~~SCAM~~

15/02/2022

F CAMPO   S SPAZIO VETTORIALE SU F

ELEMENTI DI S: VETTORI

ELEMENTI DI F: SCALARI

INSIEME IN CUI E' DEFINITA L'ADDIZIONE E DEVE ESSERE DEFINITO IL PRODOTTO DI UNO SCALARE, CIOE' UN ELEMENTO DEL CAMPO X UN VETTORE

- $(S, +)$ GRUPPO ABELIANO

1. $\forall \alpha, \beta \in F, \forall \underline{u} \in S \quad (\alpha+\beta)\underline{u} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{u}$
2. $\forall \alpha \in F, \forall \underline{u}, \underline{v} \in S \quad \alpha(\underline{u}+\underline{v}) = \alpha\underline{u} + \alpha\underline{v}$
3. $\forall \alpha, \beta \in F, \forall \underline{u} \in S \quad \alpha\beta(\underline{u}) = \alpha(\beta\underline{u})$
4. $1 \in F, \forall \underline{u} \quad 1\underline{u} = \underline{u}$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ E' UNO SPAZIO VETTORIALE

S SPAZIO VETTORIALE SU F CAMPO, $V \subseteq S$

V E' SOTTOSPAZIO DI S $\overset{def}{\iff}$
1. $\underline{0} \in V$
2. $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V, \ \underline{u}+\underline{v} \in V$
3. $\forall \alpha \in F, \forall \underline{u} \in V \quad \alpha \cdot \underline{u} \in V$

CRITERIO DI RICONOSCIMENTO DEI SOTTOSPAZI

$\iff$
1. $\underline{0} \in V$
2. $\forall \alpha, \beta \in F \ \forall \underline{u}, \underline{v} \in V \quad \alpha\underline{u} + \beta\underline{v} \in V$

COMBINAZIONI LINEARI

SIANO $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n \in S$:

COMBINAZIONE LINEARE DI $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ SECONDO GLI SCALARI $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$\alpha_1\underline{u}_1 + \alpha_2\underline{u}_2 + \dots + \alpha_n\underline{u}_n$

$\{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n \underline{u}_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F\} \equiv \langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n \rangle$ SOTTOSPAZIO DI S

SOTTOSPAZIO GENERATO DA $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$

~~DIMOSTRA~~

DIMOSTRAZIONE CHE $<\underline{u}_1, \dots \underline{u}_n>$ E' UN SOTTOSPAZIO DI S

$\underline{0} \in <\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n>$? $\underline{0} = 0 \cdot \underline{u}_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n$ → DIMOSTRO CHE IL VETTORE $\underline{0}$ E' COMBINAZIONE LINEARE SCEGLIENDO GLI SCALARI $=0$

PRENDO 2 COMBINAZIONI LINEARI DELL'INSIEME

$\forall \alpha, \beta \in F \quad \forall \alpha_1 \underline{u}_1 + \dots + \alpha_n \underline{u}_n , \beta_1 \underline{u}_1 + \dots + \beta_n \underline{u}_n \in <u_1, \dots, u_n>$

$\alpha(\alpha_1 \underline{u}_1 + \dots + \alpha_n u_n) + \beta(\beta_1 \underline{u}_1, \dots, \beta_n \underline{u}_n)$

$(\alpha\alpha_1)\underline{u}_1 + \dots (\alpha_\cdot\alpha_n)\underline{u}_n + (\beta\beta_1)\underline{u}_1 + \dots + (\beta\beta_n)\underline{u}_n =$

$\boxed{\text{VEDERE LA DIMO DI DELIZIA}}$

$$\underbrace{(\underbrace{\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1}_{\in F \text{ SCALARI}})\underline{u}_1 + (\underbrace{\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2}_{\in F})u_2 + \dots + (\underbrace{\alpha\alpha_n + \beta\beta_n}_{\in F})u_n}_{\in <u_1, u_2, \dots, u_n>}$$

