Econometría IV
Programa de Estudios Superiores
Banco de Guatemala

Notas de Clases 1
Econometría IV

Introducción

- Los modelos de Vectores Autoregresivos tienen una larga tradición como herramientas para el análisis de series de tiempo multivariadas. Al ser modelos lineales, son relativamente fáciles de usar tanto en la teoría como en la práctica.

- Los modelos VAR se hicieron populares para el análisis económico cuando Sims (1980) los promovió como alternativas a los modelos de ecuaciones simultáneas.

- La disponibilidad de series de tiempos más largas y con mayor frecuencia enfatizó la necesidad de modelos que se centraran en la estructura dinámica de las variables.

- Sims también criticó los supuestos de exogeneidad para algunas de las variables en los modelos de ecuaciones simultáneas como ad hoc y a menudo no respaldados por teorías completamente desarrolladas. Por el contrario, en los modelos VAR, todas las variables observadas suelen tratarse como endógenas a priori.

Introducción

- Los modelos VAR son fáciles de usar para realizar pronósticos y también se pueden aplicar para el análisis económico.

- Los análisis de impulso – respuesta o las descomposiciones de la varianza del error de pronóstico se utilizan normalmente para evaluar las relaciones entre las variables en un modelo VAR.

- Para investigar hipótesis estructurales basadas en la teoría económica, generalmente se requieren suposiciones a priori que pueden no ser comprobables con métodos estadísticos. Por lo cual, se han desarrollado modelos VAR estructurales (SVAR) como marco para incorporar dichas restricciones.

Introducción

- Además, el descubrimiento de la importante de las tendencias estocásticas en las variables económicas y el desarrollo del análisis de cointegración por Granger (1981), Engle y Granger (1987), Johansen (1995) y muchos otros han conducido a nuevos e importantes desarrollos en el análisis de las relaciones entre las variables económicas.

- En particular, es importante separar las relaciones de largo plazo de la dinámica de corto plazo en la estimación de un modelo estructural.

- Las relaciones de largo plazo o cointegradas suelen estar asociadas a relaciones económicas específicas que son de interés particular, mientras que la dinámica de corto plazo describe el ajuste de las relaciones de largo plazo cuando se han producido perturbaciones.

Introducción

- Estos nos lleva a los modelos de corrección de errores o corrección de equilibrio (VEC), los cuales ofrecen un marco conveniente para separar los componentes de corto y largo plazo del proceso generador de datos (DGP)

- Antes de iniciar el estudio de los modelos VAR y VEC, vamos a repasar algunos conceptos que nos van a repasar algunas propiedades de los modelos univariados que más adelante utilizaremos para los modelos multivariados.

Repaso

Método Recursivo para solución de Modelo AR(1) con condición inicial

- Primero vamos a utilizar el método recursivo para poder obtener la solución de un modelo AR(1)

$$\mathbf{y_t = a_o + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t} \qquad (1)$$

- Asumiendo que existe una condición inicial, en t = 0 el valor de la variables es y_0

- Primero, utilizando el método recursivo, iniciando en el periodo 1, es decir con t = 1 para encontrar $\boldsymbol{y_1}$. Sustituyendo t=1 en (1) se tiene que

$$\boldsymbol{y_1 = a_o + a_1 y_0 + \varepsilon_1} \qquad (2)$$

Repaso

- De igual forma, encontramos el valor de $\boldsymbol{y_2}$ con t = 2, nuevamente sustituyendo t =2 en (1) se tiene que

$$\boldsymbol{y_2 = a_o + a_1 y_1 + \varepsilon_2} \qquad \textbf{(3)}$$

- Luego, sustituyendo (2) en (3) se tiene que

$$\boldsymbol{y_2 = a_o + a_1(a_o + a_1 y_0 + \varepsilon_1) + \varepsilon_2}$$

$$\boldsymbol{y_2 = a_o + a_1 a_o + a_1{}^2 y_0 + a_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2} \qquad \textbf{(4)}$$

