Econometría IV
Programa de Estudios Superiores
Banco de Guatemala

Notas de Clases 5
Econometría IV

Cointegración

Combinación Lineal de Variables Integradas

- Una variable $\boldsymbol{y_t}$ se dice que es integrada de orde $\mathbf{d}$, lo cual se representa como $\boldsymbol{y_t} \sim \boldsymbol{I(d)}$, si es preciso diferenciar la serie d veces para que se vuelva estacionaria.

- El concepto de integración fue introducido por Engle and Granger (1987). Su análisis formal inicia con la consideración de analizar la relación a largo plazo de un conjunto de variables macroeconómicas

- Como hemos estudiado un modelo VAR, nos ayuda a poder evaluar las relaciones intertemporales entre las variables del sistema en el corto plazo. Sin embargo, también es posible analizar la relación a largo plazo de las mismas, utilizando un vector de corrección de errores (VEC por sus siglas en inglés).

- El modelo de vectores de corrección de errores incorpora la relación de largo plazo entre las variables, y la velocidad de convergencia, es decir, cuanto tiempo una variable tarda en regresar a su estado estacionario después de haber sido expuesta a un shock.

Cointegración

- Hay dos metodologías principales para evaluar si un conjunto de variables macroeconómicas están cointegradas:

    - ✓ La Metodología de Engle – Granger
    - ✓ La Metodología de Johansen

- La metodología de Johansen es más estricta y es la que se incorpora para la estimación del Vector de Corrección de Error

Cointegración

$$\beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \cdots + \beta_n x_{nt} = 0 \tag{1}$$

- Definiendo β & x_t denoten los vectores $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots \beta_n)$ & $(x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}, \cdots x_n t)'$, el sistema se encuentra en equilibrio en el largo plazo cuando $\beta x_t = 0$. Además, la desviación en el largo plazo del equilibrio, se denota como:

$$e_t = \beta x_t \tag{2}$$

- Donde e_t se conoce como error de equilibrio, y éste debe ser estacionario.

Cointegración

- Los componentes del vector $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}, \cdots x_n t)'$ están cointegrados de orden d,b, lo cual se denota como $x_t \sim CI(d,b)$ si

  1. Todos los componentes de x_t son integrados de orden d.
  2. Existe un vector $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots \beta_n)$ tal que la combinación lineal $\beta x_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \cdots + \beta_n x_{nt}$ es integrada de orden (d,b) donde b > 0. Al vector β se le conoce como vector de cointegración.

- Consideremos la demanda de dinero $m_t = \beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 y_t + \beta_3 r_t + e_t$

- Donde se tiene que: m_t = demanda de dinero

$y_t = ingreso\ real$ $\qquad$ $\beta_i = parametros\ a\ ser\ estimados$

$r_t = tasa\ de\ interés$ $\qquad$ $e_t = perturbación\ que\ se\ asume\ estacionaria$

Cointegración y VEC Model

- Las variables involucradas no son estacionarias, generalmente son integradas de orden (1), es decir, que al aplicarles la primera diferencia se vuelven estacionarias. Además, la combinación lineal de ellas es estacionaria:

$$e_t = m_t - \beta_0 - \beta_1 p_t - \beta_2 y_t - \beta_3 r_t \qquad (3)$$

- Entonces se tiene que las variables son cointegradas de orden (1,1). Donde el vector x_t es $(m_t, 1, p_t, y_t, r_t)'$ y el vector de cointegración β es $(1, -\beta_0, -\beta_1, -\beta_2, -\beta_3)$. La desviación del largo plazo está representada por e_t

$$e_t = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_t \\ 1 \\ p_t \\ y_t \\ r_t \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Cointegración

Cointegración y Tendencias comunes

- Stock and Watson’s (1988) observa que las variables cointegradas comparten tendencias estocásticas, lo cual es de mucha utilidad para poder comprender las relaciones de cointegración entre las mismas.

- Supongamos que tenemos un vector de dos variables, es decir,

$$x_t = (y_t, z_t)' \tag{5}$$

- Ignorando términos cíclicos y estacionales, se puede escribir cada una de las variables como una caminata aleatoria más un componente irregular (no necesariamente un ruido blanco).

