Caderno de Resumos

J3M 7° Edição - 2023

JORNADA DE MATEMÁTICA,
MATEMÁTICA APLICADA E
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PET - Matemática UFPR

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor:	Prof. Dr. Cleber de Medeira
Estudantes:	Ana Cleo Matias Vieira da Motta Brenda Dal Puppo Monteiro Daniel Thiago Ivanchechen Gabriel Luiz de Freitas Kaiky Yuji Ishiy Kevyan Uehara de Moraes Laura Carolina Aymore Ferrandin Leonardo Cortez do Nascimento Lucas Xavier Lucca Gonçalves de Carvalho Mariana da Silva Freitas Natalia Chicora Otavio Augusto Salomão Recacho Samuel Adam Trindade de Souza Thiago Batista dos Santos Martins Yanko Szuszko Soares
Site:	www.petmatematica.ufpr.br
Telefone:	(41) 3361-3672
Data do Evento:	08 a 10 de Novembro de 2023
Local de Realização:	Centro Politécnico - UFPR

Curitiba, novembro de 2023.

Sumário

Apresentação

Prezado leitor,

É com satisfação que apresentamos o caderno de resumos da 7ª edição da Jornada de Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática - J3M. Este é um evento idealizado, produzido e coordenado pelos estudantes do grupo PET - Matemática da UFPR.

A J3M nasceu da necessidade e do desejo de se criar um ambiente propício para apresentação dos trabalhos de Iniciação Científica desenvolvidos no âmbito do Departamento de Matemática da UFPR. É um evento que vem se consolidando como um importante canal de comunicação entre o grupo PET - Matemática, os Cursos de Matemática e Matemática Industrial da UFPR e estudantes de outras universidades.

Nesta edição, estão contempladas as áreas de Álgebra, Análise Matemática, Análise Numérica, Educação Matemática, Geometria e Otimização. As bancas especializadas de avaliação são compostas por docentes e estudantes de pós-graduação da UFPR. Como forma de incentivo aos alunos apresentadores são concedidas distinções aos trabalhos que obtêm as melhores avaliações por parte das bancas.

Gostaria de agradecer a cada um dos alunos do PET-Matemática pela dedicação e cuidado que dispensaram para a realização dessa edição da J3M. Também agradeço aos professores e estudantes de pós-graduação pelo excelente trabalho realizado nas bancas de avaliação. Registramos também nosso reconhecimento à Direção do Setor de Ciências Exatas, ao Departamento de Matemática e à coordenação do curso de Matemática pelo apoio

recebido em todas as etapas desse evento.

Prof. Dr. Cleber de Medeira
Tutor do PET- Matemática - UFPR
Novembro/2023

Álgebra

Corretores de resumos:

Professores:

Prof$^{\underline{\text{a}}}$. Maria Eugênia Martin
Prof$^{\underline{\text{a}}}$. Tanise Carnieri Pierin

Banca Avaliadora:

Professores:

Prof. Christian Schmidt
Profª. Maria Eugênia Martin
Profª. Tanise Carnieri Pierin
Prof. Willian Goulart Gomes Velasco

Estudantes de pós-graduação:

Arthur Rezende Alves Neto
Matheus Moraes Santos

O Teorema de Gabriel via formas quadráticas positivas definidas

Arthur Rothenberger*

arthurdrothenberger@gmail.com [1]

Fernando Araujo Borges (Orientador)

fernando.borges@ufpr.br [2]

[1]Licenciatura em Ciências Exatas - UFPR

[2]Centro de Estudos do Mar (CEM) - UFPR

Palavras-chave: quiver, teorema de Gabriel, representações indecomponíveis.

Resumo:

Uma representação de um quiver Q consiste em um conjunto de espaços vetoriais e transformações lineares entre esses espaços. Essa estrutura pode ser visualizada como um diagrama de vértices e flechas, em que cada vértice está associado a um espaço vetorial e cada flecha está associada a uma transformação linear. Um quiver é considerado finito se os conjuntos de vértices e flechas são finitos, para este estudo consideraremos apenas quivers finitos e sem ciclos. Podemos definir morfismos e isomorfismos entre as representações como coleções de transformações lineares que conectam uma representação a outra, sendo um isomorfismo quando cada transformação é uma bijeção. As representações de um quiver e seus morfismos formam uma categoria importante denotada como repQ. Assim, o propósito principal do estudo das representações de quivers é classificar todas as representações e morfismos em repQ, a menos de isomorfismo. Nesse contexto, existem resultados importantes que nos permitem compreender melhor repQ. O teorema de Krull-Schmidt estabelece que toda representação pode ser expressa como a soma direta de representações indecomponíveis, ou seja, aquelas que não podem ser decompostas de forma não trivial. Sendo assim, para compreender a categoria basta conhecer quais são suas representações indecomponíveis e seus morfismos.

Uma ferramenta que desempenha um papel crucial é o quiver de Auslander-Reiten, uma vez que seus vértices correspondem às representações indecomponíveis e suas

*Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC)

flechas correspondem aos morfismos irredutíveis. Em geral, o quiver de Auslander-Reiten é uma abordagem inicial valiosa para estudar repQ. No caso em que o número de isoclasses de representações indecomponíveis é finito, o quiver de Auslander-Reiten fornece uma descrição completa de repQ.

Um fato interessante é que podemos classificar quais são os quivers sem relações que são do tipo de representação finito e a classificação de representações desse tipo não depende da orientação do quiver. Dessa forma, o objetivo central deste trabalho é estudar a demonstração do Teorema de Gabriel, que nos mostra que o número de isoclasses de representações indecomponíveis de um quiver conexo e sem relações Q é finito se, e só se, Q tem como grafo subjacente um grafo Dynkin $\mathbb{A}$,$\mathbb{D}$ ou $\mathbb{E}$. O teorema pode ser demonstrado utilizando a teoria tilting, porém, para comprovar essa afirmação, iremos utilizar uma demonstração que se baseia na classificação de formas quadráticas inteiras definidas positivas associadas aos grafos subjacentes, usando fortemente Álgebra Linear.

Referências

[1] SCHIFFLER, R. **Quiver Representations.**, Springer, 2014.

[2] AUSLANDER, M; REITEN, I. **Representation theory of Artin algebras. III. Almost split sequences**. Comm. Algebra, v. 3, p. 239–294, 1975.

[3] ASSEM, I; SIMSON, D; SKOWRONSKI, A. **Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1**, London Mathematical Society Student Texts, vol. 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[4] COELHO, F. **Curso de Álgebra Linear**, Um Vol. 34. EdUSP, 2001.

[5] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Linear algebra**. Englewood Cliffs, Nj: Prentice-Hall, 1971.

Teorema da Correspondência de Dold-Kan

Fernando Augusto de Lima Filho*
fernando.lima@ufpr.br [1]

Eduardo Outeiral Correa Hoefel (Orientador)
hoefel@ufpr.br [2]

[1,2]Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: objetos simpliciais, equivalência de categorias, complexos.

Resumo:

Introduzidos por Samuel Eilenberg e Joseph Abraham Zilber em 1950, os objetos simpliciais são a base da álgebra homotópica, que generaliza a álgebra homológica para categorias arbitrárias.

Considere a categoria Δ, em que os objetos e os morfismos são os seguintes conjuntos:

$$[n] := \{0 < 1 < ... < n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

$$\mathrm{Hom}_\Delta([n],[k]) := \{f : [n] \longrightarrow [k] \mid f \text{ é monótona não-decrescente}\}$$

Um **objeto simplicial** de uma categoria $\mathcal{C}$ é um funtor contravariante $F : \Delta^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$. Um dos resultados mais importantes é o **teorema da correspondência de Dold-Puppe**, que estabelece uma relação entre a categoria de objetos simpliciais de uma categoria abeliana e a categoria de complexos de uma categoria abeliana, como enunciamos formalmente abaixo.

Teorema (Dold-Puppe): Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana, então existe uma equivalência de categorias:

$$N : s\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$$

entre

- A categoria de objetos simpliciais de $\mathcal{A}$.
- A categoria de complexos limitada inferiormente em $\mathcal{A}$.

Neste trabalho mostramos o caso particular feito por Daniel M. Kan (1958) conhecido como **teorema da correspondência de Dold-Kan**, onde $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}$ (categoria dos grupos abelianos). Por fim exibimos algumas propriedades desses funtores no contexto de categorias modelo.

*Voluntário

Referências

[1] GOERSS, P.; JARDINE, J. **Simplicial Homotopy Theory**. Springer, 2009.

[2] MAC LANE, S. **Categories for the Working Mathematician**. Springer, 1978.

[3] WEIBEL, C. **An Introduction to Homological Algebra**. Cambridge University Press, 1994

[4] QUILLEN, D. **Homotopical Algebra**. Springer, 1967.

Um estudo de representações indecomponíveis de um quiver através de sua forma quadrática

Isabele Andrade Vichinieski*
isavichinieski@gmail.com [1]

Tanise Carnieri Pierin (Orientadora)
tanpierin@gmail.com [2]

[1]Licenciatura em Matemática - UFPR
[2]Departamento de Matemática - UFPR

Palavras-chave: quivers, formas quadráticas, teoria de representações, representações indecomponíveis.

Resumo:

O trabalho inicia-se com o estudo acerca das representações de quivers, utilizando diagramas nos quais associamos a cada vértice de um quiver Q um espaço vetorial e a cada flecha de Q uma transformação linear. O objetivo do trabalho é determinar as representações indecomponíveis de quivers por meio de suas formas quadráticas. Para isso, estudamos a forma quadrática de um quiver, dada por:

$$qQ(\mathbf{x}) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}$$

onde $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]^t \in \mathbb{Z}^n$. Uma forma quadrática pode ser classificada como **fracamente positiva**, **positiva semidefinida**, **positiva definida** ou **indefinida**, de acordo com seu resultado para os possíveis vetores **x**.

O vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ tal que $qQ(\mathbf{x}) = 1$ é chamado de **raiz** de qQ. Com o estudo das raízes podemos concluir que uma forma quadrática qQ tem um número finito de raízes positivas se, e somente se, qQ é fracamente positiva.

A partir dessa afirmação e de uma análise acerca dos grafos subjacentes de um quiver, demonstramos que se Q é um quiver cujo grafo subjacente $\overline{Q}$ é Dynkin, então qQ é uma forma quadrática fracamente positiva e, consequentemente, qQ tem um número finito de raízes positivas. É possível mostrar que essas últimas estão em correspondência biunívoca com as representações indecomponíveis de Q, a menos de isomorfismos, o que garante que há também somente um número finito de representações indecomponíveis de Q, a menos de isomorfismos. Mais ainda, podemos exibir todas tais representações.

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME

Referências

[1] ASSEM, Ibrahim; SIMSON, Daniel; SKOWRONSKI, Andrzej. **Elements of the Representation Theory of Associative Algebras:** Techniques of Representation Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[2] SCHIFFLER, Ralf; **Quiver Representations**. Springer International Publishing Switzerland, 2014.

[3] COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian; **Um Curso de Álgebra Linear**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2020.

Teste de divisibilidade em uma base qualquer

Letícia Rodrigues dos Santos
leticiarsantos4@gmail.com[1]
Isac Messias Michelon
isacmicic@gmail.com[1]
[1]Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: divisibilidade, teoria de números, bases numéricas.

Resumo:
A necessidade de determinar se um número é divisível por outro é uma questão que nos surge frequentemente. No entanto, recorrer ao algoritmo da divisão para essa verificação pode ser bastante trabalhoso, dependendo do tamanho dos números envolvidos ou da base numérica em que estão expressos. É por isso que fazemos o uso de critérios de divisibilidade, que consistem em regras matemáticas que nos permitem avaliar se um número é divisível por outro sem a necessidade de realizar a divisão completa. Essas regras simplificam a identificação de múltiplos e divisores de um número, provando ser ferramentas extremamente úteis em diversos ramos da matemática e também em situações do cotidiano que envolvem números inteiros.

Aprendemos critérios de divisibilidade de alguns números na escola, como para 3, 4, 6, 9, etc., mas para outros, como o 7 e o 11, normalmente não. Nesse trabalho, queremos mostrar que, de fato, existe métodos para números como 7 e 11 e, na verdade, podemos utilizar um único método que testa a divisibilidade de um número por um outro qualquer.

Vejamos como podemos verificar se **1309** é divisível por 7.

- **1º passo:** Separar 1309 em: 130 e 9;
- **2º passo:** Multiplicar 9 por -2, obtendo -18;
- **3º passo:** Somar $130 + (-18) = 112$.
- **4º passo:** Analisar se, de cabeça, sabemos a divisibilidade do resultado. De cabeça, não é óbvio se 112 é divisível por 7 ou não, então vamos repetir o processo:
- **1º passo:** Separar 112 em: 11 e 2;
- **2º passo:** Multiplicar 2 por -2, obtendo -4;

- **3º passo:** Somar $11 + (-4) = 7$.
- **4º passo:** Sabemos que 7 é divisível por 7, então podemos concluir que 112 é divisível por 7 e, consequentemente, 1309 também é!

De modo geral, temos o seguinte método para verificar se x, escrito na base b, é divisível por y, quando y e b são coprimos.

- **1º passo:** "Separar" o algarismo da unidade do número x;
- **2º passo:** Multiplicar o algarismo da unidade de x por um inverso multiplicativo de b módulo y;
- **3º passo:** Somar o resultado ao número inicial sem o algarismo da unidade;
- **4º passo:** Analisar se, de cabeça, sabemos a divisibilidade do resultado.

Em nossa apresentação, demonstraremos o método utilizando de conceitos de teoria de números como o Teorema Chinês do Resto e Teorema de Bézout [1] e mostraremos uma maneira de, para números pequenos, utilizar o método mesmo que y e b não sejam coprimos.

Referências

[1] BEZERRA, Nazaré. **Teoria dos Números: Um Curso Introdutório**. Editora EditAedi. 2018.

Um estudo sobre álgebras de quatérnios

Kaiky Yuji Ishiy*
kaikyishiy@gmail.com [1]

Gisele Teixeira Paula (Orientadora)
giseleteixeira@ufpr.br [1]

[1]Universidade Federal do Paraná (UFPR).

Palavras-chave: álgebras de quatérnios, álgebras centrais simples, teoria de números.

Resumo:

Os primeiros exemplos de quatérnios surgiram quando o matemático William R. Hamilton encontrou uma forma de multiplicar elementos de $\mathbb{R}^4$, abandonando-se a comutatividade. Posteriormente, sua ideia foi generalizada para um corpo K qualquer, o que levou aos estudos das álgebras de quatérnios. Atualmente, esse objeto é utilizado em diversas áreas de estudo, como geometria aritmética, topologia de baixa dimensão, teoria analítica de números, entre outras.

Seja K um corpo com $\mathrm{Car}(K) \neq 2$. Uma **álgebra de quatérnios** A sobre K, denotada por $(a,b)_K$, é um K-espaço vetorial de dimensão 4, com uma base $\{1,i,j,k\}$ e multiplicação definida por

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad ij = -ji = k$$

em que $a, b \in K^*$, e linearmente estendida para todo o espaço de modo que seja distributiva e associativa.

Toda álgebra de quatérnios é um anel associativo, não comutativo e com unidade. Observamos que a hipótese $\mathrm{Car}(K) \neq 2$ é necessária (e suficiente) para que A seja não comutativa. Um exemplo de álgebra de quatérnios é o conjunto $\mathbb{H} = (-1,-1)_{\mathbb{R}}$ dos **quatérnios de Hamilton**, mencionado no primeiro parágrafo.

Para cada $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ em A, define-se seu **conjugado** $\overline{x}$ por

$$\overline{x} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k.$$

Além disso, a **norma** $\mathrm{N}(x)$ de x é definida por

$$\mathrm{N}(x) = x\overline{x} = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3.$$

Observe que $\mathrm{N}(x) \in K$, seja qual for $x \in A$. Conjugação e norma possuem propriedades muito semelhantes às de seus análogos complexos. Por exemplo, para quaisquer $x, y \in A$,

*Bolsista do PET Matemática - UFPR.

$$\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}, \ \ \overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}, \ \ \overline{\overline{x}} = x,$$

$$\mathrm{N}(x) = x\overline{x} = \overline{x}x, \ \ \mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y).$$

Existe uma relação direta entre a norma de um elemento de uma álgebra de quatérnios e a existência de seu inverso multiplicativo: $x \in A$ possui inverso multiplicativo (à esquerda e à direita) se, e somente se, $\mathrm{N}(x) \neq 0$. Nesse caso, $x^{-1} = \dfrac{x}{\mathrm{N}(x)}$.

Um **anel de divisão** é um anel com unidade em que todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo (à esquerda e à direita). Nem toda álgebra de quatérnios é um anel de divisão; mais ainda, uma álgebra de quatérnios será um anel de divisão se, e somente se, todo elemento não nulo possuir norma não nula.

Por exemplo, $\mathbb{H}$ é um anel de divisão. De fato, dado $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ em $\mathbb{H}$, tem-se $\mathrm{N}(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$. Mais adiante, veremos um exemplo de álgebra de quatérnios que não é anel de divisão.

Um **isomorfismo** entre álgebras de quatérnios A e A' sobre um corpo K é um isomorfismo de anéis $\varphi : A \to A'$ tal que $\varphi(c) = c$ para todo $c \in K$.

É válido o seguinte resultado: $\varphi : (a,b)_K \to A$ é um isomorfismo entre álgebras de quatérnios se, e somente se, for um isomorfismo de espaços vetoriais que satisfaz

$$\varphi(1) = 1, \ \ (\varphi(i))^2 = a, \ \ (\varphi(j))^2 = b, \ \ \varphi(i)\varphi(j) = -\varphi(j)\varphi(i) = \varphi(k)$$

em que $\{1, i, j, k\}$ é a base de definição de $(a,b)_K$.

Utilizando isomorfismos, é possível mostrar que o conjunto de matrizes $M_2(K)$ é uma álgebra de quatérnios, da seguinte forma: dado $a \in K^*$, define-se uma transformação $\varphi : (a,1)_K \to M_2(K)$, colocando

$$\varphi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \varphi(i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}, \ \varphi(j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \varphi(k) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

e estendendo a definição linearmente para os elementos de $(a,1)_K$.

Verifica-se que φ é um isomorfismo entre álgebra de quatérnios. Observe que $M_2(K)$ é um exemplo de álgebra de quatérnios que não é anel de divisão. Com efeito, $M_2(K)$ é um anel que possui divisores de zero. Na verdade, pode-se mostrar que toda álgebra de quatérnios sobre K que não é anel de divisão é isomorfa a $M_2(K)$.

Assim, álgebras de quatérnios podem ser classificadas neste sentido: se A é uma álgebra de quatérnios sobre K, então ou A é um anel de divisão ou $A \simeq M_2(K)$.

