Cardinalità degli insiemi

Prof. Rocco Zaccagnino

2022/2023

Funzioni

- Un **insieme** è una struttura discreta utilizzata per rappresentare oggetti discreti

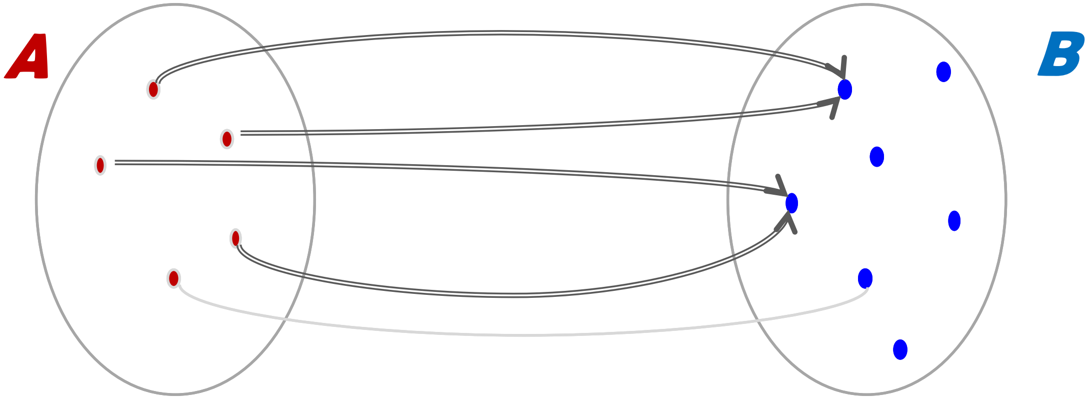
- Una **funzione** mette in relazione oggetti appartenenti ad un un insieme con oggetti appartenenti ad un altro insieme (non necessariamente diverso dal primo)

Funzioni

- Un **insieme** è una collezione non ordinata di oggetti, chiamami **elementi** dell'insieme

- Siano **A** e **B** due insiemi. Una **funzione da A in B**, denotata con **$f : A \rightarrow B$**, associa ciascun elemento di A con esattamente un elemento di B

