Architettura degli Elaboratori

Esercitazione

Barbara Masucci
UNIVERSITA DEGLI STUDI DI SALERNO
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
DIPARTIMENTO DI ECCELLENZA

Su cosa ci esercitiamo oggi?

- Espressioni in forma canonica POS e reti OR-to-AND

- Altri operatori booleani
  - NAND
  - NOR

Espressioni POS

- Un'espressione booleana è in forma normale POS (Product Of Sums) quando è l'AND di OR di letterali

$$(\overline{x_2} + \overline{x_3})(x_1 + \overline{x_3})$$

- Maxtermine: somma di letterali in cui compare ogni variabile o vera o negata
- Una espressione normale POS è in forma canonica POS se i suoi termini sono tutti maxtermini

$$(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})$$

Dalla tavola di verità all'espressione POS

- Determiniamo le occorrenze di 0 nella tavola di verità di f e facciamo il prodotto dei maxtermini corrispondenti
- Come determinare i maxtermini corrispondenti?

x_3	x_2	x_1	Maxtermini
0	0	0	$x_3+x_2+x_1$
0	0	1	$x_3+x_2+\overline{x_1}$
0	1	0	$x_3+\overline{x_2}+x_1$
0	1	1	$x_3+\overline{x_2}+\overline{x_1}$
1	0	0	$\overline{x_3}+x_2+x_1$
1	0	1	$\overline{x_3}+x_2+\overline{x_1}$
1	1	0	$\overline{x_3}+\overline{x_2}+x_1$
1	1	1	$\overline{x_3}+\overline{x_2}+\overline{x_1}$

Nota: la combinazione di input 000 corrisponde al maxtermine

$$x_3+x_2+x_1$$

Nota: la combinazione di input 111 corrisponde al maxtermine

$$\overline{x_3}+\overline{x_2}+\overline{x_1}$$

Esempio

Determiniamo le occorrenze di 0 nella tavola di verità di f e facciamo il prodotto dei maxtermini corrispondenti

x_3	x_2	x_1	f	
0	0	0	0	$x_3+x_2+x_1$
0	0	1	0	$x_3+x_2+\overline{x_1}$
0	1	0	0	$x_3+\overline{x_2}+x_1$
0	1	1	1	
1	0	0	0	$\overline{x_3}+x_2+x_1$
1	0	1	1	
1	1	0	0	$\overline{x_3}+\overline{x_2}+x_1$
1	1	1	0	$\overline{x_3}+\overline{x_2}+\overline{x_1}$

$f_{POS}=(x_3+x_2+x_1)\,(x_3+x_2+\overline{x_1})\,(x_3+\overline{x_2}+x_1)(\overline{x_3}+x_2+x_1)\,(\overline{x_3}+\overline{x_2}+x_1)\,(\overline{x_3}+\overline{x_2}+\overline{x_1})$

Dall'espressione POS a una rete a due livelli

- Nel primo livello varie porte OR
  - Tante, quanti sono i maxtermini
- Nel secondo livello, solo una porta AND

Esercizio 1

- Esprimere la funzione XOR in forma canonica POS

- Inoltre, disegnare il circuito OR-to-AND che realizza la funzione XOR

Esercizio 1: Soluzione

- Esprimere la funzione XOR in forma canonica POS

x	y	$x \oplus y$	
0	0	0	$x + y$
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	$\overline{x} + \overline{y}$