Também é possível provar o seguinte: dados $a, b \in K^*$, tem-se $(a,b)_K \simeq M_2(K)$ se, e somente se, a equação $ax^2 + by^2 = 1$ possui solução (x,y) em K.

Utilizando esse resultado, mostra-se que:

1. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se $(a,b)_{\mathbb{R}} \simeq \begin{cases} \mathbb{H}, \text{se } a < 0 \text{ e } b < 0, \\ M_2(\mathbb{R}), \text{se } a > 0 \text{ ou } b > 0. \end{cases}$

2. Dados $a, b \in \mathbb{C}$, tem-se $(a,b)_{\mathbb{C}} \simeq M_2(\mathbb{C})$.

Isso significa que, a menos de isomorfismos, existem apenas duas álgebras de quatérnios sobre $\mathbb{R}$, e apenas uma sobre $\mathbb{C}$. Sobre $\mathbb{Q}$, no entanto, existem infinitas álgebras de quatérnios não isomorfas. Isso se deve às seguintes proposições:

1. Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$ primos distintos tais que $p \equiv 3 \mod 4$ e $q \equiv 3 \mod 4$. Então $(-1, p)_{\mathbb{Q}} \not\cong (-1, q)_{\mathbb{Q}}$.

2. Existem infinitos primos distintos congruentes a 3 módulo 4.

Por fim, vejamos uma definição equivalente para álgebra de quatérnios.

O **centro** de um anel A é o conjunto de todos os elementos de A que comutam com qualquer elemento de A.

Uma álgebra A sobre K é chamada **central**, se o centro de A é K, e **simples**, se os únicos ideais de A são $\{0\}$ e A.

Seja K um corpo com $\mathrm{Car}(K) \neq 2$. São equivalentes as seguintes afirmações:

1. A é uma álgebra de quatérnios sobre K.

2. A é uma álgebra central simples de dimensão 4 sobre K.

O principal objetivo futuro do nosso projeto é estudar as aplicações das álgebras de quatérnios na geometria hiperbólica, mais especificamente no estudo dos grupos Fuchsianos (subgrupos discretos das isometrias do plano hiperbólico) aritméticos. Nesse contexto, as álgebras de quatérnios aparecem como invariantes naturais associados a esses grupos, e portanto são úteis no sentido de sua classificação.

O resumo acima foi baseado nas referências [1] e [2], sendo que [2] e [3] serão utilizadas nessa etapa futura do projeto. As principais aplicações das álgebras de quatérnios podem ser vistas com profundidade em [4].

Referências

[1] CONRAD, K. **Quaternion Algebras**. Notas de aula. University of Connecticut, 2016. Disponível em: https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ringtheory/quaternionalg.pdf. Acesso em: 5 set. 2023.

[2] COSAC, G. **On the Geometry of Semi-Arithmetic Riemann Surfaces**. Tese de doutorado. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2021. Disponível em: https://w3.impa.br/ mbel/tese/GregoryCosac-Tese-2021.pdf. Acesso em: 5 set. 2023.

[3] KATOK, S. **Fuchsian Groups.** University of Chicago press, 1992.

[4] VOIGHT, J. **Quaternion Algebras.** Springer Nature, 2021.

Classificação de categorias semi-simples

Lucas Cabral Port*
lucas.cabral@ufpr.br [1]

Edson Ribeiro Alvares (Orientador)
rolo1rolo@gmail.com [2]

[1,2] Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: categorias abelianas, categorias semi-simples, teoria homológica.

Resumo: Eilenberg e Maclane escreveram o primeiro texto sobre teoria de categorias em 1945 (ver [3]). Os próprios autores afirmam que a motivação foi criar um conceito geral que pudesse englobar ambientes como grupos, homomorfismos, espaços topológicos, funções contínuas, etc. Em 1957, Grothendieck introduziu em [4] as categorias abelianas com o intuito de axiomatizar as propriedades das categorias de módulos sobre um anel e a categoria de feixes sobre um esquema. Recentemente, Jasso introduziu as categorias n-abelianas, apresentando assim a fundamentação teórica para as categorias n-cluster tilting. Um resultado de Jasso é que se uma categoria é n-abeliana e m-abeliana para $m \neq n$, então ela é uma categoria semi-simples.

O objetivo deste trabalho é, motivado por este resultado, estudar as categorias semi-simples, cuja definição é dada em termos de morfismos. Uma categoria aditiva $\mathscr{C}$ é dita semi-simples se para todo morfismo $f : X \to Y$ existem $p : X \to Z$ epimorfismo que cinde e $i : Z \to X$ monomorfismo que cinde tais que $i \circ p = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

A partir dessa definição, mostraremos que toda categoria semi-simples é abeliana. Mais ainda, as categorias semi-simples são exatamente as categorias abelianas onde toda sequência exata cinde. Por fim, classificamos essas categorias no caso em que elas são artinianas, mostrando que todo objeto é uma soma direta finita de objetos simples.

Referências

[1] JASSO G.; **n-abelian and n-exact categories**. Berlin: Springer, 2016.

*Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC)

[2] ASSEM, I.; **Algebres et modules:** cours et exercices. Canada: Masson, 1997.

[3] EILENBERG, S. e MACLANE, S.; **General theory of natural equivalences**. Transactions of the American Mathematical Society, v. 58, p. 231-294, 1945.

[4] GROTHENDIECK, A.; **Sur quelques points d'algèbre homologique**. Tohoku Math, v. 9, p. 119-221, 1957.

[5] Assem, I.; **Introduction au langage catégorique**. Paris: Calvage & Mounet, 2022.

Representações de Álgebras de Jordan

Lucas Cabral Port*
lucas.cabral@ufpr.br [1]

Profa. Maria Eugenia Martin (Orientadora)
eugenia@ufpr.br [2]

[1]UFPR
[2]UFPR

Palavras-chave: álgebras de Jordan, tipo de representação, envelope multiplicativo universal.

Resumo: Em 1980, Yu. Drozd mostrou em [1] que é possível classificar as álgebras associativas de dimensão finita em relação a seu tipo de representação: finito, manso ou selvagem. A saber, seja A uma $\mathbf{k}$-álgebra associativa com unidade, dizemos que A tem:

- **Tipo de representação finito**: se tem uma quantidade finita de classes de isomorfismos de A-módulos indecomponíveis.
- **Tipo de representação manso**: se não é de tipo finito e para cada dimensão d existe uma quantidade finita de famílias a um parâmetro $F_1, F_2, ..., F_N$ tal que todo A-módulo indecomponível de dimensão d é isomorfo a um módulo de alguma família F_i.
- **Tipo de representação selvagem**: se existe um A-$\mathbf{k}\langle x, y\rangle$-bimódulo M, finitamente gerado e livre como $\mathbf{k}\langle x, y\rangle$-módulo, tal que o funtor

  $$F : \mathbf{k}\langle x, y\rangle\text{-}\mathrm{Mod} \to A\text{-}\mathrm{Mod},$$

  dado por $F(N) = M \otimes_{\mathbf{k}\langle x,y\rangle} N$ e $F(f) = \mathrm{id}_M \otimes f$, mantém a indecomponibilidade e as classes de isomorfismos (aqui $\mathbf{k}\langle x, y\rangle$ denota a álgebra associativa livre em x, y).

O objeto de estudo desse trabalho são as álgebras de Jordan. Uma álgebra de Jordan J é uma álgebra comutativa que satisfaz a identidade de Jordan:

$$x \cdot (y \cdot x^2) = (x \cdot y) \cdot x^2, \quad \text{para todo } x, y \in J.$$

Em geral, essas álgebras **não** são associativas mas, toda álgebra de Jordan J, possui uma álgebra associativa relacionada: sua álgebra envelopante multiplicativa universal $U(J)$.

*Voluntário- PVA Processo SEI: 23075.036521/2023-21

A categoria de bimódulos sobre uma álgebra de Jordan J é isomorfa à categoria de módulos à esquerda sobre a álgebra associativa $U(J)$. Mais ainda, se $\dim_{\mathbf{k}} J$ for finita então $dim_{\mathbf{k}}U(J)$ também é finita e logo a construção de $U(J)$ reduz o problema de descrever bimódulos sobre uma álgebra de Jordan de dimensão finita J ao problema de descrever módulos sobre a álgebra associativa $U(J)$. Diremos que uma álgebra de Jordan J de dimensão finita é de tipo finito, manso ou selvagem se isso for verdade para a álgebra associativa de dimensão finita $U(J)$.

O objetivo deste trabalho é estudar a classificação das álgebras de Jordan de dimensão 3 em relação à estrutura de seus bimódulos apresentada em [3] usando métodos da teoria de representações de álgebras associativas de dimensão finita. Também pretendemos iniciar uma sequência deste trabalho para o caso das álgebras de Jordan de dimensão 4, classificadas a menos de isomorfismos em [4].

Referências

[1] DROZD, Yu. **Tame and wild matrix problems**. Repres. Theory II, Proc. ICRA II, Carleton, Springer Math. Lect. Notes 832, 1980.

[2] JACOBSON, N. **Structure and representations of Jordan algebras**. Vol. 39 of American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, 1968.

[3] KASHUBA, I. e SHESTAKOV, I. **Jordan algebras of dimension three: geometric classification and representation type**. Actas del XVI Coloquio Latinoamericano de Álgebra (Colonia del Sacramento, Uruguay). Bibl. Rev. Iber. Mat, 1, 2005.

[4] MARTIN, M. E. **Four dimensional Jordan algebras**. Int. J. Math. Game Theory and Algebra 20 (4), 2013.

[5] SCHIFFLER, R. **Quiver representations**. Springer, 2014.

[6] ASSEM, I.; SKOWROSKI, A. e SIMSON, D. **Elements of the representation theory of associative algebras:** techniques of representation theory. Vol. 1, Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

Representações de um quiver e módulos sobre sua álgebra de caminhos: uma equivalência

Thiago Batista dos Santos Martins[*]
`martinsthiago5008@ufpr.br` [1]

Heily Wagner (Orientadora)
`heilywagner@ufpr.br` [2]

[1]Licenciatura em Matemática - UFPR
[2]Departamento de Matemática - UFPR

Palavras-chave: representações de quiver, módulos sobre algebras de caminhos, equivalência de categorias.

Resumo:

O objetivo inicial do trabalho é relacionar a estrutura de um módulo sobre a álgebra gerada pelos caminhos de um quiver (álgebra de caminhos) e uma representação desse mesmo quiver. Analisaremos a categoria das representações de Q, Rep(Q), e a categoria dos A-módulos (à direita), Mod-$\mathbb{K}Q$ e mostraremos que as categorias Rep(Q) e Mod-$\mathbb{K}Q$ são equivalentes.

Passemos às definições preliminares. Um **quiver** Q é uma quádrupla (Q_0, Q_1, s, t), onde Q_0 é o conjunto de vértices, Q_1 é o conjunto de flechas, $s, t : Q_1 \to Q_0$ são funções. Se $\alpha \in Q_1$, então $s(\alpha)$, $t(\alpha)$ são chamadas de início e término de α, respectivamente. Um **caminho** de Q é uma concatenação de flechas $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l$ de forma que $s(\alpha_i) = t(\alpha_{i-1})$. Também definimos o caminho estacionário e_i para cada vértice $i \in Q_0$.

Exemplo 1:

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & & \\ Q = & & 5 & 4 \arrow[l, "\delta"'] & 3 \arrow[l, "\gamma"'] \\ & 2 \arrow[ur, "\beta"'] & & & \end{tikzcd}$$

Nesse exemplo,

(i) $Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

(ii) $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$;

(iii) $s(\alpha) = 1$;

(iv) $t(\alpha) = t(\beta) = 5$;

(v) $s(\delta) = t(\gamma) = 4$.

Além disso, pelo item (v), $\gamma\delta$ é um caminho de Q.

---

[*]Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) - Matemática

Fixado um quiver Q e um corpo $\mathbb{K}$, uma **representação de** Q é uma família $\{\{V_i\}_{i\in Q_0}, \{T_\alpha\}_{\alpha\in Q_1}\}$, tal que cada V_i é espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$, $T_\alpha : V_i \longrightarrow V_j$ é uma transformação linear.

Exemplo 2: Uma representação genérica do quiver do **Exemplo 1** é:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[dr, "T_\alpha"] & & & \\
& V_5 & V_4 \arrow[l, "T_\delta"'] & V_3 \arrow[l, "T_\gamma"'] \\
V_2 \arrow[ur, "T_\beta"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Dadas duas representações de um quiver Q, digamos $V = \{\{V_i\}_{i\in Q_0}, \{T_\alpha\}_{\alpha\in Q_1}\}$ e $W = \{\{W_i\}_{i\in Q_0}, \{S_\alpha\}_{\alpha\in Q_1}\}$, um **morfismo** entre tais representações é uma família $f = \{f_i\}_{i\in Q_0}$ de transformações lineares, $f_i : V_i \longrightarrow W_i$, tais que, $\forall\alpha \in Q_1, \alpha : i \longrightarrow j$, o seguinte quadrado comuta

$$\begin{tikzcd}
V_i \arrow[r, "T_\alpha"] \arrow[d, "f_i"'] & V_j \arrow[d, "f_j"] \\
W_i \arrow[r, "S_\alpha"] & W_j
\end{tikzcd}$$

ou seja, $f_j \circ T_\alpha = S_\alpha \circ f_i$.

Denotamos o conjunto de todos os morfismos de V em W por Hom(V, W). Se $f \in$ Hom(V, W) e $g \in$ Hom(W, Z), definimos $g \circ f = \{h_i\}_{i\in Q_0} \in$ Hom(V, Z), onde $h_i = g_i \circ f_i$, $\forall i \in Q_0$. Dessa maneira, fica definida a categoria das representações de Q, denotada por Rep(Q).

Por outro lado, uma $\mathbb{K}$**-álgebra** é uma quádrupla $(A, +, \cdot, \cdot_\mathbb{K})$, onde $(A, +, \cdot)$ é um anel e $(A, +, \cdot_\mathbb{K})$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Dado um quiver Q, a **álgebra de caminhos** $\mathbb{K}Q$ associada a um quiver Q é o $\mathbb{K}$-espaço vetorial cuja base é o conjunto de todos os caminhos de Q, e o produto de dois elementos da base é definido pela concatenação, quando fizer sentido, e 0 caso contrário, ou seja, se $\omega = \alpha_1 \cdots \alpha_l$ e $\gamma = \beta_1 \cdots \beta_m$, então

$$\omega\gamma = \begin{cases} \alpha_1 \cdots \alpha_l\beta_1 \cdots \beta_m, & \text{se } t(\alpha_l) = s(\beta_1) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$e_i\omega = \begin{cases} \omega, & \text{se } s(\omega) = i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\omega e_i = \begin{cases} \omega, & \text{se } t(\omega) = i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$e_ie_j = \begin{cases} e_i, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tal produto é estendido para todos os elementos de $\mathbb{K}Q$ por distributividade.

Exemplo 3: Considere o quiver Q do **Exemplo 1**. A base da álgebra de caminhos $\mathbb{K}Q$ é $B = \{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; \alpha; \beta; \gamma; \delta; \gamma\delta\}$.

Um grupo abeliano $(M, +)$ com a operação $\cdot : M \times A \to M$ é um **A-módulo à direita** se:

(P_1) $(m+n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a, \forall a \in A$ e $\forall m, n \in M$ (distributividade).

(P_2) $m \cdot (a+b) = m \cdot a + m \cdot b, \forall a, b \in A$ e $\forall m \in M$ (distributividade).

(P_3) $m \cdot (ab) = (m \cdot a) \cdot b, \forall a, b \in A$ e $\forall m \in M$ (associatividade).

(P_4) $m \cdot 1_A = m, \forall m \in M$.

Sejam M e N dois A-módulos à direita. Uma função $f : M \to N$ é um **morfismo** de A-módulos se

(i) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$, para todos $m_1, m_2 \in M$, e

(ii) $f(m \cdot a) = f(m) \cdot a$, para todo $a \in A$ e todo $m \in M$.

Com a composição usual de funções, fica definida a categoria Mod-A dos A-módulos à direita sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra A. Em particular, a categoria Mod-$\mathbb{K}Q$, dos $\mathbb{K}Q$-módulos à direita sobre a álgebra de caminhos $\mathbb{K}Q$.

Finalmente, podemos enunciar o teorema que é o objeto de estudo deste trabalho:

Teorema: Seja $\mathbb{K}Q$ a álgebra de caminhos com Q um quiver finito. Então, existe uma equivalência $\mathbb{K}$-linear de categorias

$$F : \text{Mod-}\mathbb{K}Q \longrightarrow \text{Rep}(Q).$$

Referências

[1] ASSEM, Ibrahim; SIMSON, Daniel; SKOWRONSKI, Andrzej . **Elements of the Representation Theory of Associative Algebras:** Techniques of Representation Theory. Cambridge University Press, 2006.

[2] COELHO, Flávio Ulhoa. **Curso de Álgebra Linear**. Edusp, 2001.

[3] KRILLOV JR, Alexander. **Quiver representations and quiver varieties**. American Mathematical Soc., 2016.

[4] SCHIFFLER, Ralf. **Quiver representations**. Springer, 2014.

Análise Matemática

Corretores de resumos:

Professores:

Prof. Alexandre Kirilov
Prof. Wagner Augusto Almeida de Moraes

Banca Avaliadora:

Professores:

Prof. Alexandre Kirilov
Prof. Fernando de Ávila Silva
Prof. Jurandir Ceccon
Prof. Wagner Augusto Almeida de Moraes

Estudantes de pós-graduação:

Antonio Guimarães Leite
Pedro Meyer Tokoro

A Transcendência e Irracionalidade de π

Caio Barros Dewnig*
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
caio.dewnig@ufpr.br [1]

Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
wagnermoraes@ufpr.br [2]

[1]Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: número irracional, número transcendente, número π

Resumo:

O símbolo π representa uma das constantes mais antigas na história da matemática, surgindo a partir da razão entre o comprimento de um círculo qualquer pelo seu diâmetro. A constante aparece frequentemente em expressões da matemática, física e química, sempre relacionado ao estudo de ”corpos redondos” e curvas.

Dizer que π é **irracional** é o mesmo que dizer que ele não pode ser representado como a razão entre dois números inteiros e que, portanto, não possui uma representação decimal finita ou uma representação decimal infinita e periódica.

Por mais que isso seja bem conhecido atualmente, muito custou chegar até aqui e a constante passou por diversas aproximações no decorrer da história. Na Antiguidade, por exemplo, através de um algoritmo desenvolvido por Arquimedes, π recebeu a popular aproximação de $\frac{22}{7}$; em tempos posteriores, através de métodos mais sofisticados, a constante recebeu melhores aproximações até chegar aos surpreendentes 62 trilhões de dígitos conhecidos hoje.

