Econometría IV
Programa de Estudios Superiores
Banco de Guatemala

Notas de Clases 4
Econometría IV

Vectores Autorregresivos (VAR)

Test de Hipótesis

- Un modelo de Vectores Autorregresivos (VAR) puede tener más de dos variables. Sin embargo, Al incrementar el número de variables en el mismo, hay que tomar en cuenta el número de datos disponibles, ya sea en frecuencia diaria, mensual, trimestral o anual. Entonces, se podría tener un modelo con n variables

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \cdot \\ x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{10} \\ A_{20} \\ \cdot \\ A_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11}(L) & A_{12}(L) & \cdot & A_{1n}(L) \\ A_{21}(L) & A_{22}(L) & \cdot & A_{2n}(L) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}(L) & A_{n2}(L) & \cdot & A_{nn}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \\ \cdot \\ x_{nt-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ \cdot \\ e_{4t} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

- Donde se tiene que:

$$A_{io} = Los\ parámetros\ que\ representan\ el\ intercepto.$$
$$A_{ij}(L) = El\ operador\ de\ rezagos\ (L) en\ los\ polinomios.$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Test de Hipótesis

- Los coeficientes individuales de $A_{ij}(L)$ se denotan como $a_{ij}(1), a_{ij}(2), \ldots.$

- Los términos e_{it} son perturbaciones ruido blanco que podrían estar correlacionadas entre sí. Además, la matriz de varianza – covarianza se define como Σ , de dimensiones nxn.

- Es importante determinar el número de rezagos óptimos en el sistema VAR. La cantidad de rezagos debe ser el mismo para cada una de las ecuaciones que conforman el modelo VAR. Si quisiéramos utilizar un número diferente de rezagos en cada ecuación, sería mejor utilizar el modelo de ecuaciones aparentemente no relacionadas (SUR por sus siglas en inglés).

- Es importante tomar en cuenta, que al aumentar el número de rezagos, se reducen el número de grados de libertad. Si el número de rezagos considerados lo denominamos "p", entonces cada una de las ecuaciones tendría (np + n) parámetros a estimar.

Vectores Autorregresivos (VAR)

Test de Hipótesis

- Entonces, se puede determinar el número óptimo de rezagos a través de hipótesis.

- Supongamos que queremos determinar si el número de rezagos óptimo en el modelo es 8 contra 12, podemos utilizar likelihood ratio test. Lo que se hace es que se estima el modelo VAR con 8 y con 12 rezagos y se capturan las matrices de varianza – covarianza. Luego se utiliza el likelihood ratio statistic como sigue:

$$(T)(ln|\Sigma_8| - ln\Sigma_{12}) \qquad \textbf{(2)}$$

- Sin embargo, Sims (1980) recomienda usar:

$$(T - c)(ln|\Sigma_8| - ln\Sigma_{12}) \qquad \textbf{(3)}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Test de Hipótesis

- Donde se tiene que T es el numero de observaciones, c es el número de parámetros estimados en cada ecuación del sistema no restricto, y $ln|\Sigma_n|$ es el logaritmo natural del determinante de Σ_n.

- En este ejemplo, el modelo no restrictivo seria el de 12 rezagos y el modelo restrictivo sería el de 8 rezagos.

- En general, Sims recomienda que se utilice el siguiente test estadístico para la comparación entre modelos:

$$(T-c)(ln|\Sigma_r| - ln\Sigma_{ur})$$

- Donde se tiene que T es el numero de observaciones, c es el número de parámetros estimados en cada ecuación del sistema no restricto, y $ln|\Sigma_n|$ es el logaritmo natural del determinante de Σ_n y se compara con una distribución χ^2 donde el número de grados de libertad es igual al número de restricciones.

Vectores Autorregresivos (VAR)

Test de Hipótesis

- Donde se tiene que T es el numero de observaciones, c es el número de parámetros estimados en cada ecuación del sistema no restricto, y $ln|\Sigma_n|$ es el logaritmo natural del determinante de Σ_n.