Repaso

- De igual forma, para encontrar el valor de $\boldsymbol{y_3}$, sustituimos t = 3 en (1) obteniendo

$$\boldsymbol{y_3 = a_o + a_1 y_2 + \varepsilon_3} \qquad \textbf{(5)}$$

- Después, sustituyendo (4) en (5) y reordenando términos, se tiene que

$$\boldsymbol{y_3 = a_o + a_1(a_o + a_1 a_o + {a_1}^2 y_0 + a_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_3}$$

$$\boldsymbol{y_3 = a_o + a_1 a_o + {a_1}^2 a_0 + {a_1}^3 y_0 + {a_1}^2 \varepsilon_1 + a_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3}$$

$$\boldsymbol{y_3 = a_o[1 + a_1 + {a_1}^2] + {a_1}^3 y_0 + {a_1}^2 \varepsilon_1 + a_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3} \qquad \textbf{(6)}$$

Repaso

- De (2), (4), y (6) podemos ver una secuencia lógica, por lo cual para todo t >0, podemos expresar la solución general como

$$\boldsymbol{y_t = a_o \sum_{i=0}^{t-1} a_i{}^i + a_1{}^t\, y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} a_i{}^i\, \varepsilon_{t-i}} \qquad 7$$

Repaso

Método Recursivo para solución de Modelo AR(1) sin condición inicial

- Segundo, para obtener la solución de un modelo AR(1) sin condición inicial, partimos de

$$\mathbf{y_t = a_o + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t} \qquad (1)$$

- En t = 0, se tiene que (1)

$$\boldsymbol{y_0} = \mathbf{a_o + a_1 y_{-1} + \varepsilon_0} \qquad (2)$$

- En t = 1, se tiene que (1)

$$\boldsymbol{y_1} = \mathbf{a_o + a_1 y_0 + \varepsilon_2} \qquad (3)$$

Repaso

- Luego sustituyendo (2) en (3) se tiene que

$$\boldsymbol{y_1} = \mathbf{a_o} + \mathbf{a_1}(\mathbf{a_o} + \mathbf{a_1 y_{-1}} + \boldsymbol{\varepsilon_0}) + \boldsymbol{\varepsilon_1}$$

$$\boldsymbol{y_1} = \mathbf{a_o} + \mathbf{a_1}\boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1^2}\mathbf{y_{-1}} + \boldsymbol{a_1 \varepsilon_0} + \boldsymbol{\varepsilon_1} \tag{4}$$

- En t = 2, se tiene que (1)

$$\boldsymbol{y_2} = \mathbf{a_o} + \mathbf{a_1}\boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{\varepsilon_2} \tag{5}$$

Repaso

- Luego sustituyendo (4) en (5) se tiene que

$$y_2 = a_o + a_1(a_o + a_1 a_0 + a_1^2 y_{-1} + a_1 \varepsilon_0 + \varepsilon_1) + \varepsilon_2$$

$$y_2 = a_o + a_1 a_0 + a_1^2 a_0 + a_1^3 y_{-1} + a_1^2 \varepsilon_0 + a_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad (6)$$

- Por lo cual, podemos reescribir (6) como

$$y_t = a_0 \sum_{i=0}^{t} a_1^i + \sum_{i=0}^{t} a_1^i \varepsilon_{t-i} + a_1^{t+1} y_{-1} \qquad (7)$$

- Iterando hacia atrás m periodos, (7) se puede reescribir como

$$y_t = a_0 \sum_{i=0}^{t+m} a_1^i + \sum_{i=0}^{t+m} a_1^i \varepsilon_{t-i} + a_1^{t+m+1} y_{-m-1} \qquad (8)$$

Repaso

- **Finalmente,**

  - **Si $|a_1| < 1$, el término a_1^{t+m+1} de (8) se aproxima a cero a medida que m se aproxima a infinito.**
  - **Además, la suma infinita $\sum_{i=0}^{t+m} a_1^i$ converge a $\frac{1}{1-a_1}$ a medida que m se aproxima a infinito.**

- **Por lo cual, la solución sería**

$$y_t = \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i} \qquad (9)$$

Repaso

Propiedades de los errores de modelo

- Supongamos que tenemos un modelo en la media

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

Donde y_t es la variable de interés, ε_t es una perturbación de ruido blanco, & a_0, a_1 son coeficientes del modelo. Además asume que el error sigue la siguiente distribución

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2} \qquad (2)$$

Donde se tiene que v_t es un proceso de ruido blanco tal que $E_t v_t = 0$ & $\sigma_v^2 = 1$.

