三、集合与关系

1、集合的概念与表示

集合：若干（有穷或者无穷多）个具有某种共同性质的事物的全体，组成集合的单个事物称为该集合的**元素（成员）**

- 用大写字母A，B，C，...（可以带上下标）代表一个集合
- 用小写字母a，b，c，...（可以带上下标）代表一个元素

> 1. 若元素a在集合A中，记为$a \in A$，称a属于A或a是A的成员
> 2. 若元素a不在集合A中，记为$a \notin A$，称a不属于A或a不是A的成员
> 3. 度量一个有限集合A的大小，用$|A|$表示其包含的元素的个数

表示集合的方法：

1. 列举法：将集合中的元素在一对“{}”中一一列举起来，集合中的元素不能重复列举且元素间无次序之分
2. 描述法：使用自然语言或谓词描述集合中元素的共同特征$S = \{x|P(x)\}$
3. 归纳定义法：（续）

集合之间的关系：

> **相等**：两个集合A、B相等记为$A = B$，当且仅当它们有相同的元素$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$，若两个集合A和B不想等，记为$A \neq B$

> **包含**：设A、B是任意两个集合，若集合A的每个元素都是集合B的元素，则称A为B的**子集**或**B包含A**，记为$A \subseteq B$，
> $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$，若集合A不是集合B的子集，记为$A \subsetneq B$
> **真子集**：如果集合A的每一个元素都属于B，但集合B中至少有一个元素不属于A，则称A为B的真子集，记为$A \subset B$，
> $A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \exists y(y \in B \wedge y \notin A) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$

> **全集**：在一定范围内所有事物组成的集合称为该范围内的全集，$U = \{x|P(x) \vee \neg P(x)\}$
> **空集**：不含任何元素的集合，$\varnothing = \{x|P(x) \wedge \neg P(x)\}$
> **幂集**：给定集合A，以A的所有子集为元素组成的集合，记为$\rho(A)$

1. 空集是任意集合的子集且是任何非空集合的真子集
2. 设A、B、C式集合，若$A \subseteq B$且$B \subseteq C$，则$A \subseteq C$
3. 集合A和集合B相等的充分必要条件是A和B互为子集
4. 对于任意集合A，均有$A \subseteq A$，空集是唯一的

2、集合的基本运算

> 1. 集合的**交**：对于任意两个集合A和B，由所有属于集合A且属于集合B的元素组成的集合称为A和B的**交集**，记为$A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$

> 2. 集合的**并**：对于任意两个集合A和B，由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合称为A和B的**并集**，记为$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$

> 3. 集合的**补**：对于任意两个集合A和B，由所有属于集合A而不属于集合B的元素组成的集合称为集合B在A中的**相对补集**（集合A与B的差），记为$A - B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$
> 4. **绝对补**：如果U是包含集合A的全集，则属于U而不属于A的元素组成的集合称为集合A的补，记为$\bar{A} = U - A = \{x|x \in U \wedge x \notin A\}$

> 5. 集合的**对称差**：对于任意两个集合A和B，由属于集合A而不属于集合B以及属于集合B而不属于集合A的所有元素组成的集合称为集合A与B的对称差，记为$A \oplus B = (A - B) \vee (B - A) = \{x|(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$

> 6. 集合的**环积**：对于任意两个集合A和B，由属于集合A且属于集合B，以及既不属于集合A又不属于集合B的所有元素组成的集合，称为集合A与B的环积，记为$A \otimes B = A \bar{\oplus} B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = \{x|(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)\}$

集合运算文氏图
集合运算的性质
设A和B是全集U的任意子集，若$A \subseteq B$，则：

1. $\bar{B} \subseteq \bar{A}$
2. $B - A = B \cap \bar{A}$
3. $(B - A) \cup A = B$

3、容斥原理

> $|A_1 \cup A_2| \leqslant |A_1| + |A_2|$
> $|A_1 \cap A_2| \leqslant min(|A_1|, |A_2|)$
> $|A_1 + A_2| \geqslant |A_1| - |A_2|$
> $|A_1 \oplus A_2 = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|$