Cointegración

$$y_t = \mu_{yt} + e_{yt} \tag{6}$$

$$z_t = \mu_{zt} + e_{zt} \tag{7}$$

- Donde se tiene que:

$$\mu_{it} = proceso\ de\ caminata\ aleatoria\ que\ representa\ la\ tendencia\ estocástica\ en\ la\ variable\ i$$
$$e_{it} = componente\ estacionario\ (irregular) de\ la\ variable\ i$$

- Si $\{y_t\}$ & $\{z_t\}$ son cointegradas de orden (1,1), entonces tiene que ser que, para valores no negativos de β_1 & β_2 , la combinación lineal de $\beta_1 y_t + \beta_2 z_t$ es estacionaria, entonces

$$\beta_1 y_t + \beta_2 z_t = \beta_1(\mu_{yt} + e_{yt}) + \beta_2(\mu_{zt} + e_{zt})$$

$$\beta_1 y_t + \beta_2 z_t = (\beta_1 \mu_{yt} + \beta_2 \mu_{zt}) + (\beta_1 e_{yt} + \beta_2 e_{zt}) \tag{8}$$

Cointegración

- Para que $\beta_1 y_t + \beta_2 z_t$ sea estacionaria, se tiene que el término $\beta_1 y_t + \beta_2 z_t = 0$. Dado que el término $\beta_1 e_{yt} + \beta_2 ez_t$ es estacionario, la condición suficiente y necesaria para que $\{y_t\}$ & $\{z_t\}$ sean $CI(1,1)$ es

$$\beta_1 \mu_{yt} + \beta_2 \mu_{zt} = 0 \tag{9}$$

- Dado que tanto β_1 como β_2 son valores diferentes de cero, entonces se tiene que (9) se cumple si para todo t si y solo sí

$$\mu_{yt} = \frac{-\beta_2 \mu_{zt}}{\beta_1} \tag{10}$$

- Entonces, los procesos $\{y_t\}$ & $\{z_t\}$ tiene que tener la misma tendencia estocástica para que puedan estar cointegrados de orden (1,1).

Cointegración

- Si consideramos μ_t un proceso de caminata aleatoria y utilizando (6) y (7) tendríamos que:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_{yt} \tag{11}$$

$$z_t = \mu_t + \varepsilon_{zt} \tag{12}$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \varepsilon_t \tag{13}$$

- Además, considerando que $\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}$ & ε_t son perturbaciones ruido blanco distribuidas independientemente, una combinación lineal de y_t & z_t , utilizando (11) y (12) se tiene que:

$$y_t - z_t = (\mu_t + \varepsilon_{yt}) - (\mu_t + \varepsilon_{zt}) \tag{14}$$

$$y_t - z_t = \varepsilon_{yt} - \varepsilon_{zt} \tag{15}$$

Cointegración

- En forma matricial, tenemos que

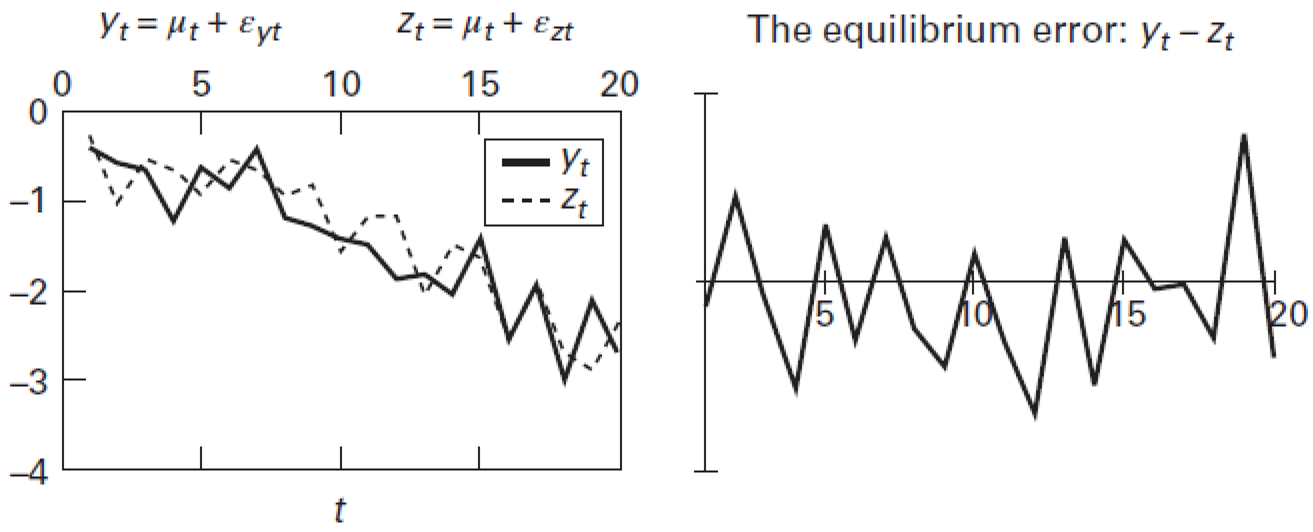
$$[1 \quad -1]\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = [1 \quad -1]\begin{bmatrix} \mu_t + \varepsilon_{yt} \\ \mu_t + \varepsilon_{zt} \end{bmatrix} = \mu_t + \varepsilon_{yt} - \mu_t - \varepsilon_{zt} = \varepsilon_{yt} - \varepsilon_{zt}$$

- Donde se tiene que el vector de cointegración $\beta = (1, -1)$ y el vector $x_t = (y_t, z_t)'$

- La combinación lineal de las variables, permite eliminar la tendencia estocástica, volviéndola estacionaria.

Cointegración

CASE 1: The series $\{\mu_t\}$ is a random walk process and $\{\varepsilon_{yt}\}$ and $\{\varepsilon_{zt}\}$ are white noise. Hence, the $\{y_t\}$ and $\{z_t\}$ sequences are both random walk plus noise processes. Although each is nonstationary, the two sequences have the same stochastic trend; hence they are cointegrated such that the linear combination $(y_t - z_t)$ is stationary. The equilibrium error term $(\varepsilon_{yt} - \varepsilon_{zt})$ is an $I(0)$ process.



Fuente: Enders, Walter (2015). Applied Econometric Time Series. Fourth Edition

Cointegración

Cointegración y Corrección de Errores

- Las trayectorias de las variables cointegradas se ven afectadas por cualquier desviación del equilibrio de largo plazo.

- Para poder ejemplificar lo anterior, vamos a utilizar la teoría de la estructura temporal de las tasas de interés (term structure of interest rates, por sus siglas en inglés). Esta teoría implica una relación de largo plazo entre las tasas de interés de corto y largo plazo.

- Si la brecha entre ambas tasas de interés es grande en comparación con la relación de largo plazo, la tasa de interés de corto plazo debe aumentar en relación con la tasa de interés de largo plazo.

- La brecha puede reducirse debido a (1) un incremento de la tasa de interés de corto plazo o una disminución de la tasa de interés de largo plazo, (2) un aumento en la tasa de largo plazo acompañado por un aumento proporcionalmente mayor en la tasa de corto plazo o (3) una caída en la tasa a largo plazo acompañada de una caída menor en la tasa de corto plazo.

Cointegración

- La dinámica del modelo implica la utilización de corrección de errores. Considerando ambas tasas de interés integradas de orden 1, $I(1)$, un modelo sencillo de corrección de errores sería:

$$\Delta r_{st} = \alpha_s(r_{Lt-1} - \beta r_{st-1}) + \varepsilon_{st} \qquad \alpha_s > 0 \qquad (16)$$

$$\Delta r_{lt} = -\alpha_L(r_{Lt-1} - \beta r_{Lt-1}) + \varepsilon_{Lt} \qquad \alpha_L > 0 \qquad (17)$$

- Donde se tiene que ε_{st} & ε_{Lt} son perturbaciones ruido blanco los cuales pueden estar correlacionados, r_{Lt} & r_{st} representan las tasas de interés de largo y corto plazo respectivamente, y α_s, α_L & β son parámetros.

