Ampliación del octavo problema de PROMYS 2021

Abstracto

En este trabajo solucionaremos el octavo problema de la competición PROMYS 2021, y seguidamente se realizará una generalización del problema.

Pol de los Santos

Palabras: 3517

Curso: 2n Bachillerato

17 de octubre 2021

1. Introducción

El problema que vamos a tratar al largo de este trabajo es el siguiente:

> *"Let P0 be an equilateral triangle of area 10. Each side of P0 is trisected into three segments of equal length, and the corners of P0 are snipped off, creating a new polygon (in fact, a hexagon) P1. What is the area of P1? Now repeat the process to P1 – i.e. trisect each side and snip off the corners – to obtain a new polygon P2. What is the area of P2? Now repeat this process infinitely to create an object P∞. What can you, say about the shape P∞? What is the area of P∞?"*

Este problema esta extraído del examen de cualificación al programa PROMYS de 2021. Este es un programa de desafiante diseñado para alentar a los estudiantes ambiciosos de la escuela secundaria a explorar el mundo creativo de las matemáticas.[1]

1.1. Objetivos

Con este trabajo quiero alcanzar los siguientes objetivos planteados:

- Solucionar el problema
- Observar que pasa si cambiaos las restricciones del problema. ¿Qué pasa siete triangulo no fuese regular? ¿Qué pasa si el polígono trisecado no se trata de un triángulo?

Me gustaría poder llegar a una respuesta clara y usando un programa de ordenador, representar de forma gráfica las diferentes figuras obtenidas durante el trabajo. Así entonces, todas las figuras que se usaran para el trabajo són de fuente propia.

1.2. Motivación personal

[1] Department of Mathematics, Boston University (2021): PROMYS. Web: https://promys.org/program

Desde bien pequeño me han fascinado los problemas matemáticos como este. Siempre he pensado que planteándote un problema dentro de unas restricciones y después ver que pasa cuando se levantan estas restricciones es como se descubren propiedades y se avanza en el campo de las matemáticas. Este problema me capto la atención ya que tenia unas restricciones claras las cuales podías levantar y explorar el problema con más detalle.

2. Fundamento teórico

Definiciones:

- El área de la figura se expresa como la letra atribuida a la figura entre corchetes. Ejemplo: $[ABC] \rightarrow$ Área de la figura delimitada por los vértices A, B y C.

(1) Progresión geométrica[2]: Sucesión en la cual se pasa de cada termino al siguiente multiplicando por un numero r, llamada razón de la progresión. Por tanto, se define así: $a_1, a_n = a_{n-1} \cdot r.$

Donde su término general es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, y la suma de los n primeros términos es $S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$ $(si\ r \neq 1)$.

Si $|r| < 1$ podemos sumar todos los términos de la progresión: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

(2) Teorema de tales[3]: Enuncia que si en un triángulo dado se traza un segmento paralelo a uno de sus tres lados, el nuevo triángulo generado será semejante al primero. Al triángulo Δ ABC se le traza el segmento A'C'. Vemos que aparece un nuevo triángulo Δ A'BC' semejante al primero. Tienen sus tres ángulos iguales y

[2] Colera, J. Otros (2016), Matemàtiques 1r Batxillerat. (p. 58-59) Successions. ISBN: 9788448940270,
[3] Requena, B. (2017). Teorema de Tales. Universo Formulas www.universoformulas.com/matematicas/geometria/teorema-tales/

sus lados correspondientes son proporcionales. De acuerdo con el teorema, se verifica que:

$$\frac{\text{AB}}{\text{A'B}} = \frac{\text{CB}}{\text{C'B}} = \frac{\text{AC}}{\text{A'C'}}$$

Esa razón de proporcionalidad se mantiene entre dos lados de un mismo triángulo y también entre los lados correspondientes del otro.

(3) Shoelace theorem[4,5]: Se trata de una fórmula general para calcular el área de un polígono cualquiera.

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)\right|$$

(4) Polígonos[6]: Para todo polígono regular su superficie es dad por la fórmula:

$$S = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}; tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{l}{2a} \Rightarrow \alpha = \frac{360}{n}$$

Donde n es el número de lados que tiene el polígono, a es la apotema del polígono y

3. Mi solución al Problema

Antes que nada, dibujemos las primeras 2 primeras iteraciones del triángulo P_0, obteniendo P_1 y P_2. Observando que el triángulo inicial, P_0, se puede dividir en 9 triángulos equiláteros iguales, se cumple que cada uno de los triángulos delimitados por la figura P_1 tiene área $A_t = \frac{[P_0]}{9} \Leftrightarrow \frac{10}{9}$ (siendo A_0 el área del triángulo inicial). Entonces, para obtener el área de la figura P_1 podemos sumar las áreas de estos triángulos y restarle a la de nuestra figura inicial: $[P_1] = [P_0] - [A_t] \cdot 3 = 10 - \frac{10}{9} \cdot 3 = \frac{20}{3}$; Para obtener el área de la figura P_2 no se puede hacer el mismo procedimiento ya que esta figura no es regular.

[4] Laaksonen, A. (3 de Julio, 2018) Polygon area (p.271). Competitive Programmer's Handbook. www.cses.fi/book/book.pdf
[5] AoPSOnline. (2021) Shoelace Theorem. Aops Online. www.artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Shoelace_Theorem
[6] Requena, B. (2014). Área de un polígono regular. Universo Formulas www.universoformulas.com/matematicas/geometria/area-poligono-regular/

Lema 1: La relación entre las áreas de cada recorte realizado es de 1/9

Demostración: Cogemos dos recortes seguidos, al azar, Figura 1. Notemos que por definición $\overline{AC} = 3 \cdot \overline{BC}$, como las dos alturas son perpendiculares a la base, por el Teorema de Tales la relación entre h_0 y h_1 también es de $h_0 = 3 \cdot h_1$.

