Induzione strutturale

Prof. Rocco Zaccagnino

2022/2023

Induzione strutturale

Dovendo provare proprietà di oggetti definiti ricorsivamente può essere utile la **induzione strutturale**

Sia **A =** *un insieme di elementi definiti ricorsivamente*

P = *proprietà avente come oggetto gli elementi di A*

si vuole provare che

$$\forall x \in A \ \ P(x)$$

Induzione strutturale

A = *un insieme di elementi definiti ricorsivamente*

P = *proprietà avente come oggetto gli elementi di A*

si vuole provare che

$$\forall x \in A \;\; P(x)$$

con **l'induzione strutturale** basta provare che:

Base: Mostrare che l'enunciato **P** è vero per tutti gli elementi nell' insieme specificati dal passo *Base* della definizione ricorsiva di **A**.

Passo ricorsivo: Mostrare che

- se l'enunciato **P** è vero per ciascuno degli elementi già in **A**, cioè gli elementi usati per costruire nuovi elementi nel *Passo Ricorsivo* della definizione di **A**, allora
- l'enunciato **P** è vero per questi nuovi elementi.

Induzione strutturale

Esempio: Sia **A** l'insieme costituito dagli elementi definiti ricorsivamente come segue:

Passo base: $1 \in A$
Passo ricorsivo: se $x \in A$ allora $x + 2 \in A$

Provare che **A** è costituito dagli interi dispari positivi

Dim.

Sia **D** l'insieme di tutti gli interi dispari positivi cioè

$$D=\{ y \in Z+ \mid \exists k \ (k \geq 0 \wedge y=2k+1) \}$$

Dobbiamo provare che **D = A**

Proveremo quindi che **D** $\subseteq$ **A** e **A** $\subseteq$ **D**

Induzione strutturale

Esempio: Sia **A** l'insieme costituito dagli elementi definiti ricorsivamente come segue:

Passo base: $1 \in A$

Passo ricorsivo: se $x \in A$ allora $x + 2 \in A$

Provare che **A** è costituito dagli interi dispari positivi

Dim. Proviamo prima che $D \subseteq A$

Procediamo usando l'induzione matematica **P(k):** $2k+1 \in A \quad \forall\, k \geq 0$

Base: proviamo che **P(0)** è vera $2*0+1 = 1 \in A$

Induzione strutturale

Esempio: Sia A l'insieme costituito dagli elementi definiti ricorsivamente come segue:

Passo base: $1 \in A$
Passo ricorsivo: se $x \in A$ allora $x + 2 \in A$

Provare che **A** è costituito dagli interi dispari positivi

Dim. Proviamo prima che $D \subseteq A$

Procediamo usando l'induzione matematica **P(k):** $2k+1 \in A \quad \forall\, k \geq 0$

Ipotesi induttiva: assumiamo che **P(k)** è vera per $k \geq 0$

Passo di induzione: proviamo che **P(k+1)** è vera $2*(k+1) + 1 = 2*k + 2 + 1 = (2k + 1) + 2 \in A$

Induzione strutturale

Esempio: Sia A l'insieme costituito dagli elementi definiti ricorsivamente come segue:

Passo base: $1 \in A$
Passo ricorsivo: se $x \in A$ allora $x + 2 \in A$

Provare che A è costituito dagli interi dispari positivi

Dim. Ora proviamo che $A \subseteq D$

Procediamo usando l'induzione strutturale

$$P(x):\ x = 2k+1 \text{ per qualche intero } k \geq 0 \qquad \forall x \in A$$

Usiamo la definizione ricorsiva di A

Base: Da passo base della definizione ricorsiva sappiamo che $1 \in A$, poichè $1 = 2*0 + 1$
=> $P(1)$ è vera => $1 \in D$

Induzione strutturale

Esempio: Sia A l'insieme costituito dagli elementi definiti ricorsivamente come segue:

Passo base: $1 \in A$
Passo ricorsivo: se $x \in A$ allora $x + 2 \in A$

Provare che A è costituito dagli interi dispari positivi

Dim. Ora proviamo che $A \subseteq D$

Procediamo usando l'induzione strutturale ***P(x):*** $x = 2k+1$ per qualche intero $k \geq 0$ $\forall x \in A$

Passo di ricorsione: usiamo la seconda parte della def. ricorsiva di A, e sia un $x+2 \in A$

- assumiamo che P(x) è vera
- proviamo che P(x+2) è vera

$x=2k+1$ per qualche intero $k \geq 0$

$x+2 = 2k+1 + 2 = 2 (k+1) +1 \in D$

Induzione strutturale

Esempio: Sia A un insieme definito nel modo seguente:

Passo base: $3 \in A$

Passo ricorsivo: se $x \in A$ e $y \in A$ allora $x+y \in A$

Provare che A è costituito dagli interi positivi multipli di 3

Dim.