$$f : A \rightarrow B$$



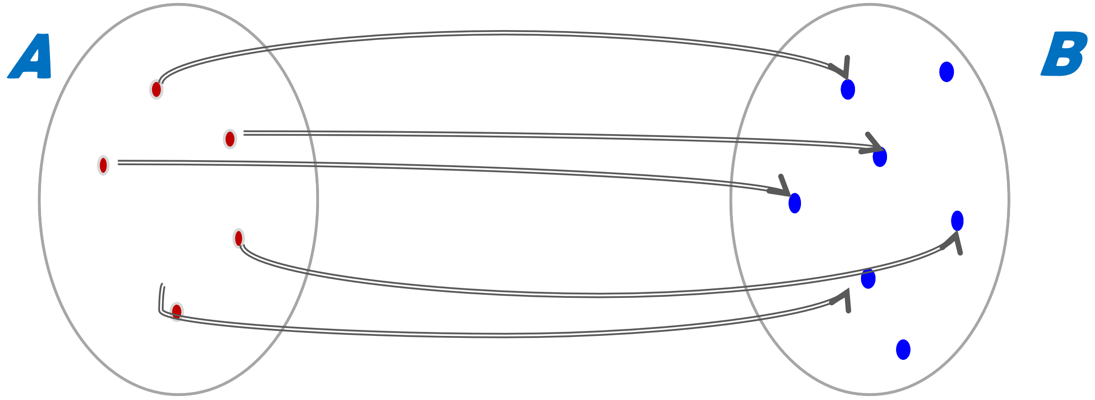
Funzioni iniettive

- Una **funzione**, è detta **iniettiva** se e solo se

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

per ogni x ed y nel dominio di f

$$f : A \rightarrow B$$

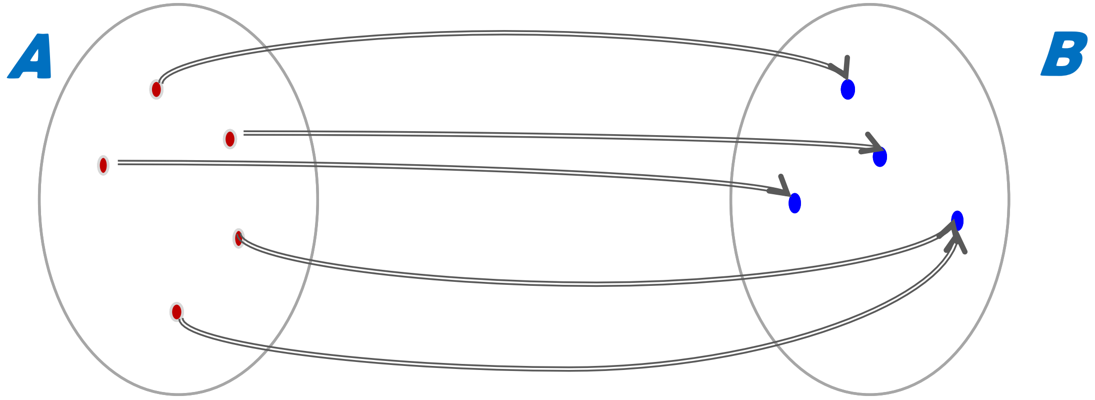


Funzioni suriettiva

- Una **funzione**, è detta **suriettiva** se e solo se

$$\forall b \in B \;\; \exists a \in A \;\; \text{tale che} \;\; f(a) = b$$

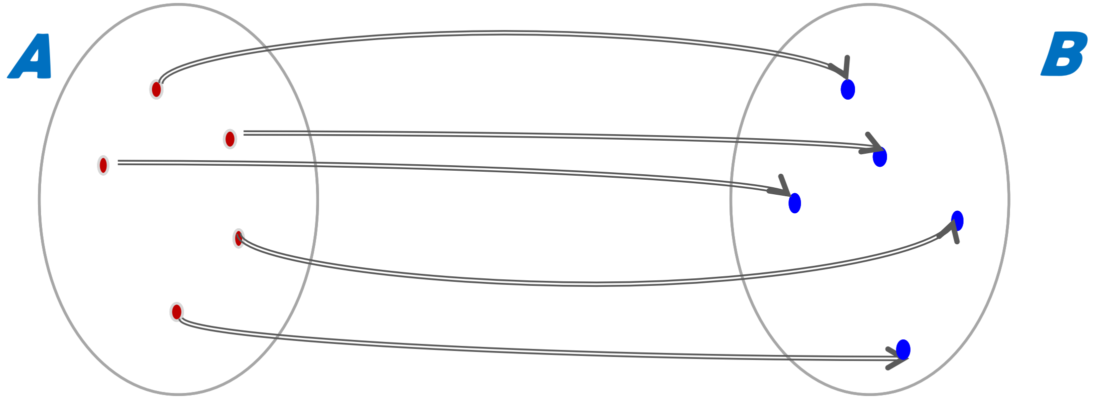
$$f : A \rightarrow B$$



Funzioni biettiva

- Una **funzione**, è detta **biettiva** se è:
  - **iniettiva** e
  - **suriettiva**

$$f : A \rightarrow B$$



Cardinalità

- Sia **S** un insieme e sia **n** un intero non negativo. Se ci sono esattamente **n** distinti elementi in **S**, diciamo che **n** è la **cardinalità** di **S**. La cardinalità di **S** è denotata con **|S|**

- ***Definizione alternativa:*** due insiemi **A** e **B** hanno la stessa cardinalità se esiste una **corrispondenza uno-a-uno** tra gli elementi di **A** e quelli di **B**.

se esiste una **biezione tra A e B**

Cardinalità

Definizione alternativa: due insiemi **A** e **B** hanno la stessa cardinalità se esiste una **corrispondenza uno-a-uno** tra gli elementi di **A** e quelli di **B**.

se esiste una **biezione tra A e B**

Esempi

Siano $A=\{a,b,c\}$ $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$

Consideriamo la funzione f definita come

- $a \longrightarrow \alpha$
- $b \longrightarrow \beta$
- $c \longrightarrow \gamma$

f definisce una **biezione**, quindi A e B hanno la stessa cardinalità, cioè $|A| = |B| = 3$

Insiemi numerabili

Un insieme che è **finito** o ha la stessa cardinalità di Z+ è detto **numerabile**. Cioè i suoi elementi possono essere **enumerati**

Esempi

Siano ***A={0,2,4,6,...}*** ***A è numerabile???***

Insiemi numerabili

Un insieme che è finito o ha la stessa cardinalità di Z^+ è detto **numerabile**. Cioè i suoi elementi possono essere **enumerati**

