Lezioni 9-11 e 10-11

mercoledì 9 novembre 2022 09:11

(2) $W = \{3h+1 \mid h \in \mathbb{N}_0\} = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$

i) dimostrare se è parte stabile di $(\mathbb{N}, \cdot)$ e $(\mathbb{N}, +)$

- $\forall\, (3h+1), (3k+1) \in W$ , $\underbrace{(3h+1)(3k+1)}$ $\in W$

$$\underbrace{9kh + 3h + 3k + 1} \overset{?}{\in} W$$

$$3\underbrace{(3hk + h + k)}_{e} + 1$$

$$\left(\underline{\text{NB}} \text{ se } h, k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow 3hk + h + k \in \mathbb{N}_0\right)$$

- $(3h+1) + (3k+1) = 3(h+k) + \underline{\underline{2}} \notin W$

$$1 + 4 = (3 \cdot 0 + 1)(3 \cdot 1 + 1) = 5 = 4 + 1 \notin W$$

non è multiplo di 3

(ii) $(3h+1)\, R\, (3k+1) \iff h+k \in 2\mathbb{N}_0$

(1) $(3h+1)\, R\, (3h+1)$ ?

è vero se $h+h$ è pari. Poiché $h+h = 2h$ è ovviamente pari

(2) $\underbrace{(3h+1)\, R\, (3k+1)}_{\text{è vero per ipotesi}} \Rightarrow (3k+1)\, R\, (3h+1)$

$\Rightarrow h+k \in 2\mathbb{N}_0$ . Ma allora $k+h \in 2\mathbb{N}_0 \Rightarrow$

allora per definizione di $R$ $(3k+1)\, R\, (3h+1)$ vero!

(3) Se $\left.\begin{array}{c} (3h+1)\, R\, (3k+1) \\ e \\ (3k+1)\, R\, (3l+1) \end{array}\right] \Rightarrow (3h+1)\, R\, (3l+1)$

$\Downarrow$

entrambe vere per ipotesi

$h+k \in 2\mathbb{N}_0$ e $k+l \in 2\mathbb{N}_0$

- $h,k$ pari $\Rightarrow k,l$ pari $\Rightarrow h+l$ è pari
- $h,k$ dispari $\Rightarrow k,l$ dispari $\Rightarrow h+l$ è pari

$\Rightarrow h+l$ è pari in entrambi i casi $\Rightarrow$ la tesi -

(4) R è congruenza : se

$$\left.\begin{array}{l} 3h+1 \ R \ 3k+1 \\ 3s+1 \ R \ 3t+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} h+k \text{ è pari} \\ s+t \text{ è pari} \end{array}$$

$$\Rightarrow (3h+1)(3s+1) \ R \ (3k+1)(3t+1)$$

$$3(3hs+h+s)+1 \ R \ 3(3kt+k+t)+1$$

$$3hs+h+s+3kt+k+t \text{ è pari ?}$$

$+$ è pari

$+$ è pari

$$(3hs+3kt)+\underbrace{(h+k)+(s+t)}_{\text{è pari}}$$

vediamo che $3(hs+kt)$ è pari

$\Updownarrow$

$hs+kt$ è pari

- $h,k$ dispari
  - $s,t$ dispari $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} hs \text{ è dispari} \\ kt \text{ è dispari} \end{array}\right\}$ $hs+kt$ è pari
  - $s,t$ pari $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} hs \text{ è pari} \\ kt \text{ è pari} \end{array}\right\}$ $hs+kt$ è pari
- $h,k$ pari
  - $s,t$ dispari ....

n,m pari — s,t dispari ....

s,t pari ....

in ogni caso $hs+st$ è pari $\Rightarrow$ $3(hs+st)$ è pari

$\Rightarrow$ segue la tesi

(c) $\left(W/_R, \cdot\right)$

$(\mathbb{N}_0, \cdot)$ è un monoide commutativo

ovvio: $h=0$

$\Rightarrow$ se dimostro che $1 \in W$, $\Rightarrow$ $(W, \cdot)$ è monoide commutativo

e $\left(W/_R, \cdot\right)$ è monoide commutativo (quoziente)

