

## Esercitazione 2 Insiemi, applicazioni, relazioni

Serafina Lapenta

- (1) Dati  $S, T$  due insiemi, definiamo le *proiezioni*

$$\begin{aligned}\pi_S: S \times T &\rightarrow S & \pi_T: S \times T &\rightarrow T \\ \pi_S(x, y) &= x & \pi_T(x, y) &= y\end{aligned}$$

Si dimostri che, quando  $S$  e  $T$  sono non vuoti, allora  $\pi_S$  e  $\pi_T$  sono suriettive.

- (2) Si considerino le applicazioni

$$\begin{aligned}k: 5\mathbb{Z} &\rightarrow 25\mathbb{Z} & h: 25\mathbb{Z} &\rightarrow 5\mathbb{Z} \\ k(z) &= z^2 & h(z) &= \frac{z}{5}\end{aligned}$$

- (a) Si calcolino  $k(\{-5, 0, 5, 10\})$ ,  $k(50\mathbb{Z})$ ,  $k^{-1}(\{0, 25, -25, 50\})$ ,  $h^{-1}(5\mathbb{Z})$ ,  $h(\{0, 25, -50\})$ ,  $h^{-1}(\{0, 25, 50\})$ .  
 (b) Si stabilisca se  $h$  e  $k$  sono iniettive e suriettive.  
 (c) Se le applicazioni risultano biettive, scrivere l'inversa.  
 (d) Si determinino  $k \circ h$  e  $h \circ k$ .
- (3) Siano  $A = \{i, m, n, v, w\}$  e  $B = \{1, 7, 13, 21\}$ . Stabilire se  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  sono partizioni di  $A$  e  $\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6$  lo sono di  $B$ :
- $$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \{\{i, m, v, w\}, \{n\}\} & \mathcal{F}_2 &= \{\{i\}, \{m\}, \{v\}, \{w\}\} & \mathcal{F}_3 &= \{\{i, m, n, v, w\}\} \\ \mathcal{F}_4 &= \{\{1, 7\}, \emptyset, \{13, 21\}\} & \mathcal{F}_5 &= \{\{1, 13, 21\}, \{7\}\} & \mathcal{F}_6 &= \{\{1, 13, 7\}, \{7, 21\}\}\end{aligned}$$
- (4) Sia  $\mathcal{F} = \{\{2k, 2k+1\} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$  una partizione di  $\mathbb{N}_0$ . Se  $R_{\mathcal{F}}$  è la relazione indotta da  $\mathcal{F}$ . Stabilire se le seguenti affermazioni sono esatte:

$$15R_{\mathcal{F}}15 \quad 23R_{\mathcal{F}}24 \quad 0R_{\mathcal{F}}1 \quad 25R_{\mathcal{F}}24.$$

- (5) Sia  $S = \{a, b, c, d, e, f\}$  e sia  $\mathcal{F}$  la partizione

$$\mathcal{F} = \{\{a, c, e\}, \{b, d\}, \{f\}\}$$

Sia  $R_{\mathcal{F}}$  la relazione indotta dalla partizione. Si descriva l'insieme quoziente  $S/R_{\mathcal{F}}$  e si stabilisca quali affermazioni sono vere:

$$aR_{\mathcal{F}}a \quad bR_{\mathcal{F}}f \quad fR_{\mathcal{F}}b \quad cR_{\mathcal{F}}e$$

- (6) Sia  $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  e sia  $R \subseteq C \times C$  definita da

$$xRy \iff x + 2y \in 3\mathbb{Z}$$

Dimostrare che  $R$  è una relazione di equivalenza e determinare l'insieme quoziente  $C/R$ .