ESAME DI MATEMATICA DISCRETA
22/02/2022

II APPELLO

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) Si è ammessi all'orale con un punteggio di almeno 15/30.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Per la consegna è necessario mandare per e-mail la prova all'indirizzo slapenta@unisa.it con oggetto "matematica discreta".

(8) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (9 punti)**.** Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi. Per ogni $c \in \mathbb{Z}$, sia $f_c \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da

$$f_c(x) := x - cx + c, \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Determinare, motivando la risposta, per quali valori di c la f_c è iniettiva, suriettiva, e/o biettiva.

Soluzione: Osserviamo che se $c = 1$, $f_c(x) = 1$ è la funzione costante, quindi non è nè iniettiva, nè suriettiva. Mentre se $c = 0$ $f_c(x) = x$ è la funzione identità che è biettiva.

Se $c \neq 1$, si ha

$$\begin{aligned} f_c(x_1) = f_c(x_2) &\iff x_1 - cx_1 + c = x_2 - cx_2 + c \\ &\iff x_1 - cx_1 = x_2 - cx_2 \iff x_1(1-c) = x_2(1-c) \iff x_1 = x_2, \end{aligned}$$

quindi f_c è iniettiva per ogni $c \neq 1$.

Negli altri casi, f_c è suriettiva se per ogni $z \in \mathbb{Z}$ esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale the $z = x - cx + c$. Di conseguenza, bisogna richiedere che per ogni valore di z, la frazione $x = \frac{z-c}{1-c}$ sia intera.

Se $c = 2$, allora $1 - c = -1$ e questo è sempre vero, quindi f_2 è biettiva. Se $c \neq 2$, è facile vedere che $z = 0$ non appartiene all'immagine di f_c, infatti si avrebbe per assurdo $\frac{c}{c-1} \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2 (8 punti)**.** Risolvere il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \quad (mod\ 2) \\ x \equiv 3 \quad (mod\ 7) \\ x \equiv 6 \quad (mod\ 11) \end{cases}$$

Soluzione: La prima equazione ha come soluzione generica $2y$, che sostituita nella seconda mi dà $2y \equiv 3(mod\ 7)$ la cui soluzione è $y \equiv 5(mod\ 7)$. Quindi, la soluzione del sottosistema fatto dalle prima due equazioni è $[10]_{14}$, quindi $s = 10 + 14y$.

Sostituendo la generica soluzione della terza equazione ottengo $3y \equiv 7(mod\ 11)$, la cui soluzione è $y = 28$. Sostituendo $y = 28$ in s, si ha $S = [402]_{154} = [94]_{154}$.

Esercizio 3 (8 punti)**.** Dimostrare che l'insieme delle matrici

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

è un sottogruppo abeliano del gruppo <u>moltiplicativo</u> $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ delle matrici invertibili 2x2 a coefficienti reali.

Soluzione: Notiamo che $I_2 \in M$, e che se $\in M$, allora $det(A) = 1 \neq 0$, quindi ogni matrice di M è invertibile, inoltre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}.$$

Vediamo infine che M è chiuso per prodotto.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{pmatrix}$$

che è ancora un elemento di M.

Esercizio 4 (5 punti)**.** Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Si ha $det(A) = 0$ mentre $det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$. Quindi il rango è 2.