Econometría IV
Programa de Estudios Superiores
Banco de Guatemala

Notas de Clases 4
Econometría IV

Vectores Autorregresivos (VAR)

Test de Hipótesis

- Un modelo de Vectores Autorregresivos (VAR) puede tener más de dos variables. Sin embargo, Al incrementar el número de variables en el mismo, hay que tomar en cuenta el número de datos disponibles, ya sea en frecuencia diaria, mensual, trimestral o anual. Entonces, se podría tener un modelo con n variables

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \cdot \\ x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{10} \\ A_{20} \\ \cdot \\ A_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11}(L) & A_{12}(L) & \cdot & A_{1n}(L) \\ A_{21}(L) & A_{22}(L) & \cdot & A_{2n}(L) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}(L) & A_{n2}(L) & \cdot & A_{nn}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \\ \cdot \\ x_{nt-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ \cdot \\ e_{4t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

- Donde se tiene que:

$$A_{io} = Los\ parámetros\ que\ representan\ el\ intercepto.$$
$$A_{ij}(L) = El\ operador\ de\ rezagos\ (L) en\ los\ polinomios.$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Test de Hipótesis

- Los coeficientes individuales de $A_{ij}(L)$ se denotan como $a_{ij}(1), a_{ij}(2), \ldots$.

- Los términos e_{it} son perturbaciones ruido blanco que podrían estar correlacionadas entre sí. Además, la matriz de varianza – covarianza se define como Σ , de dimensiones nxn.

- Es importante determinar el número de rezagos óptimos en el sistema VAR. La cantidad de rezagos debe ser el mismo para cada una de las ecuaciones que conforman el modelo VAR. Si quisiéramos utilizar un número diferente de rezagos en cada ecuación, sería mejor utilizar el modelo de ecuaciones aparentemente no relacionadas (SUR por sus siglas en inglés).

- Es importante tomar en cuenta, que al aumentar el número de rezagos, se reducen el número de grados de libertad. Si el número de rezagos considerados lo denominamos “p”, entonces cada una de las ecuaciones tendría (np + n) parámetros a estimar.

Vectores Autorregresivos (VAR)

Test de Hipótesis

- Entonces, se puede determinar el número óptimo de rezagos a través de hipótesis.

- Supongamos que queremos determinar si el número de rezagos óptimo en el modelo es 8 contra 12, podemos utilizar likelihood ratio test. Lo que se hace es que se estima el modelo VAR con 8 y con 12 rezagos y se capturan las matrices de varianza – covarianza. Luego se utiliza el likelihood ratio statistic como sigue:

$$(T)(ln|\Sigma_8| - ln\Sigma_{12}) \qquad \textbf{(2)}$$

- Sin embargo, Sims (1980) recomienda usar:

$$(T - c)(ln|\Sigma_8| - ln\Sigma_{12}) \qquad \textbf{(3)}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Test de Hipótesis

- Donde se tiene que T es el numero de observaciones, c es el número de parámetros estimados en cada ecuación del sistema no restricto, y $ln|\Sigma_n|$ es el logaritmo natural del determinante de Σ_n.

- En este ejemplo, el modelo no restrictivo seria el de 12 rezagos y el modelo restrictivo sería el de 8 rezagos.

- En general, Sims recomienda que se utilice el siguiente test estadístico para la comparación entre modelos:

$$(T-c)(ln|\Sigma_r| - ln\Sigma_{ur})$$

- Donde se tiene que T es el numero de observaciones, c es el número de parámetros estimados en cada ecuación del sistema no restricto, y $ln|\Sigma_n|$ es el logaritmo natural del determinante de Σ_n y se compara con una distribución χ^2 donde el número de grados de libertad es igual al número de restricciones.

Test de Hipótesis

- Donde se tiene que T es el numero de observaciones, c es el número de parámetros estimados en cada ecuación del sistema no restricto, y $ln|\Sigma_n|$ es el logaritmo natural del determinante de Σ_n.

- El likelihood ratio test se base en la teoría asintótica, la cual no es muy usual en el caso de muestras pequeñas. Además, éste es usado solo cuando un modelo es una versión restricta del otro.

- Otros test alternativos son las generalizaciones multivariadas del AIC and SBC de los modelos univariados, como sigue:

$$AIC = Tln|\Sigma| + 2N \quad \textbf{(4)}$$

$$SBC = Tln|\Sigma| + Nln(T) \quad \textbf{(5)}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Test de Hipótesis

- Donde se tiene que:

$|\Sigma| =$ es el determinante de la matriz de varianzas y covarianzas de la matriz de los residuos

$N = es\ el\ \text{número}\ total\ de\ \text{parámetros}\ a\ estimar\ en\ todas\ las\ ecuaciones$

- Entonces, si se tiene en cada una de las ecuaciones del modelo VAR, “p” rezagos y 1 intercepto, entonces $N = n^2p + n$, donde cada una de las ecuaciones tiene np regresores rezagados y un intercepto, es decir cada ecuación tiene $\mathrm{n}p + 1$.

- En los paquetes de software, (4) y (5) son reportados como:

Vectores Autorregresivos (VAR)

Test de Hipótesis

$$AIC^* = -2\frac{ln(L)}{T} + \frac{2N}{T} \tag{6}$$

$$SBC^* = -2\frac{ln(L)}{T} + \frac{N ln(T)}{T} \tag{7}$$

- Existen dos objetivos para poder estimar un modelo en general. EL primero es para poder obtener un modelo teórico que nos permita analizar la relación entre las variables. El segundo es tener un buen modelo para realizar pronósticos.

