Tutorato MMI - Resto 1

04/05/2023

Esercizio 1

Dimostrazione di base

Sia x un numero pari e y un numero dispari. Dimostrare per assurdo che $x + y$ è dispari.

Esercizio 1 - Soluzione 1

Soluzione :

Sia x un numero pari e y un numero dispari.
Supponiamo per assurdo che $x + y$ sia pari.
Sappiamo che $x = 2k, k \geq 0$ e $y = 2h + 1, h \geq 0$.
Pertanto, applicando l'ipotesi (sostituendo rispettivamente i valori di x e y) segue che:
$x + y = 2k + 2h + 1 = 2(k + h) + 1$ che è una quantità dispari.
Assurdo! Pertanto, abbiamo dimostrato per assurdo che se x pari e y dispari, allora $x + y$ dispari.

Esercizio 1 - Soluzione 2

Soluzione :

Sia x un numero pari e y un numero dispari. Supponiamo per assurdo che $x + y$ sia pari.
Allora $x + y = 2k$, con $k \geq 0$. Siccome per ipotesi x è numero pari, allora $x = 2h$, con $h \geq 0$. Quindi $2h + y = 2k$ cioè $y = 2k - 2h = 2(k - h)$. Possiamo quindi concludere che $x + y$ è pari.

Esercizio 2

Dimostrazione per induzione

Dimostrare per induzione che, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, il numero $n(n+1)$ è pari.

Esercizio 2 - Soluzione

Soluzione:

- **Base.** Sia $n = 0$, allora $n(n+1) = 0(0+1) = 0$, che è pari.
- **Passo induttivo.** Supponiamo per *ipotesi induttiva* che $P(n)$ sia vera, cioè che $n(n+1)$ sia pari. Vogliamo dimostrare che $P(n+1)$ è vera, cioè che $(n+1)[(n+1)\ +\ 1]$ è pari.
  $(n+1)((n+1)+1) = (n+1)^2 + (n+1) =$
  $n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + n + 2n + 2 = n(n+1) + 2(n+1)$.
  Per ipotesi induttiva $n(n+1)$ è pari mentre $2(n+1)$ è pari poiché multiplo di 2.
  Siccome la somma di due quantità intere pari è uguale ad una quantità intera ancora pari, il passo induttivo è verificato.
  Pertanto, essendo verificato il passo base e il passo induttivo, segue che $n(n+1)$ è pari per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 3

Dimostrazione per induzione

Sia $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare per induzione che la somma dei primi n numeri è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$.

Esercizio 3 - Soluzione

Soluzione :

Sia $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo che la somma dei primi n numeri è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$.

- **Base.** Sia $n = 1$, allora $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$, ovvero la somma dei primi $n = 1$ numeri.
- **Passo induttivo.** Supponiamo per ipotesi induttiva che $P(n)$ sia vera, cioè che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Dimostriamo allora che $P(n+1)$ è vera, cioè che $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)([n+1]+1)}{2}$. Segue che:
  $\sum_{k=1}^{n+1} k \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)([n+1]+1)}{2} = \frac{n^2+2n+n+2}{2}$
  $\sum_{k=1}^{n+1} k \stackrel{?}{=} \frac{n^2+2n+n+2}{2} = \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2}$
  $\sum_{k=1}^{n+1} k \stackrel{?}{=} \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$
  $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$. Come volevasi dimostrare.

Esercizio 4

Induzione strutturale

Sia X l'insieme degli interi tali che:

- $1 \in X$ e $2 \in X$
- se $x \in X$ allora anche $x + 3 \in X$

Rispondere ai seguenti quesiti:

a. Fornire i primi 10 interi appartenenti ad X
b. Dimostrare attraverso l'induzione strutturale che $X = Y$ dove Y è l'insieme degli interi positivi che **non sono** multipli di 3.

Esercizio 4

Soluzione :
I primi 10 interi appartenenti ad X sono:

$$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$$

Esercizio 4

Soluzione :
Dimostriamo che $X = Y$ dove $Y = \{y \in \mathbb{N} | y \neq 3k, \forall k \in \mathbb{N}\}$.
Dimostriamo prima che $X \subseteq Y$.

- **Base.** Siano $1, 2 \in X$. Ovviamente $\nexists k, h \in \mathbb{N}$ tali che $1 = 3k$ e $2 = 3h$. Quindi $1, 2 \in Y$.
- **Passo induttivo.** Supponiamo per ipotesi induttiva che $P(x)$ sia vera, cioè che $x \in X$ allora $x \in Y$. Dimostriamo allora che $P(x+3)$ è vera, cioè che $x+3$ (che per definizione appartiene a X) appartiene anche a Y. Supponiamo per assurdo che $x+3$ non appartiene a Y. Allora $x+3$ è multiplo di 3 e quindi $x+3 = 3k$. Ma allora $x = 3k - 3 = 3(k-1)$ e quindi x è multiplo di 3 e quindi $x \notin Y$. Assurdo!

Esercizio 4

Soluzione :
Ora dimostriamo prima che $Y \subseteq X$.

- **Base.** Siano $1, 2 \in Y$ i più piccoli interi positivi non multipli di 3. Ovviamente $1, 2 \in X$.
- **Passo induttivo.** Supponiamo per ipotesi induttiva che $P(y)$ sia vera, cioè che $y \in Y$ allora $y \in X$. Dimostriamo allora che $P(y + 3)$ è vera, cioè che $y + 3 \in X$. Poichè per ipotesi induttiva $y \in X$, per definizione di X anche $y + 3 \in X$.

Poiché $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$ possiamo concludere dicendo che $X = Y$.