Dimostrazioni

Prof. Rocco Zaccagnino

2022/2023

Dimostrazioni

- Una **dimostrazione** è un ragionamento corretto che stabilisce la verità di un asserzione matematica (detto **teorema**) attraverso l'uso di altre asserzioni vere:
  - ipotesi del teorema,
  - assiomi che si assumono essere veri,
  - teoremi dimostrati precedentemente
- **Problemi importanti:**
  - Quando un ragionamento è corretto?
  - Come seguire un ragionamento corretto? Quale metodo usare?

Teoremi

- Un **teorema** è una asserzione che si può dimostrare essere vera.
- Tipicamente un teorema lo si può vedere in questo modo:

$$\underbrace{(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n)}_{\textit{Premesse (ipotesi)}} \rightarrow \underbrace{q}_{\textit{conclusione}}$$

Esempio: Teorema di Fermat

Se p è un primo ed a è un numero non divisivile per p **Premesse (ipotesi)**

allora $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ **conclusione**

Metodi di dimostrazione

- Dimostrazione diretta
- Dimostrazione per contrapposizione
- Dimostrazione per contraddizione (assurdo)
- Dimostrazione di equivalenza
- Dimostrazione banale
- Dimostrazione vuota
- Dimostrazione per analisi dei casi
- Dimostrazione con quantificatori

Dimostrazione diretta

$p \rightarrow q$ viene dimostrata mostrando che

" se p è T allora q è T "

in **maniera diretta**:

- si parte dal fatto che p è T
- si fanno una serie di deduzioni, usando assiomi, definizioni e teoremi precedentemente provati per arrivare a dire che anche q è T

Dimostrazione diretta

Esempio: Sia n un intero. Provare che **"Se n è dispari, allora n^2 è dispari"**

Dim.

- Assumiamo che l'ipotesi sia vera, cioè **n è dispari**
- Allora $n = 2k + 1$, dove **k** è un qualunque intero
- $n^2 = (2k + 1)^2$

  $= 4k^2 + 4k + 1$

  $= 2(2k^2 + 2k) + 1$
- Perciò, n^2 è dispari

Dimostrazione diretta

Esempio: Siano n ed m interi. Provare che **"Se n ed m sono dispari, allora $n + m$ è pari"**

Dim.

- Assumiamo che l'ipotesi sia vera, cioè **n ed m siano dispari**
- Allora $n = 2k + 1$ e $m = 2h + 1$ dove **k** ed **h** sono due qualunque interi
- $n+m = (2k + 1) + (2h + 1)$
- $= 2k + 2h + 2$
- $= 2(k + h + 1)$
- Perciò, **n+m** è pari

Dimostrazione per contrapposizione

$\mathbf{p \rightarrow q}$ viene dimostrata mostrando che

“ se ($\neg$q è T) allora (p è F) ”

Nota: Ciò che si dimostra è che **“ se $\neg$q è T allora $\neg$p è T ”**

Si ricordi che $\neg q \rightarrow \neg p \equiv p \rightarrow q$ **contronominale**

$\mathbf{p \rightarrow q}$ viene dimostrata mostrando che

“ se ($\neg$q è T) allora ($\neg$p è T) ”

Dimostrazione per contrapposizione

Esempio: Provare che **"Se 3n + 2 è dispari, allora n è dispari"**

Dim.

- Assumiamo al contrario che **n è pari**, cioè **n = 2k**, **k** intero
- $3n + 2 = 3(2k) + 2$
- $= 6k + 2$
- $= 2(3k + 1)$
- Così $3n + 2$ è pari.

Dimostrazione per assurdo

$p \to q$ viene dimostrata mostrando che

“ se (p è T) e (¬q è T) allora F ”

Cioè:

- si parte dal fatto che **¬q è T** e **p è T**
- si fanno una serie di deduzioni, usando assiomi, definizioni e teoremi precedentemente provati per arrivare ad una asserzione **F**

Dimostrazione per assurdo

$p \rightarrow q$ viene dimostrata mostrando che

“ se (p è T) e ($\neg q$ è T) allora F ”

L’approccio è corretto perché:

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow F \equiv \neg (p \wedge \neg q) \vee F$$

$$\equiv \neg (p \wedge \neg q)$$

$$\equiv \neg p \vee q$$

$$\equiv p \rightarrow q$$

Dimostrazione per assurdo

Esempio: Provare che **"Se $3n + 2$ è dispari, allora n è dispari"**

Dim.

- Assumiamo al contrario che **n è pari**, cioè **$n = 2k$**, **k** intero
- Per ipotesi sappiamo che **$3n + 2$ è dispari**, cioè **$3n + 2 = 2h + 1$, h** intero
- $2h + 1 = 3n + 2$
- $\quad = 3(2k) + 2$
- $\quad = 6k + 2$
- $\quad = 2(3k + 1)$
- Che è pari.

