Lezione 27-10

giovedì 27 ottobre 2022 14:11

$\frac{n!}{(n-h)!\,h!}$ → # di combinazioni di h oggetti estratti da n

COMBINAZIONI SEMPLICI : estraggo h oggetti da un insieme di n, senza ordine

DEF. Chiamiamo coefficiente binomiale di n su h il numero

$$\binom{n}{h} := \frac{n!}{(n-h)!\,h!} \qquad \left(= \binom{n}{n-h} \right)$$

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$

Sia X un insieme, con $|X| = n$. Allora il numero dei suoi sottoinsiemi di cardinalità h è proprio $\binom{n}{h}$

Dim

Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ di cardinalità h si ottiene scegliendo h elementi da X. Poiché Y è un insieme, non conta l'ordine. □

ES. $X = \{a, b, c, d\}$

$Y \subseteq X$ t.c. $|Y| = 2$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{\cancel{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 6$$

$Y \subseteq X$ t.c. $|Y| \leq 2$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \frac{\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,0!} + \frac{4!}{3!\,1!} + 6 = 1 + \frac{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} + 6$$

$$= 1 + 4 + 6 = 11$$

PROPRIETÀ del COEFFICIENTE BINOMIALE

① $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} a^n$

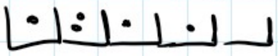
② $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$

③ Se p è primo, $p \mid \binom{p}{i} \quad \forall i < p$

COMBINAZIONI con RIPETIZIONE

Scegliere n oggetti tra k possibilità

n sassolini



k scatole

$\bullet\bullet|\bullet|\;|\bullet|\bullet|\bullet\bullet\bullet$

$k-1$ n pallini

$$\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\,n!} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

$$\binom{n+k-1}{n} = \frac{(n+k-1)!}{n!\,(n+k-1-n)!} = \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\,(n+k-1-(k-1))!} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\,n!}$$

Es –

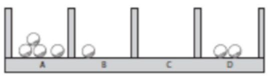
Un gelato composto da 3 palline scelte tra 5 gusti

G1 G.2 G.3 G4 G5

$n=3 \quad k=5$

$$\binom{3+5-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!}$$

Tipo di raggruppamento	Problema prototipo	Soluzione
Permutazione senza ripetizioni 	Contare gli anagrammi di una parola composta da n lettere diverse. Contare i modi per mischiare un mazzo di n carte diverse.	$n!$
Permutazione con ripetizioni 	Contare gli anagrammi di una parola composta da lettere che si ripetono (per esempio AAABBC).	$\frac{n!}{(k_1!)(k_2!)...(k_r!)}$
Disposizioni senza ripetizioni 	Estrarre k biglie da un'urna contenente n biglie diverse, mettendole in fila nell'ordine di estrazione. Contare gli esiti possibili.	$n_0 \times n_1 \times ... \times n_k$ dove n_j è il numero di scelte alla $j-esima$ assegnazione Nel caso di disposizioni semplici (per le quali $n_j = n-j$), il risultato è $\frac{n!}{(n-k)!}$

Tipo di raggruppamento	Problema prototipo	Soluzione
Disposizioni con ripetizioni 	Da un'urna contenente n biglie diverse, ripetere per k volte la seguente operazione: estrarre una biglia, segnare il risultato, rimettere la biglia nell'urna. Contare gli esiti possibili. Contare il numero di parole di n lettere che si possono formare utilizzando un alfabeto composto da k simboli diversi.	n^k
Combinazioni semplici 	Modi per annerire k caselle su n. Modi per estrarre un gruppo di k persone da una classe di n alunni.	$\binom{n}{k}$
Combinazioni con ripetizioni 	Dati n sassolini e k scatole etichettate, numero di modi per disporre i sassolini. Numeri di modi per scrivere un numero intero n come somma di k numeri naturali ordinati (potendo utilizzare anche lo 0).	$\binom{k+n-1}{n}$

① INFORMATICA

11 lettere $\qquad \frac{11!}{2!\,2!}$

2 I

2 A

② 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1 − 9

2 − 8

3 − 7

4 − 6

5 − 5

$$\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5}$$

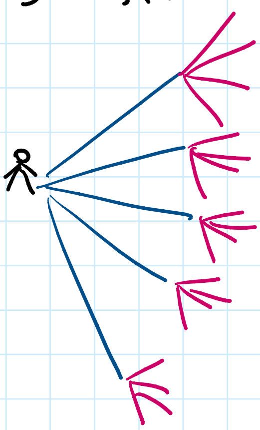
(3) 10 penne in 4 astucci $\qquad \bullet | \bullet\bullet | \quad | \bullet$

$h = k$
$n = 10$

$$\binom{10+h-1}{10} = \frac{13!}{10!\,3!}$$

(4) 15 — 9 blu
 — 6 rosse

3 astucci:



$$\binom{9+3-1}{9} \cdot \binom{6+3-1}{6} =$$

$$= \frac{11!}{9!\,2!} \cdot \frac{8!}{6!\,2!}$$

(5) $\binom{7}{3}$

(7) 3 tipi di vino

~~7~~ bottiglie
4

| | |

$k = 3$

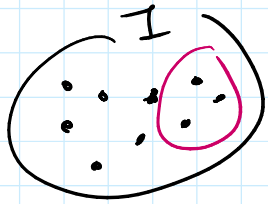
$n = 4$

$$\binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4}$$

⑥ $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = d_{10,4} = \dfrac{10!}{6!}$

⑧ 2^8

$$\begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & \dots & P_8 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 2 & 2 & & 2 \end{array}$$



⑨ $\{2, 3, 7, 5\}$

$$\begin{array}{ccccc} \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array} \to 4^5$$