Econometría IV
Programa de Estudios Superiores
Banco de Guatemala

Notas de Clases 2
Econometría IV

Vectores Autorregresivos (VAR)

- El modelo de Vectores Autoregresivos (VAR) es ampliamente utilizado para el análisis de series de tiempo multivariadas.

- El VAR consiste en un sistema de ecuaciones donde cada una de las variables del sistema se considera endógena, con ello se controla por la posible doble causalidad entre las variables y se toma en cuenta la posible correlación entre los errores de cada una de las ecuaciones del sistema.

- Cada una de las variables del modelo es explicada por las otras variables, así como también por sus propios rezagos y los rezagos de las demás variables, hasta un número de rezagos máximo preestablecido “p”.

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Los modelos VAR son de mucha utilidad cuando existe evidencia de simultaneidad entre un grupo de variables, y además, que sus relaciones se transmiten a lo largo de un determinado número de períodos.

- Además, la principal motivación detrás de los modelos VAR es la dificultad en identificar variables como exógenas, como es preciso hacer para identificar un modelo de ecuaciones simultáneas.

- También, se pueden incluir variables exógenas respecto a las variables que integran el modelo VAR, por ejemplo, variables de USA en un VAR con variables nacionales. Estas variables se incluyen en tiempo contemporáneo.

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Por ejemplo, consideremos un VAR(1), es decir, un VAR con 1 rezago, con dos variables como sigue:

$$y_{1t} = \alpha_{10} - \alpha_{11} y_{2t} + \alpha_{12} y_{1t-1} + \alpha_{13} y_{2t-1} + \gamma_1' z_t + \varepsilon_{1t}$$
$$y_{2t} = \alpha_{20} - \alpha_{21} y_{1t} + \alpha_{22} y_{1t-1} + \alpha_{23} y_{2t-1} + \gamma_2' z_t + \varepsilon_{2t}$$

- Donde se tiene que:

y_{1t}, y_{2t} son variables endógenas y estacionarias.
z_t es un vector de variables exógenas y estacionarias.
ε_{1t}, ε_{2t} son procesos ruido blanco con esperanza cero, varianzas $\sigma_{\varepsilon 1}^2, \sigma_{\varepsilon 2}^2$ y covarianza σ_{12}.
α_{10},α_{20} son vectores de constantes
α_{11}, α_{12}, α_{13}, α_{21}, α_{22}, son matrices de coeficientes

Vectores Autorregresivos (VAR)

- z_t es un vector de variables que se determinan claramente fuera de la influencia de y_{1t} e y_{2t}, de modo que se puede justificar que $E(z_t \varepsilon_{1t}) = E\big((z_t \varepsilon_{1t})\big) = 0 \ \forall \ t$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Variables Integradas

- Una variable estacionaria es aquella que oscila alrededor de su media, es decir, que no tiene tendencia estocástica.

- En series de tiempo, una variable y_t se dice que es integrada de orden d, (I_d) , si se puede remover su tendencia estocástica a través de diferenciarla d veces, es decir, es posible transformar una variable no estacionaria en estacionaria a través de la diferenciación de la misma.

- La estacionariedad es una propiedad importante para obtener buenas propiedades en el error de la estimación, es decir, que el error sea normal, sin autocorrelación, y con la misma varianza (homocedasticidad).

Vectores Autorregresivos (VAR)

Variables Integradas

- Para poder remover una tendencia estocástica, se utilizar el operador diferencia Δ a una variable.

- Una variable es integrada de orden 1, $I(1)$, si al diferenciarla una vez, ésta se vuelve estacionaria. $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

- En general, una variable integrada de orden d, $I(d)$es aquella que al diferenciarla d veces se vuelve estacionaria.

Vectores Autorregresivos (VAR)

Estacionariedad

- Un proceso estocástico es estacionario en covarianza, o simplemente estacionario, si posee momentos de primer y segundo orden invariantes en el tiempo.

- Una variable económica se considera estacionaria en covarianza si el proceso generador de datos (DGP) subyacente es estacionario en covarianza.