Tavola di verità

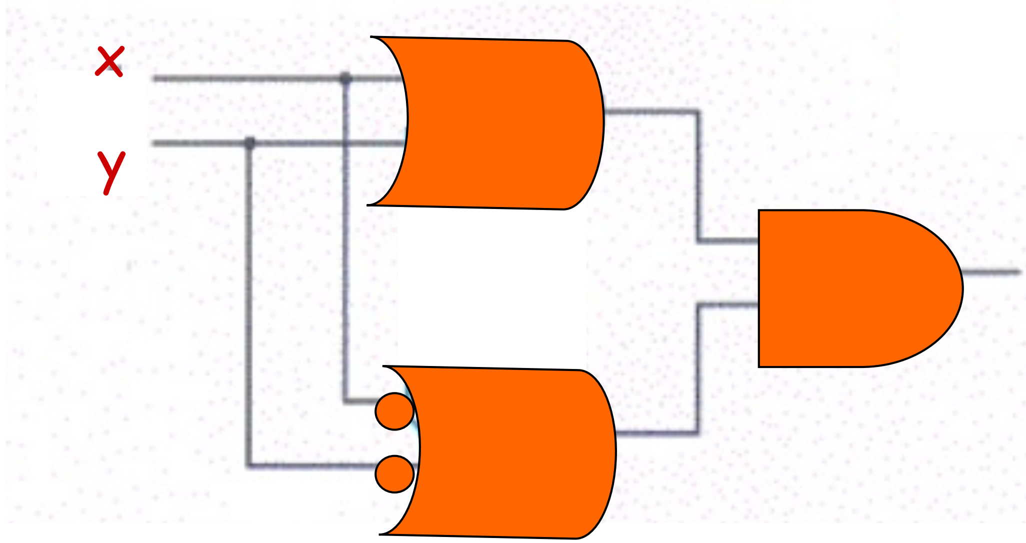
Espressione canonica POS

$$x \oplus y_{POS} = (x + y) \cdot (\overline{x} + \overline{y})$$

Esercizio 1: Soluzione

- Il circuito OR-to-AND che realizza la funzione XOR è

$$x \oplus y_{POS} = (x + y) \cdot (\overline{x} + \overline{y})$$



Esercizio 1: Soluzione

- Metodo alternativo per calcolare la forma canonica POS per funzione XOR
  - Calcolare la forma canonica SOP per la funzione XOR negata (coincidenza) $\overline{x \oplus y}$
  - Negare il risultato ottenuto, applicando le leggi di De Morgan

Esercizio 1: Soluzione

- Ricaviamo la forma canonica SOP per la funzione XOR negata, cioè la coincidenza:

$$\overline{x \oplus y}$$

x	y	$\overline{x \oplus y}$	
0	0	1	$\overline{x} \cdot \overline{y}$
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	$x \cdot y$

Tavola di verità

Espressione canonica SOP

$$\overline{x \oplus y}_{SOP} = \overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot y$$

Esercizio 1: Soluzione

Da cui si ottiene

$$XOR_{POS} = \overline{\overline{XOR_{SOP}}} = \overline{\overline{x}\cdot\overline{y} + x\cdot y}$$

$$= (\overline{\overline{x}\cdot\overline{y}})\cdot(\overline{x\cdot y})$$

$$= (\overline{\overline{x}} + \overline{\overline{y}})\cdot(\overline{x} + \overline{y})$$

$$= (x + y)\cdot(\overline{x} + \overline{y})$$

x	y	$x \oplus y$	
0	0	0	$x + y$
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	$\overline{x} + \overline{y}$

Espressione canonica POS per XOR:
prodotto dei maxtermini in corrispondenza
dei quali XOR assume valore 0

Esercizio 2

- Esprimere la funzione NAND in forma canonica POS

Esercizio 2: Soluzione

- Esprimere la funzione NAND in forma canonica POS

x	y	$\overline{x \cdot y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\overline{x} + \overline{y}$

Tavola di verità

Espressione canonica POS

$$\overline{x \cdot y}_{POS} = \overline{x} + \overline{y}$$

Esercizio 2: Soluzione

- Metodo alternativo per calcolare la forma canonica POS per funzione NAND
  - Calcolare la forma canonica SOP per la funzione NAND negata (AND)
  - Negare il risultato ottenuto, applicando le leggi di De Morgan

Esercizio 2: Soluzione

- Ricaviamo la forma canonica SOP per la funzione NAND negata, cioè l'AND

$x \cdot y$

x	y	x y	
0	0	0	
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	$x \cdot y$

Tavola di verità

Espressione canonica SOP

$AND(x,y)_{SOP} = x \cdot y$

Esercizio 2: Soluzione

Da cui si ottiene

$$NAND_{POS} = \overline{AND_{SOP}} = \overline{x \cdot y}$$

$$= \quad \overline{x} + \overline{y}$$

Espressione canonica POS per NAND:
prodotto dei maxtermini in corrispondenza dei quali NAND assume valore 0

x	y	$\overline{xy}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\overline{x} + \overline{y}$

