Método de Gradientes Conjugados

Luciano Luzzi Júnior *
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
lucluzzi@hotmail.com

Prof. Lucas Pedroso (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR

Palavras-chave: Otimização, Sistemas lineares, Análise de convergência.

Resumo:
Na área de Otimização, o problema de minimizar uma função quadrática do tipo $q(x) = x^T Ax - b^T x$, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, com A simétrica e definida positiva e $b \in \mathbb{R}^n$, é de grande importância. É fácil observar que minimizar $q(x)$ é equivalente a resolver o sistema linear $Ax = b$, o que justifica em parte o interesse em minimização de quadráticas. Além disso, vários algoritmos de Otimização para minimização de funções não lineares consistem em sucessivas resoluções de problemas quadráticos. Dentre os métodos clássicos para o problema apresentado, citamos o de Cauchy, que do ponto de vista computacional possui iterações baratas porém ineficazes, no sentido que várias delas são necessárias para que atinjamos a convergência dentro da tolerância escolhida. No outro extremo, temos o método de Newton, que converge em uma iteração para o minimizador da função quadrática, uma vez que paga o indesejado preço de resolver explicitamente o sistema linear $Ax = b$. Uma opção mais barata que o método de Newton e mais eficiente que o de Cauchy é o método de Gradientes Conjugados, que será apresentado neste trabalho.

Um conjunto de direções $\{d_1, ..., d_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é dito A-conjugado se $d_i^T Ad_j = 0$, para todos $i, j = 0, 1, ..., k$, com $i \neq j$. Podemos provar que um conjunto A-conjugado é linearmente independente, logo o mesmo possui no máximo n direções. Dado um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, na k-ésima iteração o algoritmo de gradientes conjugados encontra o minimizador de q na variedade $x_0 + [d_0, \ldots, d_{k-1}]$, onde as direções $\{d_0, ..., d_{k-1}\}$ são A-conjugadas. Como direções A-conjugadas são LI, é fácil ver que no máximo na n-ésima iteração o algoritmo chega na solução exata de $Ax = b$, justificando a eficiência em relação ao método de Cauchy. É importante observar que tanto a construção do conjunto $\{d_0, ..., d_{k-1}\}$ quanto a própria minimização de q nas sucessivas variedades são realizadas através de cálculos surpreendentemente simples. Tal fato é devido às diversas interessantes propriedade que o algoritmo possui e pela maneira como foi construído. Estas e outras propriedades serão o foco do nosso estudo neste trabalho.

*Bolsista PET-Matemática .

Referências:

[1] Conn, A. R., Gould N. I. M. e Toint, P. L. *Trust Region Methods.* 1^a ed. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

[2] Gil, A., Segura, J. e Temme, N. M. *Numerical Methods for Special Functions.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.

[3] Luenberger, D. G. e Ye, Y. *Linear and Nonlinear Programming.* 3^a ed. Springer, 2008.

[4] Ribeiro, A. A. e Karas, E. W. *Otimização Contínua: aspectos teóricos e computacionais.* 1^a ed. Cengage Learning, 2013.