Condições necessárias e suficientes de otimalidade para problemas de programação não linear*

Bruno Furquim de Souza
Licenciatura em Matemática –UFPR
brunofurquimsouza@gmail.com

Everton Jose da Silva
Licenciatura em Matemática –UFPR
evertonjosedasilva570@gmail.com

Profa Lucelina Batista dos Santos (Orientadora)
Departamento de Matemática –UFPR
lucelina@ufpr.br

Palavras-chave: problemas de programação não linear; funções convexas; convexidade generalizada

Resumo: Neste trabalho, consideramos o seguinte problema de Programação Não Linear,

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) \\ \text{sujeito a } g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \ldots, m \end{array} \tag{P}$$

onde as funções $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são continuamente diferenciáveis.
Inicialmente, estudamos a existência de soluções para o problema **(P)** e também as condições necessárias de otimalidade Fritz-John **(FJ)** e Karush-Kuhn-Tucker **(KKT)**. Tais condições foram obtidas a partir do Teorema de Alternativa de Gordan o qual, por sua vez, pode ser demonstrado a partir do Teorema de Separação de Hahn-Banach (Veja [1], [2], [5]). Verificamos que, sob hipóteses de convexidade, as condições KKT são suficientes para a otimalidade. Uma noção de convexidade generalizada muito conhecida é a invexidade, a qual foi introduzida por Hanson em [1]: Uma função $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é invexa se e somente se existe $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(x) - \phi(y) \geq \nabla^T \phi(y)\eta(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Assim sendo, toda função convexa diferenciável é invexa (v. [1]). Além disto, ϕ é invexa se e somente se todo ponto estacionário de ϕ é minimizador global. Mais geralmente,

*Trata-se de um trabalho desenvolvido conjuntamente pelos dois alunos, os quais decidiram de comum acordo e com a anuência da orientadora- que o trabalho será apresentado no J3M pelo primeiro autor.

se as funções forem todas invexas, ainda vale a suficiência das condições KKT (v. [4]). Entretanto, existem problemas de programação não linear cujos pontos KKT são ótimos mas não são invexos. Para tais, utilizamos o conceito de KT-invexidade, que é uma variação do conceito de invexidade para o problema **(P)** e é caracterizada pela seguinte propriedade fundamental: O problema **(P)** é KT-invexo se, e somente se, todo ponto que satisfaz as condições KKT é minimizador global de **(P)**. Dito de outra maneira: A classe dos problemas KT-invexos é a maior classe de problemas para os quais as condições KKT são necessárias e também su...cientes para a otimalidade. Esta propriedade foi obtida por Martin (v. [6]) e pode ser demonstrada a partir do Teorema de Alternativa de Motzkin (v. [2]); tal caracterização é bastante interessante, seja do ponto de vista teórico ou do ponto de vista das aplicações. O prosseguimento natural deste trabalho será a generalização destes resultados para problemas de programação não linear multiobjetivos (v. [3], [7]).

Referências:

[1]D. P. Bertsekas, A. Nedic, A.E. Ozdaglar. Convex Analysis and Optimization. Athena Scientic, Belmont, Massachusetts, 2003.

[2]L. Contesse-Becker: Introducción a La Optimización con Restric- ciones. Universidad de Chile -Departamento de Matematicas y Ciencias de la Computación, Santiago, 1984.

[3]V. Chankong, Y. Y. Haimes: Multiobjective Decision Making Theory and Methodology. North-Holland, Amsterdam, 1983.

[4]M. A. Hanson (1981) On the suficiency of Kuhn-Tucker conditions. J. Math. Anal. Appl. vol. 80, p. 545-550;

[5]E. W. Karas, A. A. Ribeiro. Um curso de Otimização, Cengage Learning, Brasil, 2013.

[6]D. H. Martin (1985) The Essence of Invexity. Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 47, p. 65-76;

[7]R. Osuna-Gómez, A. Beato-Moreno, A. Ru...án-Lizana (1999) Generalized convexity in multiobjective programming. J. Math. Anal. Appl., vol. 233, p. 205-220.