- Ambas tasas de interés responden a shocks estocásticos, representados por ε_{st} & ε_{Lt} como a las desviaciones del periodo anterior respecto al equilibrio de largo plazo.

- Ambas variables deben ser cointegradas con el vector de cointegración definido como: $(1, -\beta)$

Cointegración

- Un modelo más general introduciendo rezagos sería:

$$\Delta r_{st} = a_{10} + \alpha_s(r_{Lt-1} - \beta_{rst-1}) + \sum a_{11}(i)\Delta r_{st-i} + \sum a_{12}(i)\Delta r_{Lt-i} + \varepsilon_{st} \qquad (18)$$

$$\Delta r_{Lt} = a_{20} - \alpha_L(r_{Lt-1} - \beta_{st-1}) + \sum a_{11}(i)\Delta r_{st-i} + \sum a_{12}(i)\Delta r_{Lt-i} + \varepsilon_{st} \qquad (19)$$

- De nuevo, se tiene que ε_{st} & ε_{Lt} y todos los términos en primera diferencia son estacionarios. Por lo cual, la combinación linear entre las tasas de interés tiene que ser también estacionaria.

- El sistema de ecuaciones (18) y (19) es un modelo VAR en diferencias incluyendo la relación de largo plazo entre las variables, conocido como Vector Error Correction (VEC) model

Cointegración

- A los coeficientes α_s & α_L se les conoce como la velocidad de ajuste para regresar al equilibrio. Si el valor de éstos es cercano a cero entonces va a ser más rápido para las variables regresan a su equilibrio de largo plazo.

- Formalizando para un sistema de ecuaciones de n variables, se tendría un vector de dimensiones $(n \cdot 1)$ de variables integradas de orden 1, $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}, \cdots x_n t)'$, cuya representación como vector de corrección de errores sería:

$$\Delta x_t = \pi_0 + \pi x_{t-1} + \pi_1 \Delta x_{t-1} + \pi_2 \Delta x_{t-2} + \cdots + \pi_p \Delta x_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (20)$$

- Donde: $\pi_0 = es\ un\ vector\ (n \cdot 1)\ de\ interceptos\ con\ elementos\ \pi_{i0}$

$\pi_i = es\ una\ matriz\ (n \cdot n)\ de\ coeficientes\ con\ elementos\ \pi_{jk}(i)$

$\pi = es\ una\ matriz\ con\ elementos\ \pi_{jk}$ tal que uno o más es diferente de cero

$\varepsilon_t = es\ un\ vector\ (n \cdot 1)\ con\ elementos\ \varepsilon_{it}$

Cointegración

- Dado que todas las variables en x_t son integradas de orden 1, entonces la combinación lineal de estas debe ser estacionaria. Regresando a (20) y resolviendo para πx_{t-1} se tiene que:

$$\Delta x_t - \pi_0 - \pi_1 \Delta x_{t-1} - \pi_2 \Delta x_{t-2} - \cdots - \pi_p \Delta x_{t-p} - \varepsilon_t = \pi x_{t-1}$$

$$\pi x_{t-1} = \Delta x_t - \pi_0 - \pi_1 \Delta x_{t-1} - \pi_2 \Delta x_{t-2} - \cdots - \pi_p \Delta x_{t-p} - \varepsilon_t \qquad (21)$$

- Entonces, dado que todos los elementos del lado derecho de (21) son estacionarios, tiene que ser que πx_{t-1} también sea estacionario.

- Si todos los elementos de π son igual a cero, entonces (21) sería un tradicional VAR en primeras diferencias , sin incluir la relación a largo plazo de las variables.

- Pero si por lo menos un elemento de π_{jk} es diferente de cero, entonces sería incorrecto estimar un modelo VAR en primeras diferencias dado que sí existe un equilibrio de largo plazo entre las variables.