- Entonces the SBC^* penaliza más el uso de mas rezagos, es utilizado cuando se busca obtener un modelo teórico para encontrar relaciones entre variables; mientras que el AIC^* penaliza menos el uso de rezagos, por lo cual se utiliza cuando se busca un modelo para realizar pronósticos.

Vectores Autorregresivos (VAR)

VAR estructural

- Iniciando con un modelo VAR de primer orden como sigue:

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t \quad \textbf{(8)}$$

- Además, recordando, el error de pronostico de n periodos hacia adelante, es

$$\mathrm{e_t(n)} = e_{t+n} + A_1 e_{t+n-1} + A_1^2 e_{t+n-2} + A_1^3 e_{t+n-3} + \cdots A_1^{n-1} e_{t+1} \quad \textbf{(9)}$$

- A través del esquema de identificación de Cholesky, es posible recuperar los parámetros estructurales a través de los parámetros estimados en la forma reducida.

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- Es posible imponer restricciones sobre los errores para identificar los shocks estructurales utilizando teoría económica. Partiendo del modelo bivariado que hemos usado:

$$y_t = b_{10} - b_{12} z_t + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \qquad \textbf{(10)}$$

$$z_t = b_{20} - b_{21} y_t + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \qquad \textbf{(11)}$$

- Reordenando términos se tiene que:

$$y_t + b_{12}\, z_t = b_{10} + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \qquad \textbf{(12)}$$

$$b_{21} y_t + z_t = b_{20} + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \qquad \textbf{(13)}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- Nuevamente, utilizando algebra matricial, se puede reescribir el modelo como:

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + e_{1t} \tag{14}$$

$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + e_{2t} \tag{15}$$

- Recordando se tiene que los términos de error pueden expresarse en función de los shocks estructurales como sigue:

$$e_t = \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - b_{12}b_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_{yt}} \\ \boldsymbol{\varepsilon_{zt}} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Descomposiciones Estructurales

- Recordando, si se quiere realizar un análisis de impulso respuesta y descomposición de varianza, es necesario utilizar los shocks estructurales.

- Con el esquema de identificación de cholesky, se impone que $b_{12} = 0$, se utiliza el método recursivo para poder resolver el modelo VAR en su forma reducida.

$$\mathrm{e_{1t}} = \varepsilon_{\mathrm{yt}} - \mathrm{b_{12}}\varepsilon_{\mathrm{zt}} \tag{17}$$

$$e_{2t} = \varepsilon_{zt} \tag{18}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- En este caso, se asume que y_t no tiene un efecto contemporáneo sobre z_t, lo cual debe ser respaldado por la teoría económica, es decir, la variable z_t se puede considerar más exógena que la variable y_t . Cuando la correlación entre $\mathrm{e}_{1\mathrm{t}}$ & e_{2t} es muy baja, el ordenamiento de la variables no cambian mucho el análisis de impulso y respuesta, ni la descomposición de variables.

- Reordenando términos, se tiene que:

$$\mathrm{e}_{1\mathrm{t}}\mathrm{b}_{12} + \varepsilon_{\mathrm{zt}} = \varepsilon_{\mathrm{yt}} \qquad (19)$$

$$e_{2t} = \varepsilon_{zt} \qquad (20)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- Considerando un modelo VAR con n variables se tendría que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{b}_{12} & \mathrm{b}_{13} & \cdots & b_{1n} \\ \mathrm{b}_{21} & 1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & 1 & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_{1\mathrm{t}} \\ \mathrm{x}_{2\mathrm{t}} \\ \mathrm{x}_{3\mathrm{t}} \\ \vdots \\ \mathrm{x}_{\mathrm{nt}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_{10} \\ \mathrm{b}_{20} \\ \mathrm{b}_{30} \\ \vdots \\ \mathrm{b}_{50} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \cdots & \gamma_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_{1\mathrm{t}-1} \\ \mathrm{x}_{2\mathrm{t}-1} \\ \mathrm{x}_{3\mathrm{t}-1} \\ \vdots \\ \mathrm{x}_{\mathrm{nt}-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1\mathrm{t}} \\ \varepsilon_{2\mathrm{t}} \\ \varepsilon_{3\mathrm{t}} \\ \vdots \\ \varepsilon_{\mathrm{nt}} \end{bmatrix} \qquad (21)$$

- En su forma compacta, podemos reescribir (21) como:

$$Bx_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (22)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- Donde se tiene que premultiplicando por B^{-1}:

$$x_t = B^{-1}\Gamma_0 + B^{-1}\Gamma_1 x_{t-1} + B^{-1}\varepsilon_t \tag{23}$$

- Lo cual puede reescribirse como:

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t \tag{24}$$

- Donde se tiene que:

$$A_0 = B^{-1}\Gamma_0, \qquad A_1 = B^{-1}\Gamma_1, \qquad e_t = B^{-1}\varepsilon_t$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- La matriz de varianzas y covarianzas se define como:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \qquad (25)$$

- Donde se tiene que cada elemento de Σ

$$\sigma_{ij} = \left({}^{1}/_{T}\right) \sum_{t=1}^{T} e_{it} e_{jt} \qquad (26)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- En general, para identificar un modelo estructural de una VAR estimado, es necesario imponer $(n^2 - n)/2$.

- El esquema de identificación de Cholesky requiere que todos los elementos abajo de la diagonal principal sea igual a cero (matriz diagonal inferior), lo cual implica que:

$$b_{12} = b_{13} = b_{14} = \cdots b_{1n} = 0$$
$$b_{23} = b_{24} = \cdots b_{2n} = 0$$
$$b_{34} = \cdots b_{3n} = 0$$
$$\vdots$$
$$b_{n-1n} = 0$$