Insiemi ed operazioni su insiemi

Prof. Rocco Zaccagnino

2022/2023

Insieme

- **L'insieme** è una struttura discreta utilizzata per rappresentare oggetti discreti. Formalmente:

Collezione non ordinata di oggetti,

chiamati elementi dell'insieme

Esempio

Insieme dei primi 7 numeri primi

P = {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17}

Insieme

Un insieme può essere rappresentato mediante:

- Lista degli elementi che lo costituiscono
- Definizione formale delle ***proprietà*** che caratterizzano i suoi elementi

Esempio

Insieme degli interi pari tra 10 e 23

S = {10, 12, 14, 16, 18, 20, 22}

S = {x | x intero pari e 10≤x≤23}

Insiemi importanti

- Numeri **naturali**: $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- Numeri **interi**: $Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
- Numeri **interi positivi**: $Z^+ = \{1, 2, 3, ...\}$
- Numeri **razionali**: $Q = \{p/q \mid p \in Z, q \in Z, q \neq 0\}$
- Numeri **reali** R
- Numeri **pari**: $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, ... \} = \{2n \mid n \in N\}$
- Numeri **dispari**: $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, ... \} = \{2n + 1 \mid n \in N \}$
- L'insieme **universale** è denotato con **U**: insieme costituito da tutti gli elementi che si stanno considerando
- L'insieme **vuoto** è denotato con ∅: non contiene nessun elemento

Uguaglianza tra insiemi

- Due insiemi si dicono **uguali** se e solo se sono costituiti dagli stessi elementi.

- Useremo **a** ∈ ***S*** per indicare che **a** è un elemento di ***S***

Esempio

- {1, 2, 3} = {1, 2, 2, 3} = {3, 1, 2}
  - Avere elementi duplicati in un insieme non dice nulla di più sull'insieme
  - Avere elementi in un ordine diverso non dice nulla di più sull'insieme

- {1, 2, 3, 4} e {1, 2, 2, 3} insiemi uguali?

Uguaglianza tra insiemi

- Due insiemi si dicono **uguali** se e solo se sono costituiti dagli stessi elementi.

- Useremo **a** $\in$ ***S*** per indicare che **a** è un elemento di ***S***

Esempio

- {1, 2, 3} = {1, 2, 2, 3} = {3, 1, 2}
  - Avere elementi duplicati in un insieme non dice nulla di più sull'insieme
  - Avere elementi in un ordine diverso non dice nulla di più sull'insieme

- {1, 2, 3, 4} e {1, 2, 2, 3} insiemi uguali?
  - NO

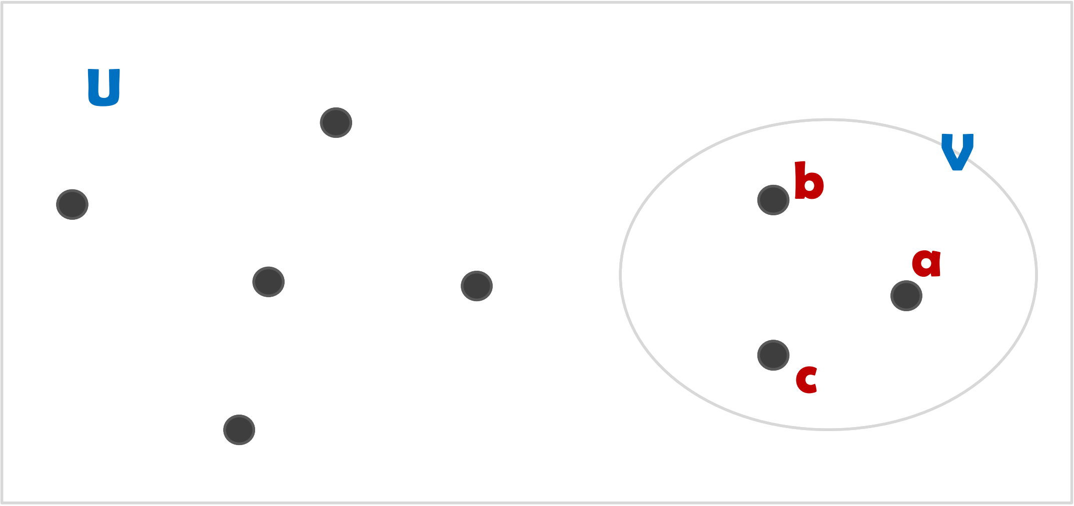
Uguaglianza tra insiemi

- Due insiemi si dicono **uguali** se e solo se sono costituiti dagli stessi elementi.
- Useremo **a** $\in$ **S** per indicare che **a** è un elemento di **S**
- Un modo alternativo per dire che **A = B** è

$$\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}) \leftrightarrow (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B})$$

