



# Econometría IV

## Programa de Estudios Superiores

### Banco de Guatemala

---

Notas de Clases 6

Econometría IV



# Cointegración

## La metodología de Engle - Granger

- Suponiendo que se tienen dos variables,  $y_t$  e  $z_t$ , las cuales se asume son integradas de orden 1. El objetivo sería determinar si existe un equilibrio a largo plazo entre ellas, es decir, si están cointegradas. Los pasos a seguir para poder implementar Engle and Granger (1987) sería.
- **Paso 1:** Examinar el orden de integración de las variables. Por definición, las dos variables deben ser integradas del mismo orden para que pueda haber cointegración utilizando el test aumentado de Dickey Fuller.
- **Paso 2:** Si las variables son integradas del mismo orden, por ejemplo, ambas son integradas de orden 1, se estima la relación de largo plazo de la forma siguiente:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + e_t \quad (1)$$



# Cointegración

## La metodología de Engle - Granger

- Luego, se captura la secuencia de errores al estimar (1),  $\{\hat{e}_t\}$ , si las desviaciones son encontradas estacionarias, las variables son cointegradas de orden 1. Para mayor seguridad, se puede utilizar el test de Dickey Fuller.

$$\Delta \hat{e}_t = a_1 \hat{e}_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

- Si no es posible rechazar la hipótesis nula de que  $a_1 = 0$ , se puede concluir que los residuales contienen una raíz unitaria, por lo cual las dos variables no están cointegradas. Si se puede rechazar la hipótesis nula, entonces se concluye que los residuos son estacionarios, lo cual indica que ambas variables están cointegradas.
- Si los residuos no parecen ser ruido blanco, se podría utilizar el test de Dickey Fuller aumentado

$$\Delta \hat{e}_t = a_1 \hat{e}_{t-1} + \sum_{i=1}^n a_{i+1}(i) \Delta \hat{e}_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3)$$

# Cointegración

## La metodología de Engle - Granger

- Si se puede rechazar la hipótesis nula de que  $\alpha_1 = 0$ , entonces se concluye que los residuos son estacionarios, lo cual indica que ambas variables están cointegradas.
- **Paso 3:** Se estima el modelo de corrección de errores, en el caso de 2 variables, tendrían la forma de:

$$\Delta y_t = \alpha_1 + \alpha_y[y_{t-1} - \beta_1 z_{t-1}] + \sum_{i=1} \alpha_{11}(i) \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1} \alpha_{12}(i) \Delta z_{t-i} + \varepsilon_{yt} \quad (4)$$

$$\Delta z_t = \alpha_1 + \alpha_z[y_{t-1} - \beta_1 z_{t-1}] + \sum_{i=1} \alpha_{21}(i) \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1} \alpha_{22}(i) \Delta z_{t-i} + \varepsilon_{zt} \quad (5)$$



# Cointegración

## La metodología de Engle - Granger

- **Paso 4:** Se analiza si el modelo de corrección de errores es adecuado.

## Raíces características, rango y cointegración

- Una de las debilidades de la utilización de la metodología de Engle and Granger es que una de las variables se asume dependiente y las demás regresoras, en el caso de 2 variables tendríamos que:

$$y_t = \beta_{10} + \beta_{11}z_t + e_{1t} \tag{6}$$

$$z_t = \beta_{20} + \beta_{21}y_t + e_{2t} \tag{7}$$

- En muestras pequeñas, es posible encontrar que una regresión indique que existe cointegración mientras que en otra no.