Esempi

Siano ***A={0,2,4,6,…}*** ***A è numerabile???***

Dalla definizione dovremmo far vedere che esiste una ***funzione biettiva*** **f: $Z^+ \rightarrow A$**

Insiemi numerabili

Un insieme che è finito o ha la stessa cardinalità di Z^+ è detto **numerabile**. Cioè i suoi elementi possono essere **enumerati**

Esempi

Siano ***A={0,2,4,6,...}*** ***A è numerabile???***

Dalla definizione dovremmo far vedere che esiste una ***funzione biettiva*** **f: $Z^+ \to A$**

Definiamo la funzione **f: $x \in Z^+ \to 2x - 2 \in A$**

- $1 \to 2*1-2 = 0$
- $2 \to 2*2-2 = 2$
- $3 \to 2*3-2 = 4$ ....

Insiemi numerabili

Un insieme che è finito o ha la stessa cardinalità di Z^+ è detto **numerabile**. Cioè i suoi elementi possono essere **enumerati**

Esempi

Siano ***A={0,2,4,6,...}*** ***A è numerabile???***

Dalla definizione dovremmo far vedere che esiste una ***funzione biettiva*** **f: $Z^+ \to A$**

Definiamo la funzione **f: $x \in Z^+ \to 2x - 2 \in A$**

- $1 \to 2*1-2 = 0$
- $2 \to 2*2-2 = 2$
- $3 \to 2*3-2 = 4$ .... **f è una biezione?**

Insiemi numerabili

Un insieme che è finito o ha la stessa cardinalità di Z^+ è detto **numerabile**. Cioè i suoi elementi possono essere **enumerati**

Esempi

Siano ***A={0,2,4,6,...}*** ***A è numerabile???***

Dalla definizione dovremmo far vedere che esiste una ***funzione biettiva*** **f: $Z^+ \rightarrow A$**

Definiamo la funzione **f: $x \in Z^+ \rightarrow 2x - 2 \in A$**

- $1 \rightarrow 2*1-2 = 0$
- $2 \rightarrow 2*2-2 = 2$
- $3 \rightarrow 2*3-2 = 4$ .... **f è una biezione?**

f è iniettiva perché $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x - 2 = 2y - 2 \Rightarrow x = y$

Insiemi numerabili

Un insieme che è finito o ha la stessa cardinalità di Z^+ è detto **numerabile**. Cioè i suoi elementi possono essere **enumerati**

Esempi

Siano ***A={0,2,4,6,...}*** ***A è numerabile???***

Dalla definizione dovremmo far vedere che esiste una ***funzione biettiva*** **f: $Z^+ \rightarrow A$**

Definiamo la funzione **f: $x \in Z^+ \rightarrow 2x - 2 \in A$**

- $1 \rightarrow 2*1-2 = 0$
- $2 \rightarrow 2*2-2 = 2$
- $3 \rightarrow 2*3-2 = 4$ .... **f è una biezione?**

f è iniettiva perché $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x - 2 = 2y - 2 \Rightarrow x = y$

f è suriettiva perché $\forall a \in A \ \exists x \in Z^+ \ a = 2x - 2 \Rightarrow (a+2)/2$ *è un intero positivo*

Insiemi numerabili

Un insieme che è finito o ha la stessa cardinalità di Z^+ è detto **numerabile**. Cioè i suoi elementi possono essere **enumerati**

Esempi

Siano ***A={0,2,4,6,...}*** ***A è numerabile???***

Dalla definizione dovremmo far vedere che esiste una ***funzione biettiva*** **f: $Z^+ \rightarrow A$**

Definiamo la funzione **f: $x \in Z^+ \rightarrow 2x - 2 \in A$**

- $1 \rightarrow 2*1-2 = 0$
- $2 \rightarrow 2*2-2 = 2$
- $3 \rightarrow 2*3-2 = 4$ .... **f è una biezione?**

f è iniettiva perché $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x - 2 = 2y - 2 \Rightarrow x = y$

f è suriettiva perché $\forall a \in A \ \exists x \in Z^+ \ a = 2x - 2 \Rightarrow (a+2)/2$ *è un intero positivo*

Perciò **$|A| = |Z^+|$**

Insiemi numerabili

Teorema L'insieme degli interi Z è numerabile

Dim.

