ESAME DI MATEMATICA DISCRETA
22/07/2022

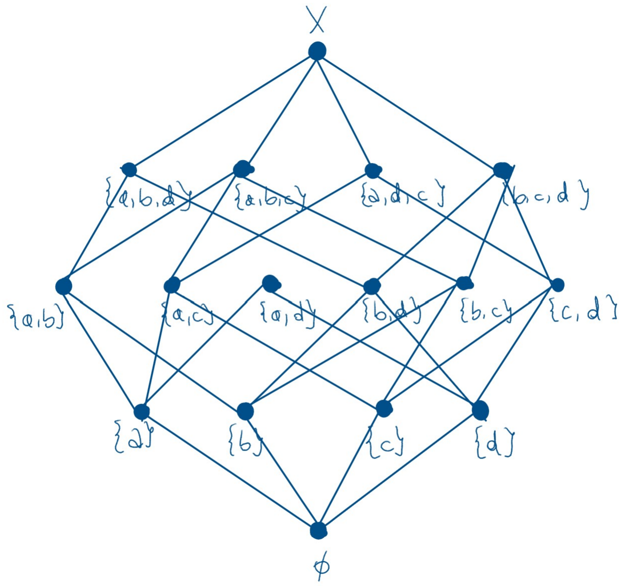
II APPELLO SESSIONE ESTIVA

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.
(2) Voto massimo: **30/30**.
(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.
(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.
(5) Si è ammessi all'orale con un punteggio di almeno 15/30.
(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
(7) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (7 punti)**.** Sia $X = \{a, b, c, d\}$ un insieme formato da 4 elementi. Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, dove $\mathcal{P}(X)$ indica l'insieme delle parti di X.

Soluzione:



Esercizio 2 (8 punti)**.** Usando uno tra i due metodi visti a lezione, trovare tutte le soluzioni del seguente sistema congruenziale:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \quad (mod\ 2) \\ x \equiv 3 \quad (mod\ 7) \\ x \equiv 2 \quad (mod\ 3) \end{cases}$$

Soluzione: Dalla prima equazione si ha $x = 2k + 1$, con $k \in \mathbb{Z}$. Sostiuendo nella seconda otteniamo $k \equiv 1\ (mod\ 7)$. Quindi $x = 2 \cdot 1 + 1$ e $S_1 = [3]_{14}$. Sostituendo nella terza, $14t + 3 \equiv 2(mod\ 3)$, e quindi $t \equiv 1(mod\ 3)$. L'insieme di tutte le soluzioni è quindi $S = [17]_{42}$.

Esercizio 3 (7 punti)**.** Sia $(\mathbb{Z}, +, 0)$ il gruppo degli interi. Dotiamo il prodotto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ della seguente operazione, per ogni $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$(a_1, b_1) \perp (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Dimostrare che $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è un gruppo abeliano.

Soluzione:

- $(a_1, b_1) \perp (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_2 + a_1, b_2 + b_1) = (a_2, b_2) \perp (a_1, b_1)$, quindi $\perp$ è commutativa;
- $[(a_1, b_1) \perp (a_2, b_2)] \perp (a_3, b_3) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \perp (a_3, b_3) = ((a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3) = (a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3)) = (a_1, b_1) \perp [(a_2, b_2) \perp (a_3, b_3)]$, quindi $\perp$ è associativa;
- $(a, b) \perp (0, 0) = (a, b)$ per ogni (a, b), quindi $(0, 0)$ + elemento neutro;
- $(a, b) \perp (-a, -b) = (0, 0)$ per ogni (a, b), quindi $(-a, -b)$ è il simmetrico di (a, b).

Esercizio 4 (8 punti)**.** Si stabilisca se la matrice

$$M = \begin{pmatrix} [0] & [2] & [1] & [3] \\ [0] & [1] & [4] & [1] \\ [1] & [0] & [2] & [3] \\ [0] & [1] & [1] & [0] \end{pmatrix}$$

è invertibile in $\mathbb{Z}_5$. Si stabilisca anche il rango della matrice.

Soluzione: Calcolando il determinante della matrice si ottiene rispetto alla prima colonna

$$det(M) = (-1)^{3+1} \cdot [1] \cdot det \begin{pmatrix} [2] & [1] & [3] \\ [1] & [4] & [1] \\ [1] & [1] & [0] = \end{pmatrix} = [1] \cdot ([0] + [3] + [1] - [12] - [2] - [0]) = [-10] = [0]$$

Quindi M non è invertibile. Poichè il determinante della sottomatrice

$$N = \begin{pmatrix} [0] & [2] & [1] \\ [0] & [1] & [4] \\ [1] & [0] & [2] \end{pmatrix}$$

è uguale a [2], il rango di M è 3.