Repaso

Además, ε_{t-1} son independientes & α_0 & α_1 son constantes tal que $\alpha_0 > 0$ & $0 \leq \alpha_1 \leq 1$.

- Primero, calculamos la media y la varianza no condicional de ε_t
- Iniciamos, aplicando la función valor esperado en (2) como sigue

$$E_t(\varepsilon_t) = E_t\left(v_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}\right)$$

$$E_t(\varepsilon_t) = E_t(v_t)E_t\left(\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}\right) \tag{3}$$

- Dado que $E_t v_t = 0$, se tiene que (3) quedaría como:

$$E_t(\varepsilon_t) = 0 \tag{4}$$

Repaso

- Luego, para el cálculo de la varianza no condicional, utilizando (4) se tiene que

$$var(\varepsilon_t) = E_t\left[\left(v_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2} - 0\right)^2\right]$$

$$var(\varepsilon_t) = E_t(v_t^2)E_t\left(\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}\right)^2$$

$$var(\varepsilon_t) = E_t(v_t^2)\,E_t(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2) \qquad (5)$$

Repaso

- Dado que $E_t v_t^2 = \sigma_v^2 = 1$, (5) queda como

$$var(\varepsilon_t) = E_{t-1}(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2) \qquad (6)$$

- Trabajando en (6) se tiene que

$$var(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1 E_{t-1}(\varepsilon_{t-1}^2)$$

$$var(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1 var(\varepsilon_{t-1}) \qquad (7)$$

Repaso

- Luego, se tiene que

$$var(\varepsilon_t) = var(\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2_{\varepsilon_t}, \qquad (8)$$

- Así, sustituyendo (8) en (7) y reordenando términos se tiene que la varianza no condicional sería

$$\sigma^2_{\varepsilon_t} = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma^2_{\varepsilon_t}$$

$$\sigma^2_{\varepsilon_t} - \alpha_1 \sigma^2_{\varepsilon_t} = \alpha_0$$

$$(1 - \alpha_1)\sigma^2_{\varepsilon_t} = \alpha_0$$

$$\sigma^2_{\varepsilon_t} = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_1)} \qquad (9)$$

Repaso

- Segundo, calculamos la media y la varianza condicional de ε_t

Calculamos la media condicional aplicando la función de valor esperado en (2) como sigue:

$$E_{t-1}(\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots\ldots) = E_{t-1}v_t E_{t-1}(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

Dado que $E_{t-1}(v_t) = 0$, se tiene que (10) queda como

$$E_{t-1}(\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots\ldots) = 0 \qquad (11)$$

Repaso

- Posteriormente, calculamos la varianza condicional sería como sigue:

$$\boldsymbol{var(\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}\,,\varepsilon_{t-2},\ldots\ldots) = E_t\left[\left(v_t\sqrt{\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}-0\right)^2\right]}$$

$$\boldsymbol{var(\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}\,,\varepsilon_{t-2},\ldots\ldots) = E_t(v_t^2)E_t\left(\sqrt{\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{var(\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}\,,\varepsilon_{t-2},\ldots\ldots) = E_t(v_t^2)\;E_t(\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2)}$$

Repaso

- Dado que $E_t v_t^2 = \sigma_v^2 = 1$, (5) queda como

$$var(\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots\ldots) = E_{t-1}(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)$$

$$var(\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots\ldots) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \qquad (12)$$