A irracionalidade de π foi, provavelmente, demonstrada pela primeira vez pelo matemático francês J. H. Lambert, em 1761, utilizando frações contínuas. Porém, por simplicidade, a demonstração que será apresentada foi feita por I. Niven, que se baseou em um método desenvolvido por Hermite para provar a transcendência de e. A prova será por absurdo: π será considerado racional e, a partir de duas funções específicas, da Fórmula de Leibniz para a derivada do produto entre duas funções e de algumas manipulações envolvendo funções trigonométricas, se chegará em uma contradição.

Um número é dito **transcendente** quando não é raiz de nenhum polinômio de coeficientes inteiros. A argumentação da transcendência de π que será apresentada

*Programa de Voluntariado Acadêmico (PVA) foi feita por R. Moritz, em Annals of Mathematics (1901), com uma leve correção feita por Djairo G. de Figueiredo. A demonstração, novamente, será por contradição: π será considerado um número algébrico (um número que é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros) e, utilizando conceitos da Álgebra Linear e da Análise Complexa, se chegará num absurdo.

Por mais desconexo que pareça, a transcendência de π responde ao Problema da Quadratura do Círculo, um antigo desafio sobre construções geométricas com régua e compasso que pode ser enunciado da seguinte forma: ”Dado um círculo de raio e área arbitrários, é possível construir, com régua e compasso, um quadrado com a mesma área desse círculo?”. A impossibilidade de tal construção é demonstrada a partir de um teorema que relaciona construções geométricas com o grau de um número algébrico (um número algébrico é dito **algébrico de grau** n se é algébrico e é raiz de um polinômio de grau n, mas que não é raiz de nenhum polinômio de grau menor).

Finalmente, a irracionalidade e a transcendência do π revelam resultados, por mais que contidos a área da Matemática Pura, extremamente importantes, respondendo a questões antigas como a Quadratura do Círculo e a da não possibilidade de representar π como uma razão entre inteiros.

Referências

[1] G. DE FIGUEIREDO, Djairo. **Números Irracionais e Transcendentes**. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

[2] NIVEN, Ivan. **Números Racionais e Irracionais**. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

[3] PI. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Pi. Acesso em: 3 set. 2023.

Uma Recíproca do Princípio da Contração de Banach

Danrlley Alexandre Oliveira Barbosa*
danrlleyaleolibar@gmail.com [1]
Marciano Pereira (Orientador)
marciano@uepg.br [2]

[1,2]Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG

Palavras-chave: Teorema do Ponto Fixo de Banach, Espaços Métricos, Contração.

Resumo:

O Princípio da Contração de Banach, também denominado teorema do Ponto Fixo de Banach, foi estabelecido em 1922 por S. Banach. Esse resultado é válido em espaços métricos completos e possui muitas aplicações em equações diferenciais, equações integrais, na Análise Numérica, etc [6]. Esse teorema afirma que [1]: *Se $X = (X,\ d)$, em que $X \neq \emptyset$, é um espaço métrico completo, e $T : X \to X$ uma contração em X, então T tem precisamente um ponto fixo*. Esse resultado garante condições (suficientes) para a existência e unicidade do ponto fixo, daí sua importância para a matemática pura. Nesse sentido, existem diferentes versões e em diferentes contextos [2], [3], [4], [5]. Não bastasse isso, na sua demonstração aparece um processo iterativo para determinação e aproximação do ponto fixo bastante eficiente, de extrema importância para a matemática aplicada.

Por outro lado, uma possível questão que surge é: Se uma contração T num espaço métrico (X, d) tem um único ponto fixo, então esse espaço métrico (X, d) é completo? Isso seria o que podemos chamar de uma *recíproca* para o Princípio da Contração de Banach.

Uma recíproca do teorema do ponto fixo de Banach foi proposta e demonstrada por Czesław Bessaga [2], em 1959. Neste trabalho, nosso objetivo principal foi estudar esse resultado, baseados principalmente nas referências [3] e [5], que apresentam uma demonstração mais simples do que a originalmente apresentada por Bessaga.

Mais precisamente, o enunciado da recíproca é o seguinte.

Teorema 1 Sejam $X \neq \emptyset$ um conjunto, $\alpha \in (0,\ 1)$ e seja $T : X \longrightarrow X$ uma aplicação. Então:

(1) Se T^n tiver no máximo um ponto fixo para cada $n = 1,\ 2, \ldots,$ então existe uma métrica d tal que

$$d(Tx,\ Ty) \leq \alpha\, d(x,\ y), \quad \forall\, x, y \in X.$$

*Egresso do curso de Bacharelado em Matemática Aplicada da UEPG

(2) Se, além disso, alguma T^n tem um ponto fixo, então existe uma métrica d tal que

$$d(Tx,\ Ty) \leq \alpha d(x,\ y), \quad \forall\, x, y \in X,$$

e (X, d) é um espaço métrico completo.

Contudo, para demonstrar o resultado acima, fizemos uso do seguinte lema.
Lema 1 Sejam $T : X \longrightarrow X$ e $\alpha \in (0,\ 1)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Existe uma métrica d, a qual torna X um espaço métrico completo e tal que

$$d(Tx,\ Ty) \leq \alpha\, d(x,\ y), \quad \forall\, x, y \in X.$$

(ii) Existe uma função $\phi : X \longrightarrow [0,\ \infty)$ tal que $\phi^{-1}(\{0\})$ é um conjunto unitário e

$$\phi(Tx) \leq \alpha\, \phi(x), \quad \forall\, x \in X.$$

A ideia, grosso modo, para a demonstração do Teorema 1 é produzir uma tal função ϕ do Lema 1. Em seguida defini-se uma relação de ordem parcial em um conjunto Ω, das funções $\phi : D_\phi \subset X \longrightarrow [0, \infty)$. Pelo Lema de Zorn concluí-se que Ω tem um elemento maximal, e finaliza-se a demonstração mostrando que o domínio desse elemeto maximal é igual a X. Por fim, aplicando o Lema 1, completa-se a demonstração do Teorema 1. Esse trabalho foi parte da pesquisa que resultou no Trabalho de Conclusão de Curso [1].

Referências

[1] BARBOSA, D. A. O. **O Princípio da Contração de Banach: versões e aplicações**. 2023 - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2023.

[2] BESSAGA, Cz. **On the converse of Banach "fixed-point principle"**. In: INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK. COLLOQUIUM Mathematicum. [S.l.: s.n.], 1959. v. 7, p. 41–43.

[3] BROOKS, Robert M; SCHMITT, Klaus. **THE CONTRACTION MAPPING PRINCIPLE AND SOME APPLICATIONS**. Electronic Journal of Differential Equations, v. 2009, 2009.

[4] DEIMLING, Klaus. **Nonlinear functional analysis**.[S.l.]: Courier Corporation, 2010.

[5] JACHYMSKI, Jacek. **A short proof of the converse to the contraction principle and some related results**. Topological Methods in Nonlinear Analysis, Nicolaus Copernicus University in Torun, Juliusz Schauder Center for Nonlinear Studies, v. 15, n. 1, p. 179 – 186, 2000.

[6] KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. v. 17.

Uma família de funções contínuas que aproximam a Função Zeta de Riemann

Giovana Kuan*

Bacharelado em Matemática Aplicada - UEPG

giovana.kuan@gmail.com

Prof. Jocemar de Quadros Chagas (Orientador)

Departamento de Matemática e Estatística - UEPG

jocemarchagas@uepg.br

Palavras-chave: Função Zeta de Riemann, Extensão Analítica, Constante de Euler-Mascheroni.

Resumo:

A função zeta de Riemann está entre as mais famosas funções, provavelmente devido à conjectura conhecida por “Hipótese de Riemann”. Apesar de estar bem definida apenas para variáveis complexas s com $Re(s) > 1$, a função Zeta de Riemann admite uma extensão analítica a todo plano complexo, exceto no polo $s = 1$, conhecida como equação funcional de Riemann. Quando $s = 1$, a função Zeta de Riemann coincide com a série harmônica, que é divergente. Porém, existem dois métodos de regularização de séries divergentes capazes de atribuir um único valor à série harmônica. Neste trabalho, propomos uma família de funções contínuas que aproximam a função Zeta de Riemann.

A função Zeta de Riemann

A função Zeta de Riemann [1, 2, 3] possivelmente é um padrão capaz de descrever a distribuição de números primos. É dito “possivelmente” porque é a conjectura de Riemann que interliga essas duas questões. Como o nome já diz, se é uma conjectura, então ela ainda não foi provada nem refutada.

A função Zeta de Riemann é definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

em que n percorre os inteiros positivos, e s é uma variável complexa no semiplano com $Re(s) > 1$.

Extensão Analítica da função Zeta de Riemann

*Bolsista de Iniciação Científica no Programa PICME.

A função Zeta de Riemann é uma função analítica (diferenciável infinitas vezes), que pode passar pelo processo de extensão analítica, na qual sua definição é estendida para uma região maior no plano complexo, incluindo valores de s com parte real menor ou igual a 1. Uma dessas extensões é a equação funcional de Riemann, dada no teorema a seguir.

Teorema: A função Zeta de Riemann satisfaz a equação funcional

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\text{sen}\Big(\frac{\pi s}{2}(1-s)\Big),$$

válida para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $s \neq 1$.

Ideia da prova: Para provar a equação funcional, usamos a extensão analítica da Função Zeta, dada por

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{m}\frac{B_k}{k!}s(s+1)\cdots(s+k-2)-\frac{1}{m!}s(s+1)\cdots(s+m-1)\int_1^{\infty}\overline{B}_m(x)x^{-s-m}dx,$$

e que vale para a faixa $-2 < Re(s) < -1$, sendo B_k e $\overline{B}_m(x)$, respectivamente, os números e os polinômios de Bernoulli. Em seguida, escrevendo os polinômios de Bernoulli como série de senos e usando uma identidade envolvendo a função gama e senos, chegaremos a

$$\zeta(s) = -2s(s+1)(s+2)\Gamma(-s-2)\text{sen}\Big(\frac{\pi}{2}(-s-2)\Big)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi n)^{1-s}},$$

e ao aplicar sucessivas vezes a equação funcional fundamental para a função gama, obteremos

$$-s(s+1)(s+2)\Gamma(-s-2) = \Gamma(1-s),$$

o que encerra a prova. Esta demonstração pode ser vista, por exemplo, em [3].

Uma família de funções contínuas que aproximam a função Zeta de Riemann

Como visto na seção anterior, a função Zeta de Riemann admite uma continuação analítica (ainda denotada por $\zeta(s)$), válida para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $s \neq 1$. Por outro lado, se $s = 1$, a função Zeta de Riemann diverge, pois se reduz à série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. A série harmônica é conhecida por não se deixar somar por métodos alternativos de somabilidade, a exemplo do método de Cèsaro, de Abel ou de Euler [4] (processo conhecido na física por regularização de uma série divergente). Contudo, recentemente dois métodos de somabilidade conseguiram atribuir um único valor finito à série harmônica: o método das somas suavizadas, proposto por T. Tao [5], e o método da essência das funções, proposto por L. Bielinski [6]. Em ambos os métodos, o resultado encontrado é o seguinte:

$${}^{Sm}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \gamma = {}^{\#}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

onde $\gamma = 0,57721...$ é a constante de Euler-Mascheroni.

Neste parágrafo, propomos uma família de funções contínuas, dependendo de um parâmetro $\varepsilon > 0$, que aproximam a extensão analítica da função Zeta de Riemann e são analíticas em todo domínio $\mathbb{C}$. As funções consideradas são as seguintes:

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\text{sen}\Big(\frac{\pi s}{2}(1-s)\Big), \quad \text{se} \quad s \neq 1;$$

$$\zeta_\gamma^\varepsilon(s) = \begin{cases} \zeta(s), & \text{se} \quad s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_\varepsilon(1)} \\ \gamma, & \text{se} \quad s = 1 \\ \phi_\varepsilon, & \text{se} \quad s \in \overline{B_\varepsilon(1)} \backslash \{1\}, \end{cases}$$

na qual ϕ_ε é uma função suavizadora adequada; e

$$\zeta_\gamma(s) = \begin{cases} \zeta(s), & \text{se} \quad s \in \mathbb{C} \backslash \{1\} \\ \gamma, & \text{se} \quad s = 1. \end{cases}$$

Tais funções satisfazem as seguintes propriedades:

a) $\forall\, \varepsilon > 0$ fixado, $\zeta_\gamma^\varepsilon(s)$ é uma função limitada;

b) $\forall\, \varepsilon > 0$ fixado, $\zeta_\gamma^\varepsilon(s)$ é uma função analítica;

c) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \zeta_\gamma^\varepsilon(s) = \zeta_\gamma(s)$.

Para cada $\varepsilon > 0$ fixado, uma função suavizadora ϕ_ε adequada existe (e não necessita ser única). A título de exemplo, se considerarmos apenas o eixo real, a ideia da construção das funções ϕ_ε pode ser compreendida se dividirmos o intervalo $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ em oito subintervalos de mesmo comprimento. Para o lado direito do intervalo (com comprimento total $\varepsilon/2$, centramos uma circunferência de raio $\varepsilon/8$ no ponto $(1, \gamma+\varepsilon/8)$ e outra circunferência de raio $\varepsilon/8$ tangenciando o gráfico de $\zeta(s)$ no ponto $(1+\varepsilon, \zeta(1+\varepsilon))$. Haverá ainda uma faixa de $\varepsilon/8$ para construirmos um segmento de reta, não vertical, que une os pontos de tangência deste segmento de reta às duas circunferências. A suavidade do gráfico é garantida por usarmos concordância de arcos para a sua construção. Para o caso geral, onde o polo deve ser suavizado ligando-o contínua e suavemente ao gráfico de uma função analítica, o procedimento envolve convolução de funções, e um trabalho com a descrição do procedimento está sendo elaborado.

Referências

[1] TITCHMARSH, E. C. **The Theory of the Riemann Zeta-Function**. New York: Oxford University Press, 1986.

[2] AGUILERA-NAVARRO, M. C. K.; AGUILERA-NAVARRO, V. C.; FERREIRA, R. C.; TERAMON, N. A função Zeta de Riemann. *Revista Ciências Exatas e Naturais*, Vol.1, N.1, 1999.

[3] OLIVEIRA, W. D. **Zeros da Função Zeta de Riemann e o Teorema dos Números Primos.** Dissertação de mestrado (Pós-Graduação em Matemática). Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”. São José do Rio Preto, 134p., 2013.

[4] CHAGAS, J. Q.; MACHADO, J. A. T.; LOPES, A. M. Overview in Summabilities: Summation Methods for Divergent Series, Ramanujan Summation and Fractional Finite Sums. *Mathematics*, 9, 2963, 2021.

[5] TAO, T. **Compactness and Contradiction.** Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 2010.

[6] BIELINSKI, L. F.; LA GUARDIA, G. G.; CHAGAS, J. Q. Fractional finite sums theory: a motivation and some new results, *arXiv pré-print,* 2303.00796, 2023.

Espaços Métricos e a Propriedade da Completude

Hugo Gielamo Próspero*
20006601@uepg.br [1]
Marciano Pereira (Orientador)
marciano@uepg.br [2]

[1,2]Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG

Palavras-chave: Espaços Métricos, Sequência de Cauchy, Completude.

Resumo:
A noção de distância entre dois pontos da reta real, que é dada via o módulo da diferença entre os números reais que os representam, é de fundamental importância no cálculo diferencial e integral para definir os conceitos de vizinhança de um ponto, convergência de sequências, limite, continuidade, etc. [1]. Os Espaços Métricos generalizam essa noção de distância sem a necessidade de conhecer a natureza dos elementos de um conjunto. Sendo assim, o conhecimento da teoria dos espaços métricos e, adicionalmente, da propriedade da completude é importante e serve como base para compreender o funcionamento de diversos métodos, técnicas e resultados da Análise como, por exemplo, o Teorema do Ponto Fixo de Banach, fundamental para se demonstrar a existência e unicidade da solução de problemas de valor inicial em equações diferenciais ordinárias [2, 3].

Neste trabalho, realizamos um estudo da teoria dos espaços métricos, desde seus principais conceitos, propriedades e resultados [1, 3], bem como de diversos exemplos, em diferentes contextos. Destacamos a propriedade da completude [1] e de alguns teoremas, nos quais ela é de fundamental importância como, por exemplo, o teorema do ponto fixo de Banach e o teorema de Baire [4, 5]. Finalizamos com uma aplicação da propriedade da completude de um particular espaço métrico de funções para a construção da chamada *space-filling curve* de Peano [6].

Dentre as caracterizações da completude de um espaço métrico (M, d), além da bem conhecida por meio das sequências de Cauchy, temos as seguintes equivalências [3]:

(i) M não possui ponto virtual. (Critério do Ponto Virtual)

(ii) M é fechado em todo superespaço de M. (Critério Universal)

*Programa Voluntário de IniciaçãO Científica - PROVIC e aluno do curso de Licenciatura em Matemática.

(iii) Toda sequência de Cauchy em M é convergente. (Critério de Cauchy)

(iv) Toda família $\mathcal{F}$ de subconjuntos encaixados, não-vazios e fechados de M, na qual $\inf \{diam(A)|A \in \mathcal{F}\} = 0$, a intersecção de todos os conjuntos é um ponto. (Critério da família encaixada).

(v) Toda sequência (F_n) de subconjuntos fechados não-vazios de M, nos quais $F_{n+1} \subseteq F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $diam(F_n) \to 0$ possui intersecção não-vazia. (Critério da sequência encaixada).

No bem conhecido teorema do Ponto Fixo de Banach, que afirma: *Se* (M, d) *é um espaço métrico completo, então toda contração* $f : M \to M$ *possui um único ponto fixo em* M, foi usada a caracterização da completude dada no item (iii) para garantir a convergência da sequência de iteradas (x_n), em que $x_n = f^n(x_0)$, construída a partir de um ponto qualquer $x_0 \in M$.

Por outro lado, no teorema de Baire, que diz: *Seja* M *um espaço métrico completo, todo conjunto magro em* M *possui interior vazio*, usamos a caracterização dada no item (v) para mostrar que o complementar deste conjunto magro é denso em M.

Além das caracterizações mencionadas acima também encontramos na literatura um resultado bastante recente [7], o qual também apresenta uma caracterização para a completude de um espaço métrico: *Um espaço métrico* M *é completo se, e somente se, toda função contínua* $h : M \to \mathbb{R}$ *limitada inferiormente em* M*, possui um ponto* x_0 *em que* $h(x_0) - h(x) < d(x_0, x)$ *para qualquer outro ponto* x *de* M.

