Predicati e quantificatori

Prof. Rocco Zaccagnino
2022/2023

Limiti della Logica proposizionale

Logica proposizionale: il mondo è descritto attraverso proposizioni elementari e loro combinazioni logiche

I singoli oggetti cui si riferiscono le proposizioni o le proprietà di tali oggetti enunciati nelle proposizioni **non hanno identificazione** nella logica proposizionale

Esempio

Rocco è uno studente di MMI

oggetto *proprietà*

Limiti della Logica proposizionale

Nella logica proposizionale ciascuna delle proposizioni deve essere ripetuta esaustivamente

Asserzioni devono essere ripetute per oggetti diversi

Esempio

Se Rocco è laureato in Informatica allora ha sostenuto l'esame di MMI

Traduzione:

Rocco è laureato in Informatica $\longrightarrow$ *ha sostenuto l'esame di MMI*

Assumendo di avere altri laureati:

Alfonso è laureato in Informatica $\longrightarrow$ *ha sostenuto l'esame di MMI*

Nicola è laureato in Informatica $\longrightarrow$ *ha sostenuto l'esame di MMI*

.....

Limiti della Logica proposizionale

Esempio

Rocco è laureato in Informatica $\longrightarrow$ *ha sostenuto l'esame di MMI*

Alfonso è laureato in Informatica $\longrightarrow$ *ha sostenuto l'esame di MMI*

Nicola è laureato in Informatica $\longrightarrow$ *ha sostenuto l'esame di MMI*

.....

Problema: snellire la ripetizione esaustiva

Soluzione: costruire le proposizioni con le ***variabili***

x *è laureato in Informatica* $\longrightarrow$ ***x*** *ha sostenuto l'esame di MMI*

Limiti della Logica proposizionale

Nella logica proposizionale ciascuna delle proposizioni deve essere ripetuta esaustivamente

IDEA: proprietà per gruppo di oggetti

Esempio

Tutti i laureati in Informatica devono aver sostenuto l'esame di MMI

Qualche studente di Informatica non ha sostenuto l'esame di MMI

Problema: esprimere proprietà di gruppo

Soluzione: usare i ***quantificatori***

- **Universali:** proprietà soddisfatta per tutti i membri del gruppo
- **Esistenziali:** proprietà soddisfatta per qualche membro del gruppo

Logica predicativa

Rimedia alle limitazioni della logica proposizionale:

- Modella in maniera esplicita gli oggetti e le loro proprietà (chiamate **predicati**)
- Permette di costruire asserzioni con **variabili** e **quantificatori**

Logica predicativa

Elementi fondamentali della logica predicativa:

- **costante**: modella uno specifico oggetto

  Esempi: *Rocco, Potenza, 13,....*
- **variabile**: rappresenta un oggetto di un **tipo** specificato
  - il tipo è definito stabilendo un **universo del discorso**
  - **Esempi:** *x, y in essere* ***persone***, ***studenti***, ***numeri***,...
- **predicato**: rappresenta la proprietà o le relazioni tra gli oggetti
  - **Esempio:** *x è più piccolo di 13*

    P = più piccolo di 13 — ***predicato***

    x è più piccolo di 13 — ***denotato con P(x)***

Predicati

Predicato: rappresenta la proprietà o le relazioni tra gli oggetti

- Un predicato **P(x)** assume un valore Vero o Falso in dipendenza del fatto che la proprietà **P vale o meno per x**
- La variabile x è un oggetto preso dall'universo del discorso

Esempio: predicato **Studenti(x)**, dove *universo del discorso*=**Persone**

- *Studente(Giovanni)* ***T*** *se* *Giovanni è uno studente*
- *Studente(Anna)* ***T*** *se* *Anna è uno studente*
- *Studente(Nicola)* ***F*** *se* *Nicola non è uno studente*

Predicati

Esempio: Sia **P(x)** un predicato che rappresenta l'asserzione:

x è un numero primo

Quali sono i valori di verità di:

- *P(2)* ***T***
- *P(3)* ***T***
- *P(4)* ***F***
- *P(5)* ***T***
- *P(6)* ***F***
- *P(7)* ***T***

Tutte le asserzioni P(2), P(3), P(4), P(5), P(6), P(7) sono proposizioni

Predicati

Esempio: Sia **P(x)** un predicato che rappresenta l'asserzione:

x è un numero primo

Quali sono i valori di verità di:

- *P(2)* ***T***
- *P(3)* ***T***
- *P(4)* ***F***
- *P(5)* ***T***
- *P(6)* ***F***
- *P(7)* ***T***
- ***P(x) è una proposizione? NO!***

Predicati

I predicati possono avere più **argomenti**, e quindi rappresentare la **relazione tra gli argomenti**

Esempi:

- **Piu_vecchio**(*Rocco, Chiara*)
  - denota l'asserzione *Rocco è più vecchio di Chiara*
  - È una proposizione perché è vera o falsa
- **Piu_vecchio**(*x, y*)
  - denota l'asserzione *x è più vecchio di y*
  - Non è una proposizione, ma la diventa dopo aver sostituto alle variabili x ed y i valori

Predicati

I predicati possono avere più **argomenti**, e quindi rappresentare la **relazione tra gli argomenti**

Esempi:

$Q(x, y)$ denota $x+5 > y$ *è una proposizione?* **NO**

Predicati

I predicati possono avere più **argomenti**, e quindi rappresentare la **relazione tra gli argomenti**

Esempi:

$Q(x, y)$ denota $x+5 > y$ *è una proposizione?* **NO**

$Q(13, 20)$ *è una proposizione?* **SI**

Predicati

I predicati possono avere più **argomenti**, e quindi rappresentare la **relazione tra gli argomenti**

Esempi:

$Q(x, y)$ denota $x+5 > y$	*è una proposizione?*	**NO**
$Q(13, 20)$	*è una proposizione?*	**SI**
$Q(13, 20)$	*valore di verità?*	**F**

Predicati

I predicati possono avere più **argomenti**, e quindi rappresentare la **relazione tra gli argomenti**

Esempi:

$Q(x, y)$ denota $x+5 > y$	*è una proposizione?*	**NO**
$Q(13, 20)$	*è una proposizione?*	**SI**
$Q(13, 20)$	*valore di verità?*	**F**
$Q(13, 16)$	*valore di verità?*	**T**

Predicati

I predicati possono avere più **argomenti**, e quindi rappresentare la **relazione tra gli argomenti**

Esempi:

$Q(x, y)$ denota $x+5 > y$	*è una proposizione?*	**NO**
$Q(13, 20)$	*è una proposizione?*	**SI**
$Q(13, 20)$	*valore di verità?*	**F**
$Q(13, 16)$	*valore di verità?*	**T**
$Q(13, y)$	*è una proposizione?*	**NO**

Asserzioni composte

I **predicati composti** sono ottenuti attraverso connettivi logici

Esempio:

- **Studente(Rocco) ∧ Studente(Chiara)**
  - **Traduzione:** *Sia Rocco che Chiara sono studenti*
  - **Proposizione: SI**
- **Città(Potenza) ∨ Fiume(Potenza)**
  - **Traduzione:** *Potenza è una città o un fiume*
  - **Proposizione: SI**
- **MMI(x) → Matricola(x)**
  - **Traduzione:** *Se x segue il corso di MMI allora x è una matricola*
  - **Proposizione: NO**

Asserzioni quantificate

La logica predicativa consente di fare asserzioni su **gruppi di oggetti**

Vengono utilizzate **asserzioni quantificate**

- **universale**
  - **Esempio:** *Tutti gli studenti di MMI sono iscritti ad Informatica*
  - L'asserzione è vera per tutti gli studenti di MMI
- **esistenziale**
  - **Esempio:** *Alcuni studenti di Informatica si laureano con lode*
  - L'asserzione è vera per alcuni studenti di Informatica

Quantificatore universale

La **quantificazione universale di P(x)** è l'asserzione:

P(x) è vera per tutti i valori di x nel dominio

La notazione **∀x P(x)** denota la quantificazione universale di P(x), ed è espressa dicendo **per ogni x, P(x) è vera**

Esempio

- **MMI(x) → Matricola(x)**
  - **Traduzione:** *Se x segue il corso di MMI allora x è una matricola*
  - **Proposizione: NO**

- **∀x (MMI(x) → Matricola(x))**
  - **Dominio:** persone
  - **Traduzione:** *Se una persona segue il corso di MMI allora è una matricola*
  - **Proposizione: SI**

Quantificatore universale

La quantificazione converte un predicato P(x) in una proposizione poiché fissa il valore di P(x) per variabili prese da un insieme

Esempio

- Supponiamo che P(x) denoti $x \geq 0$
- P(x) è una proposizione? **NO. Può assumere molti valori diversi**
- $\forall x$ P(x) è una proposizione?
  - **SI. Il valore di $\forall x$ P(x) è ben definito**
  - **è vero se P(x) è vero per ogni x nel dominio**
  - **è falso se esiste un valore di x per cui P(x) risulta falso**

Quantificatore universale

Nell'utilizzo del quantificatore è importante definire esattamente il **dominio** (l'universo del discorso)

Esempio

- Supponiamo che P(x) denoti $x \geq 0$
- Quale è il valore di $\forall x\, P(x)$?
  - Sia l'insieme dei **numeri interi** (**Z** = { …, −1, 0, 1, 2, … }) il **dominio**
    - ✓ $\forall\, x \in \mathbf{Z}\ P(x)$
    - ✓ **Falso. Poiché per x=−1 abbiamo x<0**
  - Sia l'insieme dei **numeri naturali** (**N** = { 0, 1, 2, … }) il **dominio**
    - $\forall\, x \in \mathbf{N}\ P(x)$
    - **Vero.**

Quantificatore universale

Un elemento x del dominio per il quale P(x) è falsa è detto **controesempio** di ∀x P(x)

Per provare che una asserzione che utilizza un quantificatore universale è falsa basta individuare un controesempio

Esempio

sia P(x) = «x ≥ 0», con dominio l'insieme dei numeri interi **Z**, si ha che

∀x P(x) è falso

La prova è data dall'esistenza di un intero come **x=-1** per il quale P(x) è falso. Cioè **x=-1 è un controesempio per ∀x P(x)**

Quantificatore esistenziale

La **quantificazione esistenziale di P(x)** è l'asserzione:

Esiste almeno un elemento nel dominio per il quale P(x) è vera

La notazione $\exists$**x P(x)** denota la quantificazione esistenziale di P(x), ed è espressa dicendo **esiste un x tale che P(x) è vera**

Esempio

- **P(x) = «x > 13»**
  - **Dominio:** *Insieme dei numeri reali **R***
  - **Valore di verità di $\exists$x P(x) : T (E' possibile trovare un x > 13 in R)**

Quantificatore esistenziale

Esempio

- **Laureato_Inf(x) ∧ Lode(x)**
  - **Traduzione***: x è un laureato in Informatica e x si è laureato con lode*
  - **Proposizione: ?**

Quantificatore esistenziale

Esempio

- **Laureato_Inf(x) ∧ Lode(x)**
  - **Traduzione**: *x è un laureato in Informatica e x si è laureato con lode*
  - **Proposizione: NO!**

- **∃ x Laureato_Inf(x) ∧ Lode(x)**
  - **Dominio**: *Persone*
  - **Traduzione**: *esiste una persona che è un laureata in Informatica e che si è laureata con lode*
  - **Proposizione: ?**

Quantificatore esistenziale

Esempio

- **Laureato_Inf(x) ∧ Lode(x)**
  - **Traduzione:** *x è un laureato in Informatica e x si è laureato con lode*
  - **Proposizione: NO!**
- **∃ x Laureato_Inf(x) ∧ Lode(x)**
  - **Dominio:** *Persone*
  - **Traduzione:** *esiste una persona che è un laureata in Informatica e che si è laureata con lode*
  - **Proposizione: SI!**