↓ ANCORA UNA COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI $u_1, \dots, u_n$

* CONSIDERIAMO W SOTTOSPAZIO DI S, SE ESISTONO $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_t$ t.c. $W = <\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_t>$ SI DICE CHE $X = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_t\}$ ESSA E' UN SISTEMA DI GENERATORI x W

* QUINDI PRESI UN N. FINITO DI VETTORI SI PUO' SEMPRE CONSIDERARE IL SOTTOSPAZIO GENERATO DA QUEI VETTORI. COM'E' FATTO? E' L'INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI COMBINAZIONI LINEARI DI QUEI VETTORI

OGNI SOTTOSPAZIO POSSIEDE UN SISTEMA FINITO DI GENERATORI

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$

W E' SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^3$ => 1. $\underline{0} \in W$

2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \forall \underline{u}, \underline{v} \in W$

$\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} \in W$

$\underline{0} = (0,0,0)$

$0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0$

(SOSTITUISCO NELL'EQUAZIONE LA TERNA)

$\underline{0} \in W$

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - z\}$

$= \{(2y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$(2y-z, y, z), (2h-k, h, k)$

$\alpha(2y-z, y, z) + \beta(2h-k, h, k) =$

$(\alpha(2y-z), \alpha y, \alpha z) + (\beta(2h-k), \beta h, \beta k) =$

$(\alpha 2y - \alpha z, \alpha y, \alpha z) + (\beta 2h - \beta k, \beta h, \beta k) =$

$((\alpha 2y - \alpha z) + (\beta 2h - \beta k), \alpha y + \beta h, \alpha z + \beta k)$

$(\underbrace{2(\alpha y + h) - (\alpha z + \beta k)}_{\text{2 VOLTE LA II - LA III}}, \alpha y + \beta h, \alpha z + \beta k) \in W$

$(2y-z, y, z) = \underbrace{(2y, y, 0) + (-z, 0, z)}_{\text{LA RIGUARDO COME SOMMA}} = y(2,1,0) + z(-1,0,1)$

MI ACCORGO CHE IL GENERICO VETTORE DI W E' COMBINAZIONE LINEARE DI $\underline{u}_1 = (2,1,0)$, $\underline{u}_2 = (-1,0,1)$.

$\forall \underline{w} \in W \quad \underline{w} \in \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle$ SOTTOSPAZIO GENERATO DA $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ $\quad W \subseteq \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle$ SOTTINSIEME DEL SOTTOSPAZIO

$\underline{u}_1 \in W \quad u_2 \in W$ → HA LA I COORDINATA CHE E' 2 VOLTE LA II - LA III = UN ELEMENTO DI W

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha \underline{u}_1 + \beta u_2 \in W \Rightarrow \underbrace{\langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle \subseteq W}_{\text{VALE ANCHE L'ALTRA INCLUSIONE}}$

QUINDI $W = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle$ → E' GENERATO DA QUEI 2 VETTORI

→ SISTEMA DI GENERATORI

$X = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ GENERATORE DI SPAZIO DI W

TRA I SOTTOSPAZI C'E' L'INTERO SPAZIO VETTORIALE

$\mathbb{R}^3$ SISTEMA DI GENERATORI FINITO (SPAZIO VETTORIALE = PARTICOLARE SOTTOSPAZIO)

$\underbrace{(x,y,z)}_{\text{GENERICO VETTORE DI } \mathbb{R}^3} = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) = x(\overset{e_1}{1,0,0}) + y(\overset{e_2}{0,1,0}) + z(\underset{e_3}{0,0,1})$

$\mathbb{R}^3$ COMBINAZIONE LINEARE DEI 3 VETTORI $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$

$\mathbb{R}^3 \subseteq \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \rangle$

OGNI VETTORE DI $\mathbb{R}^3$ E' UN VETTORE DEL SOTTOSPAZIO GENERATO DA $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \rangle$, $\mathbb{R}^3 \subseteq \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$