Dalla definizione dovremmo far vedere che c'è una funzione **biettiva** f: $Z^+ \rightarrow Z$

Ricordiamo che $Z^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Definiamo la funzione:

$$f: x \in Z^+ \rightarrow \begin{cases} x/2 & \text{se } x \text{ è pari} \\ -(x-1)/2 & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

f è **iniettiva** perché:

$f(x) = f(y) \Rightarrow x/2 = y/2 \Rightarrow x = y$ (se x e y sono pari)

$f(x) = f(y) \Rightarrow -(x-1)/2 = -(y-1)/2 \Rightarrow x = y$ (se x e y sono dispari)

Insiemi numerabili

Teorema L'insieme degli interi Z è numerabile

Dim.

Dalla definizione dovremmo far vedere che c'è una funzione biettiva f: $Z^+ \longrightarrow Z$

Ricordiamo che $Z^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Definiamo la funzione:

$$f: x \in Z^+ \longrightarrow \begin{cases} x/2 & \text{se } x \text{ è pari} \\ -(x-1)/2 & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

f è **suriettiva** perché:

$\forall z \in Z$ $\quad$ $2z$ è un intero pari positivo (se z = positivo)

$-2z+1$ è un intero dispari positivo se (z = negativo)

Insiemi numerabili

Teorema L'insieme degli interi Z è numerabile

Dim.

Dalla definizione dovremmo far vedere che c'è una funzione biettiva f: $Z^+ \rightarrow Z$

Ricordiamo che $Z^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Definiamo la funzione:

$$f: x \in Z^+ \rightarrow \begin{cases} x/2 & \text{se } x \text{ è pari} \\ -(x-1)/2 & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

Perciò $|Z| = |Z^+|$

Insiemi numerabili

Teorema I numeri razionali positivi sono numerabili

Dim.

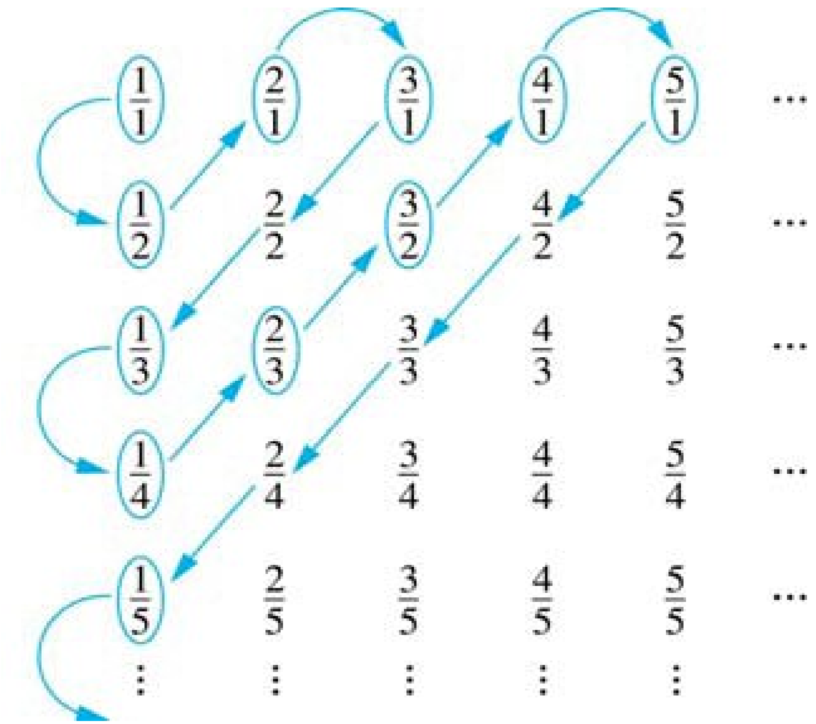
Un numero razionale può essere espresso come il rapporto p/q, con p e q interi, e q ≠ 0.

Idea: *mostriamo che è possibile formare una sequenza con tutti i p/q*

Disponiamo ***p/q*** per riga,

- nella 1ª riga i ***p/q*** con ***q=1***
- nella 2ª i ***p/q*** con ***q=2***, etc.

Notate che tutti i ***p/q*** lungo la medesima "diagonale" hanno ***p+q*** dello stesso valore



Insiemi numerabili

Teorema I numeri razionali positivi sono numerabili

Dim.

