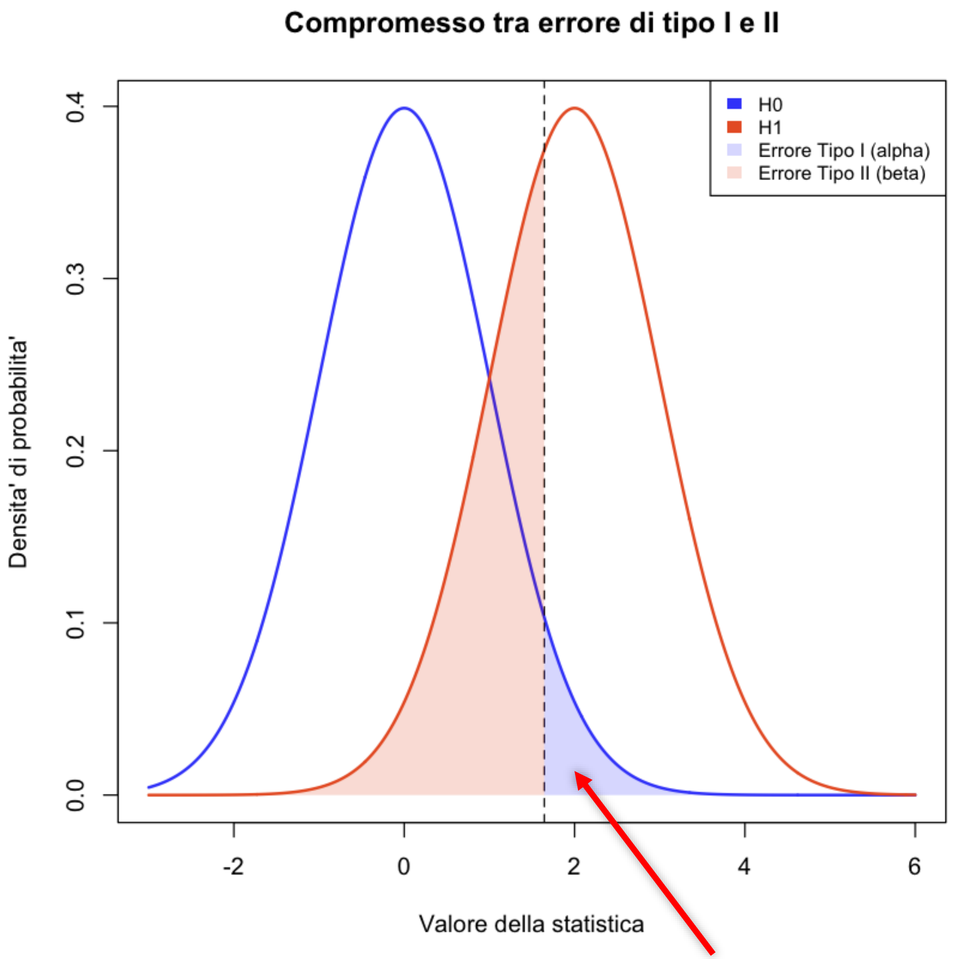
Test di Tipo I e II

- Per campioni casuali di fissata ampiezza, se si **diminuisce** la probabilità di commettere un errore di tipo I **aumenta** la probabilità di commettere un errore di tipo II e viceversa

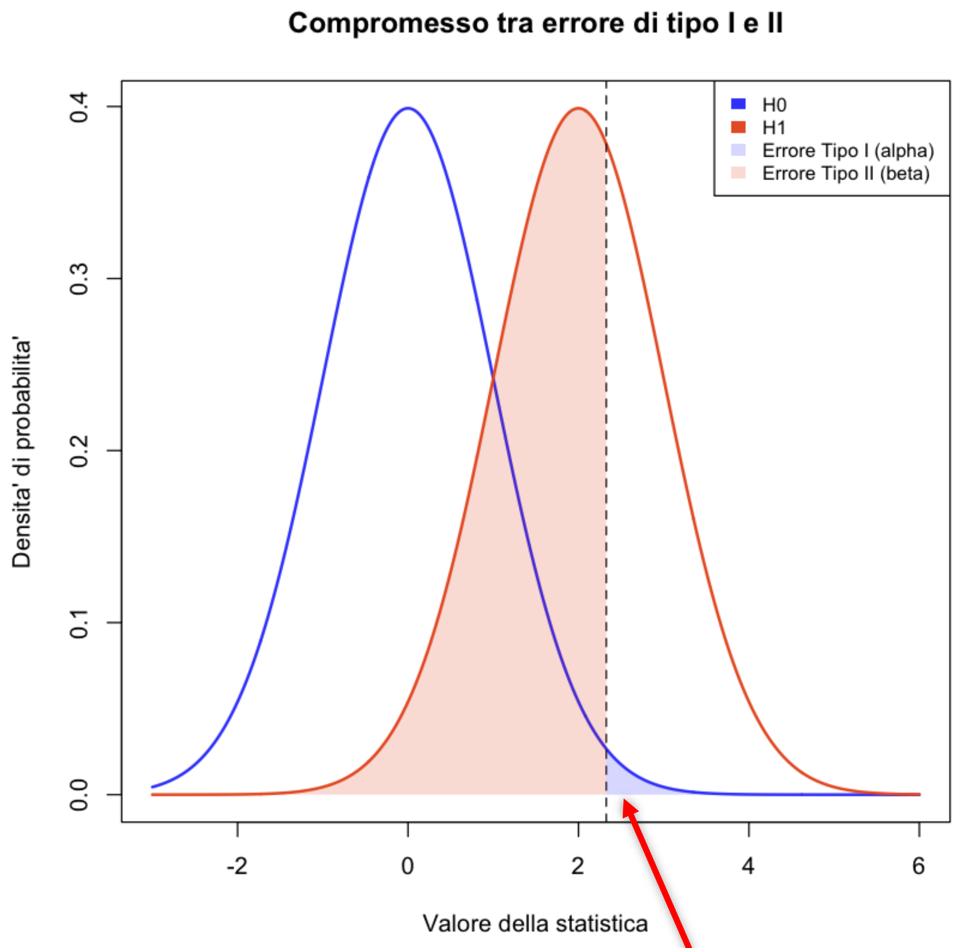
1. **Errore di tipo I ($\boldsymbol{\alpha}$)**:
   - Fissare α significa definire una soglia oltre la quale si rifiuta $\mathbf{H_0}$
   - Ridurre α restringe l'area critica (cioè la regione in cui si rifiuta $\mathbf{H_0}$)
     - Questo rende meno probabile rifiutare $\mathbf{H_0}$ quando è vera, ma comporta che sia più difficile rifiutarla anche quando $\mathbf{H_1}$ è vera
2. **Errore di tipo II ($\boldsymbol{\beta}$)**:
   - β dipende dalla sovrapposizione tra le distribuzioni di probabilità sotto $\mathbf{H_0}$ e $\mathbf{H_1}$
   - Se si riduce α, la regione in cui si rifiuta $\mathbf{H_0}$ si riduce, il che aumenta la probabilità che $\mathbf{H_1}$ venga accettata erroneamente (quindi aumenta β)

- **Relazione inversa**:
  - Con campioni di ampiezza fissata, le distribuzioni sotto $\mathbf{H_0}$ e $\mathbf{H_1}$ sono fisse. Riducendo α, si "sposta" il punto di separazione tra le due distribuzioni, aumentando β, e viceversa

Test di Tipo I e II



α=0.05



Se si riduce α(α=0.01), la regione in cui si rifiuta $\mathbf{H_0}$ si riduce e quindi aumenta β

Test di Tipo I e II

- Si tende a ricondurre la valutazione dell'errore all'errore di Tipo I
- **Idea di base**:
  - Nella costruzione del test conviene **fissare** la probabilità di commettere un errore di tipo I e cercare un test ψ che **minimizzi** la probabilità di commettere un errore di tipo II
- Solitamente la probabilità α di commettere un errore di tipo I si sceglie:
  - Uguale a 0.05, il test viene detto **statisticamente significativo**
  - Uguale a 0.01, il test viene detto **statisticamente molto significativo**
  - Uguale a 0.001, il test viene detto **statisticamente estremamente significativo**
- Quanto minore è il valore di α tanto maggiore è la credibilità di un eventuale rifiuto dell'ipotesi nulla

Verifica delle Ipotesi

- I test statistici relativi all'ipotesi alternativa sono di due tipi:
  - **Test bilaterali** (detti anche test bidirezionali)

    Ipotesi nulla: H$_{\mathbf{0}}$ $: \vartheta = \theta_0$ **Ipotesi Alternativa**: **H$_{\mathbf{1}}$**$: \vartheta \neq \theta_0$

  - Test **unilaterali** (detti anche test unidirezionali)
    - **Test unilaterale sinistro**

      H$_{\mathbf{0}}$ $: \vartheta \leq \theta_0$ **H$_{\mathbf{1}}$**$: \vartheta > \theta_0$

