Lezione 29-09

giovedì 29 settembre 2022 14:12

DEF - $f: S \to T$, $g: T \to V$ $\qquad g \circ f: S \to V$

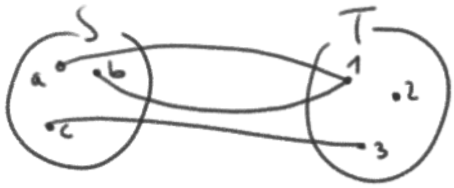
DEF - Data $f: S \to T$, definiamo **INVERSA** di f la funzione

$$f^{-1}: T \to S .$$

f^{-1} è una funzione $\Leftrightarrow$ f è biettiva

OSS - f^{-1} è la Relazione OPPOSTA di f

ESEMPIO $f: S \to T$



$f = \{(a,1), (b,1), (c,3)\} \subseteq S \times T$

$f^{op} = \{(1,a), (1,b), (3,c)\} \subseteq T \times S$ è Relazione ma non è funzione

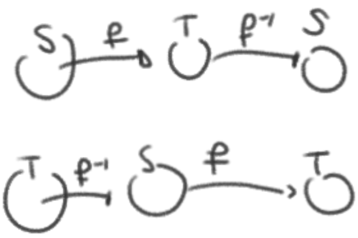
f non iniettiva $\Rightarrow$ 1 compare due volte nella prima componente

f non suriettiva $\Rightarrow$ 2 non compare nella prima componente

DEF - Data f funzione biettiva, f^{-1} è l'unica funzione tale che

$f: S \to T$ $\qquad \forall s \in S \quad (f^{-1} \circ f)(s) = s$

$f^{-1}: T \to S$ $\qquad \forall t \in T \quad (f \circ f^{-1})(t) = t$



RELAZIONI DI EQUIVALENZA

DEF - $R \subseteq S \times S$ è detta di equivalenza se R è

- Riflessiva $\forall x \in S$, xRx
- SIMMETRICA $\forall x,y \in S$ se $xRy \Rightarrow yRx$
- TRANSITIVA $\forall x,y,z \in S$ se $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$

DEF - Data $R \subseteq S \times S$ relazione di equivalenza, si chiama

DEF - Data $R \subseteq S \times S$ relazione di equivalenza, si chiama **CLASSE DI EQUIVALENZA** di $x \in S$ rispetto a R il sottoinsieme di S definito da:

$$[x]_R = \{ y \in S \mid xRy \} \subseteq S$$

L' **INSIEME QUOZIENTE** S/R è l'insieme della classe di equivalenza rispetto a R

$$S/R = \{ [x]_R \mid x \in S \} \subseteq \mathcal{P}(S)$$

DEF - Data $R \subseteq S \times S$ relazione di equivalenza,

La funzione $\pi : S \longrightarrow S/R$, $\pi(x) = [x]_R$ è detta **PROIEZIONE CANONICA** di S sul quoziente.

PROPROSIZIONE

Sia $R \subseteq S \times S$ r.e. Allora:

1) $x \in [x]_R \quad \forall x \in S$
2) $xRy \iff [x]_R = [y]_R$
3) $x \not R y \iff [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

DIM

1) Se $x \in S$, per definizione di R.E., si ha xRx. Allora per definizione di classe di equivalenza si ha $x \in [x]_R$ -

2) $(\Rightarrow)$ Per hp, xRy.

Sia $z \in [x]_R \overset{DEF}{\iff} xRz \overset{SIM}{\iff} zRx \overset{IPOTESI}{\iff} (zRx) \wedge (xRy) \overset{TRAN}{\iff} zRy$

$\overset{SIM}{\iff} yRz \iff z \in [y]_R$

$(\Leftarrow)$ Se $[x]_R = [y]_R$ allora xRy

Se $[x]_R = [y]_R \Rightarrow x \in [x]_R = [y]_R \Rightarrow x \in [y]_R \Rightarrow yRx$

$\overset{SIM}{\Rightarrow} xRy \quad \Pi$ $\qquad$ $\cancel{b \Rightarrow a}$

$\overset{SIM}{\Longrightarrow} xRy$ $\square$

$b \cancel{\Rightarrow} a$

3) $(\Rightarrow)$ Se $x \not R y \Rightarrow [x]_R \cap [y]_R = \phi$

$\boxed{\text{Se } [x]_R \cap [y]_R \neq \phi \Rightarrow xRy}$ CONTRONOMINALE

$a \Rightarrow b$ è la stessa cosa di $\neg b \Rightarrow \neg a$

Poiché $[x]_R \cap [y] \neq \phi \Rightarrow \exists z \in [x]_R \cap [y]_R \Rightarrow$ $z \in [x]_R \Rightarrow xRz$ e $z \in [y]_R \Rightarrow yRz$

$\overset{SIM}{\Longrightarrow} xRz \wedge zRy \overset{TRAN}{\Longrightarrow} xRy$ -

$(\Leftarrow)$ Sia per assurdo che $xRy \Rightarrow x \in [x]_R$ e $x \in [y]_R \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in [x]_R \cap [y]$ e questo contraddice l'ipotesi (che l'intersezione fosse vuota)