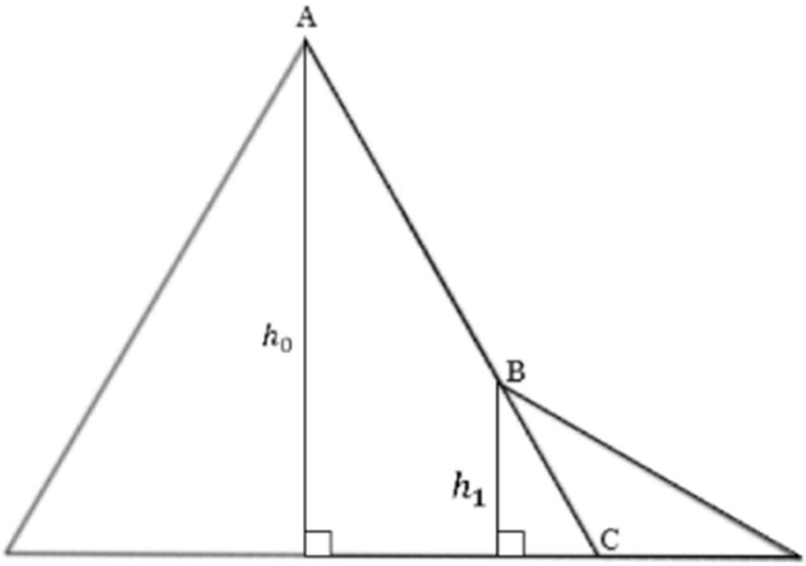

Figura 1: Ejemplo de un recorte cualquiera.

Por definición, también las bases de estos triángulos tienen la relación $b_0 = 3 \cdot b_1$, ya que la base del triangulo pequeño viene dada por la trisección de un segmento con la misma longitud que b_0. Por tanto, usando la fórmula del área del triángulo obtenemos: $A_0 = \frac{b_0 \cdot h_0}{2}$ y $A_1 = \frac{b_1 \cdot h_1}{2}$, sustituyendo por las igualdades anotadas anteriormente, obtenemos:

$$A_0 = \frac{3b_1 \cdot 3h_1}{2} \Leftrightarrow \frac{A_0}{9} = \frac{b_1 \cdot h_1}{2} = A_1 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{9}$$

Sabiendo que nuestro primer recorte tiene un área de 10/9, podemos calcular el área de todos los otros recortes. Por tanto, solo falta saber cuántos triangulo se crean en cada recorte.

Lema 2: P_n se le recortan $t \cdot 2^n$ triángulos, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ y t es el número de vértices de $[P_0]$.

Demostración: Notemos que por cada vértice hacemos un recorte y obtenemos un triángulo, si P_k tiene m vértices, por definición, a P_k se la recortan m triángulos. También podemos observar que por cada recorte que se hace, obtenemos dos vértices nuevos. Por tanto, si P_k tiene m vértices, P_{k+1} tiene $2m$ vértices. Así mismo, si P_k se le recortan t triángulos, ya que P_{k+1} tendrá el doble de vértices, a P_{k+1} se le recortan 2t triángulos, por inducción esto se mantiene $\forall k \in \mathbb{N}$. Notemos que nuestra figura inicial P_0 tiene 3 vértices, por tanto P_n tiene $3 \cdot 2^n$ vértices, por tanto, se le recortan $3 \cdot 2^n$ triangulos.

Lema 3: La suma del área todos los triángulos que recortamos a una figura siguen una progresión geométrica de razón: 2/9

Demostración: Siendo $\mathrm{T_n}$ el conjunto de triángulos recortados a P_n y t_n solo uno de estos recortes:

$$[t_n] = \frac{[T_n]}{3 \cdot 2^n}; \quad [t_{n+1}] = \frac{[T_{n+1}]}{3 \cdot 2^{n+1}}; \quad (Lema\ 2) \qquad\qquad \frac{[t_{n+1}]}{[t_n]} = \frac{1}{9}; (Lema\ 1)$$

$$\frac{[T_{n+1}]}{3 \cdot 2^{n+1}} \div \frac{[T_n]}{3 \cdot 2^n} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{[T_{n+1}]}{[T_n]} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{[T_{n+1}]}{[T_n]} = \frac{2}{9}$$

Notemos que para obtener el área de P_∞, se suman los infinitos términos de esta progresión para determinar el área total que le rescatamos a P_0:

$$[P_\infty] = [P_0] - S_\infty; \; S_\infty = \frac{[T_0]}{1-r} = \frac{\frac{30}{9}}{1-\frac{2}{9}} = \frac{30}{7} \Rightarrow [P_\infty] = 10 - \frac{30}{7} = \frac{40}{7};$$

Así mismo podemos encontrar la relación entre $[\mathrm{P}_0]$ y $[\mathrm{P}_\infty]$:

$$\frac{[P_\infty]}{[P_0]} = \frac{40}{7} \div 10 = \frac{4}{7}$$

Uno puede pensar que debido a que P_∞ tienen lados infinitos, puede ser que este sea un círculo. Notemos que un círculo se puede definir como un polígono con infinitos ejes de simetría, entonces si los ejes de simetría de P_n tienden a infinito, podríamos afirmar que P_∞ es un círculo. Observemos que P_0 tienen 3 ejes de simetría, P_1 tiene 6 ejes de simetría, P_2 tiene 6 ejes de simetría, P_3 tiene 6 ejes de simetría … lo que sugiere que los ejes de simetría son invariables después de n = 1. En la Figura 2 se puede observar una aproximación de P_∞ y como parece tener solo 6 ejes de simetría.

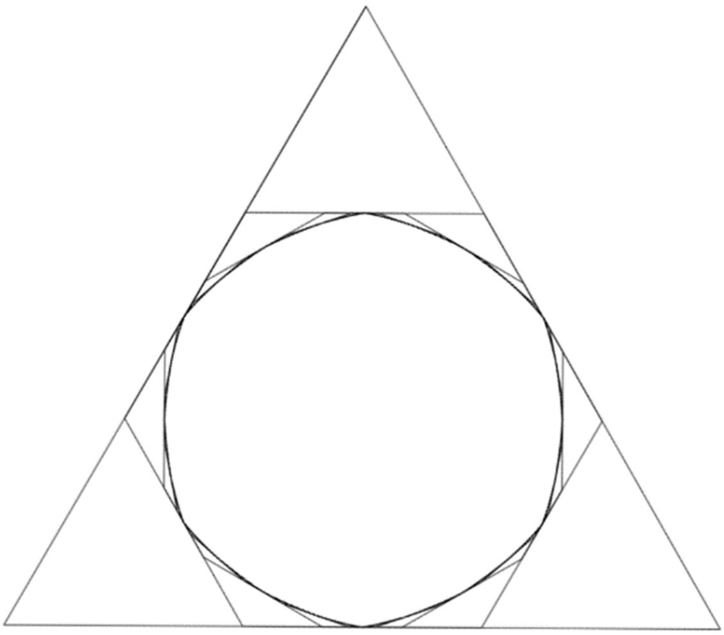

Figura 2: Aproximación de P_∞ que describe el problema.

