Architettura degli Elaboratori

Esercitazione

Barbara Masucci
UNIVERSITA DEGLI STUDI DI SALERNO
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
DIPARTIMENTO DI ECCELLENZA

Su cosa ci esercitiamo oggi?

- Espressioni booleane
  - Forma normale SOP e forma canonica SOP
  - Minimizzazione di espressioni booleane

- Sintesi di reti logiche
  - Reti AND-to-OR
  - Minimizzazzione di reti AND-to-OR

Esercizio 1

- Esprimere la funzione
  $$F=x\cdot\overline{(y+z)}$$
  in forma canonica SOP

- Inoltre, disegnare il circuito minimale che realizza la funzione F

Esercizio 1: Soluzione

Scriviamo la tavola di verità di $F=x\cdot\overline{(y+z)}$

Tavola di verità

x	y	z	$y+z$	$\overline{y+z}$	F
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

La tavola di verità di F ha un solo 1:
F è un mintermine

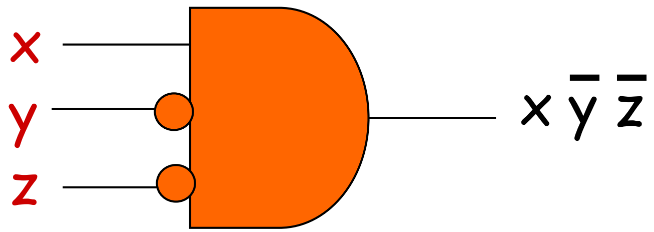
$F = x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$

Infatti, applicando la legge di De Morgan si ha

$$F = x\cdot\overline{(y+z)} = x\cdot(\bar{y}\cdot\bar{z}) = x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$$

Esercizio 1: Soluzione

Il circuito minimale che realizza la funzione F è



Esercizio 2

- Determinare l'espressione canonica SOP per la funzione F definita dalla seguente tavola di verità

x_2	x_1	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

- Inoltre, disegnare il circuito minimale che realizza la funzione F

Esercizio 2: Soluzione

Troviamo i mintermini corrispondenti alle occorrenze di 1 nella tavola di verità e sommiamoli

x_2	x_1	F	
0	0	1	$\overline{x_2}\cdot\overline{x_1}$
0	1	0	
1	0	1	$x_2\cdot\overline{x_1}$
1	1	0	

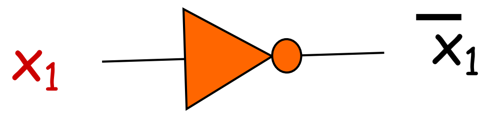
Espressione canonica SOP

$$F = \overline{x_2}\cdot\overline{x_1} + x_2\cdot\overline{x_1}$$
$$= (\overline{x_2} + x_2)\cdot\overline{x_1}$$
$$= \overline{x_1}$$

Espressione minimale

Esercizio 2: Soluzione

Il circuito minimale che realizza la funzione F è



Esercizio 3

- Esprimere la funzione XOR in forma canonica SOP

- Inoltre, disegnare il circuito minimale che realizza la funzione XOR

Esercizio 3: Soluzione

- Esprimere la funzione XOR in forma canonica SOP

x	y	$x \oplus y$	
0	0	0	
0	1	1	$\overline{x} \cdot y$
1	0	1	$x \cdot \overline{y}$
1	1	0	

