Teorema de estrutura para módulos sobre domínios

Marcel Thadeu de Abreu e Souza *
Bacharelado e Licenciatura em Matemática - UFPR
marcel.abreu@ufpr.br

Profa. Dra. Tanise Carnieri Pierin (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
tanise@ufpr.br

Palavras-chave: álgebra, módulo, domínio.

Resumo:

Neste trabalho apresentaremos o teorema dos divisores elementares, que conclui que todo módulo finitamente gerado sobre um domínio de ideais principais pode ser expresso como soma direta de cópias do anel e quocientes da forma $A/_{p_i^{r_{ij}}A}$. Mais precisamente, para um módulo M finitamente gerado sobre um domínio de ideais principais A, existem um inteiro $n \geq 0$, elementos irredutíveis $p_1, ..., p_s \in A$ e inteiros:

$$r_{11} \geq r_{12} \geq ... \geq r_{1t_1} > 0$$
$$\vdots$$
$$r_{s1} \geq r_{s2} \geq ... \geq r_{st_s} > 0$$

tais que:

$$M \cong A^{(n)} \oplus A/_{p_1^{r_{11}}A} \oplus ... \oplus A/_{p_1^{r_{1t_1}}A} \oplus ... \oplus A/_{p_s^{r_{s1}}A} \oplus ... \oplus A/_{p_s^{r_{st_s}}A},$$

onde os inteiros n, r_{ij}, $1 \leq j \leq t_i$, $1 \leq i \leq s$, e os ideais $p_i^{r_{ij}}A$ estão univocamente determinados pelas condições acima. Com o objetivo de demonstrar tal teorema, introduziremos conceitos preliminares da teoria de módulos.

Posteriormente, mostraremos uma aplicação deste teorema na teoria de grupos, mais especificamente na classificação dos grupos abelianos finitamente gerados. É possível, por exemplo, garantir que os grupos abelianos finitamente gerados de ordem 60 são:

$G_1 = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$
$G_2 = \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$

---

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET-Matemática)

Referências:

[1] POLCINO MILIES, F. C. **Anéis e Módulos.** São Paulo: Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1972.