Tutorato MMI - Resto 1

12/05/2023

Esercizio 1

Definizione ricorsiva

Sia A l'insieme dei numeri interi positivi che **non** sono multipli di 5.

a. Fornire una definizione ricorsiva dell'insieme A.
b. Fornire una definizione non ricorsiva dell'insieme A.

Esercizio 1 - Soluzione

Soluzione (a):

- **Passo base.** $1, 2, 3, 4 \in A$.
- **Passo ricorsivo.** Se $a \in A$, allora $(a + 5) \in A$.

Soluzione (b):

$A \coloneqq \{\, a \in \mathbb{N} \mid \exists k \geq 0, \exists h \in \{1, 2, 3, 4\} : a = 5k + h \,\}$.

Esercizio 2

Definizione ricorsiva

Siano $f(n)$ i numeri definiti dalla relazione seguente:

- $f(1) = 2$.
- $f(n) = f(n-1) + f(n-2) + \ldots + f(1) + 2, n \geq 2$.

Fornire una definizione ricorsiva di $f(n)$.

Esercizio 2 - Soluzione

Soluzione:

Calcoliamo i primi valori della relazione.

- $f(1) = 2$.
- $f(2) = f(1) + 2 = 4$.
- $f(3) = f(2) + f(1) + 2 = 4 + 2 + 2 = 8$.
- $f(4) = f(3) + f(2) + f(1) + 2 = 8 + 4 + 2 + 2 = 16$.

Osserviamo quindi che il valore di $f(n), n \geq 2$ è uguale a $2f(n-1)$. Possiamo quindi definire ricorsivamente la relazione come segue:

- **Passo base.** $f(1) = 2$.
- **Passo ricorsivo.** $f(n) = 2f(n-1), n \geq 2$.

Esercizio 3

Definizione ricorsiva

Sia A l'insieme dei numeri interi non negativi che sono pari e multipli di 3.

a. Fornire una definizione ricorsiva dell'insieme A.
b. Fornire una definizione non ricorsiva dell'insieme A.

Esercizio 3 - Soluzione

Soluzione (a):

Osserviamo che i numeri interi non negativi pari che sono anche multipli di 3 sono tutti i multipli di 6. Denotiamo tale insieme come A e definiamolo ricorsivamente come segue:

- **Passo base.** $0 \in A$.
- **Passo ricorsivo.** Se $a \in A$, allora $(a + 6) \in A$.

Soluzione (b):

$A := \{ a \in \mathbb{N}_0 \mid \exists k \geq 0 : a = 6k \}$.

Esercizio 4

Definizione ricorsiva

Fornire una definizione **non** ricorsiva della seguente funzione:

- **Passo base.** $f(1) = 1$.
- **Passo ricorsivo.** $f(n+1) = f(n) + 2n + 1, n \geq 1$.

Esercizio 4 - Soluzione

Soluzione :
Sviluppiamo i primi passi della ricorsione.

- $f(1) = 1$.
- $f(2) = f(1) + 2 + 1 = 4$.
- $f(3) = f(2) + 4 + 1 = 9$.
- $f(4) = f(3) + 6 + 1 = 16$.
- $f(5) = f(4) + 8 + 1 = 25$.

Notiamo che il valore di $f(n)$ è uguale ad n^2. Possiamo quindi definire in modo non ricorsivo la funzione come segue:
$f(n) = n^2, \forall n >= 1$.

Esercizio 5

Definizione ricorsiva

Fornire una definizione ricorsiva di $f : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n^3$.

Esercizio 5 - Soluzione

Soluzione :
Calcoliamo il valore di $f(n+1)$.

$$\begin{aligned} f(n+1) = (n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= f(n) + 3n^2 + 3n + 1. \end{aligned}$$

Possiamo quindi definire ricorsivamente la relazione come segue:

- **Passo base.** $f(1) = 1$.
- **Passo ricorsivo.** $f(n+1) = f(n) + 3n^2 + 3n + 1, n \geq 1$.

Esercizio 6

Definizione ricorsiva

Fornire una definizione ricorsiva di $f : \mathbb{N}_0 \Rightarrow \mathbb{N}_0, f(n) = 2n + 1$.

Esercizio 6 - Soluzione

Soluzione :
Calcoliamo il valore di $f(n+1)$.

$$
\begin{aligned}
f(n+1) &= 2(n+1)+1 \\
&= 2n+2+1 \\
&= f(n)+2.
\end{aligned}
$$

Possiamo quindi definire ricorsivamente la relazione come segue:

- **Passo base.** $f(0) = 1$.
- **Passo ricorsivo.** $f(n+1) = f(n) + 2, n \geq 0$.

Esercizio 7

Definizione ricorsiva

Fornire una definizione ricorsiva del seguente insieme di coppie di interi $S = \{(2, 4), (3, 5), (4, 6), \dots, (x, x + 2)\}$.

Esercizio 7 - Soluzione

Soluzione :

- **Passo base.** $(2, 4) \in S$.
- **Passo ricorsivo.** Se $(x, y) \in S$, allora $(x + 1, y + 1) \in S$.