Relazioni di ricorrenza

Prof. Rocco Zaccagnino

2022/2023

Relazioni di ricorrenza

Definizione ricorsiva di una sequenza = **relazione di ricorrenza**

Data una sequenza $a_0, a_1, \ldots, a_n$ una **relazione di ricorrenza** esprime a_n in termini di uno o più dei termini precedenti della sequenza, cioè di $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ per tutti gli interi non negativi $n \geq 0$

Esempio: Consideriamo la sequenza geometrica:

$b, br, br^2, br^3, \ldots, br^n, \ldots$

Definizione ricorsiva della sequenza

$a_n = a_{n-1} r$ $\quad n \geq 1$ (*relazione di ricorrenza*)

$a_0 = b$ (*condizione iniziale*)

Relazioni di ricorrenza

Problema: data una relazione di ricorrenza, unitamente alle condizioni iniziali, l'obiettivo è di risolvere la relazione di ricorrenza cioè **trovare una formula chiusa per l'n-simo termine della sequenza** (formula esplicita in n che non dipende più dai termini precedenti)

Esempio: Data la relazione di ricorrenza e la sua condizione iniziale:

$a_n = a_{n-1} r$ (*relazione di ricorrenza*)

$a_0 = b$ (*condizione iniziale*)

La sua soluzione è: $a_n = br^n$

D'ora in avanti useremo T(n) per indicare l'n-simo termine a_n della sequenza

Relazioni di ricorrenza

In informatica, l'interesse per le soluzioni delle relazioni di ricorrenza risiede nel fatto che esse nascono **dall'analisi di algoritmi ricorsivi**.

Esempio: calcolo del **fattoriale**

```
procedure fattoriale(n)
if n=1 then return 1
        else return n * fattoriale(n–1)
```

La **complessità asintotica** di un algoritmo ricorsivo si esprime attraverso una relazione di ricorrenza.

T(n) =T(n-1) +a

T(1)= b

b = costo per effettuare **return 1**

a = costo per effettuare **il prodotto n * fattoriale(n–1)**

Metodi di risoluzione

Esistono alcuni metodi utili per risolvere le equazioni di ricorrenza

- **Metodo di sostituzione**
- **Metodo di iterazione**

Illustreremo tali metodi, utilizzandoli per determinare

- ✓ ***soluzioni esatte***
- ✓ ***limiti superiori***
- ✓ ***limiti inferiori***

alle relazioni di ricorrenza

Metodo di iterazione

Idea: "srotolare" l'equazione di ricorrenza ed esprimerla come somma di termini dipendenti da **n** e dalla condizione iniziale

Esempio: $T(n) = T(n-1) + a \qquad T(1) = b$

$T(n) = T(n-1) + a$

$= T(n-2) + a + a$

$= T(n-3) + a + a + a$

....

$= T(n-k) + \underbrace{a + a + \dots + a}_{k}$

....

$= T(1) + \underbrace{a + \dots\dots + a}_{n-1}$

$= b + (n-1)a$

ma $T(n-1) = T(n-2) + a$

ma $T(n-2) = T(n-3) + a$

proseguendo in questo modo dopo **k** iterazioni avremo

le iterazioni si fermano quando si arriva alla condizione iniziale **n– k=1**

$T(1) = b$

Metodo di iterazione

Esempio: Sia **n pari** $\quad$ **$T(n) = 2\,T(n-2) + 3$** $\quad$ **$T(0) = 1$**

$$T(n) = 2\,T(n-2) + 3$$

$$= 2\,(2\,T(n-4) + 3) + 3$$

$$= 2^2\,T(n-4) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^2\,(2T(n-6) + 3) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^3\,T(n-6) + 2^2 * 3 + 2 * 3 + 3$$

....

$$= 2^k\,T(n-2*k) + 2^{k-1} * 3 + 2^{k-2} * 3 + \ldots + 3$$

....

$$= 2^{n/2}\,T(0) + 2^{n/2-1} * 3 + 2^{n/2-2} * 3 + \ldots + 3$$

$$= 2^{n/2} + 3\,\Sigma_{i=0,\ldots,n/2-1}\,2^i$$

$$= 2^{n/2} + 3\,(2^{n/2-1+1} - 1) = 4 * 2^{n/2} - 3$$

ma $T(n-2) = 2T(n-4) + 3$

ma $T(n-4) = 2T(n-6) + 3$

proseguendo in questo modo dopo **k** iterazioni avremo

le iterazioni si fermano quando si arriva alla condizione iniziale
$n - 2k = 0 \implies k = n/2$

$$\boxed{\text{Quindi } T(n) = 4 * 2^{n/2} - 3}$$

Metodo di iterazione

Esempio: Sia $\mathbf{n=2^k}$ $\qquad$ $\mathbf{T(n) = T(n/2) + 1}$ $\qquad$ $\mathbf{T(1) = 1}$

$T(n) = T(n/2) + 1$

$\boxed{\text{ma } T(n/2) = T(n/2^2) + 1}$

$= (T(n/2^2) + 1) + 1$

$= T(n/2^2) + 2$

$= (T(n/2^3)+ 1) + 2$

$\boxed{\text{ma } T(n/2) = T(n/2^3) + 1}$

$= T(n/2^3) + 3$

....

