$(F, +, \cdot)$ CAMPO

14/02/22

1

1. + ASSOCIATIVA
2. + COMMUTATIVA
3. $\exists\, 0 \in F : \forall a \in F \quad a + 0 = a$ → SIMMETRICO
4. $\forall a \in F \ \exists -a \in F : (-a) + a = 0$

$(F, +)$ E' GRUPPO ABELIANO

5. $\cdot$ associativa
6. $\cdot$ commutativa
7. $\exists\, 1 \in F ; \forall a \in F \quad a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
8. $\forall a \neq 0 \in F \setminus \{0\} \quad \exists\, a^{-1} \in F ; \quad a^{-1} \cdot a = 1 = a^{-1} \cdot a$

$(F \setminus \{0\}, \cdot)$ GRUPPO ABELIANO

9. $\forall a, b, c \in F$

$$a(b+c) = ab + ac$$

- $\cdot$ E' DISTRIBUTIVA RISPETTO +

SIA F UN CAMPO E SIA $S \neq \emptyset$ UN INSIEME

S E' UNO SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO F $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \underline{u}, \underline{v} \in S$ E' DEFINITO $\underline{u} + \underline{v} \in S$

(GLI ELEMENTI DI S SONO VETTORI)

$\forall \alpha \in F, \forall \underline{u} \in S$ E' DEFINITO $\alpha \underline{u} \in S$

VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETA':

- $(S, +)$ E' UN GRUPPO ABELIANO:
  LA SOMMA DI VETTORI
  - $\exists\, \underline{0}$ RISPETTO + = VETTORE NULLO
  - OGNI VETTORE POSSIEDE OPPOSTO
    $\forall \underline{v} \ \exists \ -\underline{v}$ (OPPOSTO)

- $\forall \alpha, \beta \in F, \forall \underline{u} \in S$
  $(\alpha + \beta)\underline{u} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{u}$

[QUINDI SE S E' GR. ABELIANO E VALGONO QUESTE 4 PROPRIETA' PARLIAMO DI SPAZIO VETTORIALE]

- $\forall \alpha \in F, \forall \underline{u}, \underline{v} \in S$
  $\alpha(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha \underline{u} + \alpha \underline{v}$

ELEMENTI DI S → VETTORI
ELEMENTI DI F → SCALARI

- $\forall \alpha, \beta \in F, \forall \underline{u} \in S$
  $\alpha\beta(\underline{u}) = \alpha(\beta \underline{u})$

- $1 \in F, \forall \underline{u} \in S$
  $1 \cdot \underline{u} = \underline{u}$

ESEMPIO

CAMPO $\mathbb{R}$, NUMERI REALI

S = COPPIE DEI NUMERI REALI

$S = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

QUESTO INSIEME LO VOGLIO STRUTTURARE COME SPAZIO VETTORIALE SUI REALI:

- DEFINISCO UNA SOMMA DI VETTORI (UNA SOMMA DI COPPIE)
- " IL PRODOTTO DI UNO SCALARE x UNA COPPIA

$\forall (x,y), (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) + (a,b) = (x+a, y+b)$ LA PRIMA COORDINATA

$\forall \alpha, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha(x,y) = (\alpha \cdot x, \alpha y)$ LA SECONDA COORDINATA

SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}^2, +)$ E' GRUPPO ABELIANO

- $+$ associativa: $\forall (x,y), (a,b), (h,k) \in \mathbb{R}^2$

$((x,y) + (a,b)) + (h,k) = ((x+a, y+b) + (h,k)) = (x+a+h, y+b+k) =$

$\cancel{(x,y) + ((a,b) + (h,k)) = (x,y) + (a+h, \ldots)}$

$((x+a)+h, (y+b)+k) = (x+(a+h), y+(b+k)) = ((x,y) + (a+h, b+k))$

$(x,y) + ((a+h, b+k))$

- $+$ COMMUTATIVA:

$\forall (x,y), (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y) + (a,b) = (x+a, y+b) = (a+x, b+y) = (a,b) + (x,y)$

$\exists \ \underline{0} \in \mathbb{R}^2 : \underline{0} + \underline{u} = \underline{u} \quad \forall \underline{u} \in \mathbb{R}^2$

$(0,0) + (x,y) = (0+x, 0+y) = (x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \exists \ (-x,-y) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y) + (-x,-y) = ((x-x), (y-y)) = (0,0) = \underline{0}$