- El likelihood ratio test se base en la teoría asintótica, la cual no es muy usual en el caso de muestras pequeñas. Además, éste es usado solo cuando un modelo es una versión restricta del otro.

- Otros test alternativos son las generalizaciones multivariadas del AIC and SBC de los modelos univariados, como sigue:

$$AIC = Tln|\Sigma| + 2N \tag{4}$$

$$SBC = Tln|\Sigma| + Nln(T) \tag{5}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Test de Hipótesis

- Donde se tiene que:

$|\Sigma| =$ es el determinante de la matriz de varianzas y covarianzas de la matriz de los residuos

$N = es\ el\ \text{nú}mero\ total\ de\ par\acute{a}metros\ a\ estimar\ en\ todas\ las\ ecuaciones$

- Entonces, si se tiene en cada una de las ecuaciones del modelo VAR, “p” rezagos y 1 intercepto, entonces $N = n^2p + n$, donde cada una de las ecuaciones tiene np regresores rezagados y un intercepto, es decir cada ecuación tiene $\mathrm{n}p + 1$.

- En los paquetes de software, (4) y (5) son reportados como:

Vectores Autorregresivos (VAR)

Test de Hipótesis

$$AIC^{*} = -2\frac{ln(L)}{T} + \frac{2N}{T} \quad (6)$$

$$SBC^{*} = -2\frac{ln(L)}{T} + \frac{N ln(T)}{T} \quad (7)$$

- Existen dos objetivos para poder estimar un modelo en general. El primero es tener un buen modelo para realizar pronósticos. El segundo es poder obtener un modelo teórico que nos permita analizar la relación entre las variables.

- Entonces the SBC^{*} penaliza más el uso de mas rezagos, es utilizado cuando se busca obtener un modelo teórico para encontrar relaciones entre variables; mientras que el AIC^{*} penaliza menos el uso de rezagos, por lo cual se utiliza cuando se busca un modelo para realizar pronósticos.

Vectores Autorregresivos (VAR)

VAR estructural

- Iniciando con un modelo VAR de primer orden como sigue:

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t \quad (8)$$

- Además, recordando, el error de pronostico de n periodos hacia adelante, es

$$\mathrm{e_t(n)} = e_{t+n} + A_1 e_{t+n-1} + A_1^2 e_{t+n-2} + A_1^3 e_{t+n-3} + \cdots A_1^{n-1} e_{t+1} \quad (9)$$

- A través del esquema de identificación de Cholesky, es posible recuperar los parámetros estructurales a través de los parámetros estimados en la forma reducida.

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- Es posible imponer restricciones sobre los errores para identificar los shocks estructurales utilizando teoría económica. Partiendo del modelo bivariado que hemos usado:

$$y_t = b_{10} - b_{12} z_t + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \quad \textbf{(10)}$$

$$z_t = b_{20} - b_{21} y_t + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \quad \textbf{(11)}$$

- Reordenando términos se tiene que:

$$y_t + b_{12} z_t = b_{10} + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \quad \textbf{(12)}$$

$$b_{21} y_t + z_t = b_{20} + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \quad \textbf{(13)}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- Nuevamente, utilizando algebra matricial, se puede reescribir el modelo como:

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + e_{1t} \qquad (14)$$

$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + e_{2t} \qquad (15)$$

- Recordando se tiene que los términos de error pueden expresarse en función de los shocks estructurales como sigue:

$$e_t = \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - b_{12}b_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_{yt}} \\ \boldsymbol{\varepsilon_{zt}} \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- Recordando, si se quiere realizar un análisis de impulso respuesta y descomposición de varianza, es necesario utilizar los shocks estructurales.

