

# CÁLCULO NUMÉRICO APLICADO À ENGENHARIA ELÉTRICA COM MATLAB

SÉRGIO LUCIANO ÁVILA

1º EDIÇÃO



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DE SANTA CATARINA – IFSC – CAMPUS FLORIANÓPOLIS  
Av. MAURO RAMOS N. 950, FLORIANÓPOLIS, SC.

SÉRGIO LUCIANO ÁVILA

CÁLCULO NUMÉRICO  
APLICADO À ENGENHARIA ELÉTRICA  
COM MATLAB<sup>©</sup>

FLORIANÓPOLIS  
2019

ISBN

EM PROCESSO DE REGISTRO

**FICHA CATALOGRÁFICA**

catalogação na fonte pela Biblioteca do Instituto Federal de Santa Catarina.

XXXXe AVILA, Sérgio Luciano

Cálculo numérico aplicado à engenharia elétrica com matlab /  
Sérgio Luciano Avila. 1. Ed. Florianópolis : Editora do IFSC, 2019.

127 p. : il. (coleção didática)

Inclui bibliografia e índice.

1. Cálculo numérico. 2. Métodos numéricos. 3. Aprendizagem baseada em problemas. 4. Engenharia elétrica.

CREATIVE COMMONS



VEDADO USO PARA FINS COMERCIAIS

GITHUB

[HTTPS://GITHUB.COM/PECCE-IFSC/CALCULO\\_NUMERICO\\_MATLAB](https://github.com/PECCE-IFSC/CALCULO_NUMERICO_MATLAB)

TODOS OS ALGORITMOS ESTÃO DISPONIBILIZADOS

MATLAB ©

LICENÇA R2019A 40822288

GRUPO DE PESQUISAS EM COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA APLICADA

SITES.FLORIANOPOLIS.IFSC.EDU.BR/PECCE

REVISADO POR

PROFESSOR FERNANDO SANTANA PACHECO, DR. ENG.

Sergio.Avila@ifsc.edu.br

Eletrotécnico (ETFSC-1994) e Engenheiro Industrial Eletricista (FURB-2000). Possui mestrado pela UFSC (2002) e doutorado com duplo-diploma pela Ecole Centrale de Lyon/França e UFSC (2006), ambos em engenharia elétrica e versando sobre otimização de dispositivos e sistemas. Pós-doutoramento industrial na Schneider Electric (INPG – França, 2006). Pós-doutoramento na Escola Politécnica da USP (2008). Desde 2010 é Professor no Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC). Líder do Grupo de Pesquisas em Computação Científica para Engenharia (PECCE), que envolve pesquisadores do IFSC e empresas da Associação Catarinense de Empresas de Tecnologia (ACATE). Atualmente, trabalha no desenvolvimento de soluções para diagnóstico preditivo, que envolvem instrumentação industrial e ferramentas de inteligência artificial.

[lattes.cnpq.br/7864845374871073](http://lattes.cnpq.br/7864845374871073)

“Naturalmente deves trabalhar de maneira a não atentar contra a própria consciência.”

Umberto Eco

Agradecimentos,

aos colegas do IFSC.

ao PECCE.

ao Professor Fernando Santana Pacheco pelas contribuições.

a minha família, obrigado pela paciência.

ei, tem onda. toca!

# Cálculo Numérico Aplicado à Engenharia Elétrica

Área de concentração : Engenharia Elétrica

Público : graduandos e pós-graduandos

Palavras-chave : cálculo numérico,  
métodos numéricos,  
aprendizagem baseada em problemas

A motivação deste livro é ter um material onde a partir de um problema e entendendo a sua natureza, o leitor escolha a ferramenta numérica mais apropriada para a sua resolução. A inspiração são as práticas pedagógicas conhecidas por metodologia da problematização ou aprendizagem baseada na resolução de problemas (*problem based learning*).

Assim, apresenta-se aqui um livro de cálculo numérico aplicado à engenharia elétrica e as suas principais técnicas numéricas.

Neste contexto, não serão tratados em profundidade as teorias de cada método, sua origem ou a sua validação matemática. O objetivo é dotar o leitor de conhecimento suficiente para entender a natureza do seu problema, e assim o sendo, que ele possa escolher e aplicar um método numérico apto a sua resolução.

O livro é organizado por capítulos, onde cada um trata de uma natureza de problemas dentro da engenharia elétrica. Cada capítulo possui: apresentação de um problema; apresentação da sua solução analítica ou a explicação do por que ela não é possível; debate sobre método(s) numérico(s) que o resolva; apresentação da resolução do problema pelo método numérico escolhido; justificativa se a solução

obtida é adequada; apresentação de pseudocódigo computacional e bibliotecas numéricas sobre o tema; lista de problemas similares; referências bibliográficas básicas e de aplicações.

O conteúdo inicia com uma discussão preliminar sobre a modelagem numérica, o uso de computadores, suas vantagens e desvantagens. Após, seguem-se capítulos sobre a busca por raízes, a resolução de sistemas lineares e não lineares, a interpolação de dados, a derivação e integração de funções, a resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais, e por fim, a resolução de equações integrais.

Reconhece-se que faltam aqui temas relevantes como métodos estocásticos para resolução de sistemas de equações. Estes temas aparecerão em edições futuras. Outros temas foram considerados muito densos para a presente proposta. São exemplos: pesquisa operacional, otimização, aprendizado de máquina e inteligência artificial. Estes temas serão o foco de futuras publicações.

Reforça-se que o propósito maior deste livro é abrir portas, nunca esgotar assuntos. Para obter maior detalhamento dos métodos bem como suas validações, sugere-se a busca pelas obras clássicas sobre cálculo numérico ou específicos de cada tema. Este livro é inspirado nas seguintes referências:

- [1] L. C-Torres and M. B-Tobar, Problem-Based Learning: a didactic strategy in the teaching of system, Springer, 2019. ISBN 978303013394.
- [2] C. Glover, Numerical Computing with MATLAB, MATHWORKS, [online] [https://www.mathworks.com/moler/index\\_ncm.html](https://www.mathworks.com/moler/index_ncm.html)
- [3] S. C. Chapra, Métodos Numéricos Aplicados com Matlab, 3<sup>rd</sup> Ed. AMGH, 2013. ISBN 9788580551761.
- [4] REAMAT, Cálculo Numérico – Um Livro Colaborativo, UFRGS. [online] [www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico](http://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico)
- [5] M. N. O. Sadiku, Numerical Techniques in Electromagnetics with Matlab, CRC Press, 2009. ISBN 9781420063097.

	Pg.
<b>Motivação</b>	i
<b>Sobre cálculo numérico</b>	1
Resolvendo problemas da engenharia com computador	1
Aproximações e erros	4
<b>1. Raízes</b>	7
1.1. Método intervalar: bissecção	10
1.2. Método iterativo: Newton-Raphson	12
1.3. Exercícios propostos	15
<b>2. Sistemas Lineares</b>	17
2.1. Método direto: eliminação de Gauss	21
2.2. Método direto: decomposição LU	22
2.3. Método iterativo: Gauss-Siedel	23
2.4. Exercícios propostos	26
<b>3. Sistemas Não-Lineares</b>	29
3.1. Método iterativo: Newton-Raphson	31
3.2. Exercícios propostos	32
<b>4. Ajuste de Curvas</b>	35
4.1. Ajuste de curvas por regressão	36
4.1.1. Mínimo quadrados discreto – regressão linear	37
4.1.2. Mínimo quadrados contínuo – regressão polinomial	39
4.2. Ajuste de curvas por interpolação	43
4.2.1. Polinômios interpoladores de Newton	44
4.2.2. Polinômios interpoladores de Lagrange	46
4.3. Interpolação por splines ou por partes	48
4.4. Ajuste de curvas por funções senoidais	55
4.5. Série de Fourier	58
4.6. Exercícios propostos	60

<b>5.</b>	<b>Integração Numérica</b>	65
5.1.	Fórmulas de Newton-Cotes	67
5.2.	Fórmulas de integração de funções	70
5.3.	Exercícios propostos	73
<b>6.</b>	<b>Derivação Numérica</b>	75
6.1.	Fórmulas de derivação	76
6.2.	Gradiente	79
6.3.	Exercícios propostos	80
<b>7.</b>	<b>Equações Diferenciais Ordinárias</b>	83
7.1.	Range-Kutta de 4º ordem	85
7.2.	Problema com múltiplas EDOs	86
7.3.	Sistema EDOs rígida	89
7.4.	Exercícios propostos	91
<b>8.</b>	<b>Equações Diferenciais Parciais</b>	93
8.1.	Método das diferenças finitas	96
8.2.	Introdução a métodos avançados baseados em EDPs	99
8.2.1.	Método de elementos finitos (FEM)	99
8.2.2.	Diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD)	102
8.2.3.	Método de linhas de transmissão (TLM)	105
8.3.	Exercícios propostos	108
<b>9.</b>	<b>Equações Integrais</b>	111
9.1.	Método dos momentos (MoM)	113
9.2.	Exercícios propostos	118
	<b>Continuação dos estudos</b>	120
	Discussão sobre como transformar dados em informação com otimização, pesquisa operacional, aprendizado de máquina e inteligência artificial.	
	<b>Índice remissivo</b>	123

# *Sobre cálculo numérico*

Engenharia é a geração e a aplicação do conhecimento para inventar, construir e melhorar soluções que promovam avanços na qualidade de vida da sociedade. Portanto, a(o) engenheira(o) pode ser definido como aquele que conjuga conhecimentos multidisciplinares e os aplica tendo em conta a sociedade, a técnica, a economia e o meio ambiente.

Engenheiras(os) constroem suas hipóteses tendo por início os princípios de conservação da natureza, os quais levam a equações de continuidade e de balanço [1]. O que o engenheiro faz é observar e entender um fenômeno ou problema, traduzi-lo numa modelagem matemática coerente, aplicar técnicas numéricas eficientes para resolvê-lo e, por fim, validar as soluções encontradas. Caso as soluções não sejam adequadas, volta-se à definição do problema. A figura 1 ilustra esse processo iterativo de desenvolvimento da solução.

Nas últimas décadas, este processo iterativo pela busca do conhecimento tornou-se mais simples com a ajuda dos computadores.

## **Resolvendo problemas da engenharia com computador**

Cálculo numérico, métodos numéricos, engenharia assistida por computador, projeto assistido por computador, *computer aided engineering* (CAE), *computer aided design* (CAD), matemática computacional e computação científica. Estes são alguns dos nomes utilizados para designar o campo de estudo interessado na construção de modelos matemáticos e de técnicas de soluções numéricas utilizando computadores para analisar e resolver problemas de engenharia [1]-[3].

Quando a resolução analítica é possível, ótimo. Entretanto, quanto mais próximo se deseja a modelagem de um problema real, mais complexo será o seu entendimento e, consequentemente, mais complexa a sua formulação matemática.

Utiliza-se a modelagem e a simulação computacional quando o sistema real é de difícil entendimento na sua totalidade. Outros aspectos que as motivam são a redução de custos para realização de ensaios ou de provas, bem como a necessidade de repetibilidade de resultados ou o estudo de situações críticas.



Figura 1. Metodologia de modelagem numérica – processo iterativo.

A observação de situações aguça a busca por conhecimento para entendê-las. Experimentos, testes e busca por teorias existentes podem ser feitos para aumentar o conhecimento prévio. A experiência do engenheiro acerca do tema é de grande valia neste momento inicial.

A análise estatística (*numerical design of experiments* – DoE) ajuda a definir uma sequência ordenada de ações na definição do problema [4]. Além disto, procedimentos de análise de sensibilidade podem fornecer uma compreensão abrangente das influências dos diversos parâmetros e suas consequências nos resultados do modelo [5].

Nesta fase inicial, ‘problema em estudo’ conforme Figura 1, os objetivos são avaliar a influência dos parâmetros e quantificar a incerteza do modelo. Com base nos resultados das ferramentas do DoE e de análise de sensibilidade, um modelo reduzido com um conjunto menor de parâmetros significativos pode ser obtido. Isso pode implicar em modelos numéricos mais simples. E, em assim sendo, a dificuldade de resolução pode diminuir.

Uma vez que o problema está claro, a sua representação física e matemática pode ser definida. Desta forma, novas escolhas devem ser feitas. Equações algébricas podem ser lineares (capítulo 2) ou não lineares (capítulo 3). Equações diferenciais podem ser ordinárias (capítulo 7) ou parciais (capítulo 8). Equações diferenciais podem ser convertidas em equações integrais equivalentes (capítulo 9). A escolha por uma formulação é um equilíbrio entre a abstração física e a correção da solução.

Outras tomadas de decisão devem ser feitas entre a definição do problema e a validação da solução. Cada escolha pode levar a soluções mais ou menos precisas, com mais ou menos esforço computacional.

Uma discussão pertinente é a escolha da linguagem de programação a ser utilizada. É cada vez mais comum encontrar softwares comerciais para simulação. Eles são úteis e geralmente fornecem muitas ferramentas de pós-processamento que ajudam a visualizar os resultados.

Por outro lado, uma desvantagem no uso de software comercial é a falta de controle sobre todas as variáveis que um engenheiro deve abordar durante uma investigação. Assim, o desenvolvimento de programação própria é válido.

Pascal, Fortran e C, entre outras linguagens de programação exigem um grande conhecimento em programação estruturada [6]. Este foi o paradigma dominante na criação de software até a programação orientada a objetos, sendo as mais populares C ++ e Visual C ++.

Recentemente, surgiu a linguagem interpretada. Ela utiliza simplificações na maneira de se escrever um código. Muitas vezes isto resulta em um formalismo pobre e no uso de bibliotecas prontas, gerando dependência similar aos softwares comerciais. Como enorme vantagem, a linguagem interpretada permite a(o) engenheira(o) testar suas ideias sem a necessidade de dedicar um tempo considerável com a rigidez da programação estruturada. Matlab [7] e Python [8] são exemplos de linguagens interpretadas.

Além disso, o uso de bibliotecas *open source* também está se tornando uma opção regular. Pode-se encontrar muitos exemplos de ferramentas de código aberto. No entanto, até mesmo um código bem escrito pode conter erros.

### **Sobre aproximações e erros**

Exatidão pode ser definida como o quão próximo os valores calculados ou medidos estão próximos do verdadeiro. Importante não confundir com precisão. Precisão é o quão próximo os valores individuais medidos ou calculados estão uns dos outros.

Como discutido antes, a primeira questão é saber até que ponto o modelo matemático bem representa a situação em estudo. Deve-se ter conhecimentos relativos às etapas de modelagem suficientes para, pelo menos, ter ciência de qual o grau de exatidão que se pode conseguir e, consequentemente, qual o erro tolerável.

Associam-se a isto os chamados erros numéricos. Erros numéricos são aqueles causados pelo uso de aproximações para representar quantidades matemáticas exatas. Eles podem ser de dois tipos: erros de arredondamento e de truncamento.

Erros de arredondamento surgem porque os computadores têm limites de tamanho e precisão em sua capacidade de representar números. Em alguns casos, esses erros podem direcionar os cálculos para instabilidades numéricas, fornecendo resultados incorretos ou mal condicionados. Erros de arredondamento podem levar a discrepâncias sutis difíceis de detectar.

Erros de truncamento resultam do uso de uma aproximação numérica no lugar de um procedimento matemático exato, geralmente uma tomada de decisão do engenheiro. Por exemplo, um número máximo de repetições em um processo iterativo.

Além disso, na ciência da computação, a eficiência pode ser uma característica relacionada ao número de recursos computacionais utilizados pelo algoritmo, como tempo, espaço e memória. Então, na análise numérica, os erros de discretização são aqueles que resultam do fato de que uma função de uma variável contínua é representada por um número finito de avaliações. De forma geral, os erros de discretização podem ser reduzidos usando um número maior de avaliações. Logo, tem-se o aumento do custo computacional.

Finalmente, outras ferramentas numéricas podem ser usadas para entender melhor a solução numérica obtida. Cita-se como exemplo a regressão, a interpolação e as *splines* (capítulo 4). Entender o comportamento do problema, não apenas o valor bruto da solução final, também pode ser possível em muitos casos.

Utilizada em uma ampla gama de situações, técnicas de aprendizado de máquina ou de forma genérica, a chamada inteligência artificial, estão sendo aplicadas para a modelagem numérica e a sua solução. O uso dessas técnicas é um marco importante, a saber, como interpretar dados sem assistência humana [9].

Em resumo, a metodologia para desenvolver uma representação numérica exige uma grandeza de detalhes e cuidados proporcionais à complexidade da situação em estudo. Simplificações, aproximações e erros são comuns. Entender tais limitações é fundamental para se obter e julgar soluções como adequadas.

A motivação deste livro é ter um material onde a partir de um problema real e entendendo a sua natureza, o leitor escolha a ferramenta numérica mais apropriada para a sua resolução. Claro, num estágio inicial, chamado de cálculo numérico.

## **Referências**

- [1] J. Jewett and R. Serway, Física para cientistas e engenheiros, Ed. Cengage Learning, 2011. ISBN 9788522111107.
- [2] W. Shen, An Introduction to Numerical Computation, E. World Scientific Publishing, 2018. ISBN 9789814730068.
- [3] T. A. Driscoll and R. J. Braun, Fundamentals of Numerical Computation, Ed. Siam, 2017. ISBN 9781611975079.
- [4] T. Elser, Factorial Design: Understanding Design of Experiments (DoE) and Applying it in Practice, Ed. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2017. ISBN 9781542906111.
- [5] Il H. Park, Design Sensitivity Analysis and Optimization of Electromagnetic Systems (Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering). Ed. Springer, 2019. ISBN 9789811343643.
- [6] M. Back, Programação na Engenharia! Guia prático para começar a programar em Linguagem C. e-book Kindle Edition, 2017.
- [7] <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>
- [8] <https://python.org.br/>
- [9] M. Awad and R. Khanna, Efficient Learning Machine: Theories, Concepts and Applications for Engineers and System Designers, eBook Kindle, 2015. ISBN 1430259892.

# Raízes

As equações da engenharia são usualmente baseadas em princípios de conservação, por exemplo as leis de Kirchhoff para análise de circuitos elétricos. Esses princípios são explicados por funções de continuidade e de balanço que explicitam o comportamento do fenômeno em estudo.

Caso tenhamos uma única função que bem represente esse fenômeno, uma possível solução é buscar a sua raiz. Uma raiz ou zero da função consiste em determinar os pontos de intersecção da função com o eixo das abscissas no plano cartesiano.

Para tal, baseia-se no teorema de Bolzano sobre existência e unicidade:

*Assumindo que  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f(x)$  é uma função contínua tal que  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , então, existe  $x^* \in (a, b)$  tal que  $f(x^*) = 0$ . [1]*

Este capítulo apresenta duas maneiras para a aproximação numérica na busca de raízes: um método intervalar (bissecção) e um método aberto (Newton-Raphson).

Quando o problema em estudo apresenta aspectos de interdependência entre variáveis, certamente resultará em um conjunto de funções acopladas. Elas devem ser resolvidas simultaneamente por meio de um sistema de equações. Isto será tratado nos capítulos sobre sistemas lineares e sistemas não-lineares.

Importante a distinção entre raiz, valores máximos e valores mínimos de uma função. Processos para a determinação de valores máximos e mínimos são denominados otimização – tema não abordado neste livro. A busca por raízes pode ser transformada em otimização e vice-versa. Para tal, manipulações na equação devem ser realizadas. A figura 1.1. ilustra esta diferença.

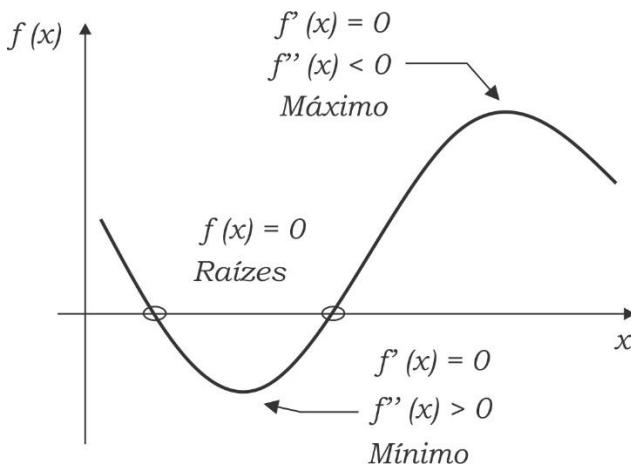
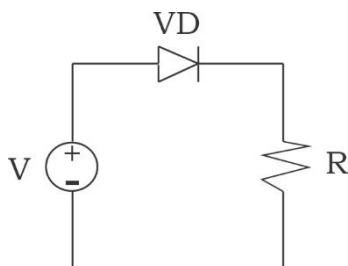


Figura 1.1. Raízes, máximos e mínimos de uma função.

### O problema

Calcule a corrente que circulará no circuito eletrônico ilustrado.



Admitindo um diodo de silício próximo da idealidade, sua queda de tensão é de 0,7 V.

Por análise de malha:

$$I = (V - V_d)/R. \quad (1.1)$$

A equação 1.1 é uma equação algébrica com simples resolução analítica. Considerando  $V = 24$  V e  $R = 10 \Omega$ , tem-se  $I = 2,3300A$ .

Saindo da idealidade, sabe-se que a operação do diodo varia com a sua temperatura. Um possível modelo que relaciona a tensão ( $V_d$ ), a corrente ( $I_d$ ) e a temperatura de operação ( $T$ ) no diodo pode ser:

$$V_d = \left( n \frac{kT}{q} \right) \log\left( \frac{I_d}{I_{CR}} + 1 \right), \quad (1.2)$$

onde  $I_{CR}$  é a corrente de condução reversa,  $n$  é o coeficiente de emissão,  $k$  é a constante de Boltzmann e  $q$  é a carga do elétron [2][3].

Entendendo que a corrente no diodo é a corrente no circuito, por análise de malha, tem-se:

$$\begin{aligned} V &= V_d + RI_d, \\ \text{então} \quad V &= \left( n \frac{kT}{q} \right) \log\left( \frac{I_d}{I_{CR}} + 1 \right) + R I_d \quad . \end{aligned} \quad (1.3)$$

A partir daqui, por mais que se tente manipular, não se consegue resolver a equação de forma explícita para  $I_d$ . O termo  $\log(I_d/I_{CR} + 1)$  não permite. Assim sendo, uma resolução direta fica inviável.

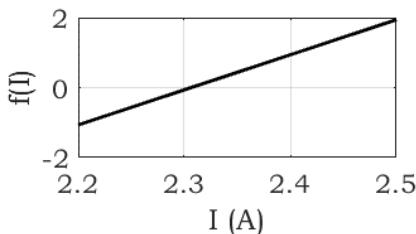
Uma maneira alternativa é subtrair dos dois lados da igualdade o termo a sua esquerda, adquirindo uma nova função:

$$f(I) = \left( n \frac{kT}{q} \right) \log\left( \frac{I_d}{I_{CR}} + 1 \right) + R I_d - V . \quad (1.4)$$

Agora, a resposta para o problema é encontrar um valor para  $I_d$  que torna a função igual a zero, portanto, a sua raiz.

---

Uma maneira para isto é graficar o comportamento de  $f(I)$ . Por inspeção visual e pouco precisa, obtém-se I. Admitindo um diodo 1N4001 com  $I_{CR} = 31,9824 \text{ nA}$ ,  $n = 2$ ,  $k = 1,3806 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ,  $T = 300\text{K}$  ( $26,85^\circ\text{C}$ ) e  $q = 1,6022 \times 10^{-19} \text{ C}$ , consegue-se o comportamento ilustrado.



A corrente tem valor aproximado de 2,3000A.

Assim sendo, conforme (1.1), obtém-se  $Vd$  de 0,9353V.

Pode-se utilizar métodos numéricos para se resolver o problema com mais precisão, caso necessário. Existe inúmeros métodos para identificação de raízes, que podem ser divididos em duas famílias: métodos intervalares e métodos iterativos. Talvez os mais conhecidos e eficientes dentro dessas famílias para o objetivo aqui proposto sejam os métodos de bissecção e Newton-Raphson, respectivamente.

### 1.1. Método intervalar: bissecção

De forma geral, se  $f(x)$  for real e contínua no intervalo  $[x_1, x_2]$  e  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  tiverem sinais opostos, portanto

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 , \quad (1.4)$$

então existe pelo menos uma raiz real entre  $x_1$  e  $x_2$ .

O método intervalar de bissecção utiliza este entendimento. A nova solução  $x$  é obtida pela média entre  $x_1$  e  $x_2$ . A determinação do novo intervalo é feita pela checagem de (1.4) para  $x$ ,  $x_1$  e  $x_2$ . O critério de parada pode ser definido como a diferença de  $f(x)$  entre duas iterações subsequentes ou pela sua proximidade com o zero. A figura 1.2. ilustra três iterações do método intervalar de bissecção.

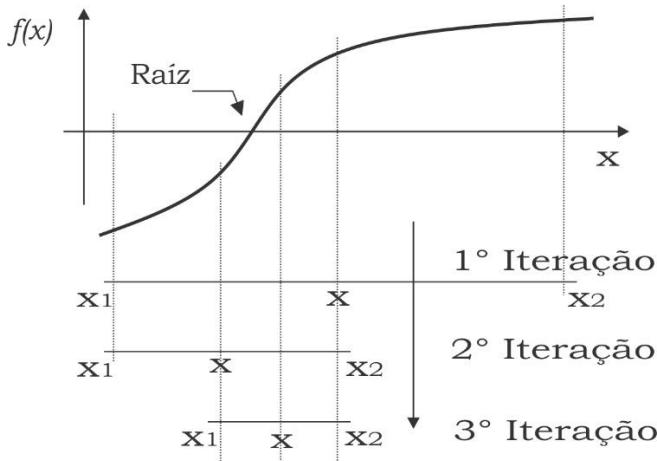


Figura 1.2. Método de Bisseção.

**Resolução assistida por computador**

```

x=x1;
while (1)
    x = (x1+x2)/2;
    fx1 = f(x1);
    fx = f(x);
    test = fx1*fx;
    if test<0  x2 = x;
    elseif test > 0  x1 = x;
    else  ec = 0;
    end
    e = abs(fx1-fx);  iter = iter+1;
    if e <= TOL || iter >= maxit, break, end
end

```

É necessário declarar a função em estudo ( $f$ ), o erro tolerado ( $TOL$ ), o número de iterações máximo ( $iter$ ) e os valores iniciais de  $x_1$  e  $x_2$ .

Função nativa do Matlab:  $fzero$  – busca uma raiz numa equação.

A tabela 1.1. apresenta o resultado numérico para o problema do circuito eletrônico. A função em estudo é a eq. (3).

Os valores iniciais de  $x_1$  e  $x_2$  foram adotados tendo por base a experiência prévia sobre o problema, no caso a resolução analítica próximo à idealidade. Aqui foi usado [2,0000 2,5000] A.

Tabela 1.1. Resolução pelo método de bissecção.

