ESAME DI MATEMATICA DISCRETA
01/09/2022

III APPELLO SESSIONE ESTIVA

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) Si è ammessi all'orale con un punteggio di almeno 15/30.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (6 punti)**.** Sia $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -12 \leq x \leq 12\}$. Descrivere, elencandone gli elementi, i seguenti insiemi:

$$(2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}) \cap A \qquad (2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}) \cap A \qquad (2\mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}) \cap A \qquad (3\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}) \cap A$$

Soluzione: Si ha

$$\begin{aligned}
&(2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}) \cap A = \{-12, -10, -9, -8, -6, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}\\
&(2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}) \cap A = \{-12, -6, 0, 6, 12\}\\
&(2\mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}) \cap A = \{-10, -8, -4, -2, 2, 4, 8, 10\}\\
&(3\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}) \cap A = \{-9, -3, 3, 9\}
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (8 punti)**.** Usando uno tra i due metodi visti a lezione, si descrivano gli interi a tali che simultaneamente si abbia $rest(a, 19) = 16$, $rest(a, 20) = 17$, e se ne determini l'unico compreso tra 1000 e 1500.

Soluzione: Le condizioni sono equivalenti al sistema

$$\begin{cases} a \equiv 16 \quad (mod\ 19) \\ a \equiv 17 \quad (mod\ 20) \end{cases}$$

Quindi, le soluzioni della prima equazione sono $a = 16 + 19k$, con $z \in \mathbb{Z}$. Sostituendo nella seconda otteniamo $16 + 19k \equiv 17(mod\ 20)$, che si riduce a $19k \equiv 1(mod\ 20)$, la cui soluzione è $k \equiv 19(mod\ 20)$. Sosituendo al posto k otteniamo $a = 16 + 19 \cdot 19 = 377$.

L'insieme di tutte le soluzioni è quindi $S = [377]_{380}$. L'unica soluzione compresa tra 1000 e 1500 è 1137 ottenuta come $377 + 2 \cdot 380$.

Esercizio 3 (8 punti)**.** Si consideri, nell'insieme $5\mathbb{N}$, l'operazione $\perp$ definita ponendo per ogni $n, m \in 5\mathbb{N}$,

$$n \perp m = \frac{nm}{5}$$

Si verifichi che tale operazione non rende $(5\mathbb{N}, \perp)$ un gruppo abeliano. Di che struttura algebrica si tratta?

Soluzione:

- $\perp$ è commutativa:
$$n \perp m = \frac{nm}{5} = \frac{mn}{5} = m \perp n;$$
- $\perp$ è associativa:
$$(n \perp m) \perp \ell = \frac{nm}{5} \perp \ell = \frac{nm}{5}\frac{\ell}{5} = \frac{mn\ell}{25} = \frac{m}{5}\frac{n\ell}{5} = \frac{m}{5}(n \perp \ell) = m \perp (n \perp \ell);$$
- $\perp$ ha elemento neutro:
$$5 \perp n = \frac{5n}{5} = n \quad \text{e} \quad n \perp 5 = \frac{n5}{5} = n;$$
- Nessun elemento è simmetrizzabile:
$$n \perp m = 5 \Leftrightarrow \frac{nm}{5} = 5 \Leftrightarrow nm = 1,$$
  poichè $n, m \in 5\mathbb{N}$, l'equazione $nm = 1$ non è mai verificata.

Di conseguenza, $(5\mathbb{N}, \perp)$ è un monoide abeliano.

Esercizio 4 (8 punti)**.** Dimostrare per induzione su n che il determinante di una matrice triangolare superiore $n \times n$ è uguale al prodotto dei suoi elementi diagonali.

Soluzione: La base di induzione è facilmente verificata. Infatti, se $A = (a)$, allora il suo determinante coincide con a. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, allora $det(A) = ad - b \cdot 0 = ad$.

Supponiamo quindi la tesi vera per $n > 2$ e dimostriamolo per $n + 1$. Sia A la matrice triangolare superiore data da

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Usando la regola di Lapalce sull'ultima riga, si ha che

$$det(A) = (-1)^{2n} a_{nn} det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

Per ipotesi di induzione,

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,n-1},$$

da cui segue la tesi.