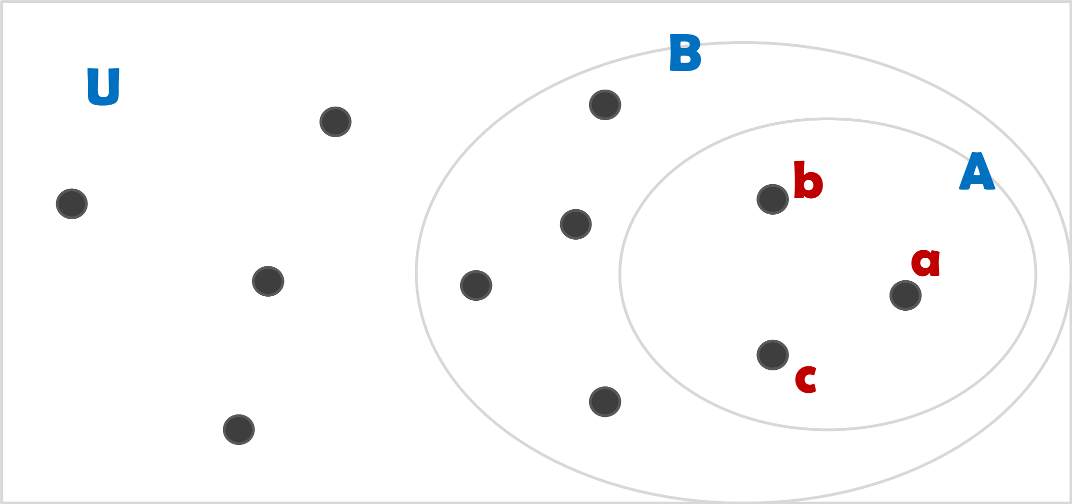
Diagrammi di Venn

- Un insieme può essere rappresentato visivamente usando i diagrammi di Venn
  - V = {a, b, c}



Sottoinsiemi

Un insieme **A** è detto **sottoinsieme** di un insieme **B** se e solo se ogni elemento di **A** è anche elemento di **B**. Usiamo **A** $\subseteq$ **B** per indicare che **A** è **sottoinsieme** di un insieme **B**



Un modo alternativo per dire che A $\subseteq$ B è

$$\forall x\,(x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

Proprietà dei sottoinsiemi

Teorema

$\emptyset \subseteq S$ cioè l'insieme vuoto è sottoinsieme di qualunque insieme

Dim.

Dobbiamo far vedere che $\forall x\ (x \in \emptyset) \rightarrow (x \in S)$

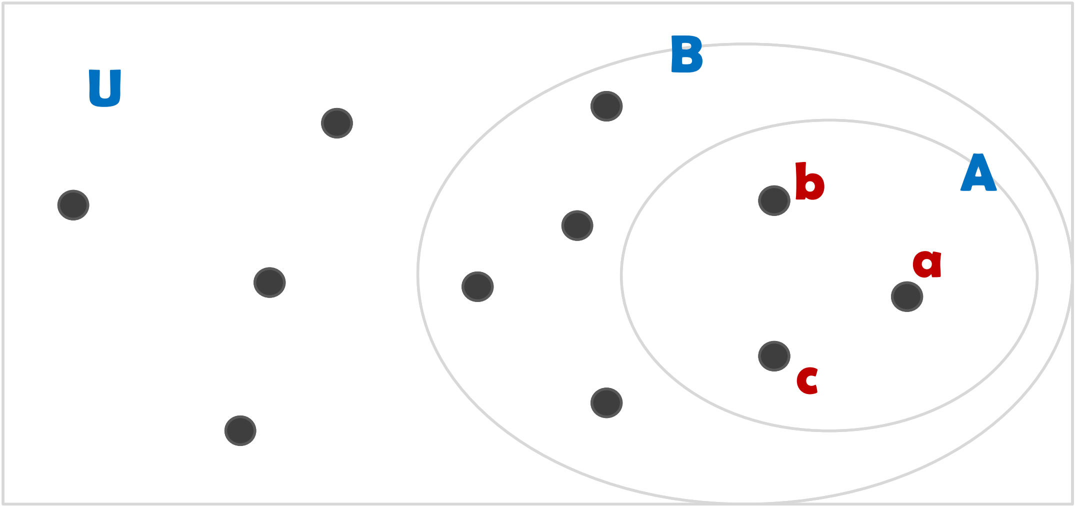
Poiché $\emptyset$ non contiene alcun elemento allora $x \in \emptyset$ è **sempre falsa**

