ESAME DI MATEMATICA DISCRETA
04/02/2022

I APPELLO

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) Si è ammessi all'orale con un punteggio di almeno 15/30.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Per la consegna è necessario mandare per e-mail la prova all'indirizzo slapenta@unisa.it con oggetto "matematica discreta".

(8) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (9 punti)**.** Dimostrare che per ogni $n \geq 8$ esistono $a, b \in \mathbb{N}_0$ tali che $n = 3a + 5b$.
Suggerimento: per $8 \leq n \leq 15$ *l'asserto si può verificare direttamente caso per caso. Usare l'ipotesi di induzione per* $n \geq 16$.

Soluzione: Per $n = 8$, si ha banalmente $a = b = 1$. Supponiamo l'asserto vero per ogni $8 \leq t < n$ e dimostriamolo per n. Se $8 \leq n \leq 15$, l'asserto si può verificare facilmente caso per caso. Se $n \geq 16$, sarà $n = t_1 + t_2$ con $8 \leq t_1, t_2 < n$. Per ipotesi di induzione si ha $t_1 = 3a_1 + 5b_1$, $t_2 = 3a_2 + 5b_2$, da cui segue $n = 3(a_1 + a_2) + 5(b_1 + b_2)$.

Esercizio 2 (6 punti)**.** Trovare una soluzione x, y dell'equazione $13x + 19y = 1$ usando l'algoritmo della divisione euclidea.

Soluzione: Si ha

$$\begin{aligned} 19 =& 13 \cdot 1 + 6 \\ 13 =& 6 \cdot 2 + 1 \\ 6 =& 4 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$1 = 13 - 6 \cdot 2 = 13 - (19 - 13) \cdot 2 = 13 \cdot 3 - 19 \cdot 2,$$

da cui segue $x = 3$ e $y = -2$.

Esercizio 3 (8 punti)**.** Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero dell'anello $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$. Per ogni elemento invertibile determinarne l'inverso.

Soluzione: Un elemento $[a]_{20} \in \mathbb{Z}_{20}$ è invertibile se, e solo se, $MCD(20, a) = 1$. Quindi, gli elementi invertibili sono

$$[1]_{20}, [3]_{20}, [7]_{20}, [9]_{20}, [11]_{20}, [13]_{20}, [17]_{20}, [19]_{20}$$

I divisori dello zero sono tutti gli elementi non invertibili (diversi da zero). Per calcolare gli inversi, dato $[a]_{20}$, l'inverso è quella classe $[b]_{20}$ tale che $ab \equiv 1(mod\ 20)$. Risolvendo quindi le equazioni congruenziali relative, si ha

$$\begin{array}{ccc} ([1]_{20})^{-1} = [1]_{20} & ([3]_{20})^{-1} = [7]_{20} & ([9]_{20})^{-1} = [9]_{20} \\ ([11]_{20})^{-1} = [11]_{20} & ([13]_{20})^{-1} = [17]_{20} & ([19]_{20})^{-1} = [19]_{20}. \end{array}$$

Esercizio 4 (7 punti)**.** Dimostrare che il sottoinsieme del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ di equazione $x^2 - y^2 = 0$ non e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

Soluzione: Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$. Si ha $(1, -1), (1, 1) \in S$ ma $(1, 1) + (1, -1) = (2, 0) \notin S$.