    - **Test unilaterale destro**

      H$_{\mathbf{0}}$ $: \vartheta \geq \theta_0$ **H$_{\mathbf{1}}$**$: \vartheta < \theta_0$

  avendo fissato a priori un livello di significatività α

P-value

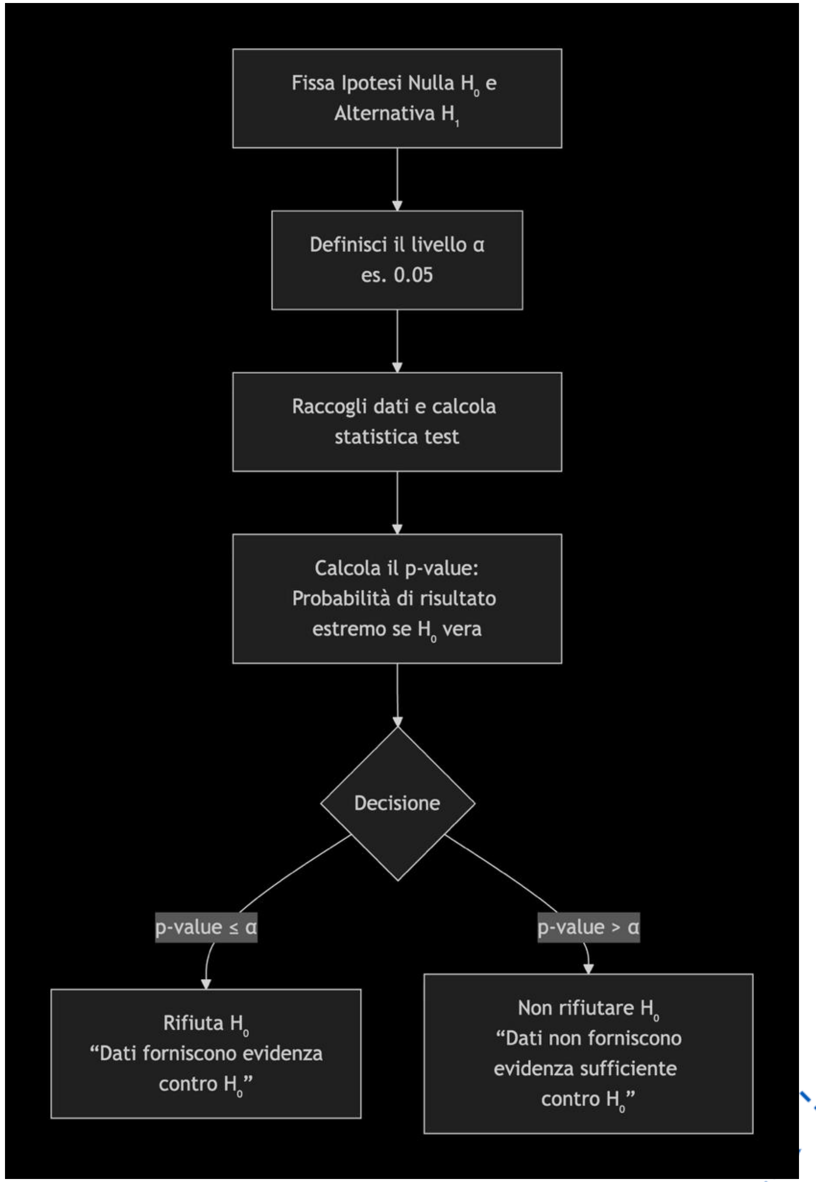
- Il **p-value** è uno strumento fondamentale nei test di ipotesi statistici, utilizzato per **valutare quanto i dati osservati siano compatibili con l'ipotesi nulla** $(\mathrm{H}_\mathbf{0})$
  - Serve a quantificare l'evidenza contro $\mathrm{H}_\mathbf{0}$ e **aiuta a decidere se rifiutare o meno** $\mathrm{H}_\mathbf{0}$ in favore dell'ipotesi alternativa $\mathrm{H}_\mathbf{1}$
  - Sia l'ipotesi $\mathbf{H_0}$ vera, il p-value è definito come la probabilità che la statistica del test $\widehat{\xi_n}$ assuma un valore uguale o più estremo di quello effettivamente osservato $\widehat{\xi_{os}}$
  - **Come si calcola il p-value?**
    - Per test a una coda destra: $p = P(\widehat{\xi_n} \geq \widehat{\xi_{os}} \mid \mathrm{H}_\mathbf{0})$
    - Per test a una coda sinistra: $p = P(\widehat{\xi_n} \leq \widehat{\xi_{os}} \mid \mathrm{H}_\mathbf{0})$
    - Per test a due code: $p = P\left(\widehat{\xi_n} \geq \widehat{\xi_{os}} \mid \mathrm{H}_\mathbf{0}\right) + P(\widehat{\xi_n} \leq -\widehat{\xi_{os}} \mid \mathrm{H}_\mathbf{0}) = 2 * P(\widehat{\xi_n} \geq |\widehat{\xi_{os}}| \mid \mathrm{H}_\mathbf{0})$
- **Criterio del p-value**
  - se $p > \alpha$, l'ipotesi $\mathbf{H_0}$ non può essere rifiutata
  - se $p \leq \alpha$, l'ipotesi $\mathbf{H_0}$ deve essere rifiutata

P-value

- Il **p-value** è uno strumento fondamentale nei test di ipotesi statistici, utilizzato per **valutare quanto i dati osservati siano compatibili con l'ipotesi nulla** $(\mathrm{H}_{\mathbf{0}})$
- In altre parole:

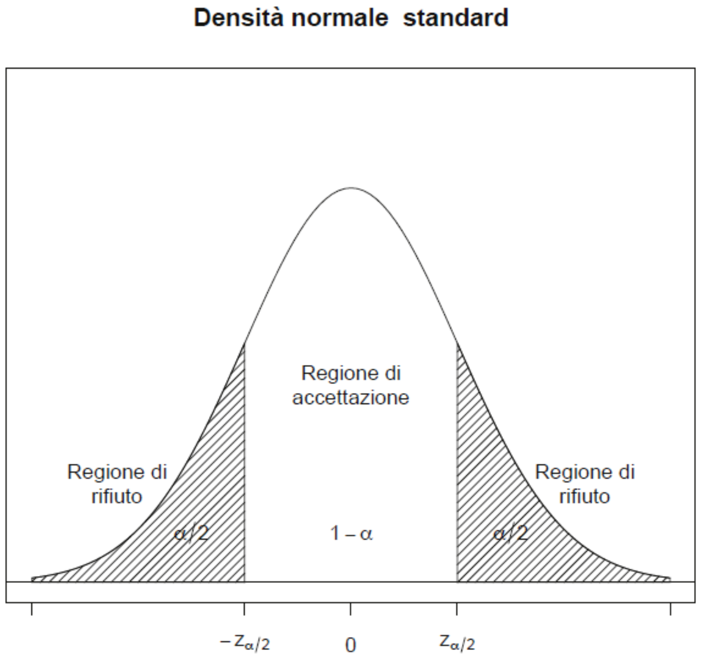
p-value = quanto è compatibile il dato con l'ipotesi nulla?

- **p-value basso** → i dati sono *poco compatibili* con H_0
- **p-value alto** → i dati sono *molto compatibili* con H_0



Test di ipotesi e intervalli di confidenza

- C'è una stretta relazione tra verifica delle ipotesi e intervalli di confidenza
  - La stima dell'intervallo di confidenza della media sconosciuta della popolazione fornisce due valori (Limite inferiore e Superiore) detti **limiti fiduciali** che comprendono **l'intervallo di confidenza**
  - Il calcolo dell'intervallo di confidenza serve anche per il test d'inferenza e fornisce esattamente le stesse conclusioni



- Se l'intervallo di confidenza al livello $1 - \alpha$ contiene il valore μ_0 espresso nell'ipotesi nulla $H_0\colon \mu = \mu_0$ di un test bilaterale, **non esistono evidenze sufficienti per respingere** H_0 al livello di significatività α

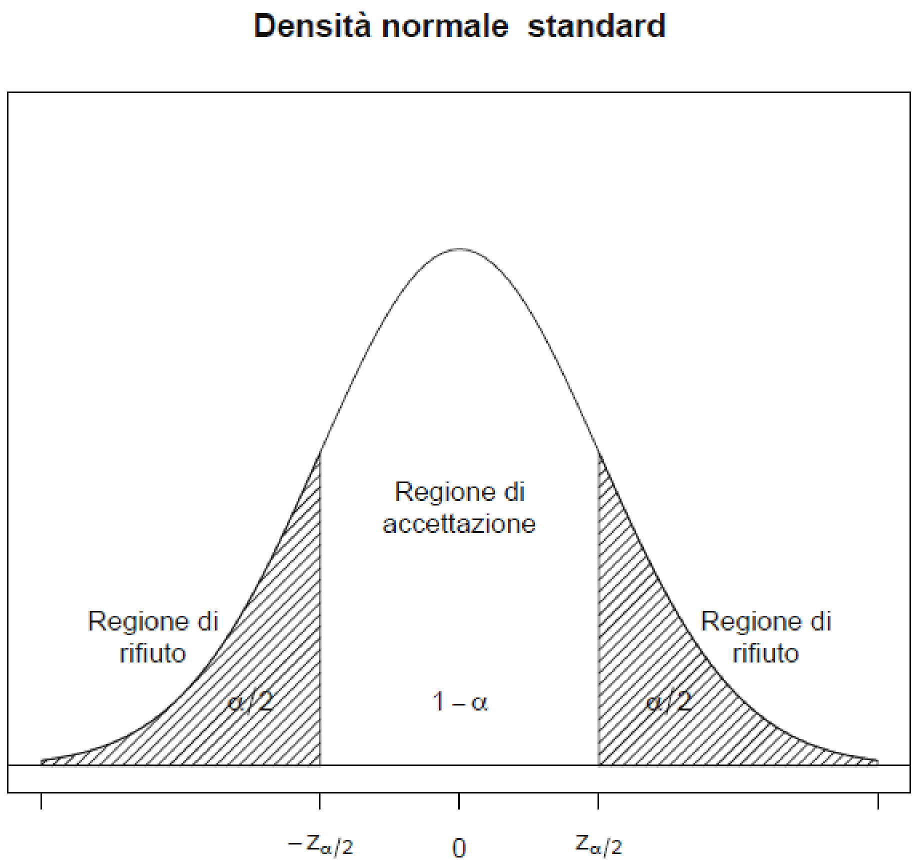
- Se l'intervallo di confidenza non contiene il valore μ_0 espresso nell'ipotesi nulla, **esistono elementi sufficienti per rifiutare** H_0 al livello di significatività α