Iteração	$x_1$	$x_2$	X	$F(x_1)$	$F(x)$	Erro
1	2,0000	2,5000	2,2500	-3,0719	-0,5658	2,5061
2	2,2500	2,5000	2,3750	-0,5658	0,6870	1,2528
3	2,2500	2,3125	2,2812	-0,5658	0,0606	0,6264
4	2,2812	2,3125	2,2969	0,0606	-0,2526	0,3132
...						
16	2,3064	2,3064	2,3064	-0,0002	-0,0001	0,0001

O conhecimento prévio acelera processos numéricos, entretanto deve ser usado com cuidado para não induzir falsas ou não tão boas soluções.

O critério de parada utilizado foi a diferença de  $f(x)$  entre duas iterações subsequentes iguais ou menores que 0,0002. O valor de  $x$  na 16<sup>a</sup> iteração é de 2,3064 A. Com este valor, conforme (1.1),  $V_d = 0,9355$  V.

Destaca-se aqui o cuidado com o número de algoritmos significativos. O cálculo realizado, bem como a Tabela 1.1, foram truncados em quatro algarismos e pode incutir em erro. O erro por arredondamentos mal feitos em aproximações numéricas é bem comum. Aqui, uma forma de mitigá-lo é reduzir o erro tolerado ( $< 0,0002$ ). Isto aumenta o esforço computacional.

## 1.2. Método iterativo: Newton-Raphson

A derivada de primeira ordem de uma função ( $f'(x)$ ) é equivalente à inclinação da função, assim sendo, uma aproximação da raiz é:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (1.5)$$

Assim, a informação de onde o eixo  $x$  será atravessado por uma reta tangente ao ponto  $[x_i, f(x_i)]$  pode ser utilizada como aproximação para a raiz de  $f(x)$ .

O método de Newton-Raphson usa este princípio geométrico, conforme ilustrado na figura 1.3. A cada iteração, um novo  $x_{i+1}$  é determinado.

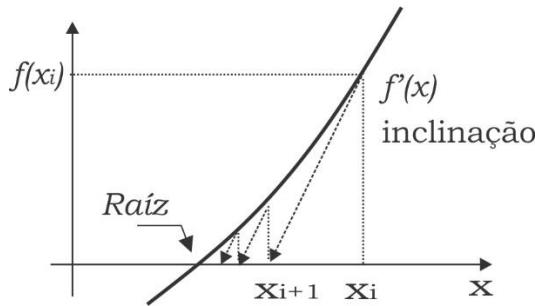


Figura 1.3. Método de Newton-Raphson.

### Resolução assistida por computador

```

iter = 0;
while (1)
    xold = x; func = f(x); dfunc = df(x);
    xr = xr-func/dfunc;
    iter = iter +1; raiz(iter) = x;
    if x ~= 0,
        e(iter)=abs((x-xold)/x);
    end
    if e(iter) <= TOL || iter >= maxit, break, end
end

```

Faz-se necessário declarar a função em estudo ( $f$ ), a derivada desta função ( $df$ ), o erro tolerado (TOL), o número de iterações máximo ( $iter$ ) e o valor inicial de  $x$ .

A função em estudo é (3). A sua derivada é

$$f'(I) = \frac{0,4343\left(\frac{n kT}{q}\right)}{(I_d + I_{CR})} + R \quad . \quad (1.6)$$

O valor inicial adotado foi  $x = 2$  A. O erro tolerado foi obtido na terceira iteração. O esforço computacional necessário aqui é menor que o dispendido no método de bissecção. A tabela 1.2. apresenta o resultado numérico para o problema proposto.

Tabela 1.2. Resolução pelo Método de Newton-Raphson.

Iteração	X	F(x)	F'(x)	Erro
1	2,0000	-3,0719	10,0112	0,0133
2	2,3068	0,0039	10,0097	0,0002
3	2,3064	0,0000	10,0097	<0,0001

Em contrapartida, nem sempre é fácil obter a derivada de uma função. Erros de convergência também podem acontecer quando houver características peculiares do comportamento da derivada da função em estudo. São exemplos de dificuldades: a função possuir regiões paralelas ou quase perpendiculares ao eixo x (inclinação próxima a  $0^\circ$  ou  $90^\circ$ ). Nestes casos, a derivada pode apresentar problemas numéricos.

### 1.3. Exercícios propostos

1. Calcule o comprimento do cabo (C) entre duas torres de transmissão (i.e. a catenária) [4]. A distância entre as torres é de  $d = 500m$ . A flecha máxima permitida é  $f_{max} = 50m$ . Flecha é a distância vertical entre uma reta que liga os dois pontos de fixação, conforme indicado na ilustração. A flecha depende do comprimento do vão ( $d$ ), da temperatura do cabo e da tração aplicada ao cabo quando este é instalado. O seu modelo matemático pode ser:

$$f = C \cdot \left[ \cosh\left(\frac{d}{2C}\right) - 1 \right] \quad (1.7)$$

Resposta: 633,1621m

2. Um retificador de meia onda a diodo alimenta uma carga indutiva-resistiva ( $f = 1 \text{ kHz}$ ,  $L = 100 \text{ mH}$  e  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ). Encontre o ângulo  $\beta$  para o qual a corrente no diodo se anula. Considere o seguinte modelo matemático:

$$I_d = \sin(\beta - \phi) + \sin(\phi)e^{(-\frac{\beta}{\tan(\phi)})} \quad (1.8)$$

$\tan(\phi) = 2\pi f L / R$     Resposta:  $\beta = 212,2284^\circ$

### 1.4. Referências básicas

- [1] D. C. Lay, S. R. Lay, J. McDonald, Álgebra Linear e suas Aplicações, 5<sup>a</sup> ed., LTC, 2018. ISBN 9788521634959.
- [2] J. W. Nilsson, S. A. Riedel, Circuitos Elétricos, 10<sup>a</sup> ed., Pearson, 2016. ISBN 9788543004785.
- [3] C. V. Camargo, G. H. Dalposso, “Cálculo numérico computacional: aplicação na microeletrônica,” in Revista Jr de Iniciação Científica em Ciências Exatas e Engenharia, vol. 1, n. 6, pp. 7-15, 2018. ISSN 22360093.

- [4] S. J. Sugden, "Construction of transmission line catenary from survey data," in Applied Mathematical Modelling, vol. 18, n. 5, pp. 274-280, 1994. doi: 10.1016/0307-904X(94)90335-2.

### **1.5. Referências complementares – Aplicações**

- [1] A. C. Moreira Soares, E. Vieira and M. M. Casaro, "Simulation of a photovoltaic model using bisection method," In Brazilian Power Electronics Conference, pp. 807-811, 2011. doi: 10.1109/COBEP.2011.6085239.
- [2] H. Xing, Y. Mou, M. Fu and Z. Lin, "Distributed Bisection Method for Economic Power Dispatch in Smart Grid," in IEEE Transactions on Power Systems, vol. 30, n. 6, pp. 3024-3035, 2014. doi: 10.1109/TPWRS.2014.2376935.
- [3] P. B. Petrović and D. Rozgić, "Computational effective modified Newton–Raphson algorithm for power harmonics parameters estimation," in IET Signal Processing, vol. 12, n. 5, pp. 590-598. 2017 doi: 10.1049/iet-spr.2017.0573.

# *Sistemas lineares*

Como dito no capítulo anterior, os problemas da engenharia são usualmente baseados em princípios que levam a equações de continuidade e de balanço. Caso tenhamos uma única função que bem represente esse fenômeno, uma possível solução é buscar a sua raiz.

Quando o problema em estudo apresenta aspectos de interdependência entre variáveis, certamente resultará em um conjunto de funções acopladas que devem ser resolvidas simultaneamente: um sistema de equações. Desta forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}. \quad (2.1)$$

Estes sistemas podem ser de natureza linear ou não-linear [1]. Aqui serão tratados os sistemas ditos lineares. O próximo capítulo é destinado aos sistemas não-lineares. Um sistema de equações lineares a coeficientes constantes pode ser representado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{ou} \quad [A]\{x\} = \{b\}, \quad (2.2)$$

onde  $a_{nn}$  são constantes chamadas coeficientes,  $b_n$  são constantes chamadas de termo independente e  $x_n$  são as variáveis ou incógnitas.  $N$  é o número de variáveis e pode ser qualquer número inteiro positivo. Assim sendo, as equações representam retas. Qualquer variação neste formato tornará o sistema não-linear, portanto curvas.

A resolução direta de um sistema linear é dada por:

$$\{x\} = [A]^{-1}\{b\} . \quad (2.3)$$

Os sistemas lineares podem ser classificados de acordo com o seu número de soluções:

- Um sistema dito possível e determinado possui uma única solução (intersecção das retas);
- Um sistema dito possível e indeterminado possui infinitas soluções (retas sobrepostas); e
- Um sistema que não possui solução é chamado de impossível ou incompatível (retas paralelas).

As duas últimas situações são chamadas de singularidades. Outra dificuldade é quando as inclinações das retas são tão próximas que o ponto de intersecção é de difícil detecção, os chamados sistemas mal condicionados. Aplicar diferentes abordagens para buscar a solução pode ser necessário por causa dessas dificuldades.

Em outras palavras:

Questão 1 – a matriz  $[A]$  é inversível ou é não inversível? O segundo caso é chamado de matriz singular.

Questão 2 – alguns problemas lineares são mais custosos de serem resolvidos, pois os erros de arredondamento se propagam de forma mais significativa que em outros problemas. Isto acontece, sobretudo, pela ocorrência de muitos zeros ou números próximos a zero. Neste caso, chamam-se de problemas mal condicionados.

Em resumo: um problema bem-condicionado é um problema em que os erros de arredondamento se propagam de forma menos importante; enquanto problemas mal condicionados são problemas em que os erros se propagam de forma mais relevante.

Uma métrica possível para medir o condicionamento de uma matriz é:

$$k(A) := \|A\| \|A^{-1}\| , \quad (2.4)$$

onde  $k$  é o número de condicionamento e  $\|\cdot\|$  é a norma da matriz  $[A]$  em estudo. Se  $[A]$  é bem condicionada,  $k$  é próximo de 1. Se  $[A]$  é mal condicionada,  $k$  tende a zero. O número de condicionamento é um indicador para a determinação da confiabilidade na solução de sistemas algébricos.

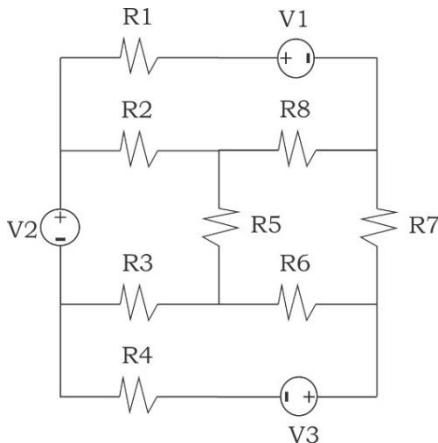
São inúmeros os livros que tratam com mais propriedade dos conceitos de sistemas lineares, como por exemplo [1]. O resumo aqui exposto é o conhecimento mínimo necessário para o adequado entendimento e aplicação dos métodos numéricos que se seguem.

Duas famílias de métodos para resolução de sistemas lineares são aqui apresentadas: métodos diretos (eliminação de Gauss e decomposição LU) e métodos iterativos (Gauss-Siedel).

Métodos iterativos lidam melhor com problemas mal condicionados, entretanto, podem exigir um esforço computacional maior que os métodos diretos. Os métodos iterativos necessitam de um critério de parada, portanto, levam a uma aproximação da solução.

## O problema

Dado o circuito elétrico ilustrado, calcule a corrente no resistor R5. As fontes têm valor de  $V_1 = 10$  V,  $V_2 = 15$  V e  $V_3 = 10$  V. Os resistores são iguais e tem valor de  $1 \Omega$ .



O circuito elétrico pode ser equacionado pela lei das tensões de Kirchhoff.

Isto resultará num sistema linear com quatro incógnitas, a saber, as correntes de cada malha.

Um equacionamento possível é:

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_1 + R_2 + R_8)I_1 + R_2 I_2 + 0I_3 - R_8 I_4 = V_1 \\ R_2 I_1 + (R_2 + R_3 + R_5)I_2 + R_3 I_3 + R_5 I_4 = V_2 \\ 0I_1 + R_3 I_2 + (R_3 + R_4 + R_6)I_3 - R_6 I_4 = V_3 \\ -R_8 I_1 + R_5 I_2 - R_6 I_3 + (R_5 + R_6 + R_7 + R_8)I_4 = 0 \end{array} \right.$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 15 \\ 10 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

A solução pode ser obtida pela aplicação da regra de Cramer (uso de determinantes) [1] ou de forma direta  $\{x\} = [A]^{-1}\{b\}$ .

Quanto maiores forem as dimensões das matrizes, maior será a dificuldade numérica para o cálculo dos determinantes ou para a inversão da matriz.

Por Cramer [1], a corrente em R5 é de 3,6667A.

## 2.1 Método direto: eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & b_3 \end{bmatrix}$$

$\downarrow (1)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & : & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & & b''_3 \end{bmatrix}$$

$\downarrow (2)$

$$x_3 = b''_3 / a''_{33}$$

$$x_2 = (b'_2 - a'_{23}x_3) / a'_{22}$$

$$x_1 = (b_1 - a_{13}x_3 - a_{12}x_2) / a_{11}$$

Dois passos:

(1) eliminação progressiva – as equações são manuseadas para suprimir uma das variáveis das equações (escalonamento). A última ficará com uma incógnita;

(2) substituição regressiva – a última equação é resolvida diretamente e o resultado substituído regressivamente nas equações anteriores para determinar as demais incógnitas. O processo é o mesmo usando matriz triangular superior ou inferior.

Para evitar divisões por zero ou por valores muito próximos de zero, que pode levar a erros numéricos, sugere-se uma análise prévia para a troca na ordem das linhas do sistema. É o chamado pivotamento.

### Resolução assistida por computador

```
[m,n]=size(A); nb=n+1;
Ab=[A b];
% eliminação progressiva
for k = 1:n-1
    for i = k+1:n
        ff=Ab(i,k)/Ab(k,k);
        Ab(i,k:nb)=Ab(i,k:nb)-ff*Ab(k,k:nb);
    end
end
```

```
% substituição regressiva
x=zeros(n,1); x(n)=Ab(n,nb)/Ab(n,n);
for i = n-1:-1:1
    x(i)=(Ab(i,nb)-Ab(i,i+1:n)*x(i+1:n))/Ab(i,i);
end
% ou simplesmente: I = A\b
% ou ainda: I = inv(A)*B
```

Faz-se necessário declarar a matriz de resistências [A] e o vetor de tensões [b].

Por eliminação de Gauss, o resultado obtido é:

$$I = [2,3333 \quad 3,3333 \quad 2,3333 \quad 0,3333].$$

Fazendo  $I_{R5} = I_2 + I_4$ , tem-se 3,6667 A.

## 2.2 Método direto: decomposição LU

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

Três passos:

↓ (1)

(1)  $[A]$  é decomposta em matrizes triangulares inferiores  $[L]$  e superiores  $[U]$ ;

$$[A] = [L] + [U]$$

↓ (2)

(2) o vetor intermediário  $\{d\}$  é obtido por substituição progressiva;

$$[L]\{d\} = \{b\}$$

↓ (3)

(3) por fim, por substituição regressiva se obtém  $\{x\}$ .

$$[U]\{x\} = \{d\}$$

Recomenda-se o uso de decomposição LU quando a matriz  $[A]$  é fixa e se deseja entender o comportamento do problema com variações em  $\{b\}$ .

Neste contexto, percebe-se que os novos cálculos de  $\{d\}$  e  $\{x\}$ , feitos por substituição em matrizes triangulares, são computacionalmente mais simples do que a completa inversão de  $[A]$ .

### Resolução assistida por computador

```
[L, U] = lu(A);
d=L\b;
I=U\d;
```

Faz-se necessário declarar a matriz de resistências  $[A]$  e o vetor de tensões  $\{b\}$ .

Por decomposição LU, o resultado obtido foi 3,6667A.

### 2.3 Método iterativo: Gauss-Siedel

O método de Gauss-Siedel para um sistema algébrico  $mn$  pode ser equacionado da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^j = (b_1 - a_{12}x_2^{j-1} - \dots - a_{1n}x_n^{j-1})/a_{11} \\ x_2^j = (b_1 - a_{21}x_1^j - \dots - a_{2n}x_n^{j-1})/a_{22} \\ \vdots \\ x_n^j = (b_m - a_{m1}x_1^j - \dots - a_{mn-1}x_{n-1}^j)/a_{mn} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

onde  $j$  é a iteração corrente.

Perceba que o processo de cálculo  $x_2^j$  considera  $x_1^j$ . Portanto, utilizam-se as aproximações obtidas dentro da mesma iteração. O critério de parada pode ser:

$$\varepsilon_{a,i} = \left| \frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j} \right| \cdot 100\% \leq \varepsilon_s , \quad (2.6)$$

onde  $i$  é a variável  $x$  em estudo,  $j$  é a iteração,  $\varepsilon_a$  é o erro absoluto e  $\varepsilon_s$  é um valor de erro desejado.

Computacionalmente, o processo iterativo pode ficar mais eficiente usando matrizes:

$$\{x\} = \{d\} - [C]\{x\} \text{ onde}$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \dots \\ b_n/a_{nn} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad [C] = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & \cdots & a_{1n}/a_{1n} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & \cdots & a_{2n}/a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}/a_{mn} & a_{m2}/a_{mn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Os métodos iterativos ou de aproximação fornecem uma alternativa aos métodos de eliminação. Como se busca uma aproximação da solução, sua convergência pode ser “relaxada” em problemas mal condicionados. Um exemplo deste relaxamento pode ser um erro global considerável ou mesmo erros admissíveis diferentes para cada variável.

Outra forma de relaxamento é utilizar um fator de peso ( $\lambda$ ). Após a determinação de (5), estes valores são modificados por uma média ponderada dos resultados da iteração anterior e da atual:

$$x_i^j = \lambda x_i^j + (1 - \lambda)x_i^{j-1} , \quad (2.8)$$

onde  $\lambda$  deve ser um valor entre 0 e 2. Caso  $\lambda = 1$ , o resultado não é alterado.

- Se  $\lambda$  for entre 0 e 1, tem-se uma média ponderada do valor atual com o anterior. Isto é chamado sub-relaxamento. O sub-

relaxamento é usado para facilitar a convergência em sistemas mal condicionados.

- Se  $\lambda$  for entre 1 e 2, um valor atual é supervalorizado. Chamado de sobrerrelaxamento, essa supervalorização parte da confiança na convergência do método e deseja-se apenas acelerar o processo.

A escolha do valor de  $\lambda$  depende da experiência sobre o problema a ser resolvido. Uma análise de sensibilidade pode ser feita, por exemplo.

### Resolução assistida por computador

```
iter = 0;
maxit = 5000;
es = 0.0001;
[m,n] = size(A);
C = A;
for i = 1:n
    C(i,i) = 0; x(i) = 0;
end
x = x';
for i = 1:n
    C(i,1:n) = C(i,1:n)/A(i,i);
    d(i) = b(i)/A(i,i);
end
while (1)
    xo = x;
    for i=1:n
        x(i) = d(i)-C(i,:)*x;
        if x(i) ~= 0
            ea(i) = abs((x(i)-xo(i))/x(i));
        end
    end
    iter = iter+1;
    if max(ea)<=es||iter>=maxit, break, end
end
```

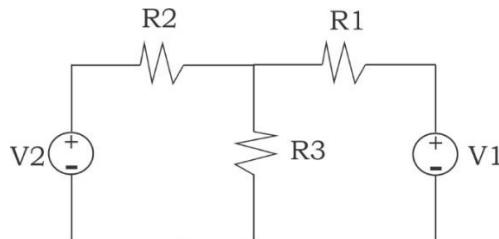
Por Gauss-Siedel, o resultado obtido foi  $I_{R5} = 3,6667A$  em 17 iterações, com erro na quarta casa decimal. A tabela 2.1. apresenta um extrato do cálculo.

Tabela 2.1. Resolução pelo Método de Gauss-Siedel.

#	Correntes	Erros
1	[3,3333 3,8889 2,0370 0,3704]	[1,0000 1,0000 1,0000 1,0000]
5	[2,3236 3,3444 2,3259 0,3263]	[0,0026 0,0020 0,0020 0,0133]
10	[2,3319 3,3350 2,3322 0,3323]	[0,0004 0,0003 0,0003 0,0019]
15	[2,3332 3,3335 2,3332 0,3332]	[0,0000 0,0000 0,0000 0,0002]
17	[2,3333 3,3334 2,3333 0,3333]	[0,0000 0,0000 0,0000 0,0001]

## 2.4 Exercícios propostos

1. Determine o valor da corrente no resistor R3, sabendo que V1 = V2 = 100 V e R1 = R2 = R3 = 10 Ω.

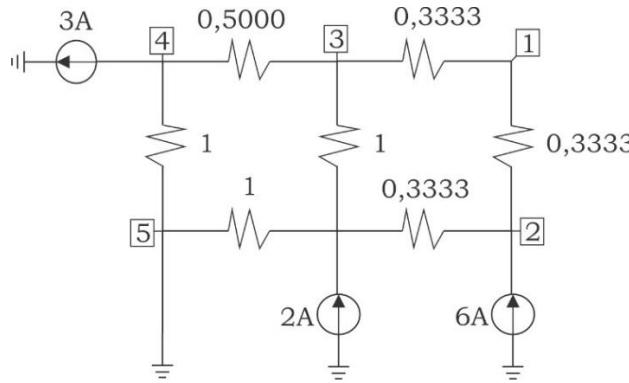


$$\begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \end{Bmatrix}.$$

Resposta: IR3 = 6,6667 A

2. Calcule as tensões nos nós tendo por referência o nó 6. O circuito pode ser equacionado da seguinte maneira [2]:

$$\{I\} = [Y]\{V\} \quad \text{onde}$$



$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{Bmatrix}.$$

Resposta:  $\{V\} = \{4 \ 5 \ 3 \ 4 \ 1\} \text{ V}$

## 2.5 Referências básicas

- [1] D. C. Lay, S. R. Lay, J. McDonald, Álgebra Linear e suas Aplicações, 5<sup>a</sup> ed., LTC, 2018. ISBN 9788521634959.
- [2] A. J. Monticelli, Fluxo de carga em redes de energia elétrica, Ed. Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1983. ISBN 978-85-268-0945-1.

## 2.6 Referências complementares – Aplicações

- [1] W. V. D. Santos, A. S. Primo, “Aplicação da álgebra linear na engenharia elétrica: análise de circuitos elétricos em corrente contínua”, in Ciências exatas e tecnológicas, vol. 4, n. 1, pp. 53-76, 2015. ISSN 1980-1777.
- [2] C. V. Camargo and G. H. Dalposso, “Cálculo numérico computacional: aplicação na microeletrônica,” in Revista Jr de Iniciação Científica em Ciências Exatas e Engenharia, vol. 1, n. 6, pp. 7-15, 2017. ISSN 22360093.
- [3] M. H. Moradi, V. B. Foroutan and M. Abedini, “Power flow analysis in islanded Micro-Grids via modeling different operational modes of DGs: A review and a new approach,” in Renewable and Sustainable Energy Reviews, vol. 69, pp. 248-262, 2017. doi: 10.1016/j.rser.2016.11.156.

# *Sistemas não-lineares*

Os problemas da engenharia podem ser equacionados como sistemas algébricos lineares. Isto pressupõe aceitar condições de idealidade em muitos casos. Exemplos de não linearidades são a dependência da temperatura na condição de operação de um semicondutor ou a saturação de meios magnéticos.

Ao contrário dos sistemas lineares, cujas equações representam retas, os gráficos associados às equações não-lineares são curvas. A solução é a interseção das curvas, conforme ilustrado na figura 3.1.

O método numérico para resolução de sistemas não lineares aqui apresentado é o Newton-Raphson. O método Gauss-Siedel, apresentado no capítulo anterior, também pode ser utilizado.

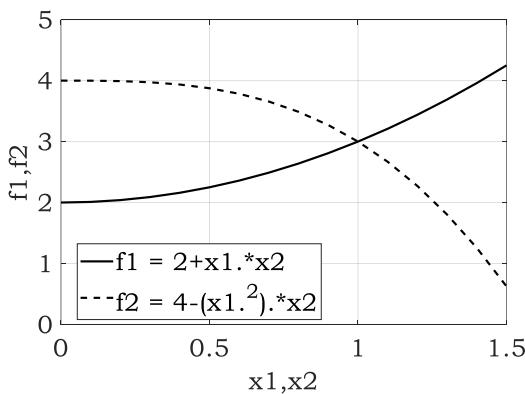
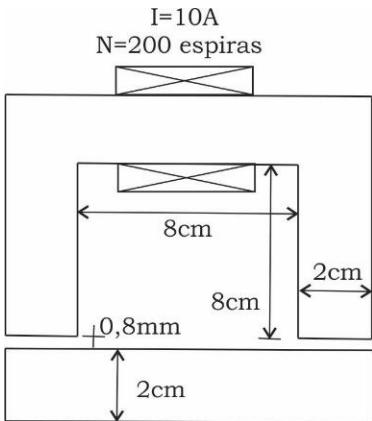


Figura 3.1 – Ilustração de um sistema não-linear.

### O problema



No circuito magnético ilustrado, a indução ( $N \cdot I$ ) pode não produzir um aumento proporcional de campo magnético devido a característica de saturação do ferro (curva de histerese) [1].

Assim, o circuito magnético é dito um sistema não linear.

O cálculo do campo magnético no ferro ( $H_f$ ) e no entreferro ( $H_e$ ) pode ser equacionado da seguinte forma:

$$\begin{cases} f_1(H_e, H_f) = 2H_e l_e + H_f l_f - NI \\ f_1(H_e, H_f) = -\mu_0 H_e + 1,8(1 - e^{-(H_f/40)}) \end{cases},$$

onde  $l_f = 0,40$  m (comprimento médio no ferro),  $l_e = 0,80$  mm (comprimento médio no entreferro),  $N = 200$  (número de espiras),  $I = 10$  A (corrente na bobina),  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  H/m (permeabilidade magnética do ar).

Aqui, percebe-se que não é possível isolar uma incógnita e resolver o problema de maneira analítica direta. O termo  $e^{-(H_f/40)}$  não permite. Este termo também impõe a não linearidade do problema. Portanto, faz-se necessário o emprego de métodos numéricos.

### 3.1. Método Newton-Raphson

O capítulo 1, sobre raízes, apresenta Newton-Raphson para uma única função:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (3.1)$$

Generalizando-o para  $n$  equações, tem-se:

$$\frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_1} x_{1,i+1} + \cdots + \frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_n} x_{n,i+1} = -f_{k,i} + x_{1,i} \frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_1} + \cdots + x_{n,i} \frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_n}$$

onde  $k$  representa a função em estudo,  $n$  é a variável e  $i$  é o valor atual.

A sua notação matricial pode ser:

$$\{x_{i+1}\} = \{x_i\} - [J]^{-1}\{f\}, \quad (3.2)$$

sendo que  $[J]$  é a matriz Jacobiana das derivadas parciais, então:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Newton-Raphson é um método iterativo. Portanto, faz-se necessário a definição de uma aproximação inicial (possível solução) e de critérios de parada (número máximo de iterações e erro admissível).