Vectores Autorregresivos (VAR)

Estacionariedad

- Formalmente se tiene que se debe cumplir

$$E[Y_t] = \mu \quad Var[Y_t] = \sigma^2 \text{ y } cov[y_t, y_{t-h}] = \gamma_h \ \ \forall t, h$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Introducción

- Un modelo de vectores autorregresivos (VAR) se utiliza cuando no hay confianza de asumir si una variable es endógena y las demás son exógenas.

- Iniciamos, considerando un sistema bivariado como sigue:

$$y_t = b_{10} - b_{12} z_t + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \qquad (1)$$
$$z_t = b_{20} - b_{21} y_t + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \qquad (2)$$

- Donde se considera que y_t e z_t son variables estacionarias.

Vectores Autorregresivos (VAR)

- ε_{yt} y ε_{zt} son perturbaciones de ruido blanco con desviaciones estándar σ_y y σ_z.
- $b_{12}, b_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}$ y γ_{22} son coeficientes que multiplican a las variables
- b_{10} , b_{20} son constantes de cada una de las ecuaciones del sistema.
- Las ecuaciones (1) y (2) representan un VAR de primer orden, VAR(1), debido a que ambas variables están rezagadas un periodo en el lado derecho.

Vectores Autorregresivos (VAR)

- En el sistema VAR existe retroalimentación entre las variables tanto en tiempo contemporáneo como en el primer rezago.

- Por ejemplo, en la primera ecuación del sistema, el parámetro $-b_{12}$ representa el efecto contemporáneo de la variable z_t sobre la variable y_t , mientras que el parámetro γ_{12} representa el efecto rezagado de la variable z_t sobre la variable y_t .

- El sistema de ecuaciones (1) y (2) esta en su forma estructural o en forma primitiva. Para poder estimar los coeficientes del modelo, es necesario trasladar las variables en tiempo contemporáneo al lado izquierdo como sigue:

Vectores Autorregresivos (VAR)

$$y_t + b_{12} z_t = b_{10} + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \quad (3)$$
$$z_t + b_{21} y_t = b_{20} + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \quad (4)$$

- Luego utilizamos el algebra matricial en (3) y (4) para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{b}_{12} \\ \boldsymbol{b}_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_t} \\ \boldsymbol{z_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{10} \\ \boldsymbol{b}_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{11} & \boldsymbol{\gamma}_{12} \\ \boldsymbol{\gamma}_{21} & \boldsymbol{\gamma}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_{t-1}} \\ \boldsymbol{z_{t-1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_{yt}} \\ \boldsymbol{\varepsilon_{zt}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

- Podemos expresar (5) como un sistema compacto matricial como sigue:

Vectores Autorregresivos (VAR)

$$\boldsymbol{B x_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 x_{t-1} + \varepsilon_t} \quad (6)$$

- Donde se tiene que:

$$\boldsymbol{B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix},\ x_t = \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}, \Gamma_0 = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix},}$$

$$\boldsymbol{\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}, \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}} \quad (7)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Pre multiplicando (6) a ambos lados por B^{-1} tenemos que

$$\boldsymbol{B^{-1}Bx_t} = \boldsymbol{B^{-1}}\Gamma_0 + \boldsymbol{B^{-1}}\Gamma_1\boldsymbol{x_{t-1}} + \boldsymbol{B^{-1}\varepsilon_t}$$

$$\boldsymbol{x_t} = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}\boldsymbol{x_{t-1}} + \boldsymbol{e_t} \qquad \textbf{(8)}$$

- Donde se tiene que:

$$\boldsymbol{A_0} = \boldsymbol{B^{-1}\Gamma_0}, \ \boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{B^{-1}\Gamma_1} \ \text{ y } \ \boldsymbol{e_t} = \boldsymbol{B^{-1}\varepsilon_t}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- El sistema de ecuaciones del modelo VAR, en su forma standard o reducida, es el siguiente

$$\boldsymbol{y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + e_{1t}} \qquad \textbf{(9)}$$

$$\boldsymbol{z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + e_{2t}} \qquad \textbf{(10)}$$

- En el caso de los errores, $\boldsymbol{e_{1t}}$ y $\boldsymbol{e_{2t}}$, son una combinación lineal de las perturbaciones estructurales $\boldsymbol{\varepsilon_{yt}}$ & $\boldsymbol{\varepsilon_{zt}}$.

