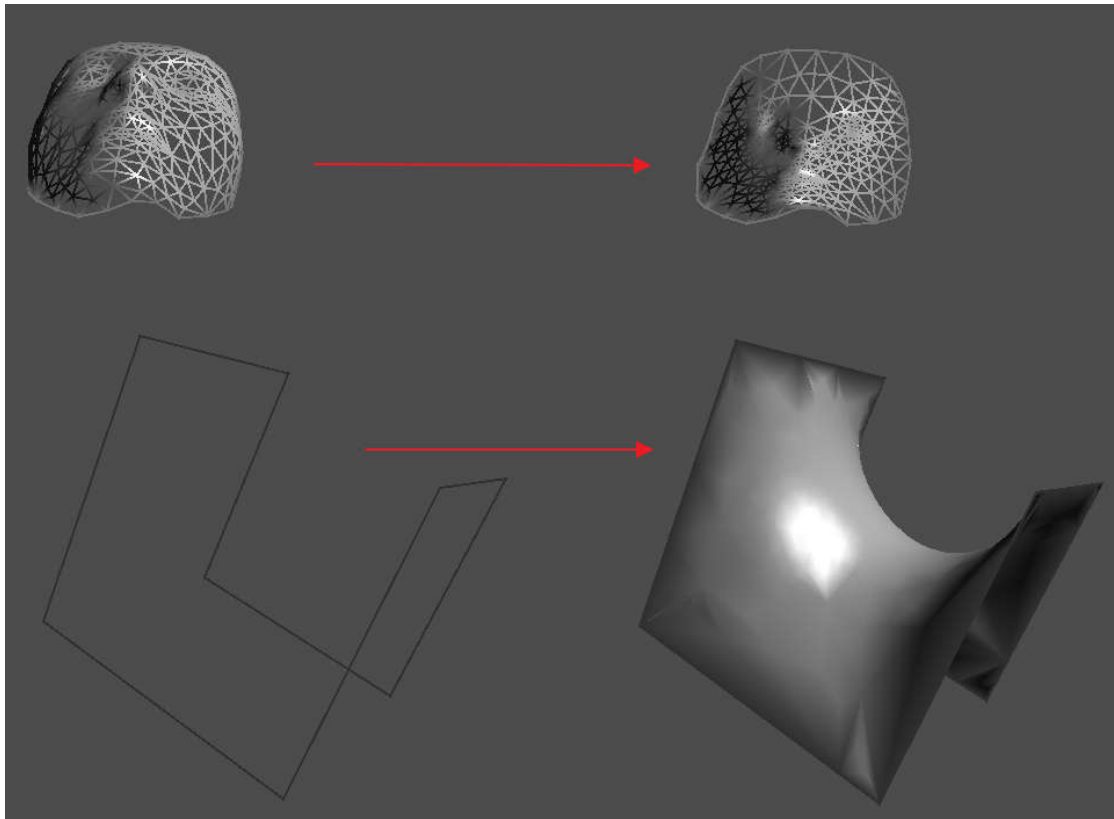


# 作业 04 Minimal Surface

庄涛 PB15111679, ID : 85  
计算机科学与技术系, 215 院 011 系 01 班  
2018/03/23

## 一、要求

1. 使用 MiniMeshFrame 实现网格极小曲面的两种方法（局部方法和全局方法）；
2. 详细比较两种方法的性能；
3. 构造封闭 3D 空间曲线（多边形），求解以此作为边界的极小曲面；



## 二、环境

系统：windows10 x64  
IDE：Vistual Studio 2010  
外部依赖库：QT-5.5, eigen-3.3.2, glut

### 三、主要算法描述

#### 3.1 局部方法

每个内部点都用一邻域的离散拉普拉斯算子来更新自己，直到收敛

$$\vec{\delta}_i = P_i - \frac{1}{|N(i)|} \sum_{j \in N(i)} P_j$$

$$P_i \leftarrow P_i + \alpha * \vec{\delta}_i, \quad 0 < \alpha < 1$$

其中 $\vec{\delta}_i$ 是拉普拉斯算子， $N(i)$ 是 $P_i$ 的一邻域的顶点集合， $\alpha$ 是更新系数，一般取较小值，如 0.1 或 0.2。

