Architettura degli Elaboratori

Algebra di Boole e reti logiche

Barbara Masucci
UNIVERSITA DEGLI STUDI DI SALERNO
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
DIPARTIMENTO DI ECCELLENZA

Punto della situazione

- Abbiamo visto diversi sistemi di rappresentazione dell'informazione
- Adesso vedremo la logica digitale usata dal calcolatore nell'ottica di costruire
  - l'ALU (Arithmetic-Logic Unit)
  - la CU (Control Unit)

Componenti di un processore

- All'interno di un processore abbiamo due tipi di componenti:
  - Combinatorie (senza memoria)
  - Sequenziali (con memoria)

- Iniziamo con lo studio delle componenti combinatorie
  - Anche dette blocchi logici, circuiti combinatori o reti combinatorie

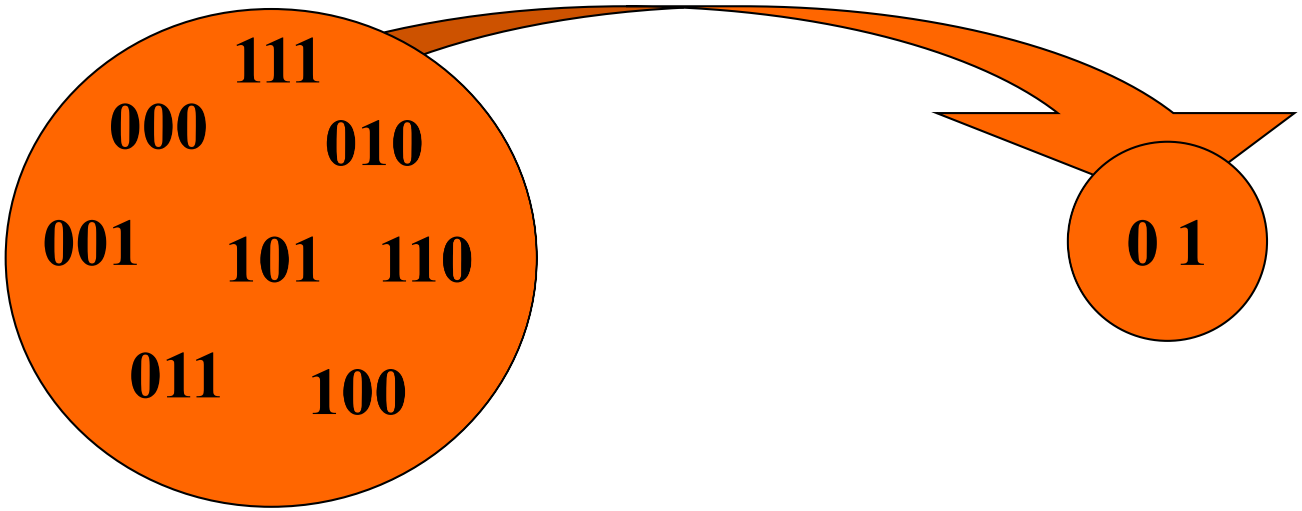
Blocchi logici

- Un blocco logico ha alcuni fili di input e alcuni fili di output sui quali viaggiano i segnali elettrici
  - Segnali elettrici: alto, ovvero 1, basso ovvero 0

- Ogni blocco logico realizza n funzioni logiche di m variabili in {0,1} a valori in {0,1}
- $f : \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}$

Funzioni logiche

- Una funzione logica o di commutazione è una funzione di m variabili in {0,1} a valori in {0,1}
- $f : \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}$



- Perché "di commutazione"?
  - A seconda della combinazione di input, cambia (commuta) l'output