Sia M l'insieme di tutti i multipli di 3, cioè $M=\{ y \in Z+ \mid \exists\, k \ (k \in Z+ \land y=3k) \}$

Dobbiamo provare che **M = A**

Proveremo quindi che **M ⊆ A** e **A ⊆ M**

Induzione strutturale

Esempio: Sia A un insieme definito nel modo seguente:

Passo base: $3 \in A$

Passo ricorsivo: se $x \in A$ e $y \in A$ allora $x+y \in A$

Provare che A è costituito da tutti gli interi multipli di 3

Dim. Proviamo prima che $M \subseteq A$

Procediamo usando l'induzione matematica **P(k):** $3k \in A \quad \forall\, k \geq 1$

Base: proviamo che P(1) è vera

$$3 * 1 = 3 \in A$$

Induzione strutturale

Esempio: Sia A un insieme definito nel modo seguente:

Passo base: $3 \in A$

Passo ricorsivo: se $x \in A$ e $y \in A$ allora $x+y \in A$

Provare che A è costituito da tutti gli interi multipli di 3

Dim. Proviamo prima che $M \subseteq A$

Procediamo usando l'induzione matematica $P(k)$: $3k \in A \quad \forall\, k \geq 1$

Ipotesi induttiva: assumiamo che P(k) è vera

Passo di induzione: proviamo che P(k+1) è vera

$$3 * (k+1) = 3 * k + 3 \in A$$

Induzione strutturale

Esempio: Sia A un insieme definito nel modo seguente:

Passo base: $3 \in A$

Passo ricorsivo: se $x \in A$ e $y \in A$ allora $x+y \in A$

Provare che S è costituito da tutti gli interi multipli di 3

Dim. Ora proviamo che $A \subseteq M$

Procediamo per induzione strutturale P(x): $x = 3k$ per qualche intero $k \geq 1$ $\forall x \in A$

Usiamo la definizione ricorsiva di A

Base: Dalla base della definizione ricorsiva sappiamo che $3 \in A$, poichè

$3 = 3*1$ => P(3) è vera

Induzione strutturale

Esempio: Sia A un insieme definito nel modo seguente:

Passo base: $3 \in A$

Passo ricorsivo: se $x \in A$ e $y \in A$ allora $x+y \in A$

Provare che A è costituito da tutti gli interi multipli di 3

Dim. Ora proviamo che $A \subseteq M$

Passo di ricorsione: usiamo la seconda parte della definizione ricorsiva di A, e consideriamo un $x+y \in A$

- assumiamo che $P(x)$ e $P(y)$ è vera
- proviamo che $P(x+y)$ è vera

$x=3k$ e $y= 3h$ per qualche intero $k \geq 1$ e $h \geq 1$

$x+y = 3k + 3h = 3\,(h+k) \in M$

Induzione strutturale

Def (parola):

Passo base: $\lambda \in \Sigma^*$

Passo ricorsivo: Se $w \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$ allora $wx \in \Sigma^*$

Def (lunghezza di una parola):

Passo base: $l(\lambda) = 0$

Passo ricorsivo: Se $w \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$ allora $l(wx) = l(w) + 1$

Induzione strutturale

Esempio: Siano u e w due stringhe appartenenti a Σ^*.

Provare che $l(u\,w) = l(u) + l(w)$

Dim.

Dobbiamo provare che $\forall\, w \in \Sigma^* \quad P(w)$

dove

$$P(w): \quad l(u\,w) = l(u) + l(w) \quad \text{per ogni } u \in \Sigma^*$$

Induzione strutturale

Esempio: Siano u e w due stringhe appartenenti a Σ^*.

$$\text{Provare che } l(u\,w) = l(u) + l(w)$$

Dim.

P(w): $\quad l(u\,w) = l(u) + l(w)$ per ogni $u \in \Sigma^*$

Base: dobbiamo mostrare che $P(\lambda)$ è vera

$$l(u\,\lambda) = l(u) = l(u) + 0 = l(u) + l(\lambda)$$

Passo di ricorsione: assumiamo che P(w) sia vera

proviamo che P(wx) è vera per ogni $x \in \Sigma$

$$l(u\,wx) = l(u\,w) + 1 = l(u) + l(w) + 1 = l(u) + l(wx)$$