Lema 4: El lado más pequeño de P_n es $s/3^n$ donde *s* es la longitud del lado de P_0.

Demostración: En un principio, notemos como cada recorte que se está haciendo crea un triángulo obtuso (excepto en el primer recorte). Esto es debido a que cada recorte augmenta el ángulo y después de P_1 este ya es obtuso. Teniendo en cuenta el teorema de los senos, sabemos que el lado del triángulo recortado, que forma parte del P_{k+1}, es más grande que los otros dos, y como consecuencia será más grande que 1/3 de los lados de P_k. Teniendo esto en cuenta, supongamos que el lado más pequeño de P_k es $\frac{s}{3^k}$, por los argumentos expuestos anteriormente, el lado mas pequeño de P_{k+1} será $\frac{s}{3^{k+1}}$. Ya que P_1 tiene 6 lados de longitud $\frac{s}{3^1}$, por inducción nuestro lema se aguanta para todo número natural mayor que 1.

Notemos que el número de los lados más pequeños se preserva al hacer cualquier recorte. Eso quiere decir que P_n también tiene 6 lados de longitud $\frac{s}{3^n}$. Junto con el lema 4, esto nos dice que P_n tiene como máximo 6 ejes de simetría. Así mismo, como cada recorte preserva los ejes anteriores y P_1 tiene 6 ejes de simetría, P_n también tiene 6. Como consecuencia, la forma que toma P_∞ se trata de un hexágono con los lados curvados.

También podemos afirmar que P_∞ es tangente al punto medio del triángulo inicial, ya que el lado compartido entre las dos figuras tiene una longitud de $\frac{s}{3^n}$, que tiende a 0 en el infinito i ya que los recortes se hacen iguales por las dos bandas, este se encontrara en el punto medio del lado del P_0.

4. Eliminación de las restricciones impuestas

En esta ampliación eliminaremos restricciones del problema para ver que podemos descubrir al hacernos nuevas preguntas.

La primera siendo: ¿Qué pasa siete triangulo no fuese regular? ¿Hay algún tipo de fórmula que nos de las relaciones entre $[P_\infty]$ y $[P_0]$? Para obtener esta fórmula, consideremos que el área de $[P_\infty]$ es igual a el área de $[P_0]$ más la suma infinita de todos los recortes realizados. Para obtener la suma infinita necesitamos la razón entre recortes y el área inicial del primer recorte. En un principio encontremos la razón para todo recorte de cualquier figura.

Lema 5: la relación entre $[T_n]$ y $[T_{n+1}]$ es de 2/9, para toda figura (no necesariamente regular)

Demostración: Consideremos un recorte $[t_n]$ cualquiera realizado a $[P_n]$, en un principio notemos que el triángulo creado tiene solo un vértice que forma parte de $[P_n]$ y los otros dos que formaran parte de $[P_{n+1}]$. Así mismo, de estos vértices se va hacer un recorte creando otro triangulo, que según el lema 1, van a tener 1/9 del área de $[t_n]$. Así entonces la relación entre cada recorte individual i los dos que origina en la siguiente iteración es de 2/9. Así entonces, junto con el lema 2, se cumple la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^{k\cdot 2^{n}} [t_n]_i = \sum_{i=0}^{k\cdot 2^{n+1}} \frac{2}{9}\cdot [t_{n+1}]_i \Rightarrow \sum_{i=0}^{k\cdot 2^{n}} [t_n]_i = [T_n] = \frac{2}{9}\cdot \sum_{i=0}^{k\cdot 2^{n+1}} [t_{n+1}]_i = \frac{2}{9}[T_{n+1}]$$

Con esta información, podemos acercarnos a lo que buscamos, una formula general para todos los polígonos regulares:

$$\frac{[P_\infty]}{[P_0]} = \frac{[P_0] - S_\infty}{[P_0]} = 1 - \frac{\frac{[T_0]}{1-r}}{[P_0]} = 1 - \frac{\frac{[T_0]}{1-2-9}}{[P_0]} = 1 - \frac{9[T_0]}{7[P_0]};$$

Ahora necesitamos una formula general para los primeros recortes y para el área de un polígono regular. Para eso usaremos las siguientes formulas:

$$Poligono\ Regular: S = \frac{n\cdot l\cdot a}{2}; tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{l}{2}\cdot a \ \Rightarrow \frac{360}{2n}; donde\ n = \#\ lados\ (1)$$

$$\text{Triangulo: S} = \frac{a\cdot b\cdot \sin(C)}{2}; \text{donde a y b son lados del triangulo y C el angulo entre los dos (2)}$$

Fijémonos en los triángulos formados por 3 vértices seguidos de un polígono regular. Notemos que, según el Teorema de Tales, cada uno de los recortes tiene una relación de 1/9 con su triangulo respectivo. Así entonces, encontrando una fórmula para calcular el área de estos triángulos, podemos obtener $[T_0]$, esto se puede hacer ya que el ángulo interior de un polígono regular se trata de $180 - 360/\mathrm{n}$:

$$[T_0] = \mathrm{n} \cdot \frac{1}{9}\left(\frac{l \cdot l \cdot sin\left(180 - \frac{360}{n}\right)}{2}\right); \quad (2)$$

$$[P_0] = \frac{n \cdot l \cdot a}{2} = \frac{n \cdot l \cdot \frac{l}{2 \cdot tan\left(\frac{180}{n}\right)}}{2} = \frac{n \cdot l^2}{4 \cdot tan\left(\frac{180}{n}\right)}; \quad (1)$$

Substituyendo y expandiendo obtenemos la siguiente formula general:

$$1 - \frac{9[T_0]}{7[P_0]} = 1 - \frac{9}{7}\left(n \cdot \frac{1}{9}\left(\frac{l \cdot l \cdot sin\left(180 - \frac{360}{n}\right)}{2}\right) \div \frac{n \cdot l^2}{4 \cdot tan\left(\frac{180}{n}\right)}\right) =$$

$$= \boldsymbol{1 - \frac{2}{7} sen\left(180 - \frac{360}{n}\right) \cdot tan\left(\frac{180}{n}\right);}$$

Lema 6: También es válida para cualquier triangulo y cuadrilátero.