Funzioni logiche: esempio

L'addizionatore

Realizza le due funzioni logiche

Somma(a, b, c_{in})= s
Riporto(a, b, c_{in})= c_{out}

Con variabili a, b, c_{in} in {0,1} e valori s, c_{out} in {0,1}

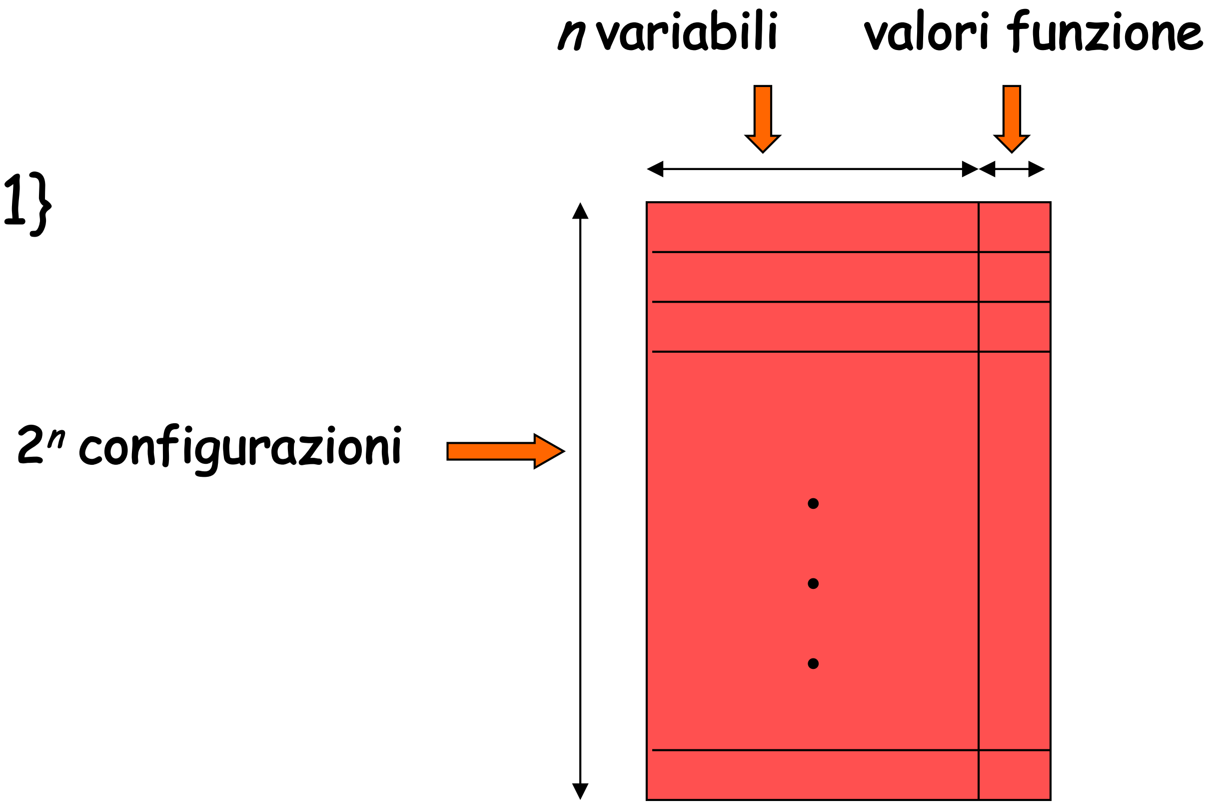
Esempio: Somma(0,0,1)=1 e Riporto (0,0,1)=0

Tavola di verità

- Tabella che rappresenta una funzione logica elencandone i valori per ogni combinazione delle variabili
- Esempio:

  $f : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0



Esempio

Funzione di 3 variabili: Somma(a, b, c_{in})= s

a	b	c_{in}	s
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Esempio

Funzione di 3 variabili: Riporto(a, b, c_{in}) = c_{out}

a	b	c_{in}	c_{out}
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Funzioni logiche

Funzioni di una variabile

$$f : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

	f_0	f_1	f_2	f_3
0	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**1**

$$NOT(x)$$

$$\downarrow$$

$$\overline{x}$$

Funzioni costanti

Funzione identità

Funzioni logiche

Funzioni di due variabili

$$f : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$$

x_1	x_0	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$\boxed{AND(x_0 x_1)}$ $\boxed{XOR(x_0 x_1)}$ $\boxed{OR(x_0 x_1)}$ $\boxed{NOR(x_0 x_1)}$ $\boxed{NAND(x_0 x_1)}$

Funzioni booleane

- Le funzioni logiche che ci interessano maggiormente sono le seguenti:
  - Funzione NOT
  - Funzione AND
  - Funzione OR

- Tali funzioni
  - Sono anche dette "funzioni booleane"
  - Sono realizzate da semplici dispositivi fisici (o porte logiche)

Funzione NOT: la negazione

- NOT(x), con x variabile che può assumere valore Vero o Falso, dà come risultato
  - Vero se la variabile è posta a Falso
  - Falso, altrimenti
- Interpretando Vero come 1 e Falso come 0 NOT(x) corrisponde alla negazione di x

