Transformações de Möbius e Curvas Loxodrômicas

Duarte Kenyu Murakami
Bacharelado em Matemática - UFPR
du.murakami@yahoo.com.br

Prof. Dr. Eduardo Outeiral Correa Hoefel
Departamento de Matemática - UFPR
hoefel@ufpr.br

Palavras-chave: Transformações de Möbius, Loxodromias, Curvas Loxodrômicas.

Resumo:

No estudo da geometria hiperbólica, procuramos por um grupo de transformações em $\overline{\mathbb{C}}$ que preservem uma certa quantificação de um plano hiperbólico. Para tanto, começamos com o estudo das transformações de Möbius cujas formas são $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$. É verificável que a composição de duas transformações de Möbius é uma transformação de Möbius, e que sua inversa, $m^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cw-a}$, também o é. Denotamos como Möb$^+$ o grupo de todas as transforções de Möbius. Os elementos de Möb$^+$ podem ser gerados a partir de composições de transformações do tipo $f(z) = az + b$ para $z \in \mathbb{C}$ e $f(\infty) = \infty$, com $a,\ b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$ e da transformação $J(z) = 1/z$ para $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $J(0) = \infty$, e $J(\infty) = 0$
Uma propriedade de Möb$^+$ é a de que se $m \in$ Möb$^+$ fixa 3 pontos (ou mais) distintos de $\overline{\mathbb{C}}$, então m é a transformação identidade, ou seja, $m(z) = z,\ \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$. Uma outra propriedade interesante de Möb$^+$ é a propriedade transitiva: dados duas triplas (z_1, z_2, z_3) e (w_1, w_2, w_3) de pontos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$, existe um único $m \in$ Möb$^+$ tal que $m(z_1) = w_1,\ m(z_2) = w_2,\ m(z_3) = w_3$. A unicidade é consequência da propriedade anterior.
Duas transformações de Möbius m e n são ditas conjugadas se existe alguma transformação de Möbius p tal que $n = p \circ m \circ p^{-1}$. Duas transformações de Möbius conjugadas tem o mesmo número de pontos fixos em $\overline{\mathbb{C}}$. Como temos apenas duas possibilidades para o número de pontos fixos (tirando a indentidade), temos que todas as transformações de Möbius podem ser conjugadas em duas transformações: $z + 1$, quando fixa um ponto; e az quando fixa dois pontos. Quando uma transformação de Möbius é conjugada de $z+1$, dizemos que ela é parabólica. Quando é conjugada de az com $|a| = 1$, dizemos que ela é elíptica. E quando $|a| \neq 1$, dizemos que é loxodrômica. O termo loxodrômica deriva do termo loxodromia, que são curvas na esfera que cortam todos os meridianos num ângulo constante. A razão de classificarmos as transformações de Möbius em loxodrômicas é que cada uma dessas transformações preservam

uma loxodromia. Faz-se uma pausa no estudo das transformações de Möbius para entrar nos estudo das loxodromias (curvas loxodrômicas) no plano $\mathbb{R}^2$.
Uma curva no $\mathbb{R}^2$ pode ser descrita com as seguintes coordenadas:

$$\gamma(\theta) = r(\theta)e^{i\phi(\theta)} = (r(\theta)\cos(\phi(\theta)), r(\theta)\sin(\phi(\theta)))$$

eliminamos os caso em que $r(\theta) = 0$ para alguns θ, pois a origem é a interseção de todos os meridianos. Assim, temos $r(\theta) > 0, \ \forall\theta$.
Usando a projeção estereográfica, temos que os meridianos de uma esfera são as retas no $\mathbb{R}^2$ que passam pela origem. Para que γ seja loxodrômica, é necessário que ela intercepte essas retas sempre com um mesmo ângulo. Assim, podemos calcular condições para que uma curva seja loxodrômica usando a definição de que o ângulo entre duas curvas é o ângulo entre seus vetores tangentes no ponto de interseção.

Referências:

ANDERSON, James W. **Hyperbolic Geometry.** Londres: Springer, 2006.