加法原理：如果$A_1, A_2, ..., A_n$是n个两两互不相交的集合，那么这n个集合的并集的元素个数为这n个集合中的元素个数之和。

$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$
容斥原理：设$A_1, A_2, ..., A_n$是有限集合，那么有
$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| ... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$

4、归纳证明

集合S的归纳定义

1. 基础条款：指出某些事物属于S，其功能是给集合S指定初始元素，使得定义的集合S非空
2. 归纳条款：指出由集合S中的已有元素构造新元素的方法（如果事物x、y、...是集合S中的元素，那么用某些方法组合成他们所得的新元素也在集合S中）
3. 极小性条款：断言一个事物除非能有限次应用基础条款和归纳条款构成，否则不在集合S中

归纳法

1. 基础步骤：对于基础条款中指定的每个初始元素t，证明命题P(t)为真
2. 归纳步骤：证明如果事物x，y，...有P性质，那么用归纳条款指定的方法组合它们所得的新元素也具有P性质

数学归纳法

> **数学归纳法第一原理**
> $\frac{P(0), \forall(P(n) \rightarrow P(n+1))}{\therefore \forall x P(x)}$
> 步骤：
>
> 1. （归纳基础）证明P（0）为真
> 2. （归纳假设）任取n（$n \geqslant 0$），假设P(n)为真
> 3. （归纳推理）由P(n)为真，推出P(n+1)也为真

> **数学归纳法第二原理**
> $\frac{P(0), \forall(P(0) \wedge P(1) \wedge ... \wedge P(n-1) \rightarrow P(n))}{\therefore x P(x)}$
>
> 1. （归纳基础）证明P(0)为真
> 2. （归纳假设）假设对任意的k<n，具有P(k)为真
> 3. （归纳推理）证明P(n)也为真

5、集合的笛卡尔积

两个元素a和b组成的具有固定次序的序列称为**序偶（二元祖）**，记为$< a, b >$，其中a称为第1元素，b称为第2元素

两个序偶$< a, b >$、$< c, d >$相等，记为````，当且仅当a=c且b=d

设A和B是两个集合，则称集合$A \times B = \{< a, b > | a \in A, b \in B\}$，为A和B的**笛卡儿积（叉积）**

设$A_1, A_2, ..., A_n$是n个集合，称集合 $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{< a_1, a_2, ..., a_n > | a_i \in A_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$为集合$A_1, A_2, ..., A_n$的**笛卡儿积（n元祖）**，$a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$是该n元祖的第i个元素，且$a_i \in A$，若对一切i，$A_i = A$，则$A \times A \times ... \times A$可简记为$A_n$

设A、B、C是任意集合，则有

> 1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
> 2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
> 3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
> 4. $(A \cap B \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

如果$A_i (i = 1, 2, ..., n)$都是有限集合，那么$|A_1 \times A_2 ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|$

6、二元关系

两个集合A和B的笛卡儿积$A \times B$的任一子集R，称为集合A和B上的**二元关系**，二元关系R是由**序偶**构成的集合，若$< x, y > \in R$，则称x与y有R关系，也记为xRy，否则为$< x, y > \notin R$，则称x与y没有R关系，则记为xℝy

> 集合A称为R的**前域**，集合B称为R的**陪域**
> 集合$\{x | (\exists y)(< x, y > \in R)\}$称为R的**定义域**，记为$domR \subseteq A$
> 集合$\{x | (\exists x)(< x, y > \in R)\}$称为R的**值域**，记为$ranR \subseteq B$

设两个有限集A和B，$|A| = m, |B| = n$，则集合A到集合B有2^{mn}个不同的二元关系
n个集合A_1，A_2，...，A_n的笛卡儿积$A_1 \times A_2 ... \times A_n$的任一子集R称为$A_1$，$A_2$，...，$A_n$上的一个**n元关系**，设R是$A_1 \times A_2 ... \times A_n$的子集，若$R = \varnothing$，则称R为$A_1 \times A_2 ... \times A_n$上的**空关系**，若$R = A_1 \times A_2 ... \times A_n$，则称R为$A_1 \times A_2 ... \times A_n$上的**全域关系**

