Ampliación del octavo problema de PROMYS 2021

Exploración Matemática NS

Número de páginas: 17

Código del alumno: jsx364

Convocatoria: mayo 2022

Índice

1. Introducción

El problema que vamos a tratar a lo largo de este trabajo es el siguiente:

> *"Let P_0 be an equilateral triangle of area 10. Each side of P_0 is trisected into three segments of equal length, and the corners of P_0 are snipped off, creating a new polygon (in fact, a hexagon) P_1. What is the area of P_1? Now repeat the process to P_1 – i.e. trisect each side and snip off the corners – to obtain a new polygon P_2. What is the area of P_2? Now repeat this process infinitely to create an object P_∞. What is the area of P_∞? What can you, say about the shape P_∞?"*

Este problema está extraído del examen de cualificación al programa PROMYS de 2021. Este es un programa desafiante diseñado para alentar a los estudiantes ambiciosos de la escuela secundaria a explorar el mundo creativo de las matemáticas [1].

1.1. Objetivos

Con este trabajo quiero alcanzar los siguientes objetivos planteados:

- Solucionar el problema.
- Realizar un trabajo matemático durante un periodo de tiempo prolongado y poder estar orgulloso de este.
- Observar que pasa si se levantan las restricciones del problema. ¿Qué pasa si el triángulo no fuese regular? ¿Qué pasa si el polígono trisecado no se trata de un triángulo?

Me gustaría poder llegar a una respuesta clara y usando un programa informático, representar de forma gráfica las diferentes figuras obtenidas durante el trabajo. Así entonces, todas las figuras que se utilizarán para el trabajo son de fuente propia.

1.2. Motivación personal

Desde bien pequeño me han fascinado los problemas matemáticos como este. Siempre he pensado que planteándote un problema dentro de unas restricciones y después ver qué pasa cuando se levantan estas restricciones es como se descubren propiedades y se avanza en el campo de las matemáticas. Este problema me captó la atención porque tenía unas restricciones claras las cuales podías levantar y explorar el problema con más detalle.

2. Fundamento teórico

Definiciones:

- El área de la figura se expresa como la letra atribuida a la figura entre corchetes. Ejemplo: $[ABC] \rightarrow$ Área de la figura delimitada por los vértices A, B y C.
- Siguiendo la notación del enunciado, nos referiremos a P_n $(n \in Z^+)$ como la enésima figura, donde P_0 es el triángulo equilátero inicial.
- Nos referiremos a recortes como las esquinas que se eliminan para formar la siguiente figura. Se los denota a R_n como el conjunto de todos los recortes que se le hace a P_n y a r_n como cualquiera de estos recortes $(n \in Z^+)$. Donde $|R_n|$ es el número de recortes que se hacen.

<u>(1) Progresión geométrica</u> [2]: Progresión en la cual cada término se obtiene multiplicando al anterior por un número fijo r, llamado razón de la progresión. Pues, se define: $a_n = a_{n-1} \cdot r;\ \ (n \in Z^+)$. Donde su término general es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, y la suma de los n primeros términos son:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}\ (si\ r \neq 1).$$

Si $|r| < 1$ podemos sumar todos los términos de la progresión:

$$S_n = \lim_{n \to \infty} \left(a_1 \frac{r^n - 1}{1 - r} \right) = \frac{-a_1}{1 - r} = \frac{a_1}{r - 1}$$

<u>(2) Teorema de tales</u> [3]: Enuncia que si en un triángulo dado se traza un segmento paralelo a uno de sus tres lados, el nuevo triángulo generado será semejante al primero.

<u>(3) Shoelace theorem</u> [4][5]: Se trata de una fórmula general para calcular el área de un polígono cualquiera.

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)\right|$$

<u>(4) Área de un polígono regular</u> [6]: Para todo polígono regular su superficie es dado por la fórmula:

$$A_p = \frac{n \cdot l \cdot a}{2};\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{l/2}{a} \Rightarrow\ a = \frac{l}{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Debido a que el ángulo α es equivalente a $360°/n$, substituyendo obtenemos la fórmula:

$$A_p = \frac{n \cdot l^2}{4\tan\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

3. Mi solución al problema

Este trabajo está estructurado de manera que se presenta un lema y a continuación se demuestran. Las demostraciones se acompañan de figuras para que la demostración sea más fácil de comprender. Con fin de ayudar con la comprensión del enunciado, en la Figura 1 se puede ver el conjunto de P_n.

