Equações Diferenciais Ordinárias Aplicadas à Engenharia

Lucas Momesso Fernandes
Bacharel em Engenharia Ambiental – FCT Unesp Presidente Prudente
Lucas_momesso@hotmail.com

Prof.ª Dr.ª Patricia Hilário Tacuri Córdova
Departamento de Matemática Estatística e Computação – FCT Unesp Presidente Prudente
ptacuri@fct.unesp.br

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias, poluentes.

Resumo:

Restringimo-nos neste modelo à despoluição de lagos e lagoas, que possuem um processo de despoluição mais lento, podendo ser efetivado caso ainda não estejam “mortas”, no qual o mecanismo para despoluição consiste na substituição gradual de sua água.
A questão é a seguinte: Se a quantidade de poluentes existentes na lagoa é prejudicial ao desenvolvimento da vida aquática ou mesmo recreação, quais os mecanismos existentes para se efetuar sua limpeza?
Se considerar P0 a quantidade de detritos químicos existentes na lagoa no instante em que cessou a poluição, t = 0; P = P(t) será a quantidade de poluentes dissolvida na água no tempo t.
Como o volume da lagoa é constante e as vazões dos riachos também, então é razoável supor que a variação da quantidade de poluentes por unidade de tempo seja proporcional à quantidade total existente na lagoa em cada instante, de modo que $dP/dt = -rP/v$ onde r > 0 é a vazão de cada rio.
Após estudar os modelos propostos, conclui-se que há equações para diferentes tipos de lançamento de poluentes que serão descritos a seguir:
Se a indústria deposita continuamente uma quantidade constante de poluentes, então $P_{i(t)} = P_{i0}$ (constante). A equação é dada por:

$$\frac{dP}{dt} = P_{i0} - \frac{rP}{V}$$

E pode ser reescrita como

$$\frac{dP}{dt} + \frac{rp}{V} = P_{i0}$$

E terá como solução:

$$P_{i0} = \left(P_0 - \frac{VP_{i0}}{r}\right)e^{-\frac{rt}{V}} + \frac{rP}{V}(t)$$

Se a indústria continuar poluindo a lagoa, mas numa escala decrescente, ou seja, descartando cada vez menos poluente na lagoa por unidade de tempo.

Para este caso:

$$\frac{dP}{dt} = P_{i0}e^{-\frac{rt}{V}} - \frac{rP}{V}$$

Que é uma equação linear com solução dada por:

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{P_{i0}}{\frac{r}{V}-b}\right)e^{-\frac{rt}{V}} + \frac{P_{i0}}{\frac{r}{V}-b}e^{-bt} \text{ se } \frac{r}{v} \neq b$$

ou

$$P(t) = P_0e^{-\frac{rt}{V}} + P_{i0}e^{-\frac{rt}{V}} \text{ se } \frac{r}{v} = b$$

Se a indústria tem um sistema periódico de descargas, intensificando os lançamentos em certos períodos e reduzindo em outros. Uma tentativa pode ser:

$$P_i(t) = P_{i0}\big(1 + sen\ (wt)\big) - \varepsilon P(t) \text{ no qual } \varepsilon = r/V$$

Cuja solução é dada por:

$$P(t) = \left(P_0 + \frac{r_{i0}}{\varepsilon} + \frac{P_{i0}w}{\varepsilon^2 + w^2}\right)e^{-st} + \frac{P_{i0}}{\sqrt{\varepsilon^2 + w^2}}sen(wt - \theta) + \frac{P_{i0}}{\varepsilon}$$

Após estudar os modelos matemáticos, pode-se concluir que eles auxiliam na despoluição de lagos e lagoas de maneira natural, ou seja, apenas pelo fluxo de saída de água desde que a indústria não exceda a capacidade de diluição de despejos da lagoa.

Referências:

[1] R. C. Bassanezi e W. C. Ferreira Jr., Equações Diferenciais com Aplicações, Editora Harbra Ltda., 1988.

[2] C. Chicone, Ordinary differential equations with applications, Springer, 1999.

[3] D. G. Zill, Equações diferenciais com aplicações em modelagem – São Paulo : Cengage Learning, 2003.

[4] D. G. Zill e M. R. Cullen, Equações diferenciais. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.