CALCOLO COMBINATORIO

① PRINCIPIO DI ADDIZIONE

Se ho A, B insiemi finiti con $A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

$A = \{x_1, .. x_n\}$, $B = \{y_1, .., y_m\} \Rightarrow A \cup B = \{x_1, .., x_n, y_1, .., y_m\}$

② PRINCIPIO DI INCLUSIONE - ESCLUSIONE

Se A e B sono finiti, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

NB - $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$

NB - $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$

In generale: $A_1, .. A_k$ insiemi,

$$|A_1 \cup .. \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_k| - \left(|A_1 \cap A_2| + .. + |A_i \cap A_j| + ... + ..\right)$$

$$+ .. + (-1)^{k-1} |A_1 \cap ... \cap A_k|$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + (-1)^{k-1} |A_1 \cap ... \cap A_k|$$

③ PRINCIPIO DI MOLTIPLICAZIONE

$S = \{x_1, ..., x_n\}$, $T = \{y_1, .., y_m\}$ $\quad |S \times T| = |S| \cdot |T| = n \cdot m$

$S \times T = \{ (x_1, \underset{m \text{ scelte}}{\downarrow}), (x_2, \underset{m \text{ scelte}}{\downarrow}), ..., (x_n, \underset{m \text{ scelte}}{\downarrow}) \}$

$$\underbrace{m + m + ... + m}_{n \text{ volte}} = n \cdot m$$

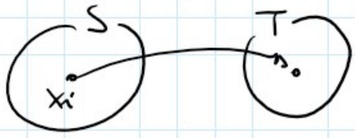
④ S, T insiemi finiti, $T^S := \{ f : S \to T \mid f \text{ funzione} \}$

$$|T^S| = |T|^{|S|}$$

dim

$f \in T^S$, $T = \{y_1, .., y_m\}$ e $S = \{x_1, .., x_n\}$

$\forall x_i \in S$, $f(x_i) \in T$



$f(x_1) \to m$ scelte ($f(x_1) = y_1$ o $f(x_1) = y_2$, ... o $f(x_1) = y_m$)

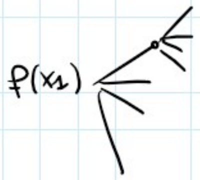
$f(x_2) \to m$ scelte

⋮

$f(x_2) \rightarrow m$ scelte

$\vdots$

$f(x_n) \rightarrow m$ scelte



Le scelte possibili si moltiplicano ed ho un totale di m^n funzioni, cioè $|T|^{|S|}$

ES

$X = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$

(i) $X \times Y = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (a,3), (b,3)\}$ 6 elementi

(ii) $Y^X = \{f : X \rightarrow Y \mid \text{funzioni}\}$

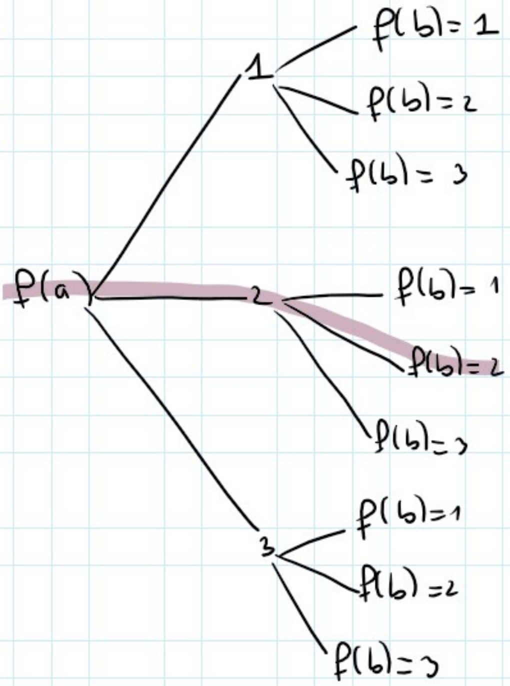
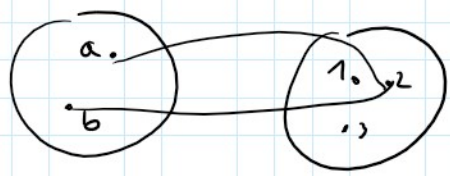