Por fim, usamos o fato do espaço métrico $\mathcal{C}$ de funções contínuas com a métrica uniforme ser completo, para construir a famosa "*Peano space-filling curve*" [6], que garante a existencia de uma aplicação contínua $f : I \to I^2$ sobrejetora, ou seja, cuja imagem preenche inteiramente o quadro I^2, em que $I = [0, 1]$.

Referências

[1] DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

[2] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. Toronto: John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[3] SEARCÓID, M. Ó. **Metric Spaces**. London: Springer-Verlag, 2007.

[4] DUARTE, I. S. **Espaços Métricos e o Teorema do Ponto Fixo de Banach**. Campina Grande, PB, 2014

[5] SCHNEIDER, R. A. C.;SILVA, V. C. **O Teorema de Baire e uma Aplicação no Espaço de Funções**. Rio de Janeiro: Cadernos do IME, 2021

[6] MUNKRES, J. R. **Topology**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

[7] WESTON, J. D. **A Characterization of Metric Completeness**. Swansea: American Mathematical Society, 1977.

Espaços vetoriais localmente convexos e distribuições de Schwartz

Leonardo Ferreira Bielinski *
Bacharelado em Matemática Aplicada - UEPG
22001109@uepg.br

Prof. Giuliano G. La Guardia (orientador)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
gguardia@uepg.br

Palavras-chave: Teoria de distribuições, Espaços vetoriais topológicos, Espaços vetoriais localmente convexos.

Resumo: A *Teoria de Distribuições de Schwartz* foi desenvolvida no século XX por Laurent Schwartz como uma formalização de certos conceitos técnicos, os quais eram previamente usados, por exemplo, nas equações diferenciais e na física. Um exemplo desses conceitos é a "função" δ de Dirac, a qual teria, dentre outras, as propriedades:

$$\delta(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0; \\ \infty, & \text{se } x = 0. \end{cases} \qquad \& \qquad \int_0^\infty \delta(x) f(x)\, dx := f(0).$$

Com uma definição imprecisa como esta, pode ser penoso o entendimento a respeito de operações sobre a δ, como a derivação. Já a versão rigorosa de δ é concebida por meio de uma *distribuição*. Neste trabalho, definiremos precisamente o que são distribuições e suas derivadas.

1 Espaços vetoriais topológicos localmente convexos

Definição 1 (Seminorma) *Uma* `seminorma` *em um espaço vetorial $\mathbb{V}$ que está sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é uma função $p : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^+$ tal que para todo $(x, y, s) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{K}$, vale:* **(i)** $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$; **(ii)** $p(sx) = |s|p(x)$.

Definição 2 (ELC) *Um* `espaço vetorial topológico localmente convexo`, *(ELC), é um espaço vetorial $\mathbb{V}$ munido de uma topologia cujos abertos da base são dados por uma família de seminormas $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ da seguinte forma:*

$$V(x, \varepsilon, F) = \bigcap_{i\in F} B_{p_i}(x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{V},\ \varepsilon > 0,\ F \subset \Lambda \text{ finito},\ B_{p_i}(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{V} \,:\, p_i(x-y) < \varepsilon\}.$$

*Bolsista PICME

Definição 3 (Topologia do limite indutivo) *Seja uma sequência de ELC's* $\mathbb{V}_i$, $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$*, com suas respectivas topologias* τ_i*, tal que, para todo* $i \in \mathbb{N}$*, vale:* **(i)** $\mathbb{V}_i \subset \mathbb{V}_{i+1}$*;* **(ii)** *a função* $\mathrm{id}_i : \mathbb{V}_i \to \mathbb{V}_{i+1}$*, dada por* $\mathrm{id}_i(x) = x$*, é contínua. E seja o espaço vetorial* $\mathbb{V} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{V}_i$*.*

Assim, a topologia mais fina tal que, para todo $i \in \mathbb{N}$*, a função* $\mathrm{Id}_i : \mathbb{V}_i \to \mathbb{V}$*, dada por* $\mathrm{Id}_i(x) = x$*, é contínua, é chamada de* `topologia do limite indutivo`*, e o espaço* $\mathbb{V}$ *munido dessa topologia é chamado de* `o limite indutivo de` $\mathbb{V}_i$*.*

Observação 1 *Seja* $\mathrm{top}(\mathbb{V})$ *o conjunto de todas as topologias em* $\mathbb{V}$*, e seja* $P(\tau)$ *a proposição "*$\forall i \in \mathbb{N}, \mathrm{Id}_i : \mathbb{V}_i \to \mathbb{V}$ *é* $\tau_i - \tau-$*contínua". Por fim, considere a topologia* $\tau^\star := \sup\{\tau \in \mathrm{top}(\mathbb{V})$: *vale* $P(\tau)$ *é verdadeira*$\}$*. A demonstração de que vale* $P(\tau^\star)$ *(isto é, de que a Definição 3 está bem posta) foge do escopo desse trabalho.*

Proposição 1 *Seja* $\mathbb{V}$ *o limite indutivo de* $\mathbb{V}_i$ *tal que* $\forall\, i \in \mathbb{N}$ *vale:* **(i)** *a topologia que* $\mathbb{V}_{i+1}$ *induz em* $\mathbb{V}_i$ *coincide com* τ_i*;* **(ii)** $\mathbb{V}_i$ *é um subespaço fechado de* $\mathbb{V}_{i+1}$*.*

Nesse caso, temos que vale: **(1)** *para todo* $i \in \mathbb{N}$*, a topologia que* V *induz em* $\mathbb{V}_i$ *coincide com* $\mathbb{V}_i$*;* **(2)** $A \subset \mathbb{V}$ *é limitado em* $\mathbb{V}$ *se, e somente se, existir um índice* $i \in \mathbb{N}$ *tal que* A *é limitado em* $\mathbb{V}_i$*.*

2 O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$

Definição 4 (Função teste) *Dado um aberto não vazio* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, definimos o* `suporte` *de uma função* $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\mathrm{Supp}(f)$*, como sendo o fecho em* Ω *do conjunto* $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$*, isto é,* $\mathrm{Supp}(f) = \overline{f^{-1}(\mathbb{C}^*)}$*. Uma* `função teste` *(em* Ω*) é uma função* $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ *de classe* C^∞ *(em* Ω*) e cujo suporte,* $\mathrm{Supp}(\varphi)$*, seja compacto (em* Ω*). O espaço de todas as funções teste em* Ω *é denotado por* $\mathcal{D}(\Omega)$*. Ademais, dado um compacto* $K \subset \Omega$*, definimos* $\mathcal{D}_K(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ :\ \mathrm{Supp}(\varphi) \subset K\}$*.*

Para mostrar que $\mathcal{D}(\Omega)$ é não vazio, basta ver o seguinte: como Ω é aberto, dado qualquer $p \in \Omega$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$. Assim, pode-se verificar que a seguinte função é uma função teste em Ω: $\varphi(x) = 0$ se $|x - p| \geq \varepsilon$, e $\varphi(x) = \exp\left(1/\left(|x|^2 - 1\right)\right)$, caso contrário. Sucintamente, $\varphi(x) = \exp\left(1/\left(|x|^2 - 1\right)\right) \cdot \mathbb{1}_{B(p,\varepsilon)}(x)$.

A topologia que consideraremos nos espaços $\mathcal{D}_K(\Omega)$ é a gerada pela sequência de seminormas $\mathfrak{p}_i^K(\varphi) := \sup\{|\partial^\alpha \varphi(x)|\ :\ x \in K,\ \|\alpha\|_\diamond \leq i\}$, $i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, em que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $\|\alpha\|_\diamond := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e $\partial^\alpha := \dfrac{\partial^{\|\alpha\|_\diamond}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Proposição 2 *Se* $K \subset L$*, então valem:* **(i)** $\mathcal{D}_K(\Omega)$ *é um subespaço fechado de* $\mathcal{D}_L(\Omega)$*;* **(ii)** *a função* $\mathrm{id} : \mathcal{D}_K(\Omega) \to \mathcal{D}_L(\Omega)$*, dada por* $\mathrm{id}(\varphi) = \varphi$*, é contínua.*

Considerando uma sequência de compactos K_i, $i \in \mathbb{N}$, tal que $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ e que para todo $i \in \mathbb{N}$, $K_i \subset K_{i+1}$, temos que $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$, de forma que, pela Proposição 2, as hipóteses do Teorema 1 são cumpridas.

Assim, a topologia que se considera em $\mathcal{D}(\Omega)$ é a topologia do limite indutivo de $\mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$.

Observação 2 *É possível mostrar que a topologia de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *independe da escolha da sequência de compactos* K_i*, desde que essa sequência cumpra as hipóteses citadas.*

3 Distribuições

Definição 5 *Uma* `distribuição` *em Ω é um funcional linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ que seja contínuo. Pode-se denotar $T(\varphi)$ por $\langle T, \varphi \rangle$. O espaço de todas as distribuições em Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, uma vez que é o dual (topológico) de $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Seguem alguns teoremas de caracterização:

Teorema 1 *A sequência $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge para $\mathbf{0}$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ se, e somente se, existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que:* **(i)** *Para todo $i \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Supp}(\varphi_i) \subset K$;* **(2)** *Para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\partial^\alpha \varphi_i \to \mathbf{0}$ uniformemente em K.*

Teorema 2 *Dado um funcional linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ as três proposições a seguir são equivalentes:*

(i) *T é uma distribuição.*

(ii) *Para todo compacto $K \subset \Omega$, existe $(C, i) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}_0$ tal que para toda $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, vale $\langle T, \varphi \rangle \leq C \cdot \mathfrak{p}_i^K(\varphi) := C \cdot \sup\{|\partial^\alpha \varphi(x)| \,:\, x \in K,\ \|\alpha\|_\diamond \leq i\}$.*

(iii) *Para toda sequência $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\phi_i \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \mathbf{0}$, vale que $\langle T, \varphi_i \rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} 0$.*

Definição 6 *Dada $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e uma n-tupla de inteiros positivos α, definimos $\partial^\alpha T$ pondo $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{\|\alpha\|_\diamond} \cdot \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$.*

Observação 3 *$\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Toda função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ localmente integrável define uma `distribuição regular` T_f, dada por $T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$. Em particular, a função Θ de Heaviside, dada por $\Theta(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$ (isto é, $\Theta(x) = 0$ para $x < 0$ e $\Theta(x) = 1$ caso contrário), define a distribuição $T_\Theta(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx$.

Observação 4 *Com isso, a Definição 6 passa a ser justificada por integração por partes: por simplicidade, mostraremos isso para $\Omega = \mathbb{R}$ e $\alpha = (1)$; seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localmente integrável. Como o suporte de uma função teste φ é compacto, temos $-T_{f'}(\varphi) = -\int_\mathbb{R} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\left(\cancelto{0}{f(x)\varphi(x)\big|_{-\infty}^{+\infty}} - \int_\mathbb{R} f(x)\phi'(x)\,dx \right) = T_f(\varphi')$.*

A proposição de que "δ é a derivada de Θ" é formal, mas pode-se fornecer uma versão rigorosa dela. Para isso, associamos à Θ a distribuição T_Θ e a derivamos no `sentido de distribuições`, isto é, calculamos $\partial^{(1)} T_\Theta = T'_\Theta$. Ao fazer isso, vemos que $T'_\Theta(\varphi) = \varphi(0)$. Ou seja, a distribuição T'_Θ é a versão rigorosa da "função" δ de Dirac. Além disso, com tal rigor, torna-se imediato o entendimento de o que são as suas derivadas: $(T'_\Theta)^{(m)}(\varphi) = (-1)^m \varphi^{(m)}(0)$.

Referências

[1] BARROS-NETO, José. **An introduction to the theory of distributions**. M. Dekker, 1973.

[2] DIJK, Gerrit Van. **Distribution Theory:** Convolution, Fourier Transform, and Laplace Transform. De Gruyter, 2013.

Funções contínuas não deriváveis: uma aplicação do Teorema de Baire

Letícia Rodrigues dos Santos *
leticia.rodrigues1@ufpr.br[1]
Alexandre Kirilov (Orientador)
akirilov@ufpr.br[1]

[1]Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Espaços métricos completos, Teorema de Baire, Funções contínuas não deriváveis.

Resumo:
O teorema de Baire, formulado no final do século XIX pelo matemático René-Louis Baire, possui diversas versões e aplicações fascinantes em Topologia Geral e Análise Matemática. A presente pesquisa foi desenvolvida dentro do projeto intitulado "Aplicações do Teorema de Baire", que teve como objetivo principal trabalhar com profundidade esse resultado e algumas de suas aplicações. Uma dessas aplicações é a existência de funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto de seu domínio.

Um dos conceitos fundamentais para enunciar esse teorema é o de "categoria de conjuntos", também introduzido por Baire. Usaremos a seguinte versão deste conceito: um subconjunto X de um espaço métrico M é:

1. raro em M se int $\overline{X} = \varnothing$
2. magro em M se $X = \bigcup X_n$, com int $\overline{X_n} = \varnothing$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. não-magro se não for magro, ou seja, se $X \subseteq \bigcup F_n$, com cada F_n fechado, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que int$(F_k) \neq \varnothing$.

Teorema de Baire: Todo espaço magro tem interior vazio.

Para demonstrar esse teorema usamos a seguinte forma equivalente: qualquer interseção de uma reunião enumerável de conjuntos abertos densos em um espaço métrico completo é, também, um conjunto denso desse espaço métrico. Essa equivalência permite simplificar a demonstração do teorema, bastando utilizar a noção de conjuntos encaixados.

*Bolsista do Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Matemática

Neste trabalho apresentaremos a seguinte consequência do Teorema de Baire:
Teorema: Seja C o conjunto das funções contínuas e limitadas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, com a métrica da convergência uniforme. Então o conjunto das funções $f \in C$ que são deriváveis em algum ponto do intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é magro em C.

Observe que este resultado também diz que as funções contínuas que são diferenciáveis em algum ponto são uma minoria no conjunto de funções contínuas, e portanto as funções contínuas e não diferenciáveis são densas em C.

Referências

[1] DOMINGUES, Higino H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. Atual Editora. 1982.

[2] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[3] KREYSZIG, Erwin. **Introductory Functional Analysis with Applications**. John Wiley & Sons, Inc. 1978.

[4] FREITAS, L. **A função de van der Waerden: funções contínuas sem derivada em ponto algum são mais frequentes do que pensamos!**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande. 2011.

A Irracionalidade e Transcendência do Número de Euler

Lucas Bisoni*
Licenciatura em Matemática
lucas.bisoni@ufpr.br [1]

Prof. Wagner A. A. de Moraes (Orientador)
Departamento de Matemática
wagnermoraes@ufpr.br [1]

[1]Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Números Irracionais, Números Transcendentes, Número de Euler

Resumo:

Ao desenvolver seus estudos com logaritmos, John Napier apresentou à Matemática um novo e cativante objeto a ser analisado. Porém, foi apenas quando Bernoulli investigou o comportamento estabilizador das taxas de juros em transações financeiras que o número de Euler forneceu os primeiros indícios de sua relevância nas áreas aplicadas. De fato, as relações

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{e} \quad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

ainda hoje são amplamente exploradas nos cursos de Cálculo.

Nesse sentido, o seguinte trabalho visa analisar as propriedades do número e utilizando ferramentas como limites de funções e séries de Taylor. Primeiramente, iremos apresentar uma das demonstrações existentes de sua irracionalidade, a qual decorre do fato de que, caso consideremos

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{p}{q}$$

com $p, q \in \mathbb{N}$ e primos entre si, chegaremos no absurdo de que existe um número inteiro entre 0 e $\frac{1}{q}$.

Além disso, serão abordados os conceitos de números reais algébricos e transcendentes. O conjunto dos reais algébricos (comumente indicado por $\overline{\mathbb{Q}}$) é composto por todos os números reais que são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros, na forma:

*Voluntário do Programa de Voluntariado Acadêmico (PVA)

$$c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$$

onde $c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-1}, c_n \in \mathbb{Z}$, $c_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Em contraponto, são denominados reais transcendentes todos aqueles que não são raízes de equações polinomiais nestas condições.

Desse modo, buscaremos provar a transcendência do número e. Um dos primeiros trabalhos publicados com esse objetivo foi apresentada por Charles Hermite (1822 - 1901) no *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* e, mais tarde, replicado e aprimorado por matemáticos como Jordan, Markhoff, Weierstrass, Hurwitz e Hilbert. A demonstração que apresentamos aqui é baseada na de Hurwitz (1893).

Em geral, a prova reside na ideia de que, caso consideremos e como a raiz de uma equação polinomial, podemos concluir que existe um número inteiro não nulo cujo módulo é menor que 1, o que configura um absurdo.

Dessa maneira, teremos provado a existência, irracionalidade e transcendência do número de Euler.

Referências

[1] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Números Irracionais e Transcendentes**. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

[2] MARQUES, Diego. **Teoria dos Números Transcendentes**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[3] NIVEN, Ivan. **Números Racionais e Irracionais**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[4] VASCONCELOS, Getúlio de Assis. **A Irracionalidade e Transcendência do Número *e***. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2013.

Além do teorema do Valor Médio

Matheus Bueno Bartkevicius*
matheusbartkev@gmail.com [1]
Marciano Pereira (Orientador)
marciano@uepg.br [2]

[1,2]Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG

Palavras-chave: Teorema de Rolle, Teorema do Valor Médio, Teorema de Flett.

Resumo:

Os Teoremas de Rolle e do Valor Médio de Lagrange são frequentemente abordados nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, sendo conhecidos por seu significado geométrico simples e intuitivo. Esses teoremas desempenham um papel fundamental na Análise Matemática [1,2], contribuindo para obtenção de resultados importantes, e encontrando aplicações práticas na Física e Economia.

A partir e, motivado pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, Flett [3], em 1959, demonstrou o denominado Teorema de *Flett*, que é uma variação do teorema de Rolle, onde a condição $f(a) = f(b)$ foi substituída por $f'(a) = f'(b)$. Por esse motivo o teorema é conhecido como um teorema do tipo valor médio com uma condição do tipo Rolle. Mais precisamente:

Teorema 1 (Teorema de Flett): Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a, b]$ com $f'(a) = f'(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

A interpretação geométrica desse resultado é: Se uma curva $(x, f(x))$ é suave no intervalo $[a, b]$ e as retas tangentes nos extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ são paralelas, então existe um ponto $c \in (a, b)$ de modo que a reta tangente ao gráfico de f que passa por $(c, f(c))$ também passa por $(a, f(a))$, conforme pode ser visto na Figura 1. Nesse caso, o ponto c é denominado de *ponto de Flett* [1].