Demostración: Notemos que el lema 1 y el lema 2, no son exclusivos a un triángulo equilátero. Así mismo, el lema 3 tampoco lo es, ya que para la demostración solo se necesita la combinación de los dos anteriores lemas. Siguiendo el mismo razonamiento utilizado en la solución del problema inicial:

$$[P_\infty] = [P_0] - S_\infty;\ S_\infty = \frac{[T_0]}{1 - r};$$

Notemos que para todo triangulo $[\mathrm{T}_0] = \frac{1}{9}[\mathrm{P}_0] \cdot 3$ y $\mathrm{r} = 2/9$. Substituyendo y dividiendo por $[\mathrm{P}_0]$ obtenemos:

$$[P_\infty] = [P_0] - \frac{\frac{1}{9}[P_0] \cdot 3}{1 - \frac{2}{9}} \Rightarrow \frac{[P_\infty]}{[P_0]} = \frac{[P_0] - \frac{3[P_0]}{7}}{[P_0]} = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

La misma relación que con un triángulo equilátero.

Para demostrar lo mismo con un cuadrilátero, fijémonos en la Figura 3.

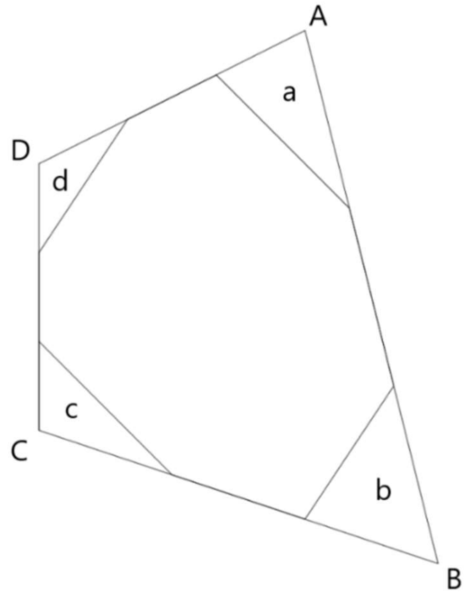

Figura 3: Cuadrilátero y su P_1 correspondiente.

Notemos lo siguiente de cada uno de los recortes, según el Teorema de Tales:

$$[a]=\frac{[ADB]}{9};\ \ [b]=\frac{[BAC]}{9};\ \ [c]=\frac{[CBD]}{9};[d]=\frac{[DCA]}{9};$$

Así mismo, fijémonos en lo siguiente:

$$[\mathrm{ADB}]+[\mathrm{CBD}]=[\mathrm{P}_0]\ \text{ y }\ [\mathrm{BAC}]+[\mathrm{DCA}]=[\mathrm{P}_0]$$

Expandiendo en esto:

$$9[a]+9[b]+9[c]+9[d]=2\cdot[P_0]\Longrightarrow[a]+[b]+[c]+[d]=[T_0]=\frac{2}{9}[P_0]$$

Ahora usando el mismo razonamiento que en la demostración anterior y substituyendo obtenemos que la relación es:

$$[P_\infty]=[P_0]-S_\infty;\ S_\infty=\frac{[T_0]}{1-r};[P_\infty]=[P_0]-\frac{\frac{2}{9}[P_0]}{1-\frac{2}{9}}\Longrightarrow[P_\infty]=\frac{5[P_0]}{7}\Longrightarrow\frac{[P_\infty]}{[P_0]}=\frac{5}{7}$$

Lema 6: La relación ya no funciona para un polígono no regular de más de 4 lados.

Demostración: Tengamos un pentágono como en la figura X. Sea p un punto no fijo dentro de la recta r. Y sea r una recta paralela a la base del triángulo que creado por p con sus dos vértices cercanos. Fijémonos que el área de este triangulo no cambia, ya que la base y la altura son invariables. Como consecuencia, el recorte hecho desde el vértice p también un área constante. Ahora fijémonos en los otros dos recortes que aparecen en la Figura 4.

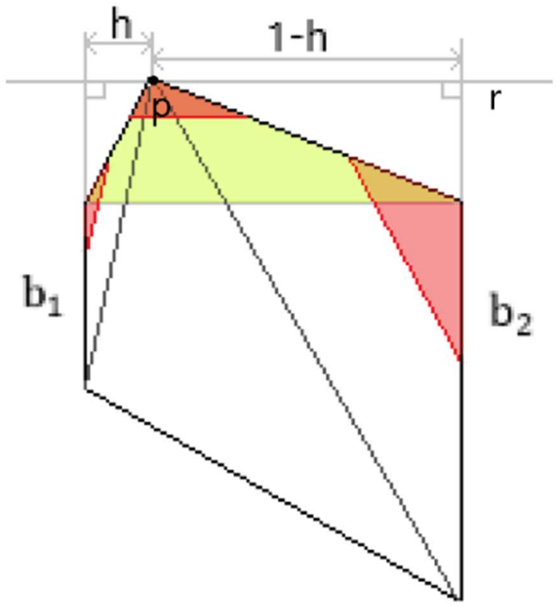

Figura 4: Dibujo de la demostración del Lema 6.

El área de estos es:

$$t_1 = \frac{h \cdot b_1}{2} \cdot \frac{1}{9}; \;\; t_2 = \frac{(1-h) \cdot b_2}{2} \cdot \frac{1}{9};$$

Para que la fórmula $\frac{1}{7}\left(2 \cdot \cos\left(\frac{360}{n}\right) + 5\right)$ funcione, ha de existir una relación constante entre $[T_0]$ y $[P_0]$. Pero en nuestro caso la relación es la siguiente:

$$\frac{[T_0]}{[P_0]} = \frac{S_0 + t_1 + t_2}{[P_0]}; \text{Donde } S_0 \text{ se trata de la suma de todos los otros recortes.}$$

Ya que S_0 y $[P_0]$ son constantes, para que funcione la fórmula, necesitamos que $t_1 + t_2$ también sea constante. Pero fijémonos en lo siguiente:

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{h \cdot b_1}{2} + \frac{(1-h) \cdot b_2}{2}\right) \cdot \frac{1}{9} > \lim_{h \to 1}\left(\frac{h \cdot b_1}{2} + \frac{(1-h) \cdot b_2}{2}\right) \cdot \frac{1}{9}; \text{ debido a que } b_2 > b_1$$

Ya que la demostración tiene la misma validez si le añades más vértices, el mismo racionamiento sigue vigente con cualquier polígona con más de 5 lados.