**Resolução assistida por computador**

```

lf = 0.4; le = 0.0008; N = 200; I = 10;
mi = 4*pi*10^-7;
x = [ 1250000 ; 70]; %aproximações iniciais
iter = 0; maxit = 50; es = 0.001;
while (1)
    F = [2*x(1)*le + x(2)*lf - N*I;
          -mi*x(1) + 1.8*(1-exp(-(x(2)/40))) ];
    J = [2*le      lf   ;
          -mi      1.8*(1/40)*exp(-x(2)/40)  ];
    dx=J\F;
    x=x-dx;
    iter=iter+1; ea=max(abs(dx./x));
    if iter>=maxit || ea<=es, break, end
end

```

Considerando a condição inicial de  $H_e = 1250 \text{ kA/m}$  e  $H_f = 70 \text{ A/m}$ , por Newton-Raphson, o resultado obtido foi  $H_e = 1230410,8397 \text{ A/m}$  e  $H_f = 78,3566 \text{ A/m}$  em 3 iterações, com critério de parada de quatro casas decimais. A Tabela 3.1. apresenta as três iterações.

Tabela 3.1. Resolução pelo Método de Newton-Raphson.

Iteração	$H_e (\text{A/m})$	$H_f (\text{A/m})$	Erro
0	1250k	70	-
1	1230,6067k	77,5729	0,0976
2	1230,4126k	78,3493	0,0099
3	1230,4108k	78,3566	0,0000

**3.2. Exercícios propostos**

- O problema do circuito com diodo apresentado no capítulo 1 pode ser equacionado por um sistema não linear da seguinte forma:

$$\begin{cases} f_1(I_d, V_d) = I_{CR} \left( e^{\frac{V_d}{n \frac{kT}{q}}} - 1 \right) - I_d \\ f_2(I_d, V_d) = \left( \frac{V_d - V_d}{R} \right) - I_d \end{cases},$$

onde  $I_d$  é a corrente no diodo e  $V_d$  é a tensão no diodo. Admitindo um diodo 1N4001 com  $I_{CR} = 31,9824$  nA,  $n = 2$ ,  $k = 1,3806 \cdot 10^{-23}$  J/K,  $T = 300$  K (26,85 C°) e  $q = 1,6022 \times 10^{-19}$  C, encontre  $I_d$  e  $V_d$ .

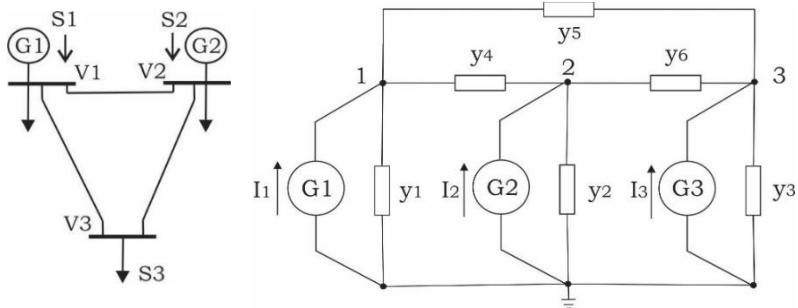
Resposta: Partindo de  $V_d = 1$  V e  $I_d = 2$  A, com 5 iterações obtém-se o critério de parada de quatro casas decimais.

$$V_d = 0,9355 \text{ V e } I_d = 2,3065 \text{ A.}$$

Observação: esta questão apresenta problema de condicionamento quando os pontos iniciais estão muito distantes da solução (*rcond* próximo a zero). Isto é devido as diferenças nos valores entre as grandezas, particularmente  $10^{-9}$  e  $10^{-23}$ . Rever capítulo 2.

- O problema de fluxo de potência num sistema elétrico de três barras é apresentado na forma de diagrama unifilar e seu circuito equivalente. As admitâncias  $y$  possuem valor de  $1 + j1$  pu.

Admitindo que as correntes nas barras sejam iguais a 1 + j1 pu, determine as tensões.



$$\{I\} = [Y]\{V\}$$

$$\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_1 + y_4 + y_5) & -y_4 & -y_5 \\ -y_4 & (y_2 + y_4 + y_6) & -y_6 \\ -y_5 & -y_6 & (y_3 + y_5 + y_6) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}.$$

Resposta: pelo método de Gauss-Siedel, obtém-se  $\{V\} = 0,5000 + j0,5000$  pu na 13º iteração com critério de parada de quatro casas decimais.

### 3.3. Referências básicas

- [1] J. P. A. Bastos and N. Ida, Electromagnetics and Calculation of Fields, Springer & Verlag, 2 ed., 2012. ISBN 1461268605.
- [2] C. V. Camargo, G. H. Dalposso, Cálculo numérico computacional: aplicação na microeletrônica, Revista Jr de Iniciação Científica em Ciências Exatas e Engenharia, vol. 1, n. 6, pp. 7-15, 2013.
- [3] R. S. Salgado, Introdução aos Sistemas de Energia Elétrica, Apostila Graduação em Engenharia Elétrica, UFSC, 2009.

### 3.4. Referências complementares – Aplicações

- [1] M. H. Moradi, V. B. Foroutan, M. Abedini, “Power flow analysis in islanded Micro-Grids via modeling different operational modes of DGs: A review and a new approach,” in Renewable and Sustainable Energy Reviews, vol. 69, pp. 248-262, 2017. doi: 10.1016/j.rser.2016.11.156.
- [2] S. N. Tiwari, L. P. Singh, “Six-phase (multiphase) power transmission systems: A generalized investigation of the load flow problem”, in Electric Power Systems Research, vol. 5, n. 4, pp. 285-297, 2017. doi: 10.1016/0378-7796(82)90024-4.

# *Ajuste de curvas*

A(O) engenheira(o) realiza na bancada de um laboratório diversas medidas de tensão e corrente. Sabe-se que muitas vezes pode ser custoso obter muitos pontos ou até mesmo inviável medir determinados valores, por exemplo, quando há restrições da infraestrutura.

Ajuste de curvas é uma família de técnicas matemáticas que buscam encontrar padrões de comportamento num conjunto de dados. O objetivo é estudar o fenômeno físico na forma de uma tendência.

Havendo a possibilidade de se traçar uma reta ou curva, pode-se fazer previsões. Essas previsões, quando internas ao grupo de dados original, podem ser chamadas de interpolações. Quando externas, dá-se o nome de extrapolações. Em ambos os casos, existe a necessidade de controles estatísticos para aferir a qualidade dessas inferências.

O objetivo é buscar uma reta ou curva – um polinômio – que melhor se ajusta aos dados disponíveis. Conhecida a equação do polinômio, pode-se determinar valores dentro ou fora do intervalo conhecido.

Quatro famílias de métodos são aqui apresentadas:

- Ajuste de curvas por regressão: quando se tem uma grande quantidade de dados e eles são pouco precisos e/ou confiáveis;
- Ajuste de curvas por interpolação: quando se tem uma pequena quantidade de dados e eles são precisos e confiáveis;
- Ajuste de curvas por interpolação por partes: quando se tem uma grande quantidade de dados e eles são precisos e confiáveis;

- Ajuste de curvas com funções senoidais: para representar funções infinitas e periódicas dos processos físicos na forma de funções trigonométricas senos e cossenos.

Por fim, este capítulo apresenta uma discussão sobre séries de Fourier, importante ferramenta para análise de problemas da engenharia elétrica no domínio do tempo e da frequência.

#### 4.1 Ajuste de curvas por Regressão

Dado um grande conjunto de dados imprecisos, deseja-se extrair uma reta ou curva de tendência. Seja por uma regressão linear (reta) ou não-linear (curva), em ambos os casos existe um problema de minimização de erros, conforme ilustrado na figura 4.1.

As técnicas aqui apresentadas são os mínimos quadrados discretos (regressão linear) e mínimos quadrados contínuos (regressão polinomial).

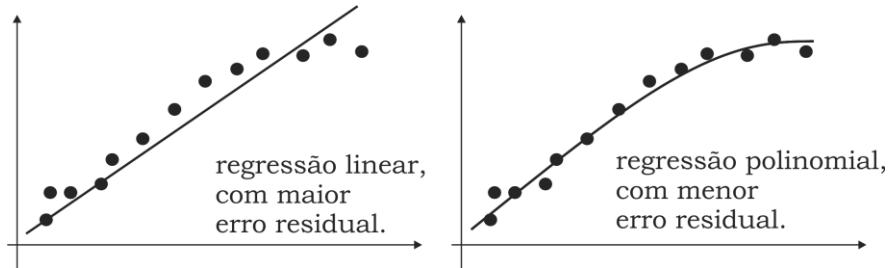


Figura 4.1. Ajuste de curvas por Regressão.

#### O problema

A(O) engenheira(o) foi à bancada do laboratório de medidas elétricas e obteve dados de tensão e corrente. Ela(e) esqueceu de medir a corrente para 60V. Como transformar os dados pontuais numa curva, ou seja, uma tendência de comportamento do circuito elétrico estudado?

V (V)	0	10	20	30	40	50	70	80	90
I (A)	0	10	19	31	39	52	65	69	70

#### 4.1.1 Método Mínimos Quadrados Discreto – Regressão Linear

O termo linear remete a uma reta. A equação de uma reta pode ser dada por:

$$y = a_0 + a_1 x , \quad (4.1)$$

onde  $(x, y)$  é o conjunto de dados,  $a_0$  e  $a_1$  são os coeficientes que representam respectivamente a intersecção com o eixo  $y$  e a inclinação.

O método de mínimos quadrados busca minimizar o erro quadrático entre os dados  $(x, y)$  e os pontos de uma reta, representado por:

$$S_r = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \quad (4.2)$$

onde  $S_r$  é chamado de soma dos quadrados dos resíduos.

De forma direta, tem-se:

$$a_1 = \frac{n \sum(x_i y_i) - \sum(x_i) \sum(y_i)}{n \sum(x_i)^2 - (\sum(x_i))^2} \quad e \quad a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x} \quad (4.3)$$

onde  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são as médias de  $x$  e  $y$ . Para um ajuste perfeito entre a reta e o conjunto de dados,  $S_r$  deve ser 0.

Outra métrica significativa é soma total dos quadrados dos resíduos entre os pontos dados e a média ( $S_t$ ):

$$S_t = \sum(y_i - \bar{y})^2 . \quad (4.4)$$

A diferença  $S_r - S_t$  indica a melhora ou a redução de erro em função da descrição dos dados. De forma a regularizarmos a escala, tem-se:

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}, \quad (4.5)$$

onde  $r^2$  é chamado de coeficiente de determinação e  $r$  o coeficiente de correlação. Sendo o ajuste perfeito,  $S_r = 0$  e  $r^2 = 1$ . Para  $S_r = S_t$  e  $r^2 = 0$ , o modelo não representa melhora.

Uma forma de calcular  $r$  de forma computacionalmente mais eficiente é:

$$r^2 = \frac{n \sum(x_i y_i) - \sum(x_i) \sum(y_i)}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}. \quad (4.6)$$

### Resolução assistida por computador

```
x = [0 10 20 30 40 50 70 80 90]';
y = [0 10 19 31 39 52 65 69 70]';

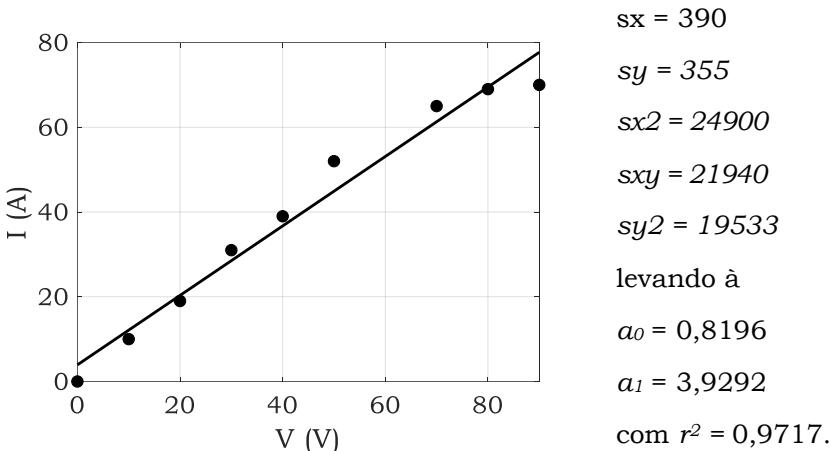
n=length(x); % número de amostras
sx=sum(x);
sy=sum(y);
sx2=sum(x.*x);
sxy=sum(x.*y);
sy2=sum(y.*y);

a(1)=(n*sxy-sx*sy)/(n*sx2-sx^2);
a(2)=sy/n-a(1)*sx/n;

r2=((n*sxy-sx*sy)/sqrt(n*sx2-sx^2))/sqrt(n*sy2-sy^2))^2;
r = r2^0.5;

V = 60;
I = a(1)*V+a(2);
```

Para o problema apresentado, obteve-se:



Isto significa que o modelo adotado tem correlação de 98,58 %, ou seja, a reta representa a tendência dos dados com erro menor que 2 %. Para 60 V,  $I = 53,1042$  A.

Apesar do bom resultado numérico, é possível perceber que existe uma saturação (não linearidade) do valor da corrente no final da escala da tensão. Portanto, o modelo adotado de uma reta talvez não seja a melhor maneira para representar este comportamento.

#### 4.1.2 Método Mínimos Quadrados Contínuo – Regressão Polinomial

O termo não linear remete a uma curva. A aproximação para um conjunto de dados  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$  usando um polinômio de grau  $n$  pode ser:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n . \quad (4.7)$$

O grau  $n$  deve ser no máximo  $n \leq m - 1$ . Isto em função dos graus de liberdade, onde o número de equações deve ser maior que o número de variáveis.

O método de mínimos quadrados contínuo busca minimizar o erro entre os dados  $(x, y)$  e os pontos da curva, representado por:

$$S_r = \sum_{i=1}^m e_i^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - P_n(x))^2 \quad (4.8)$$

onde  $S_r$  é chamado de soma dos quadrados dos resíduos. Trata-se da generalização do método discreto que utiliza polinômio de primeiro grau. Os requisitos para se obter a solução são:

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_j} = 0; j = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (4.9)$$

As  $(n + 1)$  equações para a determinação dos coeficientes são:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^0 & \sum_{i=1}^m x_i^0 & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^n \\ \sum_{i=1}^m x_i^1 & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m x_i^n & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i x_i^0 \\ \sum_{i=1}^m y_i x_i^1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m y_i x_i^n \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

As técnicas de resolução de sistemas lineares também podem ser aplicadas. Aqui também são válidas as eq. (4.4) e (4.5) para a determinação do coeficiente de correlação ( $r$ ).

**Resolução assistida por computador para polinômio de 2º grau**

```

x = [0 10 20 30 40 50 70 80 90]';
y = [0 10 19 31 39 52 65 69 70]';
n = length(x); % número de amostras

sx = sum(x); sy = sum(y);
mx = sx/n; my = sy/n;
sx2 = sum(x.*x); sx3 = sum(x.*x.*x); sx4 = sum(x.*x.*x.*x);
sxy = sum(x.*y); sx2y = sum(x.*x.*y);
% [A]\c={b}
A = [n sx sx2; sx sx2 sx3; sx2 sx3 sx4];
b = [sy sxy sx2y]';
c = A\b % resolução de sistemas
yy = sum((y-my).^2);
yyy = 0;
for i=1:n
    yyy = yyy + (y(i) - c(1) - c(2)*x(i) - c(3)*x(i)^2)^2;
end

r2 = (yy - yyy)/yy; r = sqrt(r2);
V=60;
I = c(1)+c(2)*V + c(3)*V.^2

```

Considerando o problema apresentado em 3.1.1, as equações lineares simultâneas para a obtenção de um polinômio de segunda ordem são:

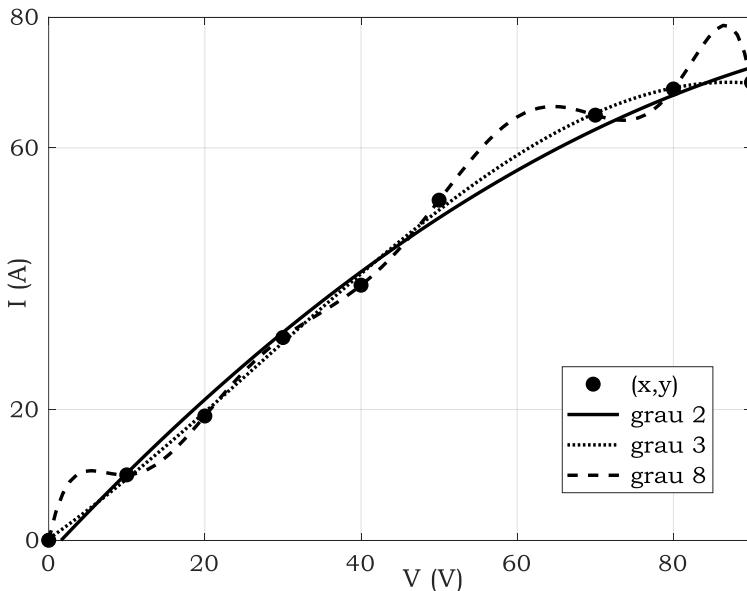
$$\begin{bmatrix} 10 & 450 & 28500 \\ 450 & 28500 & 2025000 \\ 28500 & 2025000 & 153330000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 417 \\ 25740 \\ 1790400 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema por Gauss, chega-se a

$$P_2(x) = -2,0388 + 1,2782x - 0,0050x^2$$

com  $r = 99,70\%$ . Para  $60 V$ ,  $I = 56,5593 A$ .

A linha contínua na figura é este resultado.



O MatLab possui biblioteca para determinação de polinômio por mínimos quadrados.  $P = \text{polyfit}(x, y, n)$  encontra os coeficientes de polinômio  $P_n(x)$  de grau  $n$ . Como complemento, a função  $y = \text{polyval}(P, x)$  retorna o valor do polinômio  $P_n$  avaliado em  $x$ .

Na figura, a linha pontilhada ilustra a aplicação de  $\text{polyfit}$  para  $n = 3$ . Aqui, para  $60\text{ V}$ ,  $I = 58,8775\text{ A}$ .

Em razão de uma possível melhor representação, é natural o desejo de trabalhar com polinômios de grau superior. Entretanto, distorções podem surgir na forma da curva devido a problemas de condicionamento das matrizes (eq. 4.10). A curva tracejada é a representação para  $n = 8$ . Estes problemas serão tratados na seção referente à interpolação.

## 4.2 Ajuste de curvas por Interpolação

Trata-se de uma família de métodos que permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto de poucos dados precisos e confiáveis previamente conhecidos.

A forma mais geral para um polinômio pode ser escrita como mostra a eq. (4.7). Para um conjunto de dados  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$  existe um, e somente um, polinômio (de grau  $n = m - 1$ ) que passa por todos os pontos [1].

Por exemplo, para ligar dois pontos, tem-se uma única reta possível (interpolação linear). Para ligar três pontos não alinhados, tem-se uma parábola (interpolação de segundo grau ou quadrática).

Matricialmente, a eq. (4.7) pode ser organizada da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Matrizes com coeficientes desta forma são chamados de matrizes de Vandermonde. Elas são frequentemente matrizes mal condicionadas e, quando superiores a  $3 \times 3$ , seu número de condicionamento pode ser grande, causando erros significativos no cálculo dos coeficientes  $a_i$ .

Existem algoritmos numericamente estáveis que exploram a estrutura da matriz de Vandermonde. Estes métodos consistem em primeiro construir um polinômio de interpolação de Newton ou Lagrange e depois convertê-lo para a forma canônica, conforme eq. (4.7).

Quando se tem muitos dados, outra alternativa de evitar o mal condicionamento é realizar a interpolação por partes, também conhecida como *splines*, técnica apresentada ainda neste capítulo.

## O problema

A Tabela 40 da NBR 5410:2004 apresenta os fatores de correção por temperaturas ambiente para linhas não-subterrâneas considerando dois tipos de compostos isolantes. Parte desta tabela é:

Temperatura (°C)	PVC	EPR ou XLPE
20	1,12	1,08
25	1,06	1,04
35	0,94	0,96

São poucos pontos, mas confiáveis. Determine os fatores de correção para uma temperatura de 30°C.

### 4.2.1 Polinômios Interpoladores de Newton

Para um conjunto de dados  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ , o polinômio interpolador de Newton (de grau  $n = m - 1$ ) pode ser expresso da seguinte maneira:

$$f_n(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + \cdots + a_m(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n), \quad (4.12)$$

sendo  $f_n(x) = y_n$ . As funções  $a$  correspondem a diferenças divididas finitas (ddf):

$$\begin{aligned} a_1 &= f(x_1) \\ a_2 &= f[x_2, x_1] \\ a_3 &= f[x_3, x_2, x_1] \\ &\vdots \\ a_m &= f[x_m, x_{m-1}, \dots, x_2, x_1], \end{aligned} \quad (4.13)$$

e

$$\begin{aligned}
 f[x_2, x_1] &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \\
 f[x_3, x_2, x_1] &= \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} \quad \text{até} \\
 f[x_m, x_{m-1}, \dots, x_2, x_1] &= \\
 \frac{f[x_m, x_{m-1}, \dots, x_2] - f[x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_2, x_1]}{x_m - x_1}.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

### Resolução assistida por computador

```

x = [20 25 35]';
y = [1.12 1.06 0.94]'; %PVC
% y = [1.08 1.04 0.96]'; %EPR

xx = 30;
n = length(x);
a = zeros(n,n);

% atribui as variáveis dependentes à primeira coluna de b
a(:,1) = y(:,1);
for j = 2:n
    for i = 1:n-j+1
        a(i,j) = (a(i+1,j-1)-a(i,j-1))/(x(i+j-1)-x(i));
    end
end

% usa as diferenças divididas finitas para interpolar
xt = 1; yint = a(1,1);
for j = 1:n-1
    xt = xt*(xx-x(j));
    yint = yint+a(1,j+1)*xt;
end

```

Para o problema apresentado, considerando o material PVC, tem-se:

$$f_2(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2)$$

$x_i$	$y_i = f(x_i)$	Primeira ddf	Segunda ddf
20	1,12	$f[x_2, x_1] = -0,012$	$f[x_3, x_2, x_1] = 0$
25	1,06	$f[x_3, x_2] = -0,012$	
35	0,94		

$$f_2(x) = 1,12 + (-0,012)(x - 20) + 0(x - 20)(x - 25)$$

$$f_2(x) = 1,12 + (-0,012)(x - 20) \quad f_2(30) = 1,12 + (-0,012)(30 - 20)$$

Como se tem três pares de dados, o polinômio interpolador de Newton tem grau 2. Para 30°C, o fator de correção considerando o PVC é igual a 1. Para EPR ou XLPE, o resultado também é 1.

#### 4.2.2 Polinômios Interpoladores de Lagrange

Para um conjunto de dados  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ , de forma geral, o polinômio interpolador de Lagrange (de grau  $n = m - 1$ ) pode ser expresso da seguinte maneira:

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^m L_i(x)f(x_i) \quad \text{sendo} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (4.15)$$

onde  $\Pi$  indica “produto de”.

**Resolução assistida por computador para polinômio de 2º grau**

```

x = [20 25 35]';
y = [1.12 1.06 0.94]'; % PVC
% y = [1.08 1.04 0.96]'; % EPR
xx = 30;
n = length(x); % número de amostras
if length(y) ~= n,
    error('x e y devem ter o mesmo tamanho');
end
s = 0;
for i = 1:n
    produto = y(i);
    for j = 1:n
        if i ~= j
            produto = produto* (xx-x(j)) / (x(i)-x(j));
        end
    end
    s = s + produto;
end

```

Para o problema apresentado, considerando o material PVC, tem-se:

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f(x_2) \\
&\quad + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} f(x_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(30) &= \frac{(30 - 25)(30 - 35)}{(20 - 25)(20 - 35)} 1,12 + \frac{(30 - 20)(30 - 35)}{(25 - 20)(25 - 35)} 1,06 \\
&\quad + \frac{(30 - 20)(30 - 25)}{(35 - 20)(35 - 25)} 0,94
\end{aligned}$$

Como se tem três pares de dados, o polinômio interpolador de Lagrange tem grau 2. Para 30°C, o fator de correção considerando o PVC é igual a 1. Para EPR ou XLPE, o resultado também é 1.

Newton e Lagrange produzem resultados numericamente satisfatórios e similares. Diferentemente dos métodos de regressão, aqui não se obtém um polinômio, mas sim um único valor interpolado. Do ponto de vista de esforço computacional, Lagrange necessita de um maior número de operações matemáticas (soma, subtração, multiplicação e divisão) do que Newton.

### 4.3 Interpolação por *splines* ou por partes

A interpolação polinomial pode apresentar resultados indesejáveis quando feita para um número elevado de pontos usando-se polinômios de grau relativamente alto, conforme discutido na seção 4.1.2. Esses resultados indesejáveis são, em geral, grandes flutuações sobre o intervalo total de interpolação.

Uma alternativa é interpolar em grupos de poucos pontos, obtendo-se polinômios de grau menor, e impor condições para que a função de aproximação seja contínua e tenha derivadas contínuas até uma certa ordem. Esta técnica é conhecida como aproximação polinomial por partes ou *splines*.

A figura 4.2 ilustra o processo de interpolação por partes. Os coeficientes da função *spline* ( $f(x_i)$ ) são calculados para cada intervalo de dados, por exemplo  $[x_1:x_3]$ . O número de pontos ( $x_i$ ) usados para cada função *spline* definem a sua ordem.

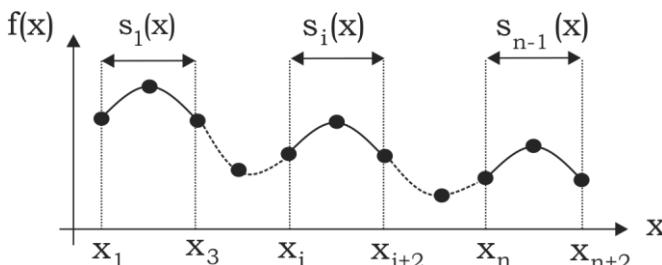


Figura 4.2. Interpolação por parte – *splines*.

### O problema

A tensão aplicada sobre um circuito eletrônico tem invertida sua polaridade de tempos em tempos. Entretanto, na inversão, ocorre um transitório durante o tempo de acomodação. Os valores medidos são:

T (s)	-2	-1	1	2	3	4
V (V)	-10	-10	10,5	9,75	10	10

Determine o polinômio que bem represente este comportamento. Qual o valor da tensão no tempo igual a 1,5 segundos?

### Interpolação por *splines* cúbica

Uma interpolação por *splines* de primeira ordem implica em obter retas entre cada par de pontos, passando obrigatoriamente por eles. Uma *spline* de segunda ordem busca equações quadráticas entre cada par de pontos. Além de passar pelos pontos, tem-se um polinômio com a garantia da existência de sua derivada de primeira ordem. A *spline* de terceira ordem ou cúbica produz um polinômio diferenciável em primeira e segunda ordem.