Esercizio 3
(15/10/2019)

Determinare l'espressione canonica POS per la funzione F definita dalla seguente tavola di verità

x_2	x_1	F	
0	0	0	$x_2 + x_1$
0	1	1	
1	0	0	$\overline{x}_2 + x_1$
1	1	1	

$$F_{POS} = (x_2 + x_1) \cdot (\overline{x}_2 + x_1)$$

Esercizio 3
(15/10/2019)

In alternativa, determiniamo la tavola di verità per la funzione $\overline{F}$

x_2	x_1	$\overline{F}$	
0	0	1	$\overline{x_2}\cdot\overline{x_1}$
0	1	0	
1	0	1	$x_2\cdot\overline{x_1}$
1	1	0	

Poi determiniamo la forma canonica SOP per $\overline{F}$

$$\overline{F}_{SOP} = \overline{x_2}\cdot\overline{x_1} + x_2\cdot\overline{x_1}$$

Esercizio 3
(15/10/2019)

Da cui si ottiene

$$F_{POS} = \overline{\overline{F}_{SOP}} = \overline{\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1 + x_2 \cdot \overline{x}_1}$$

$$= (\overline{\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1}) \cdot (\overline{x_2 \cdot \overline{x}_1})$$

$$= (\overline{\overline{x}}_2 + \overline{\overline{x}}_1) \cdot (\overline{x}_2 + \overline{\overline{x}}_1)$$

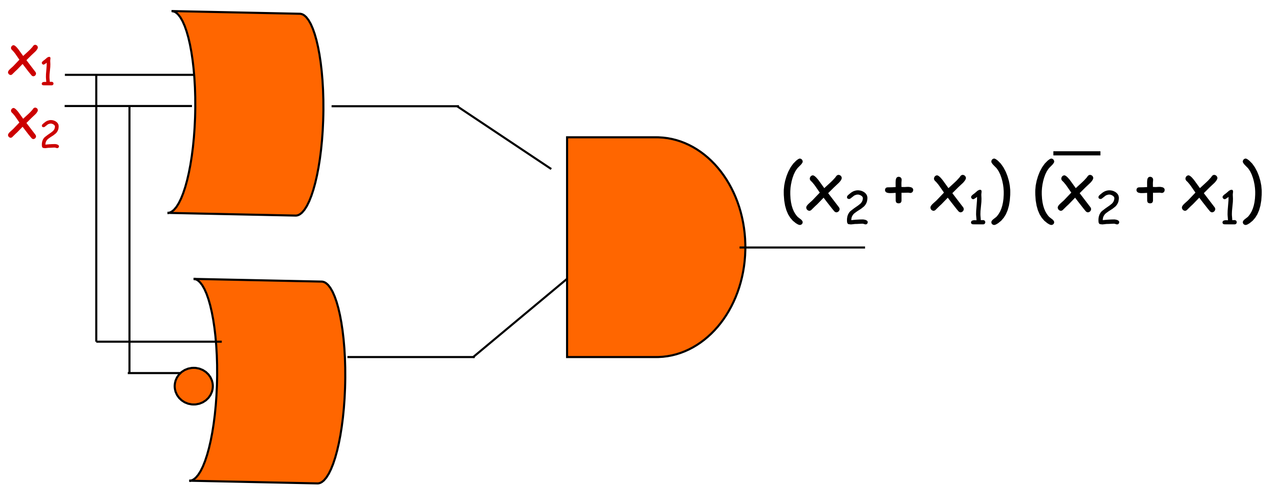
$$= (x_2 + x_1) \cdot (\overline{x}_2 + x_1)$$

x_2	x_1	F	
0	0	0	$x_2 + x_1$
0	1	1	
1	0	0	$\overline{x}_2 + x_1$
1	1	1	

Espressione canonica POS:
prodotto dei maxtermini in corrispondenza
dei quali F assume valore 0

Esercizio 3
(15/10/2019)