关系的表示

关系矩阵
给定两个有限集$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\{$，R为A到B上的一个二元关系，则可以用0-1矩阵$M_R=[r_{ij}]_{m\times n}$来表示R
$M_R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & r_{mn} \end{bmatrix}$
其中$r_{ij}=\begin{cases} 1 & 若 <a_i,b_j>\in R \\ 0 & 若 <a_i,b_j>\notin R \end{cases}$

关系图
设有限集合$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$和$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$，R为A到B上的一个二元关系
作图法：首先在平面上做m个结点分别代表$a_1,a_2,\ldots,a_m$，另作n个结点分别代表$b_1,b_2,\ldots,b_n$，如果a_iRb_j则画一条从结点a_i到结点b_j的有向弧

关系的运算
设R和都是S都是集合A和B的二元关系，则有：

> $R\cup S=\{<x,y>|(xRy)\vee(xSy)\}$
> $R\cap S=\{<x,y>|(xRy)\wedge(xSy)\}$
> $R-S=\{<x,y>|(xRy)\wedge(x\tilde{S}y)\}$
> $\bar{R}=\{<x,y>|x\tilde{R}y\}=A\times B-R$
> $R\oplus S=(R-S)\cup(S-R)$

复合运算
设R为集合A到B的二元关系，S为集合B到C的二元关系，令
$R\circ S=\{<a,c>|a\in A\wedge c\in C\wedge(\exists b)(b\in B\wedge<a,b>\in R\wedge<b,c>\in S)\}$，则称$R\circ S$为R与S的**复合关系**
设R的关系矩阵$M_R=[a_{ij}]$为$m\times n$矩阵，S的关系矩阵$M_S=[b_{ij}]$为$n\times p$矩阵，则$M_{R\circ S}=[c_{ij}]_{m\times p}=M_R\odot M_S$，其中$\odot$是布尔乘法运算，
$c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj})(i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,p)$

> 关系的复合运算满足**结合律**：设R是从集合A到B的二元关系，S为B到C的二元关系，T为C到D的二元关系，则有$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$

逆运算
设R为集合A到B的二元关系，令$R^{-1}=\{<b,a>|<a,b>\in R\}$，则称$R^{-1}$为R的**逆关系**，为集合B到A上的二元关系，$R^{-1}$与R的关系矩阵互为转置矩阵
设R,R_1,R_2均为从A到B的二元关系，则有

> $(R^{-1})^{-1}=R$
> $(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$
> $(R_1\cap R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$
> $(\bar{R})^{-1}=\bar{R^{-1}}$，其中$\bar{R}=(A\times B)$，$\bar{R^{-1}}=(B\times A)-R^{-1}$
> $(R_1-R_2)^{-1}=R_1^{-1}-R_2^{-1}$
> 设R为A到B的二元关系，S是从B到C的二元关系，那么$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$

7、集合上的二元关系及其特性

二元关系

集合A与A的笛卡儿积$A\times A$的子集称为A上的**二元关系**
设A是任意集合，称A上的二元关系$\{<a,a>|a\in A\}$为集合A上的**相等关系**，记为I_A

设R是集合A上的二元关系，$n\in Z^+$，称$R\circ R\circ\ldots\circ R$为R的n次幂，记为$R^n$
设R是集合A上的 二元关系，约定$R^0=\{<x,x>|x\in A\}$

设R是集合A上的二元关系，$m,n\in N$，那么有：

> $R^m\circ R^n=R^{m+n}$
> $(R^m)^n=R^{mn}$

设R是集合A上的一个二元关系，若存在$i,j\in N,i<j$且使得$R^i=R^j$，则有

> 对所有的$k\geqslant 0,R^{i+k}=R^{j+k}$
> 对所有的$k,m\geqslant 0,R^{i+md+k}=R^{j+k}$，其中$d=j-i$
> 记$S=\{R^0,R^1,R^2,\ldots,R^{just-1}\}$，对于任意$n\in N$，均有$R^n\in S$

