O Algoritmo de Levinson para Resolução de Sistemas Lineares

Lucas Seiffert *
Bacharelado em Matemática - UFPR
lucas.seiffert@ufpr.br

Prof. Yuan Jin Yun (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
jin@ufpr.br

Palavras-chave: Matriz Toeplitz, Algoritmo de Levinson, Mínimos Quadráticos, Equações Normais.

Resumo:

Neste trabalho, estudamos o algoritmo proposto por Norman Levinson em 1947 para resolver sistemas lineares com matriz de coeficientes do tipo Toeplitz. Em seguida, vimos duas extensões desse método para sistemas com matriz de coeficientes simétrica não-Toeplitz, provenientes do problema de mínimos quadráticos.

O algoritmo proposto por Levinson em seu artigo [1] e explicado com mais detalhes em [2] resolve iterativamente o sistema linear $Tx = b$, com T matriz $n \times n$ Toeplitz simétrica e $b \in \mathbb{R}^n$. A cada iteração k, é utilizada a solução x_{k-1} da iteração anterior para resolver o sistema $T_k x_k = b_k$, com T_k tendo as primeiras k linhas e colunas de T e b_k, os k primeiros elementos de b. Fazendo uso da estrutura da matriz Toeplitz, o algoritmo de Levinson é capaz de resolver o sistema da iteração k utilizando $O(k)$ operações. No total, o algoritmo resolve o sistema linear com $4n^2$ operações.

A primeira extensão do algoritmo de Levinson estudada foi criada por Porsani e Ulrych em 1991 [3]. O procedimento de Levinson foi estendido a sistemas simétricos não-Toeplitz, em particular para as equações normais do problema de mínimos quadrados. Esse novo algoritmo possibilita reutilizar as soluções parciais de um problema caso outro tenha colunas em comum, e evita o cálculo da inversa de matrizes.

Estudamos, por fim, uma extensão de [3] proposta em [4] para solução de mínimos quadrados de grande porte, em que a memória de um único computador não comporta as matrizes envolvidas em outros métodos como fatorização QR ou Cholesky. Nesse caso, o princípio do método de Levinson foi usado para possibilitar um método paralelo para uso em *clusters* de computadores para a solução de mínimos quadrados.

*Bolsista do Programa PET-Matemática de 08/2014 a 06/2015 e de Iniciação Científica do CNPq, a partir de 07/2015

Referências:

[1] LEVINSON, N. The Wiener RMS (Root Mean Square) Error Criterion in Filter Design and Prediction. **Journal of Mathematics and Physics**, v. 25, no. 4, p. 261-278, jan. 1947.

[2] GOLUB, G.H; VAN LOAN,C.F. **Matrix Computations**. 4. ed. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2013.

[3] PORSANI, M.J; ULRYCH, T.J. Levinson-Type Extensions for Non-Toeplitz Systems. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 39, no. 2, p. 366-375, fev. 1991.

[4] PORSANI, M. J; STOFFA, P.L; SEN, M.K; SEIF, R,K. Partitioned Least-Squares Operator for Large-scale Geophysical Inversion. **Geophysics**, v. 75, no. 6, p. R121-R128, nov. 2010.