Lezione 05/10

mercoledì 5 ottobre 2022 09:10

<u>DEF</u> $(S, \leq)$ w massimale se $\nexists\, x \in S$ t.c. $w \leq x$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ se $w \leq x \Rightarrow x = w$

$(S, \leq)$ v minimale se $\nexists\, x \in S$ t.c. $x \leq v$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ se $x \leq v \Rightarrow x = v$.

<u>DEF</u> - Un $(S, \leq)$ è detto **BENE ORDINATO** se $\forall\, X \subseteq S$, $X \neq \emptyset$, $\exists \min_S(X)$

"ogni suo sottoinsieme non vuoto ha un minimo"

<u>Es</u>. $(\mathbb{N}_0, \leq)$ è bene ordinato

$(\mathbb{R}, \leq)$ <u>non è</u> bene ordinato

<u>PROP</u> - Se $(S, \leq)$ è bene ordinato $\Rightarrow$ è totalmente ordinato

<u>Dim</u>

Per ipotesi, $\forall\, x, y \in S$ si ha $\{x, y\} \subseteq S$ ha un minimo. Allora $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (se $\min\{x, y\} = x \Rightarrow x \leq y$, se $\min\{x, y\} = y \Rightarrow y \leq x$). Quindi $(S, \leq)$ è totalmente ordinato $\square$

<u>OSS</u> - $(S, \leq)$ totalmente ordinato $\not\Rightarrow$ $(S, \leq)$ è bene ordinato (es. $(\mathbb{R}, \leq)$)

<u>DEF</u> (1) w è un **MAGGIORANTE** per $X \subseteq S$ $\Leftrightarrow$ $x \leq w$ $\forall\, x \in X$
$(w \in S)$

(2) v è un **MINORANTE** per $X \subseteq S$ $\Leftrightarrow$ $v \leq x$ $\forall\, x \in X$
$(v \in S)$

<u>Es</u> - $A = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \mid 36\}$ $(A, \mid)$

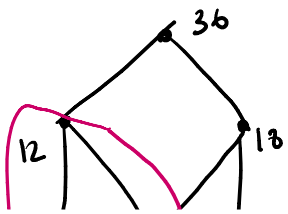
$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 36, 9\}$

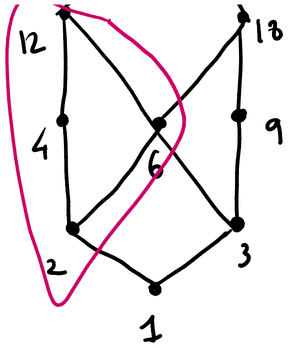
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$2, 2^2, 3, 3^2$

$3 \cdot 2$, $3 \cdot 2^2$, $3^2 \cdot 2$

$3^2 \cdot 2^2$





$X = \{12, 4, 6, 2\}$

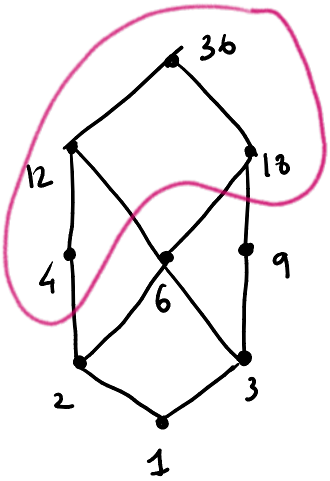
$\max(X) = 12$

$\min(X) = 2$

maggioranti di $X = \{12, 36\}$

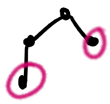
minoranti di $X = \{2, 1\}$

$Y = \{12, 36, 18, 4\}$



$\max(Y) = 36$

$\min(Y) = \nexists$



minimali $(Y) = \{4, 18\}$

maggioranti $(Y) = \{36\}$

minoranti $(Y) = \{2, 1\}$

DEF - Sia $N = \{$insieme dei maggioranti di $X \subseteq S\}$ $\quad$ $(S, \leq)$ insieme ordinato

chiamiamo ESTREMO SUPERIORE DI X in S il $\min_S(N)$ (se esiste)

e lo indichiamo con $\sup_S(X)$.

$$w = \sup_S(X) \iff \begin{cases} \text{(i)} \quad x \leq w \ \forall x \in X & (w \text{ è maggiorante di } X) \\ \text{(ii)} \quad \forall y \in N, \ w \leq y & (w \text{ è il più piccolo dei maggioranti}) \end{cases}$$

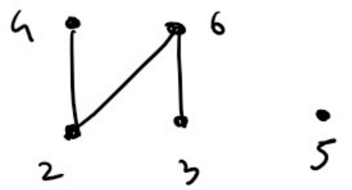
DEF - Sia $M = \{$insieme dei minoranti di $X \subseteq S\}$.