*Bolsista do PIBIC e aluno do curso de Engenharia de Computação

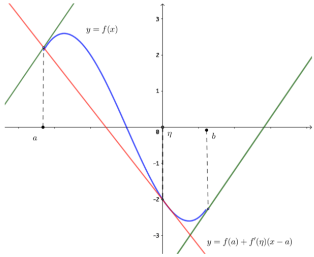


Figura 1: Interpretação geométrica do Teorema de Flett.

Neste trabalho, realizamos um estudo sobre esse importante, e não tão conhecido, teorema de Flett, sua origem e relação com os já bem conhecidos teoremas de Rolle, do Valor Médio de Lagrange e Cauchy e do Valor Médio para Integrais. Finalizamos o trabalho investigando suas diversas variações e extensões, sendo o foco principal enunciar e demonstrar essas diferentes versões dos teoremas do “tipo” Flett.

Dentre as versões estudadas destacamos as seguintes:

Teorema 2 (Teorema de Sahoo-Riedel [9]): Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivavel em $[a, b]$, então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} + \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(c - a).$$

Pode ser interpretado como o teorema de Flett, porém com uma “correção” para comportar qualquer função que seja derivavel em $[a, b]$, e caso $f'(a) = f'(b)$, temos o teorema de Flett.

Teorema 3 (Teorema de Trahan [6]): Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivavel em $[a, b]$ e

$$\left(f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)\left(f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \geq 0.$$

Então existe um ponto de Flett em $(a, b]$.

Nesse, caso exista $y \in (a, b)$ satifazendo $f(y) = f(a) + (y - a)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ (isto é, a função intersecta a reta secante entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$), então existe um ponto de Flett; esse teorema estende o Teorema de Flett, adicionando um grau de liberdade maior que a condição $f'(a) = f'(b)$.

Concluímos que os Teoremas do Tipo Valor Médio possuem uma vasta gama de ramificações, sendo muito úteis para demonstração de outros teoremas e aplicações, sendo um tema de pesquisa atual, com diversas questões e problemas em aberto.

Referências

[1] LOZADA-CRUZ, G.; BONGARTI, M. Alguns teoremas do tipo valor médio: de Lagrange a Malesevic. Revista Matemática Universitária, vol. 1, p. 56-72, 2021.

[2] LUPU, C.; LUPU, T. Mean value theorems for some linear integral operators. Electron J. Differ. Equ., n. 117, 2009.

[3] FLETT, T. M. A mean value problem. The Mathematical Gazette. vol. 42, n. 339, p. 38-39, 1958.

[4] HUTNÍK, O.; MOLNÁROVÁ, J. On Flett's mean value theorem. Aequationes Mathematicae, vol. 89, n.4, p.1133-1165, 2015.

[5] MEYERS, R. E. Some elementar results related to the mean value theorem. The two-year college Mathematics Journal, vol. 8, n. 1, p. 51-52, 1977.

[6] TRAHAN, D. H. A new type of mean value theorem. Mathematics Magazine, vol. 39, p. 264-268, 1966.

[7] MALESEVIC, B. J. Some mean value theorem in terms of na infinitesimal function. Matematicki Vesnik, vol. 51, p. 9-13, 1999.

[8] TONG, J. On Flett's mean value theorem. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol. 35, p. 936-941, 2004.

[9] SAHOO, P. K.; RIEDEL, T. Mean Value Theorems and Functional Equations. Singapore: World Scientific, 1998.

[10] PAWLIKOWSKA, I. An extension of a theorem of Flett. Demonstratio Mathematica, vol. 32, n.2, p. 281-286, 1999.

g-Cálculo: uma introdução gerada

Matheus Erevaldo Krüger Gebeluca*
Bacharelado em Matemática Aplicada - UEPG
22001409@uepg.br

Prof. Jocemar de Quadros Chagas (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
jocemarchagas@uepg.br

Palavras-chave: g-cálculo, pseudo-soma, pseudo-multiplicação, função geradora.

Resumo:
Este trabalho tem por objetivo introduzir as ideias básicas de mais uma abordagem alternativa ao cálculo "clássico", conhecido por g-cálculo. A teoria desenvolvida inicialmente por Endre Pap tem como base duas operações, uma pseudo-soma e uma pseudo-multiplicação, ambas definidas sobre um intervalo $[a, b] \subset [-\infty, \infty]$, com as quais se pode definir a pseudo-derivada e pseudo-integral de uma função real. As aplicações destas operações não se restringem apenas ao cálculo, há uma gama de aplicações, indo da álgebra à teoria de decisão.

Introdução:
A teoria inicialmente proposta por Endre Pap [1] tem como inspiração o trabalho de B. Schweizer e A. Sklar sobre co-normas triangulares [2]. O nome "pseudo-adição" aparece em trabalhos anteriores, como [3]. A ideia inicial do g-cálculo é estender o campo de atuação das t-normas do intervalo entre zero e um para um subintervalo arbitrário. O primeiro passo natural é a definição de duas operações, soma e multiplicação, necessárias para definir a derivada e a integral neste novo terreno.

Pseudo-soma e pseudo-multiplicação:
Consideremos um intervalo real munido do infinito e menos infinto ($[-\infty, \infty]$). A pseudo-soma é definida como segue:

Definição: A pseudo-soma (denotada por $\oplus$) é uma função definida em um intervalo $[a, b]$, parcialmente ordenado, isto é,

$$\oplus : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow [a, b],$$

comutativa, associativa, não decrescente e que possui elemento neutro, denotado por 0 (que é tanto a quanto b). A pseudo-soma não é apenas restrita a um intervalo fechado $[a, b]$. Se tomarmos um intervalo aberto (a, b), no lugar de $0 \oplus x = x$, para todo $y \in (a, b)$ podemos definir o elemento neutro da pseudo-soma como:

$$\lim_{x \to a} \oplus(x, y) = y \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} \oplus(x, x) = a.$$

*Participante do Programa Pibic/UEPG.

Pelo Teorema de Aczel [4], para cada pseudo-adição $\oplus$ existe uma função monótona $g(x)$, definida em $[a,b]$ e com imagem em $[0,\infty]$, dita *geradora* da pseudo-adição $\oplus$, na qual a ou b faz o papel do zero da função. A pseudo-soma, definida em função de g, é dada por:

$$x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y)).$$

Podemos também definir a pseudo-multiplicação usando a mesma função geradora aditiva. Assim, temos:

Definição: Seja g a função geradora da pseudo-adição. Definimos a pseudo-multiplicação por:

$$x \otimes y = g^{-1}(g(x)g(y)).$$

A pseudo-multiplicação satisfaz as seguintes propriedades:

- $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ (distributividade);
- $x \otimes \alpha y = \alpha(x \otimes y)$ (multiplicação por um escalar em $[a,b]$).

A pseudo-soma e pseudo-multiplicação não se limitam apenas aos elementos do intervalo $[a,b]$, as operações se estendem para funções, como segue.

Definição: Sejam f e h funções com domínio em um intervalo $[c,d]$ e imagem em $[a,b]$ as operações pseudo-soma e pseudo-multiplicação de f por g são definidas por:

$$(f \oplus h)(x) = f(x) \oplus h(x);$$

$$(f \otimes h)(x) = f(x) \otimes h(x).$$

Pseudo-derivada e pseudo-integral:

Vamos agora introduzir o critério de diferenciabilidade para o g-cálculo. Para se definir a pseudo-derivada de uma função f definida em um intervalo $[c,d]$, precisamos assumir que a função geradora g é derivável em (a,b). Então, definimos a pseudo-derivada de f como segue.

Definição: Seja f uma função definida em $[c,d]$. Diz-se que f é pseudo-derivável se e somente se f é derivável em (c,d) e possui mesma monotonicidade de g. Neste caso, a pseudo-derivada de f é definida por:

$$\frac{d^{\oplus} f(x)}{dx} := g^{-1}(g'(f(x)))$$

A pseudo-derivada é linear em relação a pseudo-soma, i.e., a pseudo-derivada de uma pseudo-soma é a pseudo-soma das pseudo-derivadas, a pseudo-derivada da pseudo-multiplicação de um escalar por uma função é a pseudo-multiplicação do escalar pela pseudo-derivada da função. Além disso, a pseudo-derivada de um escalar é zero. É razoável considerar ainda um análogo a regra da cadeia, como segue:

Definição: Sejam h uma função definida no subintervalo $[a,b] \subset [0,\infty]$, e f uma função definida em $[c,d] \to [a,b]$, tais que

$$t(x) = h(f(x)).$$

Supondo que f tem derivada em $x_0 \in (c, d)$ e que h tem derivada em $f(x_0)$, então a pseudo-derivada de t no ponto x_0 existe e é da forma:

$$\frac{d^{\oplus}}{dx} t(x_0) = \frac{d^{\oplus}}{dx} h(f(x_0)) \otimes \frac{d^{\oplus}}{dx} g^{-1}(h(f(x_0))) \otimes \frac{d^{\oplus}}{dx} g^{-1}(f(x_0))$$

Para introduzir a pseudo-integral, precisamos um requerimento a mais. Exigimos que a função f seja mensurável. Assim, temos:

Definição: Seja f uma função mensurável, definida em um intervalo $[c, d]$. A pseudo-integral de f é definida por :

$$\int_{[c,d]}^{\oplus} f(x)dx := g^{-1}\Big(\int_d^c g(f(x))dx\Big).$$

Algumas considerações e aplicações:

Essa teoria tem uma grande gama de aplicações. Seu objetivo principal inicialmente era de generalizar as ideias de norma e co-norma triangular para quaisquer intervalos, mas, ao longo do tempo a teoria obteve várias aplicações, como exemplo a álgebra das pseudo-operações [5], que é muito curiosa e mostra grandes resultados em teoria de probabilidades. Outras aplicações ocorrem na teoria de possibilidades, na resolução de equações diferenciais parciais não lineares e aplicações, como na resolução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, entre outras [6] chegando até o cálculo fracionário [7]. Porém, mesmo com tantas aplicações em diversas áreas, ainda é uma teoria com pouco material disponível.

Referências

[1] PAP, E. g-Calculus. **Novom Sadu Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser. Mat.**, 23, p. 145-158, 1993.

[2] SCHWEIZER, B.; SKLAR, A. Associative functions and abstract semigroups. **Publ. Math. Debrrecen**, 10, p. 69-81, 1963.

[3] ICHIHASHI, H.; TANAKA, M.; ASAI, K. Fuzzy Integrals Based on Pseudo-Additions and Multiplications. **J. Math. Anal. Appl.**, 130, p. 354-364, 1988.

[4] ACZEL, J. **Lectures on Functional Equations and their Applications.** New York, NY: Academic Press, 1966.

[5] MARKOVÁ, A. Some remarks on the pseudo-linear algebra. **Tatra Mountais Math. Publ.**, 6, p. 123-130, 1995.

[6] PAP, E. Theory and Applications of Non-additive Measures and Corresponding Integrals. In: TORRA, V.; NARUKAWA, Y.; NAVARRO-ARRIBAS, G.; BEGÍAS, D. (Eds.) **Modeling Decisions for Artifical Intelligence:** 10th International Conference, MDAI 2013, Barcelona, Spain. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.

[7] SOUSA, J. V. C.; CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C.; FREDERICO, G. S. F. Pseudo-fractional differential equations and generalized *g*-Laplace transform. **J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.**, 12:44, 27 p., 2021.

Tetração: o que vem além da potenciação. Propriedades na reta.

Saulo Minatti Andrade*
saulominatti@outlook.com [1]

Paulinho Demeneghi†
p.demeneghi@gmail.com [2]

[1]Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)
[2]Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Palavras-chave: tetração, recursão, exponencial, hiperoperação.

Resumo:

A tetração surge de uma tentativa de se criar uma abordagem unificada para o estudo de operações e consiste em replicar um padrão notável na formação das operações aritméticas.

Por exemplo, sejam $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $x \in \mathbb{R}$. Então, a multiplicação e potenciação de x por n são dadas, respectivamente, por:

$x \cdot n = x + x + ... + x$ (n cópias de x) e $x^n = x \cdot x \cdot x ... \cdot x$ (n cópias de x).

Por sua vez, a tetração é uma operação que repete a exponenciação. Para $x > 0$, dizemos que "x tetrado a n" é o número ${}^n x := x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$ (n cópias de x).

"Hiperoperação" é o termo atribuído às operações aritméticas formadas através da recursão/repetição. A soma seria a 1-hiperoperação, a multiplicação seria a 2-hiperoperação, potenciação seria a 3-hiperoperação e, por fim, a tetração seria a 4-hiperoperação. Em geral, é possível estabelecer a $(n+1)$-hiperoperação repetindo a n-hiperoperação.

Na J3M de 2022 eu, Saulo Minatti Andrade, bolsista do PET Matemática UFSC, apresentei o trabalho "Tetração como Operação nos Números Reais: Estudo de Propriedades e Definições". No início de 2023, comecei uma Iniciação Científica (IC) voluntária (integralizada em horas de trabalho para o PET) sobre o assunto, com um professor do departamento de matemática da UFSC. Eu tinha intenção de "expandir" seu trabalho anterior (feito sem orientação) para abranger tetração com bases em $\mathbb{C}$. Para isso, foi estudada a exponenciação e logaritmo complexos, para então estudar as potências complexas arbitrárias. Entretanto, eu não entrei em muitos permenores

*Bolsista
†Orientador

na “tetração complexa”, e, ao revisitar o “caso real”, em conjunto com meu orientador, encontramos muitas propriedades interessantes, e decidimos focar a pesquisa na tetração em $\mathbb{R}$.

Durante a pesquisa, foram estudadas funções elementares (exponencial e logaritmo), conceitos de Cálculo, Análise na Reta, Espaços Métricos e Variável Complexa. Entretanto, não há muito material na internet que fale especifiamente sobre tetração além de pequenos folhetos e *papers*, mas foram lidos artigos acerca da recursão exponencial e convergência da “torre de potências”. Em geral, notou-se que esse não é um tema muito discutido na matemática.

O objetivo deste trabalho é introduzir o conceito de tetração e discorrer acerca de resultados encontrados.

A seguir, alguns dos resultados encontrados e demonstrados durante o primeiro semestre de 2023:

- Desigualdade da Tetração: Sejam $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $x \in (0, \infty)$. Então:

$$^{n}x \geq x$$

- Regra do Tetrapoente: Seja $n \in \mathbb{N}$ e f_n a função real de variável real positiva definida por $f_n(x) = {}^{n}x$.

  Então f_n é diferenciável e sua derivada é dada, recursivamente, por:

$$\frac{d}{dx}({}^{n}x) = {}^{n}x \left(\ln(x) \frac{d}{dx}({}^{n-1}x) + \frac{{}^{n-1}x}{x} \right)$$

- Convergência da Tetração:

  Seja $x \in (0, \infty)$ e $({}^{n}x) \subset \mathbb{R}$ a sequência das tetrações de x. Então:

$$({}^{n}x) \text{ converge } \iff x \in [e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$$

- Limite infinito hipernomial:

  Seja $h(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \, {}^{k}x)$ um hipernômio de grau $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

  Isto é, $a_k \in \mathbb{R}$ $(\forall k \in [0, n] \cap \mathbb{N})$ e $a_n \neq 0$. Então:

$$\lim_{x \to \infty} (h(x)) = \begin{cases} \infty & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

- Conjectura 1: Seja $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Então:

$$\lim_{x \to 0}({}^n x) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

- Conjectura 2: Seja $n \in \mathbb{N}$ ímpar. Então, a função real f_n de variável real positiva definida por $f_n(x) = {}^n x$ é estritamente crescente.

Referências

[1] DA SILVA, Patrícia Nunes; DOS SANTOS CORDEIRO, André Luiz; DE SOUZA SOARES, Alexandre. **A note on the convergence of iterated infinite exponentials of real numbers** Rio de Janeiro: IME, 2020.

[2] NEYRINCK, Mark. **An Investigation of Arithmetic Operations**, 1998.

[3] HOON, Choon Ji. **What is . . . tetration?**, 2014.

[4] KNOEBEL, R. Arthur. **Exponentials Reiterated**. The American Mathematical Monthly 88(4), 1981, p. 235-252.

Análise Numérica e Otimização

Corretores de resumos:

Professores:

Prof. Ademir Alves Ribeiro
Profª. Lucelina Batista dos Santos
Profª. Mael Sachine

Banca Avaliadora:

Professores:

Prof. Ademir Alves Ribeiro
Prof$^{\underline{a}}$. Lucelina Batista dos Santos

Estudantes de pós-graduação:

Pablo Nestor Gonzales Cordova

Métodos de Regularização aplicados à Tomografia por Impedância Elétrica

Felipe Kaminsky Riffel *
riffel.felipe@grad.ufsc.br [1]

Prof. Fábio Júnior Margotti (Orientador)
fabio.margotti@ufsc.br [1]

[1]Universidade Federal de Santa Catarina

Palavras-chave: Problemas Inversos. Métodos de Regularização. Tomografia por Impedância Elétrica

Resumo:

Diferentes problemas físicos possuem como objetivo tentar identificar um objeto a partir de seu efeito por um determinado processo, denominados Problemas Inversos, classe de problemas com as mais variadas aplicações. Em uma formulação matemática, tal como [1] define, dado um operador $F : X \to Y$, definido entre espaços vetoriais X, Y, o Problema Inverso consiste em: conhecendo um certo $y \in Y$, deseja-se obter $x^\dagger \in X$ tal que $F(x^\dagger) = y$.

Na prática, trabalhando com um Problema Inverso $F(x) = y$, não se conhece o vetor $y \in \mathcal{R}(F)$ exato gerado pelo operador, mas sim uma versão ruidosa $y^\delta \in Y$, tendo uma distância ao vetor y limitada por um certo nível de ruído $\delta > 0$. Essa característica torna necessária a determinação de soluções aproximadas, levando em conta os ruídos das medições. Ocorre que muitos Problemas Inversos são instáveis, característica na qual as aproximações obtidas com métodos convencionais podem ser muito distantes da solução real procurada. Nesse sentido, são necessários métodos que contornem tanto o ruído como a instabilidade do problema, sendo particularmente usados os chamados Métodos de Regularização.

Um Método ou Estratégia de Regularização consiste em um procedimento que conceda soluções aproximadas $x^\delta \in X$ para o Problema Inverso de forma que $x^\delta \to x^\dagger$, à medida que $\delta \to 0$. Há diferentes Métodos de Regularização, cada um deles se adequando a cada Problema Inverso dependendo das características deste. Alguns dos Métodos de Regularização mais tradicionais explorados e utilizados são o Método de Tikhonov, o Método do Gradiente e os chamados Métodos de Regularização baseados no Método de Newton-Inexato, os quais tem seu funcionamento garantido em Problemas Inversos que atendem determinadas condições [2].