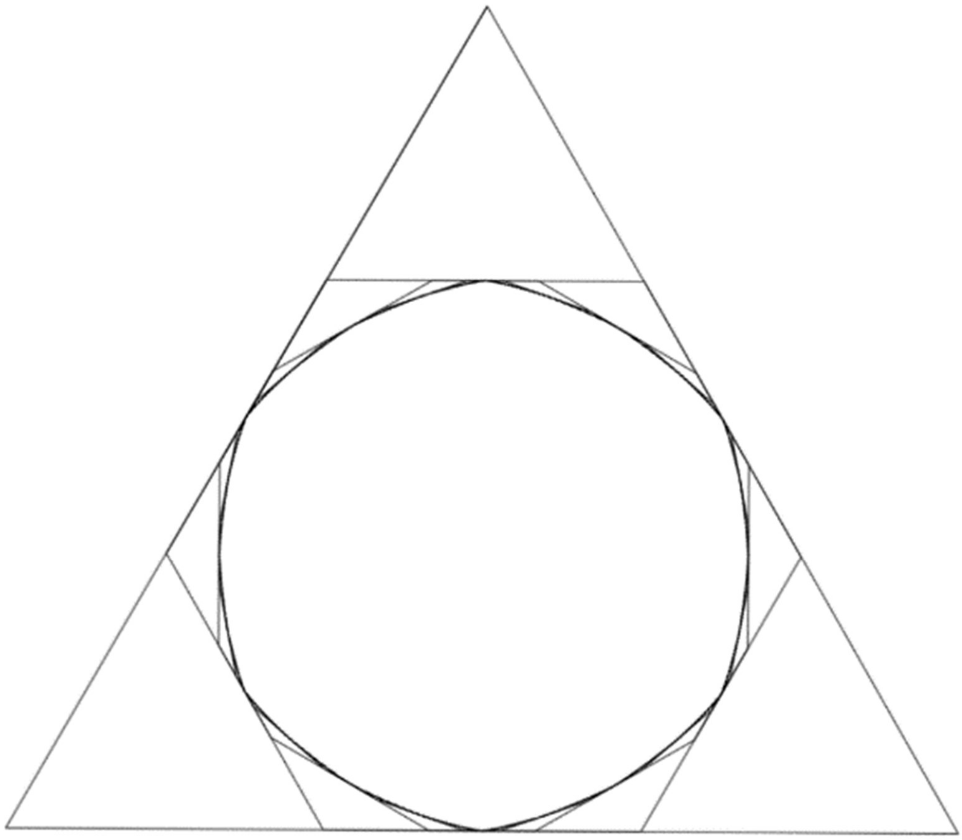

Figura 1: Representación de todos los P_n que describe el enunciado

Lema 1: La relación entre las áreas de dos recortes seguidos es de 1/9

Demostración*:* Se consideran dos recortes seguidos al azar (r_n, r_{n+1}), Figura 2. Hay dos lados en cada recorte que por definición tienen una relación fija, las bases del triángulo ($\overline{CB} = 3 \cdot \overline{BE}$) y los lados que se solapan ($\overline{AB} = 3 \cdot \overline{DB}$). Pues la base del recorte pequeño viene dada por la trisección de un segmento con la misma longitud que $\overline{CB}$ y el mismo razonamiento aplica con el segmento $\overline{DB}$, es la trisección del lado $\overline{AB}$ de r_n. En consecuencia, como ambas alturas son paralelas, por el Teorema de Tales, estas también siguen la misma relación ($\overline{AB}/\overline{DB} = h/h' = 3$).

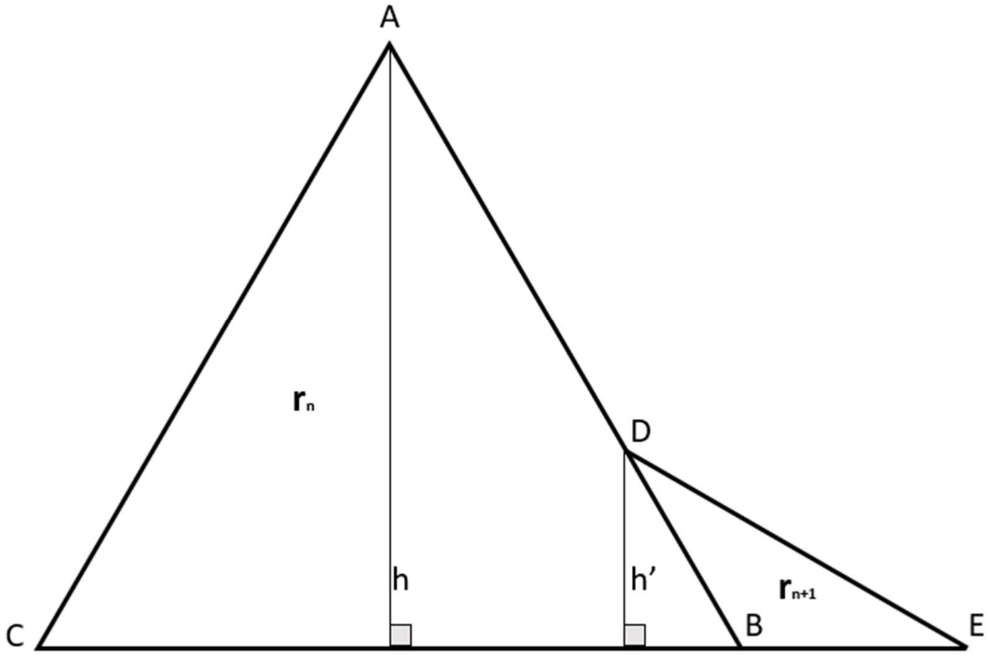

Figura 2: Representación de dos recortes seguidos escogidos al azar

Entonces, se usa la fórmula del área del triángulo y se obtiene la siguiente relación entre las dos áreas:

$$[r_n] = \frac{\overline{CB}\cdot h}{2} = \frac{3\,\overline{BE}\cdot 3h'}{2} \Leftrightarrow \frac{[r_n]}{9} = \frac{\overline{BE}\cdot h'}{2} = [r_{n+1}] \Leftrightarrow \frac{[r_{n+1}]}{[r_n]} = \frac{1}{9} \ \blacksquare$$

Se nota que, por el Teorema de Tales, los primeros recortes que se realizan son equivalente a 1/9 del área de P_0 ($r_0 = [P_0]/9 = 10/9$);

En consecuencia, se puede obtener el área de todos los recortes porque siguen una progresión geométrica de razón 1/9 (Lema 1) ($[r_0] = 10/9, r_1 = 10/9^2, [r_2] = 10/$

9^3 ... $[r_n] = 10/9^{n+1}$). Entonces, solo es necesario saber la cantidad de recortes en cada R_n para poder llegar a calcular el área de P_∞.

Lema 2: $|R_n| = t \cdot 2^n$, $\forall n \in Z^+$ donde t es el número de vértices de P_0.

Demostración: Notemos que por cada vértice en P_n se realiza un recorte. También se puede observar que por cada recorte que se hace, se obtienen dos vértices nuevos. Como resultado, si P_n tiene m vértices, P_{n+1} tiene $2m$ vértices. Así mismo, si a P_n se le hacen m recortes a P_{k+1} se le hacen el doble de recortes debido a que presenta el doble de vértices, por inducción esto se mantiene $\forall n \in N$. Notemos que si nuestra figura inicial P_0 tiene t vértices, en consecuencia P_n tiene $t \cdot 2^n$ vértices, pues, se le hacen $t \cdot 2^n$ recortes. ($t = 3$ en nuestro problema) ■

Para obtener el área del conjunto de recortes hechos a P_n ($[R_n]$) se multiplicando el número de recortes por el área de un recorte:

$$[R_n] = |R_n| \cdot [r_n] \qquad Ejemplo: [R_0] = (3 \cdot 2^0) \cdot 10/9 = 30/9;$$

Lema 3: La suma del área de todos los recortes $[R_n]$ sigue una progresión geométrica de razón: 2/9.