- Con el esquema de identificación de cholesky, se impone que $b_{12} = 0$, se utiliza el método recursivo para poder resolver el modelo VAR en su forma reducida.

$$\mathrm{e}_{1\mathrm{t}} = \varepsilon_{\mathrm{yt}} - \mathrm{b}_{12}\varepsilon_{\mathrm{zt}} \qquad (17)$$

$$e_{2t} = \varepsilon_{zt} \qquad (18)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- En este caso, se asume que y_t no tiene un efecto contemporáneo sobre z_t, lo cual debe ser respaldado por la teoría económica, es decir, la variable z_t se puede considerar más exógena que la variable y_t . Cuando la correlación entre e_{1t} & e_{2t} es muy baja, el ordenamiento de la variables no cambian mucho el análisis de impulso y respuesta, ni la descomposición de variables.

- Reordenando términos, se tiene que:

$$e_{1t}b_{12} + \varepsilon_{zt} = \varepsilon_{yt} \tag{19}$$

$$e_{2t} = \varepsilon_{zt} \tag{20}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- Considerando un modelo VAR con n variables se tendría que:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & 1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & 1 & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ x_{3t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \\ b_{30} \\ \vdots \\ b_{50} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \cdots & \gamma_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \\ x_{3t-1} \\ \vdots \\ x_{nt-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix} \qquad (21)$$

- En su forma compacta, podemos reescribir (21) como:

$$Bx_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (22)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- Donde se tiene que premultiplicando por B^{-1}:

$$x_t = B^{-1}\Gamma_0 + B^{-1}\Gamma_1 x_{t-1} + B^{-1}\varepsilon_t \tag{23}$$

- Lo cual puede reescribirse como:

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t \tag{24}$$

- Donde se tiene que:

$$A_0 = B^{-1}\Gamma_0, \qquad A_1 = B^{-1}\Gamma_1, \qquad e_t = B^{-1}\varepsilon_t$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- La matriz de varianzas y covarianzas se define como:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \qquad (25)$$

- Donde se tiene que cada elemento de Σ

$$\sigma_{ij} = \left({}^{1}/_{T}\right) \sum_{t=1}^{T} e_{it} e_{jt} \qquad (26)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposiciones Estructurales

- En general, para identificar un modelo estructural de una VAR estimado, es necesario imponer $(n^2 - n)/2$.

- El esquema de identificación de Cholesky requiere que todos los elementos sobre la diagonal principal sea igual a cero (matriz diagonal inferior), lo cual implica que:

$$\begin{aligned}
b_{12} = b_{13} = b_{14} = \cdots b_{1n} &= 0 \\
b_{23} = b_{24} = \cdots b_{2n} &= 0 \\
b_{34} = \cdots b_{3n} &= 0 \\
&\vdots \\
b_{n-1n} &= 0
\end{aligned} \tag{27}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

- Blanchard y Quah (1989) ofrecen una alternativa para obtener un VAR estructural. Su objetivo es reconsiderar la descomposición del producto nacional bruto en sus componentes temporales y permanentes.

- Para ello, desarrollaron un modelo macroeconómico en el cual el PNB real se ve afectado por perturbaciones de la demanda y de la oferta.

- De acuerdo con la hipótesis de la tasa natural, las perturbaciones de la demanda no tienen efectos a largo plazo sobre el PNB. Por el lado de la oferta, se supone que los shocks de productividad tienen efecto permanentes sobre la producción. Utilizando un modelo VAR bivariado, Blanchard y Quah muestran cómo descomponer el PNB real y recuperar los dos shocks puros.

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

- Supongamos que nos interesa descomponer una secuencia $I(1)$, por ejemplo $\{y_t\}$, en sus componentes, temporales y permanentes. Supongamos que hay una segunda variable $\{z_t\}$ afectada por los mismos dos shocks.