Asserzioni quantificate

Asserzione	Quando è vera?	Quando è falsa?
$\forall x\ P(x)$	P(x) è vera per tutti gli x	C'è un x per il quale P(x) è falsa
$\exists x\ P(x)$	C'è qualche x per il quale P(x) è vera	P(x) è falsa per tutti gli x

Supponiamo che gli elementi del dominio possano essere enumerati, cioè essi siano $x_1, x_2, \ldots, x_N$ allora

- $\forall x\ P(x)$ è vera se $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_N)$ è vera
- $\exists x\ P(x)$ è vera se $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_N)$ è vera

Asserzioni quantificate

Esempio

- Supponiamo che **P(x)** denoti ***«x^2 > 10»***
- **Dominio:** *{1,2,3,4}*
- Quale è il valore di verità di **∃x P(x)** ?
- **Risposta:**
  - il valore di **∃x P(x)** è lo stesso della disgiunzione ***P(1) ∨P(2) ∨P(3) ∨P(4)***
  - poiché, **P(4)= 16 > 10**, abbiamo **∃x P(x) è vera**

Asserzioni quantificate

Esempio

- Supponiamo che **P(x)** denoti ***«x^2 > 10»***
- **Dominio:** *{1,2,3,4}*
- Quale è il valore di verità di **∀x P(x)** ?
- **Risposta:**
  - il valore di **∀x P(x)** è lo stesso della disgiunzione ***P(1) ∧ P(2) ∧ P(3) ∧ P(4)***
  - poiché, **P(1)= 1 < 10**, abbiamo **∀x P(x) è falsa**

Traduzione asserzioni quantificate

La formulazione di un asserzione nella logica predicativa dipende dal dominio

Esempio

Tutti gli studenti di Informatica sono simpatici

- **Dominio:** *studenti di Informatica*
- **Traduzione:** $\forall x \, Simpatico(x)$

- **Dominio:** *studenti*
- **Traduzione:** $\forall x \, (Inf(x) \rightarrow Simpatico(x))$

- **Dominio:** *persone*
- **Traduzione:** $\forall x \, ((Stud(x) \land Inf(x)) \rightarrow Simpatico(x))$

Traduzione asserzioni quantificate

La formulazione di un asserzione nella logica predicativa dipende dal dominio

Esempio

Qualche studente di ingegneria è simpatico

- **Dominio:** *studenti di Ingegneria*
- **Traduzione:** $\exists x$ **Simpatico(x)**

- **Dominio:** *studenti*
- **Traduzione:** $\exists x$ **(Ing(x)** $\land$ **Simpatico(x))**

Traduzione asserzioni quantificate

Tipicamente, date due qualunque predicati **S(x)** e **P(x)**:

Le asserzioni universali sono legate alle implicazioni

- Tutti S(x) sono P(x) $\quad$ **$\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))$**
- Nessun S(x) è P(x) $\quad$ **$\forall x\,(S(x) \rightarrow \neg P(x))$**

Esempio

Tutti gli italiani mangiano la pasta

- **Dominio:** *italiani*
- **Traduzione: $\forall x$ Mangia_pasta(x)**

- **Dominio:** *persone*
- **Traduzione: $\forall x$ (Italiano(x) $\rightarrow$ Mangia_pasta(x))**

Traduzione asserzioni quantificate

Tipicamente, date due qualunque predicati **S(x)** e **P(x)**:

Le asserzioni esistenziali sono legate alle congiunzioni

- Qualche S(x) è P(x) — **$\exists x\ (S(x) \land P(x))$**
- Qualche S(x) non è P(x) — **$\exists x\ (S(x) \land \neg P(x))$**

Esempio

Qualche italiano è vegano

- **Dominio:** *italiani*
- **Traduzione: $\exists x$ Vegano(x)**

- **Dominio:** *persone*
- **Traduzione: $\exists x$ (Italiano(x) $\land$ Vegano(x))**