Dimostrazione per assurdo

Esempio: Siano **x** e **y** due numeri reali. Provare che **"Se 5x + 25y = 1723, allora x o y non sono interi"**

Dim.

- Assumiamo al contrario che **x e y sono interi**
- **5x + 25y = 1723**
- **5(x + 5y) = 1723**
- **x + 5y = 1723/5**
- Ma 1723 non è divisibile per 5, quindi **x + 5y non è un intero, che è assurdo** poiché sappiamo che **x e y sono interi**

Dimostrazione di equivalenza

$p \leftrightarrow q$ viene dimostrata mostrando che

$(p \to q) \wedge (q \to p)$

Esempio: Provare che **"n è dispari se e solo se n^2 è dispari "**

Dim. $(p \to q)$

- Dobbiamo provare che: **Se n è dispari allora n^2 è dispari**
- Usiamo la **dimostrazione diretta**
- Supponiamo che **n** sia dispari. Allora **$n = 2k + 1$**, dove **k** è un intero
- **$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$**
- Perciò, **n^2 è dispari**

Dimostrazione di equivalenza

$p \leftrightarrow q$ viene dimostrata mostrando che

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Esempio: Provare che **"n è dispari se e solo se n^2 è dispari "**

Dim. $(q \rightarrow p)$

- Dobbiamo provare che: **Se n^2 è dispari allora n è dispari**
- Usiamo la **dimostrazione per contrapposizione, i.e., proviamo** $(\neg p \rightarrow \neg q)$
- Supponiamo che **n** sia pari. Allora **$n = 2k$**, dove **k** è un intero
- **$n^2 = (2k)^2 = 4k^2$**
- Perciò, **n^2 è pari**

Dimostrazione di equivalenza

A volte i teoremi affermano che più proposizioni sono equivalenti:

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_n$$

dove tutte le proposizioni $p_1, p_2, \dots, p_n$ hanno lo stesso valore di verità

Equivalente a $(p_1 \rightarrow p_2) \land (p_2 \rightarrow p_3) \land \dots \land (p_n \rightarrow p_1)$

Esempio: Provare che le seguenti asserzioni sono equivalenti:

- p_1 : **n è pari**
- p_2 : **n-1 è dispari**
- p_3 : **n^2 è pari**

Dim. Proveremo che $(p_1 \rightarrow p_2)$, $(p_2 \rightarrow p_3)$, $(p_3 \rightarrow p_1)$

- $(p_1 \rightarrow p_2)$
- **Se n è pari allora n = 2k, k intero**
- Allora **n - 1 = 2k – 1 = 2(k -1) + 1, è dispari**

Dimostrazione di equivalenza

A volte i teoremi affermano che più proposizioni sono equivalenti:

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_n$$

dove tutte le proposizioni $p_1, p_2, \dots, p_n$ hanno lo stesso valore di verità

Equivalente a $(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow p_1)$

Esempio: Provare che le seguenti asserzioni sono equivalenti:

- p_1 : **n è pari**
- p_2 : **n-1 è dispari**
- p_3 : **n^2 è pari**

Dim. Proveremo che $(p_1 \rightarrow p_2)$, $(p_2 \rightarrow p_3)$, $(p_3 \rightarrow p_1)$

- $(p_2 \rightarrow p_3)$
- **Se n-1 è dispari, allora n-1 = 2k+1, k intero**
- Allora $n^2 = (2k+2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2)$, **che è un intero pari**

Dimostrazione di equivalenza

A volte i teoremi affermano che più proposizioni sono equivalenti:

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_n$$

dove tutte le proposizioni $p_1, p_2, \dots, p_n$ hanno lo stesso valore di verità

Equivalente a $(p_1 \rightarrow p_2) \land (p_2 \rightarrow p_3) \land \dots \land (p_n \rightarrow p_1)$

Esempio: Provare che le seguenti asserzioni sono equivalenti:

- p_1 : **n è pari**
- p_2 : **n-1 è dispari**
- p_3 : **n^2 è pari**

Dim. Proveremo che $(p_1 \rightarrow p_2)$, $(p_2 \rightarrow p_3)$, $(p_3 \rightarrow p_1)$

- $(p_3 \rightarrow p_1)$
- Per **contrapposizione** supponiamo che **n sia dispari, cioè n = 2k+1, k intero**
- Allora $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, **che è un intero dispari**

Dimostrazione banali

- Vogliamo provare che **p** $\rightarrow$ **q**

- Se la conclusione **q** è sempre vera allora **p** $\rightarrow$ **q** è banalmente vera

Esempio: Sia **P(n): "se a ≥ b allora** $a^n \geq b^n$ **"**. Mostrare che **P(n)** $\rightarrow$ **P(0)**

Dim.