Ma una implicazione $\rightarrow$ è sempre vera se l'ipotesi è falsa, quindi

$\forall x\ (x \in \emptyset) \rightarrow (x \in S)$ **è vera**

Sottoinsiemi propri

Un insieme **A** è detto **sottoinsieme proprio** di **B** se e solo se **A** $\subseteq$ **B** e **A** $\neq$ **B**. Usiamo **A** $\subset$ **B** per indicare che **A** è **sottoinsieme proprio** di **B**



Cardinalità

- Sia **S** un insieme e sia **n** un intero non negativo. Se ci sono esattamente **n** distinti elementi in **S**, diciamo che **n** è la cardinalità di **S**, e la indichiamo con **| S |**
- Un insieme si dice *infinito* se la sua cardinalità è *infinita*

Esempio

A = {1, 2, 3} **| A | = 3**

E = {1, 2, 3, …, 20} **| E | = 20**

Insieme vuoto **| ∅ | = 0**

La cardinalità dell'insieme dei numeri naturali **N** è **infinita**

Insieme potenza

Sia **S** un insieme. **L'insieme potenza** di **S** è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di **S**, ed è denotato con **$P(S)$**

Esempio

Sia $S = \emptyset$	$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$	$\lvert P(\emptyset) \rvert = 1$
Sia $S = \{1\}$	$P(S) = \{\emptyset, \{1\}\}$	$\lvert P(S) \rvert = 2$

Prodotto cartesiano

Siano **S** e **T** due insiemi. Il **prodotto cartesiano** di **S** e **T**, denotato con **S x T** é l'insieme di tutte le coppie ordinate **(s,t)** dove $s \in S$ e $t \in T$. Formalmente:

$$S \times T = \{(s,t) \mid s \in S \text{ e } t \in T\}$$

La cardinalità di $S \times T$ è:

$$|S \times T| = |S| * |T|$$

Esempio

Siano $S = \{1,2\}$ e $T = \{a,b,c\}$

$$S \times T = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$$

$$T \times S = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$$

$$S \times T \neq T \times S$$

Operazioni sugli insiemi

Siano **A** e **B** due insiemi. **L'unione** di **A** e **B**, denotato con **A** ∪ **B** é l'insieme che contiene gli elementi di **A** o quelli di **B**:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Siano **A** e **B** due insiemi. **L'intersezione** di **A** e **B**, denotata con **A** ∩ **B** é l'insieme che contiene elementi appartenenti sia ad **A** che a **B**:

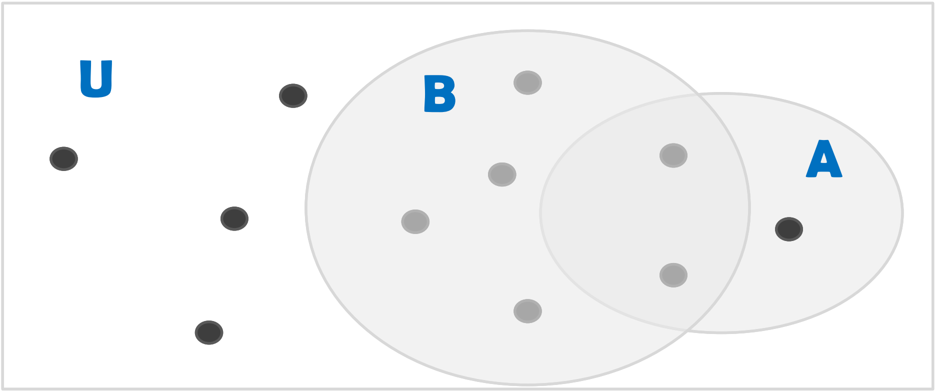
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- Siano **A** e **B** due insiemi. **A** e **B** si dicono **disgiunti** se **A** ∩ **B** = ∅

Siano **A** e **B** due insiemi. La **differenza** tra **A** e **B**, denotato con **A - B** é l'insieme che contiene gli elementi di **A** che non sono elementi di **B**:

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Cardinalità dell'insieme unione

