# Ricorsione

Prof. Rocco Zaccagnino

2022/2023

# Definizioni ricorsive

Ci sono casi in cui un oggetto (funzioni, insiemi, algoritmi, etc) può essere definito in termini di se stesso, ma di più **piccole dimensioni**

**Esempio:** Consideriamo la sequenza di **potenze di 3**, cioè 1, 3, 9, 27, 81, …

- $1, 3, 9, 27, 81, \ldots, 3^n, \ldots$
- $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots, 3^n, \ldots$
- $b_n = 3^n$ (n-simo termine della sequenza), $n \in N$

**Definizione ricorsiva** della sequenza

- $b_n = 3 \; 3^{n-1}$
- $b_n = 3 \; b_{n-1}$ per $n \geq 1$
- $b_0 = 1$

***Definizione ricorsiva***

# Definizioni ricorsive

**Esempio:** Consideriamo la sequenza **aritmetica** (progressione aritmetica)

- $a, \; a+d, \; a+2d, \; a+3d, \; \ldots, \; a+nd, \; \ldots$
  - ✓ esempio : $a=-1$ e $d=4$ => $-1, 3, 7, 11, \ldots, -1+n4, \ldots$
- $b_n = a+nd$ (n-simo termine della sequenza), $n \in N$

**Definizione ricorsiva** della sequenza

- $b_n = a+nd = a+(n-1)d+d$

- $b_n = b_{n-1} + d$ per $n \geq 1$
- $b_0 = a$ ***Definizione ricorsiva***

# Definizioni ricorsive

**Esempio:** Consideriamo la sequenza **geometrica** (progressione geometrica)

- $a, \quad ar, \quad ar^2, \quad ar^3, \quad \ldots, \quad ar^n, \quad \ldots$
  - ✓ esempio : $a=6$ e $r=1/3$ => $6, 2, 2/3, 2/9, \ldots, 6(1/3)^n$
- $b_n = ar^n$ (n-simo termine della sequenza), $n \in N$

**Definizione ricorsiva** della sequenza

- $b_n = ar^n = ar^{n-1}r$
- $b_n = b_{n-1}r$ per $n \geq 1$
- $b_0 = a$

*Definizione ricorsiva*

# Definire funzioni ricorsive

Per definire una funzione ricorsiva sull'insieme degli interi non negativi

1. **Passo base:** Specificare il valore della funzione in 0 (**zero**)
2. **Passo ricorsivo:** Dare una regola per determinare il valore della funzione in n in termini del valore della funzione in interi n-1

**Esempio: Funzione fattoriale**

1. $0! = 1$
2. $n! = n\,(n-1)!$ per $n \geq 1$

# Definire funzioni ricorsive

**Esempio:** definire ricorsivamente la funzione $f(n) = 2n + 1$

$f(0) = 1$

$f(1) = 2 * 1 + 1 = 3 = 1 + 2 = f(0) + 2$

$f(2) = 2 * 2 + 1 = 5 = 3 + 2 = f(1) + 2$

$f(3) = 2 * 3 + 1 = 7 = 5 + 2 = f(2) + 2$

.....

$f(n) = 2n + 1 = 2(n - 1 + 1) + 1 = 2(n - 1) + 1 + 2 = f(n-1) + 2$

Quindi

1. $f(0)=1$
2. $f(n)= f(n-1) + 2$ per $n \geq 1$

# Definire funzioni ricorsive

**Esempio:** definire ricorsivamente la funzione che somma i primi n interi positivi

$$f(n) = 1+2+3+\dots +n \quad \text{per } n\geq 1$$

- $f(1)=1$

So che $f(n) = 1+2+3+\dots +n-1 + n$ quindi

- $f(n) = (1+2+3+\dots +n-1) + n = f(n-1) +n$

**Quindi**

- $f(1)=1$
- $f(n)= f(n-1) +n \quad \text{per } n\geq 2$

# Definire funzioni ricorsive

**Esempio:** definire ricorsivamente la funzione

$$f(n) = n^2 \text{ per } n \geq 1$$

- $f(1)=1$

So che $f(n-1) = (n-1)^2$ ...... Devo arrivare a $f(n) = n^2$

- $f(n-1) = (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 = f(n) - 2n + 1$

Quindi

- $f(1)=1$
- $f(n)= f(n-1) + 2n-1$ per $n \geq 2$

# Calcolo di funzioni ricorsive

**Esempio:** sia f una funzione ricorsiva definita come:

1. **Passo base** $f(0)=3$
2. **Passo ricorsivo** $f(n)=2\,f(n-1)+3$ per $n \geq 1$

Quale è il valore di :

- $f(0) = 3$ *(passo base)*
- $f(1) = 2\,f(0) + 3 = 2 * 3 + 3 = 9$
- $f(2) = 2\,f(1) + 3 = 2 * 9 + 3 = 21$
- $f(3) = 2\,f(2) + 3 = 2 * 21 + 3 = 45$

# Calcolo di funzioni ricorsive

**Esempio:** sia f la **funzione fattoriale**:

1. **Passo base** **0!=1**
2. **Passo ricorsivo** **n! = n (n – 1)! per n≥1**

Quale è il valore di 4!:

- **4! = 4 * 3! Passo ricorsivo**
- **3! = 3 * 2! Passo ricorsivo**
- **2! = 2 * 1! Passo ricorsivo**
- **1! = 1 * 0! Passo ricorsivo**
- **0! = 1 Passo base**

# Calcolo di funzioni ricorsive

**Esempio:** sia f la **funzione fattoriale**:

1. **Passo base** $0! = 1$

2. **Passo ricorsivo** $n! = n\,(n - 1)!$ per $n \geq 1$

Quale è il valore di 4!:

- $0! = 1$
- $1! = 1 * 0! = 1 * 1 = 1$
- $2! = 2 * 1! = 2 * 1 = 2$
- $3! = 3 * 2! = 3 * 2 = 6$
- $4! = 4 * 3! = 4 * 6 = 24$