# 二、谓词逻辑

## 1、谓词和量词

### 谓词

**个体常元**：用于表示具体或特定个体的符号，用a、b、c...
**个体变元**：用于表示任意个体的变量的符号，用x、y、z...
**论域（个体域）**：个体变元的取值范围，是一个集合，常用大写字母表示
**全总个体域**：包括所有个体变元所能代表的所有可能的个体
**谓词**：刻画单个个体的特征或者多个个体关系的模式

> n元谓词：刻画n个个体之间的关系，由一个表示n个个体关系的大写字母（**n元谓词符、n元关系符**）和n个个体常元或变元组成的表达式表示，如$R(a_1, a_2, ..., a_n)$、$R(x_1, x_2, ..., x_n)$

### 量词

在谓词前面加上全称量词或者存在量词，称为个体变元被全程量化或存在量化

1. **全称量词**∀：“对于所有的x”、“对于任一x”、“对于每一个x”
2. **存在量词**∃：“存在某个x”、“至少有一个x”

加入规则：

1. 对于**全称量词**，特性谓词作为**条件式的前件**加入$\forall(H(x) \to D(x))$
2. 对于**存在量词**，特性谓词作为**合取式的合取项**加入$\exists(H(x) \wedge D(x))$

设论域$D = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
$\forall xP(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$
$\exists xP(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n)$

## 2、谓词公式

**原子公式**：不出现逻辑联结词和量词的单个谓词
**谓词逻辑的合式公式（谓词公式）**：

1. 原子公式是谓词公式
2. 如果A和B是谓词公式，则$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$是谓词公式
3. 如果A是谓词公式，并且A中有未被量化的个体变元x，$\forall A(x)$和$\exists xA(x)$是谓词公式
4. 只有有限次应用步骤1、2、3所得到的公式才是谓词公式

**子公式**：B是谓词公式A的一个连续段且B也是谓词公式

**辖域**：给定一个谓词公式，其中含有$\forall P(x)$或$\exists xP(x)$，那紧接着量词$\forall x$或$\exists x$之后的最小子公式

- **约束变元**：在辖域内x的一切出现为约束出现的个体变元
- **自由变元**：在辖域内x的非约束出现为自由出现的个体变元

约束变元的换名规则：

1. 对某个约束变元换名时，需对量词的作用变元以及该量词辖域内所有受该量词约束的约束变元一起换名
2. 换名后的变元符号应是量词辖域内未出现的符号，最好是整个公式中未出现的符号

自由变元的代入规则

1. 自由变元代入时，谓词公式中该变元自由出现的每一处都要同时代入
2. 代入选用的变元符号是原公式中未出现的符号

## 3、 谓词演算的永真式

谓词公式：谓词符、个体变元、个体常元、命题变元、联结词
赋值（指派、解释）：对于一个谓词公式，若给它指定一个个体域E，再给所有谓词符均指派出确定的涵义（具体的函数、特性或关系），给所有命题变元指派出确定命题（或者指定T或F），并为所有自由变元分别指派E上确定的个体。

设A是谓词公式
**永真**：若对于特定论域E上的任何赋值，A的真值都为真，则称谓词公式为**永真式**
**永假**：若对于特定论域E上的任何赋值，A的真值都为假，则称谓词公式为**永假式**
**可满足**：若特定论域E上存在一种赋值，使得A的真值都为真，则称谓词公式为**可满足式**

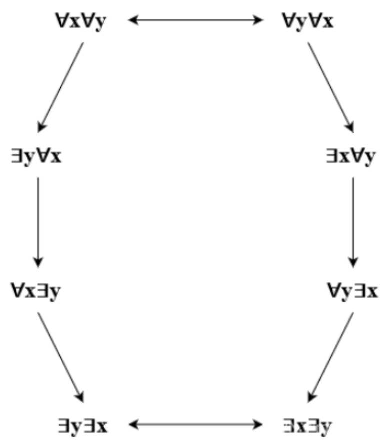
> 给定任意两个谓词公式A和B
>
> 1. 若对于任何赋值，A和B的真值均相同，则称谓词公式A和B**等价**，记为$A \Leftrightarrow B$
> 2. 若$A \rightarrow B$是永真式，则称A**蕴含**B，记为$A \Rightarrow B$
>    结论：
>
> - $A \Leftrightarrow B$当且仅当$A \leftrightarrow B$是重言式
> - $A \Leftrightarrow B$当且仅当$A \Rightarrow B$且$A \Leftarrow B$
> - $A \Leftrightarrow B$且$B \Leftrightarrow C$，则$A \Leftrightarrow B$
> - $A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow C$