Chiamiamo ESTREMO INFERIORE di X in S il $\max_S(N)$ (se esiste)

e lo indichiamo con $\inf_S(X)$.

$$v = \inf_S(X) \iff \begin{cases} \text{(i)} \quad v \leq x \ \forall x \in X & (v \text{ è minorante di } X) \\ \text{(ii)} \quad \forall y \in M, \ y \leq v & (v \text{ è il più grande dei minoranti}) \end{cases}$$

ES -



$A = \{2,3,4,5,6\}$ $(A, |)$

$X = \{2,3,6\}$

$\max(X) = 6$ $\quad \min(X) \nexists$

maggioranti di $X = \{6\} \Rightarrow \sup_A(X) = 6$

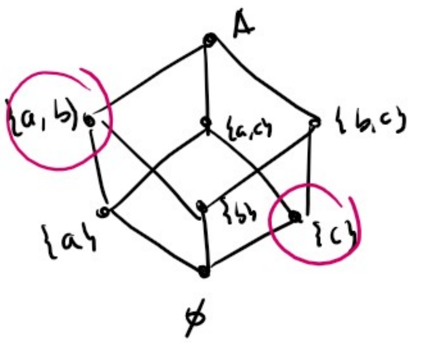
minoranti di $X = \emptyset$ $\quad \nexists \inf(X)$

DEF - Un insieme ordinato $(S, \leq)$ è detto RETICOLO se $\forall x,y \in S$ esistono $\inf(\{x,y\})$ e $\sup(\{x,y\})$.

Se S è un reticolo
$$\inf(\{x,y\}) := x \wedge y$$
$$\sup(\{x,y\}) := x \vee y$$

Se S è un reticolo con un massimo a e un minimo b, chiamo COMPLEMENTO di $x \in S$ un elemento y tale che $\begin{cases} x \vee y = a \\ x \wedge y = b \end{cases}$

ES - $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ $\quad A = \{a,b,c\}$



$B = \inf(X,Y) \Leftrightarrow \begin{cases} B \subseteq X, \ B \subseteq Y \\ \text{il più grande } B \text{ t.c. } B \subseteq X \text{ e } B \subseteq Y \\ \forall C \subseteq X \text{ e } C \subseteq Y \Rightarrow C \subseteq B \end{cases}$

$$B = X \cap Y$$

$$D = \sup(X,Y) = X \cup Y$$

in $\mathcal{P}(A)$, il complemento di $X \subseteq A$ è $A \setminus X$

TEOREMA

$\forall A \neq \emptyset$, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ è un reticolo tale che ogni elemento ha un complemento.

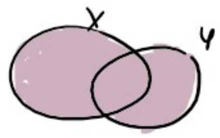
DIM

Vogliamo dimostrare che $\forall X,Y \subseteq A$, $X \cup Y = \sup(X,Y)$ e $X \cap Y = \inf(X,Y)$

Vogliamo dimostrare che $\forall X, Y \subseteq A$, $X \cup Y = \sup(X,Y)$ e $X \cap Y = \inf(X,Y)$

(i) $X \cup Y$ é un maggiorante. Questo vale per definizione di $\cup$, perché

Sappiamo che $X \subseteq X \cup Y$ e $Y \subseteq X \cup Y$



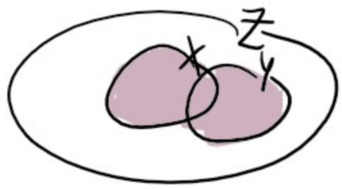
(ii) $X \cup Y$ é il più piccolo dei maggioranti:

Sia Z tale che Z é un altro maggiorante. Allora $X \subseteq Z$ e $Y \subseteq Z$

Allora, $\left.\begin{array}{l} \forall x \in X \Rightarrow x \in Z \\ \forall y \in Y \Rightarrow y \in Z \end{array}\right\} \Rightarrow$ ogni elemento

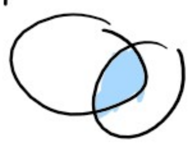
che appartiene a X oppure a Y, appartengono a Z