NOT(V) = F
NOT(F) = V

$\overline{0} = 1$
$\overline{1} = 0$

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Tavola di verità

Funzione AND: il prodotto

- AND(x,y), con x, y variabili che possono assumere valore Vero o Falso, dà come risultato
  - Vero se entrambe le variabili sono poste a Vero
  - Falso, altrimenti
- Interpretando Vero come 1 e Falso come 0, AND(x,y) corrisponde al prodotto $x \cdot y$

AND(F,F) = F $0 \cdot 0 = 0$

AND(F,V) = F $0 \cdot 1 = 0$

AND(V,F) = F $1 \cdot 0 = 0$

AND(V,V) = V $1 \cdot 1 = 1$

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tavola di verità

Funzione OR: la somma logica

- OR(x,y), con x, y variabili che possono assumere valore Vero o Falso, dà come risultato
  - Vero se almeno una variabile è posta a Vero
  - Falso, altrimenti
- Interpretando Vero come 1 e Falso come 0
  OR(x,y) corrisponde alla somma $x + y$, in cui $1+1 = 1$

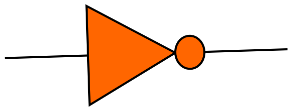
OR(F,F) = F $0 + 0 = 0$
OR(F,V) = V $0 + 1 = 1$
OR(V,F) = V $1 + 0 = 1$
OR(V,V) = V $1 + 1 = 1$

