ESAME DI MATEMATICA DISCRETA
21/03/2022

APPELLO STRAORDINARIO

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) Si è ammessi all'orale con un punteggio di almeno 15/30.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Per la consegna è necessario mandare per e-mail la prova all'indirizzo slapenta@unisa.it con oggetto "matematica discreta".

(8) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (8 punti)**.** Siano $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $Y = \{a, b, c\}$. Sia $f : X \to Y$ definita da:

$$f(1) = a,\ f(2) = a,\ f(3) = c,\ f(4) = b,\ f(5) = a,\ f(6) = b,\ f(7) = c,\ f(8) = a.$$

(1) Scrivere $f^{-1}(\{a\})$, $f^{-1}(\{b\})$, $f^{-1}(\{c\})$. Formano una partizione di X? **Motivare la risposta**.
(2) Sia $\sim \subseteq X \times X$ la relazione data da
$$x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$$
Dimostrare che è una relazione di equivalenza.
(3) Scrivere esplicitamente le classi di equivalenza di ogni elemento di X e l'insieme quoziente $X/\sim$.

Soluzione:

(1) Si ha $A = f^{-1}(\{a\}) = \{1, 2, 8\}$, $B = f^{-1}(\{b\}) = \{4, 6\}$, $C = f^{-1}(\{c\}) = \{3, 7\}$. Formano una partizione perché $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$ e $A \cup B \cup C = X$.
(2) Si ha:
  (a) $x_1 \sim x_1 \iff f(x_1) = f(x_1)$ che è verificato per la riflessività dell'uguale.
  (b) Se $x_1 \sim x_2$, allora $f(x_1) = f(x_2)$, che è lo stesso di $f(x_2) = f(x_1)$ che implica $x_2 \sim x_1$.
  (c) Se $x_1 \sim x_2$ e $x_2 \sim x_3$, allora $f(x_1) = f(x_2)$ e $f(x_2) = f(x_3)$, da cui segue $f(x_1) = f(x_3)$ e quindi $x_1 \sim x_3$.
(3) Si ha
$$[1]_\sim = [2]_\sim = [8]_\sim = \{1, 2, 8\} \qquad [3]_\sim = [7]_\sim = \{3, 7\}$$
$$[4]_\sim = [6]_\sim = \{4, 6\} \qquad X/\sim = \{[1]_\sim, [4]_\sim, [3]_\sim\}.$$

Esercizio 2 (7 punti)**.** In un cesto sono presenti x palline. Svuotando il cesto succede che, prendendo le palline a 2 a 2 il cesto resti vuoto, prendendo le palline a 5 a 5 ne restano 4, prendendole a 3 a 3 ne restano 2. Qual è il numero minimo di palline nel cesto affinché questo accada?

Soluzione: Bisogna risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 0 & (mod\ 2) \\ x \equiv 4 & (mod\ 5) \\ x \equiv 2 & (mod\ 3) \end{cases}$$

La soluzione della prima equazione è $s = 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Sostituita alla seconda ottengo $2k \equiv 4\ (mod\ 5)$, da cui si ottiene $k = 2$ e $T = [4]_{10}$ e $t = 4 + 10k$. Sostituendo nella terza otteniamo $4 + 10k \equiv 2\ (mod\ 3)$ e quindi $10k \equiv -2\ (mod\ 3)$. Da quest'ultima troviamo $k \equiv 1\ (mod\ 3)$ e l'insieme delle soluzioni è $S = [14]_{30}$. Quindi il numero minimo di palline è 14.

Esercizio 3 (8 punti)**.** Per ognuna delle seguenti applicazioni, stabilire se è un omomorfismo:

- $f\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $f(x)$ è il più grande intero minore di x (detto anche parte intera di x);
- $f\colon (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{Z}_2, +)$, $f(x) = rest(x, 2)$;
- $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R} \setminus \{0, \}, \cdot)$, $f(x) = 2^x$.

Soluzione:

(1) Non lo è: $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + 0 = 0$, mentre $f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f(1) = 1$.
(2) Si, lo è: $f([a]_6 + [b]_6) = f([a + b]_6) = [a + b]_2 = [a]_1 + [b]_2 = f([a]_6) + f([b]_6)$.
(3) Si, lo è: $f(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y)$.

Esercizio 4 (7 punti)**.** Siano A e B due matrici sullo stesso campo tali che A é sottomatrice di B. Dimostrare che il rango di A é minore o uguale al rango di B.

Soluzione: Basta osservare che qualsiasi sottomatrice di A è anche sottomatrice di B. Più in dettaglio, se $n = rg(A)$, allora per definizione esiste una sottomatrice C di A, di ordine $n \times n$ e tale che $det(C) \neq 0$. C è anche sottomatrice di B e quindi il rango di B è almeno n, cioè $rg(A) \leq rg(B)$.