O Método de Tikhonov tradicional tem como estratégia dar como solução aproximada x^δ um elemento que forneça valor mínimo do funcional $T_\alpha : X \to \mathbb{R}$ dado por

*Aluno de Graduação em Matemática - Licenciatura

$$T_\alpha(x) = \frac{1}{2}\|F(x) - y^\delta\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|x\|^2, \tag{1}$$

sendo $\alpha > 0$ um chamado parâmetro de regularização. A ideia é que a distância do $F(x)$ obtido ao y^δ bem como a norma de x sejam tão pequenas quanto possível. Em alguns casos, o funcional T_α é substituído por uma sequência de funcionais $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, similares ao definido em (1), mas parametrizados por sequências de parâmetros $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ apropriadas. A cada $n-$ésimo passo se obtém um minimizador x_n para T_n e utiliza-se como aproximação x^δ o primeiro termo x_n que satisfaça um critério de parada adequado.

Um segundo método frequentemente utilizado é chamado Método do Gradiente, o qual busca minimizar o funcional $G(x) = \frac{1}{2}\|F(x) - y^\delta\|^2$ através do método de otimização do gradiente. Nele, gera-se o método iterativo em que, a partir de um ponto inicial $x_0 \in X$, define-se iterativamente a sequência dada por

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_k \nabla G(x_n), \tag{2}$$

sendo $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ uma sequência dos chamados tamanhos de passo e ∇G o gradiente ou derivada de G. Nesse método, a partir de cada x_n se anda em direção oposta ao gradiente nesse ponto, a qual fornece o maior decrescimento local do funcional G a cada passo. A aproximação x^δ é fornecida nesse procedimento estabelecendo um critério de parada em termos do nível de ruídos e das características de F.

Por fim, uma das principais classes de métodos para problemas em que o operador F é não-linear e diferenciável são os de Regularização baseada em Métodos de Newton-Inexato. Tais métodos se baseiam no Método de Newton, onde a cada passo x_n determina-se o próximo iterado x_{n+1} resolvendo a equação obtida da aproximação linear de F em torno de x_n, dada por

$$F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + F(x_n) = y^\delta, \tag{3}$$

onde F' denota a derivada de F. Denotando $s_n = x_{n+1} - x_n$ e $b_n^\delta = y^\delta - F(x_n)$, resolver tal equação equivale a solucionar o Problema Inverso

$$F'(x_n)s_n = b_n^\delta. \tag{4}$$

Ocorre que se o Problema Inverso original for instável, o Problema Inverso na Equação (4) também torna-se instável. Com isso, no caso de Métodos baseados no Método de Newton-Inexato, a solução s_n para (4) é determinada de forma inexata, isto é, utilizando Métodos de Regularização, podendo se beneficiar do operador $F'(x_n)$ ser linear e limitado. Em particular, se torna interessante o uso dos já referenciados Métodos de Tikhonov ou do Gradiente, cada um com suas características.

Neste trabalho, exploramos como esses diferentes Métodos de Regularização se comportam no problema da Tomografia por Impedância Elétrica (TIE), a qual contém diferentes aplicações, desde imagem médica, controle de processos industriais até exploração geofísica [1]. Este é um Problema Inverso que consiste em determinar o conteúdo do interior de um corpo aplicando certas correntes de amperagem conhecida e medindo os potenciais elétricos resultantes sobre sua superfície. Dentre os modelos da TIE, nos limitamos ao Modelo Completo de Eletrodos. Nele, consideramos um corpo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com uma chamada condutividade elétrica $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}$, onde são atrelados L eletrodos sobre sua superfície. Ao longo desses eletrodos, são aplicadas correntes com um certo vetor de amperagens médias $I = (I_1, \ldots, I_L) \in \mathbb{R}^L$, resultando em um padrão $U = (U_1, \ldots, U_L) \in \mathbb{R}^L$ de potenciais medidos nos eletrodos.

Como mostra [2], fixados l vetores de amperagem $I^{(1)}, \ldots, I^{(l)} \in \mathbb{R}^L$, pode-se definir um operador $F_{\mathcal{I}}$ que associa cada condutividade γ, nos espaços de funções apropriados, aos padrões de potenciais medidos $U^{(1)}, \ldots, U^{(l)} \in \mathbb{R}^L$ respectivos. Desse modo, o Problema Inverso da TIE consiste em: fixado um vetor de padrões de correntes $\mathcal{I} = (I^{(1)}, \ldots, I^{(l)}) \in \mathbb{R}^{l \times L}$, mede-se o conjunto de padrões de potenciais resultantes $\Gamma_\gamma = (U^{(1)}, \ldots, U^{(L)}) \in \mathbb{R}^{l \times L}$, buscando determinar γ tal que $F_{\mathcal{I}}(\gamma) = \Gamma_\gamma$. Esse modelo da TIE pode ser tratado computacionalmente com o chamado Método de Elementos Finitos, onde o domínio é discretizado e as funções γ são aproximadas por funções lineares por partes, podendo ainda calcular o operador $F_{\mathcal{I}}$, como descrito em [3].

A Figura 1 mostra o gráfico de uma função γ gerada artificialmente num domínio consistindo de um disco unitário, obtendo dados de potenciais gerados com um mesmo nível de ruídos a partir dela. Ainda, são exibidos gráficos das respectivas reconstruções discretizadas utilizando método de Newton-Inexato com iteração interna via Gradiente e Tikhonov. Indicam-se ainda os erros percentuais E_p, com relação à norma de γ e sua distância às respectivas reconstruções.

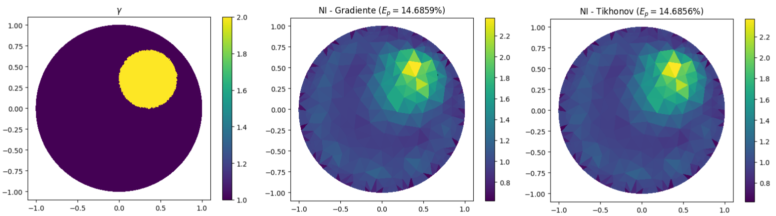


Figura 1: Função γ e soluções por Newton-Inexato via Gradiente e Tikhonov

No exemplo exibido, ambas reconstruções apresentam erros relativos em torno de 14% em relação à norma de γ, indicando que não existem diferenças significativa entre si, ou seja, que apresentam desempenho similar. Graficamente se observa que os métodos conseguem uma aproximação razoável, apesar da baixa resolução, dado o número reduzido de triângulos na discretização, e dos ruídos observados. Em trabalhos futuros, almeja-se explorar o uso de Métodos mais modernos e sofisticados, buscando tanto imagens mais precisas como maior desempenho.

Referências

[1] KIRSCH, A. **An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems**. 2 ed. Springer. Nova Iorque. 2011.

[2] MARGOTTI, F. J. **On Inexact Newton Methods for Inverse Problems in Banach Spaces.** 2016. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Tecnologia de Karlsruher (KIT). Karlsruher. 2018.

[3] SANTANA, L. M. **Tomografia por impedância elétrica**: aspectos teóricos e implementação computacional. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática): Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2022.

Modelagem matemática da hemodinâmica em válvulas aórticas bicúspides

Fernanda de Oliveira de Jesus
Bacharelado em Matemática — UFPR
fernandaoj@ufpr.br

Prof. Dr. Elías Gudiño (Orientador)
Departamento de Matemática — UFPR
egudino@ufpr.br

Palavras-chave: modelagem matemática, equações de Navier-Stokes, simulação numérica, interação fluido-estrutura.

Resumo:

A válvula aórtica bicúspide (VAB), patologia cardíaca congênita, afeta aproximadamente entre 1 e 2% da população geral, em que cerca de 33% desses diagnósticos têm tendência a desenvolver complicações cardiovasculares, como, por exemplo, estenose aórtica e insuficiência aórtica.

Para intervenções clínicas, embora seja fundamental a utilização de técnicas de processamento de imagens, a dificuldade reside em monitorar adequadamente a função da válvula e avaliar as possíveis complicações que podem surgir ao longo do tratamento. Devido a isso, a modelagem matemática pode ser vista como uma ferramenta complementar que possibilita informações detalhadas sobre a hemodinâmica da condição.

O comportamento dinâmico da válvula aórtica, um problema de interação fluido (sangue) e estrutura (aorta e cúspides aórticas), traz alguns desafios, como, por exemplo, o acoplamento de duas descrições matemáticas distintas: lagrangiana e euleriana, que descrevem o movimento da estrutura e do fluido, respectivamente. Para esse acoplamento, utilizamos a Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária.

Sejam $\Omega_f \in \mathbb{R}^2$ o domínio do fluido e $\Omega_e \in \mathbb{R}^2$ o domínio da estrutura.

Considerando o sangue como um fluido newtoniano incompressível de densidade ρ_f e viscosidade dinâmica μ e sujeito a forças de superfícies (pressão p e tensões de cisalhamento). Podemos descrever o escoamento considerando as equações de momento e continuidade:

$$\rho_f \frac{\partial V}{\partial t} + \rho_f (V \cdot \nabla) V + \nabla p - \mu \nabla \cdot (\nabla V + \nabla V^T) = 0 \text{ em } \Omega_f \times [0, T] \quad \text{(I)}$$

$$\nabla \cdot V = 0 \text{ em } \Omega_f \times [0, T] \quad \text{(II)},$$

onde V representa o campo de velocidade.

As equações (I) e (II) são conhecidas como as equações de Navier-Stokes. Para resolver essas equações, consideramos condições iniciais apropriadas e, na fronteira $\partial\Omega_f = \Gamma_{entrada} \cup \Gamma_{parede} \cup \Gamma_{saída}$ do domínio do fluido, as condições:

$$V = (V_{in}(t),\, 0)^T \text{ em } \Gamma_{entrada}$$
$$V = 0 \text{ em } \Gamma_{parede}$$
$$\left(pI - \mu(\nabla V + \nabla V^T)\right)n = p_0 n \text{ em } \Gamma_{saída},$$

onde n é o vetor normal unitário externo.

Agora, considere $\Omega_e^r \in \mathbb{R}^2$ uma configuração de referência da estrutura, cujo movimento é descrito pelo mapeamento $\varphi\colon \Omega_e^r \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. O deslocamento d é estudado da estrutura para um modelo linear elástico

$$\rho_e \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(F(d)S(d)\right) = 0 \text{ em } \Omega_e^r \times [0,\, T] \quad \text{(III)},$$

em que F o gradiente de deformação e S o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff.

O sistema de equações é fechado com condições apropriadas na interface entre Ω_f e Ω_e^r para garantir a continuidade das velocidades e das componentes normais das tensões.

Com o auxílio do software COMSOL Multiphysics, baseando-se no modelo matemático descrito pelas equações acima, o objetivo desse trabalho é reproduzir simulações numéricas do escoamento sanguíneo em geometrias idealizadas de válvulas aórticas bicúspides, com condições fisiologicamente reais, e buscar soluções aproximadas em $\Omega_f \times [0,\, T]$, $T \in \mathbb{R}^+$, para o campo de velocidade e a pressão, obtidas a partir do Método dos Elementos Finitos.

Referências:

[1] TORRADO, A. S. B. **Analysis of hemodynamic indicators in bicuspid aortic valves using a computational mathematical model.** Universidade de Lisboa, 2015.

[2] FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. **Introdução à Mecânica dos Fluidos** – 8. ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2014.

[3] FORMAGGIA, L.; VERGARA, C. **Integrated Models for Computational Medicine-Geometrical Multicale Models of the Cardiovascular System.** Politecnico di Milano, 2015.

[4] VOLKER, J. **Finite Element Methods for Incompressible Flow Problems.** Springer, 2016.

Aproximação do problema do calor usando o Método dos Elementos Finitos

Leonilso Fandres Wrublak*
leonilso.wrublak@estudante.uffs.edu.br [1]

Thiago de Oliveira Quinelato (Orientador)
thiago.quinelato@ufpr.br [2]

[1]Universidade Federal da Fronteira Sul
[2]Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: elementos finitos, fluxo de calor, método numérico.

Resumo:
As Equações Diferenciais Parciais (EDPs) são equações que dependem das derivadas parciais de uma função incógnita. São vistas em vários modelos de Engenharia, como a distribuição da temperatura em uma placa metálica, por exemplo. A solução analítica desse tipo de modelo é na maioria das vezes impossibilitada, devido às condições como propriedades do material, geometrias complexas etc. [1]. Devido a esses obstáculos a solução exata pode ser substituída por uma solução numérica (aproximada), obtida, por exemplo, através do Método dos Elementos Finitos (MEF).

O MEF baseia-se na discretização do domínio do sistema em elementos [2], sobre os quais são definidas funções cuja combinação linear aproxima a variável de interesse do fenômeno que se está estudando.

O modelo adotado neste trabalho descreve a evolução no tempo da distribuição de temperatura em uma placa metálica retangular de espessura desprezível, material homogêneo e considerando a temperatura ambiente fixa:

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla u) + \frac{2h}{H}(u_{\text{ar}} - u), \tag{1}$$

em que ρ é a densidade do material, c_p é sua capacidade térmica, u é a temperatura, t é o tempo, K é a condutividade térmica, h é a constante de resfriamento de Newton, H é a espessura da placa e u_{ar} é a temperatura do ambiente.

Para discretizar a derivada no tempo usaremos o método de Euler Implícito:

$$-\operatorname{div}(K \nabla u(t, \mathbf{x})) + \left(\frac{2h}{H} + \frac{\rho c_p}{\Delta t}\right) u(t, \mathbf{x}) = \rho c_p \frac{u(t_0, \mathbf{x})}{\Delta t} + \frac{2h}{H} u_{\text{ar}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{2}$$

em que $\mathbf{x}$ é o vetor posição e Δt é a variação no tempo.

*Bolsista do PICME

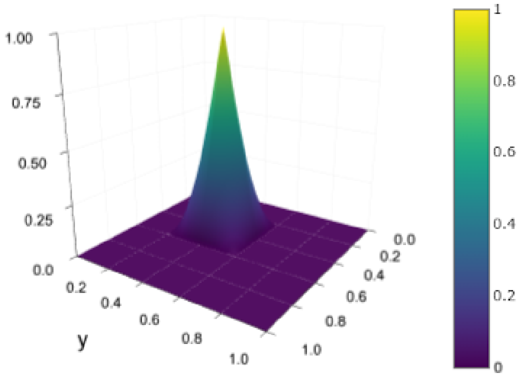
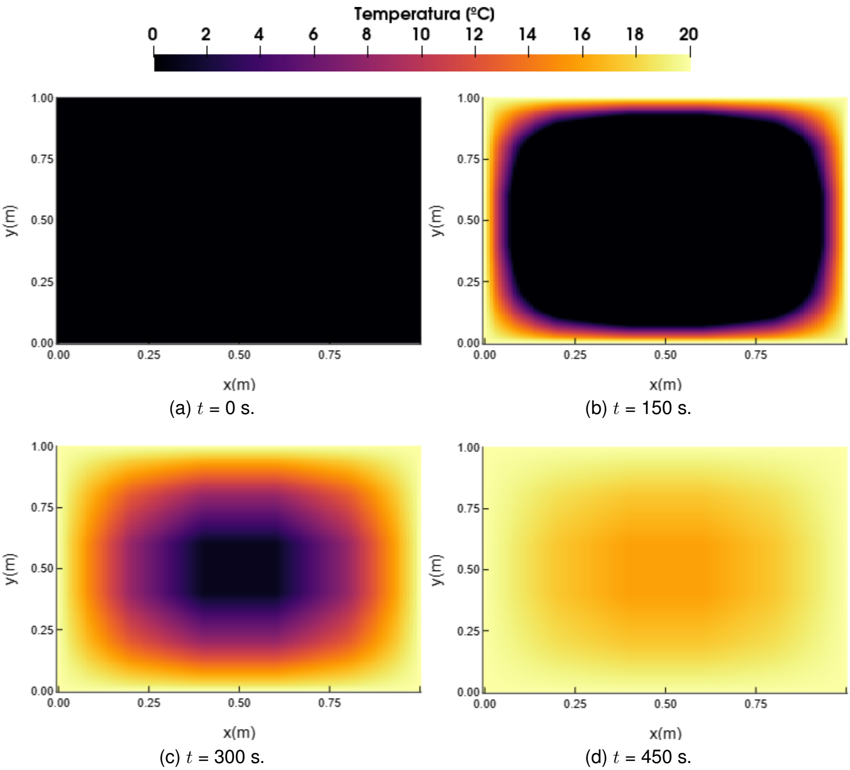


Figura 1: Função de forma na malha 2D.



(a) t = 0 s.

(b) t = 150 s.

(c) t = 300 s.

(d) t = 450 s.

Figura 2: Temperatura na placa ao longo do tempo.

O domínio Ω é particionado em N elementos quadrilaterais, sobre os quais são definidas as n funções de forma de suporte compacto ϕ_i, com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, bilineares em cada elemento (como mostrado na Figura 1).

A formulação variacional equivalente ao problema (2) é definida por

$$\int_{\Omega} K\nabla u(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \left(\frac{2h}{H} + \frac{\rho c_p}{\Delta t} \right) u(t, \mathbf{x}) v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{\rho c_p}{\Delta t} u(t_0, \mathbf{x}) v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{2h}{H} u_{\text{ar}} v \, d\mathbf{x} \quad \forall v. \tag{3}$$

A função $u(t, \mathbf{x})$ é escrita como a combinação linear das funções de forma ϕ_j:

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t) \phi_j(\mathbf{x}). \tag{4}$$

Tomando $v = \phi_i$, para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, obtemos um sistema de equações lineares da forma $Ax(t) = b(t)$, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x(t) = \{\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_n(t)\} \in \mathbb{R}^n$ e $b(t) \in \mathbb{R}^n$. Foram usadas condições de contorno de Dirichlet, que especificam a temperatura em todo o contorno do domínio. Essas condições de contorno foram impostas pela modificação do sistema $Ax(t) = b(t)$ em cada passo de tempo.

Para a montagem do sistema linear e sua posterior solução foi usada a linguagem de programação Julia, devido à sua alta performance e à disponibilidade de bibliotecas específicas para integração numérica.

Para validar o código implementado, simulamos o aquecimento de uma placa com $1\,\mathrm{mm}$ de espessura, 1 m de comprimento e 1 m de largura constituída de cobre ($K = 408{,}28\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$, $\rho = 8\,930\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$, $c_p = 390\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$, $h = 13{,}6\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$ [3]). Inicialmente a placa está à temperatura homogênea de $0\,^\circ\mathrm{C}$. O ar está à temperatura fixa de $20\,^\circ\mathrm{C}$, assim como o contorno da placa. O domínio foi discretizado com uma malha de 5×5 elementos e foi utilizado o passo de tempo $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$.

