

# 数据的机器级表示与运算

## 进位计数制之间的转换

主讲人: 邓倩妮

上海交通大学

部分内容来自：

1. 《深入理解计算机系统》第三版，机械工业出版社，作者：Bryant,R.E.等
2. Computer Organization and Design, 4<sup>th</sup> Edition, Patterson & Hennessy



上海交通大学

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY





# 本节内容

- 计算机内部为何采用二进制？
- 计算机常用的其他进位制
- 二到八或十六进制的转换
- 二到十进制的转换
- 十进制转二进制



# 人 vs. 计算机



- 人们日常生活采用10进制
  - 天生10个手指
- 计算机采用二进制
  - 计算机采用电子开关
  - 开关仅仅包括两个状态 ON OFF





# 计算机为什么要采用二进制？

- 原因1.最少物理设备量

- (a) 数位长度与基的关系

给定任意进位制 $R$ 下的一个数  $N=(d_n d_{n-1} \cdots d_0)_R$

$j$ ：是 $R$ 进位制下的 $N$ 的数位长度，  $j_{(\min)} = \log_R N$

例如：  $N=1024_{(10)}$ ,  $R=2$ ,  $10 = \log_2 1024$

- (b) 设备量与基数的关系  $D=R \times j = R \times \log_R N$

$$D' = R' \log_R N + R(\log_R N)' = (\ln N \cdot \ln R - \ln N) / (\ln R)^2$$

所以  $\ln R=1$   $R=e=2.718$  时所用设备量最少。

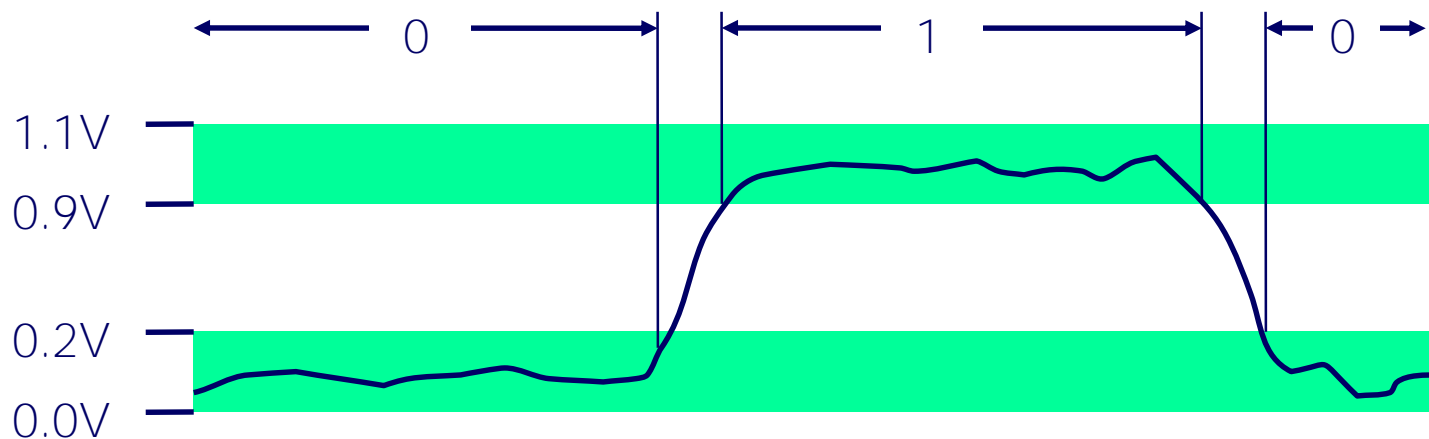
- 原因2. 最简单物理实现：二态比三态好实现



# Everything is bits (0 or 1)



- Why bits? 电子实现容易
  - Easy to store with bistable elements
  - Reliably transmitted on noisy and inaccurate wires



