Induzione matematica

Prof. Rocco Zaccagnino

2022/2023

Induzione matematica

Usata per provare asserzioni con dominio **Z+** della forma

$$\forall n\ P(n)$$

- L'induzione matematica consiste di due passi:
  - **Base:** La proposizione **P(1)** è vera
  - Passo di induzione: fissato un intero positivo n, l'implicazione **P(n)** $\rightarrow$ **P(n+1)** è vera.
    - L'assunzione **P(n)** è chiamata **ipotesi induttiva**
  - Si conclude perciò che $\forall$**n P(n)**.

Induzione matematica

Usata per provare asserzioni con dominio **Z+** della forma

∀n P(n)

- L'induzione matematica consiste di due passi:
  - **Base:** La proposizione **P(1)** è vera
  - Passo di induzione: fissato un intero positivo n, l'implicazione **P(n) → P(n+1)** è vera.
    - L'assunzione **P(n)** è chiamata ipotesi induttiva
  - Si conclude perciò che **∀n P(n)**.

Nota che:

- ✓ dalla Base so che ***P(1)*** è vera
- ✓ dal Passo di induzione so che ***P(1)*** → ***P(2)*** è vera (perché ***P(1)*** è vera)
- ✓ dal Passo di induzione so che ***P(2)*** → ***P(3)*** è vera (perché ***P(2)*** è vera)
- ✓ ....

Quindi P(n) è vera ∀n∈ Z+

Induzione matematica

Esempio: Provare che la somma dei primi n interi positivi dispari è n^2

cioè $1+3+5+7+....+(2n-1) = n^2$

Dim.

Quale è $P(n)$ in questo caso? $P(n)$: $1+3+5+7+....+(2n-1) = n^2$

Induzione matematica

Esempio: Provare che la somma dei primi n interi positivi dispari è n^2

cioè $1+3+5+7+....+(2n-1) = n^2$

Dim.

Quale è $P(n)$ in questo caso? $P(n)$: $1+3+5+7+....+(2n-1) = n^2$

- **Base:** Mostrare che $P(1)$ è vera **Banale:** $1=1^2$

Induzione matematica

Esempio: Provare che la somma dei primi n interi positivi dispari è n^2

cioè $1+3+5+7+....+(2n-1) = n^2$

Dim.

Quale è $P(n)$ in questo caso? $P(n)$: $1+3+5+7+....+(2n-1) = n^2$

- **Base:** Mostrare che $P(1)$ è vera **Banale:** $1=1^2$
- **Passo di induzione:** Mostrare che

  se $P(n)$ è vera allora $P(n+1)$ è vera per un qualunque fissato n

  - Supponiamo che $P(n)$ è vera: $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$
  - Mostriamo che $P(n+1)$ è vera:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n+1)^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$

Induzione matematica

Esempio: Proviamo che $n < 2^n$ per tutti gli interi positivi n

Dim. $P(n)$: $n < 2^n$ per ogni intero $n \geq 1$

- **Base:** $P(1)$: $1 < 2^1$ (ovvio)
- **Passo di induzione:** Mostrare che

  se P(n) è vera allora P(n+1) è vera *per tutti gli n*

  - **Ipotesi induttiva:** Supponiamo $P(n)$: $n < 2^n$ *è vera*
  - Mostriamo che $P(n+1)$: $n+1 < 2^{n+1}$ *è vera*
  - $n + 1 < 2^n + 1$ (da *ipotesi induttiva*)
  - $< 2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

Induzione matematica

Esempio: Proviamo che $n^3 - n$ ***è divisibile per 3***, per ogni intero positivo n

Dim. $P(n)$: $n^3 - n$ ***è divisibile per 3*** per ogni intero $n \geq 1$

- **Base:** $P(1)$: $1^3 - 1 = 0$ ***è divisibile per 3*** (ovvio)
- **Passo di induzione:** Mostrare che

  se $P(n)$ ***è vera allora*** $P(n+1)$ ***è vera per tutti gli*** n

  - **Ipotesi induttiva:** Supponiamo $P(n)$: $n^3 - n$ ***è divisibile per 3***
  - Mostriamo che $P(n+1)$: $(n+1)^3 - (n+1)$ ***è divisibile per 3***
  - $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$
  - $(n^3 - n) + 3n^2 + 3n = \underbrace{(n^3 - n)}_{\substack{\text{divisibile per 3} \\ \text{(ipotesi induttiva)}}} + \underbrace{3(n^2 + n)}_{\text{divisibile per 3}}$

Generalizzazioni

Si può usare l'induzione matematica anche quando si vuole provare che

$$P(n) \text{ è vera} \qquad n = b, b+1, b+2, \ldots$$

Dove ***b* è un intero**

- I due passi dell'induzione diventano:
  - **Base:** La proposizione ***P(b)* è vera**
  - **Passo di induzione:** fissato un intero $n \geq b$, l'implicazione $P(n) \rightarrow P(n+1)$ ***è vera***
  - Nota che ***b*** può essere negativo, zero o positivo