Il circuito OR-to-AND che realizza la funzione è



Operatore NAND

- Mostriamo che NOT, AND, OR possono essere costruiti usando solo NAND

- Ciò equivale a dire che NAND è un operatore logicamente completo

Operatore NAND

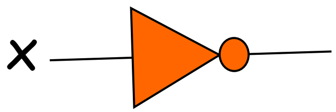
- Come calcolare NOT(x)?
  - $NOT(x) = \overline{x} = \overline{x \cdot x} = NAND(x,x)$
- Come calcolare AND(x,y)?
  - $AND(x,y) = x \cdot y = \overline{\overline{x \cdot y}} = \overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{x \cdot y}} =$

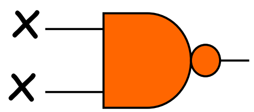
    $= NAND(NAND(x,y), NAND(x,y))$
- Come calcolare OR(x,y)?
  - $OR(x,y) = x+y = \overline{\overline{x+y}} = \overline{\overline{x \cdot x + y \cdot y}} = \overline{\overline{x \cdot x}} \cdot \overline{\overline{y \cdot y}}$

    $=NAND(NAND(x,x), NAND(y,y))$

Operatore NAND

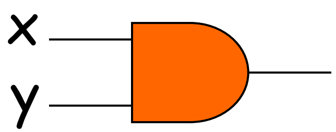
- Sostituzione di una porta NOT con una porta NAND
  - NOT(x) = NAND(x,x)

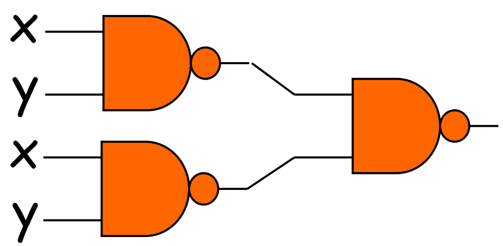




Operatore NAND

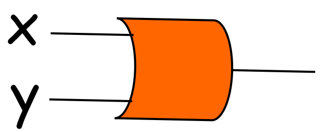
- Sostituzione di una porta AND con tre porte NAND
  - AND(x,y) = NAND(NAND(x,y), NAND(x,y))

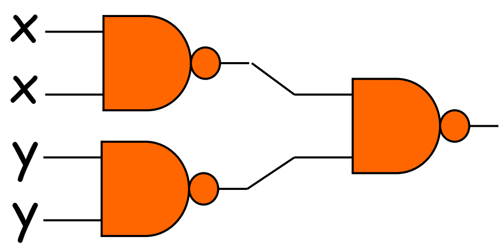




Operatore NAND

- Sostituzione di una porta OR con tre porte NAND
  - OR(x,y) = NAND(NAND(x,x), NAND(y,y))





Reti ALL NAND

Una conseguenza del fatto che NAND è un operatore logicamente completo:

ogni espressione SOP può essere realizzata da una rete che ha solo porte NAND

Esercizio 4

- Mostrare che l'operatore NOR(x,y) = $\overline{x+y}$ è logicamente completo
  - Suggerimento: Mostrare che NOT, AND, OR possono essere costruiti usando solo NOR

Esercizio 4: Soluzione

- Come calcolare NOT(x)?
  - $NOT(x) = \overline{x} = \overline{x+x} = NOR(x,x)$

- Come calcolare AND(x,y)?
  - $AND(x,y) = x \cdot y = (x+x) \cdot (y+y) = \overline{\overline{(x+x) \cdot (y+y)}} = \overline{\overline{(x+x)} + \overline{(y+y)}}$

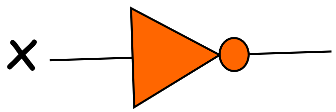
    $= NOR(NOR(x,x), NOR(y,y))$

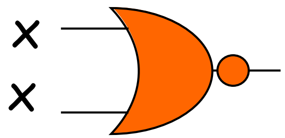
- Come calcolare OR(x,y)?
  - $OR(x,y) = x+y = \overline{\overline{x+y}} = \overline{(x+y) \cdot (x+y)} = \overline{(x+y) + (x+y)}$

    $=NOR(NOR(x,y), NOR(x,y))$

Esercizio 4: Soluzione

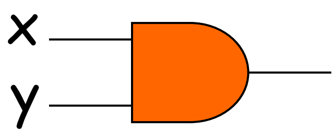
- Sostituzione di una porta NOT con una porta NOR
  - NOT(x) = NOR(x,x)

