Applicazioni della Logica proposizionale

Prof. Rocco Zaccagnino

2022/2023

Traduzione linguaggio naturale

Se hai più di 12 anni o sei accompagnato dai tuoi genitori allora puoi salire su quella giostra

Analisi:

- **Se** hai più di 12 anni **o** sei accompagnato dai tuoi genitori **allora** puoi salire su quella giostra

Proposizioni elementari:

- a = hai più di 12 anni
- b = sei accompagnato dai tuoi genitori
- c = puoi salire su quella giostra

Traduzione: $(a \vee b) \rightarrow c$

Traduzione linguaggio naturale

Regola generale:

Individua nella frase le parole chiave che corrispondono ai connettivi logici ed usa essi per identificare le proposizioni elementari

Esempio

Puoi avere caffè gratis se sei maggiorenne ed è martedì

Traduzione linguaggio naturale

Regola generale:

Individua nella frase le parole chiave che corrispondono ai connettivi logici ed usa essi per identificare le proposizioni elementari

Esempio

Puoi avere caffè gratis se sei maggiorenne ed è martedì

- *Passo 1: individua i connettivi logici*

Traduzione linguaggio naturale

Regola generale:

Individua nella frase le parole chiave che corrispondono ai connettivi logici ed usa essi per identificare le proposizioni elementari

Esempio

Puoi avere caffè gratis se sei maggiorenne ed è martedì

- *Passo 1: individua i connettivi logici*
- *Passo 2: identifica le proposizioni elementari*

Traduzione linguaggio naturale

Regola generale:

Individua nella frase le parole chiave che corrispondono ai connettivi logici ed usa essi per identificare le proposizioni elementari

Esempio

Puoi avere caffè gratis se sei maggiorenne ed è martedì

$\underbrace{\text{Puoi avere caffè gratis}}_{a}$ se $\underbrace{\text{sei maggiorenne}}_{b}$ ed $\underbrace{\text{è martedì}}_{c}$

- *Passo 1: individua i connettivi logici*
- *Passo 2: identifica le proposizioni elementari*

Traduzione linguaggio naturale

Regola generale:

Individua nella frase le parole chiave che corrispondono ai connettivi logici ed usa essi per identificare le proposizioni elementari

Esempio

Puoi avere caffè gratis se sei maggiorenne ed è martedì

a b c

- *Passo 1: individua i connettivi logici*
- *Passo 2: identifica le proposizioni elementari*
- *Passo 3: riscrivi la frase come una proposizione logica*

Traduzione linguaggio naturale

Regola generale:

Individua nella frase le parole chiave che corrispondono ai connettivi logici ed usa essi per identificare le proposizioni elementari

Esempio

$\underbrace{\text{Puoi avere caffè gratis}}_{a}$ se $\underbrace{\text{sei maggiorenne}}_{b}$ ed è $\underbrace{\text{martedì}}_{c}$

- *Passo 1: individua i connettivi logici*
- *Passo 2: identifica le proposizioni elementari*
- *Passo 3: riscrivi la frase come una proposizione logica*

$$(b \wedge c) \rightarrow a$$

Esercizio

p = *Tu guidi a più di 130 km/h*

q = *Prendi la multa*

Traduzioni:

- *Tu non guidi a più di 130 km/h*
- **¬p**

Esercizio

p = *Tu guidi a più di 130 km/h* q = *Prendi la multa*

Traduzioni:

- *Tu guidi a più di 130 km/h, ma non prendi la multa*
- $\mathbf{p} \land \neg \mathbf{q}$

Esercizio

p = *Tu guidi a più di 130 km/h* q = *Prendi la multa*

Traduzioni:

- *Se non guidi a più di 130 km/h allora non prendi la multa*
- $\neg \mathbf{p} \rightarrow \neg \mathbf{q}$

Esercizio

p = *Tu guidi a più di 130 km/h* q = *Prendi la multa*

Traduzioni:

- *Guidare a più di 130 km/h è sufficiente a prendere la multa*
- $\mathbf{p \rightarrow q}$

Esercizio

p = *Tu guidi a più di 130 km/h*

q = *Prendi la multa*

Traduzioni:

- *Prendi la multa, ma non guidi a più di 130 km/h*
- $\mathbf{q} \land \neg \mathbf{p}$

Tautologia

Alcune proposizioni sono interessanti poiché i loro valori nella tabella di verità sono sempre gli stessi

Una **tautologia** è una proposizione composta che è **sempre vera** per tutti i possibili valori delle proposizioni elementari che la compongono