Popolazione Normale

- Utilizzando test bilaterali e unilaterali, desideriamo affrontare i seguenti problemi:

  i. Verifica di ipotesi sul valore medio μ nel caso in cui:
     - la varianza σ^2 della popolazione normale è nota
     - la varianza σ^2 della popolazione normale è non nota

  ii. Verifica di ipotesi sulla varianza σ^2 nel caso in cui:
     - il valore medio μ della popolazione normale è noto
     - il valore medio μ della popolazione normale è non noto



STATISTICA E ANALISI DEI DATI

Test su μ con varianza σ^2 nota

Test su μ con varianza σ^2 nota

- Sia $X_1, X_2, \dots, X_n$ un campione casuale estratto da una popolazione normale descritta da una variabile aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma)$ con varianza σ^2 nota
- Consideriamo come statistica test:

$$Z_n = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- **Test bilaterali**

$$\mathbf{H_0}: \mu = \mu_0 \qquad \mathbf{H_1}: \mu \neq \mu_0$$

  - Se l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}$ è vera, allora $\mu = \mu_0$ e quindi si ha:

$$Z_n = \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Test su μ con varianza σ^2 nota - Test bilaterale

- **Test bilaterali**

$$\mathbf{H_0}: \mu = \mu_0 \qquad \mathbf{H_1}: \mu \neq \mu_0$$

  - Se l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}$ è vera, allora $\mu = \mu_0$ e quindi si ha:

$$Z_n = \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

  Cioè Z_n è distribuita come una normale standard

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si accetta se: $-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X_n}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si rifiuta se: $\frac{\overline{X_n}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ oppure $\frac{\overline{X_n}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{\frac{\alpha}{2}}$

Test su μ con varianza σ^2 nota - Test bilaterale

- Denotando con z_{os} la statistica di test:

$$Z_{os} = \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- Calcoliamo il p-value per il test bilaterale:

$$pvalue = P(Z_n < -|z_{os}|) + P(Z_n > |z_{os}|) = 2\,P(Z_n > |z_{os}|) \;= 2\Big[1 - P(Z_n \leq |z_{os}|)\Big]$$

  - Corrisponde alla probabilità che la statistica del test Z_n assuma un valore uguale o più estremo di quello effettivamente osservato Z_{os}
    - Se e solo se l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}$: $\mu = \mu_0$ è vera

- Calcolo del p-value del test bilaterale in R:

$$2 * (1 - \mathsf{pnorm}(\mathsf{abs}(\mathsf{z_{os}}), \mathsf{mean} = 0, \mathsf{sd} = 1))$$

Esempio

- Una ditta produttrice di lampadine sostiene che la durata media di un certo tipo di lampadine prodotte sia $\mu = 1600$ ore, con una deviazione standard $\sigma = 120$ ore
- Viene analizzato un campione di 100 lampadine e si riscontra una durata media di 1570 ore
- Si desidera costruire il test di misura $\alpha = 0.05$ per verificare l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}: \mu = 1600$ in alternativa all'ipotesi $\mathbf{H_1}: \mu \neq 1600$
- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi bilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.05$
    - $\sigma = 120$
    - $\mu_0 = 1600$
    - $n = 100$
    - $\bar{X}_{100} = 1570$

Esempio

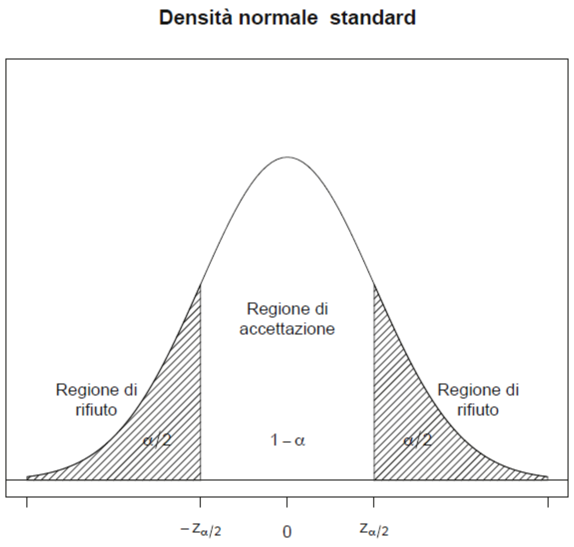
- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi bilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.05$
    - $\sigma = 120$
    - $\mu_0 = 1600$
    - $n = 100$
    - $\bar{X}_{100} = 1570$

```
> alpha<-0.05
> mu0<-1600
> sigma<-120
> qnorm(1-alpha/2,mean=0,sd=1)
[1] 1.959964
> n<-100
> meancamp<-1570
> (meancamp-mu0)/(sigma/sqrt(n))

[1] -2.5
>
> pvalue<-2*(1-pnorm(2.5,mean=0,sd=1))
> pvalue
[1] 0.01241933
```

Esempio

- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi bilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.05$
    - $\sigma = 120$
    - $\mu_0 = 1600$
    - $n = 100$
    - $\bar{X}_{100} = 1570$




```
> alpha<-0.05
> mu0<-1600
> sigma<-120
> qnorm(1-alpha/2,mean=0,sd=1)
[1] 1.959964
> n<-100
> meancamp<-1570
> (meancamp-mu0)/(sigma/sqrt(n))

[1] -2.5
>
> pvalue<-2*(1-pnorm(2.5,mean=0,sd=1))
> pvalue
[1] 0.01241933
```

$z\frac{\alpha}{2}$

$$z_{os} = \frac{\overline{x_n} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Poiché $p < \alpha$, l'ipotesi **H$_0$** deve essere rifiutata

Poiché -2.5 cade al di fuori della regione di accettazione, occorre quindi **rifiutare** l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 5% $(\alpha = 0.05)$

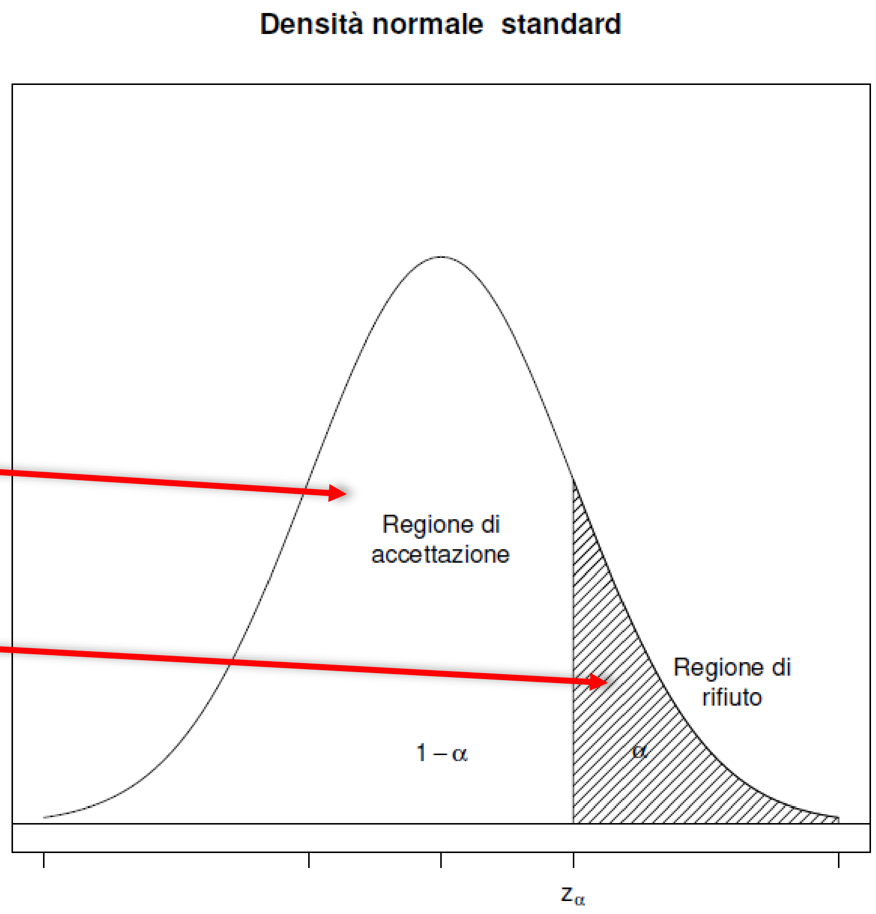
Test Unilaterale Sinistro

- **Test unilaterale sinistro**

  $$\mathbf{H_0}: \mu \leq \mu_0 \qquad \mathbf{H_1}: \mu > \mu_0$$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si accetta se: $\frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_\alpha$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si rifiuta se se: $\frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_\alpha$



Test Unilaterale Sinistro

- Denotando con z_{os} la statistica di test:

$$z_{os} = \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- Calcoliamo il p-value per il test unilaterale sinistro:

$$pvalue = P(Z_n > z_{os}) = 1 - P(Z_n \leq z_{os})$$

  - Corrisponde alla probabilità che la statistica del test Z_n assuma un **valore uguale o più estremo** di quello effettivamente osservato z_{os}
    - Se e solo se l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}: \mu \leq \mu_0$ è vera