Cointegración

- Vamos a utilizar un VAR bivariado sin intercepto como sigue:

$$y_t = a_{11} y_{t-1} + a_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \qquad (22)$$

$$z_t = a_{21} y_{t-1} + a_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \qquad (23)$$

- Donde se tiene que $\varepsilon_{yt} \& \varepsilon_{zt}$ son perturbaciones ruido blanco y podrían estar correlacionados. Utilizando el operador de rezagos en (22) y (23) se puede rescribir el sistema como sigue:

$$y_t = a_{11} L y_t + a_{12} L z_t + \varepsilon_{yt}$$

$$y_t - a_{11} L y_t = a_{12} L z_t + \varepsilon_{yt}$$

$$(1 - a_{11} L) y_t - a_{12} L z_t = \varepsilon_{yt} \qquad (24)$$

Cointegración

$$z_t = a_{21}Ly_t + a_{22}Lz_t + \varepsilon_{zt}$$

$$z_t - a_{22}Lz_t - a_{21}Ly_t = \varepsilon_{zt}$$

$$-a_{21}Ly_t + (1 - a_{22}L)z_t = \varepsilon_{zt} \tag{25}$$

- Escribiendo el sistema de ecuaciones (24) & (25) en matrices, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} (1 - a_{11}L) & -a_{12}L \\ -a_{21}L & (1 - a_{22}L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix} \tag{26}$$

- Para ser consistente con el libro de texto, vamos a utilizar la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones de (26)

Cointegración

- Para la solución de la primera variable, y_t

$$y_t = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_{yt} & -a_{12}L \\ \varepsilon_{zt} & (1-a_{22}L) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-a_{11}L) & -a_{12}L \\ -a_{21}L & (1-a_{22}L) \end{vmatrix}} = \frac{(1-a_{22}L)\varepsilon_{yt} + a_{12}L\varepsilon_{zt}}{(1-a_{11}L)(1-a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2} \quad (27)$$

- De igual forma para la segunda variable, z_t

$$z_t = \frac{\begin{vmatrix} (1-a_{11}L) & \varepsilon_{yt} \\ -a_{21}L & \varepsilon_{zt} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-a_{11}L) & -a_{12} \\ -a_{21}L & (1-a_{22}L) \end{vmatrix}} = \frac{a_{21}L\varepsilon_{yt} + (1-a_{11}L)L\varepsilon_{zt}}{(1-a_{11}L)(1-a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2} \quad (28)$$

Cointegración

- Entonces, la cual ecuación característica inversa para ambas variables sería:

$$(1-a_{11}L)(1-a_{22}L)-a_{12}a_{21}L^2=0$$

$$1-a_{22}L-a_{11}L+a_{11}a_{22}L^2-a_{12}\ a_{21}L^2=0$$

$$1-(a_{22}+a_{11})L+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})L^2=0 \quad (29)$$

- Luego dividiendo ambos lados de (29) por L^2

$$\frac{1}{L^2}-(a_{22}+a_{11})\frac{L}{L^2}+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\frac{L^2}{L^2}=0$$

$$\frac{1}{L^2}-(a_{22}+a_{11})\frac{1}{L}+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})L=0 \quad (30)$$

Cointegración

- definiendo $\lambda = \frac{1}{L}$ para trabajar con las raíces características y sustituyéndolo en (30) se tiene que:

$$\lambda^2 - (a_{22} + a_{11})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \qquad (31)$$

- Para definir la estabilidad del modelo y la estacionariedad tenemos que tomar en cuenta:

1. Si ambas raíces características caen dentro del círculo unitario, entonces (27) y (28) son soluciones estables para $\{y_t\}$ & $\{z_t\}$.
2. Si alguna de las raíces caen afuera del circulo unitario, las soluciones son explosivas. En este caso, ninguna variable podría ser estacionaria a través de la diferenciación. De igual forma, si ambas raíces característicos son igual a uno, la segunda diferencia de cada variable sería estacionaria.
3. En el caso de que $a_{12} = a_{21} = 0$, las variables serían independientes puesto que serían explicadas solo por ellas mismas. Si así fuese, para que sean procesos de raíz unitario se requeriría que $a_{11} = a_{22} = 1$. En resumen, las variables no estarían cointegradas.
4. Si una raíz característica es igual a la unidad, se requiere que la otra sea menor que la unidad para que las variables sean cointegradas $CI(1,1)$.

