Teorema da Função Implícita e Extensão

Lucas Matheus Sandeski *
Licenciatura em matemática - UEPG
lucassan1509@gmail.com

Prof. Marciano Pereira (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística -UEPG
marciano@uepg.br

Palavras-chave: Teorema Função Implícita, Desigualdade de Young, Espaços de Banach.

Resumo: De modo geral é útil trabalhar com variáveis independentes, trabalhando com o menor número de variáveis para dado problema. Em alguns casos como na equação $x^3 + y^2 + z^2 = -8,1 \cdot 10^{-8}$, é fácil escrever x em função de y e z. Porém no sistema

$$\begin{cases} x^3yz + yz^2 + xy + x^2y^3z^2 = 0 \\ zyx + y^5x^4 + zy^3 + xyz^2 = 0, \end{cases}$$

já não é tão fácil.

De modo que se torna útil ter algum meio de saber de antemão se é possível ou não escrever alguma das variáveis em função de outras, em uma região. Por isso, este trabalho se voltou a estudar o Teorema da Função Implícita, que pode ser usado para resolver o problema.

Teorema 1 (Teorema da Função Implícita - TFI) *Se $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma função de C^1. Suponha $f(x_0, y_0) = 0$ e*

$$det \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \neq 0.$$

Então existe aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ função de classe C^1 tais que

a) $x_0 \in \Omega$ *e* $\varphi(x_\circ) = y_0$;

b) $f(x, \varphi(x)) = 0$, $\forall x \in \Omega$.

Além disso, o TFI pode ser estendido para espaços de Banach em vez de espaços euclidianos. Porém antes de enunciá-lo definiremos a derivada de uma função entre espaços vetoriais normados e também o conceito de derivadas parciais em espaços vetoriais normados.

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME).

Definição 1 (Derivada) *Para X, Y espaços vetoriais normados e $A \subset X$ um aberto, dizemos que uma aplicação $f : A \to Y$ é diferenciável em $x_\circ \in A$ se existe uma aplicação linear e contínua, denotada por $f'(x_\circ) : X \to Y$, que será chamada a derivada (ou derivada de Fréchet) de f em $x_\circ$, tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(x_\circ + h) - f(x_\circ) - f'(x_\circ)(h)||_Y}{||h||_X} = 0.$$

Nesta definição, $f'(x_\circ)(h)$ denota o valor da aplicação linear $f'(x_\circ)$ aplicada no vetor h pertencente a X, e assim, $f'(x_\circ)(h)$ pertence a Y.

Apresentaremos um exemplo bem simples desse conceito. Sejam $f : X \to Y$ uma função linear contínua e X, Y espaços vetorias normados. Então $f(x_\circ + h) = f(x_\circ) + f(h)$. Se considerarmos $f'(x_\circ)(h) = f(h)$, então a identidade

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(x_\circ + h) - f(x_\circ) - f'(x_\circ)(h)||_Y}{||h||_X} = 0,$$

fica satisfeita para todo $h \in X$, o que nos leva a concluir, pela unicidade da derivada, que f é diferenciável em $x_\circ$ e $f'(x_\circ) \equiv f$. Ou seja, a derivada de uma transformação linear contínua é a própria transformação.

Definição 2 (Derivada Parcial) *Sejam X, Y, Z espaços vetoriais normados e A um conjunto aberto de $X \times Y$. Seja*

$$\begin{array}{rccc} f: & A \subset X \times Y & \longrightarrow & Z \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x, y). \end{array}$$

Seja $(x_\circ, y_\circ)$ pertencente a A e $A_{y_\circ} = \{x \in X | (x, y_\circ) \in A\}$. Como A é aberto então $A_{y_\circ}$ é aberto (em X). Seja

$$\begin{array}{rccc} F: & A_{y_\circ} \subset X & \longrightarrow & Z \\ & x & \longmapsto & F(x) = f(x, y_\circ) \end{array}.$$

Se F é diferenciável em $x_\circ$ então $F'(x_\circ) : X \to Z$ é uma aplicação linear e contínua chamada derivada parcial em f em $(x_\circ, y_\circ)$ em relação a variável x, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)$.

Podendo agora enunciar o Teorema da Função Implícita em espaços de Banach.

Teorema 2 (Teorema da Função Implícita em espaços de Banach) *Sejam E , F e G espaços vetoriais normados e assuma F um espaço de Banach. Sejam $\Omega \subset E \times F$ aberto e $f : \Omega \to G$ uma função tal que*

a) f é contínua;

b) para todo $(x, y) \in \Omega$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe e é contínua em Ω;

c) $f(a, b) = 0$ e $T = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ é invertível e tem inversa contínua.

Então, existem vizinhanças U de a e V de b e uma função contínua $\phi : U \to V$ tal que $\phi(a) = b$ e as únicas soluções em $U \times V$ da equação $f(x, y) = 0$ são da forma $(x, \phi(x))$. Além disso, se f é diferenciável em (a, b), então ϕ é diferenciável em a e

$$\phi'(a) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right]^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right].$$

Entre outras aplicações, esse teorema pode ser usado para demonstrar o Teorema da Função Inversa, e o Método dos Multiplicadores de Lagrange, enunciado abaixo.

Teorema 3 (Método dos Multiplicadores de Lagrange) *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e $S = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$. Supponha $x_\circ \in S$ tal que*

$$g'(x_\circ) \neq 0 \textit{ e } f(x_\circ) = \textit{min}\{f(x); x \in S\}.$$

Então $f'(x_\circ)$ e $g'(x_\circ)$ são linearmente dependentes, isto é, existe (multiplicador de Lagrange) $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x_\circ) = \lambda \nabla g(x_\circ)$.

Que por sua vez é utilizado em demonstrações, como por exemplo o da desigualdade de Young, enunciada abaixo.

Desigualdade 1 (Young) *Sejam p e q tais que $1 < p,q < +\infty$ e $1/p + 1/q = 1$. Então, para todos $x,y \in \mathbb{R}$, vale a desigualdade*

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

Referências:

[1] Cipolatti, R. **Cálculo Avançado I**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2002.

[2] Domingues H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

[3] Kreyszig, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. Virgínia: John Wiley & Sons, 1989.

[4] Wilberstaedt, J. M. **Diferenciabilidade e o Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach**. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

[5] Friedman, A. **Advanced Calculus**. New York: Dover Publications, 2007.

[6] Lima, E. L. **Análise Real** Volume 2. Rio de Janeiro: IMPA,2004.

[7] Moriya, A. I. **Os Teoremas de Funções Inversa e Implícita e suas Aplicações**. Monografia (Especialista em Ciências - Área de Concentração: Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2011.

[8] Araújo, G. S. **O teorema da Função Implícita em Espaços de Banach e Aplicações**. Monografia (Bacharel em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza ,Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2010.