5. Figuras obtenidas mediante la exploración

Para obtener las figuras expuestas en este trabajo se utiliza un programa escrito en C++ (Anexo 7.4) junto con wólfram Cloud para poder representar-las. Este programa de C++ también nos calcula el área inicial del polígono y una aproximación al área final utilizando el *Shoelace Theorem*.El programa funciona de la siguiente manera:

1. Pide los vértices del polígono inicial y los guarda en un vector: Forma
2. Calcula el área del polígono inicial
3. Estos se pasan por una función que crea 2 puntos en la trisección de los lados del polígono y los guarda en un vector: novaForma
4. Seguidamente substituye los puntos en el vector Forma por los de nueva forma y vuelva a inicializar un vector nuevaForma
5. Se repute este proceso tantas iteraciones como quiera el usuario.
6. Una vez acabado este proceso, calcula el área del polígono final y se imprimen todos los puntos obtenidos en orden para luego computar-los en Wolfram Cloud.

Algunas de las figuras generadas por el programa se pueden apreciar en los anexos (8.1, 8.2, 8.3).

6. Conclusión

Con esto llegamos al final de este trabajo. Puedo afirmar que he conseguido llegar a todos los objetivos que me propuse. He resuelto el problema y he explorado las restricciones que nos marcaba. Haciendo esto he llegado a un resultado interesante del cual estoy muy contento. He podido encontrar una fórmula general para todo polígono regular o de cualquier triangulo o cuadrilátero. Además, he podido demostrar que no existe una fórmula general de figuras con más de cuatro lados que solo dependa del numero de lados que tenga la figura.

No obstante, siempre hay cosas a mejorar y me gustaría poder encontrar una fórmula para toda figura, pero esto creo que se sale de mis conocimientos matemáticos y geométricos.

7. Bibliografía

[1] Department of Mathematics, Boston University (2021): PROMYS.

Web: https://promys.org/program. Última consulta [17/10/2021]

[2] Colera, J. Otros (2016), Matemàtiques 1r Batxillerat. (p. 58-59) Successions.

ISBN: 9788448940270. Última consulta [17/10/2021]

[3] Requena, B. (2017). Teorema de Tales. Universo Formulas.

Web: www.universoformulas.com/matematicas/geometria/teorema-tales/. Última consulta [17/10/2021]

[4] Laaksonen, A. (3 de Julio, 2018) Polygon area (p.271). Competitive Programmer's Handbook.

Web: www.cses.fi/book/book.pdf. Última consulta [17/10/2021]

[5] AoPSOnline. (2021) Shoelace Theorem. Aops Online.

Web: www.artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Shoelace_Theorem. Última consulta [17/10/2021]

[6]Requena, B. (2014). Área de un polígono regular. Universo Formulas

Web; www.universoformulas.com/matematicas/geometria/area-poligono-regular/. Última consulta [17/10/2021]

8. Anexo

8.1. Figuras Regulares

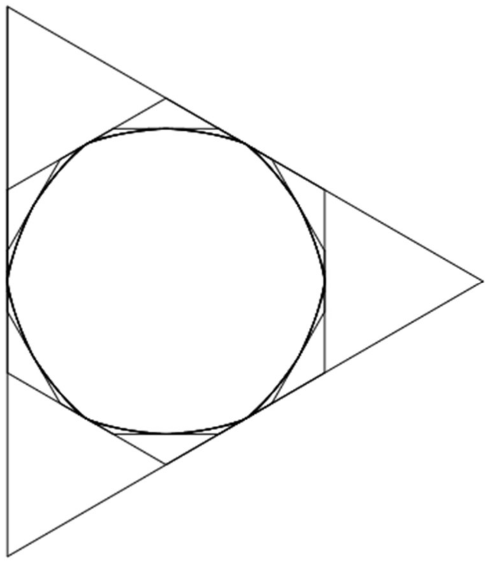

Figura 5: Triangulo equilátero con su respectivo P_∞.

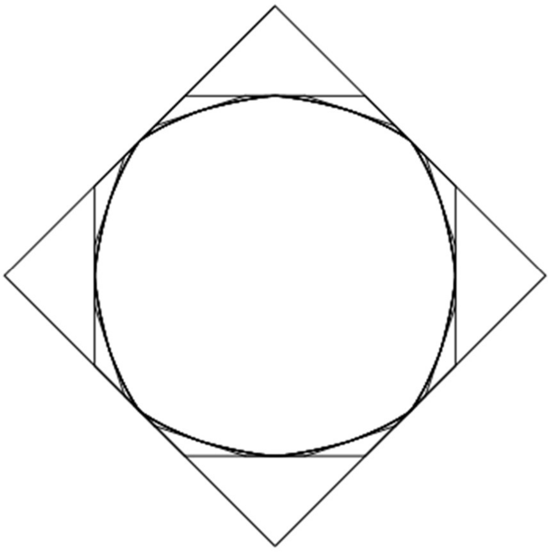

Figura 6: Cuadrado con su respectivo P_∞. Fuente: Propia

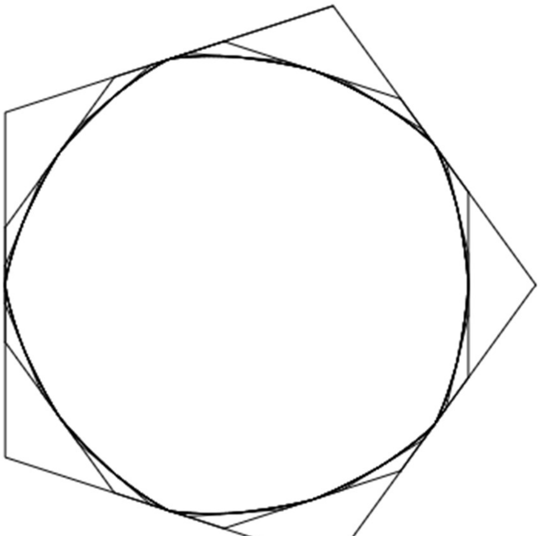

Figura 7: Pentágono regular con su respectivo P_∞.

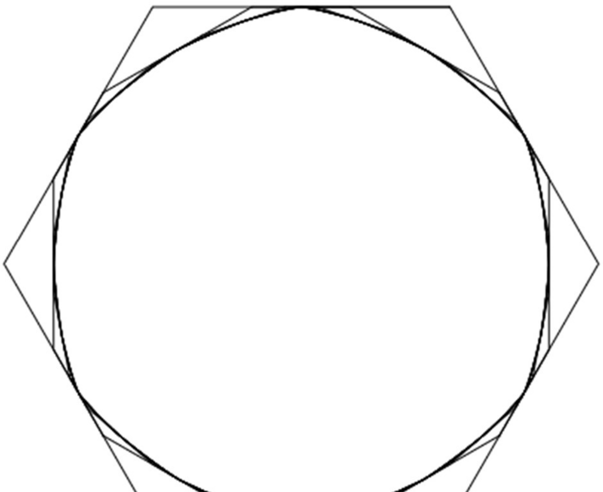

Figura 8: Hexágono regular con su respectivo P_∞.