Repaso

Propiedades del Error de Pronóstico

- Recordando (7), tenemos que

$$y_t = a_o \sum_{i=0}^{t-1} a_i{}^i + a_1{}^t\, y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} a_i{}^i\, \varepsilon_{t-i}$$

- Luego encontramos el error de pronostico para j periodos hacia adelante para el modelo AR(1)
- Primero, adelantado un periodo de tiempo (1), obtenemos que

$$y_{t+1} = a_o + a_1 y_t + \varepsilon_{t+1} \qquad \textbf{(1)}$$

Repaso

- Dado que $\boldsymbol{E_t \varepsilon_{t+1} = 0}$ debido a que el error tiene media cero, se tiene que

$$\boldsymbol{E_t y_{t+1} = a_o + a_1 y_t} \qquad \textbf{(2)}$$

- Entonces, el error de pronostico de un periodo hacia adelante es la diferencia entre el valor observado y el valor esperado de la variable dependiente,

$$\boldsymbol{e_t(1) = y_{t+1} - E_t y_{t+1}} \qquad \textbf{(3)}$$

Repaso

- Sustituyendo (1) y (2) en (3) y simplificando, se obtiene el error de pronóstico de un periodo hacia adelante

$$\boldsymbol{e_t(1) = a_o + a_1 y_t + \varepsilon_{t+1} - a_o - a_1 y_t}$$

$$\boldsymbol{e_t(1) = a_1 y_t - a_1 y_t + \varepsilon_{t+1}}$$

$$\boldsymbol{e_t(1) = \varepsilon_{t+1}} \qquad \textbf{(4)}$$

Repaso

- Luego, para encontrar el error de pronóstico de dos periodos hacia adelante, adelantamos 2 periodos hacia adelante (1) como sigue

$$\boldsymbol{y_{t+2} = a_o + \ a_1 y_{t+1} + \varepsilon_{t+2}} \qquad \textbf{(11)}$$

- Después, aplicamos la función de valor esperado a (11) para obtener

$$\boldsymbol{E_t y_{t+2} = a_o + \ a_1 E_t y_{t+1} + E_t \varepsilon_{t+2}}$$

- Dado que $E_t \varepsilon_{t+2} = 0$ debido a que el error tiene media cero, se tiene que

$$\boldsymbol{E_t y_{t+2} = a_o + \ a_1 E_t y_{t+1}} \qquad \textbf{(12)}$$

Repaso

- Entonces, el error de pronostico de dos periodos hacia adelante sería

$$e_t(2) = y_{t+2} - E_t y_{t+2} \qquad (13)$$

- Sustituyendo (11) y (12) en (13) y simplificando, se obtiene el error de pronóstico de dos periodo hacia adelante

$$e_t(2) = a_o + a_1 y_{t+1} + \varepsilon_{t+2} - a_o + a_1 E_t y_{t+1}$$

$$e_t(2) = a_1 (y_{t+1} - E_t y_{t+1}) + \varepsilon_{t+2} \qquad (14)$$

Repaso

- Luego, sustituyendo (10) en (14) se tiene que el error de pronostico de dos periodos hacia adelante es

$$\boldsymbol{e_t(2) = a_1\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}} \qquad \textbf{(15)}$$

- Realizando el mismo proceso, para encontrar el error de pronóstico tres periodos hacia adelante se tiene que

$$\boldsymbol{y_{t+3} = a_o + a_1 y_{t+2} + \varepsilon_{t+3}} \qquad \textbf{(16)}$$

- Nuevamente, aplicando la función valor esperado a ambos lados de (16) se tiene que

$$\boldsymbol{E_t y_{t+3} = a_o + a_1 E_t y_{t+2} + E_t \varepsilon_{t+3}} \qquad \textbf{(17)}$$