x	y	x + y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

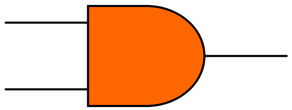
Tavola di verità

Porte logiche
rappresentazione grafica

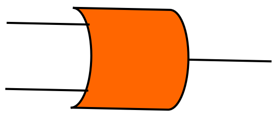
- Porta NOT



- Porta AND

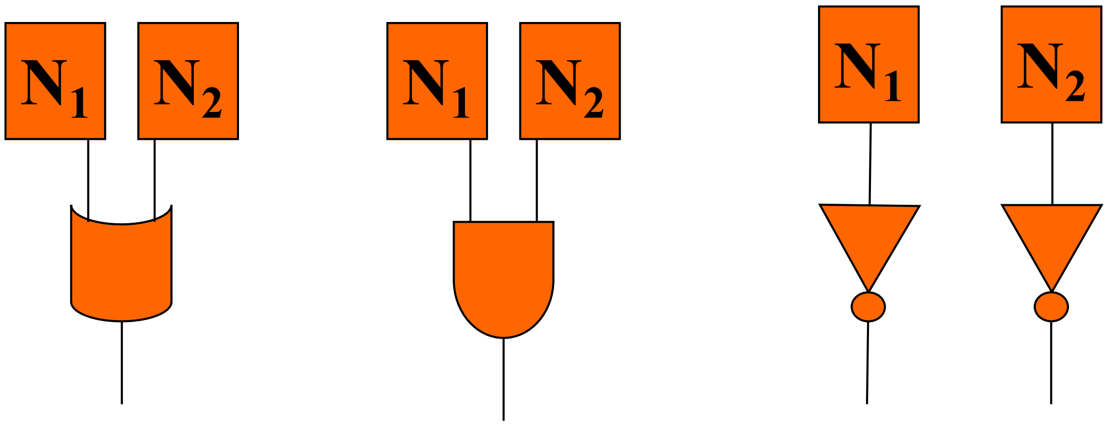


- Porta OR



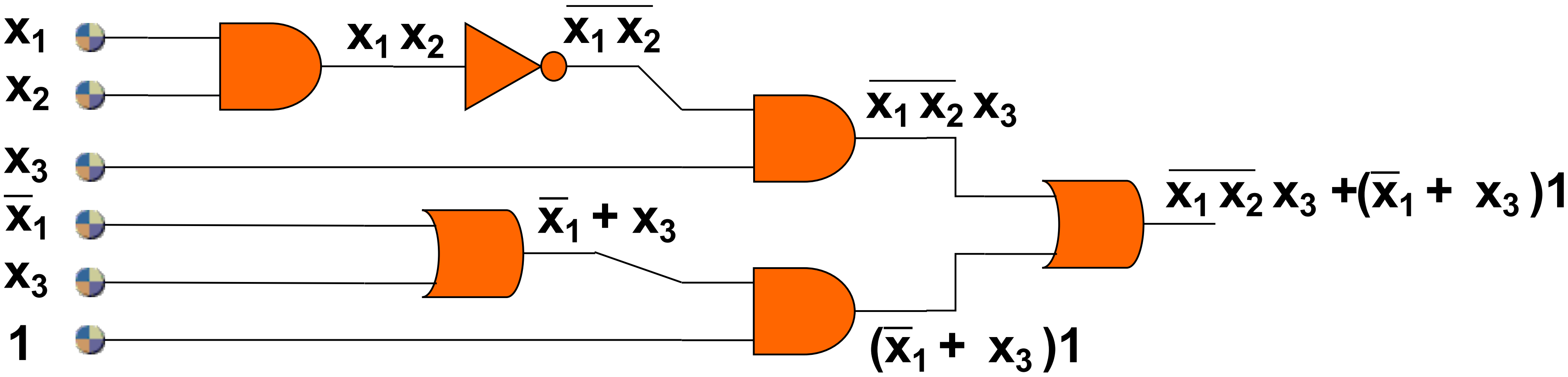
Reti logiche

- Una rete logica (o combinatoria) è un dispositivo fisico il cui comportamento in output dipende solo dall'input
- Viene definita induttivamente
  - I terminali di input sono reti combinatorie
  - Se N_1 e N_2 sono reti combinatorie allora lo sono anche



Reti logiche

Possiamo ottenere reti logiche complesse mediante la combinazione di reti più semplici



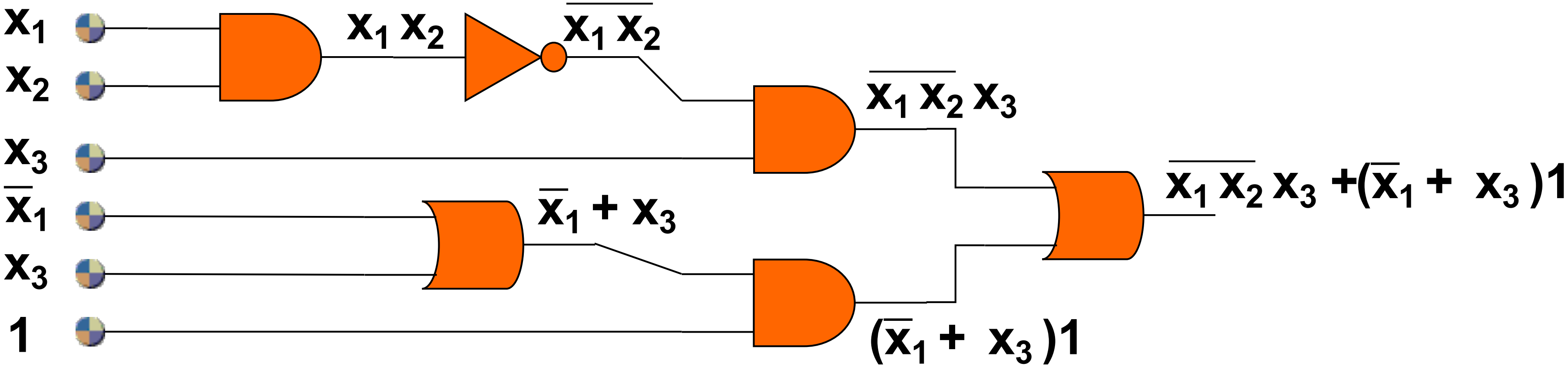
Espressioni booleane

- Sono definite induttivamente
  - Le variabili e le costanti sono espressioni booleane
  - Se E_1 e E_2 sono espressioni booleane allora lo sono anche
    - E_1E_2
    - E_1+E_2
    - $\overline{E_1}$
    - $\overline{E_2}$

