# Seminar 1-2. Şiruri şi serii de numere reale.

## Şiruri de numere reale

**Definiţia 1**

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...$ se numeşte:

- **crescător** dacă $x_{n+1} \geq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- **descrescător** dacă $x_{n+1} \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Un şir este **monoton** dacă este crescător sau descrescător.

**Observaţia 1**

Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are termeni strict pozitivi atunci spunem că este:

- **crescător** dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- **descrescător** dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

**Definiţia 2**

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **mărginit** dacă există două numere reale finite $m$ şi $M$ astfel încât

$$m \leq x_n \leq M.$$

**Observaţia 2**

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **mărginit** dacă există $M > 0$ astfel încât $|x_n| \leq M$.

**Observaţia 3**

Orice şir **monoton** şi **mărginit** este **convergent**. Reciproca NU este adevărată.

**Definiţia 3**

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **convergent**(are limită finită) dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\epsilon > 0$ există $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ : $|x_n - x| < \epsilon$ oricare ar fi $n \geq N$. În acest caz, notăm $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**Propoziția 1 - Criteriul cleştelui**

Fie $(x_n)$ un şir de numere reale. Dacă există două şiruri $(a_n)_{n\geq n_0}$ şi $(b_n)_{n\geq n_0}$ cu aceeaşi limită,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x,$$

astfel încât

$$a_n \leq x_n \leq b_n, \quad n \geq n_0,$$

atunci şirul $(x_n)$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

**Propoziția 2 - Criteriul raportului**

Fie $(x_n)$ un şir de numere reale pozitive astfel încât există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty].$$

1. Dacă $l < 1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
2. Dacă $l > 1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

**Propoziția 3 - Criteriul rădăcinii**

Fie $(x_n)$ un şir de numere reale pozitive. Dacă există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = x \in [0, \infty],$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = x.$$

**Propoziția 4 - Lema Stolz-Cesaro**

Fie $x_n = \frac{a_n}{b_n}$ cu $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ şi $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă:

- $(b_n)$ este un şir strict monoton,
- $b_n \to \infty$ sau $a_n \to 0$, $b_n \to 0$,
- există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

# Serii de numere reale

**Definiția 1**

Oricărui şir $(x_n)_{n\geq n_0}$ i se poate asocia un şir $(S_n)_{n\geq n_0}$, definit prin

$$S_n = x_{n_0} + x_{n_0+1} + \cdots + x_n, \quad n \geq n_0.$$

Perechea de şiruri $((x_n),(S_n))$ se numeşte **serie** de numere reale cu **termenul general** $x_n$ şi se notează prin $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$. Şirul $(S_n)_{n\geq n_0}$ se numeşte **şirul sumelor parțiale** asociat seriei $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$. În cazul în care nu contează alegerea lui $n_0$, o serie va fi notată simplu prin $\sum\limits_n x_n$.

**Definiția 2**

O serie $\sum\limits_n x_n$ se numeşte **convergentă** dacă şirul sumelor parțiale $(S_n)$ este convergent, adică dacă există un număr real $S \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Dacă o serie NU este convergentă atunci ea se numeşte **divergentă**.

În cazul în care există, limita $S$ a şirului $(S_n)_{n\geq n_0}$ se numeşte **suma seriei** $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$ şi se notează $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} x_n$.

**Exemplul 1 - Seria geometrică**

Fie $r$ un număr real fixat. Seria

$$\sum_{n\geq 0} r^n$$

este convergentă dacă şi numai dacă $r \in (-1,1)$. În caz de convergență, suma seriei este

$$\sum_{n\geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Numărul $r$ se numeşte **rația** seriei geometrice.

**Exemplul 2 - Seria armonică generalizată**

Seria

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

este divergentă dacă $\alpha \leq 1$ şi convergentă dacă $\alpha > 1$.

**Propoziția 1 - Criteriul de divergență**

Dacă şirul $(x_n)$ are limită nenulă sau nu are limită, atunci seria $\sum\limits_n x_n$ este divergentă.

# Exerciții propuse

1. Studiați monotonia următoarelor șiruri:

   (a) $x_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$;

   (b) $x_n = \frac{5n-1}{5n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$;

   (c) $x_n = \frac{n+2}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}$;

   (d) $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n+2)}, \quad n \in \mathbb{N}$.

2. Folosind definiția arătați că șirul $x_n = \frac{2n-1}{2n+1}, \quad n \geq 1$ converge la $x = 1$.

3. Calculați limitele următoarelor șiruri:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{4^n}, \quad n \in \mathbb{N}$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{4^n}, \quad n \in \mathbb{N}$;

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad a \in \mathbb{N}^*$;

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$;

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$;

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}$.

4. Folosind șirul sumelor parțiale, studiați convergența seriilor:

   (a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$;

   (b) $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(1 + \frac{1}{n})$;

   (c) $\sum\limits_{n\geq 0} \Big[\arctan(n+1) - \arctan n\Big]$.

5. Folosind natura seriei geometrice sau a celei armonice generalizate, să se precizeze care din următoarele serii sunt convergente:

   (a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

   (b) $\sum\limits_{n\geq 0} (-2)^n$;

   (c) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$;

   (d) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$.

6. Studiați convergența următoarelor serii:

   (a) $\sum\limits_{n\geq 1} \ln \frac{3n+1}{n+1}$;

   (b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

   (c) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$;

   (d) $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

   (e) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^2}$;

   (f) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$;

   (g) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^2+(-1)^n}$.