作业 06 Bezier 曲线

庄涛 PB15111679，ID：85
计算机科学与技术系，215 院 011 系 01 班
2018/04/07

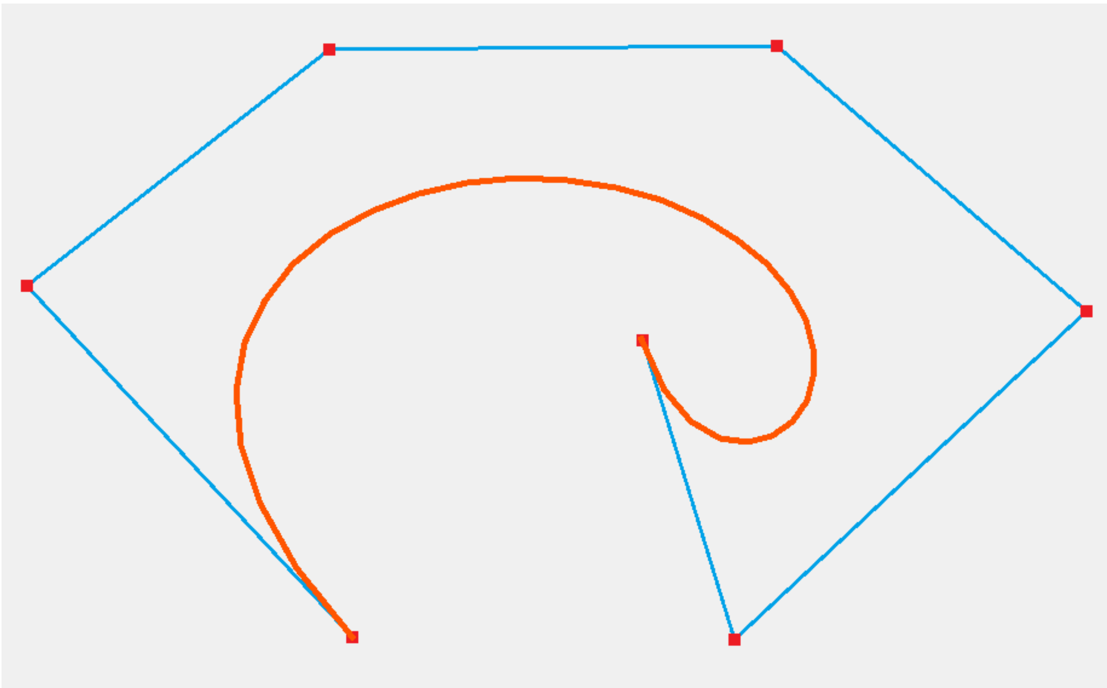
一、要求

1. 理论作业

1) 证明：Bezier 曲线的弧长不大于其控制多边形的周长（边长和）。
2) 证明：空间 Bezier 曲线为平面曲线当且仅当其控制顶点共面。
3) 证明：平面 Bezier 曲线不能表达圆弧。

2. 程序作业

1) 编写一个绘制 Bezier 曲线的程序，要求：
   a) 用户可以自由输入顶点，形成控制多边形，同时生成 Bezier 曲线；
   b) 用户可以选择某控制顶点，拖拽该顶点的同时 Bezier 曲线会跟随变化。



二、环境

系统：windows10 x64
IDE：Vistual Studio 2010
外部依赖库：QT-5.5

三、 理论作业

3.1 证明：Bezier 曲线的弧长不大于其控制多边形的周长（边长和）。

Bezier 曲线参数方程：$\mathrm{P}(\mathrm{t}) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)P_i$

易得 $\mathrm{P}'(\mathrm{t}) = \sum_{i=0}^{n-1} nB_i^{n-1}(t)\Delta_i$，其中$\Delta_i = P_{i+1} - P_i$

易得 $\int_0^1 B_i^{n-1}(t)dt = \frac{1}{n}$，故

$$
\begin{aligned}
&Length_{Bezier\_curve} \\
&= \int_0^1 \|\mathrm{P}'(\mathrm{t})\| dt \\
&= \int_0^1 \left\| \sum_{i=0}^{n-1} nB_i^{n-1}(t)\Delta_i \right\| dt \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^1 \|nB_i^{n-1}(t)\Delta_i\| dt \\
&= \mathrm{n} \sum_{i=0}^{n-1} \|\Delta_i\| \int_0^1 B_i^{n-1}(t) dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \|\Delta_i\| \\
&= Length_{Polyline}
\end{aligned}
$$

3.2 证明：空间 Bezier 曲线为平面曲线当且仅当其控制顶点共面。

①充分性

控制顶点共面，则存在两个不共线的向量$\vec{u}$，$\vec{v}$，使得

$$P_i = \mathrm{a}_i * \vec{u} + b_i * \vec{v}, \mathrm{i} = 0, \ldots, \mathrm{n}$$

所以

$$\mathrm{P(t)} = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i = \vec{u} \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) a_i + \vec{v} \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) b_i$$