#### 3.2 全局方法

全局方法就是让内部点的拉普拉斯算子为零，由此得到线性方程组

$$P_i - \frac{1}{|N(i)|} \sum_{j \in N(i)} P_j = 0, \quad P_i \text{ 为内部点}$$

求解上述方程组即可得到内部点的位置。

#### 3.3 封闭曲线的极小曲面

以上两个算法从一个网格出发最终得到以网格为边界的最小曲面。

类似的，为了求封闭曲线的极小曲面，关键的步骤是获得以该曲线为边界的网格。

现有的方法是获得一个平面多边形的三角剖分，而该封闭曲线是三维的。

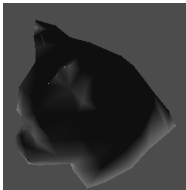
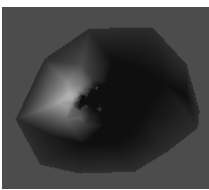

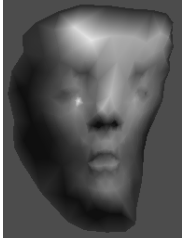
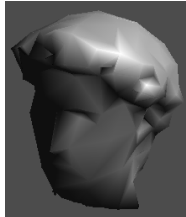
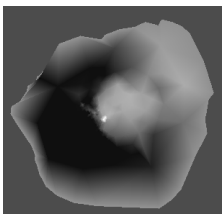
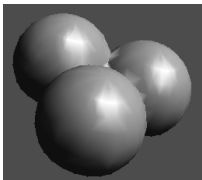
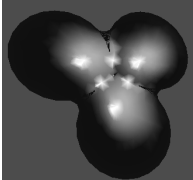
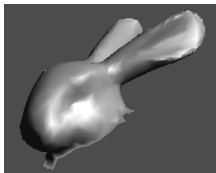
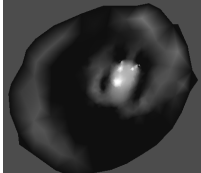
固需要将曲线映射到二维平面上。我的做法是将其映射到一个单位圆上。得到三角剖分后再将边界点映射回去。接着调用上边的算法就可以了。