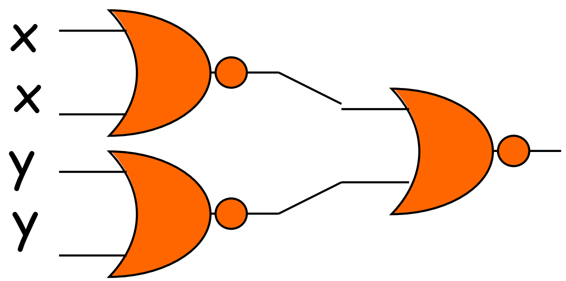




Esercizio 4: Soluzione

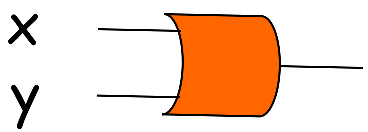
- Sostituzione di una porta AND con tre porte NOR
  - AND(x,y) = NOR(NOR(x,x), NOR(y,y))

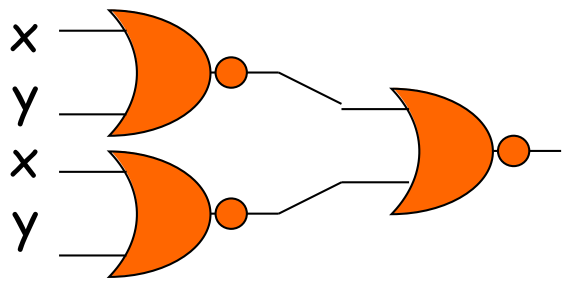




Esercizio 4: Soluzione

- Sostituzione di una porta OR con tre porte NOR
  - OR(x,y) = NOR(NOR(x,y), NOR(y,y))





Reti ALL NOR

Una conseguenza del fatto che NOR è un operatore logicamente completo:

ogni espressione SOP può essere realizzata da una rete che ha solo porte NOR

Esercizio 5

- Gli operatori NAND e NOR sono
  - Commutativi?
  - Associativi?

Esercizio 5: Soluzione

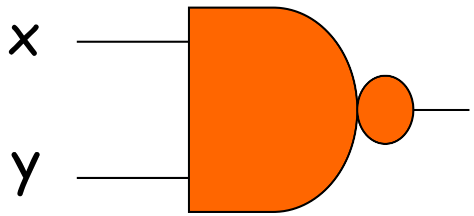
- Vediamo se NAND è commutativo, cioè se

  NAND(x,y)=NAND(y,x)

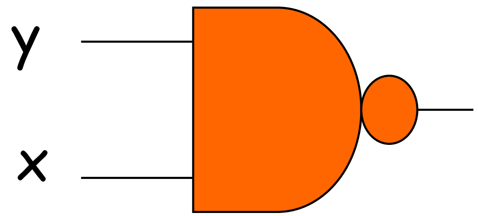
- Dobbiamo verificare se $\overline{x \cdot y} = \overline{y \cdot x}$
  - Applicando la legge di De Morgan si ha

    $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x} = \overline{y \cdot x}$

    quindi NAND è commutativo



equivalente a



Esercizio 5: Soluzione

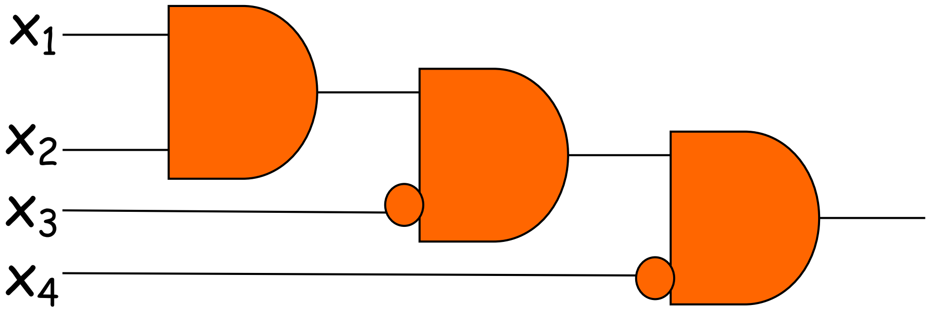
- Vediamo se NAND è associativo, cioè se
  NAND(x,NAND(y,z))=NAND(NAND(x,y),z)
- Dobbiamo verificare se $\overline{x \cdot \overline{(y \cdot z)}} = \overline{\overline{(x \cdot y)} \cdot z}$

x	y	z	$\overline{x \cdot \overline{(y \cdot z)}}$	$\overline{\overline{(x \cdot y)} \cdot z}$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Le tavole di verità sono diverse!
NAND non è associativo

