Geração de malhas bidimensionais estruturadas em torno da asa de uma aeronave

Agatha Penteado de Almeida
Licenciatura em Matemática - UTFPR, Câmpus Curitiba
agatha.8d@gmail.com

Prof. Rudimar Luiz Nós
Departamento Acadêmico de Matemática - UTFPR, Câmpus Curitiba
rudimarnos@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Equações de Thompson, malhas estruturadas, perfis de asa de uma aeronave, Método SOR.

Resumo: Apresentamos neste trabalho as equações de Thompson, com fatores de espaçamento P e Q, e as empregamos para gerar computacionalmente malhas bidimensionais estruturadas para regiões duplamente conexas. Nessas regiões, a fronteira interna é dada pelo perfil da asa de uma aeronave. Discretizamos as equações usando diferenças finitas centradas de segunda ordem e utilizamos o Método SOR para solucionar numericamente o sistema de equações lineares proveniente da discretização. Neste método, testamos valores ótimos para o parâmetro de relaxação ω.

1 Introdução

Equações Diferenciais Parciais (EDPs) são extremamente importantes em Matemática Aplicada. Diversos modelos matemáticos para simular fenômenos físicos são baseados nessas equações, como modelos em dinâmica dos fluidos e aerodinâmica. Para simular numericamente os modelos matemáticos que descrevem esses fenômemos físicos, devemos inicialmente discretizar o domínio espacial. Para tanto, podemos empregar malhas estruturadas ou malhas não estruturadas.

2 Modelo matemático

As equações de Thompson

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + J^2 \left(P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0, \tag{1}$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + J^2 \left(P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0, \tag{2}$$

com

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \tag{3}$$

$$\beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \tag{4}$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \tag{5}$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \tag{6}$$

são obtidas a partir de transformações conformes sobre a equação de Laplace [3]. Essas equações constituem um sistema de EDPs não-lineares, de segunda ordem, homogêneas. Nas equações (1)-(6), (x, y) são coordenadas cartesianas, (ξ, η) são coordenadas generalizadas (nestas, linhas de uma mesma família não se intersectam, enquanto linhas de famílias distintas se intersectam uma única vez) e o controle do espaçamento da malha é feito através das funções $P(x, y)$ e $Q(x, y)$, as quais possibilitam a concentração das linhas coordenadas nas regiões desejadas [2].

3 Método numérico

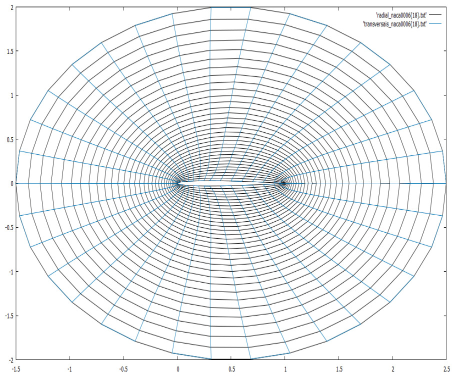
As equações (1)-(6) são discretizadas através de diferenças finitas centradas de segunda ordem. As condições iniciais são definidas por interpolação transfinita, uma forma de interpolação linear bidimensional, e o sistema linear proveniente da discretização é solucionado numericamente com o emprego do Método SOR (Successive Over-Relaxation).

4 Resultados computacionais

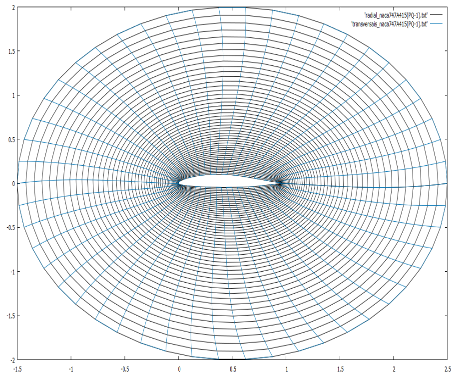
Os códigos computacionais foram desenvolvidos em linguagem C, compilados e executados no programa Dev-C++ para o sistema operacional Windows 10 e as malhas foram plotadas no gnuplot 5.0 patchlevel 3. No Método SOR, foram adotados dois critérios de parada: um número máximo de iterações e uma precisão prefixada. A Figura 4 mostra alguns resultados para quatro perfis de asa de uma aeronave [4].

5 Conclusões

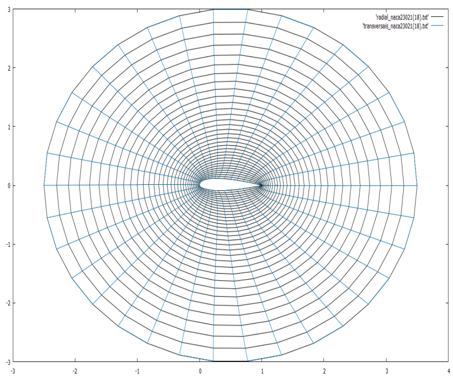
Nas simulações computacionais, verificamos que, no Método SOR, $1,5 \leq w \leq 1,8$ estabelece convergência dependendo dos valores utilizados para P e Q e também para o raio R da circunferência que define a fronteira radial.



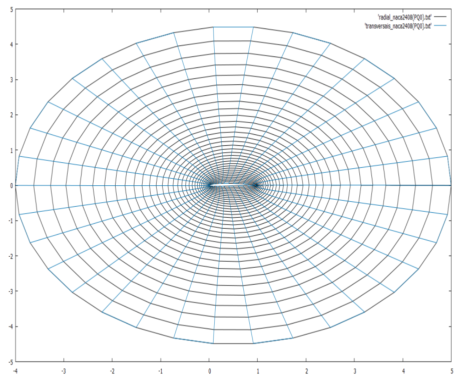
(a) Malha para região duplamente conexa com fronteira interna dada pela NACA0006 (35 pontos), gerada a partir das equações de Thompson com $P = Q = 0$ empregando SOR com $w = 1,6$, $R = 2$, em 121 iterações



(b) Malha para região duplamente conexa com fronteira interna dada pela NACA747A415 (51 pontos), gerada a partir das equações de Thompson com $P = Q = -1$ empregando SOR com $w = 1,5$, $R = 2$, em 250 iterações



(c) Malha para região duplamente conexa com fronteira interna dada pela NACA23021 (35 pontos), gerada a partir das equações de Thompson com $P = Q = 0$ empregando SOR com $w = 1,8$, $R = 3$, em 98 iterações



(d) Malha para região duplamente conexa com fronteira interna dada pela NACA2408 (35 pontos), gerada a partir das equações de Thompson com $P = Q = 0$ empregando SOR com $w = 1,7$, $R = 4,5$, em 157 iterações

Figura 1: Malhas geradas pela discretização das equações de Thompson (1)-(6)

Referências

[1] ALMEIDA, A. P. de. Geração computacional de malhas bidimensionais estruturadas em torno da asa de uma aeronave. Trabalho de Conclusão de Curso, UTFPR, Curitiba, 2017.

[2] POLINA, S. et al. Geração de malhas para domínios bidimensionais simples e multiplamente conexos. In: *XII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*. São José do Rio Preto: SBMAC, 1989.

[3] THOMPSON, J. F. *Numerical grid generation - Foundations and applications*. New York: Elsevier Science Publishing Co., 1985.

[4] TOOLS, A. Airfoil Tools. 2017. URL: *http://airfoiltools.com/* (acesso em 20 de maio de 2017).