$a^0 >= b^0$ è **1=1** che è banalmente vera indipendentemente da **n.**

Dimostrazione vuote

- Vogliamo provare che **p → q**
- Se l'ipotesi **p** è sempre falsa allora **p → q** è banalmente vera

Esempio: Sia **P(n): "se n ≥ 1 allora n^2 ≥ 1"**. Mostrare che **(se n = 0)** → **P(0)**

Dim.

Per **n=0** l'ipotesi di P(n) è falsa. Così P(0) è sempre vera.

Dimostrazione per analisi dei casi

- Vogliamo provare che $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q$
- E' equivalente a $(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)$

Perché?

- $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q \equiv$ *implicazione*
- $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \vee q \equiv$ *De Morgan*
- $(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n) \vee q \equiv$ *distributiva*
- $(\neg p_1 \vee q) \wedge (\neg p_2 \vee q) \wedge \ldots \wedge (\neg p_n \vee q) \equiv$ *implicazione*
- $(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)$

Dimostrazione per analisi dei casi

- Vogliamo provare che $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q$
- E' equivalente a $(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)$

Esempio: Mostrare che $|x||y| = |xy|$ per **x e y reali**

Dim.

1. $x \geq 0, y \geq 0$
2. $x \geq 0, y < 0$
3. $x < 0, y \geq 0$
4. $x < 0, , y < 0$

Dimostrazione per analisi dei casi

- Vogliamo provare che $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q$
- E' equivalente a $(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)$

Esempio: Mostrare che $|x||y| = |xy|$ per **x e y reali**

Dim.

Sono possibili 4 casi:

1. $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$ e $|xy| = xy = |x||y|$
2. $x \geq 0, y < 0 \Rightarrow xy \leq 0$ e $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$
3. $x < 0, y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$ e $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$
4. $x < 0, y < 0 \Rightarrow xy > 0$ e $|xy| = (-x)(-y) = |x||y|$

Tutti i casi sono provati !!! $\square$

Dimostrazione esaustive

- Alcuni teoremi possono essere provati esaminando un numero relativamente piccolo di esempi

Esempio: $\mathbf{(n+1)^3 \geq 3^n}$ se n è un intero positivo con $\mathbf{n \leq 4}$

Dim.

Bisogna verificare $\mathbf{(n+1)^3 \geq 3^n}$ solo nei casi **n = 1, 2, 3, 4**

1. **n=1** $\quad$ $(n+1)^3 = (1+1)^3 = 8$ $\quad$ $3^n = 3^1 = 3$
2. **n=2** $\quad$ $(n+1)^3 = (2+1)^3 = 27$ $\quad$ $3^n = 3^2 = 9$
3. **n=3** $\quad$ ....
4. **n=4** $\quad$ ....

□

Dimostrazione con quantificatori

- Esistono asserzioni con un **quantificatore esistenziale $\exists x\ P(x)$**
- **Costruttiva**: trovare un esempio che mostri che l'asserzione vale

Esempio: **Esiste un intero che può essere scritto in 2 diversi modi come la somma di cubi di interi positivi**

Dim.

$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$

Dimostrazione con quantificatori

- Esistono asserzioni con un **quantificatore esistenziale $\exists x\ P(x)$**
- **Non costruttiva**: se non si riesce a trovare un esempio allora si opta per una dimostrazione per assurdo in cui si nega l'asserzione esistenziale e si mostra che ciò implica una **contraddizione**
  - si assume che vale $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
  - si arriva ad una **contraddizione**

Dimostrazione con quantificatori

Esempio (Pigeon Hole Principle):

Se n+1 oggetti sono distribuiti in n scatole, allora qualche scatola deve contenere almeno 2 oggetti

Dim.

- Assumiamo di avere **n+1** oggetti, e **n** scatole identificate con $B_1, B_2, \ldots, B_n$
- Per assurdo supponiamo che **nessuna** scatola contiene più di 1 oggetto

  k_i = il numero di oggetti posti nella scatola **Bi** , per $i=1,\ldots,n$, $k_i \leq 1$

- Allora $k_1 + k_2 + \ldots\ldots + k_n \leq 1 + 1 + \ldots + 1 = n$
- Ma questo contraddice l'ipotesi $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = n + 1$

Dimostrazione con quantificatori

- Esistono asserzioni con un **quantificatore universale $\forall x\ P(x)$**
- Provare che la proprietà vale per tutti i valori nel dominio
- Possiamo provare che $\neg \forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$

- **Controesempi:** Simile alla dimostrazione costruttiva di esistenzialità