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \underline{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(\alpha+\beta) \cdot u = (\alpha+\beta)(x,y) = ((\alpha+\beta)x, (\alpha+\beta)y) =$

$((\alpha x + \beta x), (\alpha y + \beta y)) = (\alpha x, \alpha y) + (\beta x, \beta y) = \alpha(x,y) + \beta(x,y)$

$= \alpha u + \beta u$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2 \quad \underline{u} = (x,y) \quad v = (a,b)$

$\alpha(\underline{u}+\underline{v}) = \alpha((x,y)+(a,b)) = \alpha((x+a),(y+b)) = \alpha(x+a), \alpha(y+b)$

$(\alpha x + \alpha a, \alpha y + \alpha b) = (\alpha x, \alpha y) + (\alpha a, \alpha b) = \alpha(x,y) + \alpha(a,b)$

$\alpha \underline{u} + \alpha \underline{v}$

$\forall \alpha, \beta \quad \forall \underline{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha(\beta \underline{u})$

$(\alpha\beta)\underline{u} = (\alpha\beta)((x,y)) = (\alpha \cdot \beta (x,y)) = ((\alpha\beta)x, (\alpha\beta)y) = (\alpha(\beta x), \alpha(\beta y)) =$

$\alpha(\beta x, \beta y) = \alpha(\beta(x,y)) = \alpha(\beta(\underline{u}))$

$\forall 1 \in \mathbb{R}, \forall \underline{u} = (x,y) \in S \qquad \cancel{w} = 1 \cdot \underline{u} = \underline{u}$

$1 \cdot \underline{u} = 1 \cdot (x,y) = (1x, 1y) = (x,y) = \underline{u}$

F campo $\quad F^2 = \{(x,y) : x,y \in F\} \quad F^2$ SPAZIO VETTORIALE SU F

$F^n \ \forall n \in \mathbb{N}$ spazio vettoriale NUMERICO

$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} \quad (\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ E' UN CAMPO $\quad \mathbb{Z}_3^2 : \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2})$
$(\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{2})$
$(\bar{2},\bar{0}), (\bar{2},\bar{1}), (\bar{2},\bar{2})$

F CAMPO $\quad F^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2 \dots x_n \in F\}$ → LO VEDIAMO COME UNA MATRICE CON 1 RIGA E n COLONNE

$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \Rightarrow$ COME LA SOMMA DI MATRICI

$(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

$(M_{m,n}(\mathbb{R}), +)$ GRUPPO ABELIANO

$m=1 \quad M_{1,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$

$\forall \alpha \in F \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^n \quad \alpha(x_1, x_2, \dots x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

$M_{m,n}(F) = \{A \mid A$ E' UNA MATRICE $m \times n$ SU $F\}$

$(M_{m,n}(F), +)$ GRUPPO ABELIANO

$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow$ DA QUESTO CAPIAMO CHE $(M_{m,n}(\mathbb{R}), +, \underset{\downarrow}{\cdot})$ SPAZIO VETTORIALE

PRODOTTO DI UNO SCALARE X

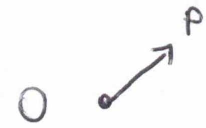
SPAZI VETTORIALI IMPORTANTI

$\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

↳ sono legati alla geometria dello spazio

CONSIDERIAMO UN PIANO π E FISSIAMO UN PUNTO $O \in \pi$ (LETTERA)

$V_O^2 = \{\vec{OP} \mid P \in \pi\}$ INSIEME DEI VETTORI DEL PIANO APPLICATI IN O

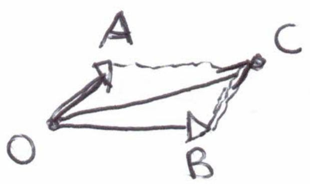


↓

L'INSIEME DI TUTTI I SEGMENTI ORIENTATI CHE HANNO COME I ESTREMO IL PUNTO O

V_O^2 DIVENTA UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

+ :



CONSIDERO LA RETTA ~~XBA~~

XB // AD $\vec{OA}$

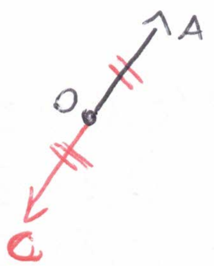
LA RETTA XA // AD $\vec{OB}$

C = II ESTREMO DELLA SOMMA

$\vec{OA} + \vec{OB} := \vec{OC}$

$(V_O^2, +)$ GRUPPO ABELIANO

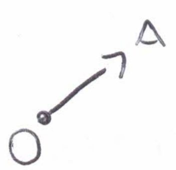
VETTORE NULLO $\underline{0} = \vec{OO}$ → VETTORE DOVE IL II ESTREMO È APPLICATO IN O