DIAGRAMMA Delle scelte successive



$$\Rightarrow \underbrace{Y \times Y \cdots \times Y}_{\text{tante volte quanto è } |X|}$$

$$\begin{array}{cc} f(a) & f(b) \\ \downarrow & \downarrow \\ (1, & 2) \end{array}$$

NB $\mathcal{P}(S) = \{f : S \rightarrow \{0,1\} \mid f \text{ funzione}\}$ $\quad |\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$

$$E \subseteq S \Longleftrightarrow f_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Funzione caratteristica di E

χ_E o 1_E

$0 \quad x \notin E$

χ_E o 1_E

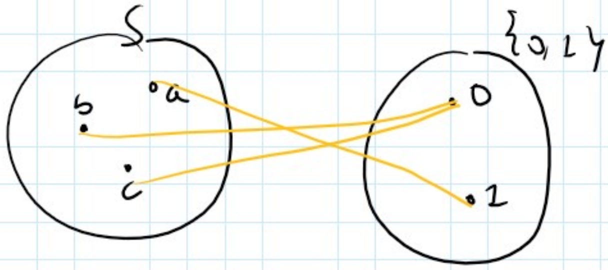
Esempio

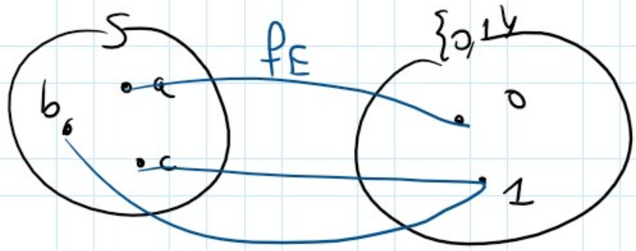
$S = \{a, b, c\}$

$E = \{a\} \rightarrow f_E(a) = 1$

$f_E(b) = 0$

$f_E(c) = 0$





$\Rightarrow E = \{b, c\}$

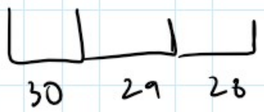
(5) PRINCIPIO DELLA PICCIONAIA (o dei CASSETTI)

Dati $n, m \in \mathbb{N}$, se si vogliono riporre m oggetti in n cassetti e $m > n$, almeno un cassetto deve contenere 2 oggetti.

FORMA FORTE:

$n \in \mathbb{N}$, $q_1, \dots, q_n > 2$, $k = q_1 + \dots + q_n - n + 1$.
Se ho k oggetti ripartiti in n scatole, allora la prima scatola ne contiene almeno q_1, oppure la seconda ne contiene almeno q_2, ..., oppure l'ultima scatola ne contiene almeno q_n.

Esempio 25 persone fanno l'esame di MD, e i voti sono 28, 29, 30
$\Rightarrow$ almeno 9 hanno preso lo stesso voto



$9 + 9 + 9 - 3 + 1 = 25$

DEF - Dato $n \in \mathbb{N}_0$, chiamiamo FATTORIALE di n, il numero

<u>DEF</u> - Dato $n \in \mathbb{N}_0$, chiamiamo **FATTORIALE** di n, il numero

$$n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

e lo indichiamo con $n!$. $\quad 0! := 1$

<u>Es</u>

$3! = \underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{} = 6$

$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24 = 4\cdot 3! \longrightarrow \quad n! = n(n-1)!$

<u>DEF</u> - $X \neq \emptyset$, $\quad S_X = \{ f: X \to X \mid f \text{ è biettiva} \}$

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$

Se $|X| = n \implies |S_X| = n!$.