Ad ogni rete combinatoria è associata un'espressione booleana e viceversa

Reti logiche e funzioni

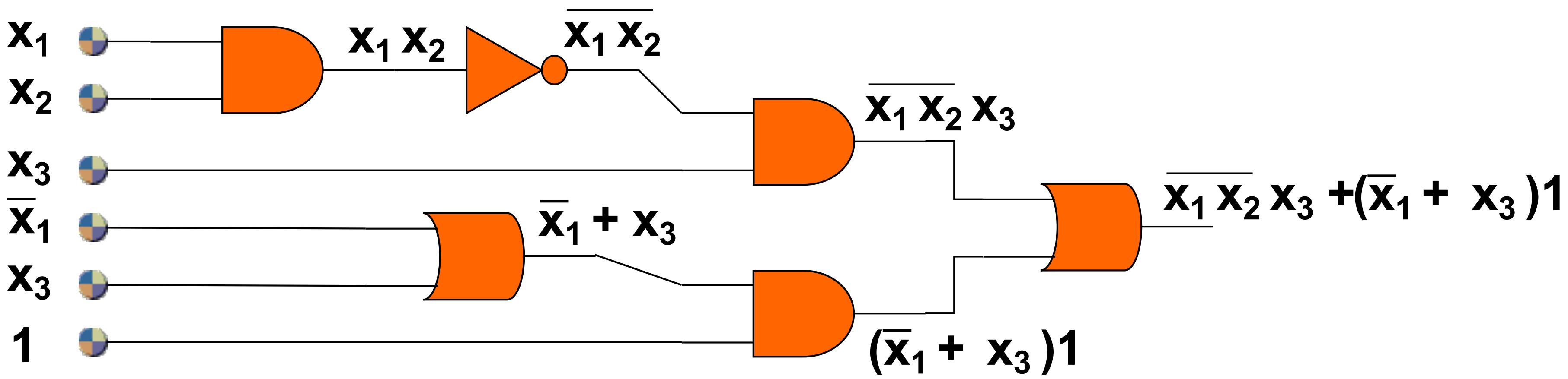
Ogni rete logica calcola una funzione booleana dei suoi ingressi



Il processo di calcolo della funzione associata alla rete si chiama analisi della rete

Analisi di una rete logica

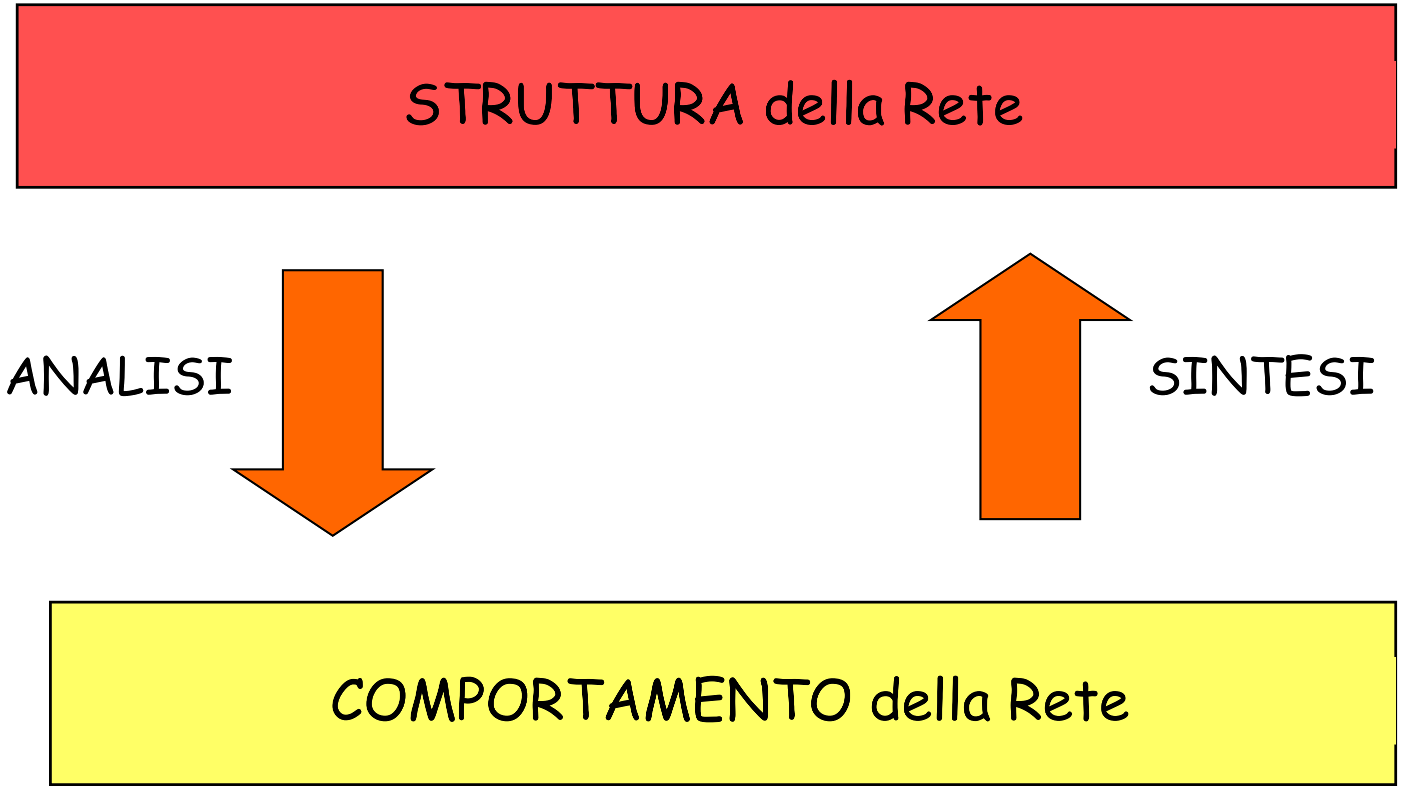
Calcola, per ciascuna porta logica, l'espressione booleana associata al suo output, fino ad ottenere l'espressione associata al terminale d'uscita della rete