③ $W = \{3^n 7^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}$

(i) $(3^n 7^m) \cdot (3^s 7^t) = 3^{n+s} \cdot 7^{m+t} \in W$

(ii) $(3^n 7^m) + (3^s 7^t) \Rightarrow 3^0 7^0 + 3^0 7^0 = 1 + 1 = 2 \notin W$

(iii) $3^n 7^m \; R \; 3^s 7^t \iff |n-m| = |s-t|$

(A) $3^n 7^m \; R \; 3^n 7^m \iff |n-m| = |n-m|$ vero

(B) $\underbrace{3^n 7^m \; R \; 3^s 7^t} \overset{?}{\Rightarrow} 3^s 7^t \; R \; 3^n 7^m$

$|n-m| = |s-t| \Rightarrow |s-t| = |n-m| \Rightarrow 3^s 7^t \; R \; 3^n 7^m$

(C) $\left.\begin{array}{l} 3^n 7^m \; R \; 3^s 7^t \\ \text{e} \\ 3^s 7^t \; R \; 3^h 7^k \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} 3^n 7^m \; R \; 3^h 7^k$

$|n-m| = |s-t|$ e $|s-t| = |h-k| \Rightarrow |n-m| = |h-k|$

e quindi $3^n 7^m \; R \; 3^h 4^k$

(iv) $3^1 7^2 \; R \; 3^2 7^1 \qquad |1-2| = |2-1|$

$3^0 7^2 \; R \; 3^2 7^4 \qquad |0-2| = |2-4|$

$$\underbrace{3^1 7^2 \cdot 3^0 7^2}_{} \; R \; 3^2 7^1 \; 3^2 7^4$$

$3^1 7^4 \; R \; 3^4 7^5$ non son in relazione

$|1-4| = 3 \qquad |4-5| = 1$

(5) $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot), (\mathbb{Z}_6, +, \cdot) \qquad G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, +, \cdot)$

(a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 = \{ ([0]_2, [0]_6), ([0]_2, [1]_6), ([0]_2, [2]_6),$
$([0]_2, [3]_6), ([0]_2, [4]_6), ([0]_2, [5]_6)$
$([1]_2, [0]_6), ([1]_2, [1]_6), ([1]_2, [2]_6),$
$([1]_2, [3]_6), ([1]_2, [4]_6), ([1]_2, [5]_6) \}$

(b) $[0]_6 + [2]_6 + [5]_6 = [0+2+5]_6 = [7]_6 = [1]_6$

$[1]_2 + [1]_2 + [1]_2 = [1+1+1]_2 = [3]_2 = [1]_2$

$[2]_6 \cdot [5]_6 = [10]_6 = [4]_6$

$[3]_6 \cdot [3]_6 = [9]_6 = [3]_6$

$([0]_2, [3]_6) + ([1]_2, [2]_6) = ([0+1]_2, [3+2]_6) =$
$= ([1]_2, [5]_6)$ -

$([1]_2, [1]_6) + ([0]_2, [4]_6) = ([1]_2, [5]_6)$

(c) $a \in R$ t.c. $\exists b \; (a \neq 0 \neq b) \quad ab = 0$

$([0]_2, [2]_6) \cdot ([0]_2, [3]_6) = ([0]_2, [6]_6) = ([0]_2, [0]_6)$

$([0]_2, [4]_6) \cdot ([0]_2, [3]_6) = ([0]_2, [12]_6) = ([0]_2, [0]_6)$

(D) $T = \{ (a, 2b) \mid a \in \mathbb{Z}_2, b \in \mathbb{Z}_6 \}$ è sottog di $(G, +)$

1) è parte stabile

$$(a_1, 2b_1) + (a_2, 2b_2) = (a_1 + a_2, 2b_1 + 2b_2) =$$

$$= (\underbrace{a_1 + a_2}_{\in \mathbb{Z}_2}, 2(\underbrace{b_1 + b_2}_{\in \mathbb{Z}_6})) \quad \text{ok}$$

2) $(\underbrace{[0]_2}_{\in \mathbb{Z}_2}, \underbrace{[0]_6}_{= 2[0]_6 = [0+0]_6 = [0]_6})$ è della forma $(a, 2b)$ con $a \in \mathbb{Z}_2$, $b \in \mathbb{Z}_6$

3) $(a, 2b) = ([c]_2, 2[d]_6) = ([c]_2, [2d]_6)$

$\Rightarrow$ in $G$ l'opposto è $([-c]_2, [-2d]_6) =$

$$= (\underbrace{[-c]_2}_{\in \mathbb{Z}_2}, 2\underbrace{[-d]_6}_{\in \mathbb{Z}_6})$$