Os resultados da interpolação por *splines* cúbica são diferentes da interpolação cúbica, uma vez que por *splines* existe a obrigatoriedade de se passar por todos os pontos.

Ressalta-se que *splines* de ordem superior tendem a ter a mesma instabilidade de polinômios de ordem elevada: oscilações devido ao mal condicionamento.

Assim, quando existe um grande conjunto de dados para ser interpolado, sugere-se sempre limitar o uso na ordem cúbica e aumentar o número de partes [1].

A *spline* cúbica é um polinômio de terceiro grau representado por:

$$f_i + b_i h_i + c_i(h_i)^2 + d_i(h_i)^3 = f_{i+1} \quad \text{onde } h_i = x_{i+1} - x_i . \quad (4.16)$$

Para  $n$  pontos dados ( $i = 1, 2, 3 \dots, n$ ), existem  $n-1$  intervalos e  $4(n-1)$  coeficientes desconhecidos a calcular.

Assim, a primeira condição é atendida: o *spline* deve passar por todos os pontos. Consequentemente,  $4(n-1)$  condições são necessárias para calcular estes coeficientes. São elas:

1. A spline passa pelo primeiro e último ponto do intervalo, dando origem a  $2(n-1)$  equações:

$$(i) \quad s_i(x_i) = f_i \rightarrow a_i = f_i$$

$$(ii) \quad s_i(x_{i+1}) = f_i \rightarrow s_i(x_{i+1}) = a_i + b_i(h_i) + c_i(h_i)^2 + d_i(h_i)^3 = f_i$$

2. A primeira derivada deve ser contínua em cada ponto do intervalo:

$$(iii) \quad s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \rightarrow b_i + 2c_i(h_i) + 3d_i(h_i)^2 = b_{i+1}$$

3. A segunda derivada deve ser contínua em cada ponto do intervalo:

$$(iv) \quad s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \rightarrow 2c_i + 6d_i(h_i) = 2c_{i+1}$$

Assim, tem-se  $4n-6$  equações, mas são necessárias  $4(n-1)$ . Existem diversas maneiras para se obter as equações faltantes:

- *Natural end conditions* – natural: assumir que a segunda derivada nos primeiro e último pontos é zero. A função é uma reta nos extremos;
- *Clamped end conditions* – amarrada: assumir que a primeira derivada nos primeiro e último pontos é conhecida, no caso um valor imposto;

- “Not-a-knot” end conditions – sem um nó: forçar a continuidade da terceira derivada no segundo e nos penúltimos pontos. Isto resulta em se ter os dois primeiros intervalos com a mesma equação, bem como os dois últimos.

Para as *natural end conditions*, tem-se:

$$(v) \quad s''_1(x_1) = 0 \rightarrow c_1 \quad (vi) \quad s''_{n-1}(x_n) = 0 \rightarrow c_n$$

Por transformações algébricas, pode-se deixar as equações apenas com o coeficiente  $c$ :

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \quad \text{e} \quad b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i - c_{i+1}). \quad (4.17)$$

Assim, pode-se traduzir o equacionamento para uma forma matricial:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_i & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 3(f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n, x_{n-1}] - f[x_{n-1}, x_{n-2}]) \\ 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

lembrando que  $f[x_i, x_j] = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j}$ .

Uma vez calculados os coeficientes  $c_i$ , volta-se na eq. (4.17) e determina-se  $d_i$  e  $b_i$ . Isto posto, tem-se um polinômio para cada par de dados, conforme eq. (4.18).

Para o problema apresentado em 4.3, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & 2(h_4 + h_5) & h_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]) \\ 3(f[x_4, x_3] - f[x_3, x_2]) \\ 3(f[x_5, x_4] - f[x_4, x_3]) \\ 3(f[x_6, x_5] - f[x_5, x_4]) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 30,75 \\ -33 \\ 3 \\ -0,75 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Truncando em quatro casas decimais, tem-se:

	1	2	3	4	5	6
[c]	0,0150	0,0580	-0,0653	-0,0106	0	-0,0004
[d]	0,0143	-0,0822	0,0182	0,0035	-0,0001	
[b]	-0,0294	10,2162	-0,7029	0,2571	0,0001	

Para a determinação da tensão no tempo igual a 1,5s, busca-se o polinômio do intervalo que contenha o referido tempo. No caso:

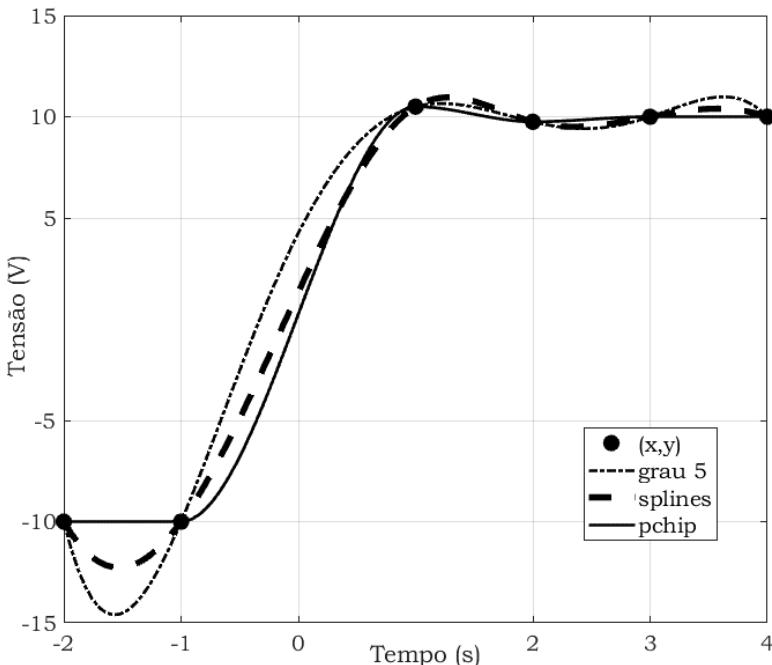
$$s_3(x) = f_3 + b_3(x - x_3) + c_3(x - x_3)^2 + d_3(x - x_3)^3.$$

$$s_3(1,5) = 10,5 - 0,7029(1,5 - 1) - 0,0653(1,5 - 1)^2 + 0,0182(1,5 - 1)^3$$

$$s_3(1,5) = 10,1345 \text{ V}$$

A figura a seguir apresenta os resultados. Os círculos são os dados medidos. A curva tracejada foi obtida com o método aqui apresentado por spline cúbica. Para tal, faz-se necessária a interpolação de vários tempos de forma a desenhar a curva.

As curvas pontilhadas foram obtidas pela técnica de mínimos quadrados (*polyfit*) para terceiro e quinto graus. A curva de quinto grau aproxima-se mais do comportamento obtido com a *spline* cúbica.



O Matlab possui uma função nativa chamada *interp1*, que possibilita escolher o método de interpolação a ser utilizado. A curva em linha contínua foi obtida com o método *pchip* – interpolação cúbica hermitiana por partes.

Em comparação com a *spline* cúbica, a interpolação cúbica hermitiana por partes não garante a continuidade na derivada de segunda ordem. Isto pode ser um problema em funções com mudanças abruptas.

Por outro lado, a implementação da *pchip* leva em consideração o conceito de que os valores interpolados não podem ultrapassar os pontos dados (*shape preserving*).

Voltando ao exercício proposto, percebe-se que a *pchip* leva vantagem sobre a *spline* no trecho antes da inversão da polaridade. Neste trecho não existem valores menores que -10 V, conforme mostrado pela *spline*. Para o segundo trecho, após a inversão da tensão, a *spline* representa melhor o transitório durante o tempo de acomodação.

Com a melhoria do conhecimento sobre o problema em estudo, pode-se diagnosticar que a melhor estratégia a ser adotada seja a separação dos dados em grupos pequenos, podendo-se aplicar a técnica que melhor se adapta ao comportamento do problema.

### **Resolução assistida por computador**

```
t = [-2 -1 1 2 3 4];
V = [-10 -10 10.5 9.75 10 10];

tt = 1.5;
VV = interp1(t,V,tt,'spline');
% ou
VV = interp1(t,V,tt,'pchip');
```

#### 4.4 Ajuste de curvas com funções senoidais

Em várias áreas da engenharia, principalmente em processamento de sinais, uma série temporal é uma coleção de observações feitas sequencialmente ao longo do tempo.

As funções matemáticas que melhor representam repetições temporais são o seno e cosseno. De forma geral, tem-se:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t + \theta) + b_1 \sin(\omega t + \theta) + \cdots + a_m \cos(m\omega t + \theta) + b_m \sin(m\omega t + \theta) \quad (4.19)$$

onde  $a_0$  determina a altura média acima ou abaixo da abscissa, os coeficientes de expansão  $a_{1\dots m}$  e  $b_{1\dots m}$  especificam as alturas máximas das oscilações,  $\omega$  é a frequência com que os ciclos ocorrem e  $\theta$  parametriza a extensão pela qual as curvas estão deslocadas horizontalmente.

Para  $N$  dados igualmente espaçados, os coeficientes  $a_{1\dots m}$  e  $b_{1\dots m}$  podem ser calculados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum f(t)}{N} \\ a_k &= \frac{2}{N} \sum f(t) \cos(k\omega t) \\ b_k &= \frac{2}{N} \sum f(t) \sin(k\omega t) \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4.20)$$

Assim, se obedecido o critério de  $N > 2m + 1$ , tem-se um ajuste de dados semelhante à regressão – ajuste por mínimos quadrados de uma curva senoidal. Se  $2m+1$  é igual ao número de pontos dados ( $N$ ), esta abordagem é chamada de série de Fourier contínua e será tratada mais à frente.

### O problema

Mediu-se, sem muita precisão, a saída de uma fonte de tensão senoidal com frequência de 60Hz:

t	0	0,0021	0,0042	0,0062	0,0083	0,0104	0,0125	0,0146	0,0167
V	0	220	311	220	0	-220	-311	-220	0

Determine o polinômio que bem represente tal comportamento.

Aqui,  $N = 9$  e  $\sum f(t) = 0$ . Assim,  $A_0 = 0$ .

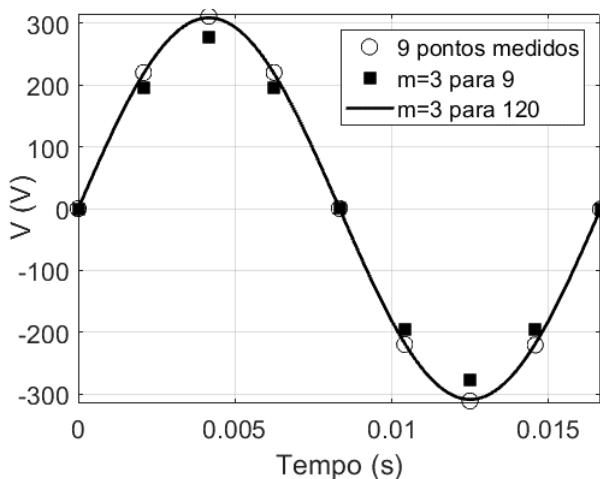
Para  $m = 1$ :

$$V(t) = 0 + 0,3475 \cos(\omega t) + 276,5440 \sin(\omega t)$$

Para  $m = 3$ :

$$V(t) = 0 + 0,3475 \cos(\omega t) + 276,5440 \sin(\omega t) - 0,0004 \cos(2\omega t) \\ - 0,1738 \sin(2\omega t) - 0,0003 \cos(3\omega t) - 0,0739 \sin(3\omega t)$$

A figura apresenta os 9 pontos medidos e os 9 pontos calculados com  $m = 3$  coeficientes de expansão.



Com  $m = 1$  ou  $3$ , os valores calculados são próximos e apresentam um erro considerável quanto à amplitude do sinal. Lembrando que  $m = 3$  é o limite imposto por  $N > 2m + 1$ .

Uma maneira de melhorar a precisão é aumentar a taxa de amostragem do sinal.

O teorema de Nyquist–Shannon afirma que um sinal analógico que foi amostrado pode ser recuperado somente se a taxa de amostragem for maior que duas vezes a sua frequência ( $f$ ) [3].

Porém, se um sinal contiver uma componente exatamente na frequência de operação, e as amostras são espaçadas de exatamente  $1/(2f)$ , não se consegue recuperar totalmente o sinal.

A figura apresenta o resultado para  $m = 3$  e 120 amostras igualmente espaçadas de  $1/(2 \times 60)$ . O erro aqui é menor que 1%:

$$\begin{aligned} V(t) = & 0 - 0,0062 \cos(\omega t) + 308,5316 \operatorname{sen}(\omega t) - 0,0062 \cos(2\omega t) \\ & - 0,0002 \operatorname{sen}(2\omega t) - 0,0062 \cos(3\omega t) - 0,0003 \operatorname{sen}(3\omega t) \end{aligned}$$

### Resolução assistida por computador

```
T = 0.01666; t = linspace(0,T,9); w = 2*pi*60; n = length(t);
y = [0 220 311 220 0 -220 -311 -220 0];
sy = sum(y); A0 = sy/n; m=3;
for k=1:m
    for i=1:n
        ycos(i) = y(i)*cos(k*w*t(i));
        ysin(i) = y(i)*sin(k*w*t(i));
    end
    A(k) = (2/n)*sum(ycos);      B(k) = (2/n)*sum(ysin);
end
for k=1:m
    for i=1:n
        f(k,i) = A(k)*cos(k*w*t(i)) + B(k)*sin(k*w*t(i));
    end
end
for i=1:n
    ff(i) = A0 + sum(f(:,i));
end
```

## 4.5 Série de Fourier

Série de Fourier é uma representação trigonométrica com senos e cossenos usada para representar funções periódicas complexas. Quando essas funções são infinitas, usa-se série de Fourier contínua. Quando essas funções não se repetem com periodicidade, ou se repetem, mas sem intervalos de tempos regulares, utiliza-se a transformada de Fourier discreta (TFD) [3]. Exemplos de problemas sem periodicidade ou regularidade são os transitórios e descargas elétricas.

### Série de Fourier Contínua

De forma muito semelhante ao ajuste de curvas com funções senoidais, partindo da eq. (4.20), a série de Fourier pode ser escrita como:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \quad (4.21)$$

onde a frequência angular do primeiro modo ( $k=1$ ) é chamada de frequência fundamental, e os seus múltiplos constantes ( $k=2,3,\dots$ ) são chamados de harmônicos. Os coeficientes da eq. (4.21) podem ser assim calculados:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad e \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \end{aligned} . \quad (4.22)$$

Usando a fórmula de Euler ( $e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j\sin(\theta)$ ), obtém-se uma forma mais compacta para expressar a série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} \quad \text{onde} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt . \quad (4.23)$$

### Integral e Transformada de Fourier

A transição de uma função periódica para uma expressão não periódica pode ser feita permitindo-se que o período tenda ao infinito. Partindo-se da eq. (4.19):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad e \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.24)$$

$F(\omega)$  é chamada de transformada de Fourier de  $f(t)$ . E  $f(t)$  é a transformada de Fourier inversa de  $F(\omega)$ . Este par de funções permite transformar para o domínio do tempo e da frequência um sinal não periódico.

### Transformada de Fourier Discreta (TFD)

Em geral, na engenharia elétrica, as funções são representadas por um conjunto finito de valores discretos – conforme exemplo do problema proposto no início desta seção. A TFD pode ser escrita como:

$$F_k = \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-jk\omega i} \text{ para } k = 0 \text{ a } N-1 \quad (4.25)$$

e a transformada inversa de Fourier como

$$f_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk\omega i} \text{ para } i = 0 \text{ a } N-1 \text{ onde } \omega = \frac{2\pi}{N}. \quad (4.26)$$

### Resolução assistida por computador

```
T = 0.01666; t = linspace(0,T,9); w = 2*pi*60;
y = [0 220 311 220 0 -220 -311 -220 0];
n = length(t); fft(y,n-1); % ifft(y,n-1);
```

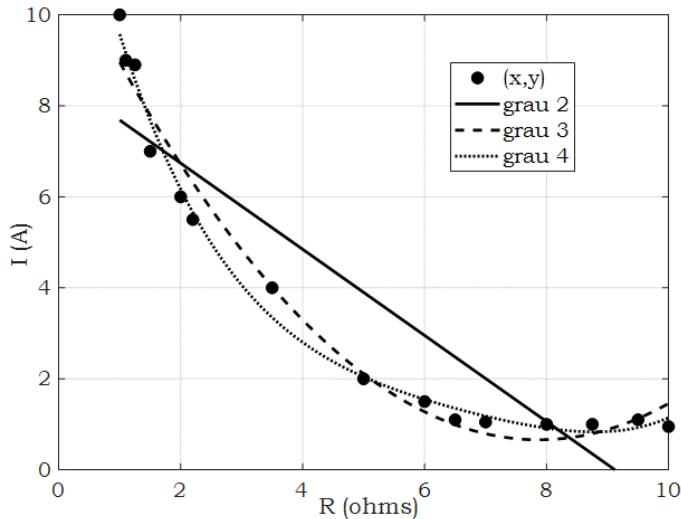
FFT é *fast-fourier transform*, uma variação da eq. (4.22). IFFT é *inverse fast-fourier transform*, variação de eq. (4.23).

#### 4.6 Exercícios propostos

1. Uma medição de aterramento chegou aos valores apresentados na tabela. Entendendo que esses valores são pouco precisos, trace a curva que melhor represente o comportamento das medições. Discuta sobre a correção dos dados as curvas traçadas.

Resposta por regressão: a curva contínua com  $n=2$ ; curva tracejada com  $n=3$  e curva pontilhada com  $n=4$ .

R ( $\Omega$ )	I (A)
1	10
1,1	9
1,25	8,9
1,5	7
2	6
2,2	5,5
3,5	4
5	2
6	1,5
6,5	1,1
7	1,05
8	1
8,75	1
9,5	1,1
10	0,95



2. A medição de alguns pontos de uma curva de saturação magnética ( $B_x H$ ) num processo de desmagnetização do ferrite MnZn3c15 é [4]:

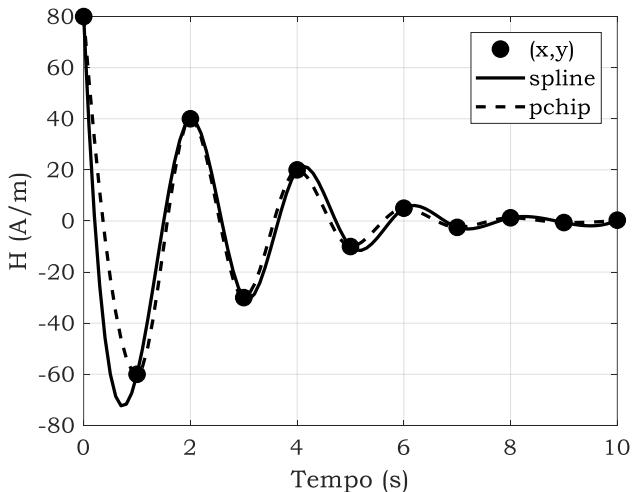
H ( A/m )	-50	-5	5	75
B ( mT )	-300	-50	180	350

Determine o valor da indução magnética para  $H = 0$  A/m.

Resposta: por Newton,  $B = 62,8139$  mT;  
 por Lagrange,  $B = 62,8139$  mT;  
 por interpolação polinomial,  $n=2$ ,  $B = 68,5933$  mT  
 $n=3$ ,  $B = 62,8139$  mT.

3. Determine o polinômio que melhor represente o processo de desmagnetização do ferrite MnZn3c15, dado o seguinte comportamento:

$H(A/m)$	$T(s)$
80	0
-60	1
40	2
-30	3
20	4
-10	5
5	6
-2,5	7
1,25	8
-0,625	9
0,3125	10



Resposta:

curva contínua foi obtida por spline e a curva tracejada por *pchip*. Percebe-se aqui que a *pchip* não extrapola os valores dos dados medidos.

O comportamento deste problema remete às funções de Bessel. Elas são comumente encontradas nos problemas que envolvam o eletromagnetismo e o processamento de sinais, por exemplo.

4. Produza uma onda com frequência de 60Hz ( $\omega = 377\text{rad/s}$ ) e valor máximo de 311, onde a parte negativa da onda é rebatida para o quadrante positivo. A onda tem valor nulo enquanto o ângulo da onda original estiver menor que  $15^\circ$  e entre  $\pi$  e  $(\pi + 15^\circ)$ .

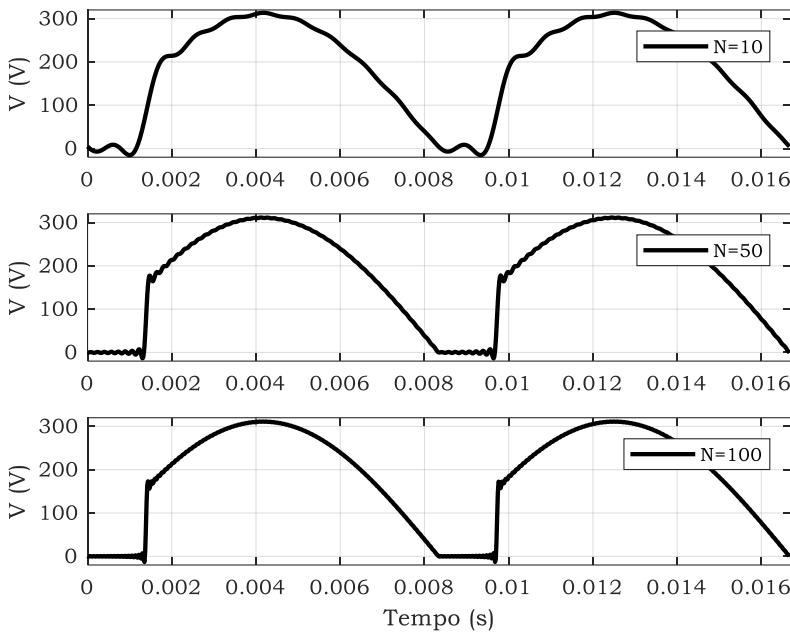
Resposta:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{n/(6 \times 377)}^{n/(377)} 311 \sin(377t) dt = 184,7260$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{311}{\pi} \left( \frac{1}{2n-1} \left( \cos(\pi(2n-1)) - \cos\left(\frac{\pi}{6}(2n-1)\right) \right) \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{2n-1} \left( -\cos(\pi(2n+1)) + \cos\left(\frac{\pi}{6}(2n-1)\right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{311}{\pi} \left( \frac{1}{2n-1} \left( \cos(\pi(2n-1)) - \sin\left(\frac{\pi}{6}(2n-1)\right) \right) \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{2n+1} \left( -\sin(\pi(2n+1)) + \sin\left(\frac{\pi}{6}(2n-1)\right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$



## 4.7 Referências básicas

- [1] REAMAT, Cálculo Numérico – Um Livro Colaborativo, UFRGS. 2019. [online] [www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico](http://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico)
- [2] C. de Boor. A Practical Guide to Splines. Springer-Verlag, New York: 1978. ISBN 9780387953663.
- [3] LATHI, B. P., Sinais e Sistemas Lineares. 2a ed. São Paulo: Prentice-Hall do Brasil, 2007. ISBN 0195185334.
- [4] L. A. de Almeida, G. S. Deep, A. M. N. Lima, H. Neff, Um modelo diferencial para histerese magnética: representação algébrica recursiva, Controle & Automação, vol. 14, n. 1, 2003.

#### 4.8 Referências complementares – Aplicações

- [1] L. Knockaert, "Multinomial Lagrange-Bernstein approximants," in IEEE Signal Processing Letters, vol. 13, no. 6, pp. 333-336, June 2006. doi: 10.1109/LSP.2006.871719
- [2] Y. Zhang and C. Shang, "Combining Newton interpolation and deep learning for image classification," in Electronics Letters, vol. 51, n. 1, pp. 40-42, 8 1 2015. doi: 10.1049/el.2014.3223.
- [3] M. Shakiba, E. Sundararajan, A. Zavvari and M. Islam, "Cubic spline-based tag estimation method in RFID multi-tags identification process," in Canadian Journal of Electrical and Computer Engineering, vol. 36, no. 1, pp. 11-17, 2013. doi: 10.1109/CJECE.2013.6544467
- [4] M. Heideman, D. Johnson and C. Burrus, "Gauss and the history of the fast Fourier transform," in IEEE ASSP Magazine, vol. 1, no. 4, pp. 14-21, 1984. doi: 10.1109/MASSP.1984.1162257.
- [5] D. BARBOSA, R. M. MONARO et al. "Filtragem adaptativa para a estimação da frequência em sistemas elétricos de potência". in SBA Controle & Automação, vol.19, n.2, pp.226-234, 2015.
- [6] A. P. Lopes, M. de J. dos S. Costa, Comparação entre métodos de aproximação numérica utilizando o programa Matlab, Revista Margens, ISSN: 1982-5374, v.11, n. 17, pp. 245-258, 2017.

# *Integração numérica*

No início de qualquer curso de graduação em engenharia, estuda-se cálculo diferencial e integral. A derivada representa a taxa de variação de uma variável dependente com relação a uma independente. A ideia é usar diferenças para quantificar um processo instantâneo.

A integração é o oposto. O objetivo pressupõe a soma de informações instantâneas para fornecer um resultado total ao longo de um intervalo, obtendo-se a área ou o volume de figuras geométricas.

A obtenção de derivadas e integrandos por métodos analíticos em problemas complexos usualmente pressupõe grande esforço, quando possível.

Matematicamente, a integração (definida) é representada por:

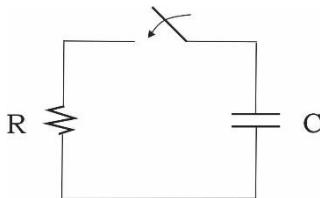
$$Int = \int_a^b f(x) dx , \quad (5.1)$$

que indica a integral da função  $f(x)$  em relação à variável independente  $x$ , avaliada entre os limites  $a$  e  $b$  [1].

Neste capítulo primeiro apresenta-se as fórmulas de integração numérica por Newton-Cotes [2]. Elas são técnicas que utilizam um conjunto de pontos amostrados, sejam reais ou estimados por polinômios de interpolação. Em seguida, discutem-se fórmulas de integração numéricas que utilizam funções diretamente.