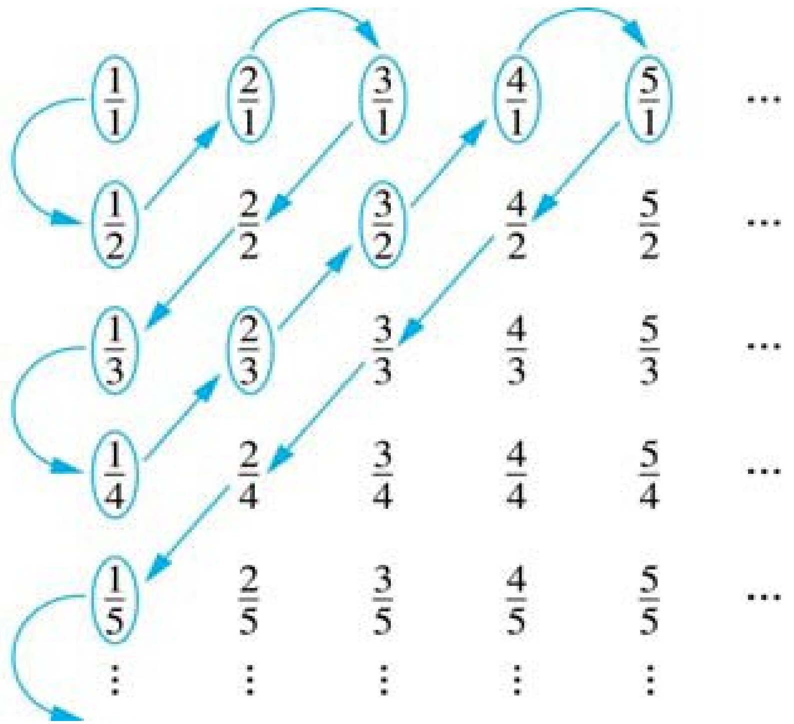
Un numero razionale può essere espresso come il rapporto p/q, con p e q interi, e q ≠ 0.

Idea: *mostriamo che è possibile formare una sequenza con tutti i p/q*

Disponiamo ***p/q*** per riga,

- nella 1ª riga i ***p/q*** con ***q=1***
- nella 2ª i ***p/q*** con ***q=2***, etc.

Ogni volta che si incontra un p/q già incontrato non lo si inserisce (per esempio ***2/2=1/1, 2/4=1/2,*** ...)



Insiemi numerabili

Teorema I numeri razionali positivi sono numerabili

Dim.

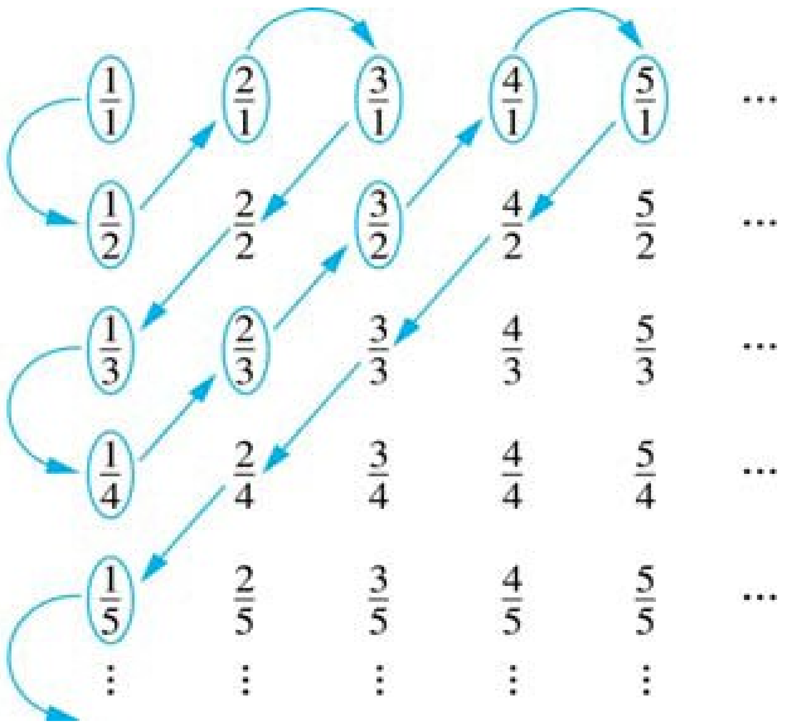
Un numero razionale può essere espresso come il rapporto p/q, con p e q interi, e $q \neq 0$.

