

Cointegración y corrección de errores

Econometría IV

Rodrigo Chang

Metodología de Engle y Granger

Introducción

¿Qué pasa si hacemos una regresión con dos variables que **no son estacionarias**?

1. **Riesgo:** Regresión Espuria (R^2 alto, t -stat significativos, pero sin sentido económico).
2. **Sin embargo**, si una combinación lineal de ellas es estacionaria, están **Cointegradas**.
3. **Solución:** La metodología de dos pasos de Engle y Granger (1987).

El Proceso resumido

La metodología consiste en dos etapas distintas:

- **Paso 1 (Largo Plazo):** Estimar la regresión estática y probar si los residuos son estacionarios.
- **Paso 2 (Corto Plazo):** Si hay cointegración, estimar el Modelo de Corrección de Errores (ECM) utilizando los residuos del paso 1.

Paso 1: La Ecuación de Largo Plazo

Supongamos dos variables $I(1)$, x_t y y_t . Estimamos por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO):

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$$

Guardamos los residuos estimados:

$$\hat{u}_t = y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_t$$

Nota: En esta etapa, ignoramos los estadísticos t y el R^2 estándar, ya que la distribución asintótica no es normal.

Prueba de Cointegración (Test sobre Residuos)

Aplicamos la prueba Dickey-Fuller Aumentada (ADF) sobre \hat{u}_t .

Importante: Como \hat{u}_t es un residuo estimado (tiene media cero), la prueba ADF se hace **sin constante y sin tendencia**.

$$\Delta\hat{u}_t = \gamma\hat{u}_{t-1} + \sum \delta_i \Delta\hat{u}_{t-i} + e_t$$

- $H_0: \gamma = 0$ (No estacionario / No cointegración)
- $H_1: \gamma < 0$ (Estacionario / Cointegración)

El Modelo de Corrección de Errores (ECM)

- Si encontramos cointegración, el Teorema de Representación de Granger garantiza que existe un mecanismo de corrección de errores.
- Estimamos la dinámica de corto plazo incluyendo el residuo rezagado (\hat{u}_{t-1}):

$$\Delta y_t = \alpha_1 \Delta x_t + \alpha \cdot \hat{u}_{t-1} + \epsilon_t$$

Donde α (coeficiente de ajuste) debe ser negativo y significativo.

Mecanismo de corrección de errores

$$\Delta y_t = \alpha_1 \Delta x_t + \alpha \left(y_{t-1} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{t-1} \right) + \epsilon_t$$

- El término $\left(y_{t-1} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{t-1} \right)$ representa el error o distancia al equilibrio ayer.
- Si el error fue positivo, y_{t-1} estaba muy alto y $\alpha < 0$, entonces $\Delta y_t < 0$, es decir, el modelo fuerza a y a bajar.

Prueba de Johansen

Motivación: ¿Por qué Johansen?

La metodología de Engle-Granger (dos pasos) es útil, pero tiene limitaciones importantes cuando trabajamos con más de dos variables:

Modelos de Corrección de Errores Vectoriales

El procedimiento de Johansen se basa en estimar un **Modelo de Corrección de Errores Vectorial (VECM)**:

El punto de partida es reparametrizar un modelo VAR en niveles como un VECM. Si partimos de un VAR de orden p :

$$y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \cdots + A_p y_{t-p} + u_t$$

Este se transforma en:

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta y_{t-i} + u_t$$

- ¿A qué es igual la matriz Π ?

$$\Pi = A_1 - I_K$$

Rango de Π

El núcleo del procedimiento de Johansen es analizar el rango (r) de la matriz Π . Existen tres casos posibles:

- $r = 0$: No existe co-integración. Las variables no comparten tendencias comunes y el modelo debe estimarse en primeras diferencias (VAR en diferencias).
- $r = K$ (rango completo): El proceso es estacionario en niveles ($I(0)$), por lo que no hay raíces unitarias y se puede usar un VAR estándar en niveles.