Ao executarmos o código podemos ver os 4 momentos de execução, ilustrados na Figura 2: no primeiro momento a placa está a $0\,^\circ\mathrm{C}$ e começa a sofrer interferência do ambiente externo. Com o decorrer do tempo as condições de contorno e a troca de calor com o ar causam o aquecimento da placa.

Referências

[1] SILVA FILHO, Francisco Chagas da. **Modelagem de problemas de engenharia:** solução de equações diferenciais parciais pelo método dos elementos finitos. Rev. Tecnol., Fortaleza, v. 26, n. 2, p. 134-144, dez. 2005.

[2] Ensus Advanced Engineering. **Elementos Finitos:** O que é? Quando utilizar? Quais são os benefícios? https://ensus.com.br/elementos-finitos-quais-os-beneficios/, 2016.

[3] ZHU, Q. and TRAN, H. and YANG, H. **Heat conduction: Mathematical modeling and experimental data.** Journal of Emerging Investigators 4: 1-9, 2021.

Motivação matemática das redes neurais artificiais

Maria Eduarda Dall Negro Mochinski*
maria.mochinski@ufpr.br [1]

Lucas Garcia Pedroso (Orientador)
lucaspedroso@ufpr.br [2]

[1]Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
[2]Departamento de Matematica - UFPR

Palavras-chave: Redes neurais, Aprendizagem de máquina, Otimização.

Resumo:

O uso e a popularização do modelo de redes neurais artificiais trouxe avanços no campo da aprendizagem de máquina. Diversos são os problemas reais que podem ser beneficiados por soluções utilizando este modelo. Neste trabalho um modelo básico de redes neurais para classificação será apresentado, descrevendo-o de forma a ficar evidente o problema de otimização a ser resolvido. A partir disso, serão mostradas as expressões de atualização dos parâmetros, considerando o algoritmo de *Backpropagation* (Retropropagação), baseado no método do gradiente.

Tratamos de um problema de aprendizado supervisionado, sob a suposição de que a entrada é um conjunto de m observações, e que cada observação pode ser representada por um vetor de o elementos. Nesse problema, assumimos que cada entrada deve ser classificada em 1 de n classes, por isso, a saída para cada observação deve ser um vetor de n componentes, onde o componente na posição i representa a probabilidade de aquela observação pertencer à classe i.

Considere um modelo de rede neural com a estrutura mostrada na figura 1. Cada camada pode ser representada por uma matriz contendo o mesmo número de colunas quanto observações presentes nos dados de entrada. Assim, definimos as matrizes para as camadas:

$$A^{[0]} \in \mathbb{R}^{o\times m}, \quad Z^{[1]} \in \mathbb{R}^{p\times m}, \quad A^{[1]} \in \mathbb{R}^{p\times m}, \quad Z^{[2]} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad A^{[2]} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

onde $A^{[i]}$ representa a versão ativada da camada i, e $Z^{[i]}$ é a versão desativada da camada i. O relacionamento entre cada camada é feito da seguinte maneira:

$$Z^{[i]} = W^{[i]}A^{[i-1]} + b^{[i]}$$

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME

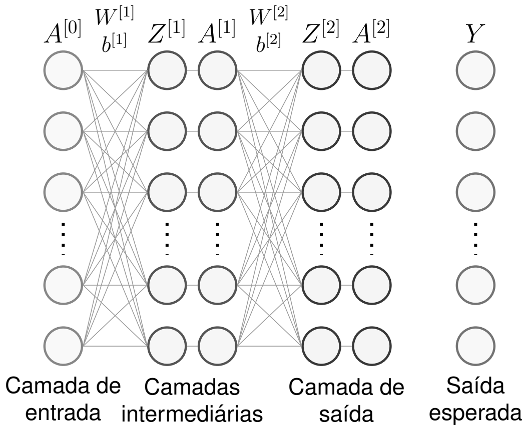


Figura 1: Modelo de rede detalhado

$$A^{[i]} = f_i(Z^{[i]})$$

onde $W^{[i]}$ é a matriz de parâmetros com dimensões adequadas para a multiplicação, e $b^{[i]}$ é um vetor de parâmetros com o mesmo número de elementos quanto o número de linhas da matriz $Z^{[i]}$, e é replicado para formar uma matriz com m colunas para permitir a adição. Esses parâmetros devem ser otimizados. f_i é chamada de função de ativação da camada i, e deve ser não-linear para permitir que a rede neural modele problemas não lineares. Em geral a função de ativação é uma função de 1 variável aplicada elemento a elemento na matriz $Z^{[i]}$. Uma exceção seria a função de ativação da camada de saída que pode ser uma função de várias variável para garantir características específicas do problema, como gerar vetores de probabilidades, que devem somar 1.

Ao fim, a camada de saída, neste caso $A^{[2]}$, é comparada com a saída esperada Y, utilizando uma função custo C. No caso do problema de classificação podemos usar a *cross-entropy* (entropia cruzada) calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C &= -\sum_{j=1}^{m} Y_j^T \log(A^{[2]}) \\ &= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} y_{ij} \log(a_{ij}^{[2]}) \end{aligned}$$

No caso em que o algoritmo acerta perfeitamente as classificações, temos $C = 0$, e quando erra completamente temos $C \to \infty$, assim podemos definir o problema de otimização irrestrita utilizado para otimizar a rede neural:

$$\min_{W^{[i]}, b^{[i]}} C = C(A^{[2]}, Y)$$

Fazendo o uso do algoritmo de *backpropagation* encontramos o efeito de cada elemento dos parâmetros no aumento da função custo e fazemos a atualização dos parâmetros utilizando um tamanho de passo fixo de forma iterativa:

$$w_{gh}^{[i]} \leftarrow w_{gh}^{[i]} - \alpha \frac{\partial C}{\partial w_{gh}^{[i]}}$$
$$b_{g}^{[i]} \leftarrow b_{g}^{[i]} - \alpha \frac{\partial C}{\partial b_{g}^{[i]}}$$

A partir do modelo descrito, implementamos na linguagem `python` o algoritmo, utilizando apenas bibliotecas básicas que permitem operações de álgebra linear (`numpy`) e aplicamos ao dataset MNIST(1), para avaliar o desempenho do modelo no reconhecimento de imagens de algarismos manuscritos.

Referências

1 LECUN, Y. et al. Gradient-based learning applied to document recognition. **Proceedings of the IEEE**, v. 86, n. 11, p. 2278–2324, November 1998.

2 GÉRON, A. **Hands-on Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow : concepts, tools, and techniques to build intelligent systems**. 2. ed. Sebastopol, CA: O'Reilly Media, 2019.

3 GOODFELLOW, I.; BENGIO, Y.; COURVILLE, A. **Deep Learning**. [S.l.]: MIT Press, 2016. ⟨http://www.deeplearningbook.org⟩.

4 NIELSEN, M. **Neural Networks and Deep Learning**. [S.l.]: Determination Press, 2019. ⟨http://neuralnetworksanddeeplearning.com/index.html⟩.

Análise de sensibilidade da dinâmica tumoral com base na imunidade mediada por citocinas

Milene Karine Gubetti
milene.gubetti@grad.ufsc.br [1]
Louise Reips (Orientadora)
l.reips@ufsc.br [1]

[1]Universidade Federal de Santa Catarina

Palavras-chave: análise de sensibilidade, análise numérica, modelo matemático.

Resumo:

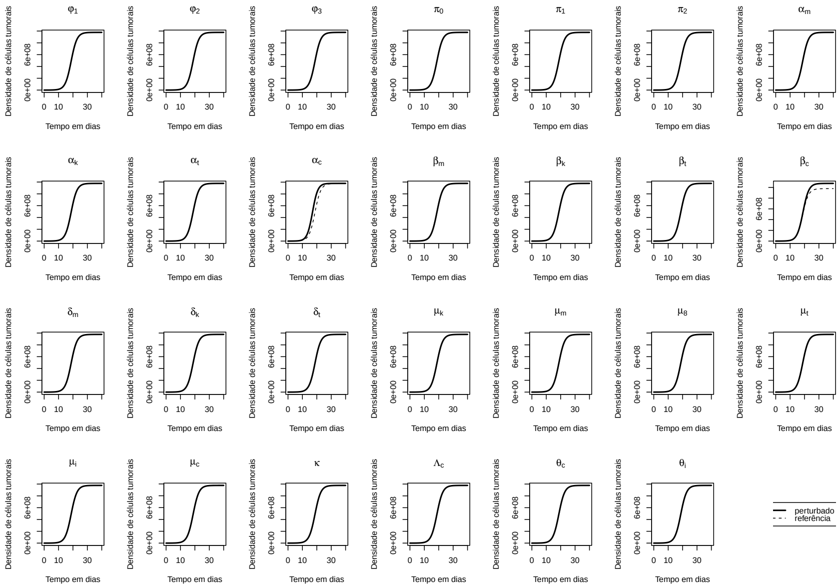
A análise de sensibilidade é uma forma de medir como pequenas mudanças nos parâmetros de entrada de um modelo matemático afetam a saída [3]. O objetivo do trabalho é analisar a sensibilidade da densidade de células tumorais no modelo [1] com mais de dez equações diferenciais ordinárias para prever o papel das citocinas no tumor e na dinâmica das células imunes inatas e adaptativas.

Qual é o impacto na saída de um modelo da mudança de um parâmetro ligeiramente em relação à sua média? A maneira mais fácil de investigar é através de um gráfico: aumenta-se ligeiramente cada parâmetro em 10% um de cada vez, executa-se o modelo com esses valores alterados e compara-se a saída com a saída original [3]. No modelo [1], a taxa de crescimento natural das células tumorais, α_c, e sua capacidade de suporte, β_c, afetam quantas células tumorais existem. Aumentar os outros parâmetros, descritos na Tabela 1, em 10% tem pouco efeito sobre a quantidade de células tumorais (Figura 1).

Em [3], transforma-se a informação gráfica em uma série de números chamados funções de sensibilidade. Essas funções mostram como cada variável y_i de um modelo é sensível a um único parâmetro θ_j, levando em conta o tamanho das variáveis Δy_i e a incerteza do parâmetro $\Delta\theta_j$: $S_{ij} = \frac{\Delta\theta_j}{\Delta y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial \theta_j}$. A combinação dos n parâmetros serve para diferenciar aqueles que são conhecidos com precisão dos que são mais incertos. Para um modelo resolvido numericamente, é mais fácil aproximar numericamente a mudança da saída em relação aos parâmetros: $\frac{\partial y_i}{\partial \theta_j} \approx \frac{y_i|_{\theta_j^*} - y_i|_{\theta_j}}{\theta_j^* - \theta_j}$, onde θ_j^* é o valor do parâmetro ligeiramente mudado ($\approx 1\mathrm{e}-8$) e $y_i|_{\theta_j^*}$ é a saída do modelo ao usar esse valor. A sensibilidade geral da saída em relação a cada parâmetro pode ser calculada usando medidas, como:

$$\delta_i^{Sqr} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^2}, \quad \delta_i^{Abs} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |S_{ij}|. \tag{1}$$

Figura 1: Impacto de um aumento de 10% no valor de cada um dos parâmetros da Tabela 1 na densidade de células tumorais. Acima de cada gráfico, que se refere à densidade da população de células cancerígenas ao longo dos dias, há o nome do parâmetro variado.



Isso permite classificar no modelo [1] a importância dos diferentes parâmetros de acordo com a sensibilidade decrescente (Tabela 1). Alguns dos parâmetros que não foram observados por [1], incluindo π_1 e π_2, foram identificados como sensíveis. Enquanto outros, como μ_i, μ_c e θ_i, estão relacionados ao número básico de reprodução R_0 - número médio de células imunes infectadas produzidas por uma única célula tumoral - calculado em [2].

Tabela 1: As medidas δ_i^{Sqr} e δ_i^{Abs} em $1\mathrm{e}+10$.

Parâmetro	**Descrição**	δ_i^{Sqr}	δ_i^{Abs}
φ_1	Ativação de células imunes	8.8	3.2
φ_2	Ativação de células imunes	6.8	3.6
φ_3	Ativação de células imunes	9.1	3.4
π_0	Taxa de inibição	6.9	3.5
π_1	Taxa de inibição	6.8	3.6
π_2	Taxa de inibição	5.0	2.0
α_m	Taxa de crescimento intrínseco dos macrófagos	6.8	3.6
α_k	Taxa de crescimento intrínseco das células *natural killer*	6.6	2.9

α_t	Taxa de crescimento intrínseco das células T	6.6	2.9
α_c	Taxa de crescimento intrínseco das células tumorais	6.8	3.2
β_m	Capacidade de carga dos macrófagos	6.8	3.6
β_k	Capacidade de carga das células *natural killer*	4.9	2.0
β_t	Capacidade de carga das células T	2.7	1.1
β_c	Capacidade de carga das células tumorais	6.8	3.6
δ_m	Taxa de inativação dos macrófagos devido às suas interações com células tumorais	9.3	4.1
δ_k	Taxa de inativação das células *natural killer* devido às suas interações com células tumorais	8.0	4.6
δ_t	Taxa de inativação das células T devido às suas interações com células tumorais	9.3	4.2
μ_k	Taxa de morte natural das células *natural killer*	6.8	3.6
μ_m	Taxa de morte natural dos macrófagos	1.9	0.78
μ_8	Taxa de morte natural das células T citotóxicas	1.3	0.48
μ_t	Taxa de morte natural das células T	2.0	0.82
μ_i	Taxa de morte natural das células pré-cancerígenas	6.8	3.6
μ_c	Taxa de morte natural das células tumorais	6.6	2.9
κ	Nível de meia saturação das células tumorais	6.9	3.5
Λ_c	Taxa de inativação de células tumorais devido à sua interação com células efetoras	6.8	3.6
θ_c	Taxa de produção de novas células tumorais por macrófagos	7.3	3.6
θ_i	Taxa de produção de novas células tumorais por células pré-cancerígenas	6.8	3.6

É importante que a solução numérica seja precisa. Caso contrário, as funções de sensibilidade podem ser apenas ruído. Por exemplo, ao usá-las com um modelo dinâmico usando métodos numéricos, definem-se as tolerâncias para um valor menor. Isso ajudará a verificar se os resultados de sensibilidade fazem sentido [3].

Referências

[1] AMIMA, Innocenter Moraa. **Investigating tumour micro environment dynamics based on cytokine-mediated innate-adaptive immunity**. 2018. Tese de Doutorado. Stellenbosch: Stellenbosch University.

[2] GUBETTI, Milene Karine; REIPS, Louise. Análise de estabilidade do estado estacionário livre de tumor em um modelo aplicado ao câncer. In: ENCONTRO DE BIOMATEMÁTICA, 5., 2023, Belo Horizonte. **Boletim Digital**. 2023. p. 113-114.

[3] SOETAERT, Karline; HERMAN, Peter MJ. **A practical guide to ecological modelling: using R as a simulation platform**. New York: Springer, 2009.

Métodos modificados para multiplicação matricial de *Strassen* e *Strassen-Winograd*

Murilo Stellfeld de Oliveira Poloi*
murilopoloi@ufpr.br [1]

Prof. Thiago de Oliveira Quinelato (Orientador)
thiago.quinelato@ufpr.br [1]

[1] Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Multiplicação Matricial, Método de *Strassen*, Método de *Strassen-Winograd*.

Resumo:

A multiplicação entre duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times k}$ feita de maneira ingênua pode ser descrita pela seguinte fórmula:

$$C_{ij} = \sum_{p=1}^{n} A_{ip}B_{pj}, \text{ com } i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, k,$$

em que C_{ij} são as entradas da matriz resultante do produto entre A e B. Esse método possui uma complexidade aritmética de $\mathcal{O}(n^3)$ e é baseado na multiplicação usual, isto é, computar o produto interno entre a linha i da matriz A e a coluna j da matriz B.

Um dos primeiros métodos que surgiram para substituir o método ingênuo foi o método de *Strassen* [3], com uma complexidade de $\mathcal{O}(n^{\log_2 7})$. Para o caso de $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, possui dezoito adições e sete multiplicações.

O método consiste em computar alguns valores a partir das entradas das matrizes A e B e atribuí-los posteriormente à matriz resultante. Seu algoritmo é dado por:

- Primeiro, calculam-se as sete multiplicações:

$$\begin{array}{rr} P1 := (A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22}); & P5 := (A_{11}+A_{12})B_{22}; \\ P2 := (A_{21}+A_{22})B_{11}; & P6 := (-A_{11}+A_{21})(B_{11}+B_{12}); \\ P3 := A_{11}(B_{12}-B_{22}); & P7 := (A_{12}-A_{22})(B_{21}+B_{22}); \\ P4 := A_{22}(-B_{11}+B_{21}); & \end{array}.$$

- Por fim, constrói-se a matriz resultante:

$$A \times B = \begin{bmatrix} P1+P4-P5+P7 & P3+P5 \\ P2+P4 & P1+P3-P2+P6 \end{bmatrix}.$$

*Voluntário

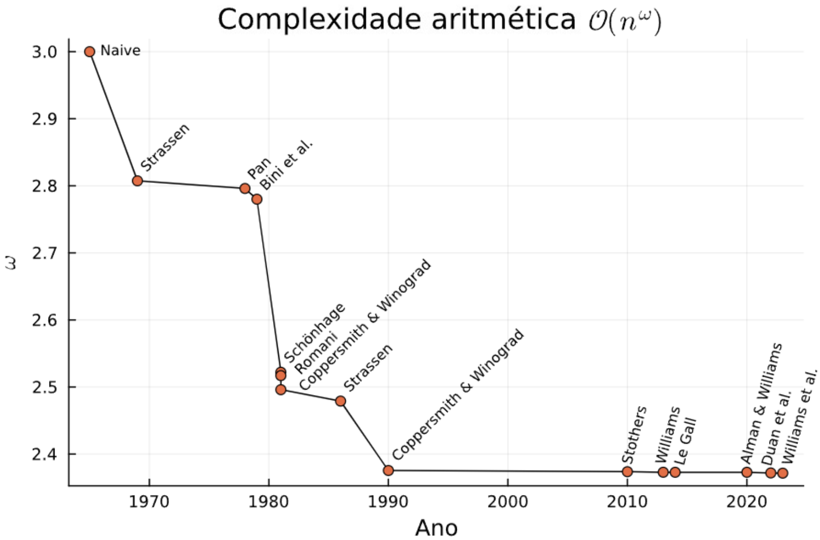


Figura 1: Complexidade da multiplicação matricial. Fonte: Adaptado de [2].

Os métodos de *Strassen-Winograd* compartilham da mesma ideia do método de *Strassen* e mesma complexidade aritmética para o caso de $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, porém sua característica principal é ter somente quinze adições em relação ao método de *Strassen*, mantendo as sete multiplicações. A versão utilizada dos métodos de *Strassen-Winograd* [4] é dada por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aA + bB & w + v + (a + b - c - d)D \\ w + u + d(B + C - A - D) & w + u + v \end{bmatrix},$$

em que $u = (c - a)(C - D)$, $v = (c + d)(C - A)$ e $w = aA + (c + d - a)(A + D - C)$.