$\square$

OSS - Date $R_1, R_2 \subseteq S \times S$, si ha che

$$R_1 = R_2 \Leftrightarrow [x]_{R_1} = [x]_{R_2} \ \forall x \in S \Leftrightarrow S/_{R_1} = S/_{R_2}$$

DEF - Una PARTIZIONE di un insieme S è una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ tale che:

① $\forall F \in \mathcal{F}, F \neq \phi$

② $\forall F, G \in \mathcal{F}, \quad F \cap G = \phi$ (se $F \neq G$)

③ $\bigcup \mathcal{F} = S$

unione degli insiemi $F \in \mathcal{F}$

ESEMPIO : $A = \{a, b, c\}$

$\mathcal{F}_1 = \{ \overset{F_1}{\{a\}}, \overset{F_2}{\{b\}}, \overset{F_3}{\{c\}} \}$ ✓ $F_1 \cup F_2 \cup F_3 = A$ e $F_1 \cap F_2 = \phi$, $F_1 \cap F_3 = \phi$, $F_2 \cap F_3 = \phi$; $F_1 \neq \phi$, $F_2 \neq \phi$, $F_3 \neq \phi$

$\mathcal{F}_2 = \{ \{a, b\}, \phi, \{c\} \}$ ✗ c'è ϕ

$\mathcal{F}_2 = \{\{a,b\}, \phi, \{c\}\}$ × c'è ϕ

$\mathcal{F}_3 = \{\{a,b\}, \{c\}\}$ ✓

$\mathcal{F}_4 = \{A\}$ ✓

$\mathcal{F}_5 = \{\{a\}, \{c\}\}$ × $\{a\} \cup \{c\} \neq A$

$\boxed{\text{TEOREMA FONDAMENTALE SULLE RELAZIONI DI EQUIVALENZA}}$ (Sd)

Dato $S \neq \phi$, si ha:

① Se R è Relaz. di equivalenza su S, allora S/R è una partizione di S.

② Se $\mathcal{F}$ è una partizione di S, allora la relazione $R_{\mathcal{F}}$ definita da

$$x R_{\mathcal{F}} y \iff \exists F \in \mathcal{F} \text{ t.c. } x, y \in F$$

è una relazione di equivalenza.

Inoltre $R_{\mathcal{F}}$ è l'unica relazione di equivalenza tale che $\mathcal{F} = S/R_{\mathcal{F}}$.

ESEMPIO

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

Sia $\mathcal{F} = \{\underbrace{\{a,h\}}_{F_1}, \underbrace{\{b,c,g\}}_{F_2}, \underbrace{\{d\}}_{F_3}, \underbrace{\{e,f\}}_{F_4}\}$

$x R_{\mathcal{F}} y \iff \exists F \in \mathcal{F}$ t.c. $x, y \in F$

$[a]_{R_{\mathcal{F}}} = \{x \in A \mid a R_{\mathcal{F}} x\} = \{a, h\} = F_1$

$[h]_{R_{\mathcal{F}}} = \{x \in A \mid h R_{\mathcal{F}} x\} = F_1$

$[b]_{R_{\mathcal{F}}} = \{b, c, g\} = [c]_{R_{\mathcal{F}}} = [g]_{R_{\mathcal{F}}} = F_2$

$[d]_{R_{\mathcal{F}}} = \{d\} = F_3$

$[e]_{R_{\mathcal{F}}} = \{e, f\} = [f]_{R_{\mathcal{F}}} = F_4$

ESEMPIO

ESEMPIO

$A \subseteq \mathbb{N}_0$ definito da $A = \{2^n 3^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$. Sia $R \subseteq A \times A$ data da

$$2^n 3^m \, R \, 2^t 3^v \iff n+m = t+v$$

Dimostrare che R è di equivalenza.

1) RIFLESSIVA ?

$$2^n 3^m \, R \, 2^n 3^m \iff n+m = n+m \quad \text{VERO!}$$

2) Simmetria ?

Se $2^n 3^m \, R \, 2^t 3^v$ è vero che $2^t 3^v \, R \, 2^n 3^m$?

$$2^n 3^m \, R \, 2^t 3^v \iff n+m = t+v \iff t+v = n+m \iff 2^t 3^v \, R \, 2^n 3^m \quad \text{VERO!}$$

3) TRANSITIVITÀ ?

$$\left.\begin{array}{ll} 2^n 3^m \, R \, 2^t 3^v & \iff n+m = t+v \\ e & \qquad e \\ 2^t 3^v \, R \, 2^h 3^k & \iff t+v = h+k \end{array}\right\} n+m = h+k \implies 2^n 3^m \, R \, 2^h 3^k \quad \text{VERO!}$$

$$[12]_{R} = \{2^0 3^3, 2^1 3^2, 2^2 3^1, 2^3 \cdot 3^0\} = \{27, 18, 12, 8\}$$

$12 = 2^2 \cdot 3^1$ $\qquad$ $2^n \cdot 3^m \, R \, 12 \iff n+m = 3$