Número Cromático do Plano

Pablo P. S. Moraes
Licenciando em Matemática - UTFPR
pablo_patrick30@hotmail.com

Prof. Dr. João Luis Gonçalves (Orientador)
Departamento Acadêmico de Matemática - UTFPR
jlgoncalves@utfpr.edu.br

Palavras-chave: grafos, número cromático do plano, grafos planares unitários.

Resumo:

O número cromático do plano (CNP) é definido como o número mínimo de cores necessárias para colorir os vértices de qualquer grafo planar unitário (GPU) de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Determinar o CNP é conhecido como problema de Hadwiger-Nelson [1].

Em 1961, os irmãos William e Leo Moser [2] apresentaram um GPU (ver Figura 1) que não pode ter seus vértices coloridos, nas condições do problema, com menos de 4 cores, ou seja, 4$\leq$ CNP.

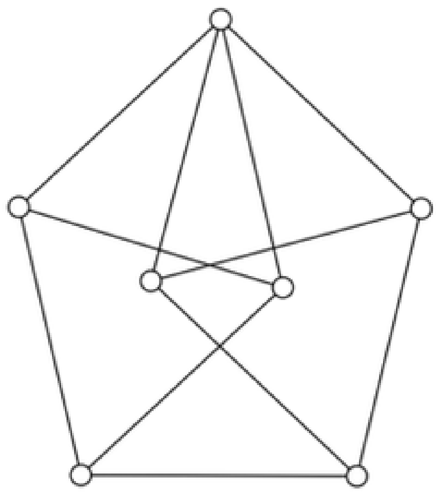

Figura 1: GPU dos Moser

John R. Isbell mostrou que CNP $\leq$7, apoiado no fato de que o plano pode ser ladrilhado com hexágonos regulares coloridos por um padrão com 7 cores, como mostrado na Figura 2, de forma que hexágonos de cores iguais estão distantes mais que 1 diâmetro dos hexágonos considerados. Deste modo, se escolhermos ladrilhar o

plano com hexágonos de diâmetro um pouco menor que 1, qualquer segmento de reta de comprimento 1 terá seus extremos em hexágonos de cores diferentes. Assim a conjectura até 2017 era 4$\leq$ CNP $\leq$7.

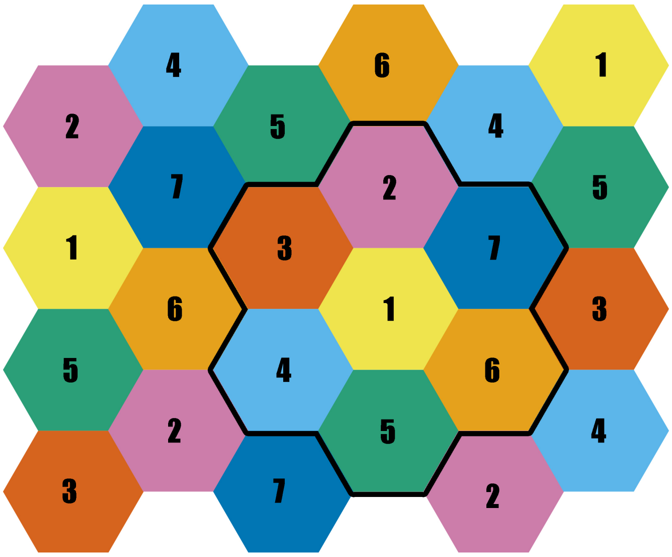

Figura 2: Plano ladrilhado de hexágonos

Nosso primeiro objetivo é apresentar o GPU proposto por Aubrey D.N.J. de Grey [3]. Nas condições descritas, o GPU de Grey não pode ter seus vértices coloridos com apenas 4 cores, ou seja, Grey mostrou que 5$\leq$ CNP. Iremos replicar a construção passo-a-passo do GPU de Grey. O primeiro passo é a construção do GPU H e suas 4 formas essencialmente distintas de colorir seus vértices como mostrado na Figura 3. Dentre essas 4 formas de colorir, as duas à esquerda são as únicas que admitem uma tripla de vértices monocromáticos.