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Entonces tenemos que

$$e_t = B^{-1}\varepsilon_t \tag{11}$$

- Recordando algebra matricial tenemos que

$$B^{-1} = \frac{1}{det|B|}C^T \tag{12}$$

- Donde se tiene que C es la matriz de cofactores

- Primero, el determinante de la matriz B sería

$$det|B| = 1 - b_{12}b_{21} \tag{13}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- La matriz de cofactores se define como:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

- Donde se tiene que

$$c_{11} = 1$$

$$c_{12} = -b_{21}$$

$$c_{21} = -b_{12}$$

$$c_{22} = 1$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- La matriz de cofactores se define como:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -b_{21} \\ -b_{12} & 1 \end{pmatrix}$$

- Luego encontramos la matriz traspuesta de C como sigue:

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

- Entonces, utilizando (13) y (14) en (12) se tiene que

$$B^{-1} = \frac{1}{1-b_{12}b_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Utilizando (15) en (11) se tiene que:

$$e_t = \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - b_{12} b_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_{yt}} \\ \boldsymbol{\varepsilon_{zt}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\varepsilon_{yt}} - b_{12} \boldsymbol{\varepsilon_{zt}}}{1 - b_{12} b_{21}} \\ \dfrac{\boldsymbol{\varepsilon_{zt}} - b_{21} \boldsymbol{\varepsilon_{yt}}}{1 - b_{12} b_{21}} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Ahora, podemos obtener las propiedades estadísticas de (16).
- Para ello vamos a trabajar en el error e_{1t}

$$e_{1t} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon_{yt}} - b_{12}\boldsymbol{\varepsilon_{zt}}}{1 - b_{12}b_{21}} \tag{17}$$

- Primero la media, aplicando la función valor esperado a (17) se tiene que

$$E(e_{1t}) = \frac{\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon_{yt}} - b_{12}\boldsymbol{\varepsilon_{zt}}\right)}{1 - b_{12}b_{21}} = 0 \tag{18}$$

- Dado que $E\left(\boldsymbol{\varepsilon_{yt}}\right) = E(\boldsymbol{\varepsilon_{zt}})$=0 porque son procesos ruido blanco.

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Segundo la varianza, como sigue:

$$var(e_{1t}) = E[e_{1t} - E(e_{1t})]^2$$

$$var(e_{1t}) = E[e_{1t}]^2$$

$$var(e_{1t}) = E\left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon_{yt}} - b_{12}\boldsymbol{\varepsilon_{zt}}}{1 - b_{12}b_{21}}\right]^2$$

$$var(e_{1t}) = \frac{E\left[\varepsilon_{yt}^2 - 2b_{12}\boldsymbol{\varepsilon_{yt}}\boldsymbol{\varepsilon_{zt}} + b_{12}^2\varepsilon_{zt}^2\right]}{(1 - b_{12}b_{21})^2}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

$$var(e_{1t}) = \frac{\sigma_y^2 + b_{12}^2\sigma_z^2}{(1 - b_{12}b_{21})^2} \tag{19}$$

- Siguiendo el mismo proceso, se puede encontrar la varianza de e_{2t} , obteniéndose

$$var(e_{2t}) = \frac{\sigma_z^2 + b_{21}^2\sigma_y^2}{(1 - b_{12}b_{21})^2} \tag{20}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Además, la autocorrelación entre e_{1t} & e_{1t-i} esta definida por:

$$Ee_{1t}e_{1t-i} = \frac{E\left[\left(\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt}\right)\left(\varepsilon_{yt-i} - b_{12}\varepsilon_{zt-i}\right)\right]}{(1 - b_{12}b_{21})^2}$$

$$Ee_{1t}e_{1t-i} = \frac{E\left[\varepsilon_{yt}\varepsilon_{yt-i} - b_{12}\varepsilon_{yt}\varepsilon_{zt-i} - b_{12}\varepsilon_{zt}\varepsilon_{yt-i} + b_{12}^2\varepsilon_{zt}\varepsilon_{zt-i}\right]}{(1-b_{12}b_{21})^2} = 0 \qquad (21)$$

