Lezione 20-09

martedì 20 settembre 2022 11:08

TEORIA DEGLI INSIEMI

DEF - Un insieme è una collezione di oggetti, detti **elementi** dell'insieme

$A, B, C, S, T, \dots$

1) per elencazione $A = \{*, 1, a, \Delta\}$

$B = \{1, 2\}$

2) Enunciando la proprietà comune a tutti gli elementi dell'insieme

$A = \{\text{lettere della parola casa}\} = \{c, a, s, \cancel{a}\}$

$= \{c, a, s\} = \{a, c, s\} = \{s, a, c\}$

$B = \{\text{lettere della parola sacca}\} = \{s, a, c\}$

OSS - NO RIPETIZIONI e NON IMPORTA L'ORDINE

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\} = \{\frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$

tale che

$\mathbb{R} = \{\text{numeri reali}\}$

APPARTIENE "a è elemento di A"

DEF - Chiamiamo SINGLETON (singoletto) di $a \in A$ è l'insieme fatto dal solo elemento a, $\{a\}$

$a \in A$

$a \notin A$

non APPARTIENE

es. $0 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$

DEF - Dato A insieme, un sottoinsieme di A è un insieme B tale che ogni elemento di B è anche elemento di A, $B \subseteq A$

INCLUSIONE

"B è contenuto in A"

$\forall a \in B \Rightarrow a \in A$

QUANTIFICATORE UNIVERSALE

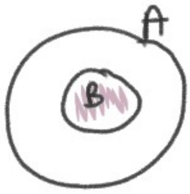
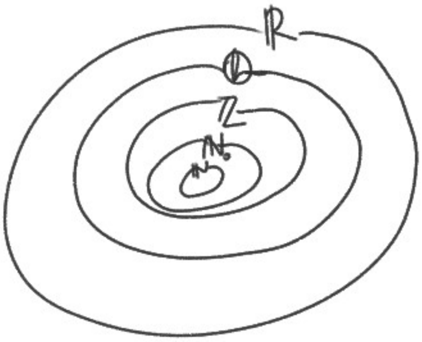
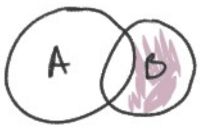


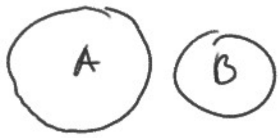
DIAGRAMMA DI VENN



$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$B \nsubseteq A$ esiste almeno un elemento di B che non è elemento di A





$\exists b \in B$ t.c. $b \notin A$

"ESISTE"

QUANTIFICATORE ESISTENZIALE

$\forall a \in A$ si ha $\{a\} \subseteq A$

$\forall$ insieme A $\quad A \subseteq A$

$\emptyset$ INSIEME VUOTO (insieme privo di elementi) $\forall$ insieme A, $\emptyset \subseteq A$

Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ (l'inclusione è transitiva)

PROP - $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

SE e SOLO SE

e

CONGIUNZIONE

SE e solo SE
equivalenza logica

e
CONGIUNZIONE

DEF - INCLUSIONE STRETTA $A \subset B$ / $A \subsetneq B$ $\iff A \subseteq B \wedge A \neq B$

$$(\forall a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge (\exists b \in B : b \notin A)$$

$$A \neq B \iff (\exists b \in B : b \notin A) \vee (\exists a \in A : a \notin B)$$

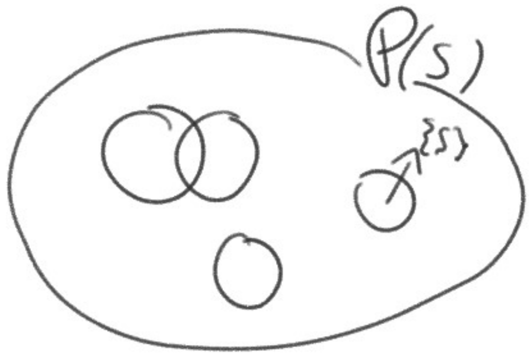
oppure, disgiunzione

DEF - Dato S insieme, si chiama INSIEME delle PARTI di S

$$\mathcal{P}(S) = \{X \text{ insiemi} \mid X \subseteq S\} = \text{insieme dei sottoinsiemi di } S$$

$\emptyset \in \mathcal{P}(S)$ $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(S)$

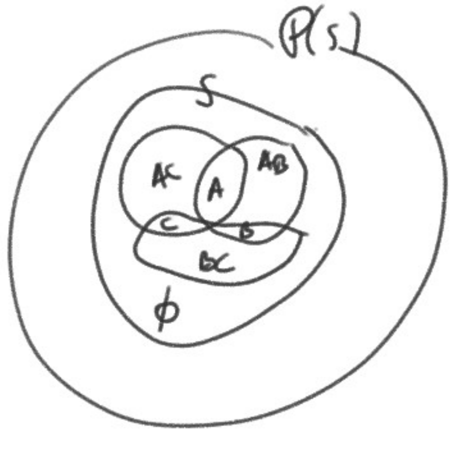
$\emptyset \subseteq S$



$S = \{a, b, c\}$

SOTTOINSIEMI: $\emptyset$
S
$\{a\}$
$\{b\}$
$\{c\}$
$\{a, c\}$
$\{a, b\}$
$\{b, c\}$