Demostración: Teniendo en cuenta que el área de todos los recortes es igual, esto es debido a que partimos de 3 recortes iguales, se cumple:

$$\frac{[r_{n+1}]}{[r_n]} = \frac{1}{9}; (Lema\ 1) \qquad [r_n] = \frac{[R_n]}{3 \cdot 2^n};\ \ [r_{n+1}] = \frac{[R_{n+1}]}{3 \cdot 2^{n+1}}\ \ (Lema\ 2)$$

Juntando estos dos lemas obtenemos:

$$\frac{[T_{n+1}]}{3 \cdot 2^{n+1}} \div \frac{[T_n]}{3 \cdot 2^n} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{[T_{n+1}]}{[T_n]} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{[T_{n+1}]}{[T_n]} = \frac{2}{9} \ ■$$

Notemos que para obtener el área de P_n, se puede sumar los n términos de esta progresión geométrica y restarle a P_0:

$$[P_n] = [P_0] - S_n$$

$$S_n \; = [R_0]\frac{r^n - 1}{r - 1} \; = \frac{30}{9} \cdot \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^n - 1}{\frac{2}{9} - 1} = -\frac{30}{7}\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - 1\right)$$

Obteniendo la fórmula general para el área de P_n:

$$[P_n] = 10 + \frac{30}{7}\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - 1\right)$$

$$[P_0] = 10, \;\; [P_1] = \frac{20}{3}, \;\; [P_2] = \frac{160}{27} \dots$$

Entonces se puede encontrar el área de P_∞ con límites:

$$[P_n] \; = [P_\infty] = \left(10 + \frac{30}{7}\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - 1\right)\right) = 10 - \frac{30}{7} = \frac{40}{7}$$

Se calcula la relación entre $[P_0]$ y $[P_\infty]$:

$$\frac{[P_\infty]}{[P_0]} = \frac{40}{7} \div 10 = \frac{4}{7}$$

4. Eliminación de las restricciones impuestas

En este apartado se hará una ampliación donde se eliminarán algunas de las restricciones del problema para ver que podemos descubrir al hacernos nuevas preguntas.

La primera siendo: ¿Qué pasa si la figura no es un triángulo? ¿Hay algún tipo de fórmula que nos dé las relaciones entre cualquier $[P_\infty]$ y $[P_0]$? ¿Qué pasa si la figura no es regular? Para obtener $[P_\infty]$ se sigue el mismo procedimiento con la suma infinita de todos los recortes. En un principio es necesario demostrar que los recortes siguen una progresión geométrica. Debido a que el lema 3 presupone que los recortes presentan la misma área y, por tanto, la afirmación (Lema 2):

$$[r_n] = \frac{[R_n]}{3 \cdot 2^n}$$

$$[r_{n+1}] = \frac{[R_{n+1}]}{3 \cdot 2^{n+1}}$$

No se cumple para toda figura.

Lema 4: la relación entre $[R_n]$ y $[R_{n+1}]$ es de 2/9, para toda figura inicial (no necesariamente regular)

Demostración: Se considera un recorte cualquiera (r_n) de P_n (en este caso la figura inicial de la cual se obtiene P_n no es necesariamente un triángulo equilátero), en un principio notemos que por definición r_0 tiene solo un vértice que forma parte de la figura P_n y los otros dos que formaran parte de P_{n+1}. Así mismo, de estos vértices se generan dos recortes (lema 2), que según el lema 1, van a tener una relación de 1/9 con el inicial (Figura 3).

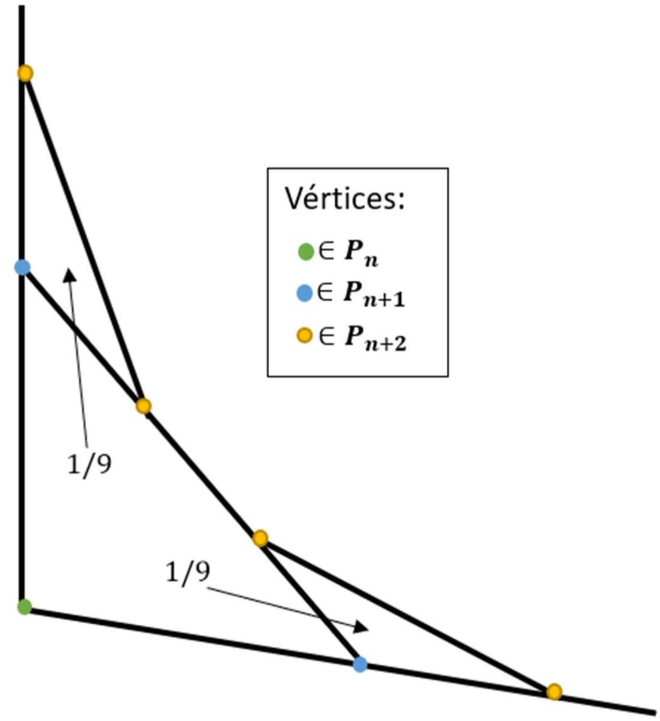

Figura 3: Representación de la relación entre los recortes de P_n y P_{n+1}

Entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$2\sum_{i=0}^{|R_n|}[r_n]_i = \sum_{i=0}^{|R_{n+1}|} 9 \cdot [r_{n+1}]_i \Rightarrow \frac{2}{9}\sum_{i=0}^{|R_n|}[r_n]_i = \sum_{i=0}^{|R_{n+1}|}[r_{n+1}]_i \Rightarrow \frac{2}{9}[R_n] = [R_{n+1}] \blacksquare$$

En consecuencia, la suma de todos los recortes sigue una progresión geométrica. Con esta información se calcula la relación entre $[P_0]$ y $[P_\infty]$ haciendo uso de la suma de los infinitos elementos de una progresión geométrica como se ha hecho anteriormente:

$$\frac{[P_\infty]}{[P_0]} = \frac{[P_0] - S_\infty}{[P_0]} = 1 - \frac{\frac{[R_0]}{1-r}}{[P_0]} = 1 - \frac{\frac{[R_0]}{1-2/9}}{[P_0]} = 1 - \frac{9[R_0]}{7[P_0]};$$

De esta manera encontrando el área de los recortes iniciales ($[R_0]$) y de la figura inicial ($[P_0]$), se puede obtener una fórmula general. Fijémonos en los triángulos formados por 3 vértices seguidos de un polígono, siempre hay un recorte que, según el Teorema de Tales, tiene una relación de 1/9 con este triángulo (Figura 4, pintados en gris y rojo). Así entonces, si este polígono es regular, se puede calcular fácilmente $[R_0]$ porque el ángulo interior de un polígono regular se trata de $180° - 360°/n$ (representado como α en la figura). Se usa la siguiente fórmula para calcular el área de un triángulo:

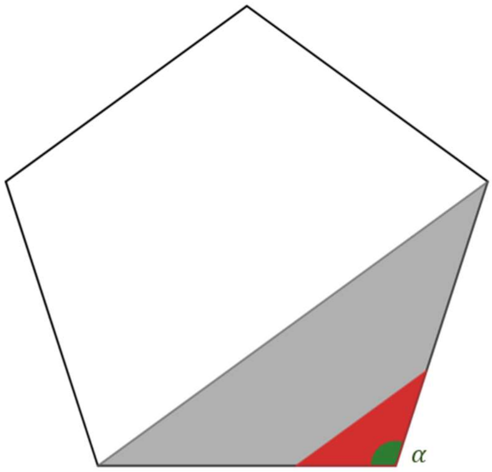

Figura 4: Pentágono donde se puede ver pintado el triángulo con los vértices del polígono y su recorte respectivo

$$A_t = \frac{a \cdot b \cdot \sin(C)}{2}; \textit{donde } a \textit{ y } b \textit{ son lados del triángulo y } C \textit{ el angulo entre los dos};$$

$$[R_0] = n \cdot \frac{1}{9} \cdot A_t = n \cdot \frac{1}{9}\left(\frac{l \cdot l \cdot \sin\left(180° - \frac{360°}{n}\right)}{2}\right);$$

Substituyendo y expandiendo en la fórmula del área del polígono regular expuesta en el cuarto apartado del fundamento teórico, se obtiene la siguiente formula general:

$$\text{Polígono Regular: } A_p = \frac{n \cdot l^2}{4\tan\left(\frac{180}{n}\right)}°$$

$$1 - \frac{9[R_0]}{7[P_0]} = 1 - \frac{9}{7}\left(n \cdot \frac{1}{9}\left(\frac{l \cdot l \cdot \sin\left(180° - \frac{360°}{n}\right)}{2}\right) \div \frac{n \cdot l^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)}\right) =$$
$$= 1 - \frac{2}{7}\sin\left(180° - \frac{360°}{n}\right) \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{7}\left(2 \cdot \cos\left(\frac{360°}{n}\right) + 5\right);$$

Lema 5: Esta relación también es válida para cualquier triángulo y cuadrilátero no regular.

Demostración: Primero se demuestra para todo triángulo, se nota que el lema 1 y el lema 2, no son exclusivos a un triángulo equilátero. Entonces, se sigue el mismo razonamiento se utiliza en la solución del problema inicial:

$$[P_\infty] = [P_0] - S_\infty$$
$$S_\infty = \frac{[R_0]}{1-r}$$

Notemos que para todo triángulo $[R_0] = \frac{1}{9}[P_0] \cdot 3$ (Lema 1) y $r = 2/9$ (Lema 4). Substituyendo y dividiendo por $[P_0]$, obtenemos:

$$[P_\infty] = [P_0] - \frac{\frac{1}{9}[P_0] \cdot 3}{1 - \frac{2}{9}} \Rightarrow \frac{[P_\infty]}{[P_0]} = \frac{[P_0] - \frac{3[P_0]}{7}}{[P_0]} = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

La misma relación que con un triángulo equilátero. Para demostrar lo mismo con un cuadrilátero, fijémonos en la Figura 5.

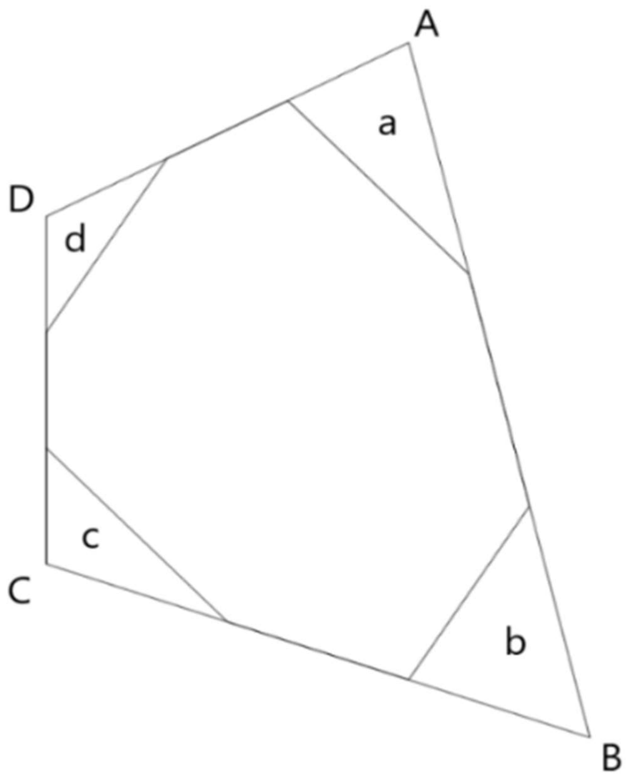

Figura 5: Cuadrilátero con los recortes correspondientes a P_0

Se nota lo siguiente de cada uno de los recortes:

$$[a] = \frac{[ADB]}{9};\;\; [b] = \frac{[BAC]}{9};\;\; [c] = \frac{[CBD]}{9}; [d] = \frac{[DCA]}{9};$$

Así mismo, se cumple:

$$[ADB] + [CBD] = [P_0] \;\; y \;\; [BAC] + [DCA] = [P_0]$$

Expandiendo en esto:

$$9[a] + 9[b] + 9[c] + 9[d] = 2 \cdot [P_0] \Longrightarrow [a] + [b] + [c] + [d] = [R_0] = \frac{2}{9}[P_0]$$

Ahora usando el mismo razonamiento que en la demostración anterior y substituyendo obtenemos que la relación es:

$$[P_\infty] = [P_0] - S_\infty;$$

$$S_\infty = \frac{[R_0]}{1 - r}$$

$$[P_\infty] = [P_0] - \frac{\frac{2}{9}[P_0]}{1 - \frac{2}{9}} \Longrightarrow [P_\infty] = \frac{5[P_0]}{7} \Longrightarrow \frac{[P_\infty]}{[P_0]} = \frac{5}{7}; \;\blacksquare$$

Lema 6: La relación ya no funciona para un polígono no regular de más de 4 lados.

Demostración: Se considera un pentágono como el de la figura 6. Sea p un punto no fijo de la recta r. Y sea r una recta paralela a la base del triángulo que creado por p con sus dos vértices cercanos. Fijémonos que el área de este triángulo no cambia, debido a que la base y la altura son invariantes. En consecuencia, el recorte hecho desde el vértice p también tiene un área constante. Se consideran los otros dos recortes que aparecen en la Figura 6, t_1 y t_2.