## 四、结果演示

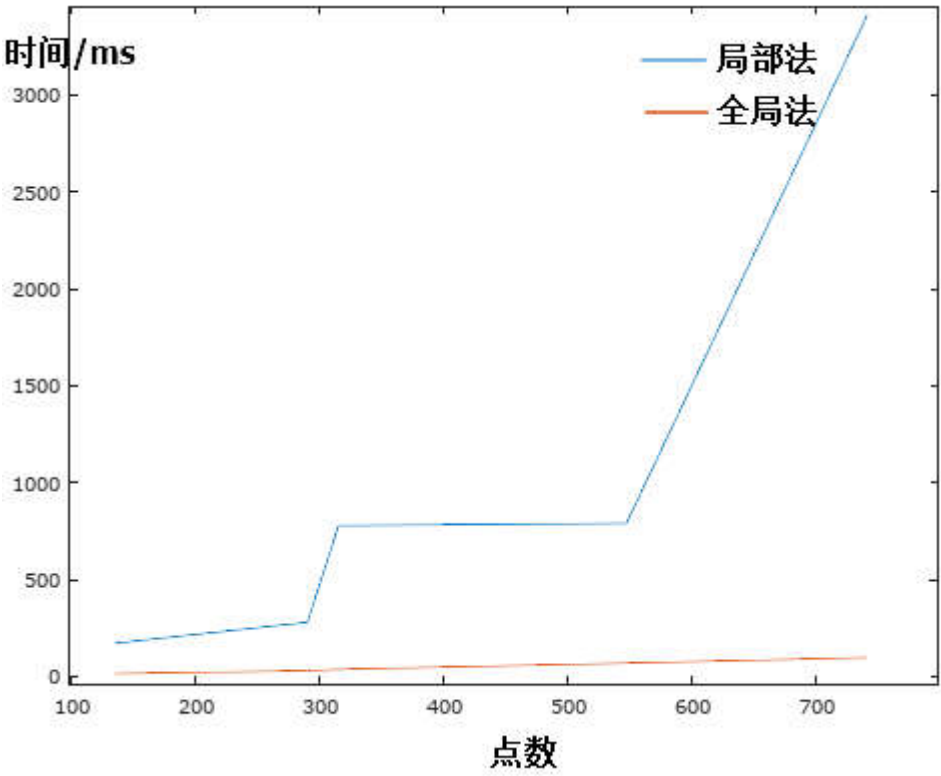
### 4.1 局部法和全局法的比较

局部法的时间复杂度为  $O(e * f(\alpha) * g(M))$ ，当更新系数 $\alpha$ 较小时花的时间较长，另外还跟网格  $M$  有关， $M$  越不光滑  $g(M)$ 越大。

全局法的关键步骤是稀疏矩阵的 LU 分解，时间复杂度为  $O(e)$

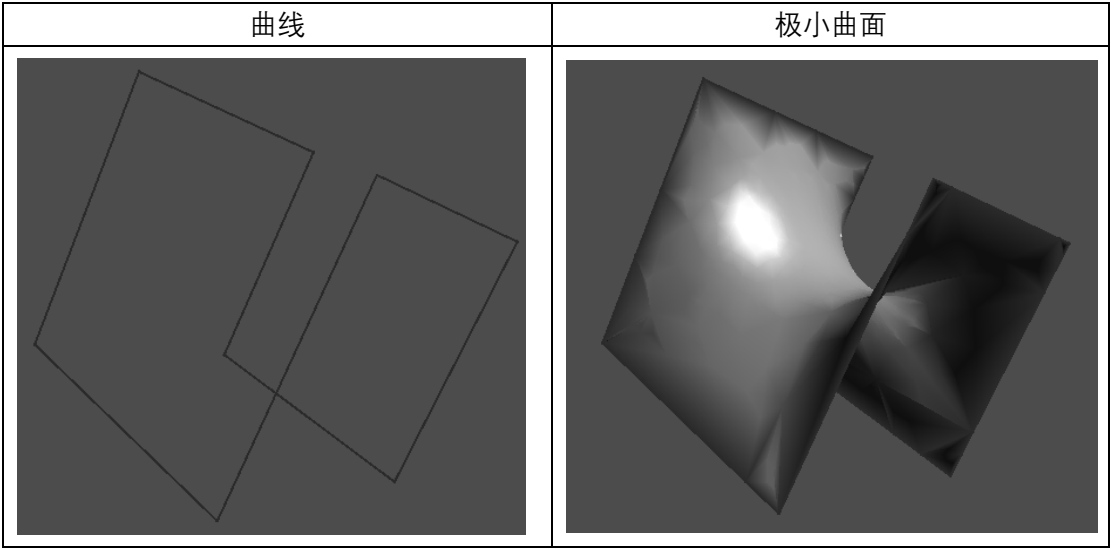
样例	结果	总结点数	边界点数	内部点数	局部法时间/ms	全局法时间/ms
		135	11	124	171	14
		290	34	256	279	29
		315	42	273	778	36
		547	60	487	790	68
		741	32	709	3413	97