二元关系的特性

> **自反性**：设R是集合A上的二元关系，对于A中的每一元素x都有xRx，R是自反的$\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow xRx)\Leftrightarrow I_A\subseteq R$
> **反自反性**：设R是集合A上的二元关系，对于A中的每一元素x都有$x\tilde{R}x$，R是反自反的$\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow x\tilde{R}x)\Leftrightarrow R\cap T_A=\varnothing$

> **对称性**：设R是集合A上的二元关系，对于任意$x,y\in A$，每当xRy必有yRx，

> R是对称的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx) \Leftrightarrow R = R^{-1}$
> **反对称性**：设R是集合上的二元关系，对于任意$x, y \in A$，每当xRy且yRx，必有$x = y$，
> R是反对称的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \wedge xRy \rightarrow x\tilde{R}y) \Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

> **传递性**：设R是集合A上的二元关系，对于任意$x, y, z \in A$，当xRy且yRz时必有xRz，
> R是传递的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz) \Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$

8、关系的闭包运算

设R是集合A上的二元关系，若A上的另外一个二元关系R'满足：

1. R'是自反的（对称的、传递的）
2. $R' \supseteq R$
3. 对于A上的任何自反的（对称的、传递的）关系R''，若$R'' \supseteq R$，有$R'' \supseteq R'$，则称R'是R的自反（对称、传递）闭包

R的**自反闭包r(R)**、**对称闭包是s(R)**、**传递闭包t(R)** 是包含R的最小的自反、对称、传递的关系

设R是集合A上的二元关系，那么有：

> $r(R) = R \cup I_A$
> $s(R) = R \cup R^{-1}$
> $t(R) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n (|A| = n)$
>
> > - 如果R是自反的，那么s(R)和t(R)也是自反的
> > - 如果R是对称的，那么r(R)和t(R)也是对称的
> > - 如果R是传递的，那么r(R)也是传递的
>
> > 自反闭包运算与对称或传递闭包的先后顺序互换后不影响运算结果，但对称闭包运算与传递闭包运算的先后顺序不能随意互换
> >
> > - $sr(R) = rs(R)$
> > - $tr(R) = rt(R)$
> > - $ts(R) \supseteq st(R)$

等价关系

给定非空集合A和**集合簇**$\pi = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$，如果：1、$A_i \subseteq A$且$A_i \neq \varnothing (1 \leqslant i \leqslant m)$；2、$A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$；3、$A_i \cap A_j = \varnothing (1 \leqslant i, j \leqslant m$且$i \neq j)$，那么称$\pi$是A的一个**划分**，若满足条件1、2，那么称$\pi$是集合A的一个**覆盖**

一个集合A的划分π中的元素A_i称为该划分的**块**

设π为非空集合A的一个划分，若π为有限集合，则称划分的块数$|\pi|$为划分的**秩**

- 若π为无限集合，称π的秩是无限的
- 对于有限集合A，秩为1的划分称为A的最小划分，秩为$|A|$的划分称为A的最大划分

等价关系：设R是集合A上的一个二元关系，R是自反、对称和传递的
等价类：设R是非空集合A上的等价关系，对于任意$a \in A$，称集合$[a]_R = \{x | x \in A, xRa\}$为a关于R的等价类

> a称为等价类$[a]_R$的代表元素，若等价类个数有限，则R的不同等价类的个数叫做R的秩
> 设R是非空集合A上的等价关系，对于$a, b \in A$有aRb，当且仅当$[a]_R = [b]_R$

设R是集合A上的等价关系，由R确定的所有等价类组成的集合，称为集合A上关于R上的**商集**，记为$A/R = \}[x]_R | x \in A\}$

设R是非空集合A上的等价关系，则有

> - 任取$x \in A$，$[x]_R \neq \varnothing$
> - 任取$x, y \in A$，或者$[x]_R = [y]_R$，$[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$
> - $\bigcup\limits_{x \in A} [x]_R = A$
>
> > 1. A上关于R的商集A/R就是集合A的一个划分，称为由R诱导的A的划分
> > 2. 设π是非空集合A的一个划分，则A上的二元关系$R = \bigcup\limits_{B \in \pi} B \times B$是A上的等价关系，称为由划分$\pi$诱导的A上的等价关系
> > 3. 设R_1和R_2是非空集合A上的等价关系，则$R_1 = R_2$当且仅当$A/R_1 = A/R_2$
> > 4. 设R是非空集合A上的任意一个等价关系，π是A的任意一个划分，那么R诱导出π当且仅当π诱导出R