# Cointegración

---

## Raíces características, rango y cointegración

- Otra debilidad es que dicha metodología se basa en un estimador de 2 pasos. En el primer paso, se genera la serie de los residuales,  $\{e_t\}$ , y en el segundo paso se estima la regresión  $\Delta \hat{e}_t = a_1 \hat{e}_{t-1} + \dots$
- Si existe un error en el paso 1, éste se trasladara al paso 2.
- Un método alternativo es la metodología de Johansen (1988) el cual descansa en la relación entre el grado de una matriz y sus raíces características. Considerando un modelo de n variables, se tendría que:



# Cointegración

## Raíces características, rango y cointegración

$$x_t = A_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (8)$$

- Restando ambos lados de (8) por  $x_{t-1}$  y definiendo  $I$  como una matriz identidad de  $(n \cdot n)$

$$x_t - x_{t-1} = A_1 x_{t-1} - x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta x_t = (A_1 - I) x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta x_t = \pi x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (9)$$

- Además se tiene que:

$x_t$  &  $e_t$  son vectores de dimensión  $(n \cdot 1)$

$A_1$  es una matrix de parámetros  $(n \cdot n)$

$\pi$  esta definido por  $(A_1 - I)$



# Cointegración

---

## Raíces características, rango y cointegración

- Generalizando (9), se puede incluir un intercepto como sigue:

$$\Delta x_t = A_0 + \pi x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (10)$$

Donde se tiene que:  $A_0 =$  *es un vector de constantes*  $(a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0})'$

- El efecto de incluir los valores  $a_{i0}$  permite modelar una tendencia lineal, lo cual es conveniente si se considera que las variables exhiben una tendencia a incrementar o disminuir.



# Cointegración

## Raíces características, rango y cointegración

- Una forma de incluir una constante en las relaciones de cointegración es restringir los valores de los distintos  $a_{i0}$ . Por ejemplo, si el rango de  $\pi = 1$ , las filas de  $\pi$  puede diferir solo en un escalar, reescribiendo (10) se tendría que:

$$\Delta x_{1t} = \pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \pi_{13}x_{3t-1} + \cdots + \pi_{1n}x_{nt-1} + a_{10} + \varepsilon_{1t}$$

$$\Delta x_{2t} = \pi_{21}x_{1t-1} + \pi_{22}x_{2t-1} + \pi_{23}x_{3t-1} + \cdots + \pi_{2n}x_{nt-1} + a_{20} + \varepsilon_{2t}$$

$\vdots$

$$\Delta x_{nt} = \pi_{n1}x_{1t-1} + \pi_{n2}x_{2t-1} + \pi_{n3}x_{3t-1} + \cdots + \pi_{nn}x_{nt-1} + a_{n0} + \varepsilon_{nt} \quad (11)$$

- Definiendo  $s_i = \frac{\pi_{ij}}{\pi_{1j}}$  para  $i = 2$  a  $n$ ,  $i = 2$  con valores de 2 a  $n$ ,  $j = 1$  a  $n$  con valores de 1 a  $n$



# Cointegración

## Raíces características, rango y cointegración

- Sustituyendo lo anterior en (11) se tendría que:

$$\Delta x_{1t} = \pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \pi_{13}x_{3t-1} + \cdots + \pi_{1n}x_{nt-1} + a_{10} + \varepsilon_{1t}$$

$$\Delta x_{2t} = s_2(\pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \pi_{13}x_{3t-1} + \cdots + \pi_{1n}x_{nt-1}) + a_{20} + \varepsilon_{2t}$$

$\vdots$

$$\Delta x_{nt} = s_n(\pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \pi_{13}x_{3t-1} + \cdots + \pi_{1n}x_{nt-1}) + a_{n0} + \varepsilon_{nt} \quad (12)$$

- Si además,  $a_{i0}$  también se puede restringir tal que  $a_{i0} = s_i a_{10}$ , entonces podemos incluir una constante dentro del vector de cointegración en (12)



# Cointegración

## Raíces características, rango y cointegración

$$\begin{aligned}\Delta x_{1t} &= (\pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \pi_{13}x_{3t-1} + \cdots + \pi_{1n}x_{nt-1} + a_{10}) + \varepsilon_{1t} \\ \Delta x_{2t} &= s_2(\pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \pi_{13}x_{3t-1} + \cdots + \pi_{1n}x_{nt-1} + a_{10}) + \varepsilon_{2t} \\ &\vdots \\ \Delta x_{nt} &= s_n(\pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \pi_{13}x_{3t-1} + \cdots + \pi_{1n}x_{nt-1} + a_{10}) + \varepsilon_{nt}\end{aligned}\tag{13}$$