8.2. Triángulos y cuadriláteros no regulares

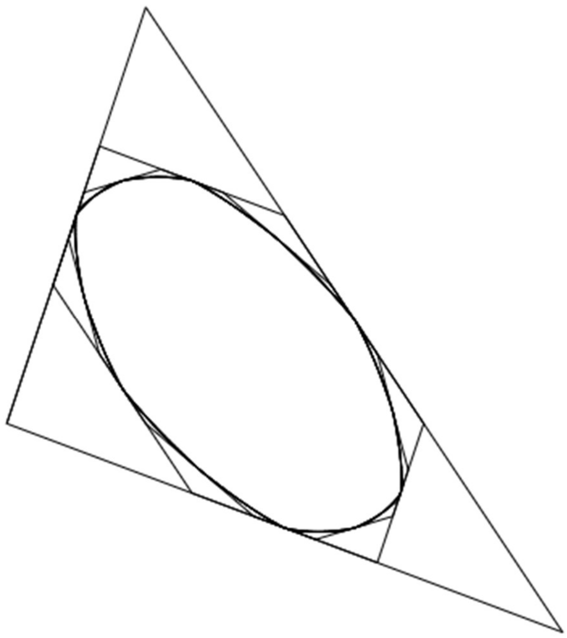

Figura 8: Triangulo con su respectivo P_∞.

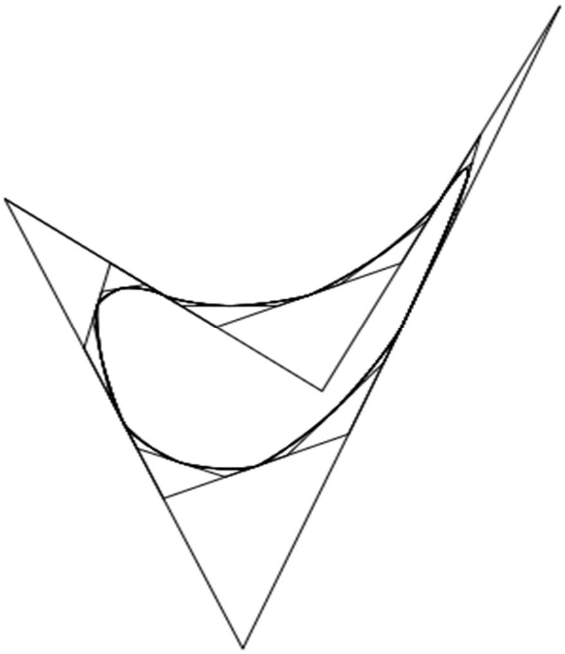

Figura 9: Cuadrilátero convexo con su respectivo P_∞.

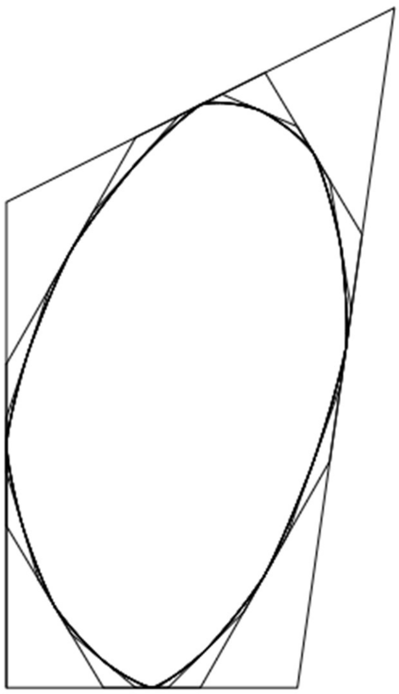

Figura 10: Cuadrilátero con su respectivo P_∞.

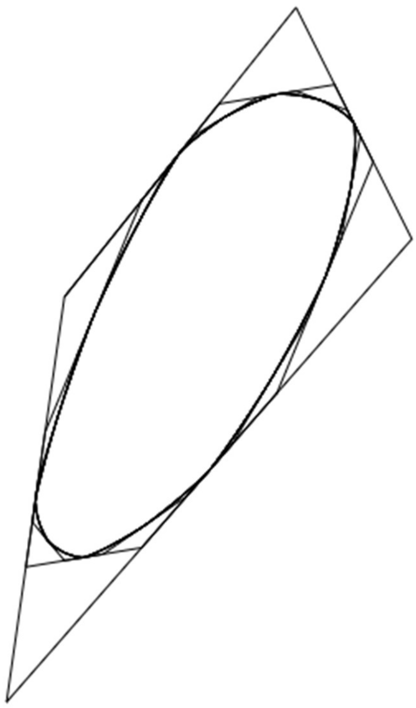

Figura 11: Cuadrilátero con su respectivo P_∞.

8.3. Figuras no regulares

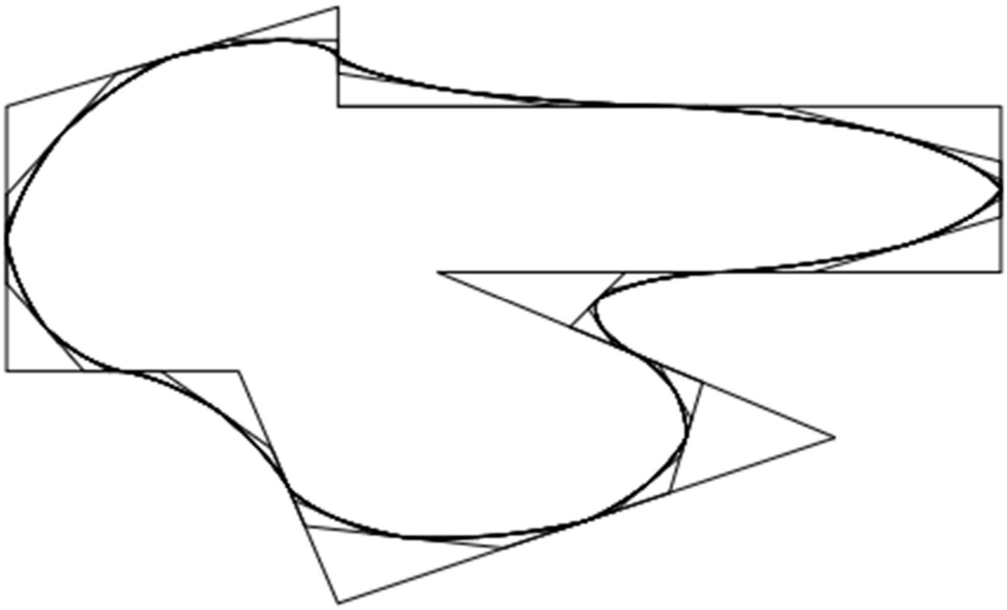

Figura 12: Decágono irregular y convexo con su respectivo P_∞.