Em comparação com métodos mais recentes, *Strassen* e *Strassen-Winograd* são obsoletos. Pode-se observar na Figura 1 o decaimento da complexidade aritmética de tais métodos, dada por $\mathcal{O}(n^\omega)$, com $n \in \mathbb{N}$, em relação ao tempo.

No artigo [1], investigamos modificações para a implementação dos métodos de *Strassen* e *Strassen-Winograd*, que são naturalmente recursivos por serem problemas do tipo *dividir para conquistar*, a fim de otimizar a alocação de memória e o tempo de execução em relação ao método ingênuo.

Por simplicidade e sem perda de generalidade, foram utilizadas somente matrizes de ordem $n = 2^k, k = 1, \ldots, 11$ nos testes dos métodos implementados.

As estratégias exploradas para otimizar os métodos foram:

- interromper a recursão mais cedo utilizando funções específicas para o produto de matrizes de ordem menor que um limiar ao invés de reduzir o problema até o caso base original, isto é, $A, B \in \mathbb{R}^{1\times 1}$;
- implementar duas estratégias de alocação de memória, conforme sugerido em

[5]: uma utilizando duas variáveis temporárias e outra que utiliza somente as matrizes de entrada (A, B) e saída (C);

- alternar a recursão dos métodos de *Strassen* e *Strassen-Winograd* para a implementação do método ingênuo quando as matrizes são de ordem $n \leq 12$, conforme proposto em [6];
- combinar as duas estratégias acima para otimizar simultaneamente tempo de execução e alocação de memória.

Das abordagens acima, a que se mostrou mais apropriada para o objetivo deste trabalho foi a de combinar as estratégias de alocação de memória e alternar a parada de recursão dos métodos Strassen e Strassen-Winograd para o método ingênuo quando a ordem das matrizes for $n \leq 12$.

Em comparação com o método ingênuo, foi possível ter uma alocação de memória de ordem similar e um tempo de execução menor para matrizes suficientemente grandes.

Referências

[1] Poloi, M. S. O., Quinelato, T. O. Algoritmos para Multiplição Matricial. Disponível em: `https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.00628`. Acesso em: 06 Set. 2023.

[2] Burghardt J.; Wikimedia Commons. Disponível em: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MatrixMultComplexity_svg.svg`. Acesso em: 04 ago. 2023.

[3] Strassen, V.; Gaussian Elimination is not Optimal. **Numerische Mathematik** v. 13, pp. 354-356, 1969.

[4] Knuth, D. E. **The art of computer programming**. Volume 2: Seminumerical Algorithms. Addison-Wesley Professional. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1997.

[5] Boyer, B., Dumas, J.-G., Pernet, C., e Zhou, W. Memory efficient scheduling of Strassen-Winograd's matrix multiplication algorithm. In: **Proceedings of the 2009 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation** pp. 55-62, 2009.

[6] Huss-Lederman, S., Jacobson, E. M., Tsao, A., Turnbull, T., e Johnson, J. R. Implementation of Strassen's algorithm for matrix multiplication. In: **Proceedings of the 1996 ACM/IEEE Conference on Supercomputing**. 1996.

Educação Matemática

Corretores de resumos:

Professores:

Prof. Emerson Rolkouski
Prof. Gabriel dos Santos e Silva

Estudantes de pós-graduação:

Eloisa Navarro
Fernanda Dardora Musha
Lucas Martini

Banca Avaliadora:

Professores:

Profª. Bruna Moraes Battistelli
Prof. Elenilton Vieira Godoy
Profª. Elisângela de Campos
Prof. Emerson Rolkouski
Prof. Gabriel dos Santos e Silva
Profª. Maria Tereza Carneiro Soares
Profª. Neila Tonin Agranionih
Profª. Priscila Kabbaz Alves da Costa
Profª. Tania Teresinha Bruns Zimer

Estudantes de pós-graduação:

Amanda Cristina Foetsch
Beatriz Borba Guergolet
Eloisa Navarro
Fernanda Dardora Musha
José Ricardo Dolenga Coelho
Keitth Gabriella Flenik
Marcia Regina Rodrigues da Silva Zago
Nathalie Aparecida Felicetti Luvison

Análise da Produção Escrita de uma Tarefa[1] Não Rotineira de Matemática

Augusto Henrique da Costa[2]
augusto.costa.ahc@gmail.com [2]

Gabrielly de Oliveira Ripka[2]
gabriellyripka@gmail.com [3]

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)
gabrielss@ufpr.br [4]

[2,3,4] Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática Realística, Análise da Produção Escrita, Tarefas Não-Rotineiras de Matemática.

Resumo:

O presente trabalho tem por objetivo relatar a conceituação e planejamento das práticas realizadas no Projeto Voluntário Educação Matemática da Universidade Federal do Paraná, cujas as atividades serão aplicadas em três turmas de 9° ano e três turmas de 8° ano da Região Metropolitana de Londrina, tanto em escolas de ensino público como de ensino privado. Ademais, tal projeto foi estruturado com base em reuniões semanais dos alunos participantes juntamente com o Professor Orientador Dr. Gabriel dos Santos e Silva, docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná.

O projeto tem como proposta primordial a escolha de tarefas não-rotineiras de matemática, conforme critérios definidos por Ferreira (2013), propiciando ao estudante a matematização a partir de um contexto realístico, cujo enunciado utilizasse uma parte da realidade como contexto, indicando ao aluno que a matemática pode ser aplicada ao cotidiano, através do uso dessas tarefas não-rotineiras, definidas como aquelas que não aparecem com frequência em aulas de matemática e nos livros didáticos. Desse modo, optou-se por escolher a questão abaixo (VIOLA DOS SANTOS; BURIASCO, 2009):

Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?

Tal tarefa foi selecionada uma vez que, ao abordar conceitos matemáticos através de um enunciado aberto e amparado em uma conjuntura realística, proporciona a matematização de forma intuitiva, aproveitando todo o arcabouço matemático do aluno e, portanto, evitando apenas a replicabilidade de conceitos que o estudante apenas teve contato durante as aulas, mas, contudo, não aprendeu de forma contextualizada.

[1] O termo “tarefa” aqui é utilizado como sinônimo de “questão”, tida como “enunciado de uma questão de matemática” (FERREIRA,2013).
[2] Alunos voluntários.

Assim, ao analisarmos o enunciado, temos a ideia de que os alunos não terão apenas um método de resolução, podendo ser tanto linear como não linear, sendo aquela criada a partir de interpretações diretas do enunciado, dada em fases bem estruturadas de resolução, como passos a serem seguidos enquanto está se dá a partir de interconexões de dados do enunciado, contendo, portanto, inter-relações entre as etapas da resolução, sem um fluxo aparente (VIOLA DOS SANTOS; BURIASCO, 2009). Dessa forma, com as diferentes propostas de resposta ao problema proposto, sejam elas tidas como corretas, parcialmente corretas ou incorretas, pretende-se agrupá-las, podendo, assim, serem criadas inferências do ensino de matemática, bem como de suas metodologias.

Outrossim, tal resultado é almejado tendo em vista a ideia de que a produção escrita do aluno é uma ferramenta didática através da qual o professor pode sondar a efetividade da didática aplicada e, a partir de tal retorno, elaborar adaptações aos métodos didáticos usados em sala.

Portanto, tem-se que aplicação de tal processo avaliativo tem como objetivo a ressignificação da avaliação implementada apenas ao final do processo de ensino, ou seja, apenas uma ferramenta quantitativa, de “medição”, para verificar o aproveitamento apenas do aluno, no sentido de rendimento escolar (BURIASCO, 2004). De tal modo, com a inserção da avaliação como ferramenta durante o processo de ensino tem-se a total atenção aos objetivos de ensino, buscando relevância para o ambiente educativo, conforme elucidado por Sacristán (1998, p. 298):

> “[...] qualquer processo por meio do qual alguma ou várias características de um aluno/a, de um grupo de estudantes, de um ambiente educativo, de objetivos educativos, de materiais, professores/as, programas etc., recebem a atenção de quem avalia, analisam-se e valorizam-se suas características e condições em função de alguns critérios ou pontos de referência para emitir um julgamento que seja relevante para a educação.”

Assim, visando tal análise da avaliação como ferramenta do processo de ensino, tem-se como critério para a escolha do enunciado a sua classificação conforme os seguintes parâmetros: O contexto da tarefa, Ordem dos contextos, Tipo de tarefa e o Tipo de Classificação.

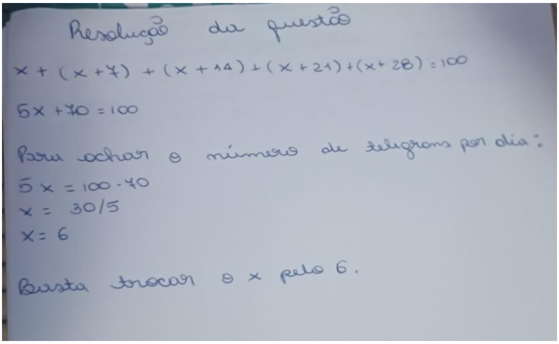
Desse modo, o enunciado selecionado, com base na classificação segundo o contexto, trata-se de um problema de “contexto realista” (DIAZ E POBLETE, 2005), uma vez que, como abordado acima, trata-se de uma simulação da realidade, cujos dados podem ser substituídos por qualquer outra atividade amparada no cotidiano real sem, no entanto, que haja mudança no sentido ou resolução do problema. Dessa forma, caso seja necessário, o aluno poderia trocar os termos “telegramas” ou “carteiro” por palavras que o auxiliem na resposta e, portanto, no processo ativo de matematização.

Seguindo tal raciocínio, há também a definição do enunciado como “contexto de primeira ordem” (DE LANGE, 1987), uma vez que, conquanto possua um contexto que permite a identificação de operações matemáticas e o enunciado é relevante para a resolução da tarefa e para sua resposta, não há o processo de matematização conceitual com base nas informações contidas no problema.

Já com base no tipo de tarefa (BUTTS, 1997), tem-se a questão escolhida como “problema de aplicação”, dado que seu texto possibilita construção do problema de acordo com a linguagem matemática e, em seguida, a manipulação dos dados obtidos, de forma a chegar em uma resposta condizente com a proposta exposta.

Por fim, tal tarefa possui também classificação “ocupacional” (OECD,2010), já que envolve a medição de tarefas profissionais, visando a busca pelo padrão mais eficiente, tal qual objetivo de um controle de qualidade. Assim, o enunciado escolhido aborda a análise de um processo típico da força de trabalho, buscando mensurar dados realistas.

Desse modo, com base nas classificações apresentadas, espera-se que uma possível resolução tida como totalmente correta seguiria o modelo apresentado abaixo:



Referências:

[1] BUTTS, T. **Formulando problemas adequadamente**. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo: Atual, 1997. p. 32-48.

[2] DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW &OC, 1987.

[3] DÍAZ, V.; POBLETE, A. Competencias en Matemáticas y Tipos de problemas. In: CIBEM – Proccedings V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, n. 5, 2005, Portugal. **Anais**... Portugal: Publicaciones con Comité Editorial, 2005.ed. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 295-351.

[4] FERREIRA, P. E. A. **ENUNCIADOS DE TAREFAS DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO SOB A PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA**. 2013. 121 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013. Disponível em: http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/Teses/2013_Ferreira_tese.pdf. Acesso em: 03 ago. 2023.

[5] OECD. **PISA 2012 Mathematics Framework**. Paris: OECD Publications, 2010. Disponível em: <www.oecd.org/dataoecd/8/38/46961598.pdf >. Acesso em: 03 ago. 2023.

[6] SACRISTÁN, J. G. A avaliação no ensino. In: SACRISTÁN, J. G.; PÉREZ GOMES, A. I. **Compreender e transformar o ensino**. 4.

A Matemática Acadêmica na formação do/a professor/a de Matemática da Educação Básica

Brenda Dal Puppo Monteiro*
brendamonteiro@ufpr.br [1]

Elenilton Vieira Godoy (Orientador)
elenilton@ufpr.br [1]

[1]Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Matemática Acadêmica; Formação de Professores/as; Educação Matemática.

Resumo:

O presente trabalho levanta questões relacionadas à importância das disciplinas de conteúdo matemático para a formação do/a professor/a de Matemática da Educação Básica. O principal objetivo é investigar o papel atribuído à Matemática Acadêmica pelos/as alunos/as do curso de Licenciatura em Matemática na sua formação inicial.

Inicialmente, buscamos entender melhor o conceito de "Matemática Acadêmica" e suas diferenças em relação à matemática como um todo. Para isso, foi feita uma revisão bibliográfica detalhada de sete artigos que mencionaram o tema ou variações dele e, em seguida, foi possível definir com maior precisão o que queríamos dizer usando o termo "Matemática Acadêmica". Depois de concluída a revisão bibliográfica, optamos por seguir a investigação com os/as alunos/as por meio de entrevistas que seriam feitas de forma remota por meio de um questionário do Google. Na divulgação do questionário, pedimos que o/a participante considerasse as disciplinas pertencentes à Matemática Acadêmica como sendo aquelas voltadas às áreas de Análise Numérica, Álgebra, Equações Diferenciais, Geometria, Topologia e Otimização. Além disso, esclarecemos que, para os fins deste trabalho, não deveriam ser consideradas as disciplinas do primeiro semestre do curso, por se tratarem de disciplinas voltadas à uma formação de base.

A elaboração do questionário mencionado foi baseada em alguns outros questionários prontos, a fim de identificar e caracterizar o perfil do discente que o responde. O questionário contou com cinco seções de perguntas, sendo elas: "Caracterização do/a Participante", "Possíveis dificuldades e seus motivos", "Possíveis reprovações e seus motivos", "Expectativas" e "Questões abertas". Foram

* Bolsista PET Matemática

convidados/as discentes que estão há, pelo menos, um ano matriculados no curso, ou seja, a partir do 3º período. O tempo médio de resposta às 42 perguntas do questionário foi de 13 minutos e conseguimos reunir 44 respostas, de alunos ingressantes no curso entre os anos de 2017 e 2022, totalizando 24% do total de alunos regularmente matriculados em Licenciatura em Matemática no momento da divulgação do questionário.

Por fim, foram incluídas à pesquisa de forma integral as respostas das questões objetivas e, em seguida, analisadas as respostas dadas às questões abertas. As respostas que mais nos chamaram atenção foram as dadas às questões abertas, visto que, ao analisar as respostas das três questões da última seção, foi possível encontrar diversas contradições nas respostas de um/a mesmo/a discente. Inicialmente, os/as alunos, em sua maioria, afirmavam que as disciplinas de conteúdo matemático eram, sem exceções, de extrema importância em sua formação. Em seguida, foi solicitado que os/as alunos/as citassem a disciplina do curso em que mais tiveram dificuldades e, por fim, perguntamos sobre a importância que eles/as atribuiriam à disciplina citada. O principal padrão encontrado na sequência de respostas foi de alunos que inicialmente consideravam todas as disciplinas de Matemática Acadêmica fundamentais para a sua formação, mas que mudavam sua opinião depois de citar a disciplina que mais enfrentou dificuldades. Aqui, cabe ressaltar que não foram consideradas respostas que citavam disciplinas de outros departamentos, como Física e Desenho, por exemplo. Para exemplificar a padronização de respostas que percebemos, a seguir são apresentadas as respostas de dois discentes, que tiveram suas identidades preservadas, visto que o formulário era respondido de maneira anônima.

	Na sua opinião, qual é a importância das disciplinas de Matemática Acadêmica para a sua atuação como docente da Educação Básica?	**Cite a disciplina em que você mais encontrou dificuldades ao longo do curso.**	**Qual relevância você atribuiria à disciplina citada anteriormente na sua formação? Comente.**
Aluno A	“Dentro da sala de aula o professor pode conseguir desenvolver melhor uma demonstração, a qual as matérias de matemática *academia* proporcionam geralmente, de como e porque funciona as soluções matemáticas.”	“cálculo 1”	“Para a área de licenciatura em educação básica tal matéria não traria tanta importância para a sala de aula, mas traria algumas curiosidades sobre o funcionamento de certas coisas.”
Aluno B	“Aumentar o nível de conhecimento e aprofundar temas que são vistos de maneira superficial na educação básica, possibilitando que o professor tenha facilidade ao ensinar o conteúdo. Com isso, o professor também consegue trazer mais maneiras e métodos para explicar e trabalhar esses	“Anéis e Corpos”	É uma disciplina que *trás* um conteúdo muito interessante, mas vejo somente como um ponto de curiosidade que não agrega absolutamente nada para quem quer ser professor de educação básica. É um obstáculo desnecessário para quem não tem interesse em se aprofundar em álgebra e matemática

	assuntos.”		acadêmica.

Indiscutivelmente, o currículo de Licenciatura em Matemática apresenta disciplinas extremamente abstratas, principalmente as que são voltadas à Matemática Acadêmica. Além de toda sua abstração, essas disciplinas ainda apresentam conteúdos que passam muito longe do que se propõe que um professor do Ensino Básico domine. Tudo isso contribui para que o questionamento seja ainda mais frequente: “Para que serve a Matemática Acadêmica na formação do professor de Matemática da Educação Básica?”.

Referências:

[1] VILELA, D. S. **Usos e jogos de linguagem na matemática: diálogos entre Filosofia e Educação Matemática.** São Paulo, Livraria da Física, 2013.

[2] OLIVEIRA , V. C. A. DE; LINARDI, P. R.; VIOLA DOS SANTOS, J. R. **Desconstruindo Tabus na Formação Matemática de Professores de Matemática.** Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-25, 16 ago. 2021.

[3] CYRINO, M. C. C. T. **Ações de Formação de Professores de Matemática e o Movimento de Construção de sua Identidade Profissional.** Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-26, 11 ago. 2021.

[4] MACHADO, S. R. A.; TRIVIZOLI, L. M. **As Modificações Curriculares do Curso de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, 1971-1996.** Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-21, 15 jun. 2021.

[5] CLARETO, S. M.; ROTONDO, M. A. S. **O que Torna uma Matemática Digna de Ocupar Lugar em um Currículo de Licenciatura em Matemática?**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-15, 16 ago. 2021.

[6] GERETI, L. C. V.; SAVIOLI, A. M. P. DAS D. **Legitimidades para a Disciplina de Cálculo na Licenciatura em Matemática.** Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-28, 31 jul. 2021.

[7] ELIAS, H. R.; GIRALDO, V.; VIOLA DOS SANTOS, J. R. Editorial Seção Temática: **Problematizações de Formações