Quantificatori innestati

Più di un quantificatore può essere necessario per rappresentare una qualche asserzione

Esempio

Ogni numero reale ha un corrispondente negativo

Assumiamo che:

- il dominio sia l'insieme dei numeri reali **R**
- P(x,y) = «$x+y=0$»

Traduzione: $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$

Quantificatori innestati

Invertendo i quantificatori le asserzioni potrebbero avere un significato completamente differente

L'ordine dei quantificatori innestati è importante

Esempio

Un italiano si laurea in Informatica ogni ora

Assumiamo che A(x,y) = «*x si laurea nell'ora y*»

Traduzione 1: $\exists x \, \forall y \, A(x,y)$

Traduzione 2: $\forall y \, \exists x \, A(x,y)$

Qual è corretta? Traduzione 2!

Quantificatori innestati

Invertendo i quantificatori le asserzioni potrebbero avere un significato completamente differente

L'ordine dei quantificatori innestati è importante

Esempio

∀x ∃y Ama(x,y) *è diverso da* ***∃y ∀x Ama(x,y)***

Assumiamo che Ama(x,y) = «*x ama y*»

∀x ∃y A(x,y) si traduce come ***«Ognuno ama qualcuno»***

∃y ∀x A(x,y) si traduce come ***«Esiste qualcuno che è amato da tutti»***

Esercizi

Supponiamo:

- Le variabili x,y denotano persone
- *Ama(x,y) = «x ama y»*

Si traducano le seguenti asserzioni:

- Ognuno ama Antonio
  - **$\forall x$ Ama(x,Antonio)**
- Ognuno ama qualcuno
  - **$\forall x \exists y$ Ama(x,y)**

Esercizi

Supponiamo:

- Le variabili x,y denotano persone
- *Ama(x,y)* = «*x ama y*»

Si traducano le seguenti asserzioni:

- C'è qualcuno che ama ogni altro
  - **$\exists x \forall y$ Ama(x,y)**
- C'è qualcuno che non è amato da Antonio
  - **$\exists y\ \neg$Ama(Antonio,y)**
- C'è qualcuno che non ama nessun altro
  - **$\exists x\ \forall y\ \neg$Ama(x,y)**

Negazione di quantificatori

Esempio

Niente è perfetto

Traduzione: $\neg(\exists x \, Perfect(x))$

Un altro modo per esprimere l'asserzione precedente è:

Ogni cosa è imperfetta

Traduzione: $\forall x \, \neg Perfect(x)$

Negazione di quantificatori

Esempio

Niente è perfetto

Traduzione: $\neg(\exists x\ Perfect(x))$

Un altro modo per esprimere l'asserzione precedente è:

Ogni cosa è imperfetta

Traduzione: $\forall x\ \neg Perfect(x)$

$\neg(\exists x\ Perfect(x))$ è equivalente a $\forall x\ \neg Perfect(x)$

Negazione di quantificatori

Esempio

Non è vero che tutti gli italiani mangiano pasta

Traduzione: $\neg \forall x\,(Italiano(x) \rightarrow Mangia\_pasta(x))$

Un altro modo per esprimere l'asserzione precedente è:

C'è qualche italiano che non mangia pasta

Traduzione: $\exists x\,(Italiano(x) \land \neg Mangia\_pasta(x))$

Equivalente a $\exists x\, \neg(Italiano(x) \rightarrow Mangia\_pasta(x))$

$\neg(\forall x\, P(x))$ è equivalente a $\exists x\, \neg P(x)$

Negazione di quantificatori

Esistono le seguenti leggi di De Morgan per la negazione dei quantificatori

Negazione	**Asserzione equivalente**
$\neg \forall x\, P(x)$	$\exists x\, \neg P(x)$
$\neg \exists x\, P(x)$	$\forall x\, \neg P(x)$

Negazione di quantificatori

Proviamo che **$\neg\forall x\, P(x)$ è equivalente a $\exists x\, \neg P(x)$**

Dim.

