Logica proposizionale

Prof. Rocco Zaccagnino

2022/2023

Linguaggio naturale

Nel linguaggio naturale si utilizzano spesso **frasi imprecise**

Esempio

Un italiano si laurea in Informatica ogni ora

- *Assurdo:* significa che c'è un italiano che ogni ora si laurea in Informatica
- *Corretta:* ogni ora, un italiano che si laurea in Informatica

… o **ambigue**

Esempio

L'uomo guardava la donna con il binocolo

- *Ambigua:* chi ha il binocolo?

Linguaggio matematico

Il linguaggio matematico richiede **certezze** nelle affermazioni

Il linguaggio matematico richiede soprattutto che sia possibile determinare se una affermazione è **vera** o **falsa**

Quale delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

- 2 è un numero primo
- non ci sono numeri primi al di fuori di 2
- quando piove apro l'ombrello

Le proposizioni

Una proposizione è una frase che dichiara un fatto e che può essere vera (T) o false (F), ma non entrambe

Esempio

• *Come stai?*	Una domanda non una proposizione
• *x+5 =3*	x non è specificato => né vera né falsa
• *2 è numero primo*	T
• Lei ha talento	Lei non è specificato => né vera né falsa
• Rocco supererà l'esame	Può essere vera o falsa

Le proposizioni composte

Una proposizione **più complessa** può essere costruita attraverso proposizioni elementari connesse attraverso **connettivi logici**

Connettivi logici:

- *Negazione (not)*
- *Congiunzione (and)*
- *Disgiunzione (or)*
- *Or esclusivo (xor)*
- *Implicazione (se allora)*
- *Bicondizione (se e solo se)*

Negazione (not)

Sia p una proposizione. La frase **«non è vero che p»** è un'altra proposizione, chiamata **negazione di p** e denotata con **¬p**

Esempio

- *p = «Potenza è una città della Basilicata»*

  *¬p = «**Non è vero** che Potenza è una città della Basilicata»*

  *= «Potenza **non è** una città della Basilicata»*

Negazione (not)

Sia p una proposizione, e ¬p la sua negazione. Possiamo descrivere il meccanismo della negazione attraverso la **tavola di verità**:

- *Per ogni valore di p, specifica il corrispondente valore di ¬p*

p	**¬p**
T	***F***
F	***T***

Congiunzione (and)

Siano p e q proposizioni. La frase **«p e q»** è un'altra proposizione, chiamata **congiunzione di p e q**, e denotata con **$p \wedge q$**

Esempio

- *p = «Potenza è una città della Basilicata»*

  q = «3 x 3 = 7»

  $p \wedge q$ = «Potenza è una città della Basilicata e 3 x 3 = 7»

Congiunzione (and)

Siano p e q proposizioni. Il valore di verità di **p ∧ q è vero se entrambe p e q sono vere**, altrimenti è falso

p	**q**	**p ∧ q**
T	***T***	***T***
T	***F***	***F***
F	***T***	***F***
F	***F***	***F***

Disgiunzione (or)

Siano p e q proposizioni. La frase **«p o q»** è un'altra proposizione, chiamata **disgiunzione di p e q**, e denotata con **p** ∨ **q**

Esempio

- *p = «Potenza è una città della Basilicata»*

  q = «3 x 3 = 7»

  p ∨ q = «Potenza è una città della Basilicata o 3 x 3 = 7»

Disgiunzione (or)

Siano p e q proposizioni. Il valore di verità di **p $\lor$ q è vero se o p o q o entrambe sono vere**, altrimenti è falso

p	q	p $\lor$ q
T	*T*	*T*
T	*F*	*T*
F	*T*	*T*
F	*F*	*F*

Disgiunzione esclusiva (xor)

Siano p e q proposizioni. La frase **«p o q ma non entrambe»** è un'altra proposizione, chiamata **disgiunzione esclusiva di p e q**, *e denotata con* **$p \oplus q$**

Siano p e q proposizioni. Il valore di verità di ***$p \oplus q$ è vero se esattamente una tra p e q è vera ma non entrambe,*** altrimenti è falso

p	q	$p \oplus q$
T	*T*	*F*
T	*F*	*T*
F	*T*	*T*
F	*F*	*F*

Implicazione

Siano p e q proposizioni. La frase **«p implica q»** è un'altra proposizione, chiamata **implicazione**, e denotata con **p → q**. p è chiamata **ipotesi**, q è chiamata **conclusione**

condizione sufficiente → condizione necessaria

L'implicazione **p → q** può essere letta in vari modi:

