Tutorato MMI - Resto 1

26/05/2023

Esercizio 1

Induzione matematica e strutturale

Sia $ODD := \{ w \in \{a, b\}^* \mid \exists k \geq 0 : |w| = 2k + 1 \}$. Fornire una definizione ricorsiva ODD_R dell'insieme ODD. Dimostare per induzione, specificando quale induzione si usa, che $ODD = ODD_R$.

Esercizio 1 - Soluzione

Soluzione

Definiamo ricorsivamente l'insieme ODD_R come segue:

- **Passo base.** $a, b \in ODD_R$.
- **Passo ricorsivo.** Se $w \in ODD_R$, allora

$$waa, wab, wba, wbb \in ODD_R.$$

Dimostriamo ora che $ODD = ODD_R$, ovvero che:

$$ODD \subseteq ODD_R \text{ e } ODD_R \subseteq ODD.$$

Esercizio 1 - Soluzione

Soluzione

Dimostriamo che $ODD \subseteq ODD_R$.
Sia $P(n) :=$ Se $w \in \{a, b\}^*, |w| = 2n + 1$ allora $w \in ODD_R$.
Dimostreremo, per induzione matematica su n, che $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 0$. Questo equivale a provare che $ODD \subseteq ODD_R$.

- **Passo base.** Sia $n = 0$. Allora $|w| = 1$. Abbiamo due casi $w = a$ oppure $w = b$, ma in entrambi i casi si ha che $w \in ODD_R$ per il passo base della definizione ricorsiva di ODD_R.

Soluzione

- **Passo induttivo.** Sia $k \geq 0$ e sia $P(k)$ vera, ossia se $|x| = 2k + 1$, allora $x \in ODD_R$. Consideriamo una stringa $w \in ODD$, ossia $|w| = 2(k+1) + 1 \geq 3$. Dimostriamo $P(k+1)$. Dunque $w = w'\sigma_1\sigma_2$, dove $w' \in \{a, b\}^*$, $\sigma_1, \sigma_2, \in \{a, b\}$. Allora:

$$
\begin{aligned}
|w| = |w'\sigma_1\sigma_2| &= \text{(per def. ricorsiva di lunghezza)} \\
&= |w'\sigma_1| + 1 = |w'| + 2.
\end{aligned}
$$

  Siccome $|w| = |w'\sigma_1\sigma_2| = 2(k+1) + 1$ allora $|w'| = 2k + 1$, e quindi $w' \in ODD_R$. Per il passo ricorsivo della definizione ricorsiva di ODD_R, $w'\sigma_1\sigma_2 \in ODD_R$ per qualsiasi $\sigma_1, \sigma_2 \in \{a, b\}$.

Poiché abbiamo dimostrato sia il passo base che il passo induttivo, per il principio di induzione matematico, abbiamo dimostrato che $ODD \subseteq ODD_R$.

Soluzione

Dimostriamo che $ODD_R \subseteq ODD$, per induzione strutturale.

- **Passo base.** Sia $w = a$ oppure $w = b$. Per definizione di lunghezza, in entrambi i casi abbiamo che $w \in ODD$, poiché $|w| = |a| = 1 = |b| = |w|$.
- **Passo induttivo.** Sia $w \in ODD_R$ e $w \notin \{a, b\}$, cioè w non è ottenuta nel passo base. Allora, per il passo ricorsivo, esiste $x \in ODD_R$ tale che $w \in \{xaa, xab, xba, xbb\}$. Dobbiamo dimostrare che la lunghezza di w è dispari. Per ipotesi induttiva, $x \in ODD$, ovvero $|x| = 2k + 1, k \geq 0$. Se $w = xaa$, $|w| = |xaa| = |xa| + 1 = |x| + 2 = 2k + 1 + 2 = 2(k + 1) + 1$. Questo significa che $k' = k + 1 : |w| = 2k' + 1$, e quindi $w \in ODD$. Stesso ragionamento se w è uguale a xab, xba oppure xbb.

Esercizio 1 - Soluzione

Soluzione

Poiché abbiamo dimostrato sia il passo base che il passo induttivo, per il principio di induzione strutturale, abbiamo dimostrato che $ODD_R \subseteq ODD$.

Abbiamo dimostrato che $ODD \subseteq ODD_R$ e che $ODD_R \subseteq ODD$. Possiamo quindi concludere affermando che $ODD = ODD_R$.

Esercizio 2

Induzione matematica e strutturale

L'insieme $\{a\}^*$ delle stringhe sull'alfabeto $\{a\}$ è definito ricorsivamente come segue:

- **Passo base.** $\lambda \in \{a\}^*$.
- **Passo ricorsivo.** Se $x \in \{a\}^*$, allora $xa \in \{a\}^*$.

Sia $A \coloneqq \{\, a^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, dove $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri interi non negativi. Dimostrare che $A = \{a\}^*$.

Esercizio 2 - Soluzione

Soluzione

Dimostriamo che $A \subseteq \{a\}^*$.
Sia $P(n) :=$ Se $w = a^n$ allora $w \in A$. Dimostreremo, per induzione matematica su n, che $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 0$. Questo equivale a provare che $A \subseteq \{a\}^*$.

- **Passo base.** Sia $n = 0$. Allora $w = a^0 = \lambda$. Per il passo base della definizione ricorsiva di $\{a\}^*$, risulta che $w = \lambda \in \{a\}^*$.
- **Passo induttivo.** Sia $k \geq 0$ e sia $P(k)$ vera, ovvero se $w = a^k$ allora $w \in \{a\}^*$. Dimostriamo che $P(k+1)$ è vera, ossia che $a^{k+1} \in \{a\}^*$. Risulta che $a^{k+1} = a^k a$. Per ipotesi, $P(k)$ è vera, ovvero $a^k \in \{a\}^*$. Applicando il passo ricorsivo della definizione ricorsiva di $\{a\}^*$, abbiamo che $a^k a \in \{a\}^*$.

Poiché abbiamo dimostrato sia il passo base che il passo induttivo, per il principio di induzione matematico, abbiamo dimostrato che $A \subseteq \{a\}^*$.

Esercizio 2 - Soluzione

Soluzione

Dimostriamo che $\{a\}^* \subseteq A$, per induzione strutturale.

- **Passo base.** Sia $w = \lambda$. Per definizione ricorsiva di potenza di una stringa $\lambda = a^0 \in A$.
- **Passo induttivo.** Sia $w \in \{a\}^* \setminus \{\lambda\}$, ovvero una stringa non ottenuta nel passo base. Allora per il passo ricorsivo, esiste $x \in \{a\}^*$ tale che $w = xa$. Per ipotesi induttiva, $x \in A$, ovvero $\exists k \geq 0 : x = a^k$. Risulta quindi che $w = xa = a^k a = a^{k+1} \in A$, essendo $(k+1) \in \mathbb{N}$.

Poiché abbiamo dimostrato sia il passo base che il passo induttivo, per il principio di induzione strutturale, abbiamo dimostrato che $\{a\}^* \subseteq A$. Poiché $A \subseteq \{a\}^*$ e $\{a\}^* \subseteq A$, allora $A = \{a\}^*$.