- 各种数据（字符、字符串、整数、浮点数等等）都是二进制表示，用不同的编码方式来解释。





## 二进制数

- 采用2个计数符号：0、1
- 逢2进1
- 一个 $n$ 位的二进制数 $x_0 x_1 \cdots x_{n-2} x_{n-1}$ 代表的数值为：

$$x_0 * 2^{n-1} + x_1 * 2^{n-2} + \cdots + x_{n-2} * 2^1 + x_{n-1} * 2^0$$



# r进制数



- 采用r个计数符号
- 逢r进1
- 一个n位的r进制数 $x_0 x_1 \cdots x_{n-2} x_{n-1}$ 代表的数值为：

$$x_0 * r^{n-1} + x_1 * r^{n-2} + \cdots + x_{n-2} * r^1 + x_{n-1} * r^0$$

$$0 \leq x_i \leq r-1 \quad (0 \leq i \leq n-1)$$



# 例子



十六进制：16个符号 ‘0’ to ‘9’ 和 ‘A’ to ‘F’

$$(0xE96)_{16} = E \times 16^2 + 9 \times 16^1 + 6 \times 16^0$$

二进制：‘0’ to ‘1’ 两个符号

$$(11010001)_2 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$





# 计算机常用的进位制



- 计算机内部运算以二进制为基础，而外部表示时除了二进制、十进制（易于阅读），还常常用到：
  - 八进制
  - 十六进制（便于表达和转换）



# 二到八或十六进制转换



- 二进制转到八进制

从小数点向左右三位一分组

$$(10 \text{ } 011 \text{ } 100 . 11)_2 = (234 . 6)_8$$

110

- 二进制转十六进制

从小数点向左右四位一分组

$$(1001 \text{ } 1100 . 1)_2 = (9C . 8)_{16}$$

1000

**说明：**整数部分不足位数对转换无影响，  
小数部分不足位数要补零凑足，则出错。



# 二进制转十进制



$$N = \sum_{i=-k}^m D_i * r^i$$

从二进制数求其十进制的值，逐位码权累加求和

$$\begin{aligned} 10010001 &= 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 \\ &\quad + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \end{aligned}$$



# 十进制转二进制



整数部分除2取余

$$\begin{array}{rcl}
 2 \overline{) 11} & \text{---} & 1 \text{ 低} \\
 \underline{2} & & \downarrow \\
 2 \overline{) 5} & \text{---} & 1 \\
 \underline{4} & & \\
 2 \overline{) 2} & \text{---} & 0 \\
 \underline{2} & & \\
 2 \overline{) 1} & \text{---} & 1 \text{ 高} \\
 \underline{2} & & \\
 0 & & 
 \end{array}$$

除尽为止 1011

小数部分乘2取整

$$\begin{array}{rcl}
 & & 0.625 * 2 \\
 \hline
 & & 0.25 * 2 \\
 \hline
 & & 0.5 * 2 \\
 \hline
 & & 0.0 \\
 \hline
 \end{array}$$

高 1  
↑  
0  
↑  
1  
低

求得位数满足要求为止



# 进制转换的简单运算方法



- $17/128 = 16/128 + 1/128 = 1/8 + 1/128 = 0.0010001$

$$130 = 128 + 2 = 2^7 + 2^1 = 10000010$$

$$65539 = 65536 + 3 = 2^{16} + 2^1 + 2^0 = 1\ 0000\ 0000\ 0000\ 0011$$

$$2003 = 2047 - 44 = 1111\ 1111 - 32 - 8 - 4 = 1111\ 1010\ 0111$$

$$111111111110 = 111111111111 - 1 = 2^{12} - 1 - 1 = 4096 - 2 = 4094$$





## 记住常用的2的幂、一些大数的2的幂

$$2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128, 2^8 = 256, 2^9 = 512$$

$$2^{10} = 1024(1\text{Kilo}), 2^{11} = 2048, 2^{12} = 4096, 2^{13} = 8192$$

$$2^{14} = 16384, 2^{15} = 32768, 2^{16} = 65536, 2^{20} = 1048576(1\text{Mega})$$

$$2^{30} = 1073741824(1\text{Giga}), 2^{40} = 1\text{Tera}$$

更大的单位是多少？

$$2^{50} = 1 \text{ Peta} \quad 2^{60} = 1 \text{ Exa} \quad 2^{70} = 1 \text{ Zetta} \quad 2^{80} = 1 \text{ Yotta}$$





# 小结

- 计算机内部采用二进制的原因
- 二进制与其他进位计数制之间的互换
- 后续内容：
  - 用二进制表达的数据的编码与机器内实现运算



# 谢谢！