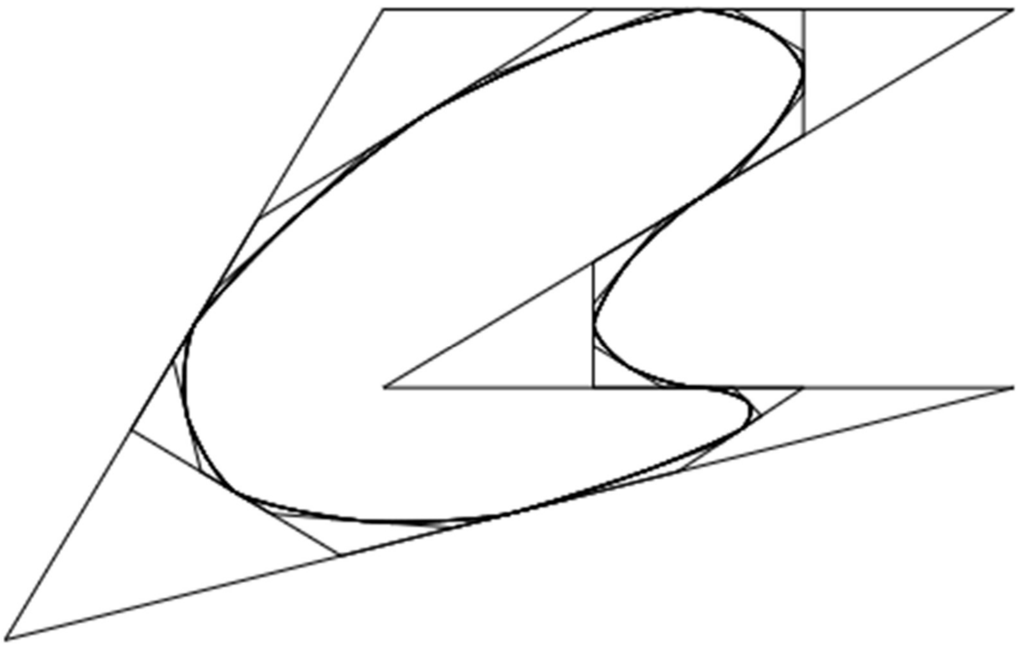

Figura 13: Pentágono irregular convexo con su respectivo P_∞.

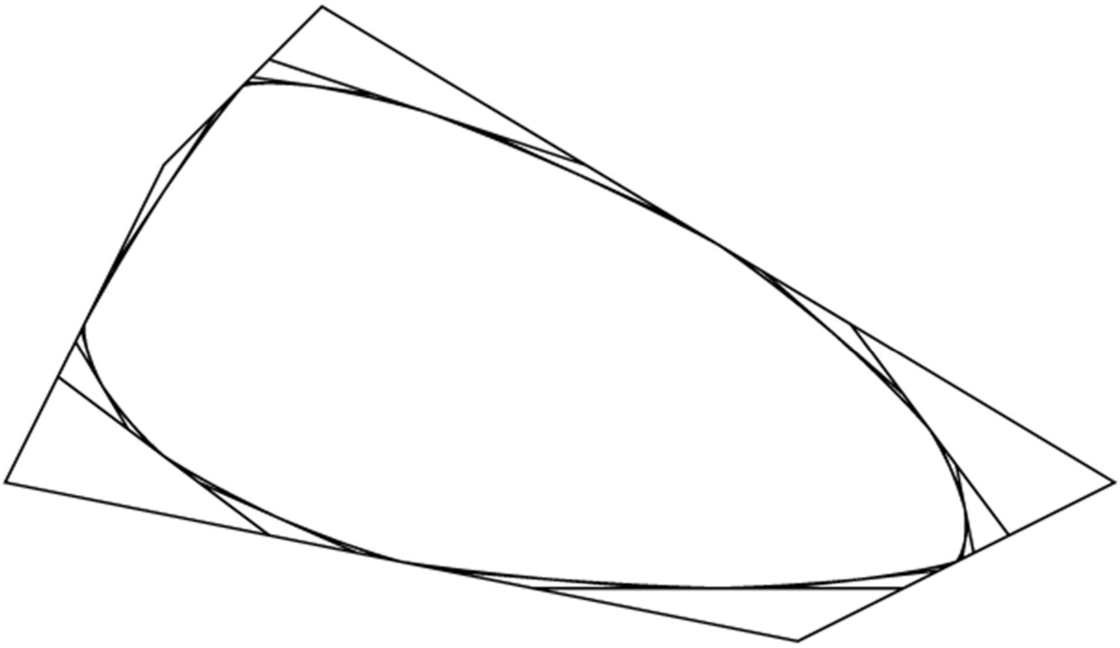

Figura 14: Pentágono irregular con su respectivo P_{∞}.

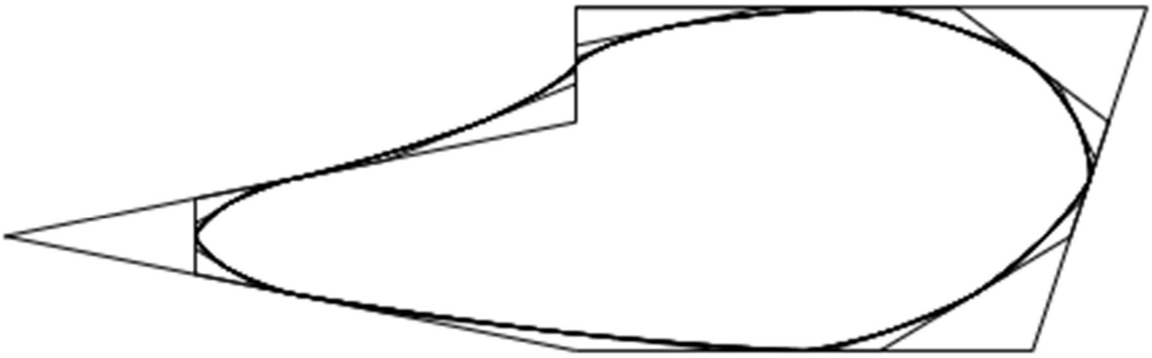

Figura 15: Hexágono irregular con su respectivo P_{∞}.