- Luego, la covarianza entre e_{1t} & e_{2t} esta definida por:

Vectores Autorregresivos (VAR)

$$Ee_{1t}e_{2t} = \frac{E\left[\left(\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt}\right)\left(\varepsilon_{zt} - b_{21}\varepsilon_{yt}\right)\right]}{(1 - b_{12}b_{21})^2}$$

$$Ee_{1t}e_{1t-i} = \frac{E\left[\varepsilon_{yt}\varepsilon_{zt} - b_{21}\varepsilon_{yt}^2 - b_{12}\varepsilon_{zt}^2 + b_{12}b_{21}\varepsilon_{zt}\varepsilon_{yt}\right]}{(1 - b_{12}b_{21})^2}$$

$$Ee_{1t}e_{1t-i} = \frac{-b_{21}E\left(\varepsilon_{yt}^2\right) - b_{12}E(\varepsilon_{zt}^2)}{(1 - b_{12}b_{21})^2} = \frac{-\left(b_{21}\sigma_y^2 + b_{12}\sigma_z^2\right)}{(1 - b_{12}b_{21})^2} \qquad (22)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Finalmente, la matriz de varianza – covarianza sería

$$\Sigma = \begin{bmatrix} var(e_{1t}) & cov(e_{1t}, e_{2t}) \\ cov(e_{1t}, e_{2t}) & var(e_{2t}) \end{bmatrix} \tag{23}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Estabilidad y Estacionariedad

- Recordando un modelo de series de tiempo AR(1)

$$y_t = ay_{t-1} + u_t \tag{24}$$

$$y_t - ay_{t-1} = u_t$$

$$(1 - aL)y_t = u_t \tag{25}$$

- La condición para que y_t sea estacionaria es que $a \neq 1$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- La prueba de hipótesis era que

$$H_0: a = 1$$
$$H_a: a < 1$$

- Si se rechazaba la hipótesis nula, entonces la serie de tiempo es estacionaria (o no tenia una raíz unitaria)

- Si se aceptaba la hipótesis nula, entonces la serie no es estacionaria. Para poder volver estacionaria, se diferenciaba la misma una vez

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Entonces, el polinomio característico de (25) sería

$$1 - aL = 0$$

- Entonces, si $a = 1$, entonces (24) seria un random walk y el polinomio tendría una raíz unitaria, por lo cual la variable no seria estacionaria. Si se trabaja con series de tiempo no estacionarios, los resultados obtenidos podrían ser espurios.

$$1 = L$$

- Para volver estacionaria la serie de tiempo, se le debe aplicar la primera diferencia.

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Ahora, se puede aplicar el mismo análisis para el caso de un sistema VAR

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t \qquad (26)$$

- Ahora, se puede aplicar el mismo análisis para el caso de un sistema VAR, retrasando un periodo (26) tenemos que:

$$x_{t-1} = A_0 + A_1 x_{t-2} + e_{t-1} \qquad (27)$$

- Luego, utilizando (27) en (26) y reordenando términos se tiene que:

$$x_t = A_0 + A_1 (A_0 + A_1 x_{t-2} + e_{t-1}) + e_{t-1}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

$$x_t = A_0 + A_1 A_0 + A_1^2 x_{t-2} + A_1 e_{t-1} + e_t \qquad (28)$$

- Si nuevamente retrocedemos 1 periodo (27), se tiene que:

$$x_{t-2} = A_0 + A_1 x_{t-3} + e_{t-2} \qquad (29)$$

- Luego, utilizando (29) en (28) y reordenando términos se tiene que:

$$x_t = A_0 + A_1 A_0 + A_1^2 (x_{t-2} = A_0 + A_1 x_{t-3} + e_{t-2}) + A_1 e_{t-1} + e_t$$

$$x_t = A_0 + A_1 A_0 + A_1^2 A_0 + A_1^3 x_{t-3} + A_1^2 e_{t-2} + A_1 e_{t-1} + e_t$$