- Considerando que $\{z_t\}$ es estacionaria, y asumiendo que no hay constantes, la representación de la media móvil bivariada de ambas variables sería:

$$\Delta y_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_{11}(k)\varepsilon_{1t-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{12}(k)\varepsilon_{2t-k}$$

$$z_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_{21}(k)\varepsilon_{1t-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{22}(k)\varepsilon_{2t-k} \qquad (28)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

- Además, ε_{1t} & ε_{2t} son perturbaciones independientes de ruido blanco.

- Se puede reescribir (28) en una forma más compacta como sigue:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(L) & C_{12}(L) \\ C_{21}(L) & C_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \tag{29}$$

- Además, ε_{1t} & ε_{2t} son perturbaciones independientes de ruido blanco

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

Donde se tiene que:

$$X_t = \begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11}(L) & C_{12}(L) \\ C_{21}(L) & C_{22}(L) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \qquad (30)$$

- Además, $C_{ij}(L)$ es un polinomio del operador de rezagos, de tal forma que sus coeficientes están definidos como $c_{ij}(k)$.

- La matriz de varianzas y covarianzas de las innovaciones, asumiendo que las observaciones son independientes y ruido blanco, se tendría que:

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} var(\varepsilon_{1t}) & 0 \\ 0 & var(\varepsilon_{2t}) \end{bmatrix} \qquad (31)$$

- Además, los shocks se normalizan de modo que por conveniencia se impone que $var(\varepsilon_1)$ = $var(\varepsilon_2)$ =1, por lo cual (31) se puede reescribir como:

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (32)$$

- En (28) se considera que las variables y_t & z_t son endógenas y los shocks ε_{1t} & ε_{2t} se consideran exógenos.

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

- En el modelo, los autores consideran a y_t como el logaritmo del PNB en términos reales, z_t es el desempleo, ε_{1t} es un shock de demanda agregada e ε_{2t} es un shock de oferta agregada.

- Los coeficientes de $c_{11}(L)$ representan las respuestas del logaritmo natural del PNB ante un shock de demanda agregada.

- La clave para descomponer la secuencia $\{y_t\}$ en sus componentes es asumir que uno de los shocks tiene un efecto temporal en la misma. Es esta dicotomía entre efectos temporales y permanentes la que permite la identificación completa de las innovaciones estructurales a partir de un VAR estimado.

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

- Blanchard y Quah suponen que un shock de demanda agregada no tiene efecto en el largo plazo sobre PNB real. En el largo plazo, para que el PNB real no se vea afectado por el shock de demanda, el efecto acumulado del shock ε_{1t} en la secuencia Δy_t sea igual a cero. Por lo tanto, los coeficientes $c_{11}(k)$ en (28) deben ser tal que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{11}(k)\varepsilon_{1t-k} = 0$$

- Dado que para que lo anterior sea valido para cualquier posible realización de la secuencia $\{\varepsilon_{1t}\}$, se debe cumplir que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{11}(k) = 0 \tag{33}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

- Puesto que los shocks de demanda y oferta no son observados, el problema radica en como recuperarlos de una estimación de un modelo VAR. Dado que las variables son estacionarias, sabemos que existe una representación VAR de la forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(L) & A_{12}(L) \\ A_{21}(L) & A_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \tag{34}$$

- O en su forma compacta,

$$x_t = A(L)x_{t-1} + e_t$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

- Donde se tiene que $x_t = \begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix}$, $e_t = \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}$, y $A(L) = \begin{bmatrix} A_{11}(L) & A_{12}(L) \\ A_{21}(L) & A_{22}(L) \end{bmatrix}$
- Además, $A_{ij}(L)$ es un polinomio cuyos coeficientes están denotados por $a_{ij}(k)$.
- El siguiente paso es poder igual la representación (29) con la representación (34). Dado que ambas representaciones deben ser equivalentes, debe ser el caso que:

$$e_{1t} = c_{11}(0)\varepsilon_{1t} + c_{12}(0)\varepsilon_{2t} \qquad (35)$$

$$e_{2t} = c_{21}(0)\varepsilon_{1t} + c_{22}(0)\varepsilon_{2t} \qquad (36)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

