Lezione 8-11

martedì 8 novembre 2022 11:16

ESERCIZIO $(\mathbb{Z}, \perp)$ $\quad a \perp b = a+b-5$

$f : (\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z}, \perp)$ vedere f è ISOMORFISMO
$x \mapsto 5-x$

1) $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$, $\underbrace{a \perp (b \perp c)} = (a \perp b) \perp c$

$$a \perp \underbrace{(b+c-5)}_{d} = a + \underbrace{(b+c-5)}_{d} - 5$$

$$= a+b+c-10$$

$$(a \perp b) \perp c = (a+b-5) \perp c = ((a+b-5)+c)-5 =$$

$$= a+b-5+c-5 = a+b+c-10$$

2) Esiste $e \in \mathbb{Z}$ t.c. $a \perp e = e \perp a = a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \cancel{a} + e - 5 = \cancel{a} & \Rightarrow \quad e-5=0 \Rightarrow e=5 \\ e + \cancel{a} - 5 = \cancel{a} & \Rightarrow \quad e=5 \end{cases}$$

L'elemento neutro è 5

$a \perp 5 = a+5-5 = a$ ok

3) $\forall a \in \mathbb{Z}$ esiste $a' \in \mathbb{Z}$ t.c. $\underbrace{a \perp a' = 5} = a' \perp a$

$$a + a' - 5 = 5$$

$$\Rightarrow a' = 10 - a \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow a' = 10 - a$ è simmetrico di a

$\forall a \in \mathbb{Z}$, $\quad a \perp (10-a) = 5 \quad \to \quad a + 10 - a - 5 = 5$ ok

$(b-a) \perp a = s \rightarrow b-a+a-s=s$ ok

4) $\forall a,b \in \mathbb{Z}$, $\underbrace{a \perp b}_{a+b-s} = \underbrace{b \perp a}_{b+a-s}$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ è gruppo commutativo

5) $f: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, \perp)$

$x \mapsto s-x$

f è biettiva

f è omomorfismo

$\forall a,b \in \mathbb{Z}$, $f(a+b) = f(a) \perp f(b)$

$s-(a+b) = s-a-b$

$(s-a) \perp (s-b) = (s-a)+(s-b)-s = s-a+\cancel{s}-b-\cancel{s} = s-a-b$

6) f è iniettiva

$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

(x) $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

$f(a) = f(b) \Rightarrow \cancel{s}-a = \cancel{s}-b \Rightarrow -a = -b \Rightarrow a = b$

7) f è suriettiva

$\forall b \in \mathbb{Z}$ (codominio) esiste $a \in \mathbb{Z}$ (dominio) t.c. $f(a) = b$, così

$s-a = b \Rightarrow a = s-b$ VERO

ESERCIZI

① $(\mathbb{Q}, \perp)$, $\quad x \perp y = \frac{3}{2}xy$

(i) $\underbrace{x \perp y} = \underbrace{y \perp x}$?

$\frac{3}{2}xy = \frac{3}{2}yx \quad$ vero

(ii) $\underbrace{x \perp (y \perp z)} = (x \perp y) \perp z$

$a \perp b = \frac{3}{2}ab$

$\underbrace{\overset{a}{x} \perp \overset{b}{\left(\frac{3}{2}yz\right)}}$

$\frac{3}{2} \cdot x \cdot \frac{3}{2}yz$

$= \frac{9}{4}xyz$

$\overset{a}{\left(\frac{3}{2}xy\right)} \perp \overset{b}{z}$

$= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}xy\right) \cdot z = \frac{9}{4}xyz$

(iii) $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\underbrace{x \perp e = x}$

$\frac{3}{2}x \cdot e = x$

se $x \neq 0$, $\quad e = \frac{2}{3}$ $\quad$ | $\quad$ se $x = 0 \quad 0 \perp \frac{2}{3} = 0$

(iv) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \perp)$

$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \ \exists x' \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ tc $\quad x \perp x' = e$

$x \perp x' = \frac{2}{3}$

$\frac{3}{2}xx' = \frac{2}{3} \Rightarrow xx' = \frac{4}{9} \Rightarrow$ se $x \neq 0$, $x' = \frac{4}{9}\frac{1}{x}$

se $x = 0$, non ho simmetrico

$(\mathbb{Q}, \perp)$ non è un gruppo, $\quad (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \perp)$ è un gruppo.

$(\mathbb{Q}, \perp)$ non è un gruppo, $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \perp)$ è un gruppo.

$f:(\mathbb{Q}, \cdot) \to (\mathbb{Q}, \perp)$

$x \mapsto \frac{2}{3}x$ è iso

(i) $\underbrace{f(x \cdot y)}_{\frac{2}{3}xy} = \underbrace{f(x) \perp f(y)}_{\underbrace{\frac{2}{3}x \perp \frac{2}{3}y}_{}}$

$\cancel{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cancel{\frac{2}{3}}x\right)\left(\frac{2}{3}y\right) = \frac{2}{3}xy$ ok

(ii) f è iniettiva: $\frac{2}{3}x = \frac{2}{3}y \Rightarrow x = y$

f è suriettiva: $\forall\, y \in \mathbb{Q}\ \exists\, x \in \mathbb{Q}$ tc $y = \frac{2}{3}x$

$\Rightarrow$ si ha $x = \frac{3}{2}y$ infatti $f\left(\frac{3}{2}y\right) = \frac{2}{3}\,\frac{3}{2}y = y$

DEF - Dato un anello $(A, +, \cdot)$, un elemento a è detto
DIVISORE dello ZERO se esiste $b \in A$ tc $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $ab = 0$
($\mathbb{Z}_m$, m non primo ha divisori dello zero)

$\mathbb{Z}_4$, $[2]_4 \cdot [2]_4 = [4]_4 = [0]_4$

(4) $S \neq \emptyset$, $g: (\mathcal{P}(S), \cup) \to (\mathcal{P}(S), \cap)$ è isomorfismo

$X \mapsto S \setminus X$

(i) g è iniettiva:

$g(X) = g(Y) \Rightarrow S\setminus X = S \setminus Y \Rightarrow \underbrace{S\setminus(S\setminus X)}_{=X} = \underbrace{S\setminus(S\setminus Y)}_{Y}$

(ii) g é suriettiva: $\forall\ X \subseteq S, \quad X = S \setminus \underbrace{(S \setminus X)}_{g(S\setminus X) = X}$

iii) g é omom. $\underbrace{g(X \cup Y)}_{S \setminus (X \cup Y)} = \underbrace{g(X) \cap g(Y)}_{(S \setminus X) \cap (S \setminus Y)}$

$a \in S \setminus (X \cup Y) \iff a \notin X \cup Y \iff a \notin X$ e $a \notin Y$

$\iff a \in S \setminus X$ e $a \in S \setminus Y \iff a \in (S \setminus X) \cap (S \setminus Y)$