Architettura degli Elaboratori

Esercitazione

Barbara Masucci
UNIVERSITA DEGLI STUDI DI SALERNO
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
DIPARTIMENTO DI ECCELLENZA

Su cosa ci esercitiamo oggi?

- Notazione in complemento a 2
  - Utilizzo della definizione e di alcune formule sulla somma di potenze consecutive di 2

- Notazione in virgola mobile
  - Standard IEEE 754
  - Conversioni
  - Addizione

Esercizio 1

- Dimostrare che nella rappresentazione

$$b_{n-1}\, b_{n-2} \ldots b_0$$

in complemento a due dell'intero N:

  - Se $b_{n-1} = 0$ allora $N \geq 0$
  - Se $b_{n-1} = 1$ allora $N < 0$

Esercizio 1: Soluzione

- Dalla definizione di complemento a due si ha

$$N = -2^{n-1} b_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i b_i$$

- Se $b_{n-1} = 0$, allora $N = \sum_{i=0}^{n-2} 2^i b_i$ è positivo
- Se $b_{n-1} = 1$, allora $N = -2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i b_i$ è negativo
  - Infatti, il valore massimo che la sommatoria può assumere è $\sum_{i=0}^{n-2} 2^i = 2^{n-1} - 1$ e in tal caso $N = -1$

Esercizio 2

- Dimostrare che nella rappresentazione in complemento a due, l'intero rappresentato da

  $1b_{k-1} \ldots b_0$

  è uguale all'intero rappresentato da

  $11\ldots1b_{k-1} \ldots b_0$

  qualunque sia il numero $h \geq 2$ di 1 che precedono b_{k-1}, e per ogni valore binario di $b_{k-1}, \ldots, b_0$

- Suggerimento: utilizzare la formula

$$\sum_{i=r}^{s} 2^i = \sum_{i=0}^{s} 2^i - \sum_{i=0}^{r-1} 2^i = (2^{s+1} - 1) - (2^r - 1) = 2^{s+1} - 2^r$$

Esercizio 2: Soluzione

- Dalla definizione di complemento a due, l'intero rappresentato da $1b_{k-1} \dots b_0$ è

$$N = -2^k + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i b_i$$

- Sia N_{h-1} l'intero rappresentato da $11\dots1b_{k-1} \dots b_0$ dove $h \geq 2$ indica il numero di 1 che precedono b_{k-1}. Notiamo che

$$N_1 = -2^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} 2^i b_i$$

$11b_{k-1} \dots b_0$ (h=2)

$$N_2 = -2^{k+2} + \sum_{i=0}^{k+1} 2^i b_i$$

$111b_{k-1} \dots b_0$ (h=3)

$$N_{h-1} = -2^{k+h-1} + \sum_{i=0}^{k+h-2} 2^i b_i$$

$11\dots1b_{k-1} \dots b_0$

Esercizio 2: Soluzione

$$N_{h-1} = -2^{k+h-1} + \sum_{i=0}^{k+h-2} 2^i b_i$$

$$= -2^{k+h-1} + \sum_{i=k}^{k+h-2} 2^i + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i b_i$$

$$= -2^{k+h-1} + (2^{k+h-1} - 2^k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i b_i$$

$$= -2^k + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i b_i$$

$$= N$$

$$\sum_{i=r}^{s} 2^i = 2^{s+1} - 2^r$$

Esercizio 3

- Quale valore decimale rappresenta la seguente configurazione binaria in formato IEEE 754?

1 10000100 01000100000000000000000$_2$

Segno	Esponente (8 bit)	Mantissa (23 bit)

Esercizio 3: Soluzione

Configurazione da convertire:

$1\ 10000100\ 01000100000000000000000_2$

Segno: 1 → segno -

Esponente $10000100_2 \rightarrow 2^7+2^2 = 128_{10}+4_{10} = 132_{10}$

$e = 132_{10}$ quindi $E = 132_{10}-127_{10} = 5_{10}$

Mantissa $01000100000000000000000_2 \rightarrow$

$\rightarrow M = 2^{-2}+2^{-6} = 0,25_{10}+0,015625_{10} = 0,265625_{10}$

Pertanto il valore decimale è dato da:

$N = (-1)^s \times (1+M) \times 2^E = -1 \times 1,265625_{10} \times 2^5 = -40,5_{10}$

Segno	Esponente (8 bit)	Mantissa (23 bit)

Esercizio 4

- Convertire il numero $-22{,}5_{10}$ in formato a virgola mobile IEEE 754 (precisione singola) ed esprimere il risultato in esadecimale

Segno	Esponente (8 bit)	Mantissa (23 bit)

Esercizio 4: Soluzione

Prendiamo in considerazione il numero decimale:

$N = -22,5_{10}$

1) Determiniamo il segno: poiché il numero è negativo, poniamo s = 1

Esercizio 4: Soluzione

Prendiamo in considerazione il numero decimale:

$N = -22{,}5_{10}$

2) Convertiamo la parte intera:

22	2				
0	11	2			
	1	5	2		
		1	2	2	
			0	1	2
				1	0

$22_{10} = 10110_2$

Esercizio 4: Soluzione

Prendiamo in considerazione il numero decimale:

$N = -22{,}5_{10}$

3) Convertiamo la parte frazionaria:

$F=0{,}5_{10}$ $2 \times 0{,}5 = 1 + 0{,}00$ $0{,}5_{10} = 0{,}1_2$

Quindi $22{,}5_{10} = 10110{,}1_2$

Esercizio 4: Soluzione

Prendiamo in considerazione il numero decimale:

$N = -22{,}5_{10}$

3) Normalizzaziamo: il numero ottenuto, $1011{,}1_2$, va normalizzato per essere conforme allo standard

$$22{,}5_{10} = 10110{,}1_2 = 1{,}01101_2 \times 2^4$$

La mantissa è 01101_2

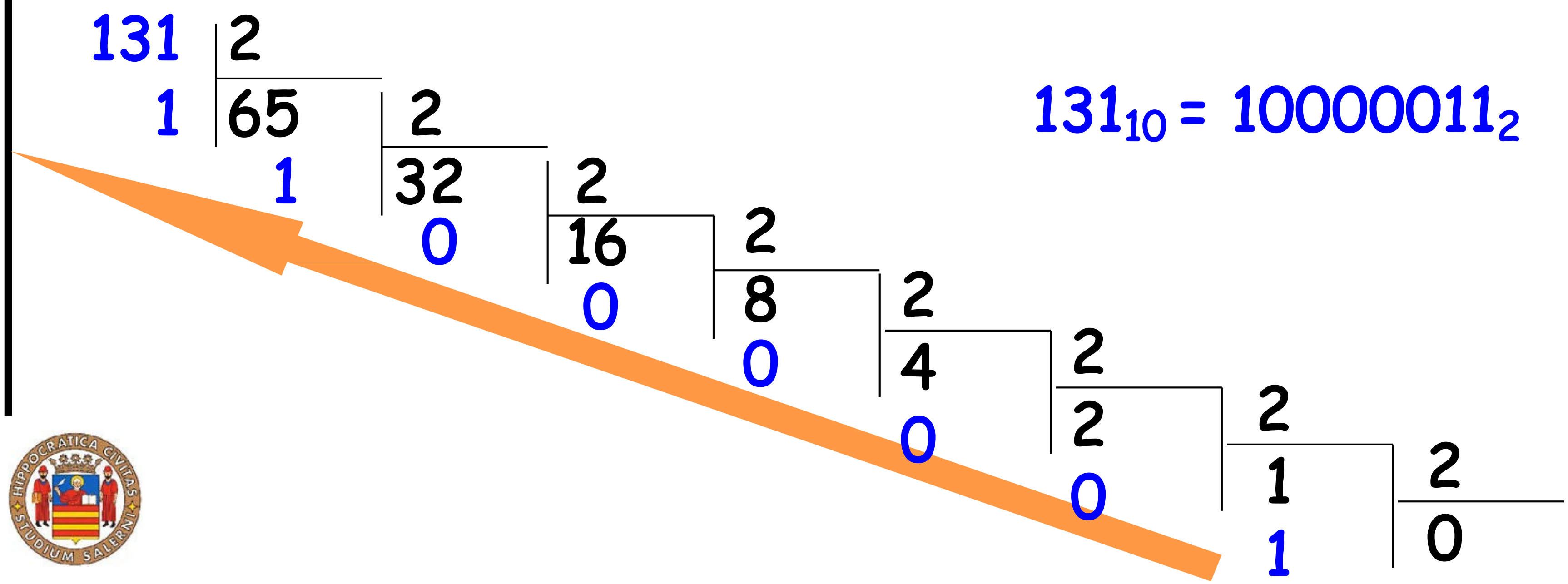
L'esponente è $4+127=131_{10}$

Esercizio 4: Soluzione

Prendiamo in considerazione il numero decimale:

$N = -22{,}5_{10}$

4) Calcoliamo l'esponente: convertiamo 131_{10} in binario ed esprimiamolo con 8 bit:



$131_{10} = 10000011_2$

Esercizio 4: Soluzione

In definitiva:

- $s=1$
- $M=01101000000000000000000_2$
- $e=10000011_2$

Segno	Esponente (8 bit)	Mantissa (23 bit)

- La rappresentazione di $-22{,}5_{10}$ quindi è

  $1\ 10000011\ 01101000000000000000000_2$

- Convertiamo in formato esadecimale:

  $1100\ 0001\ 1011\ 0100\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000_2$

  $c1b40000_{16}$

Esercizio 5

- Quale valore decimale rappresenta la seguente configurazione binaria in formato IEEE 754?

