Architettura degli Elaboratori

Esercitazione

Barbara Masucci
UNIVERSITA DEGLI STUDI DI SALERNO
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
DIPARTIMENTO DI ECCELLENZA

Su cosa ci esercitiamo oggi?

- Algebra di Boole ed espressioni booleane
  - Minimizzazione di espressioni booleane
- Funzioni di commutazione
  - Costruzione di tavole di verità
- Analisi di reti logiche
  - Calcolo della funzione associata a una rete logica

Algebra di Boole

- Le costanti 0 e 1 godono delle seguenti proprietà

- $\overline{0} = 1$ $\qquad$ $\overline{1} = 0$
- $x \cdot 1 = x$ $\qquad$ $x + 0 = x$
- $x \cdot 0 = 0$ $\qquad$ $x + 1 = 1$

Algebra di Boole

1.	$\overline{\overline{x}} = x$	Proprietà di involuzione
2.	$x\cdot y = y\cdot x,\ \ x + y = y + x$	Proprietà commutativa
3.	$x\cdot x = x,\ \ x + x = x$	Proprietà di idempotenza
4.	$x\cdot\overline{x} = 0,\ x + \overline{x} = 1$	Proprietà del complemento
5.	$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$	Proprietà distributiva
6.	$x\cdot(x+y) = x,\ \ x + x\cdot y = x$	Proprietà di assorbimento
6bis.	$x\cdot(\overline{x}+y) = x\cdot y\ \ x + \overline{x}\cdot y = x+y,$	
7.	$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$	Proprietà associativa
8.	$\overline{x\cdot y} = \overline{x}+\overline{y},\ \ \overline{x + y} = \overline{x}\cdot\overline{y}$	Leggi di De Morgan

Algebra di Boole

Principio di dualità:

Data una espressione booleana valida,
se ne ottiene un'altra valida
(duale della precedente)
scambiando le costanti 0 ed 1
e gli operatori AND e OR

Esempio

Data l'espressione booleana

$$(x+1) \cdot (y+0)$$

la sua duale è

$$(x \cdot 0) + (y \cdot 1)$$

Principio di dualità

- Diverse proprietà dell'algebra di Boole si ottengono applicando il principio di dualità
  - Proprietà delle costanti 0 e 1

    $x + 0 = x$ è la duale di $x \cdot 1 = x$

    $x + 1 = 1$ è la duale di $x \cdot 0 = 0$

  - Proprietà commutativa

    $x + y = y + x$ è la duale di $x \cdot y = y \cdot x$

Principio di dualità

- Diverse proprietà dell'algebra di Boole si ottengono applicando il principio di dualità
  - Proprietà di idempotenza

    $x + x = x$ è la duale di $x \cdot x = x$

  - Proprietà del complemento

    $x + \overline{x} = 1$ è la duale di $x \cdot \overline{x} = 0$

Principio di dualità

- Diverse proprietà dell'algebra di Boole si ottengono applicando il principio di dualità
  - Proprietà di assorbimento

    $x + x \cdot y = x$ è la duale di $x \cdot (x+y) = x$

    $x + \overline{x} \cdot y = x+y$ è la duale di $x \cdot (\overline{x}+y) = x \cdot y$

  - Leggi di De Morgan

    $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ è la duale di $\overline{x \cdot y} = \overline{x}+\overline{y}$

Esercizio 1

- Dimostrare il secondo teorema di assorbimento:

6bis. $x \cdot (\overline{x}+y) = x \cdot y$ $\quad x + \overline{x} \cdot y = x+y$

Esercizio 1: Soluzione

- Dimostrare il secondo teorema di assorbimento:

$$6\text{bis.} \quad x\cdot(\overline{x}+y) = x\cdot y \qquad x + \overline{x}\cdot y = x+y$$

- La prima eguaglianza è banale
  $x(\overline{x}+y)=x\overline{x}+xy$ (prop. distributiva)
  $=xy$ (prop.complemento)

- Per la seconda proprietà, mostriamo che le tavole di verità delle funzioni $x+\overline{x}\cdot y$ e $x+y$ sono uguali