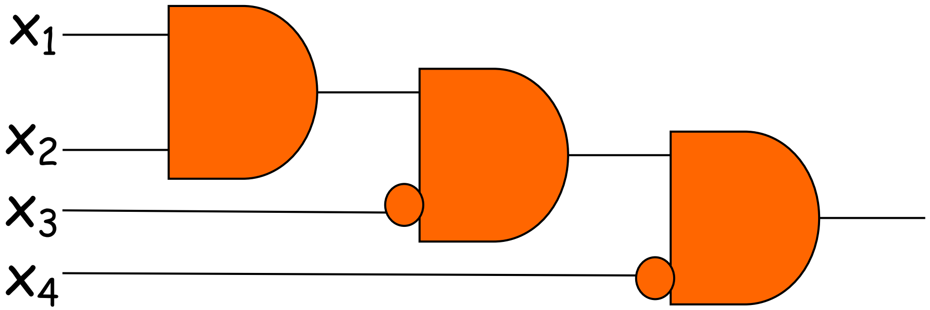
Esercizio 6

Data la rete seguente, trovare la rete tutta porte NAND equivalente



Esercizio 6: Soluzione

Data la rete seguente, trovare la rete tutta porte NAND equivalente

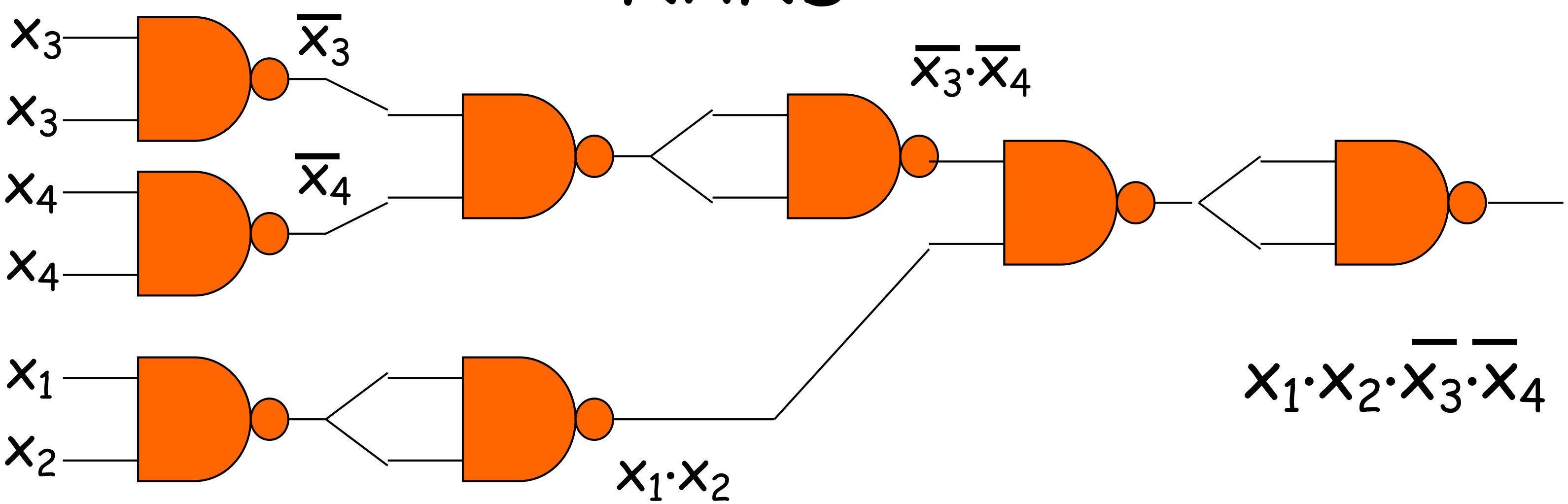


L'output del circuito è

$x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$

Esercizio 6: Soluzione

Sostituiamo le porte AND e NOT con porte NAND

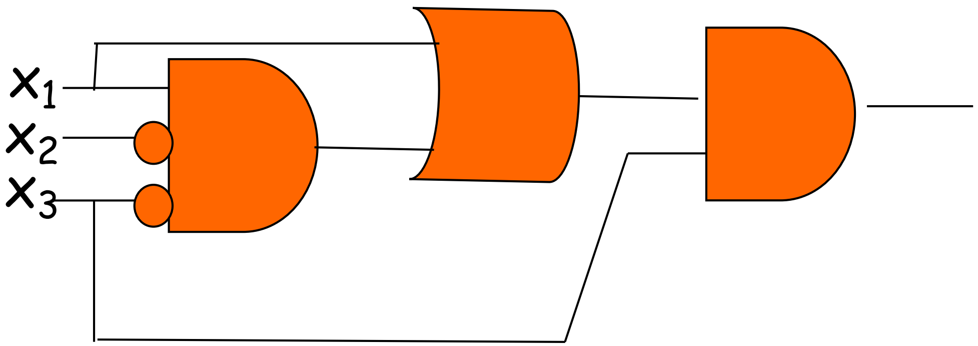


L'output del circuito è

$x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$

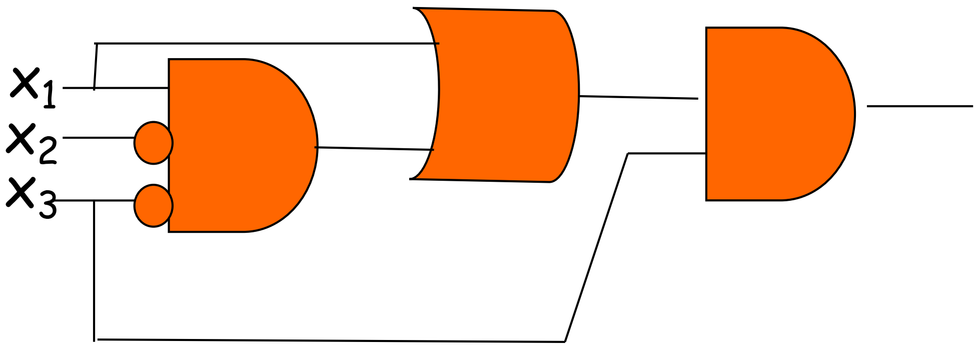
Esercizio 7