$\vec{OC} = -\vec{OA}$
- STESSO MODULO
- STESSA RETTA SU CUI POGGIA (DIREZIONE)
- VERSO OPPOSTO

LEGGE ESTERNA (DEFINIRE COSA VUOL DIRE MOLTIPLICARE UN NUMERO REALE x UN VETTORE)

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{OA} \in V_O^2$



$\alpha \cdot \vec{OA} = \vec{OD}$

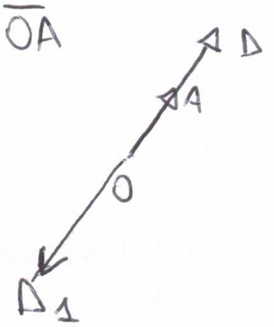
DOVE SI HA:
- STESSA DIREZIONE DI OA
- MODULO: $\frac{|OD|}{|OA|} = |\alpha|$

LUNGHEZZA

$\Rightarrow |OD| = |OA| \cdot |\alpha|$

VALORE ASSOLUTO

$2 \cdot \overline{OA}$ $\qquad -2 \cdot \vec{OA} = \vec{OD_1}$

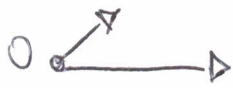


- VERSO:
  - = SE $\alpha > 0$
  - OPP. SE $\alpha < 0$

$(\mathcal{V}_O^2, +, \cdot)$ SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R}^2$

POSSO FARLO NELLO SPAZIO
FISSO UN PUNTO O NELLO SPAZIO $O \in \mathcal{E}^3$

$$\mathcal{V}_O^3 = \{\vec{OP} \mid P \in \mathcal{E}^3\}$$



$(\mathcal{V}_O^3, +, \cdot)$ SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R}^3$

PER OGNI DIMENSIONE C'E' UN UNICO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$ DI QUELLA DIMENSIONE

S = UNO SPAZIO VETTORIALE SU CAMPO F E CONSIDERIAMO ~~UNA~~ $V \subseteq S$

V SOTTOSPAZIO DI S $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
1. $\underline{0} \in V$
2. SE $\underline{u}$ e $\underline{v} \in V$, ALLORA $\underline{u} + \underline{v} \in V$
3. $\forall \alpha \in F$ e $\forall \underline{v} \in V$ $\quad \alpha \underline{v} \in V$

~~$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$~~

SE PRENDO L'INSIEME DELLE COPPIE UGUALI (CON LE COORDINATE UGUALI), CIOE' LA DIAGONALE DI $\mathbb{R}^2$, POSSO CHIEDERMI SE E' UN SOTTOSPAZIO OPPURE NO

- VETTORE NULLO $(0, 0)$ = E' VERO
- SE PRENDO 2 COPPIE CON LE COORDINATE UGUALI E LE SOMMO OTTENGO UNA COPPIA CON LE COORDINATE UGUALI, QUINDI $\in V$
- SE MOLTIPLICO UN QUALUNQUE NUMERO REALE E UNA COPPIA CON LE 2 COORDINATE UGUALI IL PRODOTTO $\alpha \cdot (x, x)$ ~~...~~ E' ANCORA UNA COPPIA CON LE 2 COORDINATE UGUALI $\in V$

QUINDI V E' UN SOTTOSPAZIO

TUTTE LE COPPIE CHE HANNO $x = 0$ (I COORDINATA) E' UN SOTTOSPAZIO

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

$V = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ E' SOTTOSPAZIO

$T = \{(x,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ NON E' SOTTOSPAZIO $\underline{0}=(0,0) \notin T$

$W = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ E' UN SOTTOSPAZIO

IN OGNI SPAZIO VETTORIALE CI SONO SEMPRE ALMENO 2 SOTTOSPAZI:

- SOTTOSPAZIO NULLO $\{\underline{0}\}$ → SINGLETON DEL VETTORE NULLO
- TUTTO LO SPAZIO VETTORIALE S

VENGONO CHIAMATI SOTTOSPAZI BANALI

PER VEDERE SE UN INSIEME E' UN SOTTOSPAZIO SI UTILIZZA IL CRITERIO DI RICONOSCIMENTO DEI SOTTOSPAZI

$V \subseteq S$ SPAZIO VETTORIALE $\Rightarrow$ V E' SOTTOSPAZIO $\Leftrightarrow$

1. $\underline{0} \in V$ e 2. $\forall \alpha, \beta \in F$ CAMPO $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$

$\alpha \underline{u} + \beta \underline{v} \in V$

COMBINAZIONE LINEARE

PER VEDERE CHE UN INSIEME E' SOTTOSPAZIO POSSIAMO QUINDI

SIA USARE LA def.

SIA USARE LA COMBINAZIONE LINEARE

8.2.5 CONSIDERIAMO LO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}^2$ E STABILIAMO SE I SEGUENTI SOTTOINSIEMI SONO SOTTOSPAZI

$W_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x = y\}$ $W_3 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x+y=1\}$

$W_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x = 2y\}$ $W_4 = \{(x,y) \in \mathbb{Q} \mid x = 0\}$

W_3 NO $(0,0) \in W_3$ $0+0 \neq 1$

W_1, W_4 SI

$W_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x = 2y\} = \{(2t,t) \in \mathbb{Q} \mid t \in \mathbb{Q}\}$

$(0,0) \in W_2$? SI $(2 \cdot 0, 0) = (0,0) \in W_2$

$(2t, t)$

~~(2t, t) + 2b~~

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \ \forall (2t,t), (2k,k) \in W_2$

$\alpha (2t,t) + \beta (2k,k) =$

$(\alpha 2t, \alpha t) + (\beta 2k, \beta k) =$

$\underbrace{((\alpha 2t + \beta 2k), (\alpha t + \beta k))}_{\mathbb{Q}^2} = (2(\alpha t + \beta k), (\alpha t + \beta k)) \in W_2$

$V = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$

V E' UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{Q}^2$?

$(0,0) \in \mathbb{Q}_2 \qquad (x,y) \in V \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2$

$\left.\begin{matrix}(1,1)\\(1,-1)\end{matrix}\right\} \in V \qquad (1,1) + (1,-1) = (2,0) \notin V$

V non E' SOTTOSPAZIO

8.2.6.

CONSIDERIAMO LO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$

$W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$

$W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 5y, y = 5x + 1\}$

$W_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$W_5 = \{(x,y,z) \mid x - 3z = 0\}$

~~(0,0,0) ... sono W1~~

$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad a^2 \geq 0 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0$

UN NUMERO REALE IL SUO QUADRATO E' SEMPRE NON NEGATIVO, QUINDI SEMPRE ≥ 0

NON PUO' SUCCEDERE CHE UNO DI QUEGLI ADDENDI SIA NON NULLO, PERCHE' ESSENDO CHE SONO TUTTI POSITIVI E LA LORO SOMMA DEVE PER FORZA DARE 0 ALLORA SONO TUTTI PARI A 0

$\forall e \in \mathbb{R} \quad e^2 \geq 0 \qquad x^2+y^2+z^2=0 \iff x^2=y^2=z^2 \iff x=y=z=0$ (8)

W_1 CONTIENE SOLO IL VETTORE NULLO

QUINDI E' UN SOTTOSPAZIO

$W_2 = \{ (x,y,z) \mid x = y = z \}$

$W_2 = \{ (x,x,x) \mid x \in \mathbb{R} \}$

$(0,0,0) \in W_2$ SI

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3 \quad (x,x,x), (y,y,y) \in W_2$

$\alpha(x,x,x) + \beta(y,y,y) = (\alpha x, \alpha x, \alpha x) + (\beta y, \beta y, \beta y)$

$(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) \Rightarrow \alpha x + \beta y = \alpha x + \beta y \pm \alpha x + \beta y$

$(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) \in W_2$

W_2 SOTTOSPAZIO

$W_3 = \{ (x,y,z) \mid x = 5y, y = 5x+1 \}$

$W_3 = \{ (5y, 25y+1, z) \mid y, z \in \mathbb{R} \}$

$W_3 = \{ (5x, y, z)$

~~PRESO (0,0,0)~~

~~$W_3 = \{ 0 = 5(0), 0 = 0+1$~~

~~$W_3 = \{ (0, 0+1, 0)$~~

PRESO $(0,0,0) \Rightarrow (0, 0+1, 0) = (0,1,0)$

QUINDI $(0,0,0) \notin W_3$

W_3 NON E' SOTTOSPAZIO

$W_4 = \{ (x,y,z) \mid x^2 - y^2 = 1 \} =$

PRESO $(0,0,0) \qquad 0 - 0 \neq 1$

QUINDI $(0,0,0) \notin W_4$.