Tavola di verità

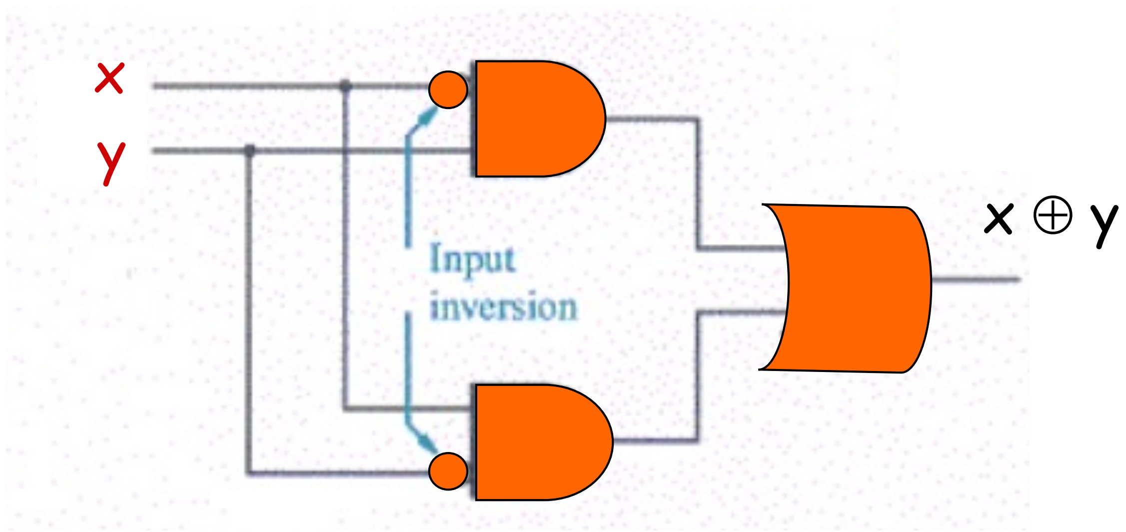
Espressione canonica SOP

$$x \oplus y = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y}$$

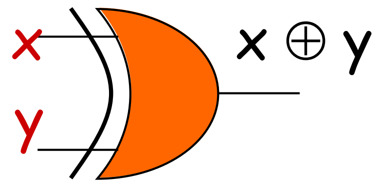
Esercizio 3: Soluzione

- Il circuito minimale che realizza la funzione XOR

$$x \oplus y = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y}$$



- Il circuito può essere sostituito dalla porta XOR



Esercizio 4

- Realizzare in forma canonica SOP la funzione XOR negata, cioè la coincidenza:

$$\overline{x \oplus y}$$

- Inoltre, disegnare il circuito minimale che realizza la funzione coincidenza

Esercizio 4: Soluzione

- Realizzare in forma canonica SOP la funzione XOR negata, cioè la coincidenza: $\overline{x \oplus y}$

x	y	$\overline{x \oplus y}$	
0	0	1	$\overline{x} \cdot \overline{y}$
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	$x \cdot y$

Tavola di verità

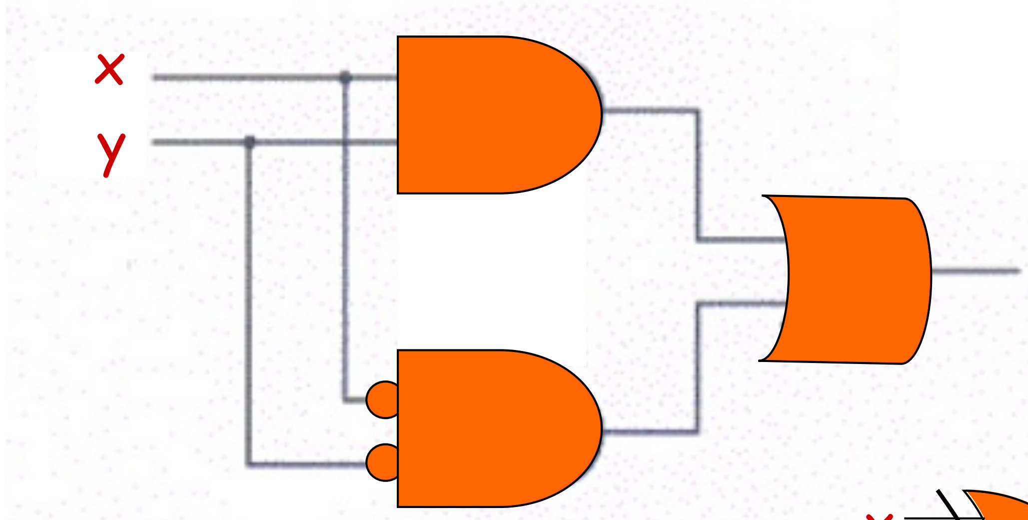
Espressione canonica SOP

$$\overline{x \oplus y} = \overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot y$$

