O Método de Separação de Variáveis aplicado à resolução da Equação do Calor

Elis Regina Halitski *
Bacharelado em Engenharia Civil - UEPG
elisreginahalitski@hotmail.com

Prof. Jocemar de Quadros Chagas (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
jocemarchagas@uepg.br

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Método de separação de variáveis, Equação do Calor.

Resumo:
Durante a elaboração deste trabalho foi estudado o Método de Separação de Variáveis, aqui aplicado especificamente para obter a solução da equação do calor em uma e em duas dimensões. Os exemplos apresentados ilustram a eficiência do método, aplicável em uma grande variedade de casos, desde que respeitadas as restrições presentes na literatura.

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é destacar um método clássico de resolução de equações diferenciais parciais, conhecido como Método de Separação de Variáveis. Ele consiste basicamente em substituir uma equação diferencial parcial a resolver por um sistema de equações diferenciais ordinárias, que devem ser resolvidas satisfazendo as condições de contorno e/ou condições iniciais dadas. Para ilustrar a aplicação deste método, mostraremos a busca pela solução da equação do calor, uma das três equações de 2ª ordem fundamentais, cujo entendimento é essencial para compreender a solução de outras equações parabólicas mais complexas.

2 O problema de contorno para a condução do calor

O estudo matemático da condução de calor começou em torno de 1800, e continua a ser um atrativo campo de estudos. Vamos considerar, no primeiro exemplo, um problema de condução de calor em uma barra finita de seção reta uniforme, feita com material homogêneo, com as laterais perfeitamente isoladas, onde o fenômeno físico de transmissão do calor pode facilmente ser compreendido como ocorrendo

*Bolsista do Programa PICME.

em apenas uma dimensão. No segundo exemplo, vamos considerar o fenômeno de difusão do calor em uma placa retangular, também com suas superfícies isoladas, e sem troca de calor pelas bordas da placa.

2.1 Condução do calor em 1 dimensão

Nesta etapa será analisado o problema da condução do calor em uma barra unidimensional finita, descrito por

$$u_t = c^2 u_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0, \tag{1}$$

com condições de contorno e condições iniciais dadas por

$$\begin{cases} u(0,t) = 0;\ u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = f(x),\ \forall\ 0 < x < L. \end{cases} \tag{2}$$

Para utilizar o Método da Separação de Variáveis, admite-se que a solução seja da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Assim, fazendo as derivações na solução adotada e as substituindo em (1), obtém-se o seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0; \\ T'(t) - \lambda c^2 T(t) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Ao considerarmos $\lambda < 0$, obtém-se, respectivamente, as seguintes soluções:

$$X(x) = c_1 cos\Big(\sqrt{|\lambda|}x\Big) + c_2 sen\Big(\sqrt{|\lambda|}x\Big) \quad \text{e} \quad T(t) = e^{\lambda c^2 t}.$$

Ao aplicarmos as condições de contorno e a condição inicial do problema, chegamos à solução

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\lambda_n t} sen\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \quad \text{válida para} \quad 0 < x < L,\ \text{ e }\ t > 0,$$

onde

$$\lambda_n = c^2\Big(\frac{\pi n}{L}\Big)^2 \quad \text{e} \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx.$$

2.2 Condução do calor em 2 dimensões

Nesta etapa será analisado o problema da condução do calor em uma placa retangular finita, descrito por

$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}),\ x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ t > 0, \tag{4}$$

com condições de contorno e condições iniciais dadas por

$$\begin{cases} u(0,y,t) = u(a,y,t) = u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0; \\ u(x,y,0) = f(x,y),\ \forall\ (x,y) \in (0,a) \times (0,b). \end{cases} \tag{5}$$

Admite-se que a solução é da forma $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$. Contudo, inicialmente adota-se a solução com a forma $u(x,y,t) = G(x,y)T(t)$ e, assim, ao fazer as derivações e as substituir em (4), obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} G_{xx}(x,y) + G_{yy}(x,y) - \lambda G(x,y) = 0; \\ T'(t) - \lambda c^2 T(t) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Assumindo $\lambda < 0$, ao utilizar novamente o Método de Separação de Variáveis na primeira equação de (6), com $G(x, y) = X(x)Y(y)$, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} X''(x) - \kappa X(x) = 0, & \text{com } \lambda < \kappa < 0, \\ Y''(y) + \beta Y(y) = 0, & \text{com } \beta = (\lambda - \kappa). \end{cases} \tag{7}$$

As soluções para as equações em $X(x)$, $Y(y)$ e $T(t)$ são, respectivamente:

$$\begin{aligned} &X(x) = h_1 cos\Big(\sqrt{|\kappa|}x\Big) + h_2 sen\Big(\sqrt{|\kappa|}x\Big); \\ &Y(y) = h_3 cos\Big(\sqrt{|\beta|}y\Big) + h_4 sen\Big(\sqrt{|\beta|}y\Big); \text{ e} \\ &T(t) = e^{\lambda c^2 t}. \end{aligned}$$

Aplicando as condições de contorno e a condição inicial do problema, e o método das séries de Fourier, chegamos à solução

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{\lambda_{m,n} t} h_{m,n} sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) sen\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \ \forall\ (x, y) \in (0, a) \times (0, b) \text{ e } t > 0,$$

onde

$$\lambda_{m,n} = c^2\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right] \text{ e } h_{m,n} = \frac{4}{ab}\int_0^a \int_0^b f(x, y) sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) sen\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dydx.$$

3 Conclusão

Assim como ilustrado neste trabalho, o Método de Separação de Variáveis pode ser empregado em diferentes problemas, obtendo na maioria das vezes um resultado satisfatório, desde que uma das principais restrições do método seja respeitada: a geometria do domínio deve comportar a separação de variáveis de forma natural.

No primeiro caso apresentado neste trabalho, o método foi empregado para se resolver uma equação em apenas uma dimensão, e no segundo caso, o mesmo método foi empregado para resolver a mesma equação, mas em duas dimensões. É fácil constatar que a resolução da equação em duas dimensões demanda mais trabalho do que em uma dimensão. O aumento do trabalho na busca da solução também ocorre quando se trabalha com condições de contorno não homogêneas ou com mais termos na equação da qual se busca o resultado.

Referências

[1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10.ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2015.

[2] IÓRIO JR., R.; IÓRIO, V. M. **Equações Diferenciais parciais:** uma introdução. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[3] OLIVEIRA, E. C.; TYGEL, M. **Métodos Matemáticos para Engenharia**. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.