Grupos de Grothendieck e Categorificação Algébrica

Clayton Cristiano Silva *
Bacharelado em Matemática - UFV
ccris22@gmail.com

Prof. Marinês Guerreiro (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFV
marinesguerreiro0208@gmail.com

Palavras-chave: categorificação, grupos de Grothendieck, decategorificação.

Resumo:

O termo *categorificação*, introduzido por Louis Crane e Igor Frenkel refere-se ao processo de se trocar noções da Teoria de Conjuntos por suas correspondentes análogas na Teoria de Categorias. Dessa forma, substituímos conjuntos por categorias, elementos por objetos, funções por funtores, relações entre elementos por morfismos entre objetos e relações entre funções por transformações naturais de funtores. A idéia por trás desse processo é obter informações extras que possam ser usadas para estudar o objeto original. Entretanto, o processo inverso, conhecido como *decategorificação*, onde objetos isomorfos são identificados como iguais, é um ponto de partida mais natural.

O método mais simples de esquecer informação em uma categoria é tomar o correspondente *grupo de Grothendieck*, que é um exemplo clássico do processo de decategorificação. Trata-se de um grupo abeliano sobre o conjunto das classes de isomorfismo de uma categoria essencialmente pequena munida de uma operação binária. Ele deve o seu nome ao matemático Alexander Grothendieck, que o introduziu em sua obra fundamental em meados dos anos 1950, resultando no desenvolvimento da K-teoria, que o levou à prova do teorema de Grothendieck-Riemann-Roch. O estudo dos grupos de Grothendieck é imprescindível para a realização de algumas categorificações. Por exemplo, para se categorificar um espaço vetorial V, buscamos uma categoria C cujo grupo de Grothendieck seja isomorfo ao espaço vetorial, ou seja, tal que $K(C) \cong V$.

Certas categorias (*aditivas, abelianas e trianguladas*) fornecem a construção do grupo de Grothendieck de uma maneira natural. Neste trabalho, investigamos a estrutura dos grupos de Grothendieck desses vários tipos de categorias. As categorias

*Bolsista do PICME-Programa de Iniciação Científica e Mestrado

aditivas, por exemplo, formam os blocos básicos da construção das categorias restantes a serem abordadas neste trabalho. Veremos que, em categorias aditivas, produtos binários e coprodutos binários coincidem e lançaremos mão dessas operações para definir o *grupo de Grothendieck cindido* de uma categoria aditiva. Além disso, discutiremos algumas propriedades que essas categorias podem ter que dão bases boas aos grupos de Grothendieck. No caso das categorias aditivas temos a propriedade de Krull-Schmidt e para as categorias abelianas, o Teorema de Jordan-Hölder. Finalmente, no contexto de categorias trianguladas, faremos uma breve discussão do exemplo da *categoria de homotopia* de uma categoria aditiva.

Referências:

C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, 1994.

W. Lu, A. K. McBride, *Algebraic Structures on Grothendieck Groups*, Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, 2013.