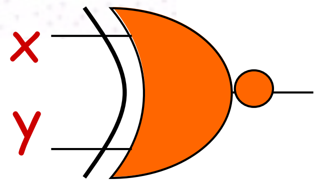
Esercizio 4: Soluzione

- Il circuito minimale che realizza la funzione coincidenza

$$\overline{x \oplus y} = x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y}$$



- Usando la porta XOR si ha



Espressioni POS

- Un'espressione booleana è in forma normale POS (Product Of Sums) quando è l'AND di OR di letterali

$$(\overline{x_2} + \overline{x_3})(x_1 + \overline{x_3})$$

- Maxtermine: somma di letterali in cui compare ogni variabile o vera o negata
- Una espressione normale POS è in forma canonica POS se i suoi termini sono tutti maxtermini

$$(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})$$

Maxtermini

Se la funzione logica è un maxtermine,
la sua tavola di verità ha un solo 0

Esempio:

se $f = x_3 + \overline{x_2} + \overline{x_1}$ la tavola di verità ha un solo 0 in corrispondenza di $x_3=0$, $x_2=1$, $x_1=1$

Ricorda:

L'OR è 0 sse ogni variabile è 0

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f = x_3 + \overline{x_2} + \overline{x_1}$

Viceversa, se la tavola di verità di f ha un solo 0 necessariamente f è un maxtermine

Dalla tavola di verità all'espressione POS

Se invece la tavola di verità ha più occorrenze di 0, troviamo i maxtermini corrispondenti e ne facciamo il prodotto

x_3	x_2	x_1	f	
0	0	0	0	$x_3+x_2+x_1$
0	0	1	0	$x_3+x_2+\overline{x_1}$
0	1	0	0	$x_3+\overline{x_2}+x_1$
0	1	1	1	
1	0	0	0	$\overline{x_3}+x_2+x_1$
1	0	1	1	
1	1	0	0	$\overline{x_3}+\overline{x_2}+x_1$
1	1	1	0	$\overline{x_3}+\overline{x_2}+\overline{x_1}$

Nota: la combinazione di input 000 corrisponde al maxtermine $x_3+x_2+x_1$

Nota: la combinazione di input 111 corrisponde al maxtermine $\overline{x_3}+\overline{x_2}+\overline{x_1}$

Dall'espressione POS a una rete a due livelli

- Nel primo livello varie porte OR
  - Tante, quanti sono i maxtermini
- Nel secondo livello, solo una porta AND

La rete risultante è detta OR-to-AND

Rete AND-to-OR o OR-to-AND?

- Guardiamo la tavola di verità della funzione f
  - Se ci sono meno occorrenze di 1 che di 0, costruiamo la rete AND-to-OR attraverso la forma canonica SOP
  - Se ci sono meno occorrenze di 0 che di 1, costruiamo la rete OR-to-AND attraverso la forma canonica POS

Esercizio 5

Determinare l'espressione canonica POS per la funzione F definita dalla seguente tavola di verità

x_2	x_1	F
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Inoltre, disegnare il circuito OR-to-AND che realizza la funzione F

Suggerimento: usare le leggi di De Morgan

Esercizio 5: Soluzione

Innanzitutto determiniamo la tavola di verità per la funzione $\overline{F}$

x_2	x_1	$\overline{F}$	
0	0	1	$\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1$
0	1	0	
1	0	1	$x_2 \cdot \overline{x}_1$
1	1	0	

Poi determiniamo la forma canonica SOP per $\overline{F}$

$$\overline{F}_{SOP} = \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1 + x_2 \cdot \overline{x}_1$$

Esercizio 5: Soluzione

Da cui si ottiene

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1 + x_2 \cdot \overline{x}_1}$$

$$= (\overline{\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1}) \cdot (\overline{x_2 \cdot \overline{x}_1})$$

$$= (\overline{\overline{x}}_2 + \overline{\overline{x}}_1) \cdot (\overline{x}_2 + \overline{\overline{x}}_1)$$