- Calcolo del p-value del test bilaterale in R:

$$1 - \mathrm{pnorm}(\mathrm{z_{os}}, \mathrm{mean} = 0, \mathrm{sd} = 1)$$

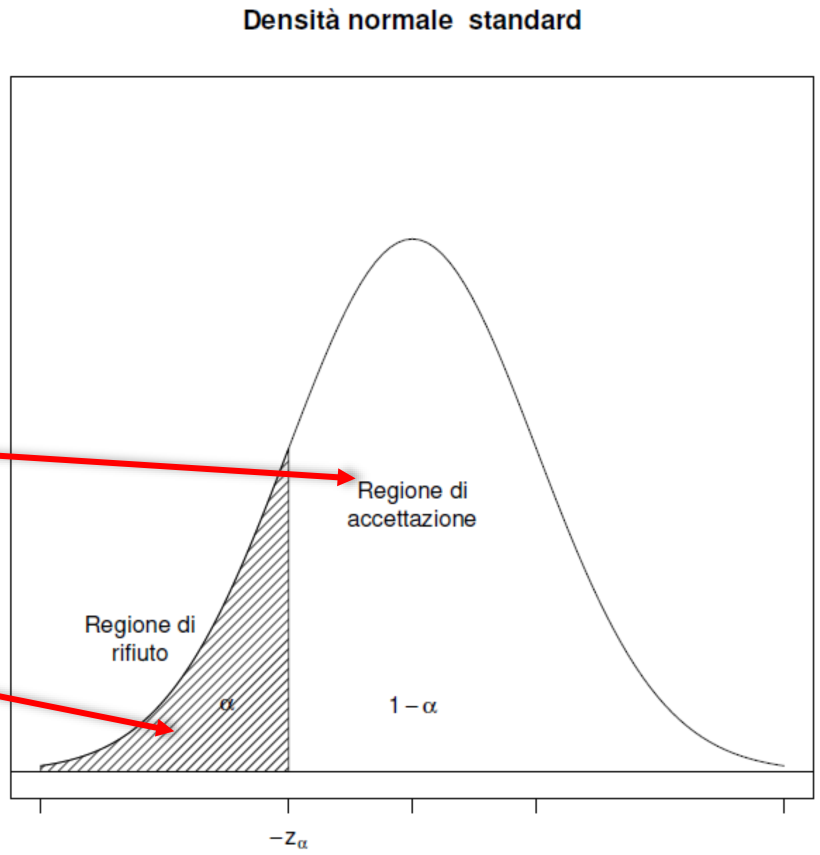
Test Unilaterale Sinistro

- **Test unilaterale destro**

$$\mathbf{H_0}: \mu \geq \mu_0 \qquad \mathbf{H_1}: \mu < \mu_0$$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si accetta se: $\frac{\overline{X_n}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > -z_\alpha$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si rifiuta se se: $\frac{\overline{X_n}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_\alpha$



Test unilaterale destro

- Denotando con z_{os} la **statistica di test**:

$$z_{os} = \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- Calcoliamo il p-value per il test unilaterale sinistro:

$$pvalue = P(Z_n \leq z_{os})$$

  - Corrisponde alla probabilità che la statistica del test Z_n assuma un valore uguale o più estremo di quello effettivamente osservato z_{os}
    - Se e solo se l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}: \mu \leq \mu_0$ è vera

- Calcolo del p-value del test bilaterale in R:

$$\mathrm{pnorm}(\mathrm{z_{os}}, \mathrm{mean} = 0, \mathrm{sd} = 1)$$

Esempio

- Un'**industria produttrice** di un nuovo tipo di fertilizzante assicura che l'utilizzo di tale prodotto per la produzione di una certa coltura condurrà ad una produzione media annua maggiore o uguale a 1800 kg per ettaro, con una deviazione standard di 120 kg

- Un'**azienda agricola** desidera controllare se l'utilizzo di questo nuovo tipo di fertilizzante permetta effettivamente di ottenere la produzione media annua dichiarata dall'industria
  - Per risolvere il problema l'azienda osserva il raccolto ottenuto in 60 differenti appezzamenti di un ettaro ciascuno ed ottiene una produzione media $\bar{X}_{60} = 1780$ kg

- Si desidera costruire il test di misura $\alpha = 0.05$ per verificare l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}: \mu \geq 1800$ in alternativa all'ipotesi $\mathbf{H_1}: \mu < 1600$
  - Occorre applicare un test di verifica di ipotesi unilaterale. Si ha che:
    - $\alpha = 0.05$
    - $\sigma = 120$
    - $\mu_0 = 1800$
    - $n = 60$
    - $\bar{X}_{60} = 1780$

Esempio

- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi unilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.05$
    - $\sigma = 120$
    - $\mu_0 = 1800$
    - $n = 60$
    - $\bar{X}_{60} = 1780$

```
> alpha<-0.05
> mu0<-1800
> sigma<-120
> qnorm(alpha,mean=0,sd=1)
[1] -1.644854
> n<-60
> meancamp<-1780
> (meancamp-mu0)/(sigma/sqrt(n))
[1] -1.290994
>
> pvalue<-pnorm(-1.290994,mean=0,sd=1)
> pvalue
[1] 0.09835288
```

Esempio

- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi unilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.05$
    - $\sigma = 120$
    - $\mu_0 = 1800$
    - $n = 60$
    - $\bar{X}_{60} = 1780$

```
> alpha<-0.05
> mu0<-1800
> sigma<-120
> qnorm(alpha,mean=0,sd=1)
[1] -1.644854
> n<-60
> meancamp<-1780
> (meancamp-mu0)/(sigma/sqrt(n))
[1] -1.290994
>
> pvalue<-pnorm(-1.290994,mean=0,sd=1)
> pvalue
[1] 0.09835288
```

$\rightarrow z_\alpha$

$\rightarrow z_{os} = \dfrac{\overline{X_n} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Poiché $p > \alpha$, l'ipotesi $\mathbf{H_0}$ deve essere **accettata**

Poiché -1.29 cade nella regione di accettazione, occorre quindi **accettare** l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 5% ($\alpha = 0.05$)

STATISTICA E ANALISI DEI DATI

Test su μ con varianza σ^2 NON nota

Test su μ con varianza σ^2 NON nota

- Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione casuale estratto da una popolazione normale descritta da una variabile aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma)$ con varianza σ^2 **NON** nota
- Consideriamo come statistica test:

$$T_n = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

T_n è distribuita come Student con *n*-1 gradi di libertà

  - T_n è una statistica poiché dipende esclusivamente dal campione casuale considerato

- **Test bilaterali**

$$\mathbf{H_0}: \mu = \mu_0 \qquad \mathbf{H_1}: \mu \neq \mu_0$$

Test su μ con varianza σ^2 NON nota - Test bilaterale

- **Test bilaterali**

$$\mathbf{H_0}: \mu = \mu_0 \qquad \mathbf{H_1}: \mu \neq \mu_0$$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si accetta se:

$$-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} < \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} < t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

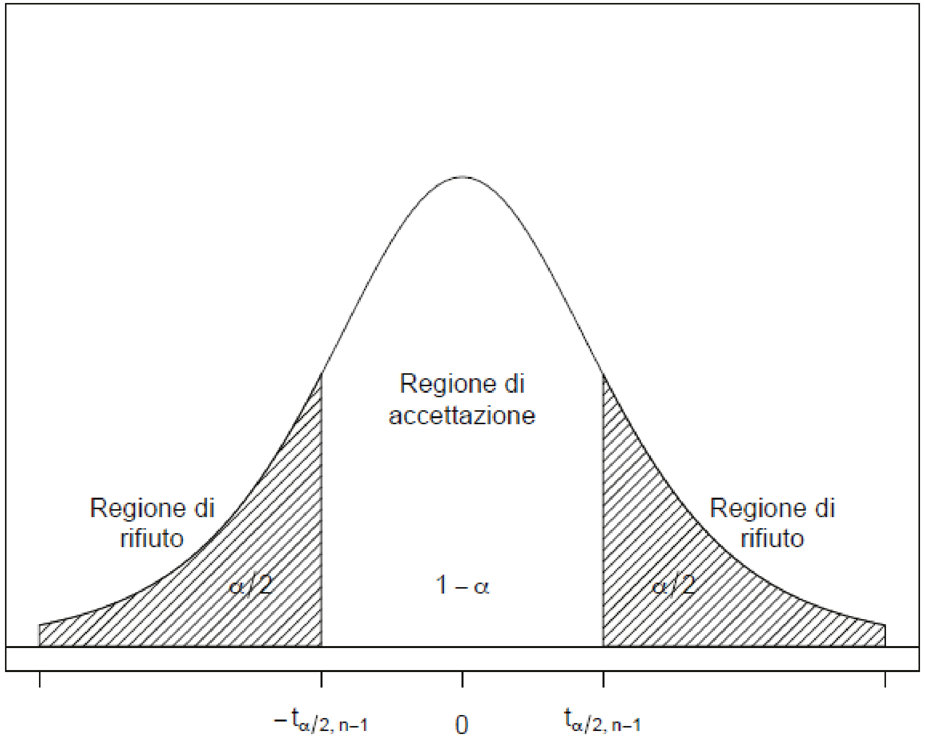
- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si rifiuta se se:

$$\frac{\overline{X_n}-\mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} < -t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \text{ oppure } \frac{\overline{X_n}-\mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

- Per calcolare il valore $t_{\frac{\alpha}{2}}$ si usa:

$$\mathrm{qt}(1-\alpha/2, \mathrm{df}=\mathrm{n}-1)$$

Densità di Student con n-1 gradi di libertà



Test su μ con varianza σ^2 NON nota - Test bilaterale

- Denotando con t_{os} la statistica di test:

$$t_{os} = \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

- Calcoliamo il p-value per il test bilaterale:

$$pvalue = P(T_n < -|t_{os}|) + P(T_n > |t_{os}|) = 2\,P(T_n > |t_{os}|) = 2\left[1 - P(T_n \leq |t_{os}|)\right]$$