## O problema

A resposta natural de um circuito RC é dada por:



$v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ ,  $t \geq 0$  onde  $V_0$  é a tensão inicial no capacitor e  $\tau$  é a constante de tempo para o circuito, dado por  $\tau = RC$ . Sendo a corrente obtida por  $i(t) = v(t)/R$ , pode-se calcular a potência da seguinte forma:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{1}{R} (V_0 \cdot e^{-t/\tau})^2 = \frac{V_0^2}{R} (e^{-2t/\tau}) \text{ [W]} \quad [3].$$

A energia envolvida pode ser calculada integrando

$$\omega = \int_0^t p(t) dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^t (e^{-2t/\tau}) dt \text{ [J]}.$$

Por fim, a potência média é dada por:

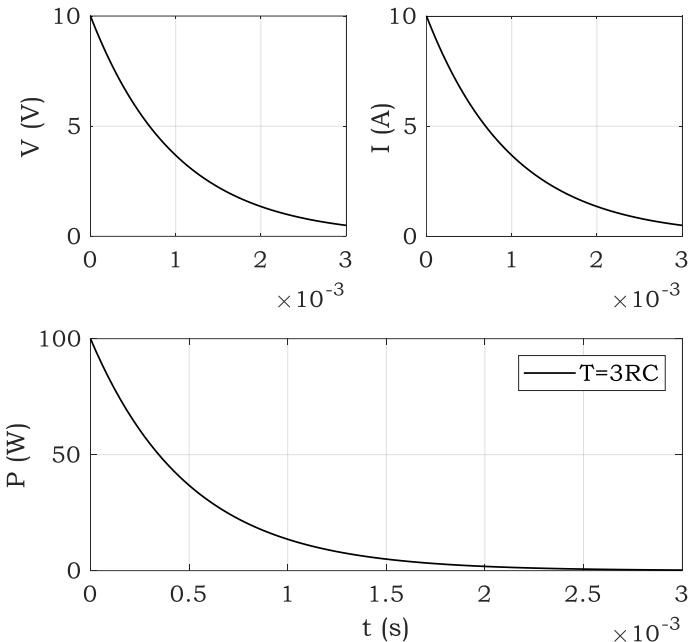
$$P_{med} = \frac{\omega}{t} = \frac{V_0^2}{R} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t (e^{-2t/\tau}) dt \text{ [W]}.$$

Analiticamente, considerando  $R = 1\Omega$ ,  $C = 0,001F$ ,  $V_0 = 100V$  e  $\tau = 3RC$ , obtém-se o comportamento:

$$\omega = \frac{V_0^2}{R} \int_0^{3\tau} (e^{-2t/\tau}) dt = 0,0499 \text{ [J]}.$$

$$P_{med} = \frac{\omega}{3\tau} = 16,6254 \text{ [W]}.$$

A energia ( $\omega$ ) é a área sob a curva  $P \times t$ . O cálculo desta área é a sua integral. A figura a seguir ilustra o presente exercício.



Obviamente, a resolução analítica é possível dada a simplicidade do circuito em análise. Em circuitos mais complexos, pode-se fazer uso de integrais numéricas.

### 5.1. Fórmulas de integração numérica por Newton-Cotes

As fórmulas de Newton-Cotes, ou regras de Newton-Cotes, são um grupo de fórmulas para integração numérica (também chamadas de quadratura) baseadas na avaliação do integrante em pontos igualmente espaçados. O mais comum é basear na estratégia de substituir uma função complicada ou um conjunto de dados tabulados por um polinômio, como por exemplo:

$$\text{Int} = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_n(x) dx \quad \text{onde } f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad (5.2)$$

e o integrar por partes, conforme ilustra a figura 5.1.

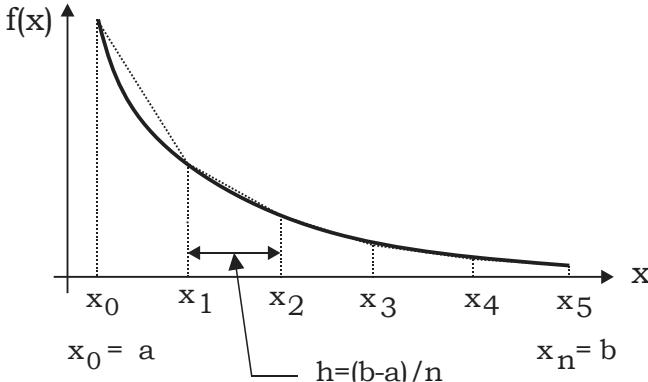


Figura 5.1. Integração por partes.

Existem  $n + 1$  pontos igualmente espaçados  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Assim, existem  $n$  segmentos de largura ( $h = (b - a)/n$ ). Se  $a = x_0$  e  $b = x_n$ , a integral total pode ser representada por:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx,$$

substituindo cada integral pela equação de área de um trapézio, tem-se:

$$Int = h \frac{(f(x_0) - f(x_1))}{2} + \dots + h \frac{(f(x_{n-1}) - f(x_n))}{2}. \quad (5.3)$$

Agrupando-se os termos, pode-se obter a forma geral da Regra do Trapézio Múltipla:

$$Int = (b - a) \frac{f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}. \quad (5.4)$$

### Resolução assistida por computador

```
R = 1; C = 0.001; Vo = 10; TAL = R*C;
t = linspace(0,3*TAL,7);
Vc = Vo*exp(-t./(TAL));
Ic = (Vo*exp(-t./(TAL)))/R;
P = Vc.*Ic;
Pmed = Vo^2/(6*R) * [-exp(-6)+1];
w = C*Vo^2/2 * [-exp(-6)+1];

% trapézio
a = t(1);           b = t(end);      % limites
n = 150;             % número de segmentos
x = a;
h = (b-a)/n;
ff = @(x) (10*exp(-x./0.001))^2
Ianalitico = w; s = ff(x);
for i = 1:(n-1)
    x = x+h;
    s = s + 2*ff(x);
end
s = s + ff(b);
P = (b-a) * s/(2*n);
w = P
Pmed = w/(3*TAL)
Erro = (Ianalitico - P)/Ianalitico
```

O MatLab possui biblioteca para a integração numérica por Newton-Cotes, chamada *trapz*.

A tabela a seguir apresenta os resultados do problema proposto pelo método de integração numérica do trapézio. Percebe-se que quanto maior o número de pontos, por tantas divisões ( $n$ ), maior será a precisão da solução encontrada.

Para se obter mais pontos, pode-se optar pela técnica de ajustes de curvas mais adequada, conforme visto no capítulo anterior.

Como os valores analíticos são conhecidos, o erro pode ser calculado por  $E = 100\%(real - estimado)/real$ . Outra maneira pode ser a comparação direta entre as soluções obtidas para diferentes  $n$ .

<i>n</i>	<i>h</i> (s)	<i>w</i> [J]	<i>Pmed</i> [W]	<i>Erro (%)</i>
2	0,00150	0,0827	27,5513	65,72
10	0,00030	0,0514	17,1212	2,9822
50	0,00006	0,0499	16,6453	0,1200

Existem muitos outros métodos para realizar integração numérica. A tabela 5.1. apresenta os mais conhecidos. Para todos os citados, o passo é dado por  $h = (b - a)/n$ . O erro de truncamento pode ser calculado utilizando a informação da derivada de ordem superior do ponto qualquer ( $\xi$ ) entre a e b.

Tabela 5.1. Métodos para Integração Numérica [1].

Fórmula	Truncamento
Trapézio (n=2)	
$(b - a) \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}$	$-(1/12)h^3 f''(\xi)$
1/3 Simpson (n=3)	
$(b - a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$	$-(1/90)h^5 f^{(4)}(\xi)$
3/8 Simpson (n=4)	
$(b - a) \frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$	$-(3/80)h^5 f^{(4)}(\xi)$
Boole	
$(b - a) \frac{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)}{90}$	$-(8/945)h^7 f^{(6)}(\xi)$

## 5.2. Fórmulas de Integração de Funções

As técnicas apresentadas na seção anterior utilizam um conjunto de pontos amostrados, sejam reais (medidos) ou estimados por polinômios de interpolação. Certamente adequados, tais métodos são

custosos e podem acrescentar erros devidos à interpolação. Existindo uma função confiável, é possível gerar tantos valores quanto forem necessários para se alcançar a precisão desejada.

Existem muitos métodos de integração numérica a partir de funções, como por exemplo: a integração de Romberg, que utiliza a extração de Richardson; e as fórmulas de Gauss-Legendre e Gauss-Hermite [1][2].

Aqui será apresentada a técnica chamada de Quadratura Adaptativa [2]. O diferencial desta proposta é a possibilidade de ajuste automático do intervalo de integração ( $h$ ) de acordo com variações abruptas da função em estudo. Em regiões com gradiente pequeno, passos largos. Em regiões com gradiente grande, passos refinados. Este procedimento confere maior precisão e velocidade ao cálculo [4].

Partindo da regra 1/3 de Simpson, tem-se uma primeira estimativa:

$$\text{Int}(h_1) = \frac{h}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)] \quad (5.5)$$

onde  $h = b - a$  e  $c = (a + b)/2$ .

Uma estimativa mais refinada pode ser obtida pela metade do tamanho do passo, por exemplo com aplicação da regra 1/3 de Simpson com n=4:

$$\text{Int}(h_2) = \frac{h}{12} [f(a) + 4f(d) + 2f(c) + 4f(e) + f(b)] \quad (5.6)$$

onde  $d = (a + c)/2$  e  $e = (c + b)/2$ .

De forma a melhorar ainda mais a estimativa, com resultado equivalente à regra de Boole, pode-se utilizar:

$$\text{Int} = \text{Int}(h_2) + \frac{1}{15} [\text{Int}(h_1) + \text{Int}(h_2)]. \quad (5.7)$$

## Resolução assistida por computador

```

a = 0; b = 0.003;
c = (a+b)/2; tol = 1*exp(-6);
f = @(x) (10*exp(-x./0.001))^2
fa = feval(f,a); fb = feval(f,b); fc = feval(f,c);
q = quadsetp(f,a,b,tol,fa,fc,fb)
function q = quadsetp(f,a,b,tol,fa,fc,fb);
    h = b-a; c = (a+b)/2;
    fd = feval(f, (a+c)/2); fe = feval(f, (c+b)/2);
    q1 = h/6 * (fa + 4*fc + fb);
    q2 = h/12 * (fa + 4*fd + 2*fc + 4*fe + fb);
    if abs(q2-q1) <= tol
        q = q2 + (q2 - q1)/15;
    else
        qa = quadsetp(f,a,c,tol,fa,fd,fc);
        qb = quadsetp(f,c,b,tol,fc,fe,fb);
        q = qa + qb;
    end
end

```

O MatLab possui biblioteca para a integração numérica por funções, chamada *quad*.

Para o circuito elétrico RC proposto, com tolerância de  $10^{-6}$ , chega-se a  $w = 0,0499$  J em apenas 3 ações recursivas.

Integrais múltiplas são bem comuns. Por exemplo, uma integral dupla estuda uma função bidimensional:

$$\int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} f(x,y) dx \right) dy . \quad (5.8)$$

Analiticamente, primeiro se integra a função em uma dimensão. Após esse resultado é integrado na segunda dimensão.

Numericamente se faz o mesmo. O MATLAB possui funções nativas para integrais duplas (*dblquad*) e triplas (*triplequad*).

### 5.3. Exercícios propostos

- Calcule numericamente o valor eficaz de  $V(t) = 311\sin(377t + 0^\circ)V$ .

Resposta: valor eficaz é o equivalente contínuo que gera o mesmo trabalho que o sinal alternado. Assim, a simples integral do sinal senoidal no intervalo de período reportará  $V_{med} = 0$ . Uma forma de tratar isto é:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{311^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(377t) dt} = \sqrt{\frac{311^2}{2\pi} Int}$$

Método	Pontos	Int	Vef
Trapézio	4	3,1416	219,9102
Quad	-	3,1416	219,9102

- A(o) engenheira(o) foi à bancada do laboratório e obteve os dados de tensão e corrente. Assim, ele pode calcular e conhecer a potência instantânea. Aplique um método de integração numérica e calcule a potência média no período entre [1 a 2] segundos.

t (s)	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
V (V)	10	6,10	3,70	2,25	1,42	0,78	0,50
I (A)	10	6,05	3,65	2,25	1,40	0,80	0,50
P (W)	100	36,90	13,50	5,06	1,99	0,62	0,25

Resposta:

$$\begin{aligned}P(t) = & 0,5582t^6 - 6,6480t^5 + 34,2689t^4 - 100,5233t^3 + 181,5979t^2 - 195,7537t \\& + 100\end{aligned}$$

Por trapézio, com  $n = 90$ ,  $P_{med} = 5,9263$ .

Por trapézio, com  $n = 100$ ,  $P_{med} = 5,9262$ .

Por quadratura adaptativa, com 1 ação recursiva,  $P_{med} = 5,9262$ .

#### 5.4. Referências básicas

- [1] P. J. Davis and P. Rabinowitz, Methods of Numerical Integration (Computer Science & Applied Mathematics), 2<sup>nd</sup> ed., Academic Press, 2014. ISBN: 9781483237961.
- [2] C. B. Moler, Numerical Computing with Matlab, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. ISBN: 9780898716603.
- [3] J. W. Nilsson and S. A. Riedel, Circuitos Elétricos, 10<sup>a</sup> ed., Pearson, 2016. ISBN 9788543004785.
- [4] W. Gander and W. Gautschi, "Adaptive Quadrature-Revisited," in BIT Numerical Mathematics, vol. 40, n. 1, pp. 84-101, 2000. doi: 10.1023/A:1022318402393.

#### 5.5. Referências complementares – Aplicações

- [1] J. S. Savage and A. F. Peterson, "Quadrature rules for numerical integration over triangles and tetrahedra," in IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 38, no. 3, pp. 100-102, 1996. doi: 10.1109/74.511963.
- [2] V. Volskiy, et al., "Numerical integration of Sommerfeld integrals based on singularity extraction techniques and double exponential-type quadrature formulas," in European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP), pp. 3215-3218, 2012. doi: 10.1109/EuCAP.2012.6205950.
- [3] T. Karvonen and S. Särkkä, "Classical quadrature rules via Gaussian processes," in International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP), pp. 1-6. 2012. doi: 10.1109/MLSP.2017.8168195

# Derivação numérica

A derivação é usual na engenharia. Na grande maioria dos casos, o entendimento de seu comportamento pressupõe a distinção da mudança de grandezas físicas no tempo e no espaço.

Por exemplo, o vetor densidade de corrente elétrica ( $\mathbf{J}$ ) pode ser equacionada como a proporcionalidade da condutividade elétrica ( $\sigma$ ) do meio condutor e a variação da tensão elétrica ( $dV/dt$ ), desta forma [1]:

$$J = -\sigma \frac{dV}{dt}. \quad (6.1)$$

Matematicamente, a derivada representa a taxa de variação de uma variável dependente com relação a uma variável independente.

Aqui será apresentada uma formulação de diferença finita centrada e noções de gradiente. A resolução de equações diferenciais ordinárias ou parciais será apresentada em capítulos à parte.

## O problema

A lei de Faraday determina que a tensão em um indutor ( $V$ ) é dada por:

$$V_L = L \frac{di}{dt},$$

onde  $L$  é a indutância ( $H$ ),  $i$  é a corrente ( $A$ ) e  $t$  é o tempo ( $s$ ) [1].

Determine a tensão em função do tempo a partir dos valores medidos da corrente para um  $L = 0,1\text{H}$ .

$t$ (s)	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$i$ (A)	0	1,00	3,00	5,00	8,50	20,00

### 6.1. Fórmulas de derivação

As expansões de série de Taylor são comumente utilizadas como fórmulas de diferença finita. Aqui, é apresentada a fórmula de diferença dividida centrada de Taylor, entretanto, destaca-se que existem ainda fórmulas progressivas e regressivas ao ponto em estudo [2][3].

Por óbvio, quanto mais termos da expansão, mais acurado será a solução.

Primeira Derivada

Erro

$$f'(x_i) = (f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))/2h \quad O(h^2)$$

$$f'(x_i) = (-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))/12h \quad O(h^4)$$

Segunda Derivada

$$f''(x_i) = (f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))/h^2 \quad O(h^2)$$

$$f''(x_i) = (-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))/12h^2 \quad O(h^4)$$

$$- f(x_{i-2}))/12h^2$$

### Terceira Derivada

$$f'''(x_i) = (f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))/2h^3 \quad O(h^2)$$

$$f'''(x_i) = (-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) \quad O(h^4)$$

$$- 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3}))/8h^3$$

$h$  é o passo de cálculo.

Quando o passo de cálculo é desigualmente espaçado, pode-se ajustar um polinômio de Lagrange de segundo grau para três pontos adjacentes. A diferenciação do polinômio resulta em:

$$\begin{aligned} f'(x) = & f(x_1) \frac{(2x - x_2 - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + f(x_2) \frac{(2x - x_1 - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \\ & + f(x_3) \frac{(2x - x_1 - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_1)} \end{aligned} \quad (6.2)$$

As vantagens de se usar Lagrange ao invés da expansão de Taylor, muito embora mais custosa computacionalmente, é que se pode obter uma estimativa da derivada em qualquer lugar do intervalo determinado pelos três pontos, com precisão e para passos de cálculo iguais ou não.

Uma outra dificuldade de qualquer método de derivação numérica é a amplificação de erros nos dados. Em engenharia, particularmente em dados de medidas em laboratório, o erro na medição é comum.

A figura 6.1 ilustra essa preocupação: (a) dados sem erros, (b) a derivação numérica resultante da curva (a), (c) dados ligeiramente modificados, e (d) a derivação resultante da curva (c) manifestando um aumento da variabilidade.

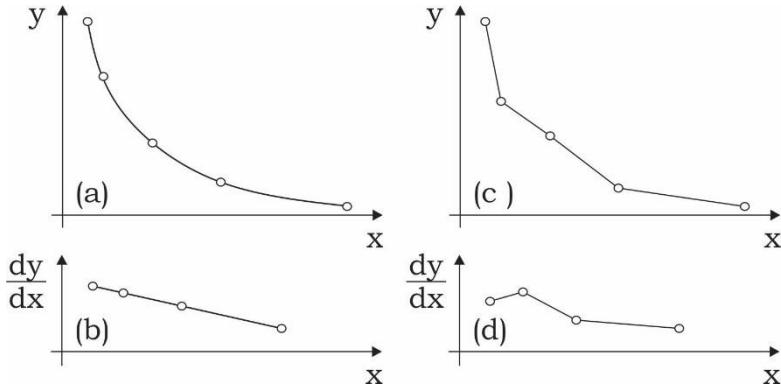


Figura 6.1. Preocupação com a precisão dos dados para derivação.

**Resolução assistida por computador**

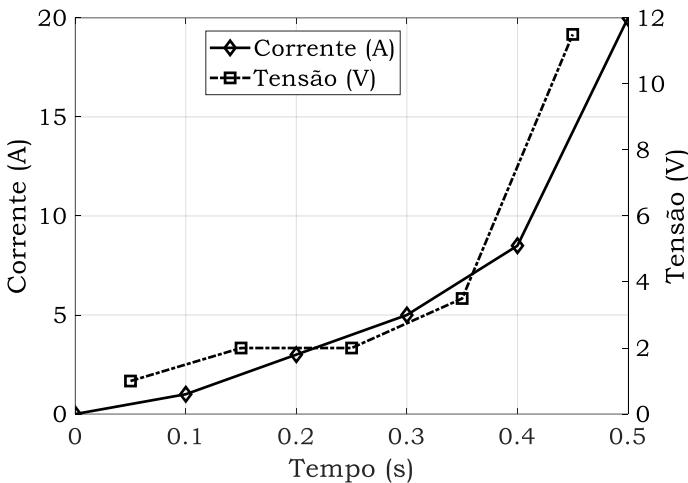
```
t = [ 0 0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 ];
I = [0 1 3 5 8.50 20];
% derivação
d = diff(I) ./ diff(t)
L = 0.1;
V = L*d;
```

Para o problema do indutor apresentado e sendo a fórmula de derivação centrada, obtém-se os resultados expostos na tabela. Aqui, acontece perda de informação. O método utilizado perde o início e o fim dos dados.

V	0		2		2		3,50		11,5	
I		1		3		5		8,50		20
T	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50

Usando (2), para  $t = 0,15\text{s}$ ,  $I = 2\text{ A}$ .

A figura mostra o comportamento da corrente e da tensão no tempo.



## 6.2. Gradiente

O gradiente é um vetor que indica o sentido e a direção na qual obtém-se o maior incremento de uma função. Assim, o módulo do vetor gradiente indica a taxa de variação do fenômeno em estudo.

O campo vetorial e o operador gradiente possuem diversas aplicações em engenharia. Por exemplo, a partir do gradiente do potencial elétrico determina-se o campo elétrico; e a partir do gradiente da energia potencial determina-se o campo de força associado [4].

A figura e o código a seguir ilustram o fenômeno elétrico existente entre duas cargas elétricas estáticas de valores contrários.

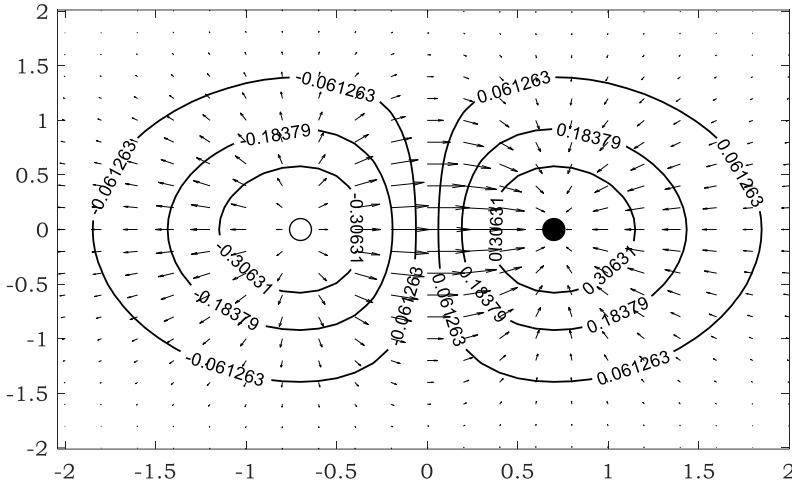
### Resolução assistida por computador

```
% linhas de campo elétrico entre as cargas
[X,Y]=meshgrid(-2:.2:2,-2:.2:2);
E = X.*exp(-X.^2 - Y.^2);
[DX,DY]=gradient(E,.2,.2);
quiver(X,Y,DX,DY,'k');
hold on
% superfícies equipotenciais geradas pelas duas cargas
[X,Y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);
E = X.*exp(-X.^2 - Y.^2);
```

```

contour(X,Y,E,6,'k','ShowText','on'); hold on
% posicionamento das duas cargas
x1=0.70; y1=0; % carga elétrica negativa
x2=-0.70; y2=0; % carga elétrica positiva
plot(x1,y1,'ko','MarkerFaceColor','k','MarkerSize',12)
plot(x2,y2,'ko','MarkerSize',12)

```



### 6.3. Exercícios propostos

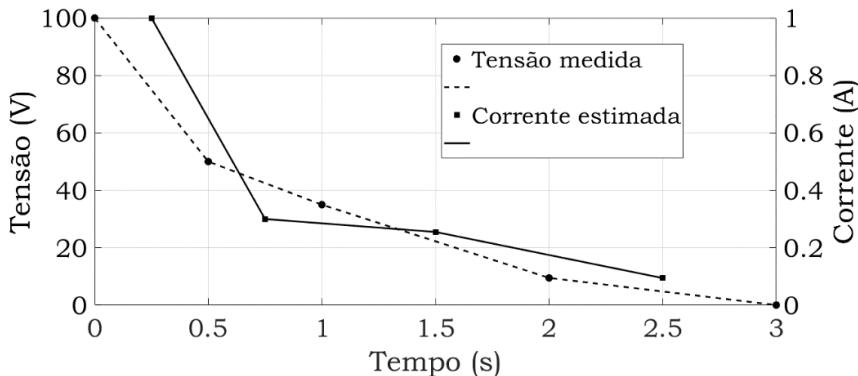
- A corrente em um capacitor ( $I$ ) é dada por [1]:

$$I_c = C \frac{dV}{dt},$$

onde  $C$  é a capacidade (F),  $V$  é a tensão (V) e  $t$  é o tempo (s). Determine a corrente em função do tempo a partir dos valores medidos da tensão para um  $C = 10\text{mF}$ .

$t$ (s)	0	0,50	1	2	3
$V$ (V)	100	50	35	9,50	0,05

Resposta:



2. Refaça o exercício do campo elétrico proposto na seção 6.2, entretanto com as duas cargas sendo negativas.

#### 6.4. Referências básicas

- [1] J. W. Nilsson, S. A. Riedel, Circuitos Elétricos, 10<sup>a</sup> ed., Pearson, 2016. ISBN 9788543004785.
- [2] Numerical Differentiation of Analytic Functions, B Fornberg - ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 1981.
- [3] Y. Zhang, Advanced Differential Quadrature Methods, CRC Press, 2009. ISBN 9781420082487.
- [4] J. P. A. Bastos and N. Ida, Electromagnetics and Calculation of Fields, Springer & Verlag, 2 ed., 2012. ISBN 1461268605.

### **6.5. Referências complementares – Aplicações**

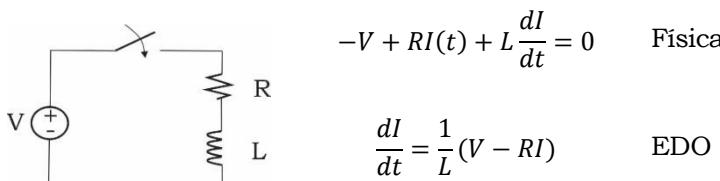
- [1] G. Capizzi, S. Coco and A. Laudani, "Gaussian basis representation FIR filtering for the numerical differentiation of Laplacian FE solutions," in IEEE Transactions on Magnetics, vol. 38, n. 2, pp. 349-352, 2012. doi: 10.1109/20.996094
- [2] S. Coco and A. Laudani, "Numerical differentiation of Laplacian 3-D FE solutions by using regular polyhedra quadrature of Poisson integrals," in IEEE Transactions on Magnetics, vol. 37, n. 5, pp. 3104-3107, 2001. doi: 10.1109/20.952553.
- [3] M. S. Hosseini and K. N. Plataniotis, "Derivative Kernels: Numerics and Applications," in IEEE Transactions on Image Processing, vol. 26, n. 10, pp. 4596-4611, 2017. doi: 10.1109/TIP.2017.2713950.

# *Equações diferenciais ordinárias*

Em vez de descrever os estados de sistemas físicos diretamente, as leis da física usualmente são dadas em termos de variações temporais e espaciais. Esse tipo de equacionamento, quando composto por uma função desconhecida e suas derivadas, são chamadas de equações diferenciais [1].

Quando a função envolve apenas uma variável independente, a equação é conhecida como equação diferencial ordinária (EDO). Com duas ou mais variáveis independentes, como tempo, temperatura e espaço, chama-se equação diferencial parcial (EDP).

No circuito elétrico ilustrado, a quantidade que está sendo derivada ( $I$ ) é chamada de variável dependente. A quantidade em relação à qual  $I$  é derivada é denominada variável independente ( $t$ ) [2].



$$I_{i+1} = I_i + \frac{1}{L}(V - RI)\Delta t \quad \text{Solução numérica}$$

Além da quantidade de independentes, o comportamento das variáveis independentes também é relevante em qualquer análise.

Um problema é chamado de ‘problema de valor inicial’ quando todas as condições são especificadas para o mesmo valor inicial da variável independente. Caso as condições sejam especificadas para diversos valores diferentes da variável independente, chama-se de ‘problema de valor de contorno’ [1]. A Figura 7.1 ilustra os dois casos.

