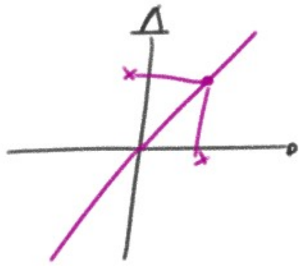
Lezione 27-09

martedì 27 settembre 2022 11:11

DEF - Dato A insieme, $\Delta_A = \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\} \subseteq A \times A$

$\Downarrow$

DIAGONALE di A



Data $R \subseteq A \times B$, questa è detta:

1) vuota se $R = \emptyset$
2) TOTALE se $R = A \times B$
3) BINARIA se $A = B$
4) IDENTITÀ $id_A \subseteq A \times A$, $id_A = \Delta_A$
5) OPPOSTA $R^{op} = \{(y,x) \in A \times B \mid (x,y) \in R\}$

$\hookrightarrow$ $\leq^{op}$ è $\geq$ $\qquad (3,4) \in \leq$ ma $(4,3) \in \geq$

$\boxed{\text{PROPRIETÀ del PRODOTTO CARTESIANO}}$

$S \subseteq A$ e $T \subseteq B \iff S \times T \subseteq A \times B$

Dim

$(\Rightarrow)$

$(x,y) \in S \times T \Rightarrow x \in S \wedge y \in T \Rightarrow$ per ipotesi $\left.\begin{matrix} S \subseteq A \\ T \subseteq B \end{matrix}\right\}$ $x \in A \wedge y \in B \Rightarrow (x,y) \in A \times B$

Allora $S \times T \subseteq A \times B$.

$(\Leftarrow)$ Per ipotesi $S \times T \subseteq A \times B$

Sia $x \in S$ e sia $y \in T \Rightarrow (x,y) \in S \times T \Rightarrow (x,y) \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B$

Allora $S \subseteq A$ e $T \subseteq B$.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$

Dati A, B, C insiemi. Si ha

i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

iii) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

Dim

(i) $(x,y) \in (A \cup B) \times C \iff x \in A \cup B \wedge y \in C \iff \begin{matrix} x \in A \wedge y \in C \\ \text{oppure} \\ x \in B \wedge y \in C \end{matrix} \iff \begin{matrix} (x,y) \in A \times C \\ \text{oppure} \\ (x,y) \in B \times C \end{matrix}$

$\iff (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$ $\square$

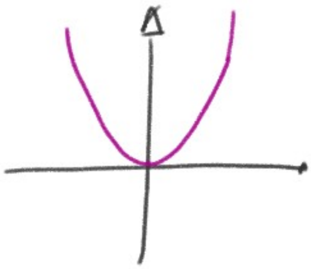
OSS. $R \subseteq A\times B$ $\quad (x,y)\in R$ si scrive anche xRy

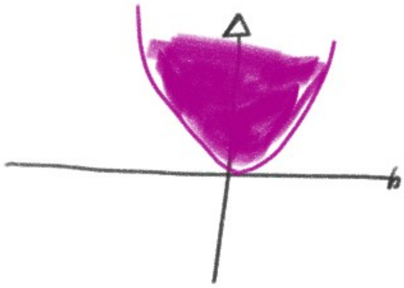
$(3,4) \in \leq \qquad\qquad 3\leq 4$

ESEMPI:

1) $R \subseteq \mathbb{R}^2$ $\qquad R = \{(x,y) \mid y = x^2\}$

$(\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R})$ $\qquad R_2 = \{(x,y) \mid y \geq x^2\}$





2) $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$

(i) $x R_1 y \iff x+y = 3$ $\qquad$ Fissato x $\exists!\, y$ t.c. xR_1y $\quad (y = 3-x)$

$(7,-4)\in R_1$

in $\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ $\quad (7,-4) \notin R_1$

(ii) $x R_2 y \iff y^2 = x$ $\qquad$ Fissato x non è detto che esiste y t.c. $x = y^2$

Ad esempio $x=3$

$(25,5)$ $\quad (25,-5)$ $\quad y^2 = x$ in entrambi i casi

DEFINIZIONE

1) $R \subseteq A\times B$ è detta **APPLICAZIONE** (o FUNZIONE) se

$\forall x\in A \ \exists!\, y\in B$ t.c. xRy

Di solito si scrive $\quad R: A\to B$ $\quad$ al posto di $R\subseteq A\times B$

$R(x) = y$ $\quad$ al posto di xRy

A è detto dominio di R

B è detto codominio di R

2) Data R binaria $R \subseteq A\times A$

R è detta **RIFLESSIVA** se $\quad (x,x)\in R \ \forall x\in A$

$xRx \ \forall x\in A$

$\Delta_A \subseteq R$

3) Data $R \subseteq A\times B$

R è detta **SIMMETRICA** se $\quad (x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$

se $\quad xRy \Rightarrow yRx$

4) Data $R \subseteq A\times A$

se $xRy \Rightarrow yRx$

4) Data $R \subseteq A \times A$

R è detta **ASIMMETRICA** (o ANTISIMMETRICA) se $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$

$| \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ (DIVIDE) $\quad a|b$ e $b|a \Rightarrow a = b$

5) Data $R \subseteq A \times A$

è detta **TRANSITIVA** se $\big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \big) \Rightarrow (x,z) \in R$

xRy e $yRz \Rightarrow xRz$

es. $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

$3 \leq 4$ e $4 \leq 7 \Rightarrow 3 \leq 7$

6) R è detta **RELAZIONE DI EQUIVALENZA** se è Riflessiva + simmetrica + transitiva

7) R è detta **RELAZIONE DI ORDINE** se è Riflessiva + Asimmetrica + transitiva

ESERCIZI

1) $|A| = 7$, $|B| = 3$,

$A \cap B = \{a, e\}$

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$A \setminus B = \{b, c, d, f, g\}$

$B \setminus A = \{h\}$

$A \dot{\cup} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{b, c, d, f, g, h\}$

$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, B, \{a\}, \{h\}, \{e\}, \{a,h\}, \{a,e\}, \{h,e\}\} \qquad |\mathcal{P}(B)| = 2^{|B|} = 2^3$

2) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 \leq x \leq 6\} = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2|x$ oppure $3|x\}$

$(2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}) \cap A = \{-6, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 6\}$

$(2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}) \cap A = \{-6, 0, 6\}$ = multipli di 3 e di 2

$(2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z})\cap A = \{-6, 0, 6\}$ = multipli di 3 e di 2

$\underbrace{(2\mathbb{Z}\setminus 3\mathbb{Z})}_{\text{multipli di 2 ma non di 3}}\cap A = \{-4, -2, 2, 4\}$

$(2\mathbb{Z}\,\dot\cup\, 3\mathbb{Z})\cap A = \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$

$(2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z})\setminus(2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z})$

$(3\mathbb{Z}\setminus 2\mathbb{Z})\cap A = \{-3, 3\}$

3) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$\underbrace{x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)}$ $\iff$ $x\in A\setminus B$ oppure $x\in B\setminus A$ $\iff$

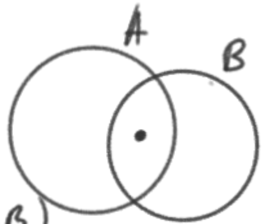
$\iff (x\in A \wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)$

$\iff (x\in A \vee x\in B)$ e $(x\notin B\vee x\in B)$ e

$(x\in A\vee x\notin A)$ e $(x\notin B\vee x\notin A)$

$\boxed{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})}$

$\iff (x\in A\cup B)$ e $\underbrace{(x\notin B\vee x\notin A)}_{\overline{A\cap B}}$



$(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B}) = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$