- En forma matricial tenemos que, se puede reescribir (35) y (36) como:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e_{1t}} \\ \boldsymbol{e_{2t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c_{11}(0)} & \boldsymbol{c_{12}(0)} \\ \boldsymbol{c_{21}(0)} & \boldsymbol{c_{22}(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_{1t}} \\ \boldsymbol{\varepsilon_{2t}} \end{bmatrix} \tag{37}$$

- Si son conocidos los valores de $c_{11}(0)$, $c_{12}(0)$, $c_{21}(0)$ & $Ac_{22}(0)$, entonces es posible recuperar ε_{1t} & ε_{2t} de los residuales e_{1t} & e_{2t} .

- Blanchard and Quah muestra que las relaciones entre (34) y la representación BMA(Bivariate Moving Average) más la relación a largo plazo provee exactamente 4 coeficientes.

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

- Los residuales del VAR pueden ser usado para construir los estimadores de $var(e_1)$, $var(e_2)$, y $cov(e_1, e_2)$. Las cuatro restricciones serían:

- **Restricción 1:** Dado (35) y además que $E_t \varepsilon_{1t} \varepsilon_{2t} = 0$, la normalización de $var(\varepsilon_1) = var(\varepsilon_2) = 1$ significa que la varianza de e_{1t} es

$$var(e_1) = E_t(c_{11}(0)\varepsilon_{1t} + c_{12}(0)\varepsilon_{2t} - 0)^2$$

$$var(e_1) = c_{11}(0)^2 var(\varepsilon_1) + c_{12}(0)^2 var(\varepsilon_2)$$

$$var(e_1) = c_{11}(0)^2 + c_{12}(0)^2 \qquad (38)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

- **Restricción 2:** En forma similar, dado (36) y además que $E_t \varepsilon_{1t} \varepsilon_{2t} = 0$, la normalización de $var(\varepsilon_1) = var(\varepsilon_2) = 1$ significa que la varianza de e_{1t} es

$$var(e_2) = E_t(c_{21}(0)\varepsilon_{1t} + c_{22}(0)\varepsilon_{2t} - 0)^2$$

$$var(e_2) = c_{21}(0)^2 var(\varepsilon_1) + c_{22}(0)^2 var(\varepsilon_2)$$

$$var(e_2) = c_{21}(0)^2 + c_{22}(0)^2 \qquad (39)$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

- **Restricción 3:** Además, el producto entre e_{1t} & e_{2t} está dado por:

$$e_{1t}e_{2t} = [c_{11}(0)\varepsilon_{1t} + c_{12}(0)\varepsilon_{2t}][c_{21}(0)\varepsilon_{1t} + c_{22}(0)\varepsilon_{2t}] \tag{40}$$

Tomando valor esperado a ambos lados de (40), la covarianza de los residuales del VAR es como sigue:

$$E_t e_{1t}e_{2t} = c_{11}(0)\, c_{21}(0) E_t\varepsilon_{1t}^2 + c_{11}(0) c_{22}(0) E_t\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t} + c_{12}(0) c_{21}(0) E_t\varepsilon_{2t}\varepsilon_{1t} + c_{12}(0)\, c_{22}(0)\, E_t\varepsilon_{2t}^2$$

$$E_t e_{1t}e_{2t} = c_{11}(0)\, c_{21}(0) + c_{12}(0)\, c_{22}(0) \tag{41}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

- La cuarta restricción se basa en el supuesto de que $\{\varepsilon_{1t}\}$ no tiene un efecto de largo plazo sobre la secuencia $\{y_t\}$.

