Espaços de Minkowski e a Geometria Hiperbólica

Gabriel Felipe Dalla Stella *

Bacharelado em Matemática - UFPR

gabrielstella28@gmail.com

Prof. Diego Otero (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

otero.ufpr@gmail.com

Palavras-chave: Relatividade Especial, Espaços de Minkowski, Hiperbolóide.

Resumo: A relatividade especial surgiu através da análise de diversos experimentos feitos para verificar a existência do éter luminífero, meio material pelo qual se supôs que a luz se propagava, semelhante às ondas mecânicas. O ponto crucial para o questionamento da existência do éter foi o experimento de Michelson-Morley, onde, devido à precisão das medidas, negava a existência de ventos de éter, pois não existia velocidade relativa entre a Terra e o éter [1]. A partir da interpretação de diversos desses experimentos Einstein postulou os seguintes princípios: (i) As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais; (ii) A velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais. A partir disso, ele obteve diversos resultados de sua teoria chamada de relatividade especial.

A introdução de tais postulados implica diversos fenômenos físicos contraintuitivos, tais como a dilatação do tempo, a contração do espaço, e as transformações de Lorentz, que são maneiras de converter medidas entre referenciais inerciais. Uma afirmação equivalente ao segundo postulado da relatividade especial, que afirma que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais, é que o intervalo de espaço tempo $I = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ é preservado por mudança de referenciais inerciais.

A partir disso temos uma maneira geométrica de descrever a relatividade especial, munindo o espaço $\mathbb{R}^4$, com a forma bilinear $g(u, v) = -u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, teremos o que chamamos de espaço de Minkowski (o espaço $\mathbb{R}^n$ com uma forma bilinear similar à g generaliza o espaço de Minkowski para dimensão $n \geq 2$), e seu grupo de isometrias lineares, chamado de grupo de Lorentz, é composto por mudanças de referenciais inerciais e irão preservar o intervalo de espaço-tempo.

A partir do estudo dos espaços de Minkowski emergiu o estudo do hiperbolóide, superfície equivalente à esfera, em $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, isto é, os hiperbolóides são definidos

*Bolsista do Programa PET-Matemática

como sendo os pontos $x \in \mathbb{R}^3$ tais que $g(x, x) = k$, onde k é uma constante fixada. Estudamos o caso especial em que $k = -1$, onde g induz métrica Riemanniana, e tal métrica faz com que o hiperboloide tenha curvatura negativa constante, o que nos fornece um modelo de geometria hiperbólica. De modo que a superfície seja conexa (por caminhos), e assim podendo definir a distância geodésica entre pontos, nos restringimos somente à folha superior do hiperbolóide.

Com o estudo do grupo de Lorentz , que funciona de maneira análoga às rotações nas esferas, e a partir das geodésicas dadas pelos meridianos do hiperbolóide, é possível obter todas as geodésicas, que são todas intersecções de planos passando pela origem com o hiperbolóide. Além disso obtemos a distância no hiperbolóide dada por $d(x, y) = \cosh^{-1}(-g(x, y))$, onde g é a métrica no espaço de Minkowski.

Essa superfície nos permite também contrastar com teorema de Hilbert que diz que não existe superfície com curvatura negativa constante completa imersa isometricamente em $\mathbb{R}^3$, com a métrica usual, mas em $(\mathbb{R}^3, g)$, o hiperbolóide é uma superfície completa com curvatura negativa constante.

Referências

[1] DECAEN, C. A. **Aristotle's Aether and Contemporary Science**. The Thomist: A Speculative Quarterly Review, Santa Paula, v. 68, n. 3, p. 375 - 429, jul. 2004.

[2] O'NEILL, B. **Semi-Remannian Geometry**. Londres: Academic Press, 1983.

[3] SOLHEIM, Z. S. L. **The hyperboloid model of hyperbolic geometry**. Tese (Mestrado em Ciência) - Mathematics Department, Eastern Washington University, Cheney, 2012.

[4] SCHUTZ, B. **A First Course in General Relativity**. Nova Iorque: Cambridge University Press, 2009.