故 Bezier 曲线所有点共面，即为平面曲线

②必要性

假设控制顶点不共面，则存在三个不共线的向量$\vec{u}$，$\vec{v}$， $\vec{w}$， 使得

$$P_i = \mathrm{a}_i * \vec{u} + b_i * \vec{v} + c_i * \vec{w}, \mathrm{i} = 0, \ldots, \mathrm{n}，\ c_i\text{不全为 } 0$$

$$\mathrm{P}(t) = \mathrm{a} * \vec{u} + b * \vec{v}$$

所以

$$\mathrm{a} * \vec{u} + b * \vec{v} = \vec{u} \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) a_i + \vec{v} \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) b_i + \vec{w} \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) c_i$$

所以

$$\begin{cases} \mathrm{a} = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) a_i \\ b = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) b_i \\ 0 = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) c_i, c_i\text{不全为 } 0 \end{cases}$$

由于$\{B_i^n(t)\}_{i=0}^n$是一组基向量，故由$0 = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) c_i$可得$c_i$都为 0，矛盾

故假设不成立，即控制顶点共面

3.3 证明平面 Bezier 曲线不能表达圆弧

假设 Bezier 曲线$\mathrm{P}(t) = \left(x(t), y(t)\right)$能表达圆弧，则有

$$(x(t) - x_P)^2 + (y(t) - y_P)^2 = \mathrm{c}$$

其中$\left(x_P，\ y_P\right)$是$\mathrm{P}(t)$的圆心

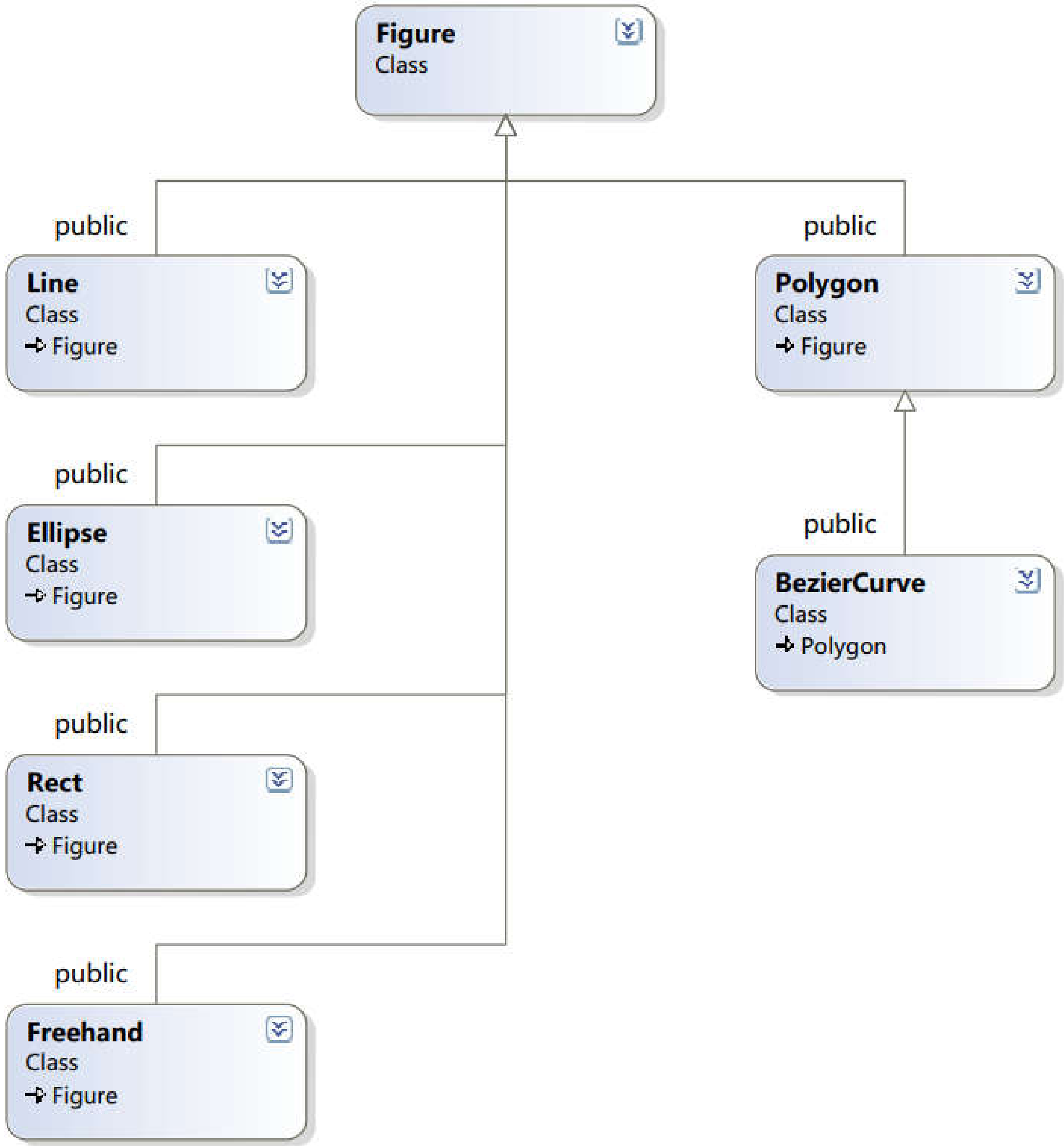
由$\mathrm{P(t)} = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$

