Tutorato MMI - Resto 1

19/05/2023

Esercizio 1

Definizione ricorsiva

Sia L l'insieme delle stringhe sull'alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ che iniziano per a. Dare una definizione ricorsiva di L.

Esercizio 1 - Soluzione

Soluzione

- **Passo base.** $a \in L$.
- **Passo ricorsivo.** Se $w \in L$, allora $wa, wb \in L$.

Esercizio 2

Definizione ricorsiva

Sia $L := \{ w \in \{a, b\}^* \mid w = aw', w' \in \{a, b\}^*, |w| = 2h, h \geq 0 \}$.
Dare una definizione ricorsiva dell'insieme L.

Esercizio 2 - Soluzione

Soluzione

- **Passo base.** $aa, ab \in L$.
- **Passo ricorsivo.** Se $w \in L$, allora $waa, wab, wba, wbb \in L$.

Esercizio 3

Definizione ricorsiva

Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri interi non negativi. Fornire una definizione ricorsiva dell'insiesme $L := \{\, a^{n+2} b^{2n+1} \in \Sigma^* \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, dove $\Sigma = \{a, b\}$.

Esercizio 3 - Soluzione

Soluzione

- **Passo base.** $aab \in L$.
- **Passo ricorsivo.** Se $w \in L$, allora $awbb \in L$.

Esercizio 4

Induzione strutturale

Si consideri la seguente definizione ricorsiva di un insieme X di stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$.

- **Passo base.** $b \in X$.
- **Passo ricorsivo.** Se $x \in X$, allora $xa, ax \in X$.

Utilizzando il principio di induzione strutturale, provare che ogni stringa $x \in X$ ha un sola occorrenza della lettera b.

Esercizio 4 - Soluzione

Soluzione:

- **Passo base.** Sia $x = b$, allora $|x|_b = |b|_b = 1$.
- **Passo induttivo.** Supponiamo per *ipotesi induttiva* che $P(x)$ sia vera, cioè che $|x|_b = 1$.
  Dimostriamo ora che vale $P(ax)$ e anche $P(xa)$.
  $|ax|_b = |a|_b + |x|_b = |a|_b + 1 = 0 + 1 = 1$.
  $|xa|_b = |x|_b + |a|_b = 1 + |a|_b = 1 + 0 = 1$.

Avendo provato il passo base e il passo induttivo, per il principio di induzione l'asserto è vero $\forall x \in X$.

Esercizio 5

Induzione strutturale

Si consideri la seguente definizione ricorsiva di un insieme S di terne di numeri positivi.

- **Passo base.** $(1, 1, 1) \in S$.
- **Passo ricorsivo.** Se $(x, y, z) \in S$, allora $(x + 1, y + 1, z + 1) \in S$.

Utilizzando il principio di induzione strutturale, provare che per ogni terna $(x, y, z) \in S$, il numero $x + y + z$ è un multiplo di 3.

Esercizio 5 - Soluzione

Soluzione:

- **Passo base.** Sia $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, allora $x + y + z = 1 + 1 + 1 = 3$, che è multiplo di 3.
- **Passo induttivo.** Supponiamo per *ipotesi induttiva* che $P((x, y, z))$ sia vera, cioè che $x + y + z = 3k,\ k \geq 0$. Dimostriamo ora che vale $P((x + 1, y + 1, z + 1))$. $x + 1 + y + 1 + z + 1 = (x + y + z) + 3 = 3k + 3 = 3(k + 1)$, che è multiplo di 3.

Avendo provato il passo base e il passo induttivo, per il principio di induzione l'asserto è vero $\forall (x, y, z) \in S$.

Esercizio 6

Induzione strutturale

Si consideri la seguente definizione ricorsiva di un insieme B di stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$.

- **Passo base.** $\lambda \in B$.
- **Passo ricorsivo.** Se $x \in B$, allora $0x11 \in B$.

Utilizzando il principio di induzione strutturale, dimostrare l'affermazione seguente: $\forall w \in B, |w|_1 = 2|w|_0$.

Esercizio 6 - Soluzione

Soluzione:

- **Passo base.** Sia $w = \lambda$,
  $|w|_1 = |\lambda|_1 = 0 = 2 \cdot 0 = 2|\lambda|_0 = 2|w|_0$.
- **Passo induttivo.** Supponiamo per *ipotesi induttiva* che $P(w)$ sia vera, cioè che $|w|_1 = 2|w|_0$.
  Dimostriamo ora che vale $P(0w11)$.
  $|0w11|_1 = |0|_1 + |w|_1 + |11|_1 = 0 + |w|_1 + 2 = |w|_1 + 2$.
  $|0w11|_0 = |0|_0 + |w|_0 + |11|_0 = 1 + |w|_0 + 0 = |w|_0 + 1$.
  $|0w11|_1 = |w|_1 + 2 = 2|w|_0 + 2 = 2(|w|_0 + 1) = 2|0w11|_0$.

Avendo provato il passo base e il passo induttivo, per il principio di induzione l'asserto è vero $\forall w \in B$.