Tutorato MMI - Resto 1

25/05/2023

Esercizio 1

Definizione ricorsiva

Siano n, m, p numeri interi. Mostrare che, se $m + n$ e $n + p$ sono pari allora $m + p$ è pari.

Esercizio 1 - Soluzione

Soluzione

Supponiamo per ipotesi che $\exists k, h \geq 0 : m + n = 2k, n + p = 2h$.
Risulta che:

- $m + n = 2k$ se e solo se m, n o sono entrambi pari o sono entrambi dispari.
- $n + p = 2h$ se e solo se n, p o sono entrambi pari o sono entrambi dispari.

Supponiamo che n è dispari, $\exists j \geq 0 : n = 2j + 1$.

- $m + n = 2k = m + 2j + 1 \implies m$ è dispari.
- $n + p = 2h = 2j + 1 + p \implies p$ è dispari.

Poiché m, p sono entrambi dispari, allora $m + p$ è pari.

Esercizio 1 - Soluzione

Soluzione

Supponiamo per ipotesi che $\exists k, h \geq 0 : m + n = 2k, n + p = 2h$.
Risulta che:

- $m + n = 2k$ se e solo se m, n o sono entrambi pari o sono entrambi dispari.
- $n + p = 2h$ se e solo se n, p o sono entrambi pari o sono entrambi dispari.

Supponiamo che n è pari, $\exists j \geq 0 : n = 2j$.

- $m + n = 2k = m + 2j \implies m$ è pari.
- $n + p = 2h = 2j + p \implies p$ è pari.

Poiché m, p sono entrambi pari, allora $m + p$ è pari.

Esercizio 2

Definizione ricorsiva

Dimostrare che, dato un intero positivo n, n è dispari se e solo se $5n + 6$ è dispari.

Esercizio 2 - Soluzione

Soluzione

Dobbiamo dimostrare che:

- Se n è dispari allora $5n+6$ è dispari.
- Se $5n+6$ è dipari allora n è dispari.

Dimostriamo che se n è dispari allora $5n+6$ è dispari. Per ipotesi $\exists h \geq 0 : n = 2h+1$. Dobbiamo dimostrare che $5n+6$ è dispari.

$$\begin{aligned} 5n+6 &= 5(2h+1)+6 \\ &= 10h+5+6 \\ &= 10h+10+1 = 2(5h+5)+1. \end{aligned}$$

Poiché $2(5h+5)+1$ è dispari, allora se n è dispari $5n+6$ è dispari.

Esercizio 2 - Soluzione

Soluzione

Dobbiamo dimostrare che:

- Se n è dispari allora $5n + 6$ è dispari.
- Se $5n + 6$ è dipari allora n è dispari.

Dimostriamo che se $5n + 6$ è dipari allora n è dispari. Per ipotesi $\exists h \geq 0 : 5n + 6 = 2h + 1$. Dobbiamo dimostrare che n è dispari. Supponiamo per assurdo che n è pari, ovvero $\exists k \geq 0 : n = 2k$.

$$\begin{aligned} 5n + 6 &= 5(2h) + 6 \\ &= 10h + 6 \\ &= 2(5h + 3). \end{aligned}$$

Poiché $2(5h + 3)$ è pari, abbiamo raggiunto un assurdo. Abbiamo quindi dimostrato che se $5n + 6$ è dispari allora n è dispari.

Avendo dimostrato la doppia implicazione, abbiamo dimostrato che n è dispari se e solo se $5n + 6$ è dispari, $\forall n \geq 1$.

Esercizio 3

Definizione ricorsiva

Usando la tecnica di dimostrazione per contrapposizione, provare che, dati x, y numeri interi non negativi, se x e y sono dispari allora $3x + 2y$ è dispari.

Esercizio 3 - Soluzione

Soluzione

Utilizzando la tecnica per contrapposizione, dobbiamo dimostare che: dati x, y numeri interi non negativi, se $3x + 2y$ è pari allora x è pari o y è pari.

Supponiamo che $\exists k \geq 0 : 3x + 2y = 2k$. Supponiamo per assurdo che x, y sono entrambi dispari, ovvero $\exists p, q \geq 0 : x = 2p + 1$, $y = 2q + 1$. Risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
3x + 2y &= 3(2p + 1) + 2(2q + 1) \\
&= 6p + 3 + 4q + 2 \\
&= 6p + +4q + 4 + 1 \\
&= 2(3p + 2q + 2) + 1.
\end{aligned}
$$

Poiché $2(3p + 2q + 2) + 1$ è dispari, abbiamo raggiunto un assurdo.

Abbiamo dimostrato per contrapposizione che se x e y sono dispari allora $3x + 2y$ è dispari, $\forall x, y \geq 0$.