Induzione matematica

Esempio: Proviamo che $n^2 < 2^n$, per ogni intero positivo $n \geq 5$

Dim. $P(n)$: $n^2 < 2^n$ per ogni intero positivo $n \geq 5$

- **Base:** *$P(5)$: è vera, infatti* $25 = 5^2 < 2^5 = 32$ (ovvio)
- **Passo di induzione:** Mostrare che

  se $P(n)$ è vera allora $P(n+1)$ è vera $n \geq 5$

- **Ipotesi induttiva:** Supponiamo *$P(n)$: $n^2 < 2^n$ è vera*
  - Mostriamo che *$P(n+1)$: $(n+1)^2 < 2^{n+1}$ è vera*
  - $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 2n + n$ *(perché $n \geq 5 > 1$)*
  - $= n^2 + 3n < n^2 + n*n = n^2 + n^2$ *(perché $n \geq 5 > 3$)*
  - $= 2n^2 < 2 * 2^n = 2^{n+1}$ *(per ipotesi induttiva)*

Induzione matematica

Esempio: Proviamo per induzione che per ogni intero non negativo

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Dim. $P(n)$: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ per ogni intero $n \geq 0$

- **Base:** $P(0)$: $2^0 = 1 = 2^1 - 1$
- **Passo di induzione:** Mostrare che

  se $P(n)$ è vera allora $P(n+1)$ è vera $n \geq 0$
- **Ipotesi induttiva:** Supponiamo *$P(n)$ è vera*
  - $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1}$
  - $= (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1}$
  - $= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$ *(per ipotesi induttiva)*
  - $= 2 * 2^{n+1} - 1$
  - $= 2^{n+2} - 1$

Induzione matematica

Esempio: Proviamo per induzione che un insieme con n elementi da 2^n sottoinsiemi

Dim. *P(n): «un insieme con n elementi ha* 2^n *sottoinsiemi»*

- **Base:** Proviamo $P(0)$
  - Se un insieme ha 0 elementi allora esso è l'insieme vuoto
  - L'insieme vuoto ha $1 = 2^0$ sottoinsiemi (solo se stesso)

- **Passo di induzione:** Mostrare che

  se $P(n)$ *è vera allora* $P(n+1)$ *è vera* $n \geq 0$

- **Ipotesi induttiva:** Supponiamo $P(n)$ *è vera*

Induzione matematica

Esempio: Proviamo per induzione che un insieme con ***n*** elementi da 2^n sottoinsiemi

Dim. ***P(n): «un insieme con n elementi ha*** 2^n ***sottoinsiemi»***

- **Passo di induzione:** Mostrare che ***se P(n) è vera allora P(n+1) è vera***
- **Ipotesi induttiva:** Supponiamo ***P(n) è vera***
  - Sia ***T*** un insieme con ***n+1*** elementi
  - Sia ***a*** un qualunque elemento di ***T*** => $T = S \cup \{a\}$ dove $|S|=n$
  - I sottoinsiemi di ***T*** possono essere ottenuti in questo modo:
    - Per ogni sottoinsieme ***X*** di ***S***, ci sono 2 sottoinsiemi di ***T***, cioè ***X*** e $X \cup \{a\}$
    - Tali insiemi sono tutti distinti
    - Quindi ci sono 2 sottoinsiemi di ***T*** per ogni sottoinsieme di ***S***
    - Il ***numero di sottoinsiemi di T = 2 * (il numero di sottoinsiemi di S)***

$$= 2 * 2^n$$

$$= 2^{n+1}$$

Induzione forte

- **Induzione regolare** usa
  - il passo di base $P(1)$
  - il passo di induzione
    $$P(n) \rightarrow P(n+1)$$

- **Induzione forte** usa
  - il passo di base $P(1)$
  - il passo di induzione
    $$[P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots\ldots \wedge P(n)] \rightarrow P(n+1)$$

Induzione forte

Esempio: mostriamo che un intero positivo più grande di 1 è un primo o può essere scritto come il prodotto di primi.

P(n): un intero positivo n > 1 o è primo o può essere scritto come il prodotto di primi.

Dim.

- **Base:** ***P(2) è vera***, infatti ***2 = 2*** (ovvio)
- **Passo di induzione:** Assumiamo vere P(2), ..., P(n)

  Dimostriamo che ***P(n+1) è vera***

  Distinguiamo 2 casi:

  1.Se ***n+1*** è esso stesso un numero primo allora ***P(n+1)*** è banalmente vera

Induzione forte

Esempio: mostriamo che un intero positivo più grande di 1 è un primo o può essere scritto come il prodotto di primi.

P(n): un intero positivo n > 1 o è primo o può essere scritto come il prodotto di primi.

Dim.

- **Base:** ***P(2) è vera***, infatti ***2 = 2*** (ovvio)
- **Passo di induzione:** Assumiamo vere P(2), ……, P(n)

  Dimostriamo che ***P(n+1) è vera***

  Distinguiamo 2 casi:

  2. Se ***n+1*** è un numero composto allora ***n+1 = a * b***

     Dall'ipotesi induttiva: ***P(a) e P(b) sono vere***

     Così ***n+1*** può essere scritto come il **prodotto di primi**