ESAME DI MATEMATICA DISCRETA
30/06/2022

I APPELLO SESSIONE ESTIVA

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) Si è ammessi all'orale con un punteggio di almeno 15/30.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (8 punti)**.** Sia X un insieme non vuoto e siano $A, B \subseteq X$. Dimostrare che

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$
$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Soluzione: Si ha

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ e } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in X \setminus A \text{ e } x \in X \setminus B \\ &\Leftrightarrow x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ oppure } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in X \setminus A \text{ oppure } x \in X \setminus B \\ &\Leftrightarrow x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B). \end{aligned}$$

Esercizio 2 (7 punti)**.** Usando uno tra i due metodi visti a lezione, si descrivano gli interi a tali che simultaneamente si abbia $rest(a, 19) = 16$, $rest(a, 20) = 17$, e se ne determini l'unico compreso tra 1000 e 1500.

Soluzione: Le condizioni sono equivalenti al sistema

$$\begin{cases} a \equiv 16 \quad (mod\ 19) \\ a \equiv 17 \quad (mod\ 20) \end{cases}$$

Quindi, le soluzioni della prima equazione sono $a = 16 + 19k$, con $z \in \mathbb{Z}$. Sostituendo nella seconda otteniamo $16 + 19k \equiv 17(mod\ 20)$, che si riduce a $19k \equiv 1(mod\ 20)$, la cui soluzione è $k \equiv 19(mod\ 20)$. Sosituendo al posto k otteniamo $a = 16 + 19 \cdot 19 = 377$.

L'insieme di tutte le soluzioni è quindi $S = [377]_{380}$. L'unica soluzione compresa tra 1000 e 1500 è 1137 ottenuta come $377 + 2 \cdot 380$.

Esercizio 3 (7 punti)**.** Verificare che l'insieme

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 3 \right\}$$

non è un sottogruppo di $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$, il gruppo moltiplicativo delle matrici invertibili.

Soluzione: Basta mostrare un controesempio oppure osservare che, per il teorema di Binet, $det(A \cdot B) = 9$ per ogni coppia di matrici $A, B \in N$, quindi N non è chiuso per prodotto.

Esercizio 4 (8 punti)**.** Dimostrare che il prodotto di due matrici $n \times n$ triangolari superiori è triangolare superiore.

Soluzione: Siano A e B due matrici triangolari superiori.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & b_{ii} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Chiamata C la matrice prodotto, per definizione di prodotto righe per colonne, si ha che

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Poichè A e B sono triangolari superiori, si ha che $a_{i1} = a_{i2} = \ldots = a_{i,i-1} = 0$ e $b_{j+1,j} = \ldots = b_{n-1,j} = b_{nj} = 0$. Ne segue che per $i > j$ gli elementi della somma che compone c_{ij}, cioè i prodotti $a_{ik}b_{kj}$ sono tutti nulli e $c_{ij} = 0$ per ogni $i > j$. C è triangolare superiore.