- Reescribiendo (34) como:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(L)L & A_{12}(L)L \\ A_{21}(L)L & A_{22}(L)L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11}(L)L & A_{12}(L)L \\ A_{21}(L)L & A_{22}(L)L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11}(L)L & A_{12}(L)L \\ A_{21}(L)L & A_{22}(L)L \end{pmatrix}\right] \begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}_{1\mathrm{t}} \\ \mathrm{e}_{2\mathrm{t}} \end{bmatrix}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

$$\begin{bmatrix} 1 - A_{11}(L)L & -A_{12}(L)L \\ -A_{21}(L)L & 1 - A_{22}(L)L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}_{1\mathrm{t}} \\ \mathrm{e}_{2\mathrm{t}} \end{bmatrix} \tag{42}$$

- Ahora, se tiene que premultiplicar a ambos lados la matriz Inversa, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - A_{11}(L)L & -A_{12}(L)L \\ -A_{21}(L)L & 1 - A_{22}(L)L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{e}_{1\mathrm{t}} \\ \mathrm{e}_{2\mathrm{t}} \end{bmatrix}$$

- Nos quedaría como:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \frac{1}{[1 - A_{11}(L)L][1 - A_{22}(L)L] - A_{12}(L)A_{21}(L)L^2} \begin{bmatrix} 1 - A_{22}(L)L & A_{12}(L)L \\ A_{21}(L)L & 1 - A_{11}(L)L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}_{1\mathrm{t}} \\ \mathrm{e}_{2\mathrm{t}} \end{bmatrix} \tag{43}$$

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

- Definiendo

$$D = [1 - A_{11}(L)L][1 - A_{22}(L)L] - A_{12}(L)A_{21}(L)L^2$$

- Luego, usando las definiciones de $A_{ij}(k)$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 1 - \sum_{k=0}^{\infty} a_{22}(k)L^{k+1} & \sum_{k=0}^{\infty} a_{12}(k)L^{k+1} \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{21}(k)L^{k+1} & 1 - \sum_{k=0}^{\infty} a_{11}(k)L^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}_{1t} \\ \mathrm{e}_{2t} \end{bmatrix} \tag{44}$$

- Donde las sumatorias van de 0 hasta infinito.

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

- Así, la solución para Δy_t en términos de las valores contemporáneos y rezagados de $\{e_{1t}\}$ & $\{e_{2t}\}$ es:

$$\Delta y_t = \frac{1}{D}\left\{\left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} a_{22}(k)L^{k+1}\right] e_{1t} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{12}(k)L^{k+1} e_{2t}\right\} \tag{45}$$

- Sustituyendo (35) y (36) en (45) se tiene que

$$\Delta y_t = \frac{1}{D}\left\{\left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} a_{22}(k)L^{k+1}\right] [c_{11}(0)\varepsilon_{1t} + c_{12}(0)\varepsilon_{2t}] + \sum_{k=0}^{\infty} a_{12}(k)L^{k+1} [c_{21}(0)\varepsilon_{1t} + c_{22}(0)\varepsilon_{2t}]\right\}$$

- Con estas sustituciones, la restricción para que la secuencia $\{\varepsilon_{1t}\}$ no tenga efecto en el largo plazo sobre y_t está dada por:

Vectores Autorregresivos (VAR)

Descomposición de Blanchard-Quah

$$\left[1-\sum_{k=0}^{\infty} a_{22}(k)L^{k+1}\right][c_{11}(0)\varepsilon_{1t}] + \sum_{k=0}^{\infty} a_{12}(k)L^{k+1}\,[c_{21}(0)\varepsilon_{1t}] = 0 \qquad (46)$$

- **Restricción 4:** Para todas las posibles realizaciones de la secuencia $\{\varepsilon_{1t}\}$, los shocks ε_{1t} tendrán solo un efecto contemporáneo en la secuencia Δy_t (también en y_t) sí y solo sí

$$\left[1-\sum_{k=0}^{\infty} a_{22}(k)\right][c_{11}(0)] + \sum_{k=0}^{\infty} a_{12}(k)\,[c_{21}(0)] = 0 \qquad (47)$$