<u>DIM</u>

$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$f(x_1) = n$ scelte

$f(x_2) = n-1$ scelte perché f deve essere iniettiva

$f(x_3) = n-2$ scelte " " "

$\vdots$

$f(x_n) = 1$ scelta " " "

$\implies n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 \implies n!$

<u>ESEMPIO</u>

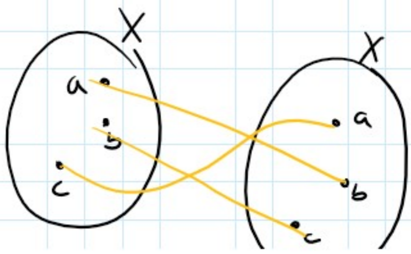
$X = \{a, b, c\}$

$f(a) = a$ — $f(b) = c \longrightarrow f(c) = b$

$f(a) = a$ — $f(b) = b \longrightarrow f(c) = c$

$f(a) = b$ — $f(b) = a \longrightarrow f(c) = c$

$f(a) = b$ — $f(b) = c \longrightarrow f(c) = a$



$f(b) = c \to f(c) = a$

c — $f(b) = b \to f(c) = a$

$f(b) = a \to f(c) = b$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} \qquad (b \ a \ c) \qquad (a \ b \ c)$$

$(a \ b)(c)$

$(a \ c)(b)$

DEF - Le funzioni biettive di X in sé stesso si chiamano PERMUTAZIONI

ES - Quante sono gli anagrammi della parola PERA

$\_ \ \_ \ \_ \ \_ \qquad 4!$

4 3 2 1

ES - Quanti sono gli anagrammi della parola CASA ?

C A S A $\qquad \dfrac{4!}{2!}$

PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE $\qquad \dfrac{n!}{n_1! \, n_2! \dots n_k!}$

↓ permutazioni delle lettere ripetute

Esempio Anagrammi di NONNINO

↓

$\left.\begin{array}{l} 7 \text{ lettere} \\ 4 \text{ N} \\ 2 \text{ O} \end{array}\right\} \dfrac{7!}{4! \, 2!}$

Disposizioni di n oggetti su h posti

$$\underset{6}{\downarrow} \quad \underset{5}{\downarrow} \quad \underset{4}{\downarrow} \quad \underset{3}{\downarrow}$$

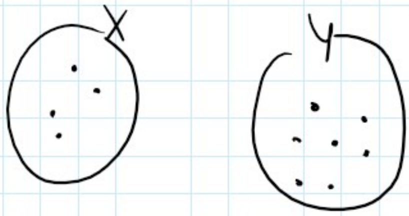
$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6!}{2!} \qquad \frac{n!}{(n-h)!}$$

$$d_{n,h} := \frac{n!}{(n-h)!}$$

$\boxed{\text{Proposizione}}$

Sia $|X| = h$ e $|Y| = n$, $h \le n$. Allora, detto $\mathcal{J} = \{f : X \to Y \mid f \text{ iniettiva}\}$

$$|\mathcal{J}| = \frac{n!}{(n-h)!}$$



Dim

Se $h > n$, non ci sono funzioni iniettive da X a Y

Se $h \le n$ $\quad X = \{x_1, \dots, x_h\}$ e $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$

$f(x_1) = n$ scelte

$f(x_2) = n-1$ scelte

$\vdots$

$f(x_h) = \underbrace{n-(h-1)}_{n-h+1}$ scelte

$$n(n-1)\cdots\underbrace{(n-h+1)}\overset{(*)}{=} \frac{n!}{(n-h)!}$$

$\square$

$$(*) \qquad n! = n(n-1)\cdot(n-2)\cdots\overbrace{(n-(h-1))}^{n-h+1}(n-h)(n-(h+1))\cdots 1$$

$$n(n-1)\cdots n-(h-1) = \frac{n!}{(n-h)!}$$

Es

$n = 7 \qquad n! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

$h = 3$

$n-(h-1) = 7-(3-1) = 7-2 = 5$

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} \qquad 4 = n-h$$

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

$N = \{0, \dots, 9\}$, $|N| = 10$

$$\underset{10}{\underset{\uparrow}{\_}} \quad \underset{10}{\underset{\uparrow}{\_}} \quad \underset{10}{\underset{\uparrow}{\_}} \quad \underset{10}{\underset{\uparrow}{\_}} \quad \underset{10}{\underset{\uparrow}{\_}} \quad \underset{10}{\underset{\uparrow}{\_}} \qquad h \text{ posti}$$

n oggetti su h posti con ripetizione $\rightarrow n^h$