Esercizio 1: Soluzione

Per ottenere la tavola di verità della funzione $x+\overline{x}y$, creiamo una tabella con

- 2 colonne, (corrispondenti agli input x,y)
- 2^2= 4 righe (corrispondenti a tutti i possibili valori degli input)

x	y
0	0
0	1
1	0
1	1

Esercizio 1: Soluzione

Poi aggiungiamo una colonna per valutare $\overline{x}$ in corrispondenza di tutti i possibili input

x	y	$\overline{x}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Esercizio 1: Soluzione

Aggiungiamo un'altra colonna per valutare $\overline{x}y$ in corrispondenza di tutti i possibili input

x	y	$\overline{x}$	$\overline{x}y$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	0

Esercizio 1: Soluzione

Aggiungiamo un'altra colonna per valutare $x+\overline{x}y$ in corrispondenza di tutti i possibili input

x	y	$\overline{x}$	$\overline{x}y$	$x+\overline{x}y$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

Esercizio 1: Soluzione

Confrontiamo la tavola di verità di $x+\bar{x}y$ con quella di $x+y$

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$x+\bar{x}y$	$x+y$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

Tavola di verità

Sono uguali!

Quindi abbiamo dimostrato il secondo teorema di assorbimento

Esercizio 2

- Minimizzare la seguente funzione

$$F=\overline{x}(x+y)+\overline{z}+yz$$

Esercizio 2: Soluzione

- Minimizzare la seguente funzione

$$F=\overline{x}(x+y)+\overline{z}+yz$$

Si ha

$F=\overline{x}(x+y)+\overline{z}+yz$

$=\overline{x}x+\overline{x}y+\overline{z}+yz$ (prop. distributiva)

$=\overline{x}y+\overline{z}+yz$ (prop.complemento)

$=\overline{x}y+(\overline{z}+yz)$

$=\overline{x}y+\overline{z}+y$ (secondo teorema assorbimento)

$=y(\overline{x}+1)+\overline{z}$ (prop. distributiva)

$=y+\overline{z}$ (proprietà della costante 1)

Esercizio 3

Ricavare la tavola di verità della seguente funzione

$$F = x \cdot \overline{(y+z)}$$

Esercizio 3: Soluzione

Per ottenere la tavola di verità della funzione $F = x \cdot \overline{(y+z)}$, creiamo una tabella con

- 3 colonne, (corrispondenti agli input x,y,z)
- 2^3= 8 righe (corrispondenti a tutti i possibili valori degli input)

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Esercizio 3: Soluzione

Poi aggiungiamo una colonna per valutare y+z in corrispondenza di tutti i possibili input

x	y	z	y+z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Esercizio 3: Soluzione

Aggiungiamo un'altra colonna per valutare $\overline{y+z}$ in corrispondenza di tutti i possibili input

x	y	z	y+z	$\overline{y+z}$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Esercizio 3: Soluzione

Infine, aggiungiamo una colonna per valutare $F = x \cdot (\overline{y+z})$ in corrispondenza di tutti i possibili input

x	y	z	y+z	$\overline{y+z}$	F
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

Tavola di verità

Esercizio 4

Ricavare la tavola di verità della seguente funzione

$$F = x \cdot \overline{(x+y)}$$

Inoltre considerare la funzione $\overline{F}$ e ricavare la sua tavola di verità

Esercizio 4: Soluzione

Per ottenere la tavola di verità della funzione $F=x\cdot(\overline{x+y})$, creiamo una tabella con

- 2 colonne, (corrispondenti agli input x,y)
- 2^2= 4 righe (corrispondenti a tutti i possibili valori degli input)

x	y
0	0
0	1
1	0
1	1

Esercizio 4: Soluzione

Poi aggiungiamo una colonna per valutare x+y in corrispondenza di tutti i possibili input

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Esercizio 4: Soluzione

Aggiungiamo un'altra colonna per valutare $\overline{x+y}$ in corrispondenza di tutti i possibili input

x	y	x+y	$\overline{x+y}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Esercizio 4: Soluzione

