Lezione 11-10

martedì 11 ottobre 2022 11:11

PRINCIPIO DI INDUZIONE

$\mathbb{N}_0$ è caratterizzato dalla seguente proprietà:

se parto da 0 e definisco un insieme S aggiungendo per ogni $n \in S$ il suo successivo $n+1$ $\Rightarrow S = \mathbb{N}_0$

PRIMA FORMA del PRINCIPIO di INDUZIONE

Sia $\bar{n} \in \mathbb{N}_0$ e sia $P(n)$ una proprietà dei numeri naturali che dipende da n. Allora se:

1. P è vera per $\bar{n}$; BASE DI INDUZIONE
2. ogni volta che P è vera per $n \geq \bar{n}$ allora posso dimostrare che P è vera per $n+1$ $P(n)$ è IPOTESI DI INDUZIONE
   $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ è PASSO INDUTTIVO

allora P è vera $\forall n \geq \bar{n}$.

NB. $S = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid P(n) \text{ è vera}\}$

$\bar{n} \in S$ e (se $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$) $\Rightarrow$ in S c'è ogni naturale più grande di $\bar{n}$.

ESEMPIO

$\forall n \in \mathbb{N}$ "$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$" $= P(n)$

$\downarrow$ $\bar{n} = 1$

$\downarrow$ "l'uguaglianza è vera"

$P(1) \Rightarrow \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2} \qquad 1 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}$ VERO BASE DI INDUZIONE

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$P(n)$ la devo supporre vera! E devo dimostrare $P(n+1)$

$$P(n+1) \stackrel{?}{=} \text{"} \underbrace{1+2+\dots+n}+ n+1 \stackrel{??}{=} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \text{"} \rightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Io so che $\underbrace{1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$ ipotesi di induzione

A questa uguaglianza, aggiungo $(n+1)$ ad entrambi i membri

$$1+2+\dots+n+n+1 = \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}+n+1}$$

$$\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Raccolgo $(n+1)$

$\Rightarrow \quad 1+2+\dots+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ok!!

NB - Il passo induttivo può essere anche $P(n-1) \Rightarrow P(n)$

ESEMPIO

$\forall n \geq 0 \qquad \underbrace{2 \mid n(n+1)}_{P(n)}$

$P(0) \Rightarrow \qquad 2 \mid 0\cdot(0+1) \rightarrow 2 \mid 0$ VERO!

BASE di INDUZIONE

$P(n-1) \Rightarrow P(n)$ Suppongo vero che $2 \mid (n-1)(n-1+1)$

$P(n-1) \Rightarrow P(n)$

PASSO INDUTTIVO

Suppongo vero che $2 \mid (n-1)(n-1+1)$

$\Rightarrow 2 \mid (n-1)n$

E devo dimostrare che $2 \mid \underbrace{n(n+1)}_{n^2+n}$

Pa che $2 \mid (n-1)n \Rightarrow 2 \mid n^2 - n$

$$n^2 + n = n^2 - n + 2n$$

Per ipotesi induttiva, $2 \mid n^2 - n$ e per definizione $2 \mid 2n$

$$\Rightarrow 2 \mid \underbrace{n^2 - n + 2n}_{= n^2+n} \Rightarrow 2 \mid n^2 + n \quad \square$$

SECONDA FORMA del PRINCIPIO DI INDUZIONE

Sia $\bar{n} \in \mathbb{N}_0$, sia $P(n)$ una proprietà dei numeri naturali maggiori o uguali a $\bar{n}$.

Se: ① $P(\bar{n})$ è vera

② dato $t \geq \bar{n}$ se da $P(k)$ vera $\forall\ \bar{n} \leq k < t$ segue che $P(t)$ è vera

Allora $P(t)$ è vera $\forall\ t \geq \bar{n}$.

PASSO INDUTTIVO è $P(k)$ vera $\forall\ k < t \Rightarrow P(t)$

TEOREMA FONDAMENTALE dell'ARITMETICA (in $\mathbb{N}_0$)

Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora esistono $t \geq 1$ e $p_1, \dots, p_t$ numeri primi tali che $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_t$.

La scomposizione è unica a meno dell'ordine dei fattori.

DIM

BASE di INDUZIONE è $\bar{n} = 2$

si ha $t = 1$ e

BASE di INDUZIONE è $\bar{n}=2$

si ha $t=1$ e $p_t=2$

PASSO INDUTTIVO - Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e supponiamo il teorema vero per ogni $k < n$ -

Abbiamo 2 casi:

1) Se n è primo, si ha $t=1$ e $p_t = n$ -

2) Se n non è primo, esistono $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $n = ab$ - Notiamo che $a < n$ e $b < n$. Allora per ipotesi di induzione, esistono $t \in \mathbb{N}$ $s \in \mathbb{N}$ e $\left.\begin{matrix} p_1, \dots, p_t \\ q_1, \dots, q_s \end{matrix}\right\}$ numeri primi tali che $a = p_1 \cdots p_t$, $b = q_1, \dots, q_s$

Allora $n = ab = \boxed{p_1 \cdots p_t q_1 \cdots q_s}$ $\Rightarrow$ ho trovato $t+s$ numeri primi -

Unicità non dimostrata

$\square$

$\boxed{\text{ALGORITMO DELLA DIVISIONE EUCLIDEA}}$ in $\mathbb{N}_0$

Sia $b \neq 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ esistono $q, r \in \mathbb{N}_0$ tali che $n = qb + r$, e $r < b$ - $P(n)$

DIM

$\boxed{n=0}$ Si ha $0 = 0 \cdot b + 0$ (ho scelto $q=0$ e $r=0$)

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO}}$ $(n-1) \rightsquigarrow n$

I FORMA

Per ipotesi, $P(n-1)$ è vera: cioè esistono $q, r \in \mathbb{N}_0$ tali che

$$n-1 = qb + r \quad e \quad r < b \text{ -}$$

Da $n-1 = qb + r$ si ha $n = qb + r + 1$ - Manca solo la condizione su r

$\Rightarrow$ Se $r+1 < b$ ho finito perché $n = qb + (r+1)$ -

... manca solo la condizione sur

$\Rightarrow$ Se $r+1 < b$ ho finito perché $n = qb + (r+1)$ e $r+1 < b$

Se invece $r+1 \geq b \Rightarrow r+1 = b+k$ — $k = r+1-b$

Quindi $n = qb + r+1 = \underbrace{qb + b} + k = (q+1)b + k$ e $k < b$

(perché $r < b$ e $k = r+1-b$)

Allora ho scritto n come un multiplo di $b + k \Rightarrow$ la tesi $\square$

ESERCIZIO

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1+3+5+\dots+2n-1 = n^2$

$\boxed{n=1}$ $\quad 1 = 1^2$ VERO $\quad 2\cdot 1 - 1 = 1$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ $\quad P(n+1) =$ "$1+3+5+\dots+2n-1 + 2(n+1)-1 = (n+1)^2$" ?

$1+3+5+\dots+2n-1 = n^2 \rightarrow$ vero per ipotesi di induzione

ho aggiunto $2(n+1)-1$

$\Rightarrow \quad 1+3+\dots+2n-1 + 2(n+1)-1 = \underbrace{n^2 + 2(n+1)-1}$

$= n^2 + 2n + 2 - 1 =$

$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

Allora $1+3+\dots+2(n+1)-1 = (n+1)^2$ CVD

ESERCIZI

① $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$

② Stabilire per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che $n(n+1)-11$ è un numero dispari.