- La forma compacta de (13) es como sigue:

$$\Delta x_t = \pi^* x_{t-1}^* + \varepsilon_t\tag{14}$$

- Donde se tiene que

$$\begin{aligned}x_t &= (x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}, \cdots x_{nt})' \\ x_{t-1}^* &= (x_{1t-1}, x_{2t-1}, x_{3t-1}, \cdots x_{nt-1}, 1)'\end{aligned}$$



# Cointegración

## Raíces características, rango y cointegración

$$\pi^* = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1n} & a_{10} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2n} & a_{20} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \cdots & \pi_{3n} & a_{30} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \pi_{n1} & \pi_{n2} & \cdots & \pi_{nn} & a_{n0} \end{bmatrix}$$

- También, se podría incluir un intercepto en el vector de cointegración además de la constante.

$$\Delta x_{1t} = (\pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \pi_{13}x_{3t-1} + \cdots + \pi_{1n}x_{nt-1} + b_{10}) + b_{11} + \varepsilon_{1t}$$

$$\vdots$$

$$\Delta x_{nt} = s_n(\pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \pi_{13}x_{3t-1} + \cdots + \pi_{1n}x_{nt-1} + b_{10}) + b_{n1} + \varepsilon_{1t} \quad (15)$$



# Cointegración

## Raíces características, rango y cointegración

- Donde se tiene que  $b_{it}$  debe satisfacer que  $s_i b_{10} + b_{i1} = a_{10}$
- La estrategia fue dividir la constante  $a_{10}$  en dos partes, donde la primera parte se colocó en la relación de cointegración.
- También se puede estimar el modelo multivariado como un proceso autorregresivo de orden superior

$$x_t = A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + \cdots A_p x_{t-p} + \varepsilon_t \quad (16)$$

- Donde se tiene que

$$x_t = (x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}, \cdots x_{nt})'$$

$\varepsilon_t$  = es un vector de perturbaciones  $IID(O, \Sigma_\varepsilon)$  de dimensión  $n$

# Cointegración

## Raíces características, rango y cointegración

- (16) puede reescribirse en una forma más cómoda agregando y sustrayendo ecuación  $A_p x_{t-p+1}$  en el lado derecho de la ecuación

$$x_t = A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + A_3 x_{t-3} + \dots + A_{p-2} x_{t-p+2} + A_{p-1} x_{t-p+1} + A_p x_{t-p+1} - A_p x_{t-p+1} + A_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$x_t = A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + A_3 x_{t-3} + \dots + A_{p-2} x_{t-p+2} + (A_{p-1} + A_p) x_{t-p+1} - A_p \Delta x_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad (17)$$

- Luego, sumando y restando  $(A_{p-1} + A_p) x_{t-p+2}$  de (17) se tiene que:

$$x_t = A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + A_3 x_{t-3} + \dots + A_{p-2} x_{t-p+2} + (A_{p-1} + A_p) x_{t-p+1} + (A_{p-1} + A_p) x_{t-p+2} - (A_{p-1} + A_p) x_{t-p+2} - A_p \Delta x_{t-p+1} + \varepsilon_t$$

$$x_t = A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + A_3 x_{t-3} + \dots + (A_{p-2} + A_{p-1} + A_p) x_{t-p+2} - (A_{p-1} + A_p) \Delta x_{t-p+2} - A_p \Delta x_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad (18)$$



# Cointegración

## Raíces características, rango y cointegración

- Podemos continuar de la misma manera para obtener finalmente:

$$\Delta x_t = \pi x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_i \Delta x_{t-i} + \varepsilon_t \quad (19)$$

- Donde se tiene que:

$$\pi_t = - \left( I - \sum_{i=1}^p A_i \right) \quad \& \quad \pi_i = - \sum_{j=i+1}^p A_j$$

- Podemos utilizar (19) para poder determinar el número de relaciones de cointegración, que este caso sería el rango de la matriz  $\pi$ . En el caso de que el rango de la matriz  $\pi$  sea igual a cero, entonces no existe cointegración entre las variables, por lo que se estaría estimando un modelo VAR en primeras diferencias.



