离散数学

一、命题逻辑

1、命题与联结词

命题

一个具有真和假但不能两者都是的断言成为命题，命题逻辑主要研究前提和结论之间的逻辑关系（数理逻辑中一般以大写字母或者带上标、下表的大写字母表示）

- **真值**：（T、1）一个命题所表达的判断为真 ->**真命题**
- **假值**：（F、0*）一个命题所表达的判断为假 ->**假命题**

命题满足条件：

1. 命题是表达判断的陈述句，疑问句、祈使句、感叹句都不是命题
2. 命题有确定的真假值，它的真值或者为真、或者为假，两者必居其一
   命题类型：

- **简单命题**：不包含其他更简单命题的命题
- **复合命题**：由简单命题、联结词组合构成的复杂命题

联结词

存在于数理逻辑中的运算符，称为逻辑联结词

- **否定联结词**¬: “非”运算，一元运算符

P	¬P
0	1
1	0

- **合取联结词**∧: “P并且Q”，二元运算符

P	Q	P ∧Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- **析取联结词**∨: “P或者Q”， 二元运算符

P	Q	P∨Q
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

- **条件联结词（蕴含联结词）**→: 二元运算符
  “如果P，那么Q”、“P是Q的充分条件”、“Q是P的必要条件”、
  “若P，则Q”、“P仅当Q”、“Q每当P”、“只要P，就Q”、
  “只有Q，才P”、“除非Q，才P”、“除非Q，否则非P”
  - P：假设、前件
  - Q：结论、后件

P	Q	P→Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- **双条件联结词（双条件命题）**↔: 二元运算符
  “P当且仅当Q”、“P和Q互为充要条件”

P	Q	P↔Q
0	0	1
0	1	0

1	0	1
1	1	1

2、命题公式

命题常元：表示一个确定命题（其真值不是T就是F）的符号
命题变元：表示一个不确定的或可泛指任意命题的符号
表达式：由命题常元、命题变元、联结词以及括弧组成的式子，只有按照特定组合规则所形成的表达式才有意义

命题合式公式（命题公式）
1. （基础）单个命题常元或命题变元是命题合式公式
2. （归纳）如果A和B是命题公式，则$\neg A$、$A \wedge B$、$A \vee B$、$A \rightarrow B$、$A \leftrightarrow B$是命题合式公式
3. （极小性）只有有限次地应用条款(1)和(2)生成的表达式才是命题合式公式

子公式：若B是命题公式A的一个连续段且B也是命题公式，则称B是A的一个子公式
命题的符号化：把一个用自然语言叙述的命题写成与之内涵相同的命题公式的形式
括号省去的约定：

- 联结词运算的优先顺序：¬的运算优先级最高，∧、∨的运算优先级次之，→、↔的运算优先级最低，不改变运算先后次序的括号
- 相同的联结词，按从左至右顺序计算时，以及最外层的括号

设p_1，p_2，$...$，p_n是命题公式A中出现的所有命题变元，如果给p_1，p_2，$...$，p_n指定一组真值，则称为对命题公式A**赋值**（指派或解释），共有2^n个不同的赋值

重言式（永真式）：给定一个命题公式在任何赋值下它的真值都为**T**
矛盾式（永假式）：给定一个命题公式在任何赋值下它的真值都为**F**
偶然式：给定一个命题公式，既不是永真式，也不是永假式
可满足式：对于某一个命题公式A，至少存在一种赋值，使得它的真值为**T**，重言式、偶然式都是可满足式

3.1 逻辑等价

给定两个命题公式A和B，设p_1，p_2，$...$，p_n为所有出现在A和B中的逻辑变元，但$p_i(i=1,2,...,n)$不一定在A和B中同时出现，若对于p_1，p_2，$...$，p_n的任意赋值，A和B的真值都相同，则称A和B**逻辑等价**，记作$A \Leftrightarrow B$，读作“**A等价于B**”