$\Rightarrow X \cup Y \subseteq Z$ □



(i) $X \cap Y$ é un minorante. Questo vale per definizione di $\cap$, perché

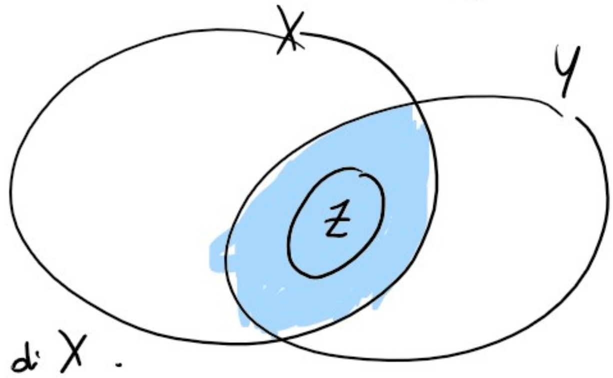
$X \cap Y \subseteq X$ e $X \cap Y \subseteq Y$.



(ii) Sia Z altro minorante. Allora deve essere, per definizione di minorante, $Z \subseteq X$ e $Z \subseteq Y$ $\Rightarrow$

$\forall z \in Z \begin{cases} z \in X \\ z \in Y \end{cases} \Rightarrow$ z appartiene ad entrambi $\Rightarrow z \in X \cap Y$

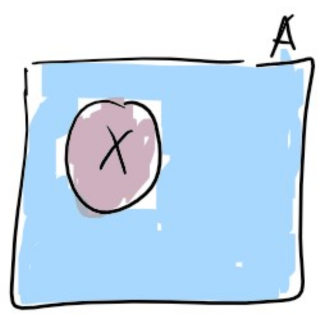
$\Rightarrow Z \subseteq X \cap Y$ □



$\forall X \subseteq A$, $A \setminus X$ é il complemento di X.

perché $(A \setminus X) \cup X = A$ (A é $\max(\mathcal{P}(A))$)

$(A \setminus X) \cap X = \emptyset$ ($\emptyset$ é $\min(\mathcal{P}(A))$)



Dato A, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ $\begin{cases} \forall F \in \mathcal{F}, F \neq \emptyset \\ \forall F, G \in \mathcal{F}, F \cap G = \emptyset \end{cases}$

Dato A, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ $\begin{cases} \forall F \in \mathcal{F}, \; F \neq \emptyset \\ \forall F, G \in \mathcal{F}, \; F \cap G = \emptyset \\ \bigcup \mathcal{F} = A \end{cases}$

4)

Se $\mathcal{F}$ è partizione, $R_{\mathcal{F}}$? $\quad x R_{\mathcal{F}} y \iff \exists F \in \mathcal{F}$ t.c. $x, y \in F$

$$\mathcal{F} = \{ \{0,1\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \{6,7\}, \{8,9\}, \dots \}$$

$4 R 4$
$5 R 5$
$4 R 5$
$5 R 4$

5) $\mathcal{F} = \{ \overbrace{\{a,c,e\}}^{F_1}, \overbrace{\{d,b\}}^{F_2}, \overbrace{\{f\}}^{F_3} \}$

$x R_{\mathcal{F}} y \iff \exists F \in \mathcal{F}$ t.c. $x, y \in \mathcal{F}$

$$\left.\begin{array}{l} a R_{\mathcal{F}} a \\ a R_{\mathcal{F}} c \\ a R_{\mathcal{F}} e \\ c R_{\mathcal{F}} c \\ c R_{\mathcal{F}} a \\ c R_{\mathcal{F}} e \\ e R_{\mathcal{F}} a \\ e R_{\mathcal{F}} e \\ e R_{\mathcal{F}} c \end{array}\right\} a, c, e \in F_1$$

$$\left.\begin{array}{l} b R_{\mathcal{F}} b \\ b R_{\mathcal{F}} d \\ d R_{\mathcal{F}} d \\ d R_{\mathcal{F}} b \end{array}\right\} b, d \in F_2$$

$$f R_{\mathcal{F}} f \; \} \; f \in F_3$$

$$S/_{R_{\mathcal{F}}} = \{ [a]_{\mathcal{F}}, [b]_{\mathcal{F}}, [f]_{\mathcal{F}} \}$$

$$[a] = [c] = [e] = F_1, \quad [b] = [d] = F_2$$