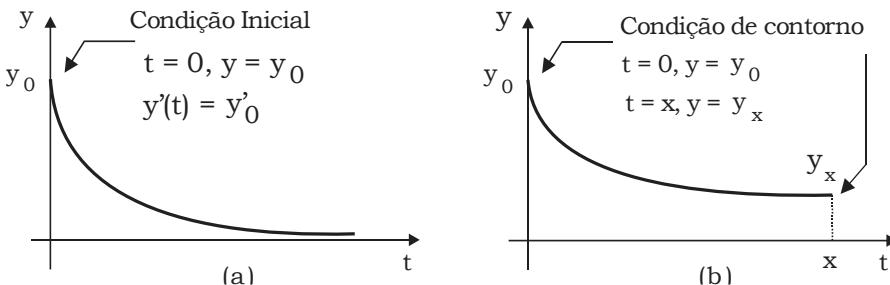


Fig. 7.1. EDO: condição inicial e de contorno.

Este capítulo fica restrito ao estudo de EDO caracterizado como problema de valor inicial. EDP e problemas com condições de contorno serão solucionadas em capítulo específico.

Para o circuito RL proposto, por análise de malha tem-se:

$$-V + R \cdot I(t) + L \frac{dI}{dt} \quad \therefore \quad \frac{dI}{dt} = \frac{1}{L}(V - R \cdot I)$$

onde  $V$  é a tensão na fonte,  $R$  é a resistência ( $\Omega$ ) e  $L$  é a indutância ( $H$ ) [2]. Determine o comportamento de  $I(t)$ .

Os métodos mais comuns resolvem EDO da forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (7.1)$$

e de forma geral, eles possuem a seguinte construção:

$$x_{i+1} = x_i + \phi h \quad (7.2)$$

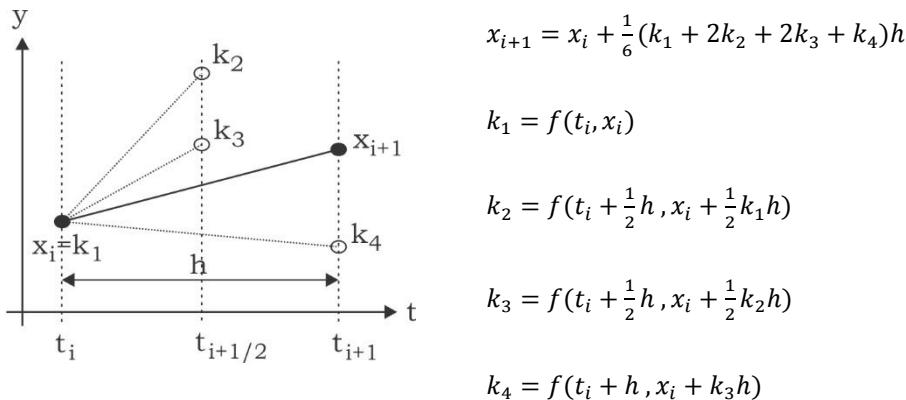
onde  $\phi$  é chamado de função incremento e é utilizado para extrapolar de  $x_i$  para  $x_{i+1}$  em uma distância  $h$  (passo de cálculo).

Esses métodos são chamados de passo único, isto porque o valor da função incremento é baseado na informação de um único ponto  $i$ .

Existem vários métodos de passo único. Aqui será apresentado o Range-Kutta de quarta ordem (RK4) [3]. Ele foi escolhido pois apresenta uma ótima relação acuracidade versus custo computacional.

### 7.1. Método Range-Kutta de 4º ordem

RK4 utiliza o conceito de aproximação proposto por (7.2). A 4º ordem é dada pelos quatro coeficientes utilizados ( $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$ ), estimados da seguinte forma:



**Resolução assistida por computador**

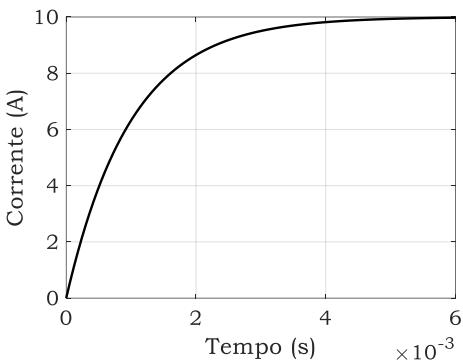
```

V = 10; R = 1; L = 0.001;
tf = 0.006; h = tf/100;
it = 1; i(it) = 0; t(it) = 0;
while t < tf
    k1=(1/L)*(V - R*i(it));
    tx = t(it)+(1/2)*h;
    ix = i(it)+(1/2)*k1*h;
    k2 = (1/L)*(V - R*ix);
    tx = t(it)+(1/2)*h;
    ix = i(it)+(1/2)*k2*h;
    k3 = (1/L)*(V- R*ix);
    tx = t(it)+ h;
    ix = i(it)+ k3*h;
    k4 = (1/L)*(V- R*ix);
    i(it+1) = i(it)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;
    t(it+1)= t(it)+h; it=it+1;
end

```

Para o problema do circuito RL:  
 $V = 10V$ ,  $R = 1\Omega$ ,  $L = 0,001 H$ ,  
L sem energia inicial,  
e tempo final = 6 ms.

Por RK4 com passo de cálculo  
 $h = 0.006/100$ ,  
obtém-se o comportamento da  
corrente ilustrado.

**7.2. Problema com múltiplas EDOs**

Muitos problemas práticos em engenharia exigem a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias simultâneas. A solução exige que sejam conhecidas  $n$  condições iniciais no valor inicial de  $t$ .

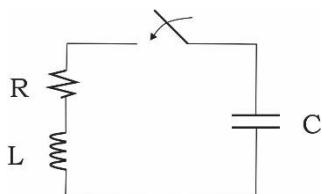
$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (7.3)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

### O problema

Descreva o comportamento da tensão no capacitor e da corrente no circuito para o intervalo de  $t = [0 \text{ } 10] \text{ ms}$ . As condições iniciais são de corrente igual a zero e tensão no capacitor de 100V.



$$V_R + V_L + V_C = 0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

$$EDO's = \begin{cases} \frac{dv}{dt} = y_2 \\ \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}y_2 - \frac{y_1}{LC} \end{cases}$$

### Resolução assistida por computador

```

ti = 0; tf = 0.01;
R = 100; L = 0.100; C = 0.000001;
y0 = [0 100]; h = 1e-6;
t = (ti:h:tf)';
tt = t(1); y = y0; i = 1; np = 1;
tp(np) = tt; yp(np,:) = y(1,:);

```

## Capítulo 7: Equações diferenciais ordinárias

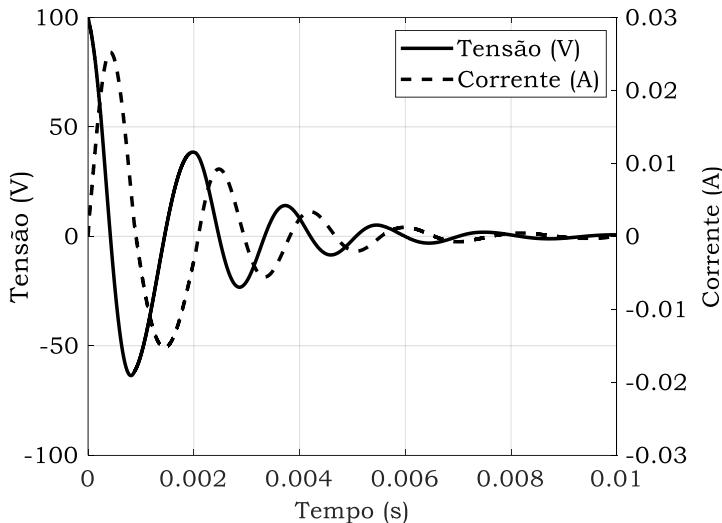
```

while(1)
    tend = t(np+1);
    hh = t(np+1) - t(np);
    if hh>h, hh = h; end
    while(1)
        if tt+hh>tend,hh = tend - tt; end
        k1 = dydt(tt,y(i,:));      ymid = y(i,:) + k1.*hh./2;
        k2 = dydt(tt+hh/2,ymid);  ymid = y(i,:) + k2*hh/2;
        k3 = dydt(tt+hh/2,ymid);  yend = y(i,:) + k3*hh;
        k4 = dydt(tt+hh,yend);
        phi = (k1+2*(k2+k3)+k4)/6;
        y(i+1,:) = y(i,:) + phi*hh;
        tt = tt+hh;    i=i+1;
        if tt>=tend, break, end
    end
    np=np+1; tp(np)=tt; yp(np,:)=y(i,:);
    if tt>=tf, break, end
end

function dy = dydt(t,y)
    dy = [ y(2) ; (-R/L)*y(2)-y(1)/(L*C) ];
end

```

Considerando  $R = 100$ ,  $L = 100\text{mH}$  e  $C = 1\mu\text{F}$ , obtém-se o comportamento explicitado na figura a seguir.



A definição do valor do passo de cálculo ( $h$ ) implica na convergência ou não do método RK, bem como no seu custo computacional. Aqui apresentou-se o RK4 com passo único. Outra classe de métodos, chamados de métodos de passo múltiplo, usa a informação de vários pontos anteriores como base de extrapolação de um novo valor. O passo múltiplo acelera a convergência.

A função nativa do MATLAB *ode45* utiliza o equacionamento de RK de quarta e quinta ordens com estimativas de erro para ajuste do tamanho do passo.

Uma outra dificuldade na resolução de EDOs é o trato de sistemas ditos rígidos. Um sistema é rígido quando envolve variáveis dependentes com comportamentos muito dispare entre si e com relação a variável independente. Essa diferença de comportamento pode dificultar a determinação dos passos de cálculo.

A *ode23*, baseada em múltiplas fórmulas matemáticas, busca lidar melhor com sistemas moderadamente rígidos, necessitando para tal a exigência de baixa precisão em razão de ser de segunda e terceira ordem.

### 7.3. Sistema EDOs rígida

Um circuito magnético é governado pela seguinte equação:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - \mu(1 - y_1^2) \frac{dy_1}{dt} + y_1 = 0.$$

O comportamento deste problema torna-se cada vez mais rígido à medida que  $\mu$  aumenta. O sistema EDOs para este problema fica:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1 = 0 \end{cases}$$

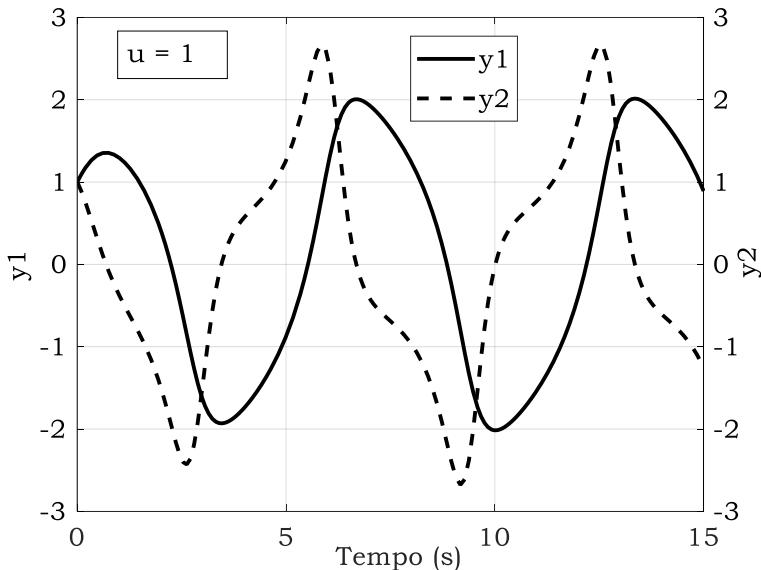
**Resolução assistida por computador**

```
[t,y] = ode45(@EDO,[0 15], [1 1],[],1);
[t,y] = ode23s(@EDO,[0 5000], [1 1],[],1000)

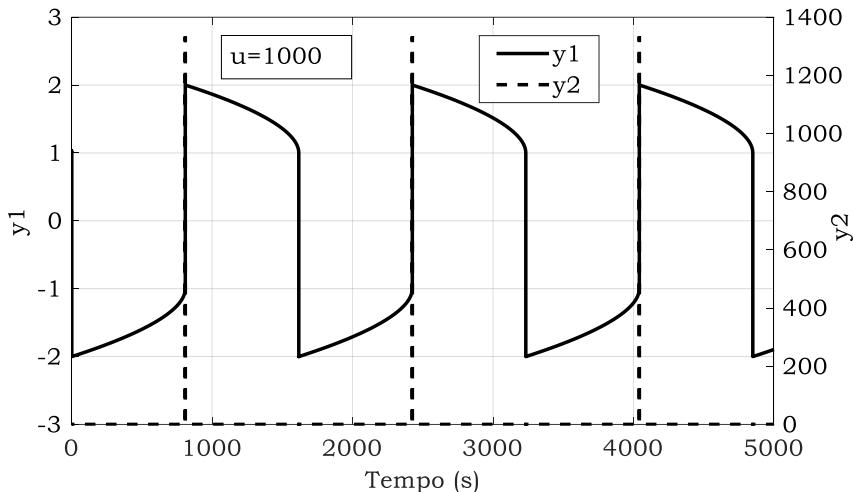
function yp = EDO(t,y,mu)
    yp = [y(2); mu*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1)];
end
```

A condição inicial é  $y_1(0) = dy_1/dt = 1$ . Para  $\mu = 1$ ,  $t = [0 \text{ } 15]\text{s}$ . Para  $\mu = 1000$ ,  $t = [0 \text{ } 5000]\text{s}$ .

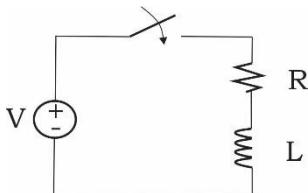
Com  $\mu = 1$ , a suavidade do gráfico sugere que o sistema não é rígido. Para esta situação, tanto a *ode45* quanto a *ode23* produzem resultados similares.



Para  $\mu = 1000$ , apenas a função *ode23* produz resultado satisfatório. É possível perceber a rigidez da solução pelo aparecimento de mudanças bruscas no comportamento das curvas.

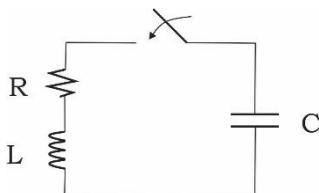


#### 7.4. Exercícios propostos



1. Para um circuito elétrico proposto, onde  $V = 100V$ ,  $R = 10\Omega$ ,  $L = 1 H$ ,  $L$  sem energia inicial. Qual o valor da corrente para o tempo de 1s.

Resp.: 10 A.



2. Para um circuito elétrico proposto, onde  $R = 10\Omega$ ,  $L = 1 H$ ,  $L$  sem energia inicial,  $C = 1\mu F$  e com tensão inicial de 10V. (a) em qual tempo a corrente no circuito chega a zero ( $\pm 0,0005A$ ). (b) qual o valor da tensão no capacitor neste tempo.

Resp.: (a)  $\sim 8$  s. (b)  $\sim 0$  V.

### 7.5. Referências básicas

- [1] W. E. Boyce & R. C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Values Problems, 5 ed., John Wiley & Sons, 1992. ISBN 0471509981.
- [2] J. W. Nilson and S. A. Riedel, Circuitos Elétricos, 8 ed., Ed. Pearson, 2008, ISBN 9788576051596.
- [3] S. C. Chapra, Métodos Numéricos Aplicados com Matlab, 3<sup>rd</sup> Ed. AMGH, 2013. ISBN 9788580551761.

### 7.6. Referências complementares – Aplicações

- [1] R. A. Rink and W. Streifer, “Application of Digital Computers to Solve Analytically a Class of Second-Order Non-linear Ordinary Differential Equations,” in IEEE Transactions on Computers, v.C-20, n. 8, pp. 901-910, 1971. Doi: 10.1109/T-C.1971.223368.
- [2] C. Huang, F. Vahid and T. Givargis, “A Custom FPGA Processor for Physical Model Ordinary Differential Equation Solving”, in IEEE Embedded Systems Letters, vol. 3, n. 4, pp. 113-116, 2011. doi: 10.1109/LES.2011.2170152.

# *Equações diferenciais parciais*

Quando a equação diferencial envolve apenas uma variável independente, a equação é conhecida como equação diferencial ordinária (EDO). A sua solução numérica foi discutida no capítulo anterior. Com duas ou mais variáveis independentes, como por exemplo tempo e espaço, chama-se equação diferencial parcial (EDP).

A EDP para uma função  $u(x_1, \dots, x_n)$  é uma equação de forma [1]:

$$f\left(x_1, \dots, x_n; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}; \dots\right) = 0 , \quad (8.1)$$

se  $f$  é uma função linear de  $u$  e suas derivadas, então a EDP é linear.

Assim como para EDO, aqui também o comportamento das variáveis independentes é relevante. Para EDP, problemas de valor inicial ou valor de contorno devem ser considerados (ver figura 7.1)[2].

Um problema de valor de contorno é um sistema de equações diferenciais, ordinárias ou parciais, dotado de um conjunto de restrições adicionais, chamadas condições de contorno ou de fronteira.

As condições de contorno mais utilizadas na engenharia elétrica são: Dirichlet e Neumann [3]. Dirichlet especifica os valores que uma

solução necessita tomar no contorno do domínio. Já Neumann especifica os valores que a derivada de uma solução deve tomar no contorno do domínio.

A resolução analítica de um sistema EDP de um problema real é usualmente impraticável. São inúmeras as restrições e parâmetros a serem considerados. Assim, para problemas reais, como por exemplo a propagação de onda eletromagnética que parte de uma estação rádio base e viaja até um aparelho de telefonia celular, sujeita por tanto a variações do meio e do tempo, faz-se necessário o emprego de técnicas numéricas elaboradas [4].

Este capítulo fica restrito ao estudo de EDP. Primeiro, são exploradas técnicas para resolução de EDP's, baseadas nas fórmulas de derivação por expansões de série de Taylor ou Lagrange, apresentadas no capítulo 6.

Depois, dá-se destaque a métodos numéricos mais elaborados, baseados em diferenças finitas. São eles: o método de elementos finitos (FEM)[3], o método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) [5] e a modelagem por linhas de transmissão (TLM)[6].

## O problema

Em eletromagnetismo, o campo eletrostático conservativo é dado por  $\vec{E} = -\text{grad}(V)$  [3]. De forma explícita e em duas dimensões  $(x,y)$  pode-se demonstrar que:

$$\frac{d}{dx}\varepsilon\frac{dV}{dx} + \frac{d}{dy}\varepsilon\frac{dV}{dy} = -\rho, \quad (8.2)$$

conhecida como equação de Poisson e que define a distribuição de  $V$  no domínio onde se tem campos eletrostáticos.

A solução desta equação depende das condições de contorno (os potenciais impostos nas fronteiras do domínio), da geometria dos

meios dielétricos existentes, bem como suas permissividades e as cargas estáticas envolvidas.

No caso onde não há cargas elétricas estáticas ( $\rho = 0$ ) e que exista apenas um meio dielétrico constante no domínio de estudo ( $\epsilon$  constante), a equação assume a forma:

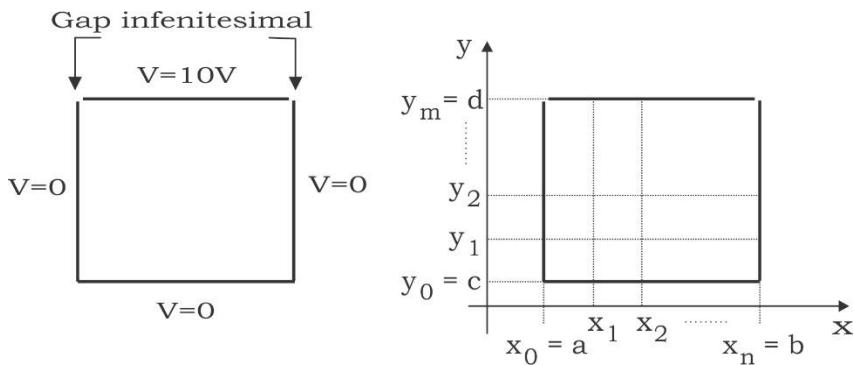
$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0, \quad (8.3)$$

conhecida como equação de Laplace. Aqui, a fonte geradora de campo elétrico é, obrigatoriamente, as condições de contorno pela imposição das diferenças de potencial elétrico.

Soluções analíticas das equações de Poisson e Laplace são custosas e, dependendo da geometria do problema, talvez impraticáveis. Assim, são empregados métodos numéricos baseados em técnicas de diferenças finitas como as séries de Taylor. Ver o capítulo 6, sobre diferenciação numérica.

Determine a distribuição do potencial elétrico  $V$  dentro da caixa:

$$\nabla^2 V(x, y) \equiv \frac{d^2V}{dx^2}(x, y) + \frac{d^2V}{dy^2}(x, y) = f(x, y) \quad (8.4)$$



### 8.1. Método das Diferenças Finitas

A solução numérica por Taylor consiste em determinar valores da função de solução dentro da região. Para tal, divide-se a região em uma malha, com  $n$  quadrados na direção de  $x$  e  $m$  quadrados na direção de  $y$ .

Os pontos  $x_i$  são definidos por  $x_i = a + ih$ , com  $h = (b - a)/n$ . Os pontos  $y_i$  são definidos por  $y_i = a + ik$ , com  $k = (d - c)/m$ . Portanto, exclui-se as linhas de contorno ( $n - 1$ ) no lado  $x$  e ( $m - 1$ ) no lado  $y$ .

Tem-se no total  $(n - 1) \times (m - 1)$  pontos ( $P_{ij}$ ) no interior da região de estudo. Nestes pontos é que se calcula o valor da função solução  $V(x, y)$ .

Assim, a determinação do valor da função ( $V(x, y)$ ) para cada ponto da malha ( $P_{ij} = (x_i, y_j)$ ) dependerá da soma das contribuições nos pontos vizinhos ( $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_j)$ ,  $(x_{i+1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j-1})$  e  $(x_i, y_{j+1})$ ).

Desta forma:

$$V_{(x_{i+1}, y_j)} = V_{(x_i, y_j)} + h \frac{\partial V_{(x_i, y_j)}}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V_{(x_i, y_j)}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^2 V_{(x_i, y_j)}}{\partial x^2} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 V_{(x_i, y_j)}}{\partial x^4}$$

com  $h = x_{i+1} - x_i$  e  $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ .

$$V_{(x_{i-1}, y_j)} = V_{(x_i, y_j)} - h \frac{\partial V_{(x_i, y_j)}}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V_{(x_i, y_j)}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^2 V_{(x_i, y_j)}}{\partial x^2} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 V_{(x_i, y_j)}}{\partial x^4}$$

com  $h = x_{i-1} - x_i$  e  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ .

$$V_{(x_i, y_{j+1})} = V_{(x_i, y_j)} + k \frac{\partial V_{(x_i, y_j)}}{\partial y} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 V_{(x_i, y_j)}}{\partial y^2} + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^2 V_{(x_i, y_j)}}{\partial y^2} + \frac{k^4}{24} \frac{\partial^4 V_{(x_i, y_j)}}{\partial y^4}$$

com  $k = y_{i+1} - y_i$  e  $\mu_j \in (y_i, y_{i+1})$ .

$$V_{(x_i,y_{j-1})} = V_{(x_i,y_j)} - k \frac{\partial V_{(x_i,y_j)}}{\partial y} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 V_{(x_i,y_j)}}{\partial y^2} + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^2 V_{(x_i,y_j)}}{\partial y^2} + \frac{k^4}{24} \frac{\partial^4 V_{(x_i,y_j)}}{\partial y^4}$$

com  $k = y_{i-1} - y_i$  e  $\mu_j \in (y_{i-1}, y_i)$ .

Substituindo as expressões das derivadas segundas discretizadas na equação de Poisson, rearranjando e desprezando o erro  $(\xi, \mu)$ , tem-se a equação de diferenças para o problema proposto.

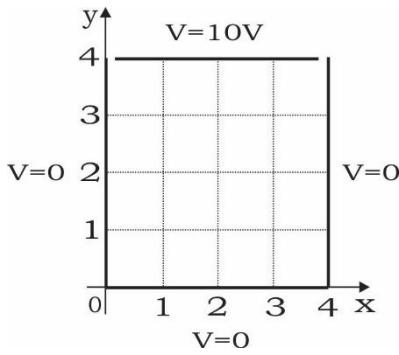
Aqui,  $V_{i,j}$  é a aproximação para  $V_{(x_i,y_j)}$ :

$$2 \left[ \left( \frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] V_{i,j} - (V_{i+1,j} + V_{i-1,j}) - \left( \frac{h}{k} \right)^2 (V_{i,j+1} + V_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_i) ,$$

para  $i = 1, 2, \dots, (n-1)$  e  $j = 1, 2, \dots, (m-1)$  e as condições de contorno:

$V_{i0} = g(x_i, y_0)$  e  $V_{im} = g(x_i, y_m)$  para  $i = 1, 2, \dots, (n-1)$

$V_{0j} = g(x_0, y_j)$  e  $V_{nj} = g(x_n, y_j)$  para  $j = 1, 2, \dots, (m-1)$



Se o problema for dividido da forma como ilustrado, tem-se 9 pontos de malha. Para cada um desses 9 pontos deve-se formular uma equação, conforme apresentado.

$$\begin{array}{lll} P_1 = (x_1, y_3) & P_2 = (x_2, y_3) & P_3 = (x_3, y_3) \\ P_4 = (x_1, y_2) & P_5 = (x_2, y_2) & P_6 = (x_3, y_5) \\ P_7 = (x_1, y_1) & P_8 = (x_2, y_1) & P_9 = (x_3, y_1) \end{array}$$

As equações resultam no seguinte sistema:

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc|c|c|c} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{13} & 10 & V_{13} & 4,2823 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{23} & 10 & V_{23} & 5,2611 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & V_{33} & 10 & V_{33} & 4,2278 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & V_{12} & 0 & V_{12} & 1,8683 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & V_{22} & 0 & \therefore V_{22} & 2,4843 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & V_{32} & 0 & V_{32} & 1,8503 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & V_{11} & 0 & V_{11} & 0,7064 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & V_{21} & 0 & V_{21} & 0,9575 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & V_{31} & 0 & V_{31} & 0,6392 \end{array} \right]$$

O sistema diagonal pode ser resolvido pelas técnicas numéricas vistas nos capítulos sobre sistemas lineares e não lineares. A escolha depende da natureza do problema.

Percebe-se um erro considerável aqui. Os pontos  $V_{11}$  e  $V_{31}$ , por exemplo, bem como nos demais níveis, deveriam possuir o mesmo potencial elétrico. Isto se deve a quatro fatores: aos erros inerentes na série de Taylor, ao se desprezar o erro  $(\xi, \mu)$  na formulação proposta, a pouca discretização do problema (malha com poucos pontos, aqui apenas 9) e aos erros inerentes na resolução do sistema matricial esparsa.

O Matlab possui diversas funções nativas para resolução de EDO com valor inicial (*ode45*) e com condições de contorno (*bvp4c*). Para EDP, a função *pdepe* resolve problemas com valor inicial. Para a resolução de EDP com condições de contorno faz-se necessário ter acesso a toolbox específico. Este toolbox utiliza análise com ‘elementos finitos’.