Infine, aggiungiamo una colonna per valutare $F = x\cdot(\overline{x+y})$ in corrispondenza di tutti i possibili input

x	y	x+y	$\overline{x+y}$	F
0	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

Tavola di verità

La tavola di verità di F ha tutti 0

$$F = x\cdot(\overline{x+y})$$
$$= x\cdot(\overline{x}\cdot\overline{y}) \quad \text{(legge di De Morgan)}$$
$$= x\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}$$
$$= 0 \quad \text{(prop. complemento)}$$

F è la funzione costante 0

Esercizio 4: Soluzione

Ora consideriamo la funzione negata della precedente:

$$\overline{F}=\overline{x\cdot\overline{(x+y)}}$$

La sua tavola di verità si ottiene direttamente dalla tavola precedente, complementando tutti gli output:

x	y	F	$\overline{F}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

La tavola di verità di $\overline{F}$ ha tutti 1

$\overline{F}$ è la funzione costante 1

Tavola di verità

Esercizio 4: Soluzione

Applicando la legge di De Morgan si ha

$$F = x \cdot \overline{(x+y)}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{F} &= \overline{x \cdot \overline{(x+y)}} \\
&= \overline{x} + \overline{\overline{(x+y)}} \\
&= \overline{x} + (x+y) && \text{(prop. involuzione)} \\
&= \overline{x} + x + y \\
&= 1 + y && \text{(prop. complemento)} \\
&= 1 && \text{(prop. della costante 1)}
\end{aligned}
$$

$\overline{F}$ è la funzione costante 1

Esercizio 5

- Minimizzare la seguente funzione logica

$$F=\overline{x+x\overline{y}+zt}$$

Esercizio 5: Soluzione

- Minimizzare la seguente funzione logica

$$F=\overline{x+x\overline{y}+zt}$$

Si ha

$$\begin{aligned}F&=\overline{x+x\overline{y}+zt}\\&=\overline{x(1+\overline{y})+zt}\ \text{(prop. distributiva)}\\&=\overline{x+zt}\ \text{(prop. della costante 1)}\\&=\overline{x}(\overline{zt})\ \text{(legge di De Morgan)}\\&=\overline{x}(\overline{z}+\overline{t})\ \text{(legge di De Morgan)}\end{aligned}$$

Esercizio 6

- Minimizzare la seguente funzione logica

$$F=\bar{x}\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}+xy\bar{z}$$

Esercizio 6: Soluzione

- Minimizzare la seguente funzione logica

$$F=\bar{x}\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}+xy\bar{z}$$

Si ha

$F=\bar{z}(\bar{x}\bar{y}+x\bar{y}+\bar{x}y+xy)$ (prop. distributiva)

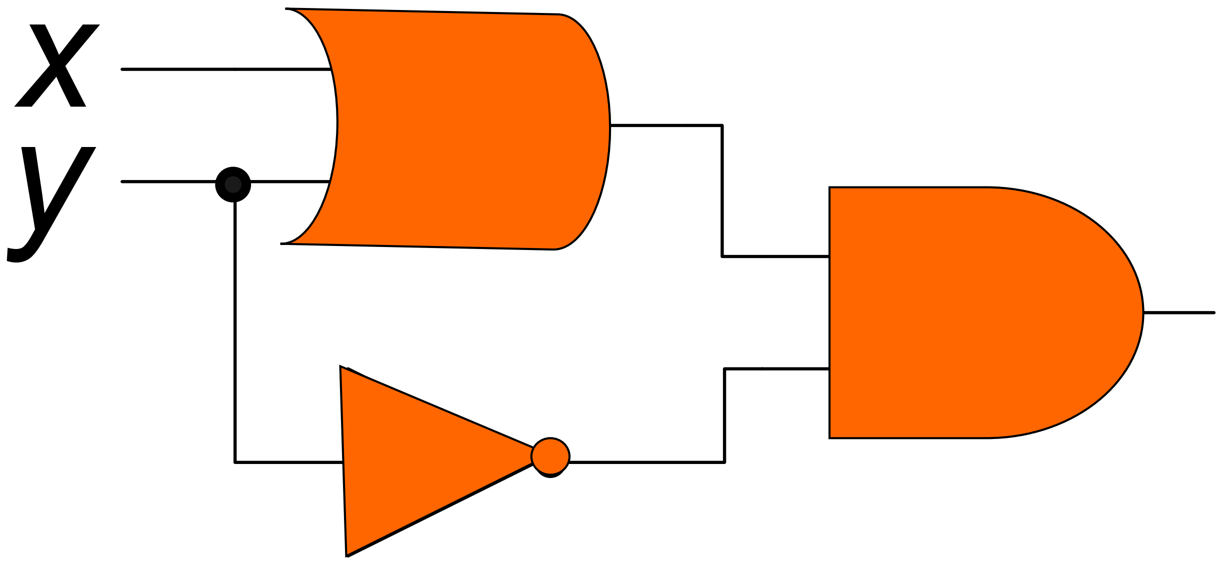
$=\bar{z}[\bar{y}(\bar{x}+x)+y(\bar{x}+x)]$ (prop. distributiva)