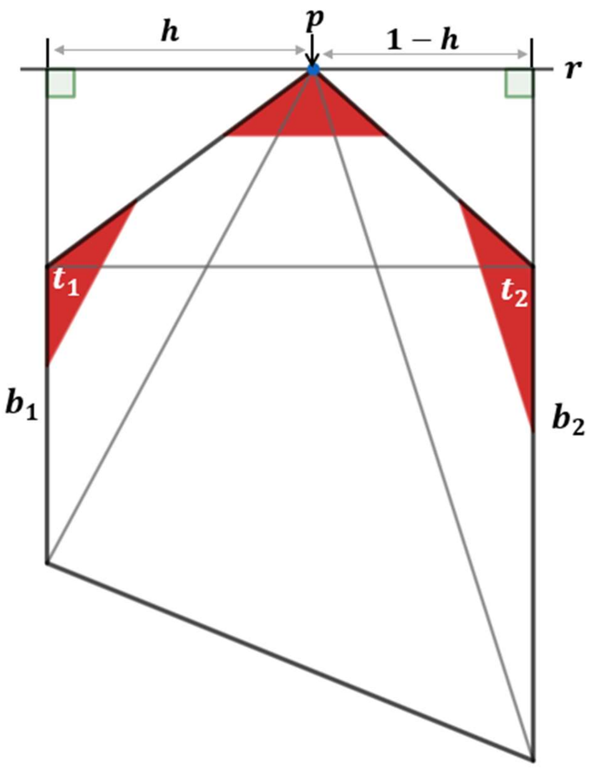

Figura 6: pentágono con el cual se demuestra el Lema 6

El área de estos triángulos es:

$$[t_1] = \frac{h \cdot b_1}{2} \cdot \frac{1}{9}; \;\; [t_2] = \frac{(1-h) \cdot b_2}{2} \cdot \frac{1}{9};$$

Para que la fórmula $\frac{1}{7}\left(2 \cdot \cos\left(\frac{360°}{n}\right) + 5\right)$ funcione, ha de existir una relación constante entre $[R_0]$ y $[P_0]$. Pero en nuestro caso la relación es la siguiente:

$$\frac{[R_0]}{[P_0]} = \frac{S_0 + t_1 + t_2}{[P_0]}; Donde\ S_0\ se\ trata\ de\ la\ suma\ de\ todos\ los\ otros\ recortes.$$

Pues S_0 y $[P_0]$ son constantes, para que funcione la fórmula, necesitamos que $t_1 + t_2$ también sea constante. Pero fijémonos en lo siguiente:

$$\left(\frac{h \cdot b_1}{2} + \frac{(1-h) \cdot b_2}{2}\right) \cdot \frac{1}{9} > \left(\frac{h \cdot b_1}{2} + \frac{(1-h) \cdot b_2}{2}\right) \cdot \frac{1}{9}; \;\; debido\ a\ que\ b_2 > b_1$$

Pues, la demostración tiene la misma validez si se le añaden más vértices, el mismo racionamiento sigue vigente con cualquier polígono con más de 5 lados. ■

5. Obtención de las figuras de la exploración

Para obtener las figuras expuestas en este trabajo se utiliza un programa escrito en C++ (Anexo 7.4) junto con *Wolfram Mathematica* para poder representar-las. Este programa de C++ también nos calcula el área inicial del polígono y una aproximación al área final empleando el *Shoelace Theorem*. El programa funciona de la siguiente manera:

1. Pide los vértices del polígono inicial y los guarda en un vector: *Forma*.
2. Calcula el área del polígono inicial.
3. Estos se pasan por una función que crea 2 puntos en la trisección de los lados del polígono y los guarda en un vector: *nuevaForma*.
4. Seguidamente, substituye los vértices que guarda el vector Forma por los de *nuevaForma* y vuelva a inicializar un vector *nuevaForma*.
5. Se repite este proceso tantas iteraciones como quiera el usuario.
6. Una vez acabado este proceso, calcula el área del polígono final y se imprimen todos los puntos obtenidos en orden para luego computar-los en W*olfram Mathematica*.

Algunas de las figuras generadas por el programa se pueden apreciar en los anexos (8.1, 8.2, 8.3).

6. Conclusión

Con esto llegamos al final de este trabajo. Puedo afirmar que he conseguido llegar a todos los objetivos que me propuse. He resuelto el problema y he explorado las restricciones que nos marcaba. Haciendo esto he llegado a un resultado interesante del cual estoy muy contento. He podido encontrar una fórmula general para todo polígono regular o de cualquier triángulo o cuadrilátero. Además, he podido demostrar que no existe relación fija para figuras con más de 4 lados. También he podido combinar dos de mis pasiones, las matemáticas y la informática, he sido capaz de desarrollar un programa que dibujase las distintas figuras y ayudar-me de este cuando hacia la exploración.

No obstante, siempre hay cosas a mejorar y me gustaría poder encontrar una fórmula que me diese la relación no obstante de la figura, aunque no sea fija, pero esto creo que se sale de mis conocimientos matemáticos y geométricos. Aun así, hay más preguntas me gustaría haber explorado y que no he podido tratar, como: ¿Qué pasa si en vez de trisecar, dividimos los lados en 4 segmentos y hacemos el mismo procedimiento? ¿Qué pasa si los dividimos en 5 segmentos? ¿Y en n segmentos?

7. Bibliografía

[1] Department of Mathematics, Boston University (2021): PROMYS.

Web: https://promys.org/program. Última consulta [17/10/2021]

[2] Colera, J. Otros (2016), Matemàtiques 1r Batxillerat. (p. 58-59) Successions.

ISBN: 9788448940270. Última consulta [17/10/2021]

[3] Requena, B. (2017). Teorema de Tales. Universo Formulas.

Web: www.universoformulas.com/matematicas/geometria/teorema-tales/.

Última consulta [17/10/2021]

[4] Laaksonen, A. (3 de Julio, 2018) Polygon area (p.271). Competitive Programmer's Handbook.

Web: www.cses.fi/book/book.pdf. Última consulta [17/10/2021]

[5] AoPSOnline. (2021) Shoelace Theorem. Aops Online.

Web: www.artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Shoelace_Theorem.

Última consulta [17/10/2021]

[6] Barrios, L. (2014). Área de un polígono regular. INTEF

Web: http://serbal.pntic.mec.es/lbac0014/Trigonometria/poligono.htm

Última consulta [17/10/2021]