Repaso

- Dado que $E_t \varepsilon_{t+3} = 0$ debido a que el error tiene media cero, se tiene que

$$\boldsymbol{E_t y_{t+3} = a_o + \ a_1 E_t y_{t+2}} \quad \textbf{(18)}$$

- Entonces, el error de pronostico de tres periodos hacia adelante sería

$$\boldsymbol{e_t(3) = y_{t+3} - \ E_t y_{t+3}} \quad \textbf{(19)}$$

Repaso

- Sustituyendo (16) y (18) en (19) y simplificando, se obtiene el error de pronóstico de dos periodo hacia adelante

$$\boldsymbol{e_t(3) = a_o + \ a_1 y_{t+2} + \varepsilon_{t+3} - \ a_o + \ a_1 E_t y_{t+2}}$$

$$\boldsymbol{e_t(3) = \ a_1(y_{t+2} - E_t y_{t+2}) + \varepsilon_{t+3}} \qquad \textbf{(20)}$$

- Posteriormente, sustituyendo (15) en (20) se tiene que

$$\boldsymbol{e_t(3) = \ a_1(a_1 \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}) + \varepsilon_{t+3}}$$

$$\boldsymbol{e_t(3) = \ a_1^2 \varepsilon_{t+1} + a_1 \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3}} \qquad \textbf{(21)}$$

Repaso

- De (10), (15) y (21) vemos un patrón del error de pronóstico. En el caso de j periodos en el tiempo podemos generalizar como:

$$\boldsymbol{e_t(j) = \varepsilon_{t+j} + a_1\varepsilon_{t+j-1} + {a_1}^2\varepsilon_{t+j-2} + {a_1}^3\varepsilon_{t+j-3} \cdots} \qquad \textbf{(22)}$$

- Finalmente, podemos obtener la media y la varianza del error de pronóstico:

- Primero, se aplica la función de valor esperado a (22) para encontrar la media del error de pronóstico

$$\boldsymbol{E_t e_t(j) = E_t\varepsilon_{t+j} + a_1 E_t\varepsilon_{t+j-1} + {a_1}^2 E_t\varepsilon_{t+j-2} + {a_1}^3 E_t\varepsilon_{t+j-3} \cdots}$$

$$\boldsymbol{E_t e_t(j) = 0}$$

Repaso

- Debido a que el valor esperado del error de pronóstico es igual a cero, los pronósticos son insesgados.

- Segundo, se aplica la función varianza a (22) para encontrar la varianza del error de pronóstico

$$var(e_t(j)) = var(\varepsilon_{t+j}) + {a_1}^2 var(\varepsilon_{t+j-1}) + {a_1}^4 var(\varepsilon_{t+j-2}) + {a_1}^6 var(\varepsilon_{t+j-3}) \cdots$$

$$var(e_t(j)) = \sigma^2 + {a_1}^2 \sigma^2 + {a_1}^4 \sigma^2 + {a_1}^6 \sigma^2 \cdots$$

$$var(e_t(j)) = \sigma^2 (1 + {a_1}^2 + {a_1}^4 + {a_1}^6 + \cdots)$$

Repaso

- La varianza del error de pronóstico no es constante al incrementarse el horizonte del pronóstico, por lo cual a pesar de que los pronósticos son insesgados, estos pierden precisión al aumentar el horizonte del mismo

- Ahora, vamos a recordar algunas propiedades del operador rezago (L).

- Recordando, el operador de rezagos es un operador lineal tal que para cualquier valor y_t

$$L^i \equiv y_{t-i} \tag{1}$$

Repaso

- Algunas propiedades del operador de rezago:

  - El rezago de una constante es la constante: $Lc = c$
  - Aplicando la ley distributiva para el operador rezagos, se tiene que:

$$\left(L^i + L^j\right)y_t = L^i y_t + L^j y_t = y_{t-i} + y_{t-j}$$

  - La ley asociativa de la multiplicación también se aplica al operador de rezagos, se tiene que:

$$L^i L^j y_t = L^i\left(L^j y_t\right) = L^i y_{t-j} = y_{t-j-i}$$

$$L^i L^j y_t = L^{i+j} y_t = y_{t-j-i}$$

  - El operador de rezagos elevado a una potencia negativa se expresa como:

$$L^{-i} y_t = y_{t-(-i)} = y_{t+i}$$

Repaso

- Para $|a| < 1$ se tiene que la suma infinita:

$$(1 + aL + a^2L^2 + a^3L^3 + \cdots)y_t = \frac{y_t}{(1-aL)}$$

- Para $|a| > 1$, la suma infinita

$$A[1 + (aL)^{-1} + (aL)^{-2} + (aL)^{-3} + \cdots]y_t = \frac{-aLy_t}{(1-aL)}$$

$$\frac{y_t}{(1-aL)} = -(aL)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (aL)^{-i}\, y_t$$