Cominciamo col provare che **$\neg\forall x\, P(x) \rightarrow \exists x\, \neg P(x)$**

Se **$\neg(\forall x\, P(x))$ è vera** => **$(\forall x\, P(x))$ è falsa**

=> **$\exists x$ per il quale $P(x)$ è falsa**, cioè

$\exists x$ per il quale $\neg P(x)$ è vera, cioè **$\exists x\, \neg P(x)$**

Negazione di quantificatori

Proviamo che **$\neg\forall x\ P(x)$ è equivalente a $\exists x\ \neg P(x)$**

Dim.

Ci rimane da provare che **$\exists x\ \neg P(x) \rightarrow \neg\forall x\ P(x)$**

Se **$\exists x\ \neg P(x)$ è vera** => **$\exists x$ per cui $P(x)$ è falsa**

=> **non è vero che $\forall x\ P(x)$ è vera**, cioè

$\neg\ (\forall x\ P(x))$

Negazione di quantificatori innestati

Per negare asserzioni con quantificatori innestati, si applica la negazione al quantificatore più a sinistra ed utilizzando le regole

$$\neg\forall x\, P(x) \text{ è equivalente a } \exists x\, \neg P(x)$$

$$\neg\exists x\, P(x) \text{ è equivalente a } \forall x\, \neg P(x)$$

si procede applicando la negazione al quantificatore immediatamente successivo, e così via

Esempio

Non c'è una persona che ama tutti gli altri

Traduzione: $\neg\exists x\, \forall y\, Ama(x,y)$

$$\neg\exists x\, (\forall y\, Ama(x,y)) \equiv \forall x\, \neg(\forall y\, Ama(x,y)) \equiv \forall x\, \exists y\, \neg Ama(x,y)$$

Esercizio

Quale è la negazione della seguente asserzione?

Tutte le auto straniere hanno difetti di fabbricazione

$$\forall x\, (AutoStraniera(x) \rightarrow Difettosa(x))$$

$$\neg\, \forall x\, (\mathrm{AutoStraniera}(x) \rightarrow \mathrm{Difettosa}(x))$$

$$\exists x\, \neg\, (\mathrm{AutoStraniera}(x) \rightarrow \mathrm{Difettosa}(x))$$

$$\exists x\, \neg\, (\neg\, \mathrm{AutoStraniera}(x) \vee \mathrm{Difettosa}(x))$$

$$\exists x\, (\, \mathrm{AutoStraniera}(x) \wedge \neg\, \mathrm{Difettosa}(x)\,)$$

Esercizio

Assumiamo che l'universo del discorso sia l'insieme dei numeri naturali **N**. Consideriamo la seguente asserzione:

Tutti i numeri primi sono dispari

Essa è vera o falsa? Perché?

$$\forall x\ (Primo(x) \rightarrow Dispari(x))$$

Controesempio: x =2

L'asserzione è falsa!

Esercizio

Assumiamo che l'universo del discorso sia l'insieme dei numeri naturali. Quale è la negazione della seguente asserzione:

Tutti i numeri primi sono dispari

$$\forall x\ (Primo(x) \rightarrow Dispari(x))$$

$$\neg\ \forall x\ (Primo(x) \rightarrow Dispari(x))$$

$$\exists x\ \neg(Primo(x) \rightarrow Dispari(x))$$

$$\exists x\ (Primo(x) \land \neg Dispari(x))$$

Esercizio

Quale è la negazione della seguente asserzione:

C'è un giocatore della Juve che è infortunato

Dominio = *l'insieme dei giocatori di calcio*

Juve(x) = «x è un giocatore della Juve»

Salute(x) = «x è in salute»

$$\exists x \ (Juve(x) \land \neg Salute(x))$$

$$\neg \exists x \ (Juve(x) \land \neg Salute(x))$$

$$\forall x \ \neg (Juve(x) \land \neg Salute(x))$$

$$\forall x \ (\neg Juve(x) \lor Salute(x))$$

$$\forall x \ (Juve(x) \rightarrow Salute(x))$$