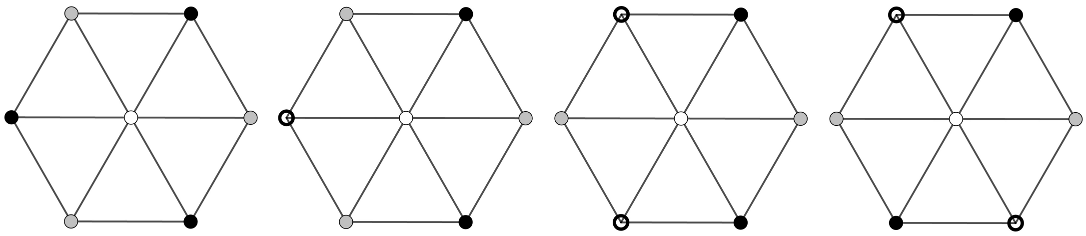

Figura 3: GPU H

O segundo passo é a construção do GPU J que contém 13 cópias de H, com uma primeira cópia de H no centro, 6 cópias cujos centros estão a uma distância 1 e as outras 6 com seus centros a uma distância $\sqrt{3}$ do centro do primeiro H.

O terceiro passo é a construção do GPU K, que possui 2 cópias de J e, portanto, 26 cópias de H, com o vértice central coincidindo e um deles rotacionado em torno do centro de forma que os vértices que estão a uma distância 2 do centro, denominados vértices de ligação, estejam a uma distância 1 de sua respectiva cópia. Então, entre esses vértices acrescentam-se seis arestas.

O quarto passo é o GPU L, que possui duas cópias de K e, portanto, 52 cópias de H, com um vértice de ligação coincidindo e uma das cópias de K rotacionada em torno desse vértice de forma que os vértices de ligação diametralmente opostos estejam a uma distância 1 entre si e entre esses vértices acrescenta-se uma aresta.

Uma análise sobre os números cromáticos de J e K nos leva a conclusão de que se o número cromático de L é 4, então ao menos uma de suas cópias de H tem uma tripla de vértices monocromática.

A próxima etapa é a construção de um GPU M, cujas características são que M possui uma cópia de H e que não exista uma forma de colorir os vértices de M com 4 cores, nas condições deste contexto, em que sua cópia de H admita uma tripla monocromática.

Finalmente, foi construído o GPU N com 52 cópias de M arranjadas de forma que seus H formassem L. Assim, se colorirmos as 52 cópias de M com 4 cores, então teremos um L cujas cópias de H não admitem uma tripla de vértices monocromática, portanto N não pode ser colorido com apenas 4 cores.

Um passo fundamental foi a construção de M. Vale salientar, que na busca por um M que satisfizesse as condições necessárias, foi essencial a capacidade computacional de verificação das propriedades, pois embora baseado no GPU de Moser, a complexidade de M torna proibitiva a verificação manual ou argumentativa. Deste modo, estabelecemos como um segundo objetivo atualizar e desenvolver algoritmos pertinentes a esse contexto.

Esse problema estava em aberto há mais de 60 anos. Em geral, avanços científicos causam uma perturbação da qual novos avanços podem emergir. Por isto, nosso próximo objetivo é pesquisar possibilidades de GPU mais simples com as propriedades de M, como o próprio Aubrey D.N.J. de Grey propõe em seu blog [4].

Referências

[1] HADWIGER, H., Überdeckung des euklidischen Raumes durch kongruente Mengen. **Math.**, Portugal. 4: 238-242, 1945.

[2] HADWIGER, H., Ungelöste Probleme No. 40, **Elem. Math.**. 16: 103–104.

[3] GREY, A.D.N.J., The chromatic number of the plane is at least 5, 2018, arXiv : 1804.02385. Accessível pelo Bibcode:2018arXiv180402385D.

[4] POLYMATH PROJECTS. https://polymathprojects.org/2018/04/10/polymath-proposal-finding-simpler-unit-distance-graphs-of-chromatic-number-5/