Repaso

- Utilizando el operador de rezagos, podemos reescribir la ecuación de orden p: $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \cdots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t$ como

$$\left(1 - a_1 L - a_2 L^2 - \cdots - a_p L^p\right) y_t = a_0 + \varepsilon_t \tag{2}$$

- (2) podría reescribir como

$$A(L) y_t = a_0 + \varepsilon_t \tag{3}$$

Donde se tiene que: $A(L) = \left(1 - a_1 L - a_2 L^2 - \cdots - a_p L^p\right)$

Repaso

- También, podemos utilizar el operador de rezagos para expresar la ecuación (4) en (5)

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \cdots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots \beta_q \varepsilon_{t-q} \qquad (4)$$

$$\left(1 - a_1 L - a_2 L^2 - \cdots - a_p L^p\right) y_t = a_0 + \left(1 + \beta_1 L + \beta_2 L + \cdots \beta_q L^q\right) \varepsilon_t \qquad (5)$$

Además, (5) puede reescribirse como:

$$A(L) y_t = a_0 + B(L) \varepsilon_t \qquad (6)$$

Donde se tiene que:

$$A(L) = \left(1 - a_1 L - a_2 L^2 - \cdots - a_p L^p\right) \text{ y } B(L) = \left(1 + \beta_1 L + \beta_2 L + \cdots \beta_q L^q\right)$$

Repaso

- El operador de rezagos se puede utilizar para encontrar la solución de una ecuación, por ejemplo,

$$y_t = a_0 + a_1 L y_t + \varepsilon_t \qquad (7)$$

- Resolviendo (7), se tiene que

$$y_t - a_1 L y_t = a_0 + \varepsilon_t$$

$$(1 - a_1 L) y_t = a_0 + \varepsilon_t$$

$$y_t = \frac{a_0 + \varepsilon_t}{1 - a_1 L} \qquad (8)$$

$$y_t = \frac{a_0}{1 - a_1 L} + \frac{\varepsilon_t}{1 - a_1 L} \qquad (9)$$

Repaso

- Luego, la primera parte de (9) se resuelve como:

$$\frac{a_0}{1-a_1 L} = a_0(1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + a_1^3 L^3 + \cdots) = (a_0 + a_1 a_0 + a_1^2 a_0 + a_1^3 a_0 + \cdots) =$$

$$= a_0\,(1 + a_1 1 + a_1^2 1 + a_1^3 + \cdots) = \frac{a_0}{1-a_1} \qquad (10)$$

- De igual forma, la segunda parte de (9) se resuelve como:

$$\frac{\varepsilon_t}{1-a_1 L} = \varepsilon_t(1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + a_1^3 L^3 + \cdots) = a_1^0 \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + a_1^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i} \qquad (11)$$

- Uniendo (10) y (11) la solución de (9) sería:

$$y_t = \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i}$$

Repaso

Media, varianza, covarianza y Momentos

- La media de una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$, esta definida como $\mu = E[X]$.
- La varianza de $\boldsymbol{X}$ esta definida como $\sigma^2 = var[x] = E[(X - E[X])^2]$
- El momento m^{th} de $\boldsymbol{X}$ esta definido como $\mu_m = E[X^m]$
- Para $m > 1$, el momento central m^{th} de $\boldsymbol{X}$ esta dado por $\mu_m = E[(X - E[X])^m]$
- La covarianza de $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ se define como $COV(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$