$=\bar{z}(\bar{y}+y)$ (prop. del complemento)

$=\bar{z}$ (prop. del complemento)

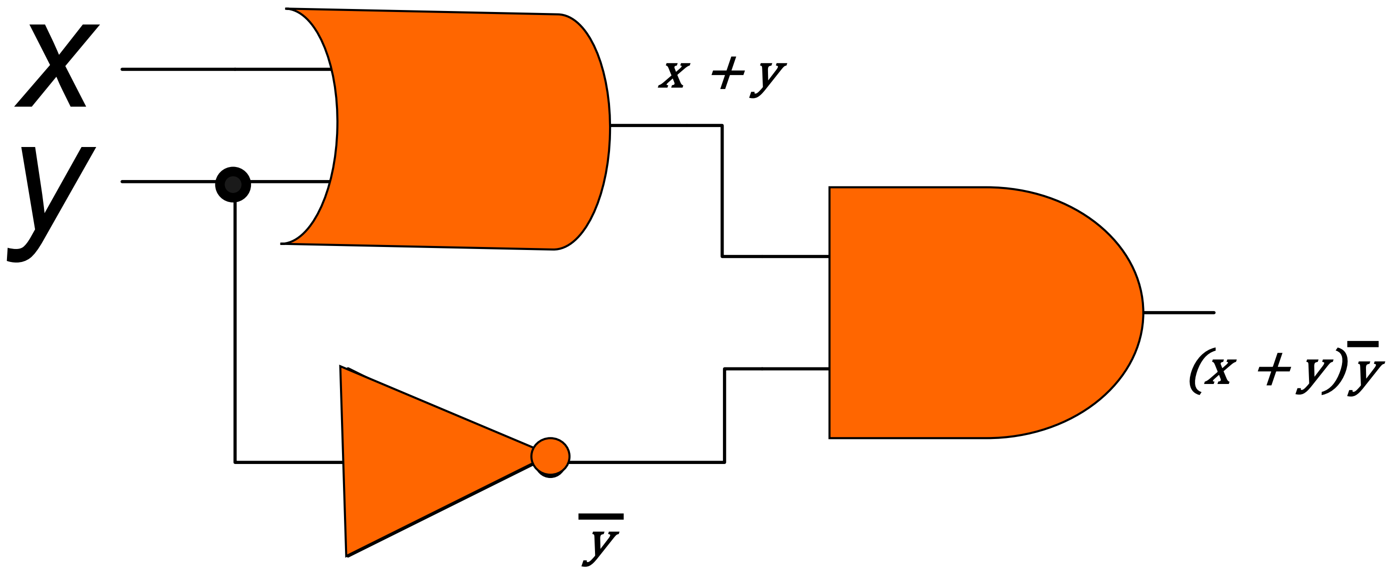
Esercizio 7

Data la rete seguente, trovare l'espressione booleana all'uscita