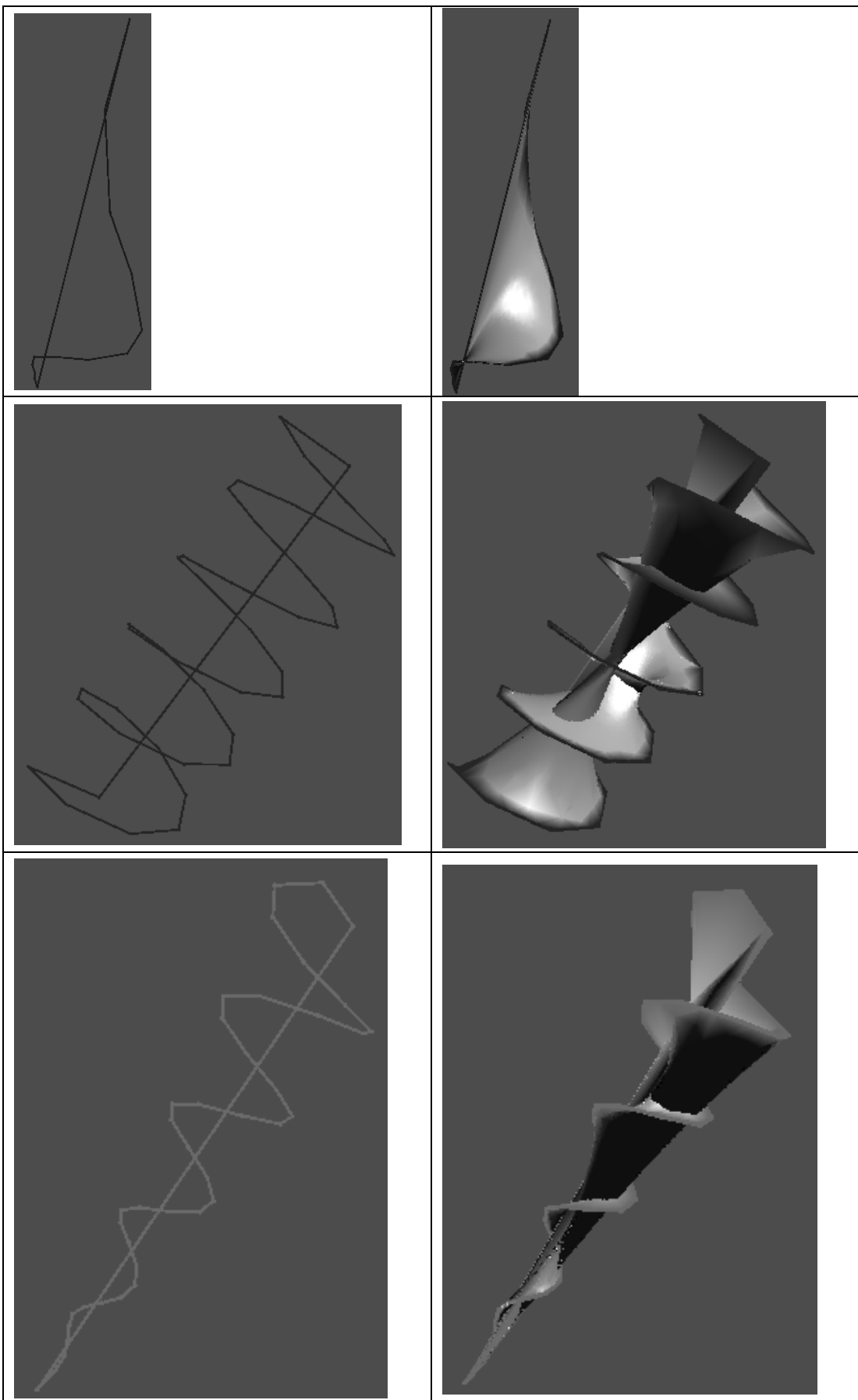
相应的时间图如下

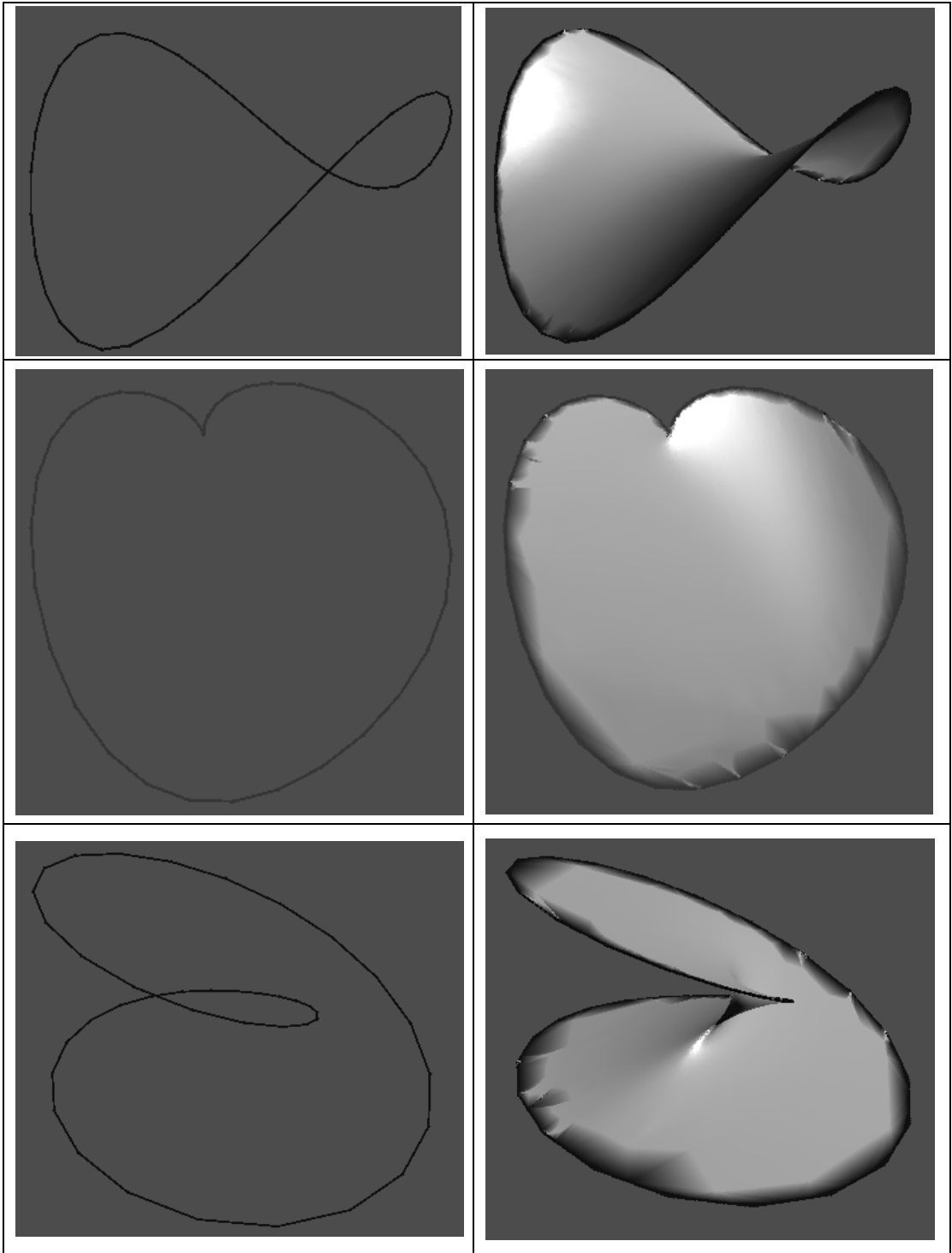


显然局部法的性能比全局法差很多

#### 4.2 封闭曲线的极小曲面







# 附录

## 1. 按键

	打开 obj 文件，可以是网格，也可以是封闭曲线
	打开纹理文件
	另存为
	局部法（迭代）
	全局法
	求封闭曲线的极小曲面
	撤销

## 2. 封闭曲线文件格式

```
如
// xxxx.obj
v 0 0 0
v 0 0 1
v 1 0 1
v 1 0 0
v 1 1 0
v 1 1 1
v 0 1 1
v 0 1 0

f 1 2 3 4 5 6 7 8
```