Cointegración

- Supongamos que $a_{11} = 1$ & $a_{21} = 0$, entonces el sistema de ecuaciones (22) y (23) quedaría como sigue:

$$y_t = y_{t-1} + a_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \qquad (31)$$

$$z_t = a_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \qquad (32)$$

  - Con estos supuestos, se tiene que una de las raíces del vector característicos sería igual a 1, por ejemplo, $\lambda_1 = 1$.

- Utilizando el operador de rezagos en (31) se tendría que:

$$y_t = L y_t + a_{12} L z_t + \varepsilon_{yt}$$

$$y_t - L y_t = a_{12} L z_t + \varepsilon_{yt}$$

$$(1 - L) y_t - a_{12} L z_t = \varepsilon_{yt} \qquad (33)$$

Cointegración

- De igual forma, utilizando el operador de rezagos en (32) se tendría que:

$$z_t = a_{22} L z_t + \varepsilon_{zt}$$

$$z_t - a_{22} L z_t = \varepsilon_{zt}$$

$$(1 - a_{22} L) z_t = \varepsilon_{zt} \tag{34}$$

- Escribiendo el sistema de ecuaciones (33) & (34) en matrices, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} (1 - L) & -a_{12} L \\ 0 & (1 - a_{22} L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix} \tag{35}$$

Cointegración

- Para la solución de la primera variable, y_t

$$y_t = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_{yt} & -a_{12}L \\ \varepsilon_{zt} & (1 - a_{22}L) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - L) & -a_{12}L \\ 0 & (1 - a_{22}L) \end{vmatrix}} = \frac{(1 - a_{22}L)\varepsilon_{yt} + a_{12}L\varepsilon_{zt}}{(1 - L)(1 - a_{22}L)} \tag{36}$$

- Recordando, que definimos $\lambda = \frac{1}{L}$, implica que $L = \frac{1}{\lambda}$, sustituyendo esto en (36) se tiene que:

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(1 - a_{22}\frac{1}{\lambda}\right) = 0 \tag{37}$$

- Multiplicando ambos lados de (36) por lado, tenemos que

$$(\lambda - 1)(\lambda - a_{22}) = 0 \tag{38}$$

Cointegración

- Entonces, las dos raíces serían

$$\lambda_1 = 1 \tag{39}$$

$$\lambda_2 = a_{22} \tag{40}$$

- Finalmente, se tiene que sustituyendo (40) en (36)

$$y_t = \frac{(1 - a_{22}L)\varepsilon_{yt} + a_{12}L\varepsilon_{zt}}{(1 - L)(1 - \lambda_2 L)} \tag{41}$$

- Multiplicando ambos lados de (41) por $(1 - L)$ se tiene que:

$$(1 - L)y_t = \Delta y_t = \frac{(1 - a_{22}L)\varepsilon_{yt} + a_{12}L\varepsilon_{zt}}{(1 - \lambda_2 L)} \tag{42}$$

Cointegración

- La solución de y_t es estacionaria si $|\lambda_2| < 1$
- Entonces, para asegurar que las variables son $CI(1{,}1)$, se debe tener una raíz característica igual a la unidad y la otra raíz con un valor menor que 1 en valor absoluto.
- Para que la mayor de las dos raíces sea igual a 1, la fórmula cuadrática sería:

$$\frac{(a_{11}+a_{22})}{2} + \frac{\sqrt[2]{(a_{11}+a_{22})^2 - 4\cdot 1\cdot(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} = 1 \qquad (43)$$

- Resolviendo para a_{11} se tiene que:

Cointegración

- Multiplicando ambos lados de (33) por 2 se tiene que

$$(a_{11}+a_{22})+\sqrt[2]{(a_{11}+a_{22})^2-4\cdot 1\cdot (a_{11}a_{22}\ -\ a_{12}\,a_{21})}=2 \qquad (44)$$

- Posteriormente restando a ambos lados el término $(\mathbf{a_{11}}+\mathbf{a_{22}})$, tenemos que

$$\sqrt[2]{(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}\ -\ a_{12}\,a_{21})}=2-(a_{11}+a_{22}) \qquad (45)$$