8. Anexo

8.1. Figuras Regulares

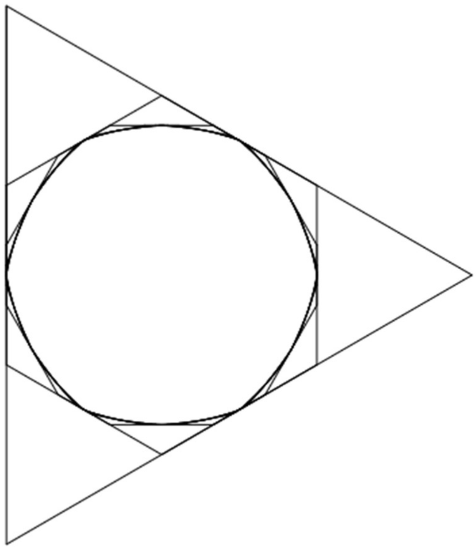

Figura 7: Triángulo equilátero con su respectivo P_∞

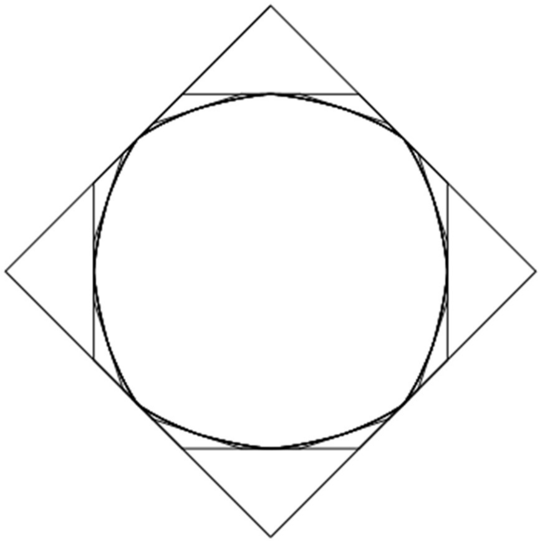

Figura 8: Cuadrado con su respectivo P_∞

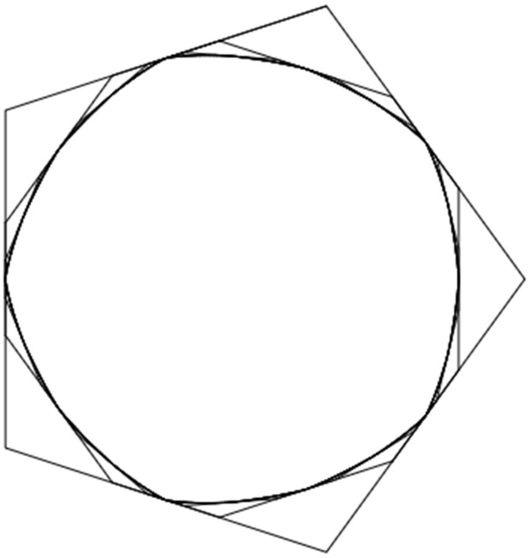

Figura 9: Pentágono regular con su respectivo P_∞

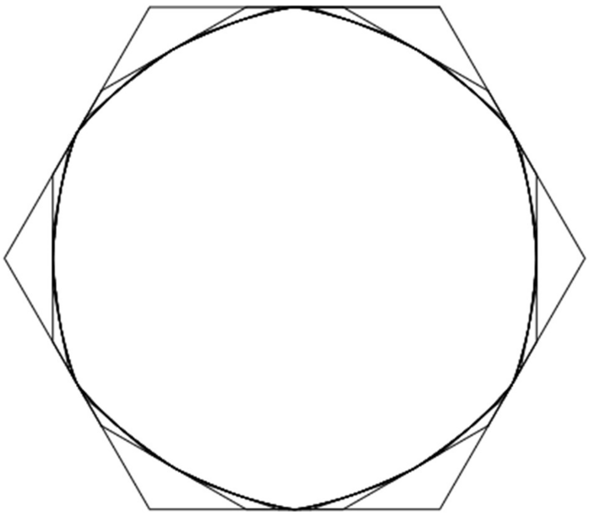

Figura 10: Hexágono regular con su respectivo P_∞

8.2. Triángulos y cuadriláteros no regulares

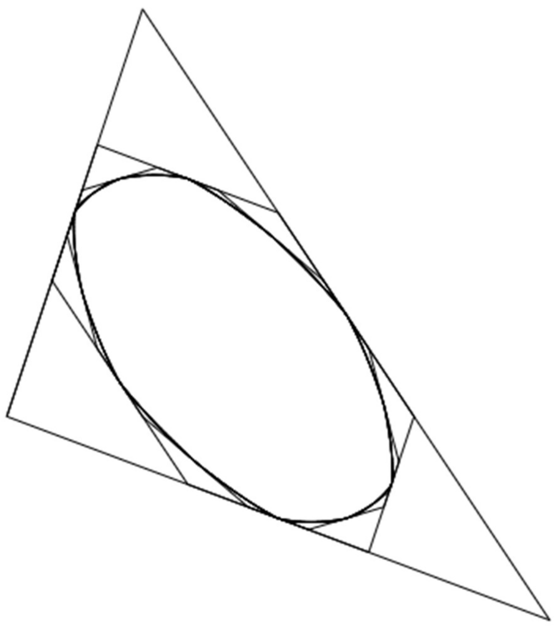

Figura 11: Triángulo con su respectivo P_∞

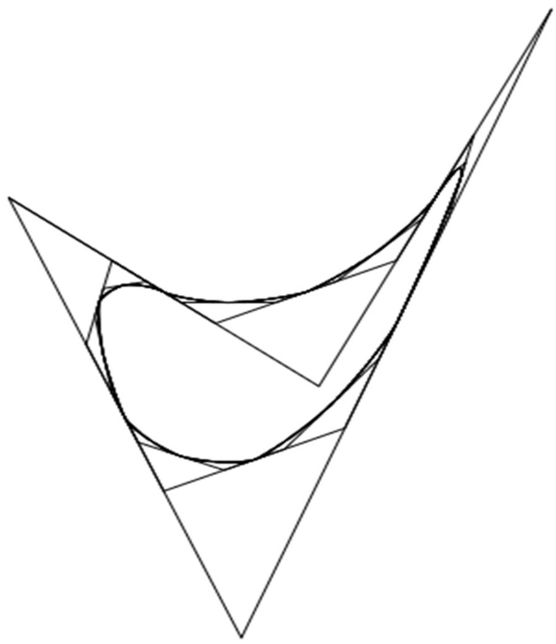

Figura 12: Cuadrilátero con su respectivo P_∞

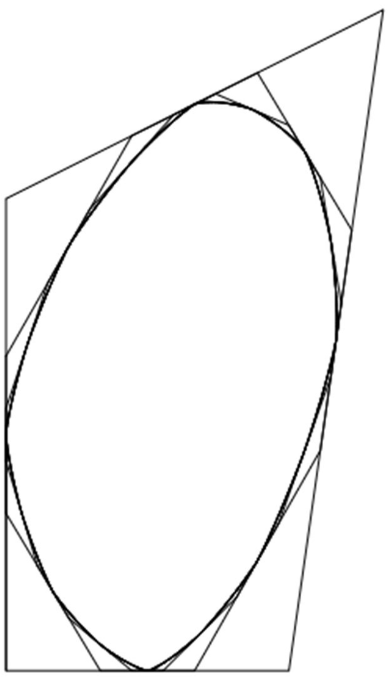

Figura 13: Cuadrilátero con su respectivo P_∞

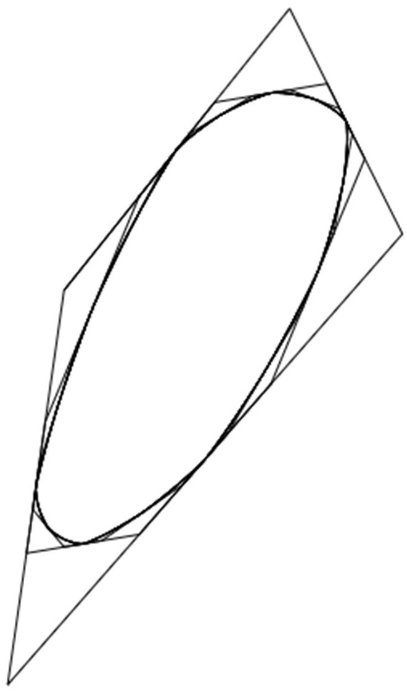

Figura 14: Cuadrilátero con su respectivo P_∞

8.3. Figuras no regulares

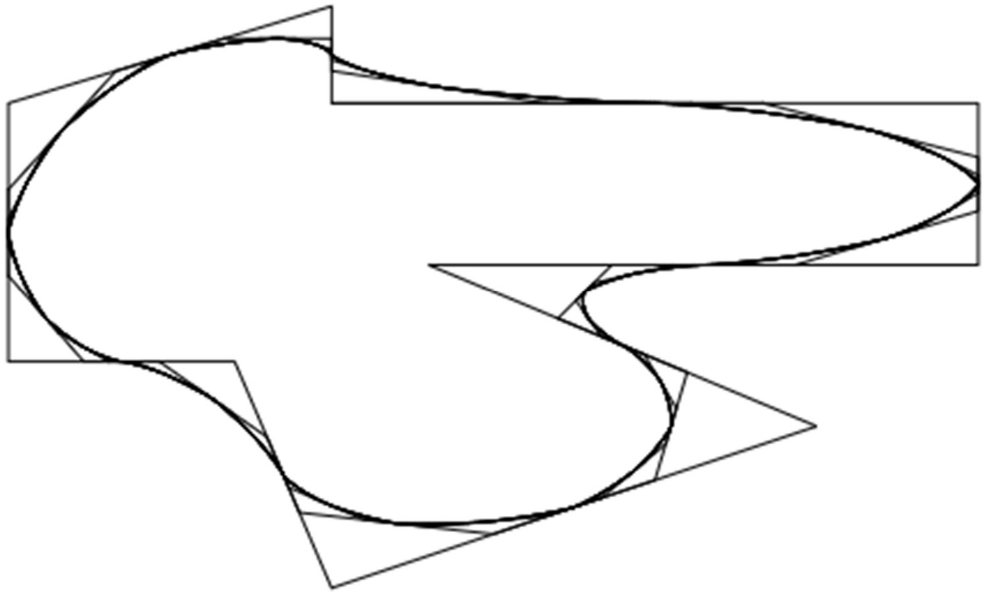

Figura 15: Decágono irregular y convexo con su respectivo P_∞

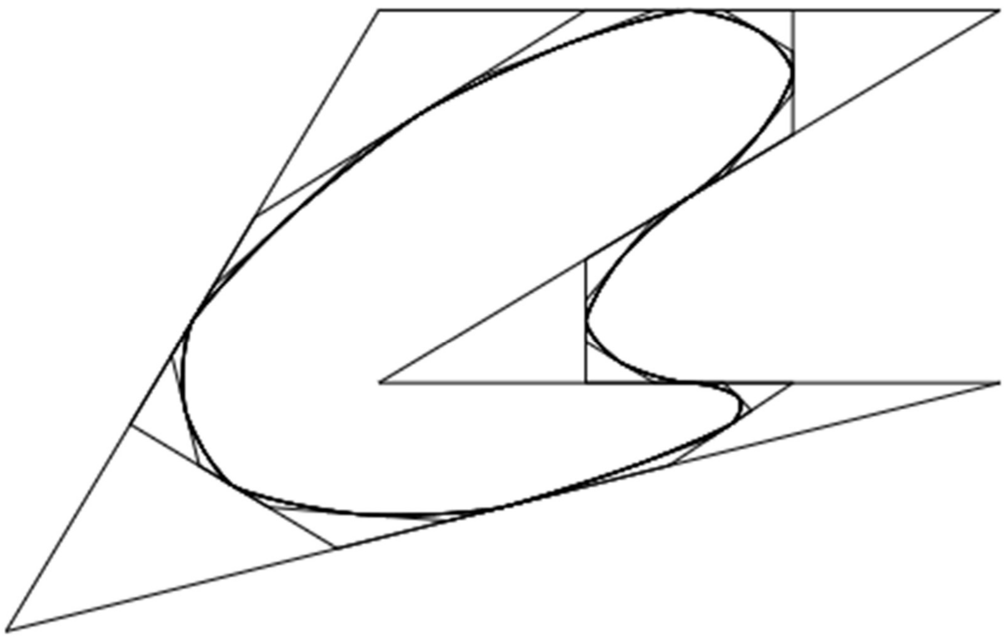

Figura 16: Pentágono irregular y convexo con su respectivo P_∞

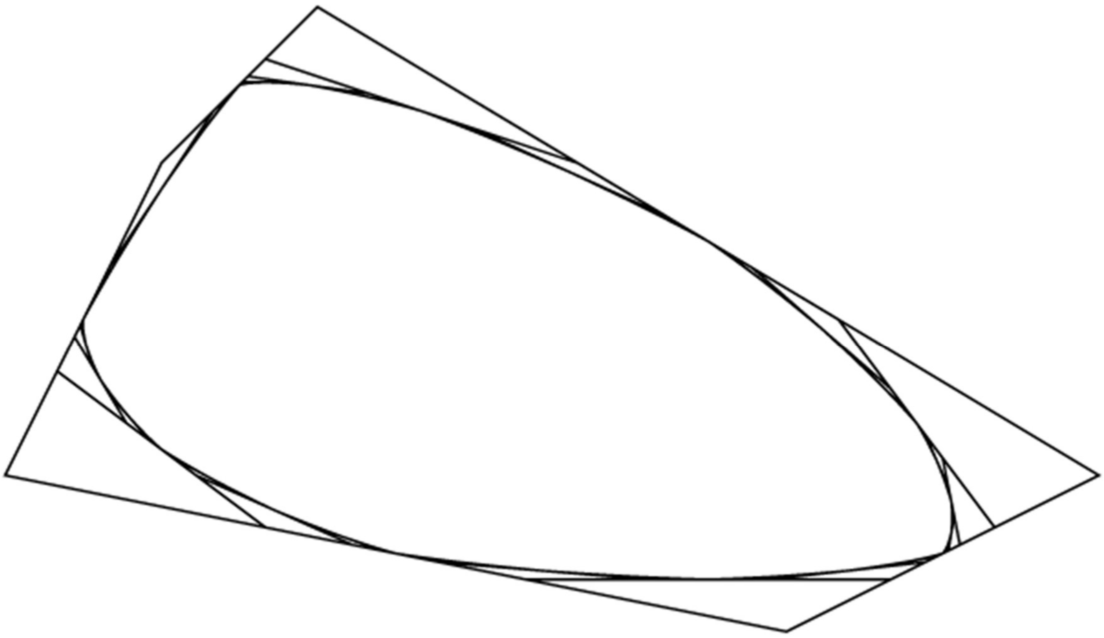

Figura 17: Pentágono irregular con su respectivo P_∞

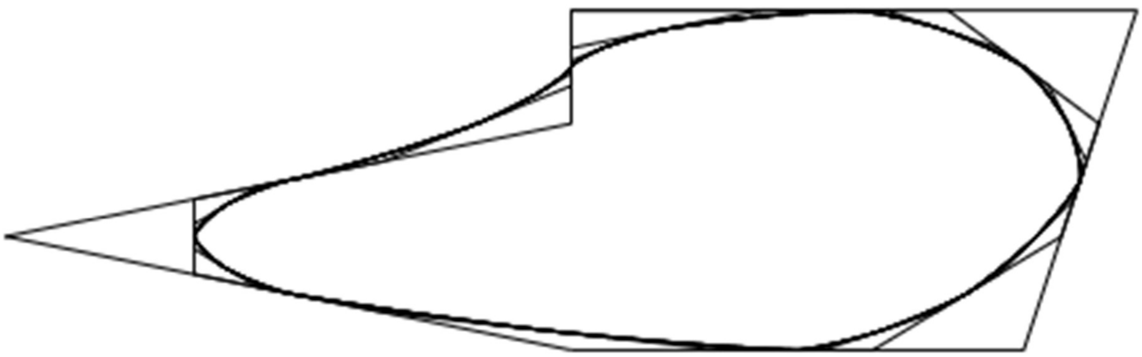

Figura 18: Hexágono irregular con su respectivo P_∞

8.4. Programa Informático

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;



#define x first
#define y second

typedef pair<double, double> punt;
typedef vector<pair<double, double>> cords;

int n=3;

void nSecar(punt A, punt B, cords &novaForma){