可知$(x(t) - x_P)^2 + (y(t) - y_P)^2$是多项式，不可能恒等于常数 c

故假设不成立，即平面 Bezier 曲线不能表达圆弧

四、 绘制 Bezier 曲线

4.1 类图



4.2 作图方法

Bezier 曲线的参数方程为$\mathrm{P(t)} = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$

因此可以简单的使用该方程计算出曲线上离散点的坐标画出曲线

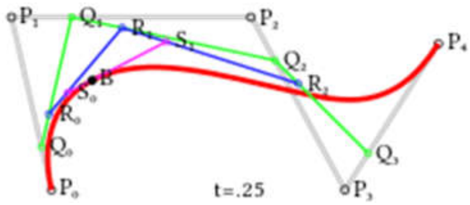
但存在两个问题

- 存在阶乘计算，点数过多时会溢出，需要使用大整数乘法
- 存在一个小数的多次方的计算，点数过多时计算误差较大

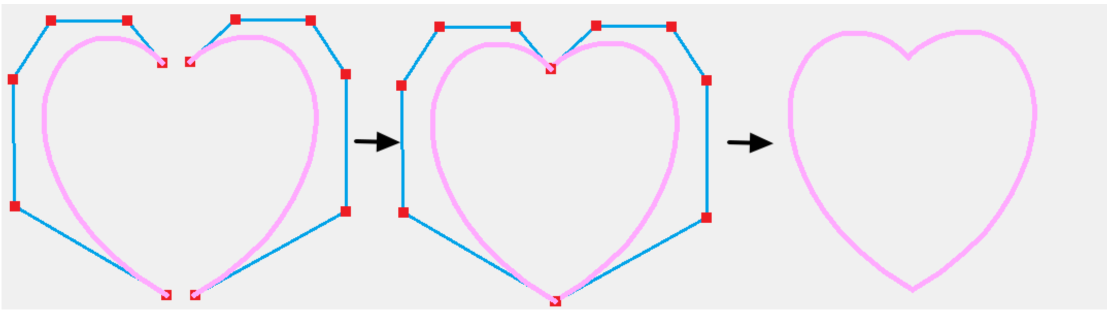
因此不推荐使用这种方法

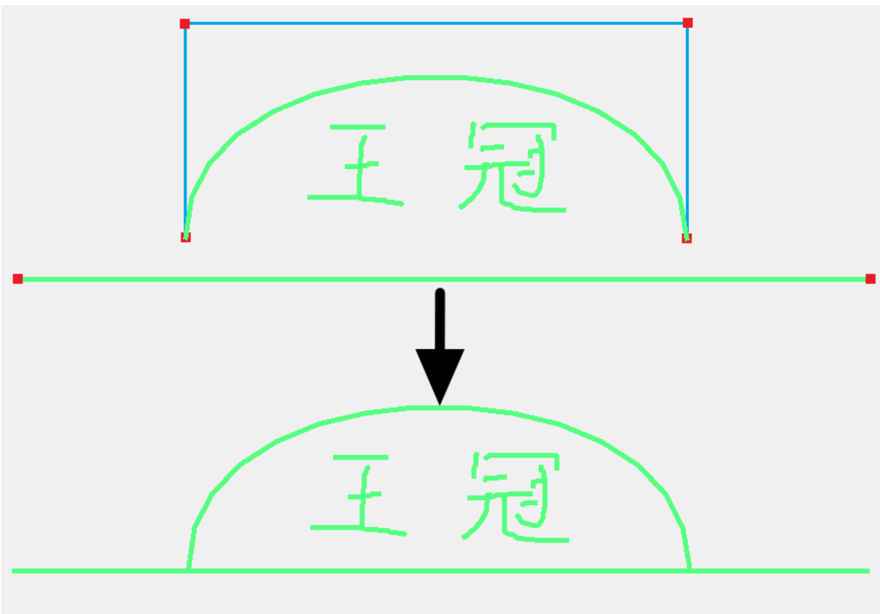
可以利用 Bezier 曲线的性质——作图定理来绘制 Bezier 曲线

详细内容可参考 [Bezier Curve [Wiki]]



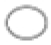
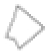
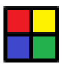
4.3 效果演示





附录

1. 按键

	绘制直线
	绘制矩形
	绘制椭圆
	手写
	绘制多边形
	绘制 Bezier 曲线
	拖拽开关
	修改画笔颜色
	修改画笔粗细
	撤销

2. 使用说明

所有图形都可拖拽，点击拖拽开关来打开或者关闭拖拽功能

左键拖拽单个点（对于手写，左键也是拖拽整个图形），右键拖拽整个图形