Data la rete seguente, trovare la rete tutta porte NOR equivalente



Esercizio 7: Soluzione

Data la rete seguente, trovare la rete tutta porte NOR equivalente



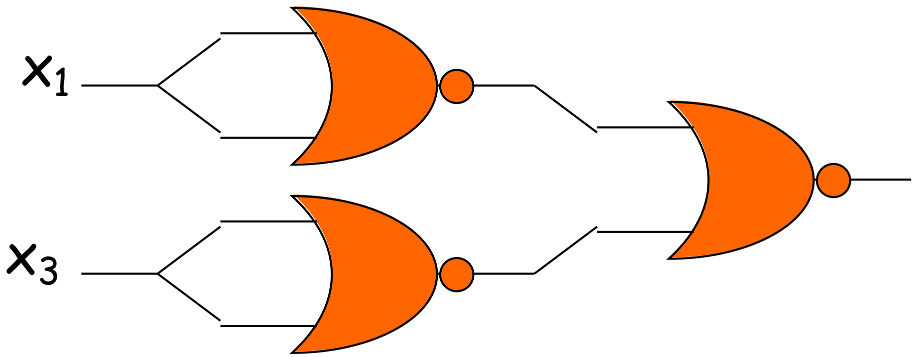
L'output del circuito è

$$(x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + x_1) \cdot x_3 = x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3$$

$$= x_1 \cdot x_3$$

Esercizio 7: Soluzione

Sostituiamo le porte AND e NOT con porte NOR



L'output del circuito è

$$(x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + x_1) \cdot x_3 = x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3$$
$$= x_1 \cdot x_3$$