  - Corrisponde alla probabilità che la statistica del test T_n assuma un valore uguale o più estremo di quello effettivamente osservato t_{os}
    - Se e solo se l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}: \mu = \mu_0$ è vera

- Calcolo del p-value del test bilaterale in R:

$$2 * (1 - \mathrm{pt}(\mathrm{abs}(\mathrm{t_{os}}), \mathrm{df} = \mathrm{n} - 1))$$

Esempio (i)

- Una ditta dichiara che un certo tipo di tubi hanno un contenuto medio di rame del 23 gr
- La ditta desidera controllare se la quantità di rame presente nei tubi prodotti è quella richiesta
- A tal fine, analizza un campione di 20 tubi e riscontra un contenuto medio di rame di $\bar{X}_{20} = 23.5$ con una deviazione standard campionaria di $S = 24$
- Si desidera costruire il test di misura $\alpha = 0.01$ per verificare l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}: \mu = 23$ in alternativa all'ipotesi $\mathbf{H_1}: \mu \neq 23$
- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi bilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.01$
    - $S_n = 24$
    - $\mu_0 = 23$
    - $n = 20$
    - $\bar{X}_{20} = 23.5$

Esempio (i)

- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi bilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.01$
    - $S_n = 24$
    - $\mu_0 = 23$
    - $n = 20$
    - $\bar{X}_{20} = 23.5$

```
> alpha<-0.01
> mu0<-23
> n<-20
> qt(1-alpha/2,df=n-1)
[1] 2.860935
> meancamp<-23.5
> devcamp<-0.24
> (meancamp-mu0)/(devcamp/sqrt(n))
[1] 9.31695
>
> pvalue<-2*(1-pt(9.31695,df=n-1))
> pvalue
[1] 1.624559e-08
```

Esempio (i)

- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi bilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.01$
    - $S_n = 24$
    - $\mu_0 = 23$
    - $n = 20$
    - $\bar{X}_{20} = 23.5$

```
> alpha<-0.01
> mu0<-23
> n<-20
> qt(1-alpha/2,df=n-1)
[1] 2.860935
> meancamp<-23.5
> devcamp<-0.24
> (meancamp-mu0)/(devcamp/sqrt(n))
[1] 9.31695
>
> pvalue<-2*(1-pt(9.31695,df=n-1))
> pvalue
[1] 1.624559e-08
```

$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$

$$t_{os} = \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

Poiché $p < \alpha$, l'ipotesi **H**$_0$ deve essere **rifiutata**

Poiché 9.31 cade al di fuori della regione di accettazione, occorre quindi **rifiutare** l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 1% $(\alpha = 0.01)$

Esempio (ii)

- Una compagnia aerea afferma che il peso medio del bagaglio dei passeggeri dei suoi voli di linea è 19.8 kg
- La compagnia desidera sottoporre a verifica tale ipotesi con un livello di significatività dell'1%
- A tal fine, considera un campione di 100 passeggeri e riscontra un peso medio campionario di 20.2 kg con una deviazione standard campionaria di 3.6 kg
- Si desidera costruire il test di misura $\alpha = 0.01$ per verificare l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}: \mu = 19.8$ in alternativa all'ipotesi $\mathbf{H_1}: \mu \neq 19.8$
- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi bilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.01$
    - $S_{100} = 3.6$
    - $\mu_0 = 19.8$
    - $n = 100$
    - $\bar{X}_{100} = 20.2$

Esempio (ii)

- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi bilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.01$
    - $S_{100} = 3.6$
    - $\mu_0 = 19.8$
    - $n = 100$
    - $\bar{X}_{100} = 20.2$

```
> alpha<-0.01
> mu0<-19.8
> n<-100
> qt(1-alpha/2,df=n-1)
[1] 2.626405
> meancamp<-20.2
> devcamp<-3.6
> (meancamp-mu0)/(devcamp/sqrt(n))
[1] 1.111111
>
> pvalue<-2*(1-pt(1.111111,df=n-1))
> pvalue
[1] 0.2692118
```

Esempio (ii)

- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi bilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.01$
    - $S_{100} = 3.6$
    - $\mu_0 = 19.8$
    - $n = 100$
    - $\bar{X}_{100} = 20.2$

```
> alpha<-0.01
> mu0<-19.8
> n<-100
> qt(1-alpha/2,df=n-1)
[1] 2.626405
> meancamp<-20.2
> devcamp<-3.6
> (meancamp-mu0)/(devcamp/sqrt(n))
[1] 1.111111
>
> pvalue<-2*(1-pt(1.111111,df=n-1))
> pvalue
[1] 0.2692118
```

$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$

$$t_{os} = \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

Poiché $p > \alpha$, l'ipotesi $\mathbf{H_0}$ deve essere accettata

Poiché 1.11 cade nella regione di accettazione, occorre quindi accettare l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 1% ($\alpha = 0.01$)

Test unilaterale Sinistro

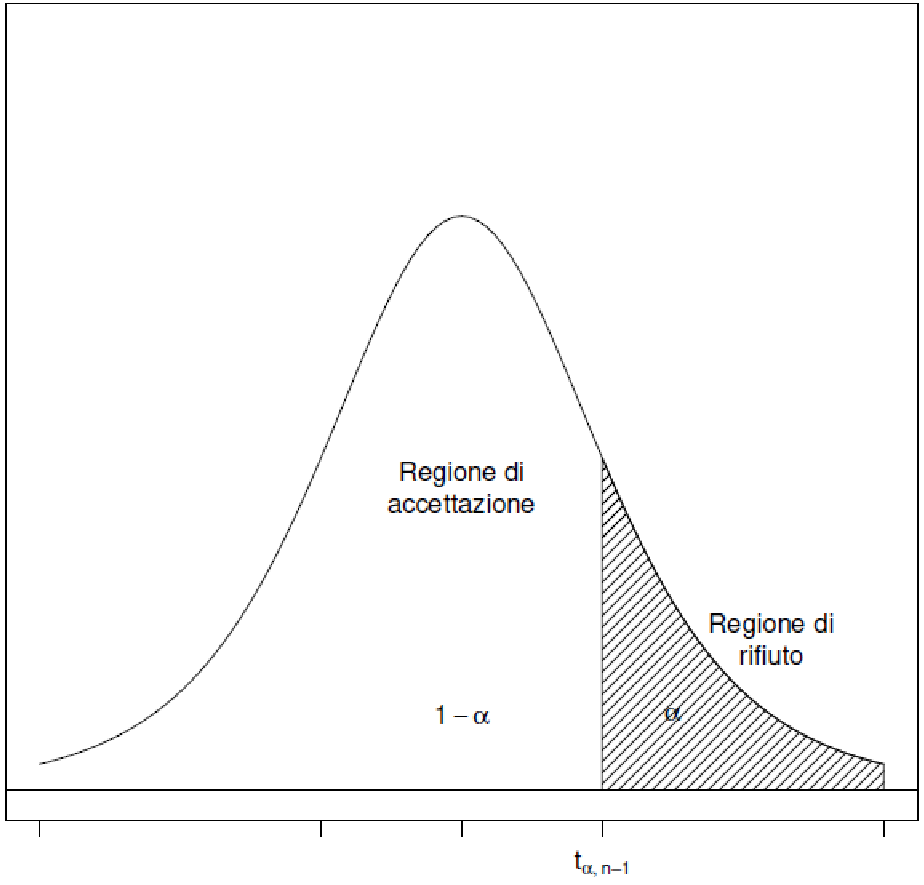
- **Test unilaterale sinistro**

  $\mathbf{H_0}: \mu \leq \mu_0 \qquad \mathbf{H_1}: \mu > \mu_0$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si accetta se: $\frac{\overline{X_n}-\mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} < t_{\alpha,n-1}$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si rifiuta se se: $\frac{\overline{X_n}-\mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} > t_{\alpha,n-1}$

Densità di Student con n−1 gradi di libertà



Test unilaterale Sinistro

- Denotando con t_{os} la statistica di test:

$$t_{os} = \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

- Calcoliamo il p-value per il test unilaterale sinistro:

$$pvalue = P(T_n > t_{os}) = 1 - P(T_n \leq t_{os})$$

- Calcolo del p-value del test unilaterale in R:

$$1 - \mathrm{pt}(\mathrm{t_{os}}, \mathrm{df} = \mathrm{n} - 1)$$

Esempio

- Il reddito medio annuale di una famiglia che abita in una fissata provincia non supera 12500 Euro
- Si desidera sottoporre a verifica tale ipotesi con un livello di significatività dell'1%
- A tal fine, considera un campione di 80 famiglie e si riscontra che il reddito medio campionario è 12000 Euro con una deviazione standard campionaria di 1500 Euro
- Si desidera costruire il test di misura unilaterale sinistro $\alpha = 0.01$ per verificare l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}: \mu \leq 12500$ in alternativa all'ipotesi $\mathbf{H_1}: \mu > 12500$
- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi unilaterale sinistro
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.01$
    - $S_{80} = 1500$
    - $\mu_0 = 12500$
    - $n = 80$
    - $\bar{X}_{80} = 12000$