**谓词逻辑的等价公式和蕴含公式**

多重量词率：

> - $\forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x P(x,y)$

> - $\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$
> - $\forall y \forall x P(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$
> - $\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$
> - $\exists y \forall x P(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x,y)$
> - $\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x P(x,y)$
> - $\forall y \exists x P(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x,y)$
> - $\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x P(x,y)$




## 4、谓词逻辑的推理理论

设$H_1, H_2, ..., H_n, C$是谓词公式，则称C是一组前提的有效结论，或称C可由前提逻辑地推出，成为推理、论证、证明

推理规则：

> 1. **存在指定规则ES**
>    $\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(a)}$
>    如果$\exists x P(x)$为真，则该论域中存在个体常元a，使得$P(a)$的真值为真

> 2. **全称指定规则US**
>    $\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(y)}$，$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(a)}$
>    如果$\forall x P(x)$为真，那么x的论域的每个确定个体a必然满足````的真值为真，故全称指定规则也可以指定到确定的个体常元

> 3. **存在推广规则EG**
>    $\frac{P(a)}{\therefore \exists x P(x)}$
>    如果论域内某一确定个体a能使$P(a)$的真值为真，那么一定有$\exists x P(x)$为真

> 4. **全称推广规则UG**
>    $\frac{\Gamma \Rightarrow P(x)}{\therefore \Gamma \Rightarrow \forall x P(x)}$（$\Gamma$是已知公理和前提的合取，其中没有变元x的自由出现）
>    如果从$\Gamma$可推出$P(x)$，那么从$\Gamma$可以推出$\forall x P(x)$

| 公式代码 | 常用的等价公式和蕴含公式 |
|---|---|
| $E_{25}$ | $\neg\forall xP(x) \Leftrightarrow \exists x\neg P(x)$ |
| $E_{26}$ | $\neg\exists xP(x) \Leftrightarrow \forall x\neg P(x)$ |
| $E_{27}$ | $\forall x(P(x) \wedge Q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge Q$ |
| $E_{28}$ | $\forall x(P(x) \vee Q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \vee Q$ |
| $E_{29}$ | $\exists x(P(x) \wedge Q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \wedge Q$ |
| $E_{30}$ | $\exists x(P(x) \vee Q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee Q$ |
| $E_{31}$ | $\forall xP(x) \to Q \Leftrightarrow \exists x(P(x) \to Q)$ |
| $E_{32}$ | $\exists xP(x) \to Q \Leftrightarrow \forall x(P(x) \to Q)$ |
| $E_{33}$ | $Q \to \forall xP(x) \Leftrightarrow \forall x(Q \to P(x))$ |
| $E_{34}$ | $Q \to \exists xP(x) \Leftrightarrow \exists x(Q \to P(x))$ |
| $E_{35}$ | $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ |
| $E_{36}$ | $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ |
| $E_{37}$ | $\exists x(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \to \exists xQ(x)$ |
| $I_{22}$ | $\forall xP(x) \Rightarrow P(y)$，$y$ 是论域中任一确定个体 |
| $I_{23}$ | $P(y) \Rightarrow \exists xP(x)$，$y$ 是论域中某一确定个体 |
| $I_{24}$ | $\forall xP(x) \Rightarrow \exists xP(x)$ |
| $I_{25}$ | $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ |
| $I_{26}$ | $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$ |
| $I_{27}$ | $\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \to \forall xQ(x)$ |
| $I_{28}$ | $\exists xP(x) \to \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \to Q(x))$ |