# Cointegración

## Raíces características, rango y cointegración

- Si el rango de la matriz  $\pi$  es  $n$ , entonces el proceso es estacionario. Por supuesto, si el rango de  $\pi$  es 1, existe un solo vector de cointegración, es decir, una sola relación de largo plazo entre las variables.
- El número de vectores de cointegración se obtiene comprobando la significancia de las raíces características de la matriz  $\pi$ . Esto es debido que el rango de una matriz es igual al número de raíces características que difieren de cero.
- Al obtener la matriz  $\pi$ , se pueden ordenar las  $n$  raíces características del tal forma que  $A = \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ . Si las variables en  $x_t$  no están cointegradas, el rango de  $\pi$  es cero y todas las raíces características son cero.
- Si el rango de  $\pi$  es la unidad, entonces  $0 < \lambda_1 < 1$ , lo cual implica que la expresión  $\ln(1 - \lambda_1)$  debe ser negativa y además  $\lambda_i = 0$  se tiene que  $\ln(1 - \lambda_2) = \ln(1 - \lambda_3) = \dots \ln(1 - \lambda_n) = 0$



# Cointegración

## Raíces características, rango y cointegración

- El test para el numero de raíces características diferentes de la unidad puede ser realizada utilizando dos test estadísticos:

$$\lambda_{traza}(r) = -T \sum_{i=r+1}^n \ln(1 - \hat{\lambda}_i) \quad (20)$$

$$\lambda_{maximo}(r, r + 1) = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r+1}) \quad (21)$$

- Donde se tiene que

$\hat{\lambda}_i$  = los valores estimados de las raíces características (llamado eigenvalues) obtenidos de la estimación de la matriz  $\pi$ .

$T$  = Número de observaciones



# Cointegración

---

## Raíces características, rango y cointegración

- Para el primer estadístico, la hipótesis nula es que el número de vectores de cointegración es menor o igual a  $r$  contra la hipótesis alterna de que el número de vectores de cointegración es mayor que  $r$ .
- Para el segundo estadístico, la hipótesis nula es que el número de vectores de cointegración es  $r$  contra la hipótesis alterna que el número de vectores de cointegración es  $r+1$ .
- Los valores críticos de los estadísticos  $\lambda_{traza}$  &  $\lambda_{maximo}$  se obtienen utilizando el método de Monte Carlos. Los valores críticos de los mismos se encuentran en la table E del manual complementario del libro de texto



# Cointegración

## Prueba de Hipótesis

- El número de vectores de cointegración, nos permiten saber cuales combinaciones lineales de las variables son estacionarias. Las restantes combinaciones son no estacionarias.
- Para hacer la prueba de hipótesis de que existe un intercepto en el vector de cointegración, se estima el modelo no restringido contra el modelo restringido.
- Denotando las raíces características ordenadas de la matriz  $\pi$  del modelo no restringido  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n$  y las raíces características del modelo con el intercepto(s) en el vector(es) de cointegración  $\hat{\lambda}_1^*, \hat{\lambda}_2^*, \dots, \hat{\lambda}_n^*$ . Suponiendo que la forma no restringida del modelo tiene  $r$  raíces características diferentes de cero. Asintóticamente, el estadístico

$$-T \sum_{i=r+1}^n [\ln(1 - \hat{\lambda}_i^*) - \ln(1 - \hat{\lambda}_i)] \quad (22)$$