- Seguidamente, elevando al cuadrado ambos lados de (15) se tiene que

$$(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}\ -\ a_{12}\,a_{21})=\left(2-(a_{11}+a_{22})\right)^2 \qquad (46)$$

Cointegración

Finalmente, simplificando (16), despejamos a_{11} en función de los demás coeficientes como sigue:

$$(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}\ -\ a_{12}\ a_{21})=4-4(a_{11}+a_{22})+(a_{11}+a_{22})^2$$

$$-4(a_{11}a_{22}\ -\ a_{12}\ a_{21})=4-4(a_{11}+a_{22})$$

$$-a_{11}a_{22}\ +\ a_{12}\ a_{21}=1-a_{11}-a_{22}$$

$$a_{11}-a_{11}a_{22}\ =1-a_{22}-a_{12}\ a_{21}$$

$$a_{11}(1-a_{22})\ =1-a_{22}-a_{12}\ a_{21}$$

$$a_{11}=\frac{(1-a_{22})-a_{12}\ a_{21}}{(1-a_{22})} \qquad (47)$$

Cointegración

- Reescribiendo (22) restando a ambos lados y_{t-1} y reordenando términos tenemos que:

$$y_t - y_{t-1} = a_{11}y_{t-1} - y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$

$$\Delta y_t = (a_{11} - 1)y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \tag{48}$$

- De igual forma, reescribiendo (23) restando a ambos lados z_{t-1} y reordenando términos tenemos que:

$$z_t - z_{t-1} = a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} - z_{t-1} + \varepsilon_{zt}$$

$$\Delta z_t = a_{21}y_{t-1} + (a_{22} - 1)z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \tag{49}$$

- Luego, escribiendo (48) y (49) en forma matricial, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} - 1) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix} \tag{50}$$

Cointegración

- Luego, reordenando (47)

$$a_{11} = \frac{(1-a_{22})-a_{12}\,a_{21}}{(1-a_{22})}$$

$$a_{11} = 1 - \frac{a_{12}\,a_{21}}{\left(1-\mathrm{a}_{22}\right)}$$

$$a_{11} - 1 = -\frac{a_{12}\,a_{21}}{\left(1-\mathrm{a}_{22}\right)} \tag{51}$$

- Posteriormente, utilizando (51) en (48), reescribiendo el sistema de ecuaciones como:

$$\Delta y_t = \left[-\frac{a_{12}\,a_{21}}{(1-\mathrm{a}_{22})}\right] y_{t-1} + a_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \tag{52}$$

$$\Delta z_t = a_{21} y_{t-1} - (1 - a_{22}) z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \tag{53}$$

Cointegración

- El sistema de ecuaciones (52) y (53) es un modelo de corrección de errores. Asumiendo que a_{12} & a_{21} son diferentes de cero , se puede normalizar la cointegración con respecto a y_t como sigue:

$$\Delta y_t = \left[-\frac{a_{12}\ a_{21}}{(1-\mathrm{a}_{22})}\right]\left(y_{t-1} - \left(\frac{1-\mathrm{a}_{22}}{a_{12}\ a_{21}}\right)a_{12} z_{t-1}\right) + \varepsilon_{yt}$$

$$\Delta y_t = \left[-\frac{a_{12}\ a_{21}}{(1-\mathrm{a}_{22})}\right]\left(y_{t-1} - \left(\frac{1-\mathrm{a}_{22}}{a_{21}}\right) z_{t-1}\right) + \varepsilon_{yt} \qquad (54)$$

$$\Delta z_t = a_{21}\left(y_{t-1} - \left(\frac{1-\mathrm{a}_{22}}{a_{21}}\right) z_{t-1}\right) + \varepsilon_{zt} \qquad (55)$$

- Definiendo: $a_y = -\frac{a_{12}\ a_{21}}{(1-\mathrm{a}_{22})}$ $\quad \beta = \frac{1-\mathrm{a}_{22}}{a_{21}}$ $\quad a_z = a_{21}$ (56)