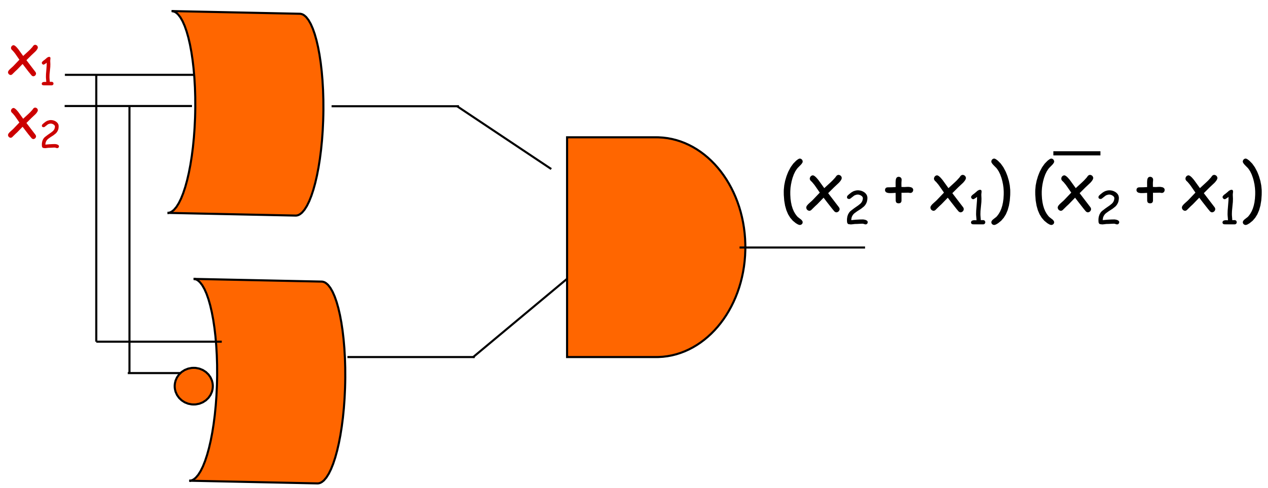
$$= (x_2 + x_1) \cdot (\overline{x}_2 + x_1)$$

x_2	x_1	F	
0	0	0	$x_2 + x_1$
0	1	1	
1	0	0	$\overline{x}_2 + x_1$
1	1	1	

Espressione canonica POS:
prodotto dei maxtermini in corrispondenza dei quali F assume valore 0

Esercizio 5: Soluzione

Il circuito OR-to-AND che realizza la funzione F è



Esercizio 6

- Sia $N_2=(b_2b_1b_0)$ un numero in binario puro e sia $F(b_2b_1b_0)$ la funzione che determina se N è un numero primo
  - Determinare la tavola di verità di F
  - Esprimere la funzione F in forma canonica SOP

Esercizio 6: Soluzione

Scriviamo la tavola di verità per la funzione F

F vale 1 quando N=2,3,5,7

b_2	b_1	b_0	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tavola di verità

Esercizio 6: Soluzione

Troviamo i mintermini corrispondenti alle occorrenze di 1 nella tavola di verità e sommiamoli

b_2	b_1	b_0	F	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\overline{b}_2 \cdot b_1 \cdot \overline{b}_0$
0	1	1	1	$\overline{b}_2 \cdot b_1 \cdot b_0$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$b_2 \cdot \overline{b}_1 \cdot b_0$
1	1	0	0	
1	1	1	1	$b_2 \cdot b_1 \cdot b_0$