10、序关系

如果集合A上的二元关系R是自反的、反对称的、传递的，那么称R为A上的**偏序**，用符号$\preceq$表示，称序偶$< A, \preceq >$为**偏序集合**

> - 在偏序集合$< A, \preceq >$中，对于元素$a, b \in A$，如果$a \preceq b$或者$b \preceq a$，则称a与b是**可比的**，否则称a与b是**不可比的**
> - 在偏序集合$< A, \preceq >$中，对于$x, y \in A$如果$x \prec y$且没有其他元素$z \in A$满足$x \prec z \prec y$，则称y**盖住**x，**盖住集** $CovA = \{< x, y > | x, y \in A, y盖住x\}$

哈斯图
设$< A, \preceq >$是偏序集合，哈斯图作图规则为：

1. 用称为结点的小圆圈表示A中的元素
2. 对于$x, y \in A$，如果$x \preceq y$且$x \neq y$，则将代表y的结点画在代表x的结点的上方
3. 若$< x, y > \in CovA$，则在x与y之间同直线连接

设$< A, \preceq >$是一个偏序集合，$B \subseteq A$，如果B中的任意两个元素都是可比的，那么称B为$< A, \preceq >$中的**链**，B中元素的个数称为该链的**长度**，如果B中的任意两个不同的元素都是不可比的，那么称B位$< A, \preceq >$中的**反链**

> 设$< A, \preceq >$是非空有限偏序集合，如果A中最长链的长度为n，则A中元素能划分为n个互不相交的反链

偏序集合中的特殊元素
设$< A, \preceq >$是偏序集合，且$B \subseteq A, b \in B$

> **极大元**：B中不存在元素x使得$x \neq b$且$b \preceq x$
> **极小元**：B中不存在元素x使得$x \neq b$且$x \preceq b$
> **最大元**：对任一元素$x \in B$均有$x \preceq b$
> **最小元**：对任一元素$x \in B$均有$b \preceq x$
>
> > 若B有最大（最小）元，那么它是唯一的，如果B的极大（极小）元只有一个，那么它就是B的最大（最小）元，否则B中没有最大（最小）元

设$< A, \preceq >$是偏序集合，且$B \subseteq A, a \in A$

> **上界**：对于B中的任意元素b，均有$b \preceq a$
> **下界**：对于B中的任意元素b，均有$a \preceq b$
> **最小上界（上确界）**：a为B的上界，对B的任意上界a′，均有$a \preceq a'$
> **最大下界（下确界）**：a为B的下界，对B的任意下界a′，均有$a' \preceq a$
>
> > 若B有最小上界（最大上界），那么它是唯一的

设$< A, \preceq >$是偏序集合，且$B \subseteq A$

> 1. 若b是B的最大元，则b是B的极大元、最小上界
> 2. $b \in B$，b是B的上界，当且仅当b是B的最小上界
> 3. 若b是B的最小元，则b是B的极小元、最大下界
> 4. $b \in B$，b是B的下界，当且仅当b是B的最大下界
>
> > 设$< A, \preceq >$是非空有限偏序集，则A中必存在极大元和极小元

线序（全序）：在偏序集合$< A, \preceq >$中，如果任取$a, b \in A$，都有$a \preceq b$或者$b \preceq a$，那么称$\preceq$为A上的线序或全序，称$< A, \preceq >$为**线序集合**，称A为**链**
如果A上的二元关系R是一个线序，且A的每一非空子集都有最小元，那么称R为A上的**良序**，称$< A, \preceq >$为**良序集合**

> 线序集合中任意两个元素都是可比的，因此其哈斯图是一条链
> 每一个有限线序集合都是良序集合