Esempio

- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi unilaterale sinistro
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.01$
    - $S_{80} = 1500$
    - $\mu_0 = 12500$
    - $n = 80$
    - $\bar{X}_{80} = 12000$

```
> alpha<-0.01
> mu0<-12500
> n<-80
> qt(1-alpha,df=n-1)
[1] 2.374482
> meancamp<-12000
> devcamp<-1500
> (meancamp-mu0)/(devcamp/sqrt(n))
[1] -2.981424
>
> pvalue<-1-pt(-2.981424,df=n-1)
> pvalue
[1] 0.9980935
```

Esempio

- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi unilaterale sinistro
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.01$
    - $S_{80} = 1500$
    - $\mu_0 = 12500$
    - $n = 80$
    - $\bar{X}_{80} = 12000$

```
> alpha<-0.01
> mu0<-12500
> n<-80
> qt(1-alpha,df=n-1)
[1] 2.374482
> meancamp<-12000
> devcamp<-1500
> (meancamp-mu0)/(devcamp/sqrt(n))
[1] -2.981424
>
> pvalue<-1-pt(-2.981424,df=n-1)
> pvalue
[1] 0.9980935
```

$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$

$t_{os} = \dfrac{\overline{x_n} - \mu_0}{\frac{s_n}{\sqrt{n}}}$

Poiché $p > \alpha$, l'ipotesi $\mathbf{H_0}$ deve essere accettata

Poiché -2.98 cade nella regione di accettazione, occorre quindi accettare l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 1% ($\alpha = 0.01$)

Test unilaterale Destro

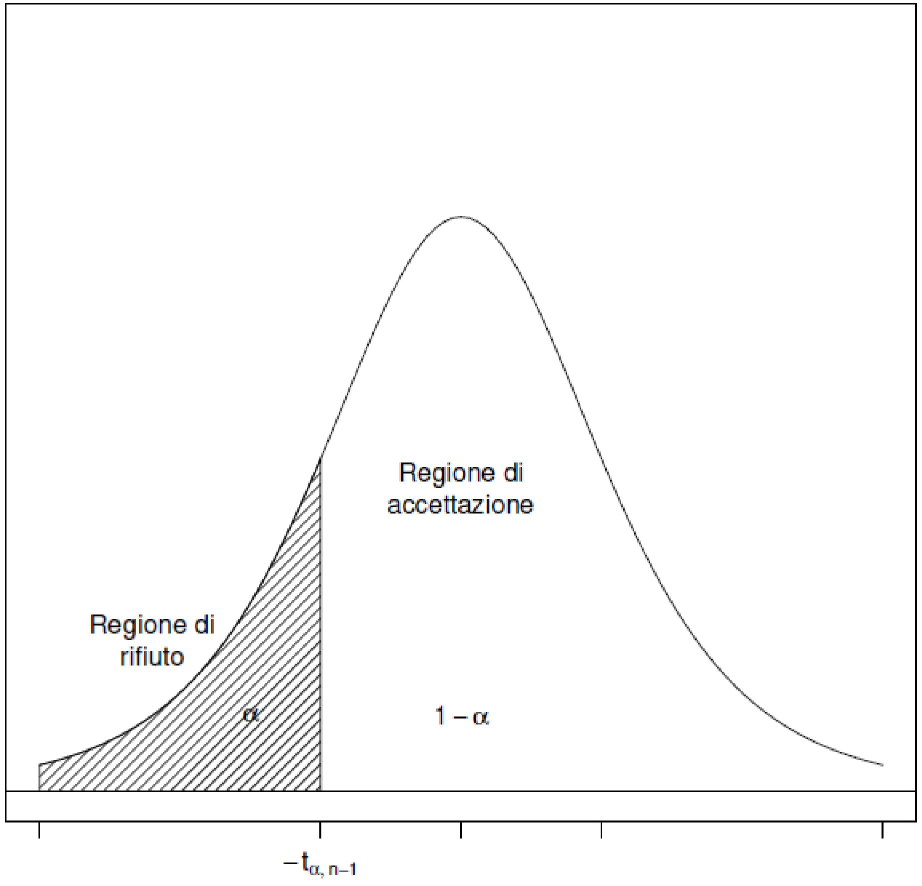
- **Test unilaterale destro**

$$\mathbf{H_0}: \mu \geq \mu_0 \qquad \mathbf{H_1}: \mu < \mu_0$$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si accetta se: $\frac{\overline{X_n}-\mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} > -t_{\alpha,n-1}$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si rifiuta se se: $\frac{\overline{X_n}-\mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} < -t_{\alpha,n-1}$

Densità di Student con n−1 gradi di libertà



Test unilaterale Destro

- Denotando con t_{os} la statistica di test:

$$t_{os} = \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

- Calcoliamo il p-value per il test unilaterale destro:

$$pvalue = P(T_n \leq t_{os})$$

- Calcolo del p-value del test unilaterale in R:

$$\mathsf{pt}(\mathsf{t_{os}}, \mathsf{df} = \mathsf{n} - 1)$$

Esempio

- Una ditta produttrice di pneumatici afferma che la durata media di un certo tipo di pneumatici è di almeno 50000 km
- Un'officina desidera controllare se l'utilizzo di questo tipo di pneumatici permetta effettivamente di ottenere la durata media dichiarata dalla ditta produttrice
- Per risolvere il problema, sottopone a prove su strada un campione di 40 pneumatici dello stesso tipo e misura una durata media $\bar{x} = 49400$ km con una deviazione standard $s = 2500$ km
- Si desidera costruire il test di misura unilaterale sinistro $\alpha = 0.05$ per verificare l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}: \mu \geq 50000$ in alternativa all'ipotesi $\mathbf{H_1}: \mu < 50000$
- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi unilaterale destro
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.05$
    - $S_{80} = 2500$
    - $\mu_0 = 50000$
    - $n = 40$
    - $\bar{X}_{40} = 49400$

Esempio

- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi unilaterale destro
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.05$
    - $S_{80} = 2500$
    - $\mu_0 = 50000$
    - $n = 40$
    - $\bar{X}_{40} = 49400$

```
> alpha<-0.05
> mu0<-50000
> n<-40
> qt(alpha,df=n-1)
[1] -1.684875
> meancamp<-49400
> devcamp<-2500
> (meancamp-mu0)/(devcamp/sqrt(n))
[1] -1.517893
>
> pvalue<-pt(-1.517893,df=n-1)
> pvalue
[1] 0.06855337
```

$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$

$t_{os} = \frac{\overline{x_n} - \mu_0}{\frac{s_n}{\sqrt{n}}}$

Poiché $p > \alpha$, l'ipotesi $\mathbf{H_0}$ deve essere accettata

Poiché -1.51 cade nella regione di accettazione, occorre quindi accettare l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 5% ($\alpha = 0.05$)

STATISTICA E ANALISI DEI DATI

Test su σ^2 con media μ nota

Verifica Delle Ipotesi

- Sia $X_1, X_2, \dots, X_n$ un campione casuale estratto da una popolazione normale descritta da una variabile aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma)$ con valore medio μ noto
- **Test bilaterali**
  - Consideriamo le ipotesi:

$$\mathbf{H_0}: \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad \mathbf{H_1}: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

  - Consideriamo come statistica test:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{X_i} - \mu}{\sigma_0} \right)^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} + \left(\frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \right)^2$$

V_n è distribuita con legge chi–quadrato con *n* gradi di libertà

Test bilaterale

- **Test bilaterali**

$$\mathbf{H_0}: \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad \mathbf{H_1}: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si accetta se:

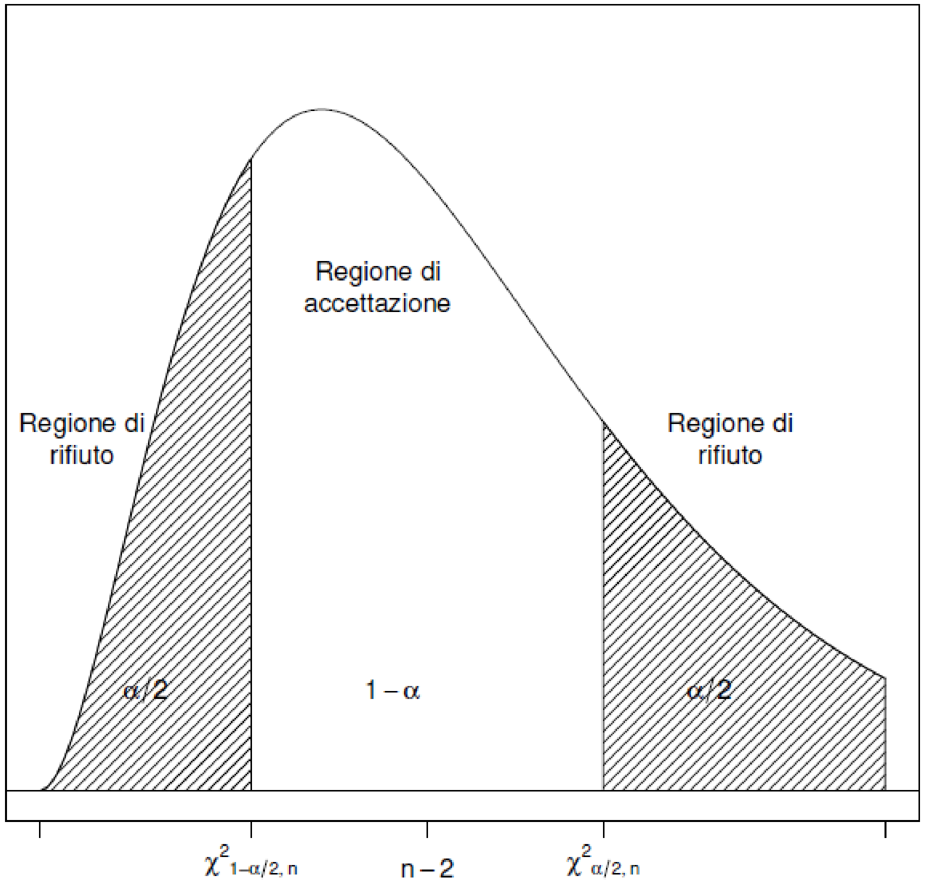
$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n} < \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{x_i}-\mu}{\sigma_0}\right)^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}$$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si rifiuta se se:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{x_i}-\mu}{\sigma_0}\right)^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n} \quad oppure \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{x_i}-\mu}{\sigma_0}\right)^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}$$

