ESAME DI MATEMATICA DISCRETA
26/10/2022

APPELLO STRAORDINARIO

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.
(2) Voto massimo: **30/30**.
(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.
(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.
(5) Si è ammessi all'orale con un punteggio di almeno 15/30.
(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
(7) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (8 punti)**.** Sia $5\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relazione definita da:

$$a \ 5\mathbb{Z} \ b \Longleftrightarrow 5|(a-b)$$

Dimostrare che $5\mathbb{Z}$ è una relazione di equivalenza. Si descriva la classe di equivalenza di 0 e l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Soluzione:
(1) $5\mathbb{Z}$ è riflessiva: per ogni $a \in \mathbb{Z}$, 5 divide $a - a = 0$.
(2) $5\mathbb{Z}$ è simmetrica: se $a \ 5\mathbb{Z}b$, allora esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $a - b = 5k$. Pertanto $b - a = (-k)5$ e $5|(b-a)$.
(3) $5\mathbb{Z}$ è transitiva: se $a \ 5\mathbb{Z}b$ e $b \ 5\mathbb{Z}c$, allora esistono $h, k \in \mathbb{Z}$ tale che $a - b = 5k$ e $b - c = 5h$. Quindi $a - c = (a - b) + (b - c) = 5(h + k)$.
(4) L'insieme quoziente è $\mathbb{Z}_5 = \{[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [3]_5, [4]_5\}$. La classe $[0]_5$ è l'insieme di tutti i multipli interi di 5.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Usando uno tra i due metodi visti a lezione, si risolva il seguente sistema congruenziale lineare.

$$\begin{cases} x \equiv 6 \quad (mod\ 9) \\ x \equiv 2 \quad (mod\ 11) \end{cases}$$

Soluzione: Le soluzioni della prima equazione sono $x = 6 + 9k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Sostituendo nella seconda otteniamo $6 + 9k \equiv 2(mod\ 11)$, che si riduce a $9k \equiv -4(mod\ 11)$, la cui soluzione è $k \equiv 2(mod\ 11)$. Sostituendo al posto k otteniamo $x = 6 + 9 \cdot 2 = 24$. L'insieme di tutte le soluzioni è quindi $S = [24]_{99}$.

Esercizio 3 (7 punti)**.** Dimostrare che l'insieme $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate 2×2 a elementi in $\mathbb{R}$ è un gruppo abeliano rispetto all'operazione di somma tra matrici.

Soluzione: Si veda pagina 261 del libro consigliato.

Esercizio 4 (8 punti)**.** Si risolva, usando il metodo di Cramer o quello di Gauss-Jordan, il seguente sistema lineare su $\mathbb{Q}$.

$$\begin{cases} x - 3y + z & = 0 \\ x + 2y & = -1 \\ x - 3z & = 2 \end{cases}$$

Soluzione: La matrice del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Cramer:
Si ha $det(A) = -17$, la soluzione è unica e

$$x = \frac{det\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}}{-17} = -\frac{5}{17}; \quad y = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}}{-17} = -\frac{6}{17}; \quad z = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{-17} = -\frac{13}{17}$$

Gauss-Jordan:
La matrice a scala risulta

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix}$$

Da cui segue

$$\begin{cases} x - 3y + z & = 0 \\ -5y + z & = 1 \\ -\frac{17}{3}z & = \frac{13}{3} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ricavano le stesse soluzioni.