8.4. Programa

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

//DEFINICIONS

#define x first
#define y second

typedef pair<double, double> punt;
typedef vector<pair<double, double>> cords;

int n=3;

//CREACIÓN DE LOS 2 PUNTOS

//Para trisecar el segmento marcado por 2 puntos:
// Creamos el vector que une los dos puntos (a, b)
// y lo dividimos por 3 i lo aplicamos dos veces
//sobre el punto a
void nSecar(punt A, punt B, cords &novaForma){
        punt vecAB;
        vecAB.x = (B.x - A.x);
        vecAB.y = (B.y - A.y);
        for(int i = 0; i<n-1; i++){
                novaForma.push_back(make_pair(A.x+(vecAB.x/n),
A.y+(vecAB.y/n)));
                A.x += vecAB.x/n;
                A.y += vecAB.y/n;
        }
}

//CRACIÓN DE LA NUEVA FORMA
//Para trisecar todos los vertices, usamos un bucle que cicle
// por tdos los vertices que tiene la figura
// necesitem un programa que vagi ciclant els vertex,
// este bucle no puede ser de repetición constante debido a que
// cada iteración del programa multiplica por dos los vertices
// anteriores
//
//Ex: con el primer triangulo:
//      (vertex0, vertex1) --> novaForma.push_back(las 2
Trisecaciones);
//      (vertex1, vertex2) --> novaForma.push_back(las 2
Trisecaciones);
//      (vertex2, vertex0) --> novaForma.push_back(las 2
Trisecaciones);
//
void createForm(int numVert, cords Forma, cords &novaForma){
        for(int j =0; j < numVert-1; j++){
                nSecar(Forma[j], Forma[j+1], novaForma);
        }
        nSecar(Forma[numVert-1], Forma[0], novaForma);
        //ara cal fer una
}


int main(){
```

```
//OPTIMITZACIÓN
        ios_base::sync_with_stdio(0);
        cin.tie(0);
        cout.tie(0);

//DECLARACIÓN DE LAS VARIABLES
        int numVert;
        //cords TOT;
        cords Forma(numVert);
        cords novaForma;
        cords Area;

//CREACIÓN DE LOS PUNTOS INICIALES
        cout << "Numero de Vertices?" << endl;
        cin >> numVert;
        char anw;
        cout << "Regular? (input 'y' or 'n')" << endl;
        cin >> anw;
        if(anw=='Y'||anw=='y'){
        // Si es regular podemos usar las raices da la
        // unidad para calcular la posición de los vertices
        //              (2·pi·k)
        //              _________ --> donde k va de 1 a n
        //               numVert
                for(int k = 1; k <=numVert; k++ ){
                        double angle = M_PI*2*k/numVert;
                        Forma[k-1].x = cos(angle);
                        Forma[k-1].y = sin(angle);
                        Area.push_back(make_pair(cos(angle),
sin(angle)));
                }
        }
        else if(anw == 'N' || anw == 'n'){
                for(int k = 1; k <=numVert; k++){
                        cout << "Vertex " << k << ':' << endl;

                        double xi, yi;
                        cin >> xi >> yi;
                        Forma[k-1].x = xi;
                        Forma[k-1].y = yi;
                        Area.push_back(make_pair(xi, yi));
                }
        }
        else return 0;

//AREA INICIAL

        cout << "Area 1: ";
        //Shoelace formula:
        // 1/2*(abs((sum_(i=1)^n-1, x_i * y_i+1) +x_n*y_1 -
(sum_(i=1)^n-1, x_i+1 * y_i) - x_1*y_n)))
        double A1 = 0;
        for(int i = 0; i<numVert-1; ++i) A1 += Area[i].x*Area[i+1].y;
        for(int i = 0; i<numVert-1; ++i) A1 -= Area[i+1].x*Area[i].y;
        A1 += Area[numVert-1].x*Area[0].y;
        A1 -= Area[numVert-1].y*Area[0].x;
        Area.clear();
        cout << fixed << setprecision(15);
        cout << abs(A1)*0.5 << '\n';
        cout << fixed << setprecision(7);

```

```
//PUNTOS DE LAS FIGURES

        cout << '\n' <<"Graphics[Line[{";
        for(auto p : Forma) {
        cout << '{'<< p.x<<", "<<p.y<<"}, ";
                //TOT.push_back(p); // per si vui guardar tots els valors en un vector
        }
        cout << '{'<< Forma[0].x<<", "<<Forma[0].y<<"}, ";

        //ara cal crear una nova forma fent servir la
        //forma que tenim, aquesta es crea n-sacant els
        //costats, i així obtenim els vertex de la nova figura
        int iteracions = 7;
        for(int i = 2; i <= iteracions; i++){
                createForm(numVert, Forma, novaForma);
                        Forma = novaForma;
                        novaForma.clear();
                        numVert*=2;

                for(auto p : Forma) {
                        if(i == iteracions)
Area.push_back(make_pair(p.x, p.y));
                        cout << '{'<< p.x<<", "<<p.y<<"}, ";

                }
                if(i < iteracions)
                        cout << '{'<< Forma[0].x<<", "<<Forma[0].y<<"}, ";
                else{
                        cout << '{'<< Forma[0].x<<", "<<Forma[0].y<<"}";
                }
        }
        cout << "}]]" << '\n';

//AREA FINAL

        cout << '\n' << "Area final: ";
        //Shoelace formula:
        // 1/2*(abs((sum_(i=1)^n-1, x_i * y_i+1) +x_n*y_1 - (sum_(i=1)^n-1, x_i+1 * y_i) - x_1*y_n)))
        double A2 = 0;
        for(int i = 0; i<numVert-1; ++i) A2 += Area[i].x*Area[i+1].y;
        for(int i = 0; i<numVert-1; ++i) A2 -= Area[i+1].x*Area[i].y;
        A2 += Area[numVert-1].x*Area[0].y;
        A2 -= Area[numVert-1].y*Area[0].x;
        Area.clear();
        cout << fixed << setprecision(15);
        cout << abs(A2)*0.5 << '\n';
}
```