$= T(n/2^k) + k$

$\boxed{\text{ma } T(1)=1 \text{ e } k = \log_2 n}$

$= T(1) + k$

$= 1+ k = \log_2 n +1$

$\boxed{\text{Quindi } T(n)= \log_2 n +1}$

Metodo di iterazione

Esempio: Sia n=2k $T(n) = 8\,T(n/2) + n$

$T(1) = 2$

$T(n) = 8\,T(n/2) + n$

$\boxed{\text{ma } T(n/2) = 8T(n/2^2) + n/2}$

$= 8\,(8T(n/2^2) + n/2\,) + n$

$= 8^2\,T(n/2^2) + 8n/2 + n$

$= 8^2\,T(n/2^2) + 4n + n$

$\boxed{\text{ma } T(n/2^2) = 8T(n/2^3) + n/2^2}$

$= 8^2\,(8T(n/2^3) + n/2^2) + 4n + n$

$= 8^3T(n/2^3) + 8^2n/2^2 + 4n + n$

$= 8^3\,T(n/2^3) + 4^2n + 4n + n$

Metodo di iterazione

proseguendo in questo modo dopo k iterazioni avremo

$T(n) = 8^3\ T(n/2^3) + 4^2 \cdot n + 4 \cdot n + n$

....

$= 8^k\ T(n/2^k) + 4^{k-1} \cdot n + 4^{k-2} \cdot n + \ldots + n$

$= 8^k\ T(n/2^k) + n\ \Sigma_{i=0,\ldots,k-1}\ 4^i$

$= 8^k\ T(n/2^k) + n\ (4^{k-1+1} - 1)/3$

$= 8^k\ T(n/2^k) + n\ (4^k - 1)/3$

$= (2^k)^3\ T(n/2^k) + n\ ((2^k)^2 - 1)/3$

ma $T(1)=2$ e $n = 2^k$

$= n^3 \cdot T(1) + n\ (n^2 - 1)/3$

$= n^3 \cdot 2 + n\ (n^2 - 1)/3$

$= (7\ n^3 + n)/3$

Quindi $T(n) = (7\ n^3 + n)/3$

Metodo di iterazione

Esempio: $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ (sequenza di Fibonacci)

$T(2) = 1$

$T(1) = 1$

Risolvere questa relazione di ricorrenza con il metodo iterativo è molto complesso.

Proviamo però a limitarla

$T(n) = T(n-1) + T(n-2) \leq 2\,T(n-1)$

e

$T(n) = T(n-1) + T(n-2) \geq 2\,T(n-2)$

Metodo di iterazione

Esempio: $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ (sequenza di Fibonacci)

$T(2) = 1$

$T(1) = 1$

Applichiamo il metodo di iterazione alla 1.

cioè risolviamo

$T(n) \leq 2\,T(n-1)$

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq 2\,T(n-1) \\
&\leq 2 \cdot 2\,T(n-2) \\
&\leq 2 \cdot 2 \cdot 2T(n-3) = 2^3 T(n-3) \\
&\ldots\ldots \\
&\leq 2^k T(n-k) \\
&\ldots\ldots \\
&\leq 2^{n-1} T(1) = 2^{n-1}
\end{aligned}
$$

ci fermeremo quando
$n-k=1 \Rightarrow k=n-1$

Quindi $T(n) \leq 2^{n-1}$

Metodo di iterazione

Esempio: $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ (sequenza di Fibonacci)

$T(2) = 1$

$T(1) = 1$

Applichiamo il metodo di iterazione alla 2.

cioè risolviamo

$T(n) \geq 2\, T(n-2)$

$$
\begin{aligned}
T(n) &\geq 2\, T(n-2) \\
&\geq 2 \bullet 2\, T(n-2-2) \\
&\geq 2 \bullet 2 \bullet 2\, T(n-2-2-2) \\
&= 2^3\, T(n-3 \bullet 2) \\
&\ldots\ldots \\
&\geq 2^k\, T(n-k \bullet 2) \\
&\ldots\ldots \\
&\geq 2^{(n-2)/2}\, T(2) = 2^{(n-2)/2}
\end{aligned}
$$

proseguendo in questo modo dopo k iterazioni avremo

ci fermeremo quando $n-k \bullet 2 = 2 \Rightarrow k=(n-2)/2$

Quindi $T(n) \geq 2^{(n-2)/2}$

Metodo di iterazione

Esercizi Risolvere la seguente relazione di ricorrenza utilizzando il metodo iterativo

1. Sia n dispari,

   $T(n) = 2\,T(n-2) + 3$

   $T(1) = 1$

2. $T(n) = n + T(n-1)$

   $T(1)=1$

3. Sia $n=3^k$

   $T(n) = 9\,T(n/3) + n$

   $T(1)=1$