  - $1\ 10000000\ 01000000000000000000000_2$

Segno	Esponente (8 bit)	Mantissa (23 bit)

Esercizio 5: Soluzione

Configurazione da convertire:

$1\ 10000000\ 01000000000000000000000_2$

Segno: 1 → segno -

Esponente 10000000_2 → $2^7 = 128_{10}$

$e = 128_{10}$ quindi $E = 128_{10} - 127_{10} = 1_{10}$

Mantissa $01000000000000000000000_2$ →

→ $2^{-2} = 0{,}25_{10}$

Pertanto il valore decimale è dato da:

$N = (-1)^s \times (1+M) \times 2^E = -1 \times 1{,}25_{10} \times 2^1 = \mathbf{-2{,}5_{10}}$

Esercizio 6

- Convertire il numero $23{,}375_{10}$ in formato a virgola mobile IEEE 754 (precisione singola) ed esprimere il risultato in esadecimale

Esercizio 6: Soluzione

Prendiamo in considerazione il numero decimale:

$N = 23{,}375_{10}$

Esercizio 6: Soluzione

Prendiamo in considerazione il numero decimale:

$N = 23,375_{10}$

1) Determiniamo il segno: poiché il numero è positivo, poniamo $s = 0$

Esercizio 6: Soluzione

Prendiamo in considerazione il numero decimale:

$N = 23,375_{10}$

2) Convertiamo la parte intera:

23	2	11	1
11	2	5	1
5	2	2	1
2	2	1	0
1	2	0	1

$23_{10} = 10111_2$

Esercizio 6: Soluzione

Prendiamo in considerazione il numero decimale:

$N = 23{,}375_{10}$

3) Convertiamo la parte frazionaria:

$F = 0{,}375_{10}$

$2 \times 0{,}375 = 0 + 0{,}75$

$2 \times 0{,}75 = 1 + 0{,}5$

$2 \times 0{,}5 = 1 + 0{,}0$

$0{,}375_{10} = 0{,}011_2$

Quindi $23{,}375_{10} = 10111{,}011_2$

Esercizio 6: Soluzione

Prendiamo in considerazione il numero decimale:

$N = 23,375_{10}$

3) Normalizziamo: il numero ottenuto, $10111,011_2$, va normalizzato per essere conforme allo standard

$$23,375_{10} = 10111,011_2 = 1,0111011_2 \times 2^4$$

La mantissa è 0111011_2

L'esponente è $4+127=131_{10}$

Esercizio 6: Soluzione

Prendiamo in considerazione il numero decimale:

$N = 23{,}375_{10}$

4) Calcoliamo l'esponente: convertiamo 131_{10} in binario ed esprimiamolo con 8 bit:

Dividendo	Divisore	Resto
131	2	1
65	2	1
32	2	0
16	2	0
8	2	0
4	2	0
2	2	0
1	2	1
0		

$131_{10} = 10000011_2$

Esercizio 6: Soluzione

In definitiva:

- s=0
- M= $01110110000000000000000_2$
- e= 10000011_2

Segno	Esponente (8 bit)	Mantissa (23 bit)

- La rappresentazione di $23{,}375_{10}$ quindi è

  $0\ 10000011\ 01110110000000000000000_2$

- Convertiamo in formato esadecimale:

  $0100\ 0001\ 1011\ 1011\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000_2$

  $41bb0000_{16}$

Esercizio 7

- Calcolare $23{,}375_{10} - 22{,}5_{10}$ ed esprimere il risultato in formato a virgola mobile IEEE 754 (precisione singola)

Esercizio 7: Soluzione

- Calcolare $23{,}375_{10} - 22{,}5_{10}$ ed esprimere il risultato in formato a virgola mobile IEEE 754 (precisione singola)
  - $23{,}375_{10} = 10111{,}011_2 = 1{,}0111011_2 \times 2^4$
  - $22{,}5_{10} = 10110{,}1_2 = 1{,}01101_2 \times 2^4$
  - Hanno lo stesso ordine di grandezza!
  - Effettuiamo la sottrazione in binario puro dei valori ottenuti:

$$\begin{array}{l} 1{,}0111011- \\ \underline{1{,}0110100=} \\ 0{,}0000111 \times 2^4 \end{array}$$

  - Normalizziamo il risultato, spostando la virgola a dx di 5 posti:

$$1{,}11_2 \times 2^{-1}$$

Esercizio 7: Soluzione

Il risultato ottenuto per $23{,}375_{10} - 22{,}5_{10}$ è

$$1{,}11_2 \times 2^{-1}$$

che corrisponde a $0{,}111_2 = 0{,}875_{10}$

- Facendo la sottrazione in decimale si ha che $23{,}375_{10} - 22{,}5_{10} = 0{,}875_{10}$

I due valori coincidono perché non ci sono state modifiche dovute all'arrotondamento