Integração numérica pelo método senh-tgh

Renan O. Domingues *
Bacharelado em Engenharia Química - UFPR
renan.oclides@hotmail.com

Prof. Abel S. Siqueira
Departamento de Matemática - UFPR
abel.s.siqueira@gmail.com

Setembro de 2015

Palavras-chave: Integração Numérica, Análise Numérica, Mudança de Variável.

Resumo:

Partindo do teorema fundamental do cálculo, sabe-se que a integral definida de uma função f em um intervalo $[a,b]$ pode ser obtida utilizando a relação

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

onde F é uma primitiva de f. No entanto, obter uma primitiva de uma função é, em geral, uma técnica complexa demais para ser implementada computacionalmente.

Com isso surge a necessidade de técnicas alternativas ao método analítico, que aproximem o valor de integrais definidas e possam ser executadas por meio de algoritmos computacionais de maneira eficiente. As técnicas clássicas de integração numérica são as fórmulas de Newton-Cotes, que consistem em aproximar a integral de uma função f em um intevalo $[a,b]$ utilizando os valores da função nas abcissas $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$, igualmente espaçadas entre si.

Apesar das fórmulas clássicas de Newton-Cotes funcionarem bem para aproximar funções contínuas em intervalos finitos, elas não fornecem valores satisfatórios ao aproximar integrais impróprias. Integrais impróprias incluem aquelas definidas em intervalos infinitos e integrais de funções que possuem descontinuidade infinita em um intervalo finito.

Uma técnica que nos permite aproximar integrais impróprias com grande precisão é a mudança de variável na integral. Dada uma primitiva $F(x)$ de $f(x)$, e supondo que $x = x(t)$, temos

$$\frac{dF(x)}{dt} = F'(x)\frac{dx}{dt} = f(x)\frac{dx}{dt}.$$

*Bolsista do PICME

De forma que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f(x(t))\frac{dx}{dt}\,\mathrm{d}t.$$

Daí, basta encontrar uma função $x(t)$ que melhore a integral, ou seja, que transforme uma integral imprópria em uma integral equivalente, com alguma propriedade melhor.

Um exemplo de mudança de variável que pode ser utilizada para aproximar integrais impróprias é a substituição senh-tgh (seno-tangente hiperbólicas). A substituição senh-tgh utiliza funções hiperbólicas, e possui três formas principais: uma para um intervalo limitado $[a, b]$ e uma para cada um dos intervalos ilimitados $[0, +\infty)$ e $(-\infty, +\infty)$.

A substituição senh-tgh para um intervalo finito $[a, b]$ é definida por

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2}\tanh\left(c\cdot\sinh t\right) \\ \frac{dx}{dt}(t) &= \frac{(b-a)}{2}\,\mathrm{sech}^2\left(c\cdot\sinh t\right)\cdot c\cdot\cosh t, \end{aligned}$$

onde c é uma constante que pode ser substituída por valores entre 1 e $\frac{\pi}{2}$. Nessa mudança o intervalo $[a, b]$ para a variável x é substituído por $(-\infty, +\infty)$ para a variável t. Dessa forma, a parte relevante ao cálculo da integral fica limitada a um intervalo limitado simétrico. Veja a Figura 1.

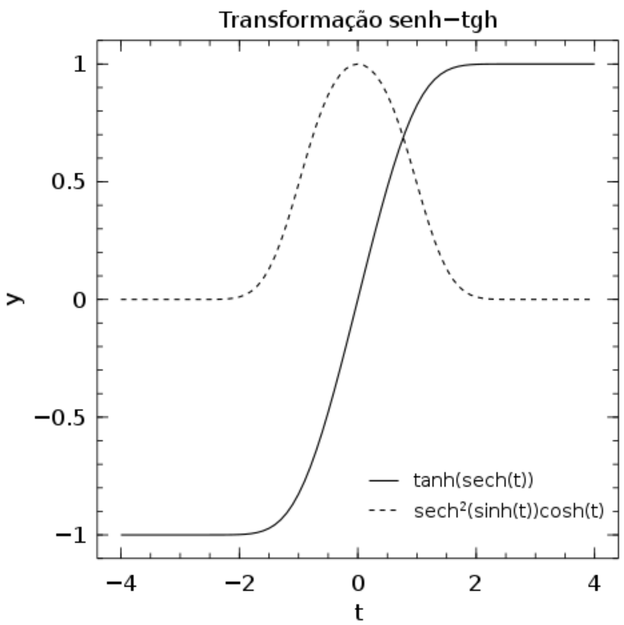

Figura 1: Gráfico da transformação senh-tgh

Dessa forma, apesar da substituição senh-tgh mudar o limite de integração para $(-\infty, +\infty)$, pode-se truncar esse intervalo em um finito, tal como $[-4.0, 4.0]$, sem prejudicar a precisão da aproximação.

A substituição senh-tgh possui uma convergência muito rápida, sendo assim utilizada também para obter aproximações de alta precisão de integrais, sejam elas impróprias ou não.

Nesse trabalho foram desenvolvidas, implementadas e comparadas as fórmulas clássicas de integração numérica e os métodos baseados em mudanças de variáveis, que incluem a Quadratura Gaussiana e a substituição senh-tgh. A implementação foi feita na linguagem Julia, com o desenvolvimento de pacote de código livre e testes automatizados.

Referências:

[1] BAILEY, D. H.; JEYABALAN, K.; LI, X. S. A comparison of three high-precision quadrature schemes. **Experimental Mathematics**, v. 14, n. 3, p. 317–329, 2005.

[2] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical analysis**. 9ª ed. Pacific Grove: Brooks/Cole, 2011.

[3] MORI, M. Quadrature formulas obtained by variable transformation and the DE-rule. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 12, p. 119–130, 1985.

[4] PRESS, W. H. et al. **Numerical recipes**. 3ª ed. Cambridge University Press, 2007.

[5] RUGGIERO, M. A. G.; ROCHA LOPES, V. L. da. **Cálculo numérico - Aspectos teóricos e computacionais**. 2ª ed. Editora Pearson, 1997.

[6] **The Julia Language**. URL: `http://julialang.org/` (acesso em 30/09/2015).