Esercizio 7: Soluzione

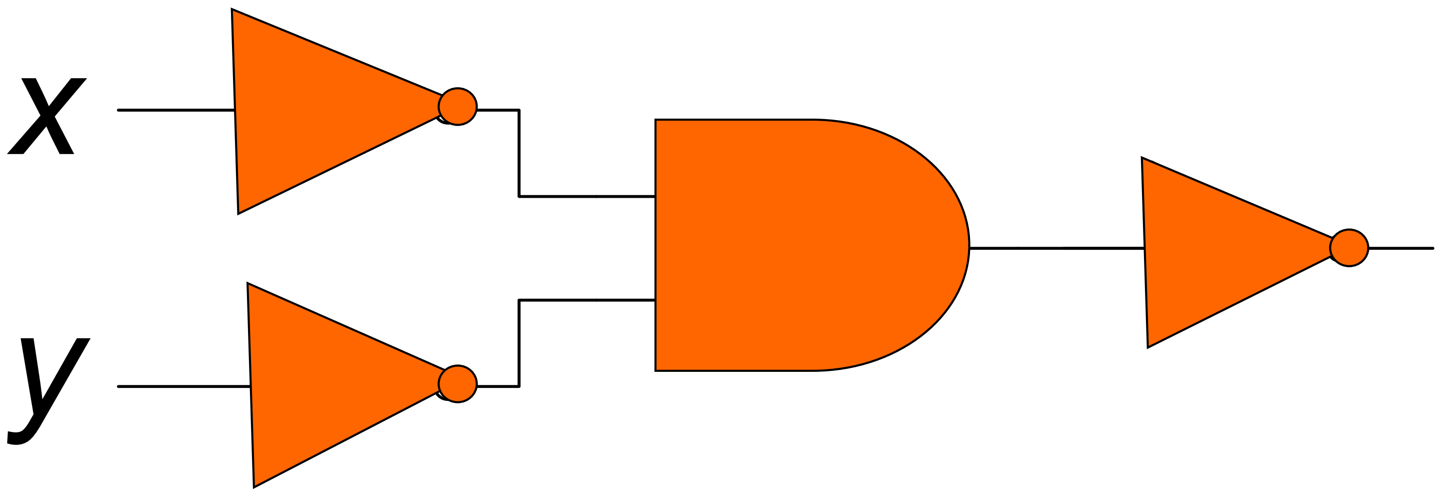
Data la rete seguente, trovare l'espressione booleana all'uscita



$$(x+y)\overline{y} = x\cdot\overline{y} + y\cdot\overline{y}$$
$$= x\cdot\overline{y}$$

