Tutorato MMI - Resto 1

05/05/2023

Esercizio 1

Dimostrazione per induzione

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}_0, 2^n \geq n + 1$.

Esercizio 1 - Soluzione

Soluzione :

- **Base.** Sia $n = 0$, allora $2^n = 2^0 = 1 \geq 1 = 0 + 1 = n + 1$.
- **Passo induttivo.** Supponiamo per *ipotesi induttiva* che $P(n)$ sia vera, con $n \geq 0$, cioè che $2^n \geq n + 1$. Vogliamo dimostrare che $P(n+1)$ è vera, cioè che $2^{n+1} \geq (n+1) + 1$.
  $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{?}{\geq} n + 2 = (n+1) + 1$.
  $\frac{2^n \cdot 2}{2} = 2^n \overset{?}{\geq} \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}$.
  A questo punto la dimostrazione si riduce a verificare se $2^n \geq \frac{n}{2} + 1$. Per ipotesi induttiva $2^n \geq n + 1$. Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ risulta $n + 1 \geq \frac{n}{2} + 1$. Per transitività, notiamo che:
  $2^n \geq n + 1 \geq \frac{n}{2} + 1$.

Avendo provato il passo base e il passo induttivo, per il principio di induzione l'asserto è vero $\forall n >= 0$.

Esercizio 2

Dimostrazione per induzione

Sia $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare per induzione che $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $3^n < n!, \forall n \geq k$.

Esercizio 2 - Soluzione

Soluzione :

- **Base.** Sia $n = 7$, allora $3^n = 3^7 = 2187 < 5040 = 7! = n!$.
- **Passo induttivo.** Supponiamo per *ipotesi induttiva* che $P(n)$ sia vera, con $n \geq 7$, cioè che $3^n < n!$. Vogliamo dimostrare che $P(n+1)$ è vera, cioè che $3^{n+1} < (n+1)!$.
  $3^{n+1} = 3^n \cdot 3 \overset{?}{<} n! \cdot (n+1) = (n+1)!$.
  Poiché per ipotesi induttiva $3^n < n!$ è vero, se moltiplichiamo a destra e a sinistra della disequazione rispettivamente un valore x ed un valore y, tali che $x < y$, allora l'asserto $3^n \cdot x < n! \cdot y$ è vero. Consideriamo $x = 3$ e $y = n + 1$, poiché $3 < n + 1, \forall n \geq 7$ (passo base), allora l'asserto $3^n \cdot 3 < n! \cdot (n+1)$ è vero.

Avendo provato il passo base e il passo induttivo, per il principio di induzione l'asserto è vero $\forall n >= 7$.

Esercizio 3

Dimostrazione per induzione

Dimostrare per induzione che $6^n - 1$ è divisibile per 5, per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 3 - Soluzione

Soluzione :

- **Base.** Sia $n = 0$, allora $6^n - 1 = 6^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, che è divisibile per 5.
- **Passo induttivo.** Supponiamo per *ipotesi induttiva* che $P(n)$ sia vera, con $n \geq 0$, cioè che $6^n - 1$ è divisibile per 5.
  Vogliamo dimostrare che $P(n+1)$ è vera, cioè che $6^{n+1} - 1$ è divisibile per 5. Per ipotesi induttiva sappiamo che $\exists k \geq 0 : 6^n - 1 = 5k$. Questo implica che $6^n = 5k + 1$.
  $6^{n+1} - 1 = 6 \cdot 6^n - 1 = 6(5k+1) - 1 = 30k + 6 - 1$.
  $6^{n+1} = 30k + 5 = 5(6k+1)$, che è divisibile per 5.

Avendo provato il passo base e il passo induttivo, per il principio di induzione l'asserto è vero $\forall n >= 0$.

Esercizio 4

Dimostrazione per induzione

Dimostrare per induzione che $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2(2^n - 1)$, per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 4 - Soluzione

Soluzione :

- **Base.** Sia $n = 1$, allora $2 = 2(2^1 - 1) = 2(2^n - 1)$.
- **Passo induttivo.** Supponiamo per *ipotesi induttiva* che $P(n)$ sia vera, con $n \geq 1$, cioè che $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$.
  Dimostriamo ora che $\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = 2(2^{n+1} - 1)$.
  $2(2^{n+1} - 1) = 2^{n+2} - 2 = 2^{n+1} + 2^{n+1} - 2 = 2^{n+1} + 2(2^n - 1)$.
  $2^{n+1} + 2(2^n - 1) = 2^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} 2^k = \sum_{k=1}^{n+1} 2^k$.

Avendo provato il passo base e il passo induttivo, per il principio di induzione l'asserto è vero $\forall n >= 1$.