- Per calcolare il valore $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}$ si usa: $\mathrm{qchisq}(\alpha/2, \mathrm{df} = \mathrm{n})$
- Per calcolare il valore $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}$ si usa: $\mathrm{qchisq}(1-\alpha/2, \mathrm{df} = \mathrm{n})$

Densità chi–quadrato con n gradi di libertà



Esempio (i)

- Un'industria che produce batterie al litio dichiara che hanno una durata di vita media di 3 anni con una deviazione standard di 1 anno

- Estratto un campione di 50 batterie, si riscontra che la media campionaria è di 3.1 anni e la deviazione standard campionaria è $\sqrt{0.9}$ anni

- L'industria desidera verificare se la varianza dichiarata per le batterie prodotte sia effettivamente quella dichiarata

- Si desidera costruire il test di misura $\alpha = 0.05$ per verificare l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}: \sigma^2 = 1$ in alternativa all'ipotesi $\mathbf{H_1}: \sigma^2 \neq 1$

- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi bilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.05$
    - $\mu = 3$
    - $\sigma_0 = 1$
    - $n = 50$
    - $S_{50}^2 = 0.9$
    - $\bar{X}_{50} = 3.1$

Esempio (i)

- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi bilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.05$
    - $\mu = 3$
    - $\sigma_0 = 1$
    - $n = 50$
    - $S^2_{50} = 0.9$
    - $\bar{X}_{50} = 3.1$

```
> alpha<-0.05
> mu<-3
> sigma02<-1
> n<-50
> medcamp<-3.1
> varcamp<-0.9
> qchisq(alpha/2,df=n)
[1] 32.35736
> qchisq(1-alpha/2,df=n)
[1] 71.4202
> (n-1)*varcamp/sigma02+n*(medcamp-mu)**2/sigma02
[1] 44.6
```

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}$

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}$

χ^2

Poiché 44.6 cade nella regione di accettazione, occorre quindi accettare l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 5% $(\alpha = 0.05)$

Test Unilaterale Sinistro

- **Test unilaterale sinistro**
  - Consideriamo le ipotesi:

$$\mathbf{H_0}: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \qquad \mathbf{H_1}: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

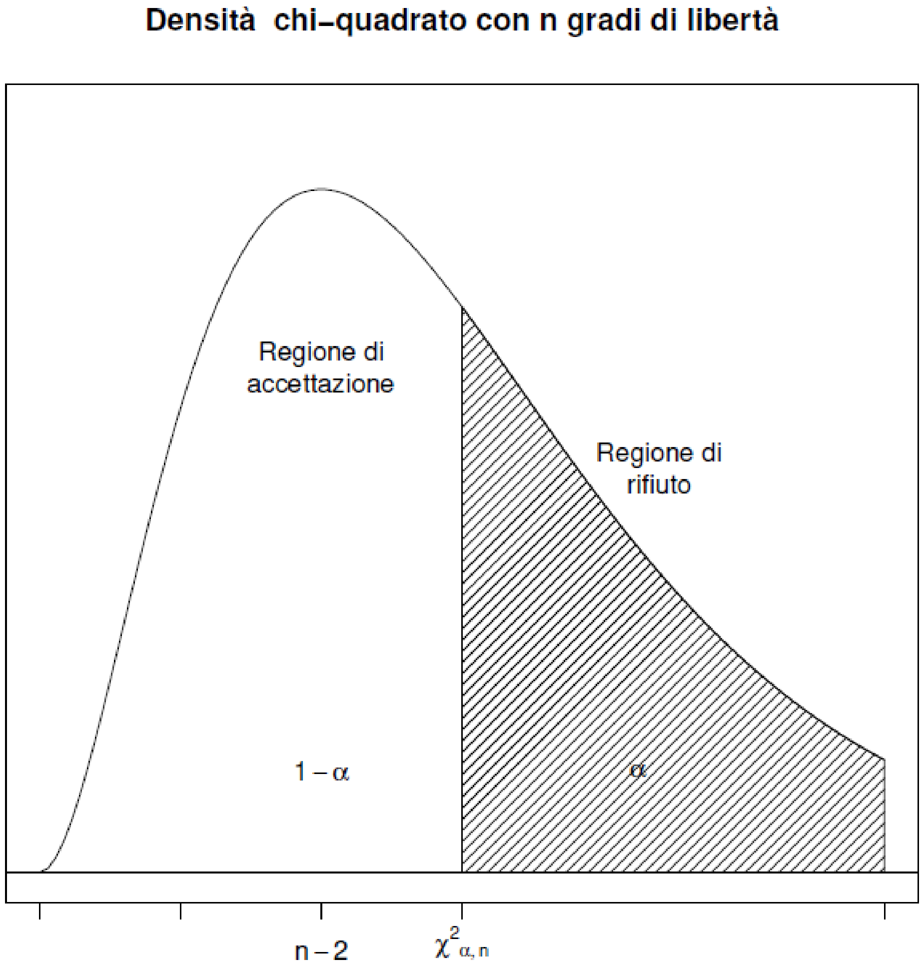
- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si accetta se:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{X}_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 < \chi^2_{\alpha,n}$$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si rifiuta se se:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{X}_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 > \chi^2_{\alpha,n}$$

- Per calcolare il valore$\chi^2_{\alpha,n}$si usa: $\mathrm{qchisq}(\alpha, \mathrm{df} = \mathrm{n})$



Test Unilaterale Destro

- **Test unilaterale destro**
  - Consideriamo le ipotesi:

$$\mathbf{H_0}: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \qquad \mathbf{H_1}: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

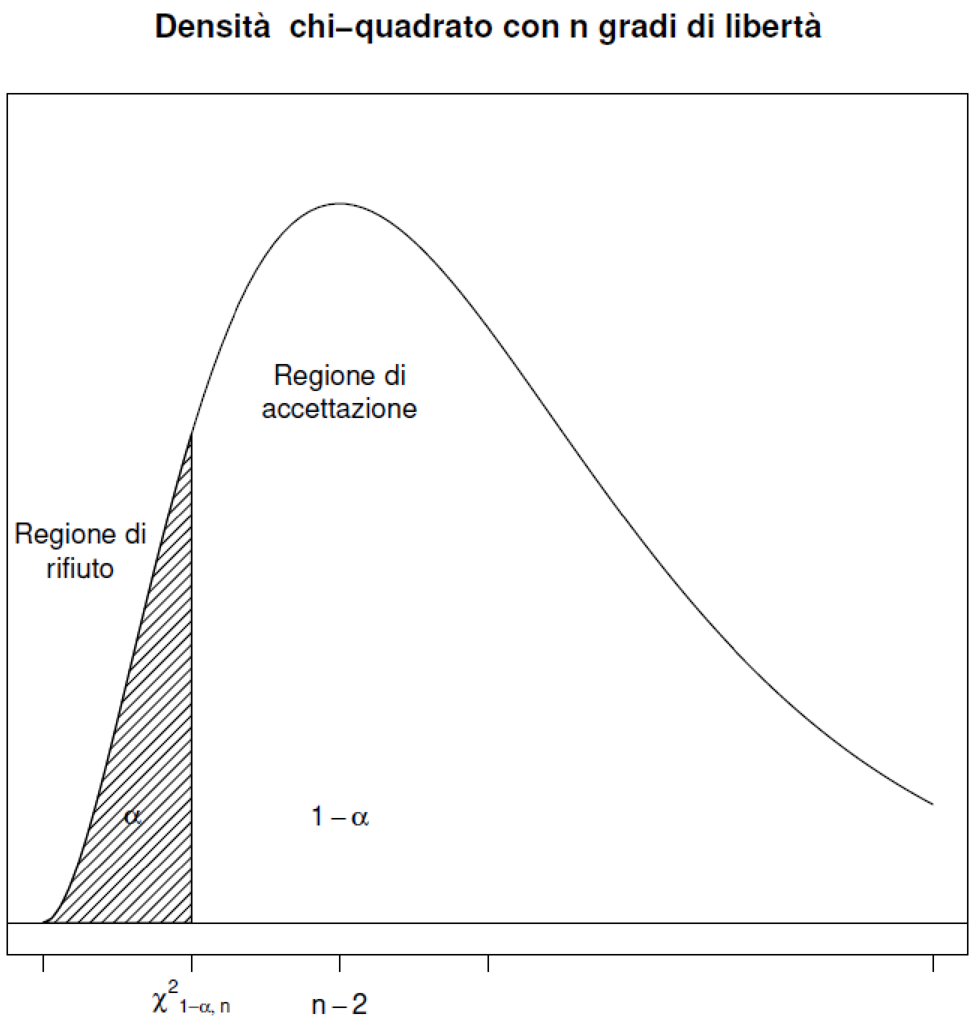
- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si accetta se:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{X}_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 > \chi^2_{1-\alpha,n}$$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si rifiuta se se:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{X}_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 < \chi^2_{1-\alpha,n}$$

- Per calcolare il valore $\chi^2_{1-\alpha,n}$ si usa: $\mathrm{qchisq}(1-\alpha, \mathrm{df}=\mathrm{n})$