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, S, \overset{A}{\overline{\{a\}}}, \overset{B}{\overline{\{b\}}}, \overset{C}{\overline{\{c\}}}, \overset{AC}{\overline{\{a, c\}}}, \overset{AB}{\overline{\{a, b\}}}, \overset{BC}{\overline{\{b, c\}}}\}$$



PROP - $S \subseteq T \iff \mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(T)$

DIM

DIM

($\Rightarrow$) IPOTESI : $S \subseteq T$

TESI : $\forall X \in \mathcal{P}(S)$ si ha $X \in \mathcal{P}(T)$

$$\boxed{\forall X \subseteq S \Rightarrow X \subseteq T} \; ?$$

se $X \subseteq S \wedge S \subseteq T$ allora $\underbrace{X \subseteq T}_{\text{equivalente a } X \in \mathcal{P}(T)}$ CVD

($\Leftarrow$) IPOTESI : $\mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(T)$

TESI : $S \subseteq T$

per ipotesi $\forall X \in \mathcal{P}(S) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(T)$

$\forall X \subseteq S \Rightarrow X \subseteq T$ VERO

allora se $X = S$, ottengo $S \subseteq T$ CVD

THM - $|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n$

$|S|$ = cardinalità o ordine di S = numero di elementi di S

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEI PRINCIPALI INSIEMI NUMERICI

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\left.\begin{array}{l} a+b = b+a \\ a \cdot b = b \cdot a \end{array}\right\}$ COMMUTATIVITÀ di $+$ e $\cdot$

2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ $\left.\begin{array}{l} a+(b+c) = (a+b)+c \\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \end{array}\right\}$ ASSOCIATIVITÀ di $+$ e $\cdot$

3) $\forall a \in \mathbb{R}$ $a+0 = a = 0+a$ ZERO È ELEMENTO NEUTRO per $+$

$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ UNO È ELEMENTO NEUTRO per $\cdot$

4) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

LEGGE di ANNULLAMENTO del PRODOTTO

5) $\forall a \in \mathbb{R}$

LEGGE di ANNULLAMENTO del PRODOTTO

5) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\quad -a$ OPPOSTO $\quad a+(-a)=0$

$\forall\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad \frac{1}{b} = b^{-1}$ INVERSO $\quad b \cdot b^{-1} = 1$

$\left.\begin{array}{l} a+(-a)=0 \\ b\cdot b^{-1}=1 \end{array}\right\}$ ESISTENZA dei SIMMETRICI

6) $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$, $na = \underbrace{a + \ldots + a}_{n \text{volte}}$

7) RELAZIONE DI DIVISIBILITÀ in $\mathbb{Z}$ o in $\mathbb{N}_0$

$a \mid b \iff \exists\, c$ t.c. $b = c \cdot a$

a DIVIDE b

$a, b \in \mathbb{Z}$ $\quad c \in \mathbb{Z}$

$a, b \in \mathbb{N}_0$ $\quad c \in \mathbb{N}_0$

$2 \mid 10$ perché $10 = \overset{c}{5} \cdot 2$

$2 \nmid 3$ perché $\nexists\, c \in \mathbb{Z}$ t.c $3 = c \cdot 2$

• proprietà di $\mid$

$\mathbb{Z}$ a cui tolgo lo zero

(a) $1 \mid a \quad \forall\, a \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ perché $a = a \cdot 1$

(b) $a \mid a \quad \forall\, a \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ perché $a = 1 \cdot a$

(c) $a \mid 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ perché $0 = 0 \cdot a$

(d) DIVIDE È TRANSITIVO :

$\forall\, a,b,c \quad a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$

DIM

$\left.\begin{array}{l} a \mid b \iff \exists\, n \text{ t.c } b = na \\ b \mid c \iff \exists\, m \text{ t.c. } c = m \cdot b \end{array}\right\} c = m(na) = (mn)a \Rightarrow a \mid c$

(e) $\forall\, a, b \in \mathbb{N}_0 \quad a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = b$

DIM

$\left.\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow \exists\, c \text{ t.c. } b = c \cdot a \\ b \mid a \Rightarrow \exists\, d \text{ t.c } a = d \cdot b \end{array}\right\} \cancel{b} = (cd)\cancel{b} \Rightarrow cd = 1$

se $cd=1$ in $\mathbb{N}_0 \Rightarrow c=d=1$

allora $b=c\cdot a=1\cdot a=a$ $\square$

in $\mathbb{Z}$, $-5|5 \wedge 5|-5$ ma $5\neq -5$

(2) se $a|b$ e $a|c \Rightarrow a|b+c$.

DIM

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow \exists\, n \text{ t.c. } b=na \\ a|c \Rightarrow \exists\, m \text{ t.c. } c=ma \end{array}\right\}(*)$$

DISTRIBUTIVA

$((a+b)\cdot c = ac+bc)$

$$(*)\ b+c = na+ma = \underbrace{(n+m)}_{\in\mathbb{Z}}a \Rightarrow a|b+c \quad \square$$