$$x_t = [I + A_1 + A_1^2 + \cdots A_1^n] A_0 + A_1^{n+1} x_{t-n-1} + \sum_{i=0}^{n} A_1^i e_{t-i} \qquad (30)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Recordando algebra matricial, para que los eigenvalues de A_1 sean menores que uno, tiene que ser que las raíces de (30) sea mayores que 1

$$det(I_2 - A_1 L) = 0 \text{ para } |L| > 1 \tag{31}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Esto se debe a que se define a los eigenvalues como las soluciones a:

$$det(A_1 - \lambda I_2) = 0 \qquad (32)$$

- Por lo cual, los eigenvalues son menores que 1 si y solo sí las soluciones de (30) son mayores que 1, o en otras palabras, caigan afuera del circulo unitario.

- Trabajando matricialmente (31) tenemos que:

$$det(I_2 - A_1 L) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} L\right) = 0$$

$$det(I_2 - A_1 L) = det\begin{bmatrix} 1 - a_{11}L & -a_{12}L \\ -a_{21}L & 1 - a_{22}L \end{bmatrix} = 0$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

$$(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2 = 0 \qquad (33)$$

- Cuando n se aproxima al infinito, se tiene que podemos reescribir (30) como sigue :

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{n} A_1^i e_{t-i} \qquad (34)$$

- Donde $\lim_{n\to\infty} I + A_1 + A_1^2 + \cdots A_1^n = (I_2 - A_1)^{-1}$, por lo cual se tiene que

$$\mu = (I_2 - A_1)^{-1} A_0$$

$$\mu = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

$$\mu = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}$$

$$\mu = \frac{\left[\begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & 1 - a_{22} \end{pmatrix}\right]^{-1}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - (a_{21}a_{12})} \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}$$

$$\mu = \frac{\begin{bmatrix} 1-a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & 1-a_{11} \end{bmatrix}}{(1-a_{11})(1-a_{22})-(a_{21}a_{12})} \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(1 - a_{22})a_{10} + a_{21}a_{20}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - (a_{21}a_{12})} \\ \dfrac{a_{12}a_{10} + (1 - a_{11})a_{20}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - (a_{21}a_{12})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(1 - a_{22})a_{10} + a_{21}a_{20}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - (a_{21}a_{12})} \\ \dfrac{a_{12}a_{10} + (1 - a_{11})a_{20}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - (a_{21}a_{12})} \end{bmatrix} \qquad (35)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Luego, la media no condicional (34) sería:

$$E(x_t - \mu)^2 = E\left[\mu + \sum_{i=0}^{n} A_1^i e_{t-i} - \mu\right]^2 = E\left[\sum_{i=0}^{n} A_1^i e_{t-i}\right]^2 \qquad (36)$$

- Posteriormente, la varianza de (34) seria:

$$E(x_t - \mu)^2 = (I + A_1^2 + A_1^4 + A_1^6 + \cdots)\, E[e_{1t}]^2 \qquad (37)$$

- Puesto que $Ee_te_{t-i} = 0 \; \forall \; i \neq 0$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Recordando se tiene que:

$$E[e_{1t}]^2 = \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t} & e_{2t} \end{bmatrix} = \Sigma \qquad (38)$$

- Sustituyendo (38) en (37) se tiene que:

$$E(x_t - \mu)^2 = (I + A_1^2 + A_1^4 + A_1^6 + \cdots)\,\Sigma$$

$$E(x_t - \mu)^2 = (I + A_1^2 + A_1^4 + A_1^6 + \cdots)\,\Sigma$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

$$E(x_t - \mu)^2 = [I - A_1^2]^{-1}\Sigma \qquad (39)$$

- Otra forma de chequear estabilidad en el modelo VAR sería, (7) y (8):