$W_5 = \{(x,y,z) \mid x-3z=0\} = \{(x,y,z) \mid x=3z\}$

PRESO $(0,0,0) \Rightarrow (3\cdot 0, 0, 0) = (0,0,0) \in W_5$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(x,y,z) = (3z, y, z)$

$(a,b,c) = (3c, y, c)$

$\alpha(3z, y, z) + \beta(3c, b, c) \in W_5$?

$(\alpha 3z, \alpha y, \alpha z) + (\beta 3c, \beta b, \beta c) =$

$(\alpha 3z + \beta 3c, \alpha y + \beta y, \alpha z + \beta c) =$

$(3(\alpha z + \beta c), \alpha y + \beta y, \alpha z + \beta c) \in W_5$

W_5 E' SOTTOSPAZIO

SIA S UNO SPAZIO VETTORIALE SU F CAMPO

$\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_n} \in S$ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$

SI CHIAMA
COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI $v_1, \dots, v_n$ SECONDO GLI SCALARI $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ IL VETTORE:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

ESEMPIO S.V. $\mathbb{Q}^3$ $\underline{u_1} = (\frac{1}{2}, -3, 5)$ $\underline{u_2} = (0, -7, 1)$

$\alpha = 2$ $\beta = -4$

$\alpha \underline{u_1} + \beta \underline{u_2} = 2(\frac{1}{2}, -3, 5) + (-4)(0, -7, 1)$

$(1, -6, 10) + (0, 28, -4) = (1, 22, 6)$

FISSATI n VETTORI DI UNO SPAZIO VETTORIALE: $u_1, \dots, u_n \in S$ POSSIAMO CONSIDERARE L'INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI COMBINAZIONI LINEARI DI QUESTI VETTORI

$$\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \mid \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F}_{\text{DAL VARIARE DEGLI}}\}$$

~~ENSGA~~

QUEST'INSIEME DI VETTORI E' SEMPRE UN SOTTOSPAZIO E SI CHIAMA

SOTTOSPAZIO GENERATO DA $u_1, \dots, u_n$

esempio

$\mathbb{R}^2$, $(-3,1)$, $(5,0) \in \mathbb{R}^2$

$<(-3,1), (5,0)> = \{ \alpha(-3, 1) + \beta(5,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

$\{(-3\alpha, \alpha) + (5\beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(-3\alpha + 5\beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

SOTTOSPAZIO GENERATO DI $\mathbb{R}^2$ DA QUEI DUE VETTORI $(-3,1)$ $(5,0)$

~~IL SOTTOSPAZIO GENE~~

$<(-3,1), (5,0)>$ E' TUTTO $\mathbb{R}^2$?

$<(-3,1), (5,0)> = \mathbb{R}^2 \iff$ OGNI COPPIA $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ E' UN ELEMENTO DI QUELL'INSIEME, E' COMBINAZIONE LINEARE DI $(-3,1)$, $(5,0)$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \in \{(-3\alpha + 5\beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$\iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x,y) = (-3\alpha + 5\beta, \alpha)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; \exists \; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x = -3\alpha + 5\beta \\ y = \alpha \end{cases}$

HO UN SOTTOSPAZIO SE QUESTO SISTEMA E' SEMPRE COMPATIBILE ← SISTEMA DI 2 EQ. NELL'INCOGNITA α e β

$$\begin{cases} -3\alpha + 5\beta = x \\ \alpha = y \end{cases}$$

→ LE INCOGNITE = α e β

TERMINI NOTI = x e y

COME VEDERE SE IL SISTEMA E' COMPATIBILE? CONTROLLARE SE E' UN SISTEMA DI CRAMER = SE det DI MATRICE INCOMPLETA $\neq 0$ ALLORA IL SISTEMA E' UN SISTEMA DI CRAMER E HA 1 SOLA SOLUZIONE

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = (-3 \cdot 0) - (5) = -5$

E' UN SISTEMA DI CRAMER

$<(-3,1), (5,0)> = \mathbb{R}^2$