## 8.2. Introdução a métodos numéricos avançados baseados em EDP

Quanto mais próximo da realidade do fenômeno físico, mais complexa fica a matemática envolvida. Sistemas de EDP com múltiplas variáveis independentes e diversas condições de contorno são comuns na engenharia elétrica.

Para a solução desses complexos sistemas de EDP, métodos numéricos elaborados foram e continuam sendo desenvolvidos. O usual é que especialistas em áreas específicas, por exemplo o eletromagnetismo [4], desenvolvam seu próprio código. Isto leva a especialização do método numérico para uma determinada comunidade.

Neste contexto, o objetivo aqui é apresentar de forma breve o conceito de três métodos muito utilizados em engenharia elétrica, além de uma aplicação. São eles: o método de elementos finitos (FEM) [3], o método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) [5] e a modelagem por linhas de transmissão (TLM) [6]. Para estudos aprofundados, sugere-se a busca por bibliografia própria.

### 8.2.1. Método de elementos finitos

As equações em um FEM podem ser formuladas por um método variacional (Ritz) ou por um método residual ponderado (Galerkin)[3][4]. A estrutura do FEM pode ser: (1) discretizar a região da solução em um número finito de sub-regiões ou elementos; (2) derivar as equações governantes para um elemento típico; (3) configurar todos os elementos no espaço da solução e (4) resolver o sistema de equações.

Por exemplo, para calcular a distribuição de potencial elétrico  $V(x,y)$  em um disco de duas dimensões, divide-se esta região em um número finito de elementos, conforme figura 8.1. A forma e o tamanho dos elementos, bem como a correção na fronteira discretizada, implicará na qualidade do cálculo. O  $V(x,y)$  será a soma das contribuições de todos os elementos:

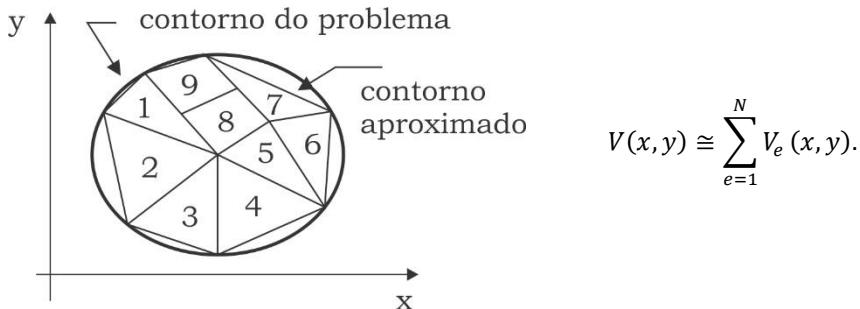


Figura. 8.1. Discretização por FEM.

O exemplo a seguir resolve numericamente a equação de Poisson (8.2) usando *solvepde*, a biblioteca para PDE do Matlab que utiliza FEM [7]. Trata-se de um disco com potencial elétrico tendo como condição de contorno zero-Dirichlet [3].

### Resolução assistida por computador

```
%% Poisson's Equation on a Unit Disk
% Create Geometry Using a Geometry Function.
g = @circleg; c = 1; a = 0; f = 1;
% PDE Coefficients and Boundary Conditions
subplot(2,2,1), pdegplot(g,'EdgeLabels','on'); axis equal
xlabel('x (m)'), ylabel('y (m)'), title('Geometry')
% Create a PDE Model with a single dependent variable.
numberOfPDE = 1; model = createpde(numberOfPDE);
% Create a geometry entity.
geometryFromEdges(model,g);
% Specify PDE coefficients.
specifyCoefficients(model,'m',0,'d',0,'c',c,'a',a,'f',f);
% The solution is zero at all four outer edges of the circle
applyBoundaryCondition(model,'dirichlet','Edge',(1:4),'u',0)
% Generate Initial Mesh
hmax = .35; generateMesh(model,'Hmax',hmax);
% Refinement
er = Inf;
while er > 0.001
    hmax = hmax/2; generateMesh(model,'Hmax',hmax);
    result=solvepde(model); msh=model.Mesh;
    u=result.NodalSolution;
    exact = (1-msh.Nodes(1,:).^2-msh.Nodes(2,:).^2)/4;
```

```

er = norm(u-exact,'inf');
fprintf('Error: %e. nodes:%d\n',er,size(msh.Nodes,2));
end
% Plot Final Mesh
subplot(2,2,2), pdemesh(model); axis equal
xlabel('x (m)'), ylabel('y (m)'), title('Mesh')
% Plot FEM Solution
subplot(2,2,[3,4]),
pdeplot(model,'XYData',u,'ZData',u,'ColorBar','off'),grid on
xlabel('x (m)'), ylabel('y (m)'), zlabel('V (Volts)'),
title('Poisson s Equation on a Unit Disk')
    
```

MATLAB, adaptado de [7].

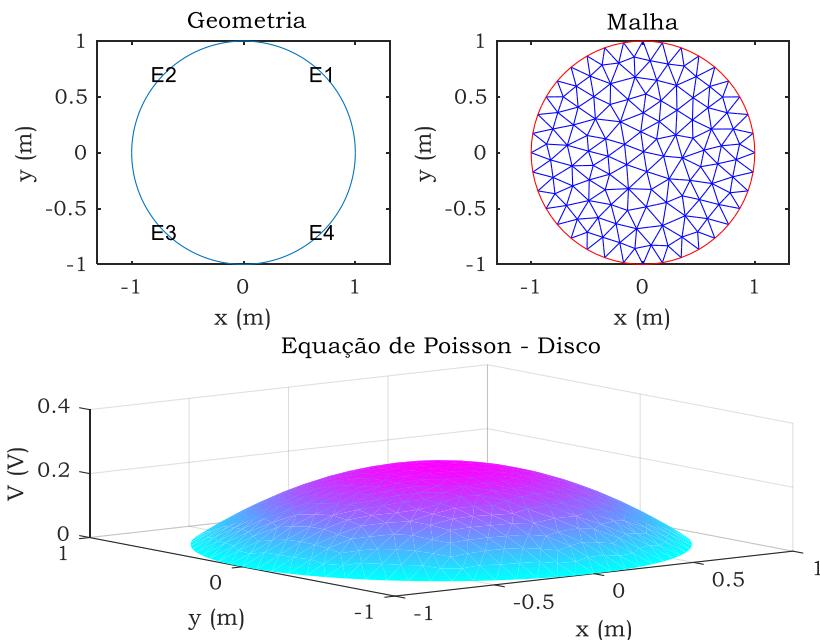


Figura. 8.2. Disco com potencial resolvido por FEM, adaptado de [7].

A precisão do resultado obtido depende da discretização da geometria ( $h_{max}$ ). A figura 8.2. resulta de uma malha com 985 nós e um erro de  $5,1226e^{-6}$ .

### **8.2.2. Método de Diferenças Finitas no Domínio do Tempo**

FDTD ou o método de Yee é a solução direta das equações de Maxwell no domínio do tempo [4][5], conforme ilustrado na figura 8.3. O procedimento consiste em: (1) dividir o domínio do estudo em uma grade de nós; (2) aproximar a equação diferencial dada por equivalentes de diferenças finitas que relacionam a variável dependente em um ponto no domínio de estudo com seus valores nos pontos vizinhos; e (3) resolver as equações das diferenças sujeitas as condições de contorno e as condições iniciais.

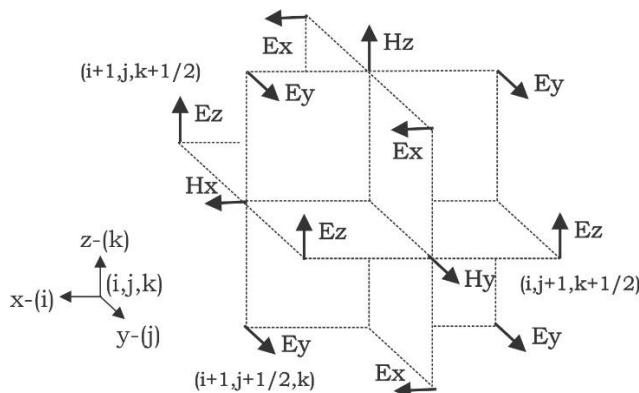


Figura. 8.3. Célula de Yee – FDTD.

Como em qualquer função de espaço e tempo:

$$F^n(i,j,k) \equiv F(i\delta, j\delta, k\delta, n\Delta t)$$

e fazendo  $\delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z$  como o incremento do espaço e  $\Delta t$  como o incremento do tempo, tem-se:

$$\frac{\delta F^n(i,j,k)}{\delta x} = \frac{F^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) - F^n\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{\delta} + O(\delta^2) e$$

$$\frac{\delta F^n(i,j,k)}{\delta t} = \frac{F^{n+1/2}(i,j,k) - F^{n-1/2}(i,j,k)}{\delta} + O(\Delta t^2).$$

O exemplo a seguir resolve por FDTD um exercício de propagação de onda eletromagnética num espaço de duas dimensões com condição de contorno sendo paredes condutoras perfeitas [3], adaptado de [8].

### Resolução assistida por computador

```
% Grid Dimension in x (xdim) and y (ydim) directions
xdim=100; ydim=100;
%Total no of time steps
time_tot=350;
%Position of the source (center of the domain)
xsource=50; ysource=25;
%Courant stability factor
S=1/(2^0.5);
% Parameters of free space
epsilon0=(1/(36*pi))*1e-9; mu0=4*pi*1e-7; c=3e+8;
% Spatial grid step length
delta=1e-6;
% Temporal grid step obtained using Courant condition
deltat=S*delta/c;
% Initialization of field matrices
Ez=zeros(xdim,ydim); Hy=zeros(xdim,ydim); Hx=zeros(xdim,ydim);
% Initialization of permittivity and permeability matrices
epsilon=epsilon0*ones(xdim,ydim); mu=mu0*ones(xdim,ydim);
% Initializing electric and magnetic conductivity matrices
sigma=4e-4*ones(xdim,ydim); sigma_star=4e-4*ones(xdim,ydim);
%Choice of nature of source
gaussian=0; sine=0;
% The user can give a frequency of his choice for sinusoidal
frequency=1.5e+13; impulse=0;
%Multiplication factor matrices for H matrix
A=((mu-0.5*deltat*sigma_star)./(mu+0.5*deltat*sigma_star));
B=(deltat/delta)./(mu+0.5*deltat*sigma_star);
%Multiplication factor matrices for E matrix
C=((epsilon-0.5*deltat*sigma)./(epsilon+0.5*deltat*sigma));
D=(deltat/delta)./(epsilon+0.5*deltat*sigma);
% Update loop begins
for n=1:1:time_tot
    %if source is impulse or unit-time step
    if gaussian==0 && sine==0 && n==1
        Ez(xsource,ysource)=1;
    end
    % Setting time dependent boundaries
    if n<xsource-2      n1=xsource-n-1; else      n1=1;      end
    if n<xdim-1-xsource  n2=xsource+n;   else      n2=xdim-1;  end
    if n<ysource-2      n11=ysource-n-1; else     n11=1;     end
```

## Capítulo 8: Equações diferenciais parciais

```

if n<ydim-1-ysource n21=ysource+n; else n21=ydim-1; end
%Vector update instead of for-loop for Hy and Hx fields
Hy(n1:n2,n11:n21)=A(n1:n2,n11:n21).*Hy(n1:n2,n11:n21)+B(n1:n2,n11:n2
1).* (Ez(n1+1:n2+1,n11:n21)-Ez(n1:n2,n11:n21));
Hx(n1:n2,n11:n21) = A(n1:n2,n11:n21).*Hx(n1:n2,n11:n21)-
B(n1:n2,n11:n21).* (Ez(n1:n2,n11+1:n21+1)-Ez(n1:n2,n11:n21));
%Vector update instead of for-loop for Ez field
Ez(n1+1:n2+1,n11+1:n21+1)=C(n1+1:n2+1,n11+1:n21+1).*Ez(n1+1:n2+1,n11
+1:n21+1)+D(n1+1:n2+1,n11+1:n21+1).*(Hy(n1+1:n2+1,n11+1:n21+1)-
Hy(n1:n2,n11+1:n21+1)-
Hx(n1+1:n2+1,n11+1:n21+1)+Hx(n1+1:n2+1,n11:n21));
% Perfect Electric Conductor boundary condition
Ez(1:xdim,1)=0; Ez(1:xdim,ydim)=0; Ez(1,1:ydim)=0; Ez(xdim,1:ydim)=0;
% Source conditions
if impulse==0
    % If unit-time step
    if gaussian==0 && sine==0 Ez(xsource,ysource)=1; end
    %if sine
    if sine==1
        tstart=1; N_lambda=c/(frequency*delta);
        Ez(xsource,ysource)=sin((2*pi*(c/(delta*N_lambda))*
        (n-tstart)*deltat)));
    end
    %if gaussian
    if gaussian==1
        if n<=42
            Ez(xsource,ysource)=(10-5*cos(n*pi/20) +
            6*cos(2*n*pi/20)-cos(3*n*pi/20))/32;
        else Ez(xsource,ysource)=0; end
    end
    else %if impulse
        Ez(xsource,ysource)=0;
    end
%Movie type colour scaled image plot of Ez
imagesc(delta*(1:1:xdim)*1e+6,(1e+6*delta*(1:1:ydim))',Ez',
[-1,1]);colorbar(hot); xlabel('x(in um)', 'FontSize', 20);
ylabel('y(in um)', 'FontSize', 20); set(gca,'FontSize', 20);
getframe;
end

```

MATLAB, adaptado de [8].

A figura 8.4. ilustra um espaço bidimensional de 100x100, com a fonte posicionada em 50x25. O tempo da imagem é 100fs.

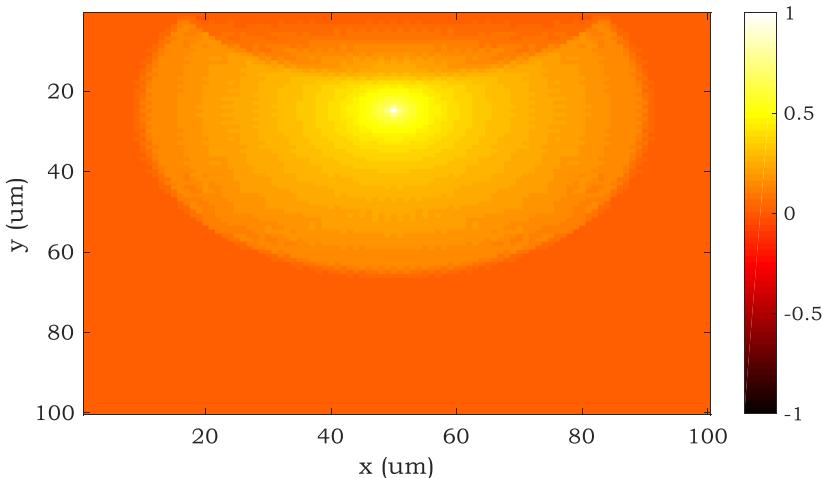


Figura. 8.4. 2D FDTD com paredes condutoras perfeitas, adaptado [8].

### 8.2.3. Modelagem por Linhas de Transmissão

TLM é baseado no modelo da Huygens de propagação e espalhamento de ondas eletromagnéticas e na analogia entre propagação de campo e linhas de transmissão (impedâncias, tensões e correntes) [4][6].

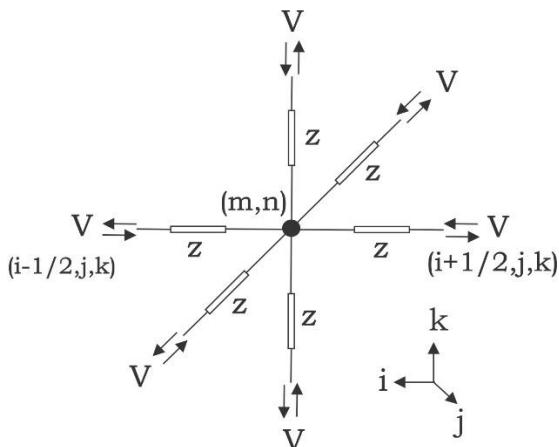


Figura. 8.5. Nô 3D TLM simétrico.

Envolve dois passos básicos:

(1) substituir o problema de campo por uma rede equivalente e obter analogia entre as grandezas de campo e de rede; e

(2) resolver a rede equivalente por métodos iterativos. A discretização é realizada por uma matriz de elementos agrupados.

O diferencial aqui é que os campos elétricos e magnéticos são calculados usando tensões e correntes em uma rede. O exemplo a seguir resolve por TLM um exercício de propagação de onda eletromagnética num guia de onda [3][9].

### Resolução assistida por computador

```
% Características do meio
co=3e+8; Eps0=8.85*1E-12;
Mu0=4*pi*1E-7; velocidade=1/sqrt(Eps0*Mu0);
Z0=120*pi; Ztl=Z0/sqrt(2); % Impedância do espaço livre
% Dimensões física do guia de onda e modos de propagação
a=19.05E-3; b=9.525E-3;
c=52; % Número de pontos no eixo x (+ 2 colunas)
l=27; % Número de pontos no eixo y (+ 2 linhas)
% Dimensões maiores para não zerar índices de i-1=0
deltal=0.381e-3; deltat=0.898e-12; % Distância entre os nós
% Modo de propagação
m=1; n=0;
fc=(co/(2*pi))*sqrt(((m*pi)/a)^2+((n*pi)/b)^2); %Freq. de corte
lambdaC=co/fc; cj=0.0+j*1.0;
T=(1/fc); %período de oscilação de cada modo
Tk=round((T/2)/deltat); %T/2 correspondente ao número de interações
% Inicialização dos vetores e matrizes
ninter=3000; % Número de interações
ttotal=ninter*deltat; % Tempo total de simulação
pg(ninter)=0; % Vetor Pulso Gaussiano/Interações
mvi(1,c,4,ninter)=0; % Matriz de Vis
mvr(1,c,4,ninter)=0; % Matriz de Vrs
Ex(1,c,ninter)=0; % Matriz de Ex
Ey(1,c,ninter)=0; % Matriz de Ey
Hz(1,c,ninter)=0; % Matriz de Hz
Hzs(ninter)=0; % Vetor com valores de Hz
Exs(ninter)=0; % Vetor com valores de Ex
Eys(ninter)=0; % Vetor com valores de Ey
fEy(1,c,ninter)=0; fHz(1,c,ninter)=0;
fftHzs(ninter)=0; fftEys(ninter)=0;
% Formatação do Pulso Gausiano
Eo=1; % Amplitude do pulso
D=10*deltat; % Duração do pulso
L=10*deltat; % Largura do pulso
```

## Capítulo 8: Equações diferenciais parciais

```
% Início da interação no tempo (loop principal)
for k=1:ninter
    t=deltat*k;
    pg(k)=((Eo*(exp(-18*((t-D)/L)^2)))*((0.5*deltal))); % V2=V4
% Excitação forçada
    if k<=19
        mvi(2:26,26,2,k) = - pg(k); mvi(2:26,26,4,k) = - pg(k);
        mvi(2:26,26,1,k) = 0; mvi(2:26,26,3,k) = 0;
    end
% Início de iterações de linhas e colunas
    for i=2:l-1
        for j=2:c-1
% Cálculo dos campos
        Ex(i,j,k)=-(mvi(i,j,1,k)+mvi(i,j,3,k))/deltal;
        Ey(i,j,k)=-(mvi(i,j,2,k)+mvi(i,j,4,k))/deltal;
        Hz(i,j,k)=(mvi(i,j,1,k)+mvi(i,j,4,k)-mvi(i,j,3,k)-
        mvi(i,j,2,k))/(2*Ztl)/deltal;
% DTF para todos os pontos da malha para uma frequência de corte
        if k>1
            fEy(i,j,k)= fEy(i,j,k-1) + Ey(i,j,k).*exp(-2*cj*pi*fc*t);
            fHz(i,j,k)= fHz(i,j,k-1) + Hz(i,j,k).*exp(-2*cj*pi*fc*t);
        else
            fEy(i,j,k)= Ey(i,j,k).*exp(-2*cj*pi*fc*t);
            fHz(i,j,k)= Hz(i,j,k).*exp(-2*cj*pi*fc*t);
        end
% Matriz Vs refletidas no mesmo K
        mvr(i,j,1,k)=0.5*(mvi(i,j,1,k)+mvi(i,j,2,k)+mvi(i,j,3,k)-
        mvi(i,j,4,k));
        mvr(i,j,2,k)=0.5*(mvi(i,j,1,k)+mvi(i,j,2,k)-mvi(i,j,3,k) +
        mvi(i,j,4,k));
        mvr(i,j,3,k)=0.5*(mvi(i,j,1,k)-mvi(i,j,2,k)+mvi(i,j,3,k) +
        mvi(i,j,4,k));
        mvr(i,j,4,k)=.5*(-mvi(i,j,1,k)+mvi(i,j,2,k)+mvi(i,j,3,k) +
        mvi(i,j,4,k));
% Conexão com nó seguinte
        mvi(i+1,j,3,k+1)=mvr(i,j,1,k); mvi(i-1,j,1,k+1)=mvr(i,j,3,k);
        mvi(i,j-1,4,k+1)=mvr(i,j,2,k); mvi(i,j+1,2,k+1)=mvr(i,j,4,k);
    end
end
% Condição de contorno
mvi(26,:,1,k+1)=-mvr(26,:,1,k);
mvi(2,:,3,k+1)=-mvr(2,:,3,k);
mvi(:,2,2,k+1)=-mvr(:,2,2,k);
mvi(:,51,4,k+1)=-mvr(:,51,4,k);
% Saídas para um ponto específico da malha
Hzs(k)=Hz(13,29,k); Exs(k)=Ex(13,29,k); Eys(k)=Ey(13,29,k);
end
vetorf=linspace(0,30,3000);
vetort=(0:1:ninter-1)*deltat;
subplot(1,2,1),surf(abs(fEy(2:26,2:51,1500)));
xlabel('Nx'); ylabel('Ny'); zlabel('fEy'); axis([0 55 0 30 0 110]);
subplot(1,2,2), surf(abs(fHz(2:26,2:51,1500)));
xlabel('Nx'); ylabel('Ny'); zlabel('fHz'); axis([0 55 0 30 0 0.25]);
```

MATLAB, adaptado de [9].

A figura 8.6. ilustra o comportamento do campo elétrico e do campo magnético num guia de onda de 50 largura e 30 de altura, com modos de propagação  $m=1$  e  $n=0$ .

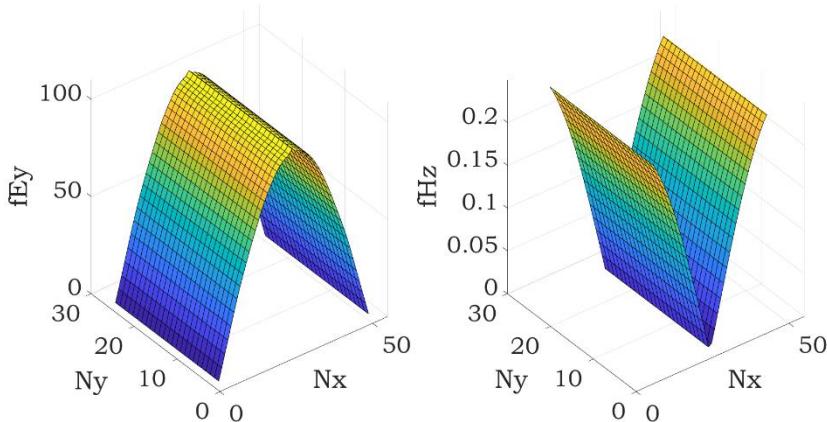
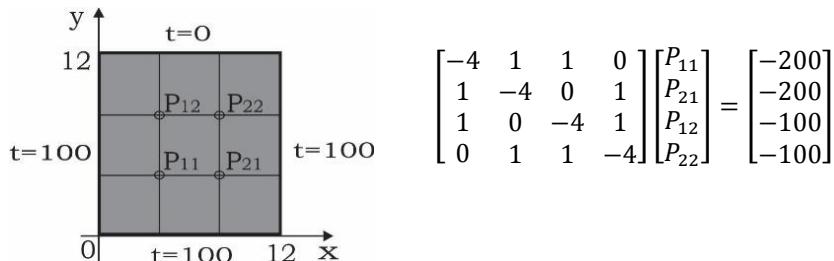


Figura. 8.6. 2D TLM num guia de onda, adaptado de [9].

### 8.3. Exercício proposto

- Uma placa quadrada de 12 cm tem suas bordas mantidas às temperaturas mostradas na figura. Quais os valores das temperaturas no interior da placa? Utilizar um passo  $h$  de 4 cm.



Resp.:  $P_{11} = P_{21} = 87,5000$ ;  $P_{12} = P_{22} = 62,5000$ .

#### 8.4. Referências básicas

- [1] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley & Sons, 1992, ISBN 0471509981.
- [2] M. P. Coelman, An Introduction to PDE with Matlab, Chapman & Hall, 2013, ISBN 9787508400.
- [3] J. P. A. Bastos and N. Ida, Electromagnetics and Calculation of Fields, Springer & Verlag, 2 ed., 2012, ISBN 1461268605.
- [4] M. N. O. Sadiku, Numerical Techniques in Electromagnetics with Matlab, 3rd ed., CRC Press, 2009, ISBN 9781420063097.
- [5] A. Taflove and S. C. Hagness, Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, 3rd ed., Artech House Publishers, 2016, ISBN 9781580538329.
- [6] C. Christopoulos, The Transmission-Line Modeling Method: TLM, Wiley-IEEE Press, 1995, ISBN 9780470546659.
- [7] <https://www.mathworks.com/help/pde/examples/poisson-s-equation-on-a-unit-disk.html>
- [8] <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/35576-2d-fDTD-of-a-region-with-perfect-electric-conductor-boundary>
- [9] [https://github.com/vinipletsch/TLM-method-MatLab-Algorithm-Implementation/blob/master/TLM\\_2D\\_series\\_waveguide.m](https://github.com/vinipletsch/TLM-method-MatLab-Algorithm-Implementation/blob/master/TLM_2D_series_waveguide.m)

#### 8.5. Referências complementares – Aplicações

- [1] D. Fan and Y. Wang, "Global numerical boundary condition based PDE solution techniques for open-region electromagnetic field problems," in IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 41, no. 3, pp. 253-260, March 1993. doi: 10.1109/8.233139
- [2] K. Kiyota, T. Kakishima, H. Sugimoto and A. Chiba, "Comparison of the Test Result and 3D-FEM Analysis at the Knee Point of a 60 kW SRM for a HEV," in IEEE Transactions on Magnetics, vol. 49, no. 5, pp. 2291-2294, May 2013. doi: 10.1109/TMAG.2013.2242453

- [3] J. Baek, D. Kim and K. Jung, “Finite-Difference Time-Domain Modeling for Electromagnetic Wave Analysis of Human Voxel Model at Millimeter-Wave Frequencies,” in IEEE Access, vol. 7, pp. 3635-3643, 2018. doi: 10.1109/ACCESS.2018.2888584.
- [4] Z. Chen and M. M. Ney, “On the Relationship Between the Time-Domain and Frequency-Domain TLM Methods,” in IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, vol. 7, pp. 46-49, 2008. doi: 10.1109/LAWP.2008.915803.