Idea: *mostriamo che è possibile formare una sequenza con tutti i p/q*

Disponiamo ***p/q*** per riga,

- nella 1ª riga i ***p/q*** con ***q=1***
- nella 2ª i ***p/q*** con ***q=2***, etc.

..allora i numeri razionali positivi sono numerabili



Insiemi numerabili

Teorema L'insieme dei numeri reali **R** non è numerabile

Dim.

- Procediamo per contraddizione.
- Supponiamo che ***R*** sia numerabile (arriveremo ad una contraddizione).
- Poiché ***un sottoinsieme di un insieme numerabile è numerabile***, abbiamo che:
  - i numeri reali tra 0 ed 1 sono numerabili, cioè c'è una corrispondenza biunivoca tra ***Z+={1,2,3,...}*** ed i numeri in ***[0,1]***
  - Possiamo perciò creare una sequenza di tutti i numeri reali in ***[0,1]:*** $r_1, r_2, r_3, \ldots$

Insiemi numerabili

Teorema L'insieme dei numeri reali **R** non è numerabile

Dim.

- Possiamo perciò creare una sequenza di tutti i numeri reali in $[0,1]$: $r_1, r_2, r_3, \ldots$

$$r_1 = 0, d_{11}\, d_{12}\, d_{13} \ldots$$
$$r_2 = 0, d_{21}\, d_{22}\, d_{23} \ldots$$
$$r_3 = 0, d_{31}\, d_{32}\, d_{33} \ldots$$
$$\ldots.$$

dove $d_{ij} \in \{0,1,2,\ldots,9\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} r_1 = 0, 23794 \ldots \\ r_2 = 0, 54781 \ldots \\ r_3 = 0, 62314 \ldots \\ \ldots. \end{array}}$$

- Costruiamo allora ***un*** numero reale (guardando tutti gli r_i):

$$r = 0, b_1\, b_2\, b_3 \ldots$$

$$b_i = \begin{cases} 4 & \text{se } d_{ii} \neq 4 \\ 5 & \text{se } d_{ii} = 4 \end{cases}$$

Insiemi numerabili

Teorema L'insieme dei numeri reali **R** non è numerabile

Dim.

- Possiamo perciò creare una sequenza di tutti i numeri reali in $[0,1]$: $r_1, r_2, r_3, \ldots$

$r_1 = 0, d_{11}\, d_{12}\, d_{13} \ldots$

$r_2 = 0, d_{21}\, d_{22}\, d_{23} \ldots$

$r_3 = 0, d_{31}\, d_{32}\, d_{33} \ldots$

$\ldots.$

dove $d_{ij} \in \{0,1,2,\ldots,9\}$

$r_1 = 0, 23794 \ldots$

$r_2 = 0, 54781 \ldots$

$r_3 = 0, 62314 \ldots$

$\ldots.$

- Costruiamo allora ***un*** numero reale (guardando tutti gli r_i):

$r = 0, b_1\, b_2\, b_3 \ldots$

$r = 0, 454 \ldots$

$$b_i = \begin{cases} 4 & \text{se } d_{ii} \neq 4 \\ 5 & \text{se } d_{ii} = 4 \end{cases}$$

Insiemi numerabili

Teorema L'insieme dei numeri reali **R** non è numerabile

Dim.

Si noti che stiamo considerando rappresentazioni decimali uniche di numeri reali (cioè si evitano rappresentazioni che finiscono con una lista infinita di 9)

Invece di avere $r_i = 0,\ 23799999$ … consideriamo $r_i = 0,\ 2380000$ …

Insiemi numerabili

Teorema L'insieme dei numeri reali **R** non è numerabile

Dim.

Poiché tutti i numeri reali in $[0,1]$ sono nella lista $r_1, r_2, r_3, \ldots$ allora anche r è in $[0,1]$

$$\exists i \quad r = r_i$$

Ricordando che $r_i = 0, d_{i1}\, d_{i2} \ldots d_{ii} \ldots$

$$r = 0, b_1\, b_2 \ldots b_i \ldots \qquad b_i = \begin{cases} 4 & se\ d_{ii} \neq 4 \\ 5 & se\ d_{ii} = 4 \end{cases}$$

Si ha una **contraddizione** poiché dovrebbe essere

$$b_i = d_{ii}$$

ed invece

$$b_i = 4 \quad \text{se } d_{ii} = 5$$
$$b_i = 5 \quad \text{se } d_{ii} = 4$$