DAL DIAGRAMMA ... $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \rangle$ E' SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^3$ (4)

QUINDI VALE L'UGUAGLIANZA

$\mathbb{R}^3 = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \rangle$

$X = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ E' SISTEMA DI GENERATORI DI $\mathbb{R}^3$

NON E' L'UNICO. AD ESEMPIO ANCHE $\{(2,-1,0), (7,0,0), (-1,4,1)\}$ E' UN SISTEMA DI GENERATORI DI $\mathbb{R}^3$

$\underline{u}_1 = (2,-1,0) \quad \underline{u}_2 = (7,0,0) \quad \underline{u}_3 = (-1,4,1)$

$\langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$ → DIMOSTRIAMO QUESTO: SOTTOSPAZIO GENERATO DAI 3 VETTORI E' TUTTO $\mathbb{R}^3$

$\langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ POICHE' $\mathbb{R}^3$ E' L'AMBIENTE

tesi $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a,b,c) \in \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3 \rangle$

$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad (a,b,c) \in \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3 \rangle \Leftrightarrow$

$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ \exists\, x,y,z \in \mathbb{R}:$

$(a,b,c) = x(2,-1,0) + y(7,0,0) + z(-1,4,1) =$

$(2x+7y-z, -x+4z, z)$

$\forall (a,b,c) \ \exists\, x,y,z \in \mathbb{R}: \begin{cases} 2x+7y-z=a \\ -x+4z=b \\ z=c \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+7y-z=a \\ -x+4z=b \\ z=c \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$\det A =$

$$\cancel{0 \cdot \det \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}} - \cancel{0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 7 = 7 \neq 0$$

E' DI CRAMER

↓

IL SISTEMA E' COMPATIBILE

PIANO π $\mathcal{V}^2_O = \{\vec{OP} \mid P \in \pi\}$

PUNTO O FISSATO NEL PIANO

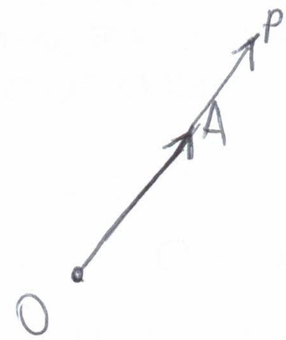
$(\mathcal{V}^2_O, +, \cdot)$ = SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

$+$ ↓ SOMMA REGOLA PARALLELOGRAMMA

$\cdot$ → PRODOTTO DI UN N. $\mathbb{R}$ CON UN SEG.

LETTERA

$\forall \vec{OA} \in \mathcal{V}^2_O$ $\vec{OA} = \underline{0}$ $A \neq O$



$\langle \vec{OA} \rangle = \{\alpha \cdot \vec{OA} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

↓ SOTTOSPAZIO GENERATO DA QUESTO VETTORE

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \cdot \vec{OA} = \vec{OP}$

MOLTIPLICANDO IN VETTORI RISULTANTI SONO SEMPRE SULLA DIRETTRICE DI $\vec{OA}$

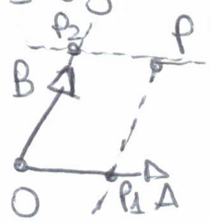
QUINDI $\langle \vec{OA} \rangle = \{\vec{OP} \mid P \text{ SULLA RETTA } OA\}$

E' FORMATO DA TUTTI I VETTORI $\vec{OP}$ OTTENUTI AL VARIARE DI P SULLA RETTA DI $\vec{OA}$

SISTEMA DI GENERATORI DI $\mathcal{V}^2_O$?