Rango de Π

- $0 < r < K$: Existen r relaciones de co-integración. En este caso, la matriz Π se descompone en el producto de dos matrices de rango r :

$$\Pi = \alpha\beta'$$

Test de Johansen en R

```
1 # Estimación del VAR en niveles
2 var_levels <- VAR(datos_vec, type = "const", lag.max = 8, ic = "AIC")
3 # Orden sugerido por AIC
4 var_levels$p
5
6 # K = número de rezagos (basado en VARselect sobre niveles - 1)
7 johansen_test <- ca.jo(datos_vec,
8   type = "trace",      # Usualmente "trace" es el estándar
9   ecdet = "const",     # Constante en la relación de cointegración
10  K = var_levels$p,     # Rezagos (del VAR en niveles, = 2)
11  spec = "longrun")    # Especificación de largo plazo
```

Modelo VECM estimado

Se estima el modelo:

$$y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + u_t$$

$$y_t - y_{t-1} = (A_1 - I_2) y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + u_t$$

$$\Delta y_t = (A_1 + A_2 - I_2) y_{t-1} - A_2 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + u_t$$

$$\Delta y_t = -(I_2 - A_1 - A_2) y_{t-1} - A_2 \Delta y_{t-1} + u_t$$

Finalmente,

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + u_t,$$

donde $\Pi = -(I_2 - A_1 - A_2)$ y $\Gamma_1 = -A_2$.

Resultados del Test (Salida de R)

Analizaremos la siguiente salida de `urca::ca.jo`:

```
1 Test type: trace statistic
2
3 Values of teststatistic and critical values of test:
4
5           test 10pct  5pct  1pct
6 r <= 2 |   3.31   7.52   9.24 12.97
7 r <= 1 |  18.12 17.85 19.96 24.60
8 r = 0  |  56.79 32.00 34.91 41.07
9
10 Eigenvectors (salida de la primera columna):
11 y.l2: 1.000, z.l2: 1.035, w.l2: -1.016, const: 0.013
12
13 Weights W (salida de la primera columna):
14 y.d: -0.546, z.d: -0.165, w.d: -0.218
```

El Test de la Traza (1/2)

- Observamos la sección `Values of teststatistic`.
- La lógica del Test de la Traza es secuencial, empezando desde abajo ($r = 0$) hacia arriba.
- Hipótesis 1 ($H_0 : r = 0$): ¿Existen cero relaciones?
 - Estadístico: 56.79. Valor Crítico (5%): 34.91
 - Decisión: Como $56.79 > 34.91$, RECHAZAMOS la nula. Hay al menos una relación.

El Test de la Traza (2/2)

- Hipótesis 2 ($H_0 : r \leq 1$): ¿Existen como máximo 1 relación?
 - Estadístico: 18.12. Valor Crítico (5%): 19.96
 - Decisión: Como $18.12 < 19.96$, NO RECHAZAMOS la nula.
 - Resultado: Nos quedamos con $r = 1$. Por lo tanto, para el resto del análisis, solo nos importa la primera columna de las matrices siguientes.

La Ecuación de Largo Plazo (β)

Velocidad de Ajuste (α)

- Usamos la primera columna de **Weights W**.
- Estos valores indican qué tan rápido reacciona cada variable cuando se pierde el equilibrio.

$$\Delta y_t = \alpha \beta' y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta y_t = -0.546(Error_{t-1}) + \dots$$

- Signo Negativo: Indica estabilidad. Si y está por encima del equilibrio, debe bajar.
- Magnitud (0.546): El sistema corrige el 54.6% del desequilibrio en un solo periodo. Es un ajuste rápido.

Resumen

- El test de la traza confirmó que las tres variables (y , z , w) se mueven juntas a largo plazo ($r = 1$).
- Identificamos que w impulsa a y positivamente, mientras que z lo hace negativamente.
- El sistema es estable, con y siendo la variable que reacciona más agresivamente (54%) para corregir cualquier desviación del equilibrio.

Ejercicio de interpretación

- ¿Cuántos vectores de cointegración sugiere la prueba de Johansen?

```
#####  
# Johansen-Procedure #  
#####
```

Values of teststatistic and critical values of test:

| | test | 10pct | 5pct | 1pct | |
|------------|-------|-------|-------|-------|------------|
| $r \leq 2$ | 4.12 | 7.52 | 9.24 | 12.97 | <-- Paso 3 |
| $r \leq 1$ | 18.45 | 13.75 | 15.67 | 20.20 | <-- Paso 2 |
| $r = 0$ | 45.30 | 19.77 | 22.00 | 26.81 | <-- Paso 1 |