Esempio

p V ¬**p** è una *tautologia*

p	¬p	p V ¬p
T	*F*	*T*
F	*T*	*T*

Contraddizione

Alcune proposizioni sono interessanti poiché i loro valori nella tabella di verità sono sempre gli stessi

Una **contraddizione** è una proposizione composta che è **sempre falsa** per tutti i possibili valori delle proposizioni elementari che la compongono

Esempio

p $\land$ ¬**p** è una *contraddizione*

p	¬p	p ∧ ¬p
T	*F*	*F*
F	*T*	*F*

Contingenza

Una **contingenza** è una proposizione composta che non è né tautologia né contraddizione

Esempio

p ∧ **p** è una *contingenza*

p	**p**	**p ∧ p**
T	***T***	***T***
F	***F***	***F***

Equivalenza logica

Le proposizioni p e q sono dette **logicamente equivalenti** se hanno **gli stessi valori di verità** (o equivalentemente se **$p \leftrightarrow q$** è una tautologia).

La notazione **$p \equiv q$** denota che p e q sono logicamente equivalenti

Esempio

$p \rightarrow q$ è equivalente a $\neg q \rightarrow \neg p$

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
T	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*
T	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*
F	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*
F	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*

Equivalenza logica

Proposizioni composte logicamente equivalenti hanno lo stesso valore di verità per tutti i possibili casi

- Sostituire l’una con l’altra
- Utilizzare una qualunque di esse in un ragionamento logico
- Ottenere nuove proposizioni

Per verificare l’equivalenza si usa:

- la tabella di verità
- le trasformazioni mediante proprietà logiche

Equivalenze logiche note

Leggi di De Morgan

1) $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$

2) $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$

Esempio

Negare, utilizzando le leggi di De Morgan, la frase

L'inverno in Lucania è freddo e lungo

Soluzione:

L'inverno in Lucania non è freddo o non è lungo

Equivalenze logiche note

Identità

- $p \land T \equiv p$
- $p \lor F \equiv p$

Dominazione

- $p \lor T \equiv T$
- $p \land F \equiv F$

Idempotenza

- $p \lor p \equiv p$
- $p \land p \equiv p$

Doppia negazione

- $\neg(\neg p) \equiv p$

Equivalenze logiche note

Commutativa

- $p \vee q \equiv q \vee p$
- $p \wedge q \equiv q \wedge p$

Associativa

- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Distributiva

- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Altre utili equivalenze

- $p \vee \neg p \equiv T$
- $p \wedge \neg p \equiv F$
- $p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
- $p \rightarrow q \equiv (\neg p \vee q)$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Uso di equivalenze logiche

Esempio: mostrare che

$(p \land q) \rightarrow p$ **è una tautologia**

Dim 1: dobbiamo mostrare che $((p \land q) \rightarrow p) \equiv T$

$$
\begin{aligned}
(p \land q) \rightarrow p &\equiv \neg(p \land q) \lor p \\
&\equiv (\neg p \lor \neg q) \lor p && \textit{De Morgan} \\
&\equiv (\neg q \lor \neg p) \lor p && \textit{Commutativa} \\
&\equiv \neg q \lor (\neg p \lor p) && \textit{Associativa} \\
&\equiv \neg q \lor T && \textit{Dominazione} \\
&\equiv T
\end{aligned}
$$

Uso di equivalenze logiche

Esempio: mostrare che

$(p \wedge q) \rightarrow p$ è una tautologia

Dim 2: usare la tavola di verità

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
T	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*T*
F	*T*	*F*	*T*
F	*F*	*F*	*T*

Uso di equivalenze logiche

Mostrare che il contronominale di $p \rightarrow q$ è equivalente a $\neg q \rightarrow \neg p$

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Dim:

$$
\begin{aligned}
(\neg q \rightarrow \neg p) &\equiv \neg(\neg q) \vee (\neg p) \\
&\equiv q \vee \neg p && \textit{doppia negazione} \\
&\equiv \neg p \vee q && \textit{commutativa} \\
&\equiv p \rightarrow q
\end{aligned}
$$

Precedenza operatori

operatore	precedenza
$\neg$	*1*
$\wedge$	*2*
$\vee$	*3*
$\rightarrow$	*4*
$\leftrightarrow$	*5*

Dim:

$(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\neg \mathbf{r})$ può essere scritta anche $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge \neg \mathbf{r}$

$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee (\neg \mathbf{r})$ può essere scritta anche $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \vee \neg \mathbf{r}$