STATISTICA E ANALISI DEI DATI

Test su σ^2 con media μ NON nota

Verifica Delle Ipotesi

- Sia $X_1, X_2, \dots, X_n$ un campione casuale estratto da una popolazione normale descritta da una variabile aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma)$ con valore medio μ noto
- **Test bilaterali**
  - Consideriamo le ipotesi:

$$\mathbf{H_0}: \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad \mathbf{H_1}: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

  - Consideriamo come statistica test:

$$Q_n = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$$

Q_n è distribuita con legge chi–quadrato con $n-1$ gradi di libertà

Test bilaterale

- **Test bilaterali**

$$\mathbf{H_0}: \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad \mathbf{H_1}: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si accetta se:

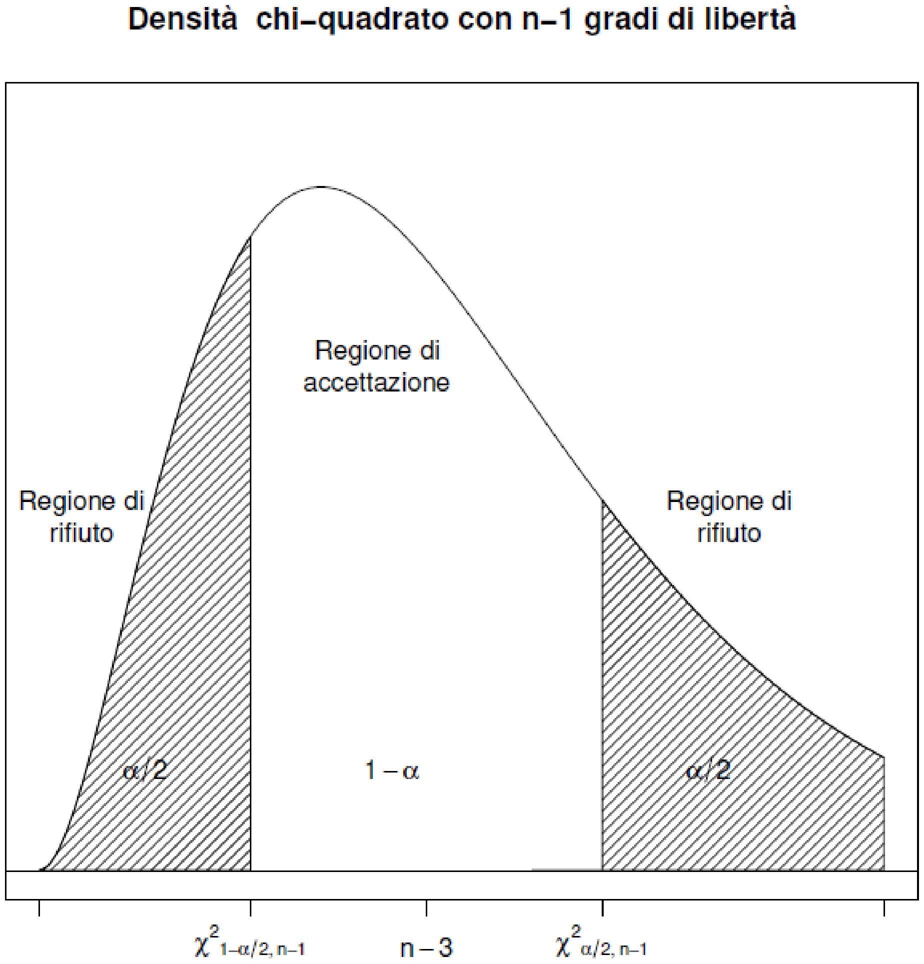
$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si rifiuta se se:

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \; oppure \; \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

- Per calcolare il valore $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ si usa: $\mathrm{qchisq}(\alpha/2, \mathrm{df} = \mathrm{n} - 1)$

- Per calcolare il valore $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ si usa: $\mathrm{qchisq}(1 - \alpha/2, \mathrm{df} = \mathrm{n} - 1)$



Esempio (i)

- Un'industria che produce batterie al litio dichiara che la durata in anni ha una deviazione standard di 1 anno
- Estratto un campione di 50 batterie, si riscontra che la deviazione standard campionaria è $\sqrt{0.9}$ anni
- L'industria desidera verificare se la varianza dichiarata per le batterie prodotte sia effettivamente quella dichiarata
- Si desidera costruire il test di misura $\alpha = 0.05$ per verificare l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}: \sigma^2 = 1$ in alternativa all'ipotesi $\mathbf{H_1}: \sigma^2 \neq 1$
- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi bilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.05$
    - $\sigma_0 = 1$
    - $n = 50$
    - $S_{50}^2 = 0.9$

Esempio (i)

- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi bilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.05$
    - $\sigma_0 = 1$
    - $n = 50$
    - $S_{50}^2 = 0.9$

```
> alpha<-0.05
> sigma02<-1
> n<-50
> varcamp<-0.9
> qchisq(alpha/2,df=n-1)
[1] 31.55492
> qchisq(1-alpha/2,df=n-1)
[1] 70.22241
>  (n-1)*varcamp/sigma02
[1] 44.1
```

Esempio (i)

- Occorre applicare un test di verifica di ipotesi bilaterale
  - Si ha che:
    - $\alpha = 0.05$
    - $\sigma_0 = 1$
    - $n = 50$
    - $S_{50}^2 = 0.9$

```
> alpha<-0.05
> sigma02<-1
> n<-50
> varcamp<-0.9
> qchisq(alpha/2,df=n-1)
[1] 31.55492
> qchisq(1-alpha/2,df=n-1)
[1] 70.22241
>  (n-1)*varcamp/sigma02
[1] 44.1
```

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$

χ^2

Poiché 44.1 cade nella regione di accettazione, occorre quindi accettare l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 5% $(\alpha = 0.05)$

Test Unilaterale Sinistro

- **Test unilaterale Sinistro**

$$\mathbf{H_0}: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \qquad \mathbf{H_1}: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

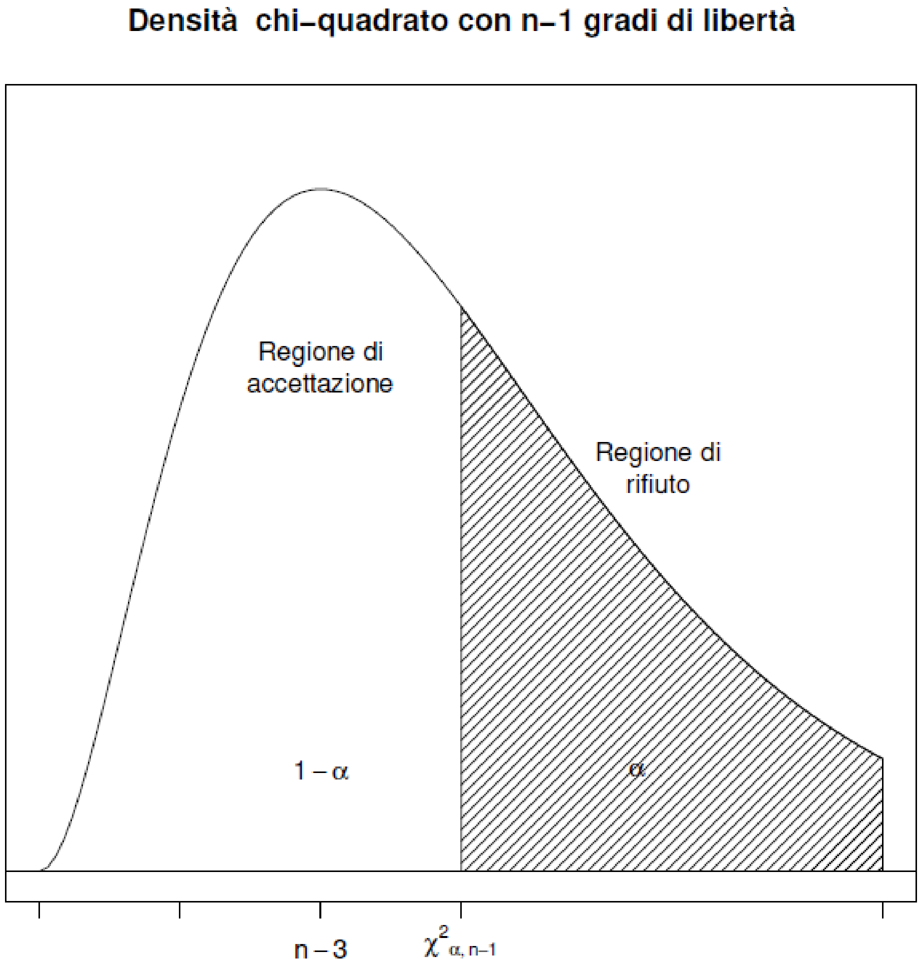
- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si accetta se:

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha,n-1}$$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si rifiuta se se:

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\alpha,n-1}$$

- Per calcolare il valore $\chi^2_{\alpha,n-1}$ si usa: $\mathrm{qchisq}(1-\alpha, \mathrm{df}=\mathrm{n}-1)$



Test Unilaterale Destro

- **Test unilaterale Destro**

$$\mathbf{H_0}: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \qquad \mathbf{H_1}: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si accetta se:

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha,n-1}$$

- L'ipotesi $\mathbf{H_0}$ si rifiuta se se:

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$$

- Per calcolare il valore $\chi^2_{1-\alpha,n-1}$ si usa: $\mathrm{qchisq}(\alpha, \mathrm{df} = \mathrm{n} - 1)$

Densità chi–quadrato con n–1 gradi di libertà