> **设A、B是命题公式，则A和B逻辑等价，当且仅当$A \leftrightarrow B$是一个重言式**

逻辑等价公式表

等价变换：

1. **代入规则**：

> 设A、B是命题公式，其中A是重言式，P是A中的命题变元，如果将A中每一处出现的P均用B代入，所得命题公式A′，则所得命题公式A′任然是一个重言式
>
> > 推论：设A、B、C是命运公式，且$A \Leftrightarrow B$，P为出现在A和B中的命题变元，将A和B中每一处出现的P用命题公式C代入而分别得到A′和B′，则有$A' \Leftrightarrow B'$

2. **替换规则**：

> 设A、X、Y是命题公式，X是A的子公式，且有$X \Leftrightarrow Y$，如果将A中的X用Y来替换（不必每一处都替换），则得到的公式B与A等价，即$B \Leftrightarrow A$

1. **传递规则**：

> 设A、B、C是命题公式，若$A \Leftrightarrow B$且$B \Leftrightarrow C$，则有$A \Leftrightarrow B$

3.2 永真蕴含

> - **设A、B是命题公式，如果$A \rightarrow B$是一个重言式，则称A蕴含B，记作$A \Rightarrow B$**
> - **设A和B是任意两个命题公式，$A \Leftrightarrow B$当且仅当$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$**

永真蕴含公式表

证明$A \Rightarrow B$方法：

- **肯定前件法**：假设A为T，如果能推出B为T，则$A \Rightarrow B$
- **否定后件法**：假设B为F，如果能推出A为F，则$A \Rightarrow B$

蕴含关系的性质：

- 设A、B是命题公式，如果$A \Rightarrow B$并且A是重言式，则B也是重言式
- 如果$A \Rightarrow B$并且$B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow C$，即蕴含关系是传递的
- 如果$A \Rightarrow B$并且$A \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow B \vee C$、$A \Rightarrow B \wedge C$
- 如果$A \Rightarrow C$并且$B \Rightarrow C$，则$A \vee B \Rightarrow C$、$A \wedge B \Rightarrow C$

4、对偶式

> 设有命题公式A，其中仅含有联结词¬、∨、∧，如果将A中的∨换成∧，∧换成∨，常元F和T也互相替换，所得公式记作A^*，则称A^*为A的**对偶公式**

1. 对偶是相互的，A也是A^*的对偶公式，即$(A^*)^* = A$
2. 设A和A^*是对偶公式，其中仅含有联结词¬、∨、∧，P_1、P_2、$...$、P_n是出现在A和A^*中的所有命题变元，则有：
   - $\neg A(P_1, P_2, ..., P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$

- $A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

3. （**对偶定理**）设A和B是命题公式，P_1、P_2、...、P_n是出现在A和B中的命题变元，则有：
   - 如果$A \Leftrightarrow B$，则$A^* \Leftrightarrow B^*$
   - 如果$A \Rightarrow B$，则$B^* \Rightarrow A^*$

5、范式

> **析取式**：仅由若干命题变元和若干命题变元之否定通过联结词∨构成的命题公式
> **合取式**：仅由若干命题变元和若干命题变元之否定通过联结词∧构成的命题公式

> **析取范式**：合取式的析取
> $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \quad (n \geqslant 1)$, 其中$A_1, A_2, \ldots, A_n$是合取式
> **合取范式**：析取式的合取
> $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \quad (n \geqslant 1)$, 其中$A_1, A_2, \ldots, A_n$是析取式