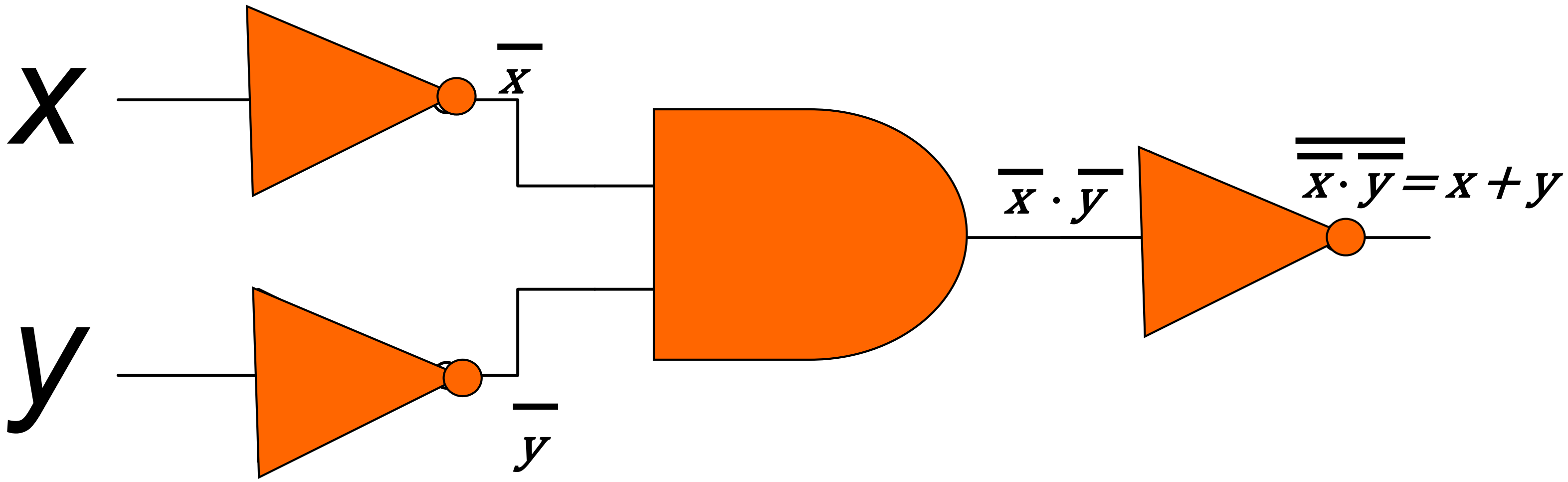
Esercizio 8

Data la rete seguente, trovare l'espressione booleana all'uscita



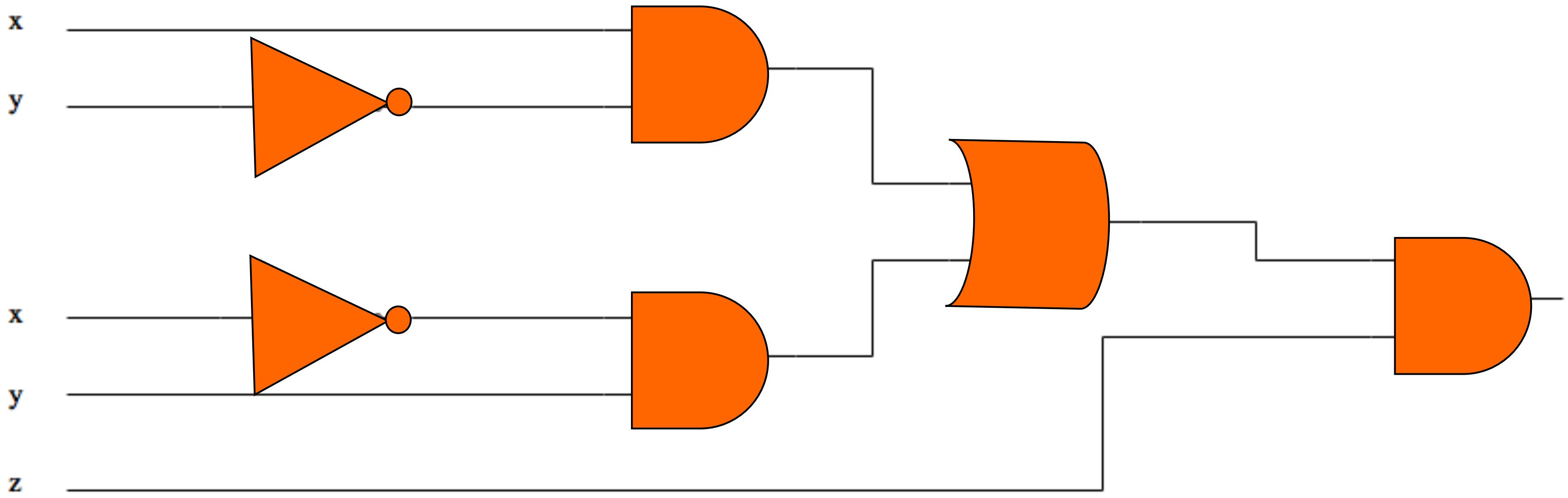
Esercizio 8: Soluzione

Data la rete seguente, trovare l'espressione booleana all'uscita



Esercizio 9

Data la rete seguente, trovare l'espressione booleana all'uscita



Esercizio 9: Soluzione

Data la rete seguente, trovare l'espressione booleana all'uscita