

## 7. RELAZIONI D'ORDINE

**Esercizio 7.1.** Sia  $A = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$ , e si consideri l'insieme ordinato  $(A, |)$ , dove  $|$  denota la relazione del *divide* tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse di  $(A, |)$ .
- Si dimostri che  $(A, |)$  non è un reticolo.
- Si determini un sottoinsieme di ordine 5 di  $A$  che sia un reticolo, e se ne disegni il diagramma di Hasse.

**Esercizio 7.2.** Si consideri l'insieme  $S = \{a, b, c, d\}$ , e sia  $\mathcal{P}(S)$  l'insieme delle parti di  $S$ .

- Quanti sono gli elementi di  $\mathcal{P}(S)$  ?
- Nell'insieme ordinato  $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$  si calcoli  $\sup_{\mathcal{P}(S)}(\{a, c\}, \{a, d\})$  e  $\inf_{\mathcal{P}(S)}(\{a, c\}, \{a, d\})$ .
- Sia  $A = \{X \in \mathcal{P}(S) : |X| \leq 2\}$ . Quanti e quali sono gli elementi di  $A$  ?
- Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di  $A$ .
- Si disegni il diagramma di Hasse di  $(A, \subseteq)$ .
- Si stabilisca se  $(A, \subseteq)$  è totalmente ordinato, e perché.

**Esercizio 7.3.** Si consideri l'insieme  $A = \{2, 3, 4\}$ , e si ponga  $B = A \times A$ . Nell'insieme  $B$  si consideri poi la relazione  $\sqsubseteq$  definita ponendo

$$(a, b) \sqsubseteq (c, d) \iff a \leq c \text{ e } b|d$$

dove  $\leq$  e  $|$  denotano rispettivamente l'ordinamento *usuale* e quello del *divide* in  $\mathbb{N}$ .

- Si dimostri che  $\sqsubseteq$  è una relazione d'ordine in  $B$ .
- Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato  $(B, \sqsubseteq)$ .
- Si determinino gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo e massimo di  $(B, \sqsubseteq)$ .
- Motivando la risposta, si stabilisca se  $(B, \sqsubseteq)$  è un reticolo.

**Esercizio 7.4.** Nell'insieme  $A = \{1, 2, \dots, 9\}$  dei numeri naturali minori di 10 si consideri la relazione  $\sqsubseteq$  definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } 4a < 3b.$$

- Si verifichi che  $\sqsubseteq$  è una relazione d'ordine in  $A$ .
- Si disegni il diagramma di Hasse di  $(A, \sqsubseteq)$ .
- Si stabilisca se  $(A, \sqsubseteq)$  è totalmente ordinato.
- Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di  $(A, \sqsubseteq)$ .
- Si determini l'eventuale estremo superiore in  $A$  del sottoinsieme  $\{3, 4\}$ .
- Si stabilisca se  $(A, \sqsubseteq)$  è un reticolo.