		punt vecAB;
		vecAB.x = (B.x - A.x);
		vecAB.y = (B.y - A.y);
		for(int i = 0; i<n-1; i++){
			novaForma.push_back(make_pair(A.x+(vecAB.x/n), A.y+(vecAB.y/n)));
			A.x += vecAB.x/n;
			A.y += vecAB.y/n;
		}
}

void createForm(int numVert, cords Forma, cords &novaForma){
		for(int j =0; j < numVert-1; j++){
			nSecar(Forma[j], Forma[j+1], novaForma);
		}
		nSecar(Forma[numVert-1], Forma[0], novaForma);
		//ara cal fer una
}


int main(){
		ios_base::sync_with_stdio(0);
		cin.tie(0);
		cout.tie(0);

		int numVert;
		//cords TOT;
		cords Forma(numVert);
		cords novaForma;
		cords Area;
```

```
	cout << "Numero de Vertices?" << endl;
	cin >> numVert;
	char anw;
	cout << "Regular? (input 'y' or 'n')" << endl;
	cin >> anw;
	if(anw=='Y'||anw=='y'){

		for(int k = 1; k <=numVert; k++ ){
			double angle = M_PI*2*k/numVert;
			Forma[k-1].x = cos(angle);
			Forma[k-1].y = sin(angle);
			Area.push_back(make_pair(cos(angle), sin(angle)));
		}
	}
	else if(anw == 'N' || anw == 'n'){
		for(int k = 1; k <=numVert; k++){
			cout << "Vertex " << k << ':' << endl;

			double xi, yi;
			cin >> xi >> yi;
			Forma[k-1].x = xi;
			Forma[k-1].y = yi;
			Area.push_back(make_pair(xi, yi));
		}
	}
	else return 0;


	cout << "Area 1: ";

	double A1 = 0;
	for(int i = 0; i<numVert-1; ++i) A1 += Area[i].x*Area[i+1].y;
	for(int i = 0; i<numVert-1; ++i) A1 -= Area[i+1].x*Area[i].y;
	A1 += Area[numVert-1].x*Area[0].y;
	A1 -= Area[numVert-1].y*Area[0].x;