CONSIDERIAMO $\vec{OA}, \vec{OB} \in \mathcal{V}^2_O \setminus \{\underline{0}\}$: O, A e B NON SONO ALLINEATI

$\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = \mathcal{V}^2_O$



DEVO MOSTRARE CHE PER OGNI VETTORE APPLICATO IN O POSSO SCRIVERLO COME COMBINAZIONE LINEARE DI $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$

~~QUINDI~~

QUINDI

$\forall \vec{OP} \in \mathcal{V}^2_O \ \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{OP} \overset{?}{=} \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}$

PRENDO IN CONSIDERAZIONE LA RETTA X P $\parallel$ OB (UNIVOCAMENTE DETERMINATA) CHE INTERSECA $\vec{OA}$ IN UN PUNTO IN P_1

PRENDO LA RETTA ~~RB~~ CHE PASSA X P $\parallel$ OA CHE INTERSECA LA RETTA DI $\vec{OB}$ IN P_2

MA ALLORA $\vec{OP}$ E' LA DIAGONALE DEL PARALLELOGRAMMA

$\vec{OP} = \vec{OP_1} + \vec{OP_2}$

ORA $\vec{OP_1}$ E' SULLA RETTA OA QUINDI E' NEL SOTTOSPAZIO GENERATO DA $\vec{OA}$

QUINDI $\vec{OP_1} = \alpha \cdot \vec{OA}$

E $\vec{OP_2}$ E' NEL SOTTOSPAZIO GENERATO DA $\vec{OB}$, QUINDI

QUINDI
$\vec{OP} = \vec{OP_1} + \vec{OP_2} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} \in \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle$

SIA S SPAZIO VETTORIALE SU CAMPO F E CONSIDERIAMO , $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_t \in$

$\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_p$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\overset{def}{\iff}$ L'UNICO MODO X OTTENERE IL VETTORE NULLO COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI E' QUELLO DI SCEGLIERE GLI SCALARI = 0

$\iff$ L'UNICA COMBINAZIONE LINEARE $u_1, \dots, u_n$ CHE E' UGUALE AL VETTORE NULLO E' QUELLA IN CUI TUTTI GLI SCALARI SONO 0 $\iff$

$$\left[\begin{array}{l} \text{da } \alpha_1 \underline{u}_1 + \dots + \alpha_t \underline{u}_t = \underline{0} \\ \Downarrow \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_t = 0 \end{array}\right]$$

$\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots \underline{u}_p$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI $\overset{def}{\iff}$ NON SONO LINEARMENTE INDIPENDE[NTI]

$\iff \exists$ SCALARI $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ NON TUTTI 0 : $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t = \underline{0}$

$\mathbb{R}^3$ $(1,0,3)$ $(2,0,6)$ LINEARMENTE DIPENDENTI

$-2(1,0,3) + 1(2,0,6) = 0$

SIANO $u_1, \dots, u_t \in F^n$ (SPAZIO VETTORIALE NUMERICO)

SI DIMOSTRA CHE $u_1, \dots, u_t$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\iff$ LA MATRICE CHE HA PER RIGHE $u_1, \dots, u_t \in M_{t,n}(F)$ HA RANGO t

$\mathbb{R}^3$

$A = \{(1,0,0), (2,1,0)\}$

$B = \{(0,2,3), (0,-4,-6)\}$

$C = \{(1,0,0), (3,2,0), (0,1,0)\}$

$D = \{(2,0,0), (1,-5,0), (0,-2,1)\}$

$E = \{(1,1,0), (-3,1,2), (1,3,-5), (1,0,-2)\}$

$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{det}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ LINEARMENTE INDIPENDENTE

$B \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = -12 + 12 = 0$ LINEARMENTE DIPENDENTE

$\rho = 1$

$C\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $1 \leq \rho \leq 3$ LINEARMENTE ~~IN~~DIPENDENTE

7

$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 0 = 0$

PRESI $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$

$-3(1,0,0) + 1(3,2,0) - 2(0,1,0) = 0$

$D\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$

$2\det\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 0 + 0 =$

$2 \cdot (-5 + 0) = -10$ $1 \leq \rho \leq 3$

LINEARMENTE INDIPENDENTI

$E\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $1 \leq \rho \leq 3$

IN GENERALE CONSIDERATI t VETTORI DI F^n, SE $t > n$ ALLORA I VETTORI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

