Esercizio 1

Domanda teorica

Siano p,q proposizioni. Spiegare il significato dell'implicazione $p \to q$. Fornire le definizioni di inverso, opposto e contronominale di $p \to q$. Consideriamo ad esempio l'implicazione:

Se n é maggiore di 6 o n é dispari allora n é numero primo

Mostrare chi é il contronominale.

Esercizio 2

Utilizzo dei domini con i quantificatori

Si supponga che il dominio della funzione proposizionale $P(x, y, z)$ sia l'insieme $\{1, 2\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2\}$ e il dominio della funzione proposizionale $Q(x)$ sia l'insieme $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$. Scrivere ciascuna delle seguenti proposizioni usando solo disgiunzioni, congiunzioni e negazioni.

(1) $\exists x \exists y \exists z P(x, y, z)$

(2) $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z)$

(3) $\forall x((x > 0) \rightarrow Q(x))$

Esercizio 3

Traduzione linguaggio naturale usando la Logica predicativa

(1) Sia $A(x, y)$ il predicato "y è amico di x" ed $R(x, z, y)$ il predicato "x a Natale regala z a y", dove il dominio comune alle variabili x e y è l'insieme delle persone e il dominio della variabile z è l'insieme dei possibili regali.
Tradurre l'asserzione "A Natale si fanno regali agli amici" in espressione logica.

(2) Sia $P(x)$ il predicato "x è una pietra preziosa", $B(x)$ il predicato "x è bella" e si assuma come dominio l'insieme delle pietre.
Tradurre l'asserzione "Non tutte le pietre preziose sono belle" in espressione logica.

Esercizio 4

Legame tra predicati ed insiemi

Si considerino i predicati
$P(x)$: "$x < 10 \rightarrow x$ è multiplo di 3"
$Q(x)$: "$x < 5 \rightarrow x$ è pari"
sul dominio $\mathbb{N}$ degli interi non negativi. Siano $A = \{x \mid P(x)\}$ e $B = \{x \mid Q(x)\}$ i corrispondenti insiemi di verità. Elencare gli elementi dell'insieme $\overline{A \cup B}$.

Esercizio 5

Domanda teorica

Spiegare le differenze fondamentali tra Logica Proposizionale e Logica Predicativa.

Esercizio 6

Semplificazione asserzioni

Data l'asserzione

$$\neg[\forall x \forall y \exists z ((x = y) \rightarrow (x \leq z \leq y))],$$

scriverne una equivalente in cui non compaia la negazione.

Esercizio 7

Traduzione linguaggio parlato usando la Logica predicativa

Si considerino i predicati, aventi come dominio l'insieme di tutte le persone

- $D(x)$: "x è una donna"
- $A(x, y)$: "x ama y"
- $F(x, y)$: "y è figlio di x"

Tradurre le seguenti asserzioni in espressioni logiche.

(1) Ogni donna ama i suoi figli.

(2) Maria non ama tutti i figli di Francesco.

Esercizio 8

Legame tra predicati ed insiemi

Si considerino i predicati

$P(x)$: "$x > 8 \rightarrow x$ è multiplo di 4"

$Q(x)$: "$x > 7 \rightarrow x$ è pari"

sul dominio $\mathbb{N}$ degli interi non negativi.
Siano $A = \{x \mid P(x)\}$ e $B = \{x \mid Q(x)\}$ i corrispondenti insiemi di verità.
Elencare gli elementi dell'insieme $A \cup B$.

Esercizio 9

Domanda teorica

Spiegare il concetto di equivalenza tra proposizioni. Fornire qualche esempio. Dimostrare equivalenza tra implicazione e contronominale usando le proprietá.

Esercizio 10

Semplificazione asserzioni

(1) Data l'asserzione

$$\neg[\exists x \forall y (x \geq y + 3)],$$

scriverne una equivalente in cui non compaia la negazione.

(2) Data l'asserzione

$$\neg[\forall x \forall y \exists z (x^2 = y + z)],$$

scriverne una equivalente in cui non compaia la negazione.

Esercizio 11

Esercizio

Riscrivere le seguenti asserzioni in modo che la negazione appaia solo sui predicati

(1) $\neg[\exists x \forall y (P(x,y) \wedge Q(x,y))]$

(2) $\neg[\exists x \forall y (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,y))]$

Esercizio 12

Traduzione linguaggio naturale usando la Logica predicativa

Siano

- $S(x)$: "x è uno studente di Informatica"
- $M(x, y)$: "x ha visitato y"

dove x appartiene all'insieme di tutte le persone e y all'insieme di tutte le città italiane. Utilizzando i predicati $S(x)$ ed $M(x, y)$, tradurre le seguenti asserzioni in espressioni logiche.

(a) Qualche studente di Informatica ha visitato Milano.

(b) Ogni studente di Informatica ha visitato Milano.

(c) Non tutti gli studenti di Informatica hanno visitato Roma.

Esercizio 13

Insiemi

Siano A e B due insiemi. Dimostrare, usando le regole proposizionali, che:

$$A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$$

Esercizio 14

Equivalenze proposizionali

Dimostrare l'equivalenza tra le seguenti proposizioni, usando sia le tabelle di verità che le proprietà sui connettivi:

$$p \wedge q \to r$$

$$p \to (q \to r \wedge p)$$