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + e_{1t} \qquad (40)$$

$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + e_{2t} \qquad (41)$$

- Luego, aplicando el operador de rezagos en (40) y (41), se tiene que:

$$y_t = a_{10} + a_{11}Ly_t + a_{12}Lz_t + e_{1t} \qquad (42)$$

$$z_t = a_{20} + a_{21}Ly_t + a_{22}Lz_t + e_{2t} \qquad (43)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Reordenando términos de (42) y (43) se tiene que:

$$y_t - a_{11}Ly_t = a_{10} + a_{12}Lz_t + e_{1t}$$

$$z_t - a_{22}Lz_t = a_{20} + a_{21}Ly_t + e_{2t}$$

$$[1 - a_{11}L]y_t = a_{10} + a_{12}Lz_t + e_{1t} \tag{44}$$

$$[1 - a_{22}L]z_t = a_{20} + a_{21}Ly_t + e_{2t} \tag{45}$$

- Despejando (45) respecto de z_t se tiene que:

$$z_t = \frac{a_{20} + a_{21}Ly_t + e_{2t}}{[1 - a_{22}L]} \tag{46}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Aplicando el operador de rezagos a ambos lados :

$$Lz_t = \frac{L(a_{20} + a_{21}Ly_t + \ e_{2t})}{[1 - a_{22}L]} \tag{47}$$

- Luego sustituyendo (47) en (44) se tiene que:

$$[1 - a_{11}L]y_t = a_{10} + a_{12}\left[\frac{L(a_{20}+a_{21}Ly_t+\ e_{2t})}{[1-a_{22}L]}\right] + \ e_{1t}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Luego reordenando términos para despejar y_t

$$[1 - a_{11}L]y_t - \frac{a_{12}a_{21}L^2y_t}{[1-a_{22}L]} = a_{10} + \frac{a_{12}a_{20}}{[1-a_{22}L]} + a_{12}\left[\frac{L(e_{2t})}{[1-a_{22}L]}\right] + e_{1t}$$

$$\frac{[1-a_{11}L][1-a_{22}L]y_t - a_{12}a_{21}L^2y_t}{[1-a_{22}L]} = a_{10} + \frac{a_{12}a_{20}}{[1-a_{22}L]} + a_{12}\left[\frac{e_{2t-1}}{[1-a_{22}L]}\right] + e_{1t}$$

$$\frac{\left[[1-a_{11}L][1-a_{22}L] - a_{12}a_{21}L^2\right]}{[1-a_{22}L]}y_t = a_{10} + \frac{a_{12}a_{20}}{[1-a_{22}L]} + a_{12}\left[\frac{e_{2t-1}}{[1-a_{22}L]}\right] + e_{1t}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Luego multiplicando ambos lados por $[1 - a_{22}L]$

$$\left[[1 - a_{11}L][1 - a_{22}L] \ - a_{12}a_{21}L^2\right]y_t = a_{10}[1 - a_{22}L] + a_{12}a_{20} + a_{12}e_{2t-1} + e_{1t}\ [1 - a_{22}L]$$

$$\left[[1 - a_{11}L][1 - a_{22}L] \ - a_{12}a_{21}L^2\right]y_t = a_{10}[1 - a_{22}] + a_{12}a_{20} + a_{12}e_{2t-1} + e_{1t}\ [1 - a_{22}L]$$

- Finalmente, dividiendo ambos lados entre $\left[[1 - a_{11}L][1 - a_{22}L] \ - a_{12}a_{21}L^2\right]$

$$y_t = \frac{a_{10}[1 - a_{22}] + a_{12}a_{20} + a_{12}e_{2t-1} + e_{1t}\ [1 - a_{22}L]}{\left[[1 - a_{11}L][1 - a_{22}L] \ - a_{12}a_{21}L^2\right]} \tag{48}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

- Siguiendo el mismo proceso, se puede obtener la solución para z_t

$$z_t = \frac{a_{20}[1 - a_{11}] + a_{21}a_{20} + a_{21}e_{1t-1} + [1 - a_{11}L]e_{2t}}{\left[[1 - a_{11}L][1 - a_{22}L] - a_{12}a_{21}L^2\right]} \tag{49}$$

- Para que exista estabilidad, se requiere que las raíces del polinomio $\left[[1 - a_{11}L][1 - a_{22}L] - a_{12}a_{21}L^2\right]$ sean mayores que 1