Curvas no Espaço de Minkowski

João Vitor Parada Poletto *
Licenciatura em Física - UFPR
jvppoletto@gmail.com

Prof. Dr. Rodrigo R. Montes e Prof. Dr. Hudson do N. Lima (orientadores)
Departamento de Matemática - UFPR
ristow@ufpr.br e hudsonlima@ufpr.br

Palavras-chave: Curvas, Espaço de Minkowski, Aplicações na Relatividade Especial.

Resumo

Uma das aplicações do estudo das curvas no espaço de Minkowski é na teoria da relatividade especial. Pode-se associar determinadas curvas às trajetórias das partículas materiais ou das partículas do tipo luz, por exemplo. Neste trabalho é discutido como é feita a definição de curvas neste espaço, além da comparação com curvas no espaço euclidiano. Outrossim, é possível dar interpretações físicas a alguns resultados obtidos. A partir desse contexto, o objetivo do trabalho é a apresentação dessas definições e comparações e mostrar o teorema das equações de Frenet no espaço de Minkowski.

Inicialmente, podemos comentar sobre as dimensões do espaço newtoniano (isométrico ao $\mathbb{R}^3$) e do espaço-tempo newtoniano. No primeiro, as três dimensões são espaciais, enquanto que no segundo, além das três dimensões espaciais, existe uma quarta dimensão perpendicular, que representa o tempo. Assim, no espaço-tempo newtoniano tem-se um espaço quadrimensional, onde as dimensões são independentes entre si. O espaço-tempo de Minkowski é semelhante, porém, nele existe uma dependência entre as quatro dimensões.

A fim de visualizarmos melhor os resultados, consideramos duas dimensões espaciais (plano) e uma dimensão temporal. Dessa maneira, definimos o $\mathbb{R}^3_1$ como o espaço que é usualmente o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consistindo de vetores $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, mas munido do produto interno $\langle X, Y \rangle_1 = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Esse espaço é chamado de espaço de Minkowski ou espaço de Lorentz, onde os vetores tangentes são definidos da mesma forma que no espaço euclidiano. Nesse espaço um vetor X é dito:

- $\text{tipo-espaço, se } \langle X, X \rangle_1 > 0$
- $\text{tipo-tempo, se } \langle X, X \rangle_1 < 0$
- $\text{tipo-luz, se } \langle X, X \rangle_1 = 0, \text{ mas } X \neq 0$

*Bolsista do PICME

Dessa maneira, definimos o cone de luz como o conjunto de todos os vetores tipo-luz.

Na física, geralmente se toma a coordenada temporal como “$\underline{c}t$”, onde “$\underline{c}$” representa a velocidade da luz e “t” o tempo. Assim, no caso de um vetor tipo-luz, tem-se que : $\underline{c}^2 t^2 = {x_2}^2 + {x_3}^2$, se x_1 representar a coordenada temporal.

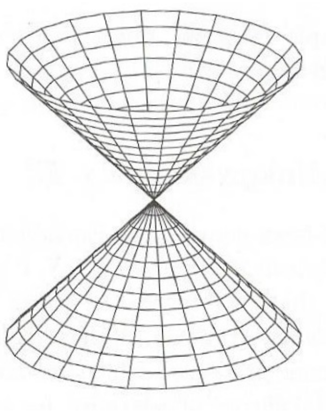

Figura 1: Cone de luz no espaço de Minkowski

Uma partícula que se move no espaço de Minkowski é definida como uma curva $c : I \to \mathbb{R}^3_1$. Além disso, nesse espaço, uma curva regular é definida de acordo com o seu vetor tangente, isto é, a curva pode ser tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz.

Um dos postulados da relatividade afirma que não existem velocidades superiores a da luz, portanto, as curvas do tipo-tempo são as únicas que podem representar alguma partícula material, ou seja, os vetores tangentes a essas curvas sempre estão dentro do cone de luz. Sendo assim, podemos mencionar os “eventos” que, no espaço de Minkowski, são tratados como pontos. Em relação a um dado referencial, a projeção desses pontos nas dimensões espaciais indicam a posição dos eventos, e a projeção dos pontos na dimensão temporal indica o tempo em que esses eventos ocorrem.

Por fim, o trabalho mostra um lema que diz que toda curva tipo-espaço ou tipo-tempo pode ser parametrizada pelo comprimento do arco, ou seja, $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle_1 = \pm 1$. Além disso, pode ser definido o referencial de Frenet para este espaço, que consiste numa base ortonormal, onde $e_1 = \dot{c}$, $e_2 = \dfrac{\ddot{c}}{\sqrt{|\langle \ddot{c}, \ddot{c} \rangle|_1}}$ e $e_3 = e_1 \times e_2$, semelhante a como é definido no $\mathbb{R}^3$. A diferença é que tem-se $\epsilon, \eta \in \{1, -1\}$ com $\langle e_1, e_1 \rangle_1 = \epsilon$, $\langle e_2, e_2 \rangle_1 = \eta$ e, consequentemente, $\langle e_3, e_3 \rangle_1 = \epsilon\eta$. Assim, um vetor indica uma direção negativa no eixo de coordenadas, enquanto os outros vetores indicam direções positivas. Com esse referencial, pode-se provar as equações de Frenet no espaço de Minkowski:

$$\begin{pmatrix} {e_1}' \\ {e_2}' \\ {e_3}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\eta & 0 \\ -\kappa\epsilon & 0 & -\tau\epsilon\eta \\ 0 & -\tau\eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

onde as quantidades κ e τ, chamadas *curvatura* e *torção*, são definidas pelas seguintes equações:

$$\kappa = \langle {e_1}', e_2 \rangle_1 \text{ e } \tau = \langle {e_2}', e_3 \rangle_1.$$

Referências:

[1]WOLFGANG, K. **Differential Geometry:** Curves - Surfaces - Manifolds. Providence: AMS, 2006.

[2]O'NEIL, B. **Semi-Riemannian Geometry:** With Applications to Relativity. San Diego: Academic Press, 1983.

[3]CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[4]TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. São Paulo: Blucher, 2008.