求取范式

1. 将公式中的联结词都规约成¬、∨、∧
2. 利用德·摩根定律将否定联结词直接转移到各命题变元之前
3. 利用分配率、结合率将公式规约成合取范式或析取范式

主析取范式

> **极小项**：一个含n个命题变元的**合取式**，其中每个变元与其否定不同时存在，但两者之一必须出现且仅出现一次
>
> - n个命题变元P_1、P_2、...、P_n可构成2^n个不同的极小项：$\tilde{P}_1 \wedge \tilde{P}_2 \wedge \ldots \wedge \tilde{P}_n$，其中$\tilde{P}_i$或者是$P_i$，第i位取**1**、或者是$\neg P_i$，第i位取**0**
> - 性质：
>
> > 1. 每一个极小项当其赋值与编码相同时，其真值为T，在其余$2^n - 1$种赋值下其真值均为F
> > 2. 任意两个不同极小项当合取式永假，即$m_i \wedge m_j \Leftrightarrow F (i \neq j)$
> > 3. 所有极小项当析取式永真，记为$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee \ldots \vee m_{2^n-1} \Leftrightarrow T$

主析取范式：设P_1、P_2、...、P_n是命题公式A中包含的所有命题变元，由P_1、P_2、...、P_n的若干极小项**析取**所构成的析取范式与A**等价**

> 在一个命题公式A的真值表中，使A的**真值为T**的所有赋值所对应的**极小项**构成的析取范式即为A的主析取范式
> 步骤：

> > 1. 将原命题公式转化为析取范式
> > 2. 将每个合取式等价变换为若干极小项的析取，对每个合取式填补没有出现的变元，合取$\neg P \vee P$，再应用分配率展开
> > 3. 重复的极小项只保留一个

主合取范式

> **极大项**：一个含n个命题变元的**析取式**，其中每个变元与其否定不同时存在，但两者之一必须出现且仅出现一次
>
> - n个命题变元P_1、P_2、...、P_n可构成2^n个不同的极大项：$\tilde{P}_1 \vee \tilde{P}_2 \vee ... \vee \tilde{P}_n$，其中$\tilde{P}_i$或者是$P_i$，第i位取**0**、或者是$\neg P_i$，第i位取**1**
> - 性质：
>
> > 1. 每一个极大项当其赋值与编码相同时，其真值为F，在其余$2^n - 1$种赋值下其真值均为T
> > 2. 任意两个不同极大项当析取式永真，即$M_i \vee M_j \Leftrightarrow T (i \neq j)$
> > 3. 所有极大项当合取式永假，记为$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i \Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge ... \wedge M_{2^n-1} \Leftrightarrow F$

主合取范式：设P_1、P_2、...、P_n是命题公式A中包含的所有命题变元，由P_1、P_2、...、P_n的若干极大项**合取**所构成的合取范式与A**等价**

> 在一个命题公式A的真值表中，使A的**真值为F**的所有赋值所对应的**极大项**构成的合取范式即为A的主合取范式
> 步骤：
>
> > 1. 将原命题公式转化为合取范式
> > 2. 将每个析取式等价变换为若干极大项的合取，对每个合取式填补没有出现的变元，合取$\neg P \wedge P$，再应用分配率展开
> > 3. 重复的极大项只保留一个

定理：已知由n个不同命题变元构成的命题公式A的**主析取范式**为$\sum(i_1, i_2, ..., i_k)$，**主合取范式**为$\prod(j_1, j_2, ..., j_t)$，则有

> $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \cup \{j_1, j_2, ..., j_t\} = \{0, 1, 2, ..., 2^n - 1\}$
> $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \cap \{j_1, j_2, ..., j_t\} = \varnothing$

6、联结词的完备集

- 条件否定：$\nrightarrow$
  $p \nrightarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q)$
- 异或（不可兼或）：$\oplus$
  $P \oplus Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

- 或非：$\downarrow$
  $P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$
- 与非：$\uparrow$
  $P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$

全功能联结词集合：给定一个联结词集合，如果所有的命题公式都能用其中的联结词等价表示出来，则称该联结词集合是功能完备的
极小全功能联结词集合：一个联结词集合是全功能的，并且去掉其中任意一个联结词后均不是全功能的

命题逻辑的推理理论

> 设H_1、H_2、...、H_n、C是命题公式，若$H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \Rightarrow C$，则称C是一组**前提**$H_1$、$H_2$、...、$H_n$的**有效结论**，或者称C可由前提$H_1$、$H_2$、...、$H_n$逻辑推出，称为**推理**、**论证**、**证明**