Tavola di verità

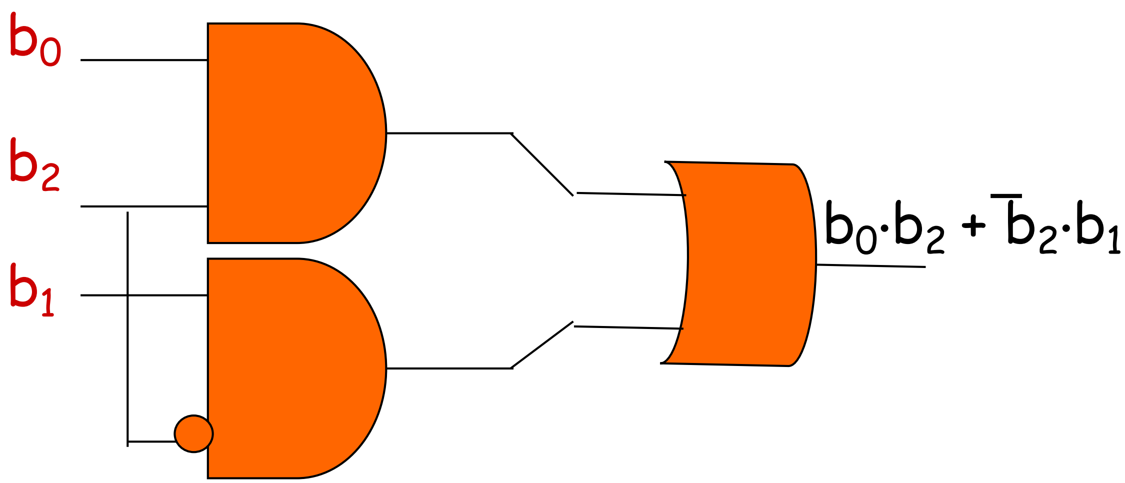
$$F = \overline{b}_2 \cdot b_1 \cdot \overline{b}_0 + \overline{b}_2 \cdot b_1 \cdot b_0 + b_2 \cdot \overline{b}_1 \cdot b_0 + b_2 \cdot b_1 \cdot b_0$$

$$= \overline{b}_2 \cdot b_1 \cdot (\overline{b}_0 + b_0) + b_2 \cdot b_0 \cdot (\overline{b}_1 + b_1)$$

$$= \overline{b}_2 \cdot b_1 + b_2 \cdot b_0$$

Esercizio 6: Soluzione

Il circuito minimale che realizza la funzione è



Esercizio 7

- Sia $N_2=(b_3b_2b_1b_0)$ un numero in binario puro e sia $F(b_3b_2b_1b_0)$ la funzione che determina se $4 \leq N \leq 7$
  - Determinare la tavola di verità di F
  - Esprimere la funzione F in forma canonica SOP

Esercizio 7: Soluzione

b_3	b_2	b_1	b_0	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Scriviamo la tavola di verità per la funzione F

F vale 1 quando N=4,5,6,7

Tavola di verità

Esercizio 7: Soluzione

b_3	b_2	b_1	b_0	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Troviamo i mintermini corrispondenti alle occorrenze di 1 nella tavola di verità e sommiamoli

$\overline{b}_3 \cdot b_2 \cdot \overline{b}_1 \cdot \overline{b}_0$

$\overline{b}_3 \cdot b_2 \cdot \overline{b}_1 \cdot b_0$

$\overline{b}_3 \cdot b_2 \cdot b_1 \cdot \overline{b}_0$

$\overline{b}_3 \cdot b_2 \cdot b_1 \cdot b_0$

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{b}_3 \cdot b_2 \cdot \overline{b}_1 \cdot \overline{b}_0 + \overline{b}_3 \cdot b_2 \cdot \overline{b}_1 \cdot b_0 \\
&\quad + \overline{b}_3 \cdot b_2 \cdot b_1 \cdot \overline{b}_0 + \overline{b}_3 \cdot b_2 \cdot b_1 \cdot b_0 \\
&= \overline{b}_3 \cdot b_2 \cdot \overline{b}_1 \cdot (\overline{b}_0 + b_0) + \overline{b}_3 \cdot b_2 \cdot b_1 \cdot (\overline{b}_0 + b_0) \\
&= \overline{b}_3 \cdot b_2 \cdot \overline{b}_1 + \overline{b}_3 \cdot b_2 \cdot b_1 \\
&= \overline{b} \cdot {}_3 b_2 \cdot (\overline{b}_1 + b_1) \\
&= \overline{b}_3 b_2
\end{aligned}
$$

Esercizio 7: Soluzione

Il circuito minimale che realizza la funzione è