$M_{t,n}(F)$ $t > n$ $\rho \leq n < t$ $\rho \neq t$

SIA S UNO SPAZIO VETTORIALE SU F E SIA W UN SOTTOSPAZIO $W \neq \{\underline{0}\}$

UN INSIEME DI VETTORI $B = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_t\}$ E' UNA BASE DI W $\overset{def}{\iff}$
1. B E' UN SISTEMA DI GENERATORI PER W $\langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_t \rangle = W$
2. E' LINEARMENTE INDIPENDENTE

SE $W = \{\underline{0}\} \Rightarrow$ BASE $\emptyset$

$\mathbb{R}^3$ $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ E' UNA BASE?

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$ → BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^3$

$\{(2,7,-1), (-1,0,4), (0,0,1)\}$ BASE $\det\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \det\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 7 = 7 \neq 0$

QUINDI E' UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$

UNO SPAZIO VETTORIALE POSSIEDE + DI UNA BASE, MA LE BASI DI UNO SPAZIO VETTORIALE HANNO TUTTE LO STESSO ORDINE E QUESTO ORDINE SI CHIAMA DIMENSIONE DELLO SPAZIO VETTORIALE (NUMERO DI VETTORI CHE TROVIAMO IN UNA BASE)

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ $\{(1,0), (0,1)\}$ → BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^2$

$\dim F^n = n$

PUO' SUCCEDERE CHE HO UN SISTEMA DI GENERATORI LINEARMENTE DIPENDENTI, CIOE' CHE NON E' UNA BASE PERO' POSSO SEMPRE ESTRARRE DA QUELLO UNA BASE

SE X E' UN SISTEMA DI GENERATORI DI UN SOTTOSPAZIO W ALLORA

$\exists$ B BASE DI W : $B \subseteq X$

V_0^2 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in V_0^2 \setminus \{\underline{0}\}$ O, A, B non ALLINEATI

$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$ E' UN SISTEMA DI GENERATORI

DIMOSTRIAMO CHE $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$ E' UNA BASE $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ LINEARMENTE INDIPENDENTI

PER ASSURDO SUPPONIAMO CHE SIANO LINEARMENTE DIPENDENTI
ALLORA $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non ENTRAMBI $\neq \underline{0}$:

$\alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OA} = \underline{0}$

$\alpha \neq 0$ $\quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad \exists\ \alpha^{-1} \in \mathbb{R}$

NUMERI REALI SONO INVERTIBILI POICHE' $\mathbb{R}$ E' UN CAMPO

$\alpha^{-1}(\alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}) = 0$

$\alpha^{-1}(\alpha \cdot \overrightarrow{OA}) + (\alpha^{-1}\beta)\overrightarrow{OB} = 0$

$\overrightarrow{OA} + (\alpha^{-1}\beta)\overrightarrow{OB} = \underline{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = -(\alpha^{-1}\beta)\overrightarrow{OB}$

QUESTO VUOL DIRE CHE SE ~~OB~~ OA SI SCRIVE COME PRODOTTO DI UNO SCALARE · ~~OB~~ x UN VETTORE VUOL DIRE CHE $\overrightarrow{OA}$ E' SULLA STESSA RETTA DI $\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \in \langle \overrightarrow{OB} \rangle$ → QUESTO E' UN ASSURDO POICHE' ~~OA~~ O, A E B non SONO SULLA STESSA RETTA (x hp non SONO ALLINEATI)

QUINDI DIMENSIONE DI $V_0^2 = 2$

V_0^3 *

SI DIMOSTRA CHE UNA BASE DI V_0^3 E' COSTITUITA DI 3 VETTORI $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ non NULLI ($\in V_0^3 \setminus \{\underline{0}\}$) IN MODO CHE O, A, B, C non SONO COMPLANARI

$\dim V_0^3 = 3$ → x AVERE UNA BASE PRENDO 3 VETTORI NON APPARTENENTI ALLO STESSO PIANO, MA TUTTI APPLICATI IN O