# *Equações integrais*

Uma equação integral é uma função desconhecida ( $f(\Phi)$ ) sob um sinal de integração. Exemplos na engenharia elétrica de equações integrais são Fourier, Laplace e Maxwell.

Equações integrais lineares são usualmente classificadas em dois tipos [1]:

$$(1) \text{ Fredholm: } f(x) = a(x)\Phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\Phi(t)dt \quad (9.1)$$

onde  $\lambda$  é um escalar usualmente igual a 1. Funções  $K(x,t)$  e  $f(x)$  e os limites  $a$  e  $b$  são conhecidos, enquanto  $\Phi(x)$  é desconhecido; e

$$(2) \text{ Volterra: } f(x) = a(x)\Phi(x) - \lambda \int_a^x K(x,t)\Phi(t)dt \quad (9.2)$$

com destaque para o limite superior de integração. Se  $f(x) = 0$ , as equações (9.1) e (9.2) se tornam homogêneas.

Uma equação integral não linear acontece quando  $\Phi$  aparece com ordem superior a  $n > 1$  dentro da integral, por exemplo:

$$f(x) = a(x)\Phi(x) - \lambda \int_a^x K(x,t)\Phi^2(t)dt . \quad (9.3)$$

A maioria das equações diferenciais ordinárias podem ser expressas como equações integrais, mas o inverso nem sempre é possível [1]. Isto é muito devido ao fato de que as condições de contorno são incorporadas nas equações integrais, enquanto nas equações diferenciais elas são imposições externas e complementares.

Por exemplo, considerando uma equação diferencial ordinária de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = F(x, \Phi), a \leq x \leq b \quad (9.4)$$

integrando,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_a^x F(x, \Phi(t)) dt + c_1 \quad (9.5)$$

onde  $c_1 = \Phi'(a)$ . Integrando por partes,

$$\Phi(x) = c_2 + c_1 x + \int_a^x (x - t) F(x, \Phi(t)) dt \quad (9.6)$$

onde  $c_2 = \Phi(a) - \Phi'(a)a$ . Então,

$$\Phi(x) = \Phi(a) + (x - a)\Phi'(a) + \int_a^x (x - t) F(x, \Phi(t)) dt. \quad (9.7)$$

A equação (9.7) representa a equação (9.4) com suas condições de contorno. Aqui foi demonstrado para uma dimensão ( $x$ ). Equações integrais envolvendo funções desconhecidas em mais dimensões podem ser encontradas em literatura dedicada ao tema [1][2].

Uma forma mais sistemática de obtenção de uma equação integral a partir de uma equação diferencial ordinária ou parcial é a construção

de uma função auxiliar conhecida como *Green's function* [1][2]. A função de Green é uma série de expansão. Portanto, ela lineariza problemas não lineares. Isto pode ser um atrativo ou uma dificuldade, dependendo do problema a ser resolvido.

Entre as técnicas numéricas para resolução de equações integrais, destacam-se o método dos elementos de contorno (BEM) e o método dos momentos (MoM). O MoM tem por fundamento a função de Green e será aqui detalhado.

Para engenharia elétrica, em particular para o eletromagnetismo, as vantagens de formular um problema em termos de equações integrais reside no fato de que essa formulação incorpora a identidade de Sommerfeld, a qual rege a propagação de ondas [3].

### 9.1. Método dos Momentos

Seja a função de Green [2][4]:

$$L(f) = g \quad (9.9)$$

onde  $L$  é um operador qualquer conhecido,  $g$  é uma fonte ou excitação conhecida e  $f$  é o campo eletromagnético ou resposta.

A função desconhecida  $f$  é expandida em uma combinação linear de  $N$  funções, no domínio do operador  $L$ :

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n \quad (9.10)$$

onde  $\alpha_n$  são constantes desconhecidas e  $f_n$  é conhecida como função de base (ou de expansão). Substituindo (10) em (9), tem-se:

$$L\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n f_n\right) = g \quad \therefore \quad \sum_{n=1}^N (\alpha_n L(f_n)) = g . \quad (9.11)$$

Assumindo um produto escalar ajustável para  $\langle f|g \rangle$ , a solução do problema indicado pode ser determinada. Para isso definem-se funções de peso (ou de teste) da forma  $w_1, w_2, \dots, w_m$  no domínio de  $L$ , e faz-se o produto escalar da última equação para cada  $w_m$ . Assim:

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \langle w_m | L(f_n) \rangle = \langle w_m | g \rangle \quad m = 1, 2, 3, \dots, N . \quad (9.12)$$

Tal equação transportada para a forma matricial gera:

$$[I_{mn}][\alpha_n] = [g_m] ,$$

$$[I_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1 | L(f_1) \rangle & \cdots & \langle w_1 | L(f_n) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_m | L(f_1) \rangle & \cdots & \langle w_m | L(f_n) \rangle \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

$$[g_m] = \begin{bmatrix} \langle w_1 | g \rangle \\ \vdots \\ \langle w_m | g \rangle \end{bmatrix} \quad [\alpha_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Se a matriz  $[I_{mn}]$  é não singular, então  $[I_{mn}]^{-1}$  existe, assim  $\alpha_n$  é dado por:

$$[\alpha_n] = [I_{mn}]^{-1}[g_m] , \quad (9.14)$$

com o valor de  $\alpha_n$  encontrado determina-se o valor de  $f$ :

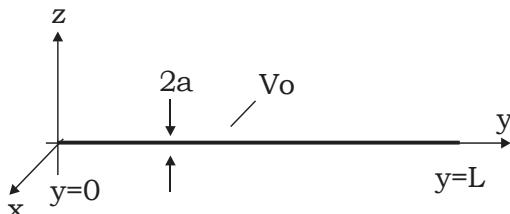
$$f = [f_n][\alpha_n] = [f_n] [I_{mn}]^{-1}[g_m], \quad (9.15)$$

A precisão da solução  $f$  depende das escolhas do tipo das funções de base e de peso,  $f_n$  e  $w_m$ , respectivamente.

De forma breve, para se ter soluções mais exatas pode-se assumir um número maior de funções de base e de peso. Um caso particular conhecido como Método de Galerkin é quando  $f_n = w_m$  [2][3]. A função  $f_n$  deve ser linearmente independente e escolhida de tal maneira que os produtos escalares  $\langle w_m | g \rangle$  sejam relativamente independentes das propriedades de  $g$ .

### O problema

Considere um fio fino condutor de raio  $a$  e comprimento  $L$  ( $L \gg a$ ) localizado no espaço livre [4].



Estando o fio num potencial  $V_0$ , deseja-se determinar a densidade de carga do fio.

Da equação de Poisson [3], tem-se:

$$V_0 = \int_0^L \frac{\rho_L dl}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Para um ponto fixo  $y_k$  no fio:

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\rho_L(y)dy}{|y_k - y|},$$

se  $\Delta y$  é pequeno, pode-se considerar a seguinte aproximação:

$$\int_0^L f(y)dy = f(y_1)\Delta y + \cdots + f(y_N)\Delta y = \sum_{k=1}^N f(y_k)\Delta y$$

ou seja,

$$4\pi\epsilon_0 V_0 = \frac{\rho_1\Delta}{|y_k - y_1|} + \frac{\rho_2\Delta}{|y_k - y_2|} + \cdots + \frac{\rho_N\Delta}{|y_k - y_N|} \quad e \quad \Delta = L/N$$

transformando em matriz:

$$[B] = [A][\rho]$$

$$[B] = 4\pi\epsilon_0 V_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix}$$

$$[\rho] = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_N \end{bmatrix} \quad A_{mn} = \frac{\Delta}{|y_m - y_n|} \quad m \neq n$$

Aqui temos singularidades na diagonal principal. De forma mais rigorosa e considerando fio condutor perfeito, portanto a densidade superficial de carga aparece somente na superfície, e também a espessura do fio, chega-se a:

$$V(\text{centro}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\rho_s a d\phi dy}{[a^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\pi a \rho_s}{4\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{\Delta/2 + [(\Delta/2)^2 + a^2]^{1/2}}{-\Delta/2 + [(\Delta/2)^2 + a^2]^{1/2}} \right\}$$

Sendo  $\Delta \gg a$  :

$$V(\text{centro}) = \frac{2\pi a \rho_s}{4\pi\epsilon_0} 2 \ln \left\{ \frac{\Delta}{a} \right\} \quad \rho_L = 2\pi a \rho_s \quad A_{nn} = 2 \ln \left\{ \frac{\Delta}{a} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2\ln\left(\frac{\Delta}{a}\right) & \dots & \frac{\Delta}{|y_1 - y_N|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta}{|y_N - y_1|} & \dots & 2\ln\left(\frac{\Delta}{a}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_N \end{bmatrix} = 4\pi\epsilon_0 V_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

De forma análoga, a carga Q pode ser calculada por:

$$Q = \int \rho_L dl \quad Q = \sum_{k=1}^N \rho_k \Delta \quad (9.16)$$

O código a seguir resolve numericamente a equação (16) usando MoM.

### Resolução assistida por computador

```

Er = 1; Eo = 8.8541e-12; Vo = 1; AA = 0.001; L = 1; N = 1000;
Delta = L/N;
I = 1:N;
Y = Delta*(I-0.5);
for i=1:N
    for j=1:N
        if(i~=j)
            A(i,j)=Delta/abs(Y(i)-Y(j));
        else
            A(i,j)=2*log(Delta/AA);
        end
    end
end

```

```

    end
end
B = 4*pi*Eo*Er*Vo*ones(N, 1);
C = inv(A);
Rho = C*B;
Sum = 0;
for I=1:N
    Sum = Sum + Rho(I);
end
Q = Sum*Delta;

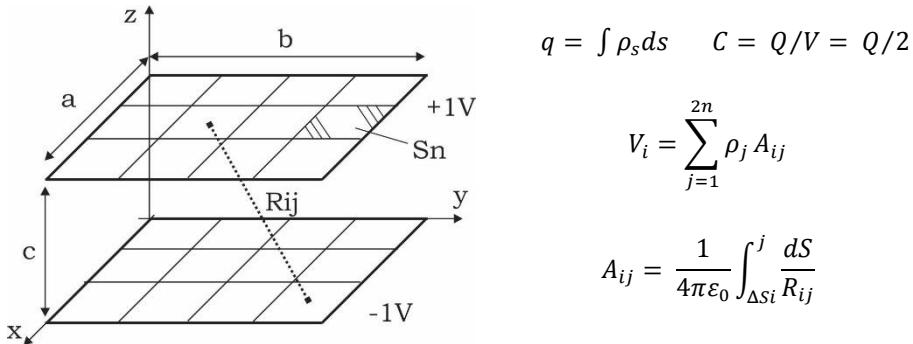
```

MATLAB, adaptado de [4].

A precisão do resultado obtido depende da discretização da geometria ( $N$ ). Para  $N = 10$ ,  $Q = 8.5358\text{e}^{-12}$ . Para  $N = 1000$ ,  $Q = 8.6528\text{e}^{-12}$ .

## 9.2. Exercício proposto

Determine a capacidade de um capacitor de placas paralela. Seja  $a = b = c = 1$ ,  $\epsilon_r = 1$  e a diferença de potencial entre as placas de 2V [4].



$$R_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2n,1} & \cdots & A_{2n,2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para  $i \neq j$

$$A_{ij} = \frac{\Delta S_i}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} = \frac{(\Delta l)^2}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}}$$

Para  $i = j$

$$A_{ij} = \frac{\Delta l}{\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}) = \frac{\Delta l}{\pi\epsilon_0} \ln(0,8814)$$

Resposta:

$$N = 9 \quad , \quad C = 26,5155 \text{ pF}$$

$$N = 25 \quad , \quad C = 27,7353 \text{ pF}$$

$$N = 100 \quad , \quad C = 28,6959 \text{ pF}$$

### 9.3. Referências básicas

- [1] S. S. Ray and P. K. Sahu, Novel Methods for Solving Linear and Nonlinear Integral Equations, Chapman and Hall/CRC, 1st Ed., 2018. ISBN 9781138362741
- [2] M. N. O. Sadiku, Numerical Techniques in Electromagnetics with Matlab, 3rd ed., CRC Press, 2009. ISBN: 9781420063097.
- [3] J. P. A. Bastos and N. Ida, Electromagnetics and Calculation of Fields, Springer & Verlag, 2 ed., 2012. ISBN 1461268605.
- [4] R. F. Harrington, Field Computation by Moment Methods, Krieger Pub, 1982. ISBN 9780898744651.

#### **9.4. Referências complementares – Aplicações**

- [1] G. Tu, Y. Li, J. Xiang and J. Ma, “Distributed Power System Stabiliser for Multimachine Power Systems”, in IET Generation, Transmission Distribution, vol.13, n. 5, 2018. doi: 10.1049/iet-gtd.2018.6415.
- [2] L. Xiao et. al., “An Efficient Hybrid Method of Iterative MoM-PO and Equivalent Dipole-Moment for Scattering From Electrically Large Objects,” in IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, vol. 16, pp. 1723-1726, 2017. doi: 10.1109/LAWP.2017.2669910.

# *Continuação dos estudos*

Este é um livro de cálculo numérico aplicado à engenharia elétrica e as suas técnicas numéricas.

Partindo de um problema de circuitos elétricos ou eletromagnetismo, por exemplo, o leitor é capaz de identificar a natureza matemática do problema. Assim o sendo, ele pode escolher a ferramenta numérica mais apropriada para a sua resolução.

Este é o primeiro passo em computação científica, a qual desenvolve modelos matemáticos e técnicas de soluções numéricas para analisar e resolver problemas científicos e de engenharia.

Computação científica é uma área em franco desenvolvimento, devido a dois motivos principais: (i) a crescente capacidade de processamento computacional; e (ii) a crescente quantidade de dados disponíveis (sensoriamento cada vez mais barato e a sua integração pela internet).

O desafio sempre será obter a modelagem matemática mais próxima possível da realidade, conforme discutido inúmeras vezes neste livro. Junta-se a isto agora, a grande quantidade de dados a serem interpretados. Transformar dados em informação útil para uma tomada de decisão inteligente é o estado da arte hoje.

Neste contexto, sugere-se ao leitor continuar seus estudos por:

- **Pesquisa operacional** é o uso de modelos matemáticos, estatística e algoritmos para ajudar na tomada de decisões. Muito utilizada dentro da administração e da engenharia de produção, a pesquisa

operacional envolve técnicas como: teoria da dualidade e análise de sensibilidade, teoria de jogos, processo de decisão de Markov e teoria de filas [1][2].

- **Otimização** é um processo para buscar a melhor solução de um determinado problema. Para modelagem lineares, usa-se a programação linear, como por exemplo o método simplex [1]-[3]. Para equacionamentos não lineares, pode-se utilizar a programação não linear, na forma clássica com métodos baseados em derivada [1][4] ou com abordagens estocásticas (métodos baseados em probabilidade) [5][6]. Destaque aqui para uma nova família de ferramentas estocásticas chamadas de computação evolutiva ou bioinspirada, como os algoritmos genéticos, colônia de formigas, enxame de partículas ou sistemas imunológicos artificiais [7].
- **Inteligência artificial ou aprendizado de máquina** (*machine learning*) são algoritmos construídos de forma a reconhecer padrões, aprender e agir a partir de dados, sem necessitar de instrução humana explícita [8]-[10]. De forma geral, o aprendizado pode ser supervisionado ou não supervisionado. Técnicas para aprendizado supervisionado buscam responder um objetivo, ou seja, há uma variável explícita a ser respondida (*K-nearest neighbors* e *support vector machine* são exemplos de técnicas). Métodos não supervisionados buscam identificar grupos ou padrões a partir dos dados, sem um objetivo específico a ser alcançado (mapas de Kohonen é a estratégia mais difundida). As chamadas redes neurais artificiais (RNA) podem ser implementadas com as duas orientações. RNA são modelos computacionais inspirados no sistema nervoso central.

O Grupo de Pesquisa em Computação Científica para Engenharia (PECCE), vinculado ao Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC), do qual o autor deste livro é integrante, desenvolve aplicações para a indústria em todos os temas aqui citados. Entre em contato.

Bons estudos!

- [1] F. S. Hiller & G. J. Leiberman, Introdução à Pesquisa Operacional, Mc Graw Hill, 9<sup>th</sup> Ed., 2017. ISBN 9788580551181.
- [2] M. Arenales & V. Armentano, Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia, Elsevier, 2015. ISBN 9788535271614.
- [3] M. Meireles & L. L. Tirossi, Programação Linear - o método Simplex, eBook Kindle, KaizenTools, 2016.
- [4] H. A. Eiselt & C. L. Sandblom, Nonlinear Optimization: Methods and Applications, Springer, 2019. ISBN 9783030194611.
- [5] J. K. Mandal, S. Mukhopadhyay and P. Dutta, Multi-Objective Optimization: Evolutionary to Hybrid Framework, Springer, 2019. ISBN 9789811346392.
- [6] R. Datta & K. Deb, Evolutionary Constrained Optimization, Springer, 2016. ISBN 9788132235057.
- [7] Laboratório de Bioinformática e Computação Bio-Inspirada, Universidade Estadual de Campinas, [online] <http://www.lbic.fee.unicamp.br/homepage/indexpor.htm>
- [8] G. Huang, G. B. Huang, S. Song, K. You, Trends in extreme learning machines: A review, Neural Networks 61 (2015) pp. 32-48. doi:10.1016/j.neunet.2014.10.001.
- [9] V. M. S. Raschka, Python Machine Learning: Machine Learning and Deep Learning with Python, 1st Ed., Packt Publishing, 2017.
- [10] Khaled Bayoudh, From Machine Learning to Deep Learning, 1st Ed., 2017, Ebook, ISBN: 9781387465606.

## Índice remissivo

---

	Pg.
algoritmo significativo	12
análise de sensibilidade	3      25
análise estatística	3
aprendizado de máquina	ii      5
aprendizagem baseada em problemas	i
bissecção	7      10      11      14      16
cálculo numérico	i      1      15      28
campo elétrico	81      106      108
campo eletrostático conservativo	94
campo magnético	30      106      108
capacitância	80      118
cargas elétricas estáticas	79      80      94
catenária	15      16
célula de Yee	102
circuito elétrico	8      15      28      73      81      84      91
circuito magnético	30      89
coeficiente de correlação	38      39
coeficiente de determinação	38
computação científica	1
<i>computer aided design</i>	1
<i>computer aided engineering</i>	1
condição de Dirichlet	93      100
condição de Neumann	93      94
condicionamento de uma matriz	19      33      42      43

## Índice remissivo

---

constante de Boltzmann	9
critério de parada	10    12    19    23    32
curva de histerese	30    60    64
decomposição LU	19    22
derivada de Kernels	82
diferença finita centrada	75    76    78    96
diodo 1N4001	10    33
discretização	101    104    117
<i>distributed power system</i>	119
eliminação de Gauss	19    20
eliminação progressiva	21    22
eliminação regressiva	21    22
engenharia assistida por computador	1
equação de Laplace	95
equação de Poisson	94    95    97    100
equação integral de Fredholm	111
equação integral de Volterra	111
equações diferenciais ordinárias	ii    3    83    86    92    109    111
equações diferenciais parciais	ii    3    83    93    109
equações integrais	ii    3    111    119
erro tolerável	4    13    77
erros de arredondamento	5    12    18
erros de truncamento	5    70
erros numéricos	5    12
exatidão	4
expansões de Taylor	76    77    94    96    98
extrapolação de Richardson	71
<i>fast-fourier transform</i>	59    64
filtragem adaptativa	64
<i>FIR filtering</i>	82
fluxo de carga	28
fluxo de potência	33
fórmulas de diferença finita	76

fórmulas de Gauss-Hermite	71
fórmulas de Gauss-Legendre	71
função de Green	112 113
funções de Bessel	61
funções senoidais	36 55
Gauss-Siedel	19 23 25 29
gradiente	79
incerteza do modelo	3
indução magnética	60
inspeção visual	10
integração	ii 70 71 73 74 111
integração de Romberg	71
integração de Sommerfeld	74
integral de Poisson	82
inteligência artificial	ii 5
interpolação	ii 5 35 43 48 54 65
interpolação cúbica hermetiana	54
<i>inverse fast-fourier transform</i>	59
Lagrange	43 46 77 94
lei de Faraday	75
leis de Kirchhoff	7 20
linguagem interpretada	4
linguagem de programação	4
matemática computacional	1
matriz de Vandermonde	43
medição de aterrramento	60
diferenças finitas domínio do tempo	94 99 102 109
método dos elementos de contorno	113
método dos momentos	113
método intervalar	10
método iterativo	10
método numérico	i 1 10 30 99

## Índice remissivo

---

método residual ponderado Galerkin	99	115					
método variacional Ritz	99						
métodos de elementos finitos	94	99	109				
métodos estocásticos	ii						
microeletrônica	15	28	33				
mínimos quadrados	40						
modelagem numérica	ii	1	2	5	6		
modelagem linhas de transmissão	94	99	105	109			
modelo de Huygens	105						
modos de propagação	106						
<i>multimachine power system</i>	119						
multinomial Lagrange-Bernstein	64						
natureza	i						
NBR 5410:2004	44						
Newton	43	44	46	64			
Newton-Cotes	65	67	69				
Newton-Raphson	7	12	13	16	29	31	32
nó 3D TLM simétrico	105						
<i>numerical design of experiments</i>	3						
otimização	ii	8					
paredes condutoras perfeitas	103						
passo de cálculo	89						
permeabilidade magnética	30						
pesquisa operacional	ii	17					
pivotamento	21						
polyfit e polyval	42	53					
potência média	73						
potencial elétrico	79	95	99	101	115	118	
<i>power dispatch in smart grid</i>	16	28	33				
<i>power harmonics</i>	16						
<i>power transmission</i>	33						
precisão	4	10	78				

## Índice remissivo

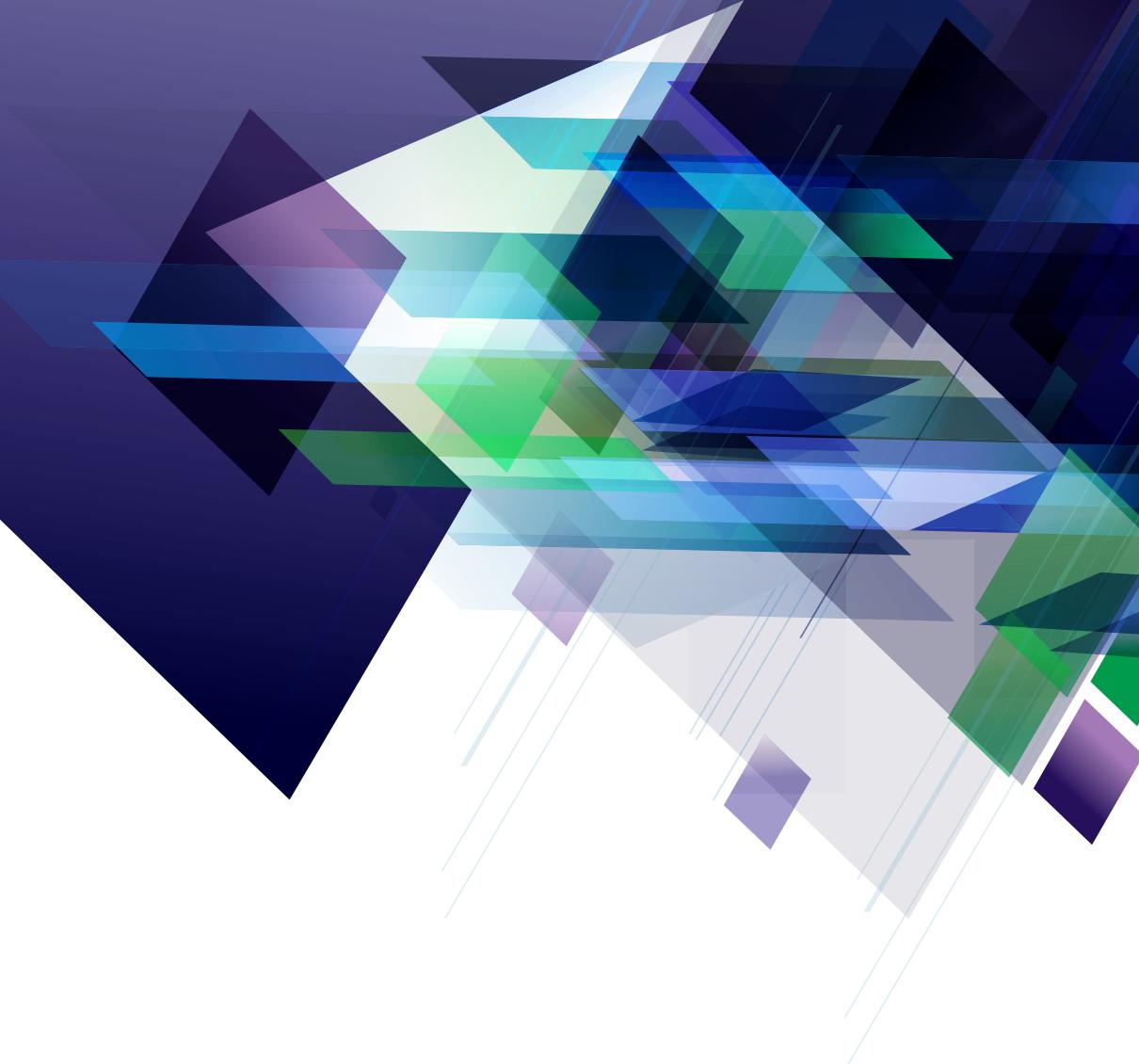
---

	i	ii					
<i>problem based learning</i>							
problema de valor de contorno	84	92	93	94	97	99	112
problema de valor inicial	84	93	102	109	112		
processamento FPGA	92						
processo de desmagnetização	61						
programação orientada a objetos	4						
projeto assistido por computador	1						
propagação de onda eletromagnética	103	105	106				
raízes	ii	7	8	9	11	13	
Range-Kutta	85						
regra de Cramer	20						
regra de Simpson	71						
regra do trapézio	68						
regressão	5	35	36				
relaxamento	24						
retificador de meia onda a diodo	15						
<i>RFID multi-tags</i>	64						
saturação	30	38					
série temporal	55	62	83				
séries de Fourier	36	58					
singularidades	18						
sistemas de energia elétrica	33						
sistemas lineares	ii	3	7	17	19	40	98
sistemas mal condicionados	18	19	25				
sistemas não lineares	ii	3	7	17	29	98	
sistemas rígidos	89						
solução analítica	i	2					
<i>splines</i>	5	35	43	48	49	64	
taxa de amostragem do sinal	57						
tendência	35	36					
teorema de Bolzano	7						
teorema de Nyquist-Shannon	57						

## Índice remissivo

---

transformada de Fourier discreta	58	59
transformada inversa de Fourier	59	
valor eficaz	73	
zero de função	7	



# CÁLCULO NUMÉRICO APLICADO À ENGENHARIA ELÉTRICA COM MATLAB



**INSTITUTO FEDERAL**  
Santa Catarina  
Câmpus Florianópolis