- *se p allora q*
- *p è sufficiente per q*
- *q è necessaria per p*

Implicazione

Siano p e q proposizioni. Il valore di verità di **$p \rightarrow q$ è falso se p è vera e q è falso**, altrimenti è vero

p	q	$p \rightarrow q$
T	*T*	*T*
T	*F*	*F*
F	*T*	*T*
F	*F*	*T*

Derivazioni dell'implicazione

- **Inverso** di $p \rightarrow q$ $\quad$ $q \rightarrow p$
- **Opposto** di $p \rightarrow q$ $\quad$ $\neg p \rightarrow \neg q$
- **Contronominale** di $p \rightarrow q$ $\quad$ $\neg q \rightarrow \neg p$

Inverso dell'implicazione

- **Inverso** di $p \rightarrow q$ $\qquad$ $\boldsymbol{q \rightarrow p}$

Esempio:

Se nevica allora le auto procedono lentamente

- p = nevica
- q = le auto procedono lentamente
- $p \rightarrow q$

- *L'inverso:* Se le auto procedono lentamente allora nevica

$$\boldsymbol{q \rightarrow p}$$

Inverso dell'implicazione

- **Inverso** di $p \rightarrow q$ $\quad$ $q \rightarrow p$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
T	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*T*
F	*T*	*T*	*F*
F	*F*	*T*	*T*

Opposto dell'implicazione

- **Opposto** di $p \rightarrow q$ $\qquad\qquad$ $\neg p \rightarrow \neg q$

Esempio:

Se nevica allora le auto procedono lentamente

- p = nevica
- q = le auto procedono lentamente
- $p \rightarrow q$

- *L'opposto:* Se non nevica allora le auto procedono velocemente

$$\neg p \rightarrow \neg q$$

Opposto dell'implicazione

- **Opposto** di p → q $\neg p \rightarrow \neg q$

p	q	p → q	¬p	¬q	¬p → ¬q
T	*T*	*T*	*F*	*F*	*T*
T	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*
F	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*
F	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*

Controminale dell'implicazione

- **Contronominale** di $p \to q$ $\neg q \to \neg p$

Esempio:

Se nevica allora le auto procedono lentamente

- p = nevica
- q = le auto procedono lentamente
- $p \to q$

- *Contronominale:* Se le auto procedono velocemente allora non nevica

$\neg q \to \neg p$

Controminale dell'implicazione

- **Contronominale** di $p \rightarrow q$ $\neg q \rightarrow \neg p$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$
T	*T*	*T*	*F*	*F*	*T*
T	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*
F	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*
F	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*

Bicondizione

Siano p e q proposizioni. La frase **«p se e solo se q»** è un'altra proposizione, chiamata **bicondizione**, e denotata con $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$.

La bicondizione $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ può essere letta in vari modi:

- *se p allora q e viceversa*
- *p iff q*
- *p è necessaria e sufficiente per q*

Bicondizione

Il valore dell'equivalenza **$p \longleftrightarrow q$** è vera solamente se i valori di verità di p e q coincidono

p	**q**	**$p \longleftrightarrow q$**
T	*T*	*T*
T	*F*	*F*
F	*T*	*F*
F	*F*	*T*

Bicondizione

$p \longleftrightarrow q$ ha gli stessi valori di verità di **$(p \longrightarrow q) \land (q \longrightarrow p)$**

p	**q**	**$p \longrightarrow q$**	**$q \longrightarrow p$**	**$p \longleftrightarrow q$**
T	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*T*	*F*
F	*T*	*T*	*F*	*F*
F	*F*	*T*	*T*	*T*

Esercizio

Esempio

- Consideriamo l'espressione $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	*T*				
T	*F*				
F	*T*				
F	*F*				

Esercizio

Esempio

- Consideriamo l'espressione $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	*T*				
T	*F*				
F	*T*				
F	*F*				

proposizioni elementari

Esercizio

Esempio

- Consideriamo l'espressione $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	*T*				
T	*F*				
F	*T*				
F	*F*				

proposizioni composte ausiliarie

Esercizio

Esempio

- Consideriamo l'espressione $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	*T*	*F*	*T*		
T	*F*	*F*	*F*		
F	*T*	*T*	*T*		
F	*F*	*T*	*T*		

Esercizio

Esempio

- Consideriamo l'espressione $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	*T*	*F*	*T*	*F*	
T	*F*	*F*	*F*	*T*	
F	*T*	*T*	*T*	*T*	
F	*F*	*T*	*T*	*F*	

Esercizio

Esempio

- Consideriamo l'espressione $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	*T*	*F*	*T*	*F*	*F*
T	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*
F	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
F	*F*	*T*	*T*	*F*	*F*