Sintesi di una rete logica

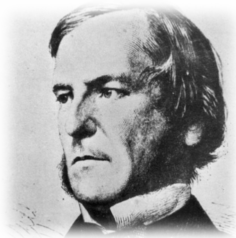
- Per ogni funzione logica possiamo costruire una rete logica che la realizza
  - In realtà, molte reti logiche, non tutte equivalenti in termini prestazioni
- Il processo di costruzione della rete logica si chiama sintesi della rete
  - Il processo di minimizzazione consente di ottenere la rete logica con prestazioni migliori

Analisi e sintesi di reti logiche



Algebra di Boole

- Introdotta nel 1874 da George Boole per fornire una rappresentazione algebrica della logica binaria



- Applicata nel 1936 da Claude Shannon allo studio delle reti di commutazione telefonica

- Utile per modellare il funzionamento dei circuiti elettronici, è anche detta "algebra di commutazione"

Algebra di Boole

Insieme di espressioni booleane, contenente le costanti 0 ed 1, su cui sono definite

- Due operazioni binarie, AND e OR, con le proprietà
  - commutativa,
  - associativa,
  - di idempotenza,
  - di assorbimento,
  - di distributività reciproca
- Una operazione unaria, NOT, con le proprietà
  - di involuzione,
  - di complementarietà
  - leggi di De Morgan

Algebra di Boole

- Le costanti 0 e 1 godono delle seguenti proprietà
  - NOT(0) = 1
  - x AND 1=x x AND 0=0
  - x OR 0=x x OR 1=1
- Vale il seguente assioma
  - Ciascuna espressione assume il valore 0 o il valore 1 per ogni assegnazione dei valori alle sue variabili

Algebra di Boole

1.	$\overline{\overline{x}} = x$	Proprietà di involuzione
2.	$x \cdot y = y \cdot x, \quad x + y = y + x$	Proprietà commutativa
3.	$x \cdot x = x, \quad x + x = x$	Proprietà di idempotenza
4.	$x \cdot \overline{x} = 0, \quad x + \overline{x} = 1$	Proprietà del complemento
5.	$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$	Proprietà distributiva
6.	$x \cdot (x+y) = x, \quad x + x \cdot y = x$	Proprietà di assorbimento
6bis.	$x \cdot (\overline{x}+y) = x \cdot y \quad x + \overline{x} \cdot y = x+y,$	
7.	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	Proprietà associativa
8.	$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}, \quad \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$	Leggi di De Morgan

Esempi

Esempio 1

Applicando le proprietà distributiva e del complemento si ha:

$$\boxed{x_1\overline{x_2}x_3x_4 + x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} = x_1\overline{x_2}x_3\left(x_4 + \overline{x_4}\right) = x_1\overline{x_2}x_3}$$

Esempio 2

Applicando le leggi di De Morgan si dimostra:

$$E = x_2x_4 + \overline{x_1}x_3$$

$$\overline{E} = \overline{x_2x_4 + \overline{x_1}x_3} = \overline{x_2x_4}\cdot\overline{\overline{x_1}x_3} = \left(\overline{x_2} + \overline{x_4}\right)\cdot\left(x_1 + \overline{x_3}\right)$$

Riepilogo e riferimenti

- Funzioni di commutazione, reti ed espressioni
  - [P] par. 3.1, 3.2, 3.3
- Algebra booleana
  - [P] par. 3.4
- E' possibile consultare in alternativa
  - [PH] Appendice B
    (Nella terza edizione, Appendice C)