ESAME DI MATEMATICA DISCRETA
21/01/2022

PRE-APPELLO DI GENNAIO

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) Si è ammessi all'orale con un punteggio di almeno 15/30.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Per la consegna è necessario mandare per e-mail la prova all'indirizzo slapenta@unisa.it con oggetto "appello matematica discreta gennaio".

(8) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (8 punti)**.** Sia $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $R \subseteq A \times A$ data da

$$(a, b)R(c, d) \iff a + d = b + c$$

(1) Dimostrare che R è una relazione di equivalenza su A.
(2) Descrivere le classi di equivalenza di $(1, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 1)$.
(3) Più in generale, descrivere le classi di equivalenza di (a, b) distinguendo i casi $a < b$ e $a > b$.

Soluzione:

- Riflessività e simmetria sono banali. Per la transitività osserviamo che $(a, b)R(c, d)$ e $(c, d)R(e, f)$ implicano che $a + d = b + c$ e $c + f = d + e$. Bisogna dimostrare che $a + f = b + e$. Si ha $a + f + c = a + d + e = c + b + e$, da cui segue $a + f = b + e$ per la cancellatività della somma.
- Si ha $[(1, 1)]_R = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{N}\}$; se $a > b$, $[(a, b)]_R = \{(n + k, n) \mid k = a - b, n \in \mathbb{N}\}$; se $a < b$, $[(a, b)]_R = \{(n, n + k) \mid k = b - a, n \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Trovare tutte le soluzioni del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \quad (mod\ 9) \\ x \equiv 3 \quad (mod\ 7) \end{cases}$$

Soluzione: La prima equazione ha soluzione generica $s = 5y + 9$, che imposta nella seconda equazione mi dà $5y \equiv -2(mod\ 7)$. Risolvendo quest'ultima si ottiene $y \equiv 6(mod\ 7)$ e da qui $[59]_{63}$ come insieme di tutte le possibili soluzioni del sistema.

Esercizio 3 (7 punti)**.** Sia $G = \{e, a, b, c\}$ con

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Scrivere la tavola di moltiplicazione di $(G, *)$, dove $*$ è l'usuale prodotto tra matrici, e stabilire se $(G, *)$ è un gruppo abeliano.

Soluzione: La tavola di moltiplicazione è

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

L'operazione è associativa per ogni terna di matrici, quindi lo è in particolare in G. L'elemento neutro appartiene a G, dalla tavola si vede che $*$ è commutativa ristretta G. Inoltre, sempre guardando alla tavolta si vede anche che $a^{-1} = a$ e $b^{-1} = c$, quindi tutti gli elementi sono invertibili con inverso in G. Di conseguenza $(G, *)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 4 (8 punti)**.** Sia A una matrice $n \times n$ su un campo $\mathbb{K}$. Dimostrare che le matrici X $n \times n$ su $\mathbb{K}$ tali che $AX = XA$ formano uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Soluzione: Sia $S = \{X \in M_n(\mathbb{K}) \mid AX = XA\}$. Sappiamo già che $M_n(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, quindi è sufficiente verificare che S è chiuso per somma e prodotto scalare.

(1) per ogni $X, Y \in S$, $A(X + Y) = AX + AY = XA + YA = (X + Y)A$, che implica $X + Y \in S$;
(2) per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e $X \in S$, $A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda(XA) = (\lambda X)A$, che implica $\lambda X \in S$.