	Area.clear();
	cout << fixed << setprecision(15);
	cout << abs(A1)*0.5 << '\n';
	cout << fixed << setprecision(7);

	cout << '\n' <<"Graphics[Line[{";
	for(auto p : Forma) {
	cout << '{'<< p.x<<", "<<p.y<<"}, ";
		//TOT.push_back(p); // per si vui guardar tots els valors en un vector
	}
```

```
        cout << '{'<< Forma[0].x<<", "<<Forma[0].y<<"}, ";
        int iteracions = 7;
        for(int i = 2; i <= iteracions; i++){
                createForm(numVert, Forma, novaForma);
                        Forma = novaForma;
                        novaForma.clear();
                        numVert*=2;

                for(auto p : Forma) {
                        if(i == iteracions)   Area.push_back(make_pair(p.x, p.y));
                        cout << '{'<< p.x<<", "<<p.y<<"}, ";

                }
                if(i < iteracions)
                        cout << '{'<< Forma[0].x<<", "<<Forma[0].y<<"}, ";
                else{
                        cout << '{'<< Forma[0].x<<", "<<Forma[0].y<<"}";
                }
        }
        cout << "}]]" << '\n';

        cout << '\n' << "Area final: ";

        double A2 = 0;
        for(int i = 0; i<numVert-1; ++i) A2 += Area[i].x*Area[i+1].y;
        for(int i = 0; i<numVert-1; ++i) A2 -= Area[i+1].x*Area[i].y;
        A2 += Area[numVert-1].x*Area[0].y;
        A2 -= Area[numVert-1].y*Area[0].x;
        Area.clear();
        cout << fixed << setprecision(15);
        cout << abs(A2)*0.5 << '\n';
}
```