- Sigue una distribución  $\chi^2$  con  $(n-r)$  grados de libertad



# Cointegración

## Prueba de Hipótesis

- Si las restricciones no se cumplen, entonces todos los valores de  $\ln(1 - \hat{\lambda}_i^*)$  &  $\ln(1 - \hat{\lambda}_i)$  debe ser iguales.
- Para probar otras restricciones en el vector de cointegración, Johansen define dos matrices  $\alpha$  &  $\beta$ , ambos de dimensión  $(n \cdot r)$  donde  $r$  representa el rango de la matriz  $\pi$ . Las propiedades de  $\alpha$  &  $\beta$  son tales que:

$$\pi = \alpha\beta' \quad (23)$$

- Vemos que  $\beta$  es la matriz de parámetros cointegrados y  $\alpha$  es la matriz de pesos con los que cada vector de cointegración entra en las  $n$  ecuaciones del VAR. En ese sentido,  $\alpha$  es la matriz que contiene los parámetros de la velocidad de ajuste.



# Cointegración

## Prueba de Hipótesis

- Para ejemplificar el proceso, supongamos que existe un solo vector de cointegración. Esto quiere decir, que  $\text{rango}(\pi) = 1$ , las filas de  $\pi$  son múltiplos lineales de las otras. Por tal forma, se puede reescribir (19) como sigue:

$$\begin{aligned}\Delta x_{1t} &= \pi_{11} x_{1t-1} + \pi_{12} x_{2t-1} + \pi_{13} x_{3t-1} + \cdots + \pi_{1n} x_{nt-1} + \cdots + \varepsilon_{1t} \\ \Delta x_{2t} &= s_2 (\pi_{11} x_{1t-1} + \pi_{12} x_{2t-1} + \pi_{13} x_{3t-1} + \cdots + \pi_{1n} x_{nt-1}) + \cdots + \varepsilon_{2t} \\ &\vdots \\ \Delta x_{nt} &= s_n (\pi_{11} x_{1t-1} + \pi_{12} x_{2t-1} + \pi_{13} x_{3t-1} + \cdots + \pi_{1n} x_{nt-1}) + \cdots + \varepsilon_{nt}\end{aligned}\tag{24}$$

- Donde se tiene que  $s_i$  son escalares y, para simplificar la notación, las matrices  $\pi_i \Delta x_{t-i}$  no se escribieron en (24).

# Cointegración

## Prueba de Hipótesis

- Ahora, definiendo  $\alpha_i = s_i \pi_{11}$  &  $\beta_i = \pi_{1i} / \pi_{11}$  tal que cada ecuación de (24) puede escribir como sigue:

$$\Delta x_{1t} = \alpha_i(x_{1t-1} + \beta_2 x_{2t-1} + \beta_3 x_{3t-1} + \cdots + \beta_n x_{nt-1}) + \cdots + \varepsilon_{it} \quad (i = 1, \dots, n)$$

- O en forma matricial, reescribiendo (19) se tendría que:

$$\Delta x_t = \sum_{i=1}^{p-1} \pi_i \Delta x_{t-i} + \alpha \beta' x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (25)$$

- Donde se tiene que el único vector de cointegración sería  $\beta = (1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n)$  y los parámetros de la velocidad de ajuste serían  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)'$ .
- La ecuación (25) ejemplifica un modelo de vector de corrección de errores sin constante.

# Cointegración

## Prueba de Hipótesis

- Una vez  $\alpha$  &  $\beta'$  son determinados, para poder examinar el número de vectores de cointegración  $r$ , la prueba estadística consiste en la comparación del número de vectores de cointegración bajo la hipótesis nula y alterna.
- De nuevo, supongamos que  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n$  &  $\hat{\lambda}_1^*, \hat{\lambda}_2^*, \dots, \hat{\lambda}_n^*$  denotan las raíces características de los modelos no restrictivos y restrictivos respectivamente. Para probar las restricciones sobre  $\beta$ , la prueba de hipótesis sería:

$$T \sum_{i=1}^r [\ln(1 - \hat{\lambda}_i^*) - \ln(1 - \hat{\lambda}_i)] \quad (26)$$

- Asintóticamente, el estadístico tiene una distribución  $\chi^2$  con grados de libertad igual al número de restricciones puestas sobre  $\beta$ .