Cointegración

- Finalmente, utilizando (56) en (54) y (55) tenemos que el modelo de corrección de errores es como sigue:

$$\Delta y_t = a_y(y_{t-1} - \beta z_{t-1}) + \varepsilon_{yt} \qquad (57)$$

$$\Delta z_t = a_y(y_{t-1} - \beta z_{t-1}) + \varepsilon_{zt} \qquad (58)$$

- El sistema de ecuaciones (57) y (58) se puede escribir de una forma compacta como sigue:

$$\Delta x_t = \pi x_t + \varepsilon_t \qquad (59)$$

- Donde se tiene que:

$$x_t = (y_t, z_t)'$$

$$\varepsilon_t = (\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt})'$$

Cointegración

El caso de n variables

- Iniciamos con una forma más general de (59) como sigue:

$$x_t = A_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{60}$$

- Donde se tiene que:

$$x_t = es\ un\ vector\ (n \cdot 1)\ consistituido\ por(x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}, \cdots x_{nt})'$$
$$\varepsilon_t = es\ un\ vector\ (n \cdot 1)\ consistituido\ por\ (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{3t}, \cdots \varepsilon_{nt})'$$
$$A_1 = es\ una\ matrix\ de\ parámetros\ (n \cdot n)$$

- Restando ambos lados de (60) por x_{t-1} y definiendo I como la matriz identidad:

$$x_t - x_{t-1} = A_1 x_{t-1} - x_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta x_t = (A_1 - I)x_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta x_t = -(I - A_1)x_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta x_t = \pi x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{61}$$

Cointegración

El caso de n variables

- Donde se tiene que:

$$\pi = -(I - A_1) \; donde \; \pi_{ij} \; es \; elemento \; de \; la \; fila \; i \; y \; de \; la \; columna \; j \; de \; la \; matriz \; \pi$$

- El rango de se define como el número de relaciones de cointegración. El rango de $(A_1 - I)$ es el número de relaciones de cointegración.

- En el caso especial de que el rango sea cero, se tendría que (61) tomaría la forma de:

$$\Delta x_t = \varepsilon_t \tag{62}$$

- Donde (62) sería un modelo VAR en primeras diferencias donde cada una de las ecuaciones sería caminata aleatoria, por lo que cada variable sería independiente de las demás.

Cointegración

El caso de n variables

- Por otro lado, si el rango de la matriz π fuera n, habrían n vectores de cointegración, la solución de largo plazo estaría dada por:

$$\pi_{11}x_{1t} + \pi_{12}x_{2t} + \pi_{13}x_{3t} + \cdots \pi_{1n}x_{nt} = 0$$

$$\pi_{21}x_{1t} + \pi_{22}x_{2t} + \pi_{23}x_{3t} + \cdots \pi_{2n}x_{nt} = 0$$

$$\vdots$$

$$\pi_{n1}x_{1t} + \pi_{n2}x_{2t} + \pi_{n3}x_{3t} + \cdots \pi_{nn}x_{nt} = 0 \qquad (63)$$

Cointegración

El caso de n variables

- En un caso intermedio, si $r < n$, se tendría solo r vectores de cointegración. Si r=1, se tendría solo un vector de cointegración. Además, cada una de las secuencias $\{\Delta x_{it}\}$ puede ser escrita como corrección de errores. Por ejemplo, se tiene que Δx_{1t} se puede escribir como:

$$\Delta x_{1t} = \pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \pi_{13}x_{3t-1} + \cdots \pi_{1n}x_{nt-1} + \varepsilon_{1t} \tag{64}$$

- Normalizando (64) con respecto a x_{1t-1} se tiene que:

$$\Delta x_{1t} = \alpha_1(x_{1t-1} + \beta_{12}x_{2t-1} + \beta_{13}x_{3t-1} + \cdots \beta_{1n}x_{nt-1}) + \varepsilon_{1t} \tag{65}$$

- Donde se tiene que: $\alpha_1 = \pi_{11}$ & $\beta_{1j} = \frac{\pi_{1j}}{\pi_{11}}$

- Por lo anterior, el vector de cointegración esta dado por $(1, \beta_{12}, \beta_{13}, \cdots \beta_{1n})$ y el parámetro de la velocidad de ajuste estaría dado por α_1.