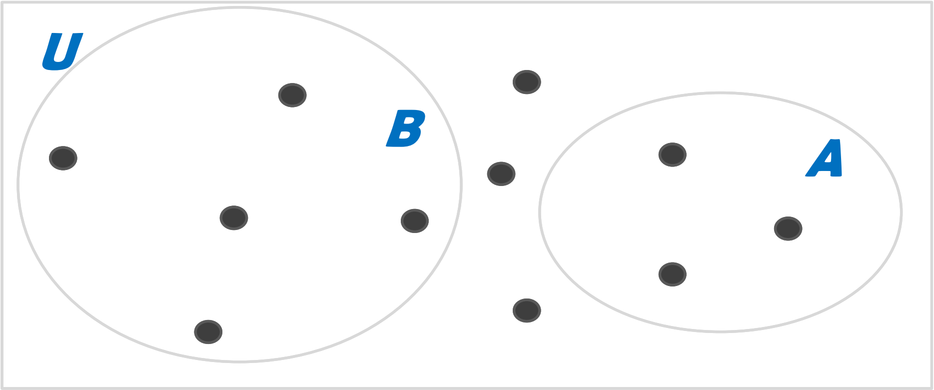


La cardinalità dell'insieme **unione** è

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Perché ? : Se si considera |A| + |B| allora si conta |A ∩ B| due volte

Cardinalità dell'insieme unione

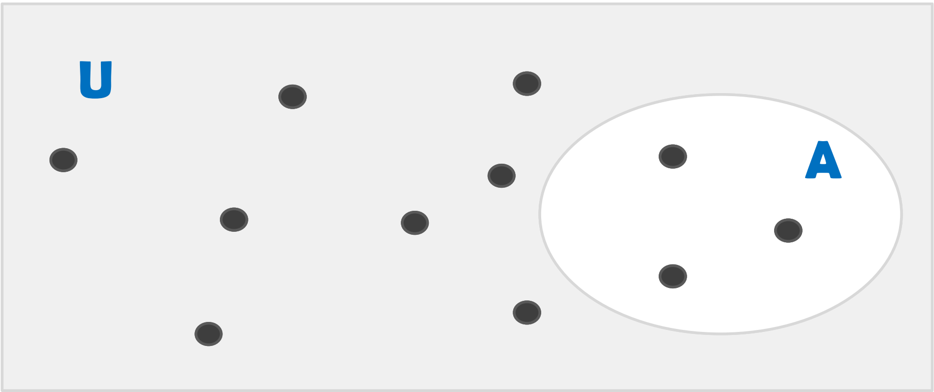


Se A e B sono disgiunti allora la cardinalità dell'insieme unione è

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

In questo caso A ∩ B = Ø

Operazioni sugli insiemi



Sia **U** l'insieme universale ed **A** un insieme. Il **complemento** di **A,** denotato con $\overline{\overline{A}}$ é l'insieme di tutti gli elementi di **U** che non appartengono ad **A** :

$$\overline{\overline{A}} = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

Insiemi: operazioni ed identità

$A = B$	$\forall x\,(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)$
$A \subseteq B$	$\forall x\,(x \in A) \rightarrow (x \in B)$
$A \cup B$	$\{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$
$A \cap B$	$\{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$
$A - B$	$\{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$
$\overline{\overline{A}}$	$\{x \,/\, x \in U \wedge x \notin A\}$

Identità tra gli insiemi

Identità

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap U = A$

Dominazione

- $A \cup U = U$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$

Idempotenza

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$

Identità tra gli insiemi

Doppio complemento

- $\overline{\overline{A}} = A$

Commutativa

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

Associativa

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Distributiva

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Identità tra gli insiemi

De Morgan

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Leggi dell'assorbimento

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

Leggi del complemento

- $A \cup \overline{A} = U$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Identità tra gli insiemi

Le identità tra insiemi possono essere provate utilizzando le tavole di appartenenza

Provare che $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1

Identità tra gli insiemi

Le identità tra insiemi possono essere provate utilizzando le equivalenze logiche

Provare che $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cap B}$	$= \{ x \mid x \notin A \cap B \}$	*def di complemento*
	$= \{ x \mid \neg(x \in A \cap B) \}$	*def di non appartenenza*
	$= \{ x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B) \}$	*def di intersezione*
	$= \{ x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \}$	*da Legge di DeMorgan*
	$= \{ x \mid x \notin A \vee x \notin B \}$	*def di non appartenenza*
	$= \{ x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \}$	*def di complemento*
	$= \{ x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B} \}$	*def di unione*
	$= \overline{A} \cup \overline{B}$	