推理规则：

- **P规则**：在推导过程中，前提可以在任何步骤引入
- **T规则**：在推导过程中，如果由已经推出的一个或多个公式蕴含S，则公式S可以引入到推导过程中
  证明方法：

1. 无义证明法：如果能够证明**P恒为假，则有$P \rightarrow Q$恒为真**，即$P \Rightarrow Q$
2. 平凡证明法：如果能够证明**Q恒为真，则有$P \rightarrow Q$恒为真**，即$P \Rightarrow Q$
3. 直接证明法：从一组前提出发，利用公认的推理规则逻辑演绎得到有效结论
4. **归谬法**：

> 设P_1、P_2、...、P_n是命题公式H_1、H_2、...、H_m中的所有命题变元，如果存在P_1、P_2、...、P_n的一种赋值，使得$H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_m$的真值为T，则称命题公式集合$\{H_1, H_2, ..., H_m\}$是**一致的**、**相容的**，否则称为**不一致的**、**不相容的**
>
> > **H_1、H_2、...、H_n、C是命题公式，如果存在公式R，使得**
> > **H_1、H_2、...、H_n、$\neg C \Rightarrow R \wedge \neg R \Leftrightarrow F$，则有$H_1$、$H_2$、...、$H_n \Rightarrow C$**

5. **CP规则法（附加证明法）**：

> **设H_1、H_2、...、H_n、R、C是命题公式，根据输出律可知，**
> **$(H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n) \rightarrow (R \rightarrow C) \Leftrightarrow (H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \wedge R) \rightarrow C$，将结论的前件R作为附加前提**

定律	定律描述	定律代号
对合律	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	E_1
等幂律	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	E_2
等幂律	$P \vee P \Leftrightarrow P$	E_3
交换律	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	E_4
交换律	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	E_5
结合律	$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$	E_6
结合律	$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$	E_7
分配律	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	E_8
分配律	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	E_9
德摩根律	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	E_{10}
德摩根律	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	E_{11}
吸收律	$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	E_{12}
吸收律	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$	E_{13}
蕴含律	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	E_{14}
双条件律	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	E_{15}
零律	$P \wedge F \Leftrightarrow F$	E_{16}
零律	$P \vee T \Leftrightarrow T$	E_{17}
同一律	$P \wedge T \Leftrightarrow P$	E_{18}
同一律	$P \vee F \Leftrightarrow P$	E_{19}
矛盾律	$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$	E_{20}
排中律	$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$	E_{21}
输出律	$(P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	E_{22}
归谬律	$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$	E_{23}
逆反律	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$	E_{24}

定律	定律描述	定律代号
直推式	$P \Rightarrow P$	I_1
化简式	$P \wedge Q \Rightarrow P$	I_2
化简式	$P \wedge Q \Rightarrow Q$	I_3
附加式	$P \Rightarrow P \vee Q$	I_4
附加式	$Q \Rightarrow P \vee Q$	I_5
变形附加式	$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$	I_6
变形附加式	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	I_7
变形附加式	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$	I_8
变形附加式	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$	I_9
假言推理	$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$	I_{10}
拒取式	$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$	I_{11}
析取三段论	$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$	I_{12}
前提三段论	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$	I_{13}
构造性二难推理	$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow (R \vee S)$	I_{14}
破坏性二难推理	$(\neg R \vee \neg S) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	I_{15}
合取二难推理	$(P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow R \wedge S$	I_{16}
逆条件附加	$(P \rightarrow Q) \Rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$	I_{17}
条件归并	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)$	I_{18}
双条件三段论	$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow (P \leftrightarrow R)$	I_{19}
前后件附加	$P \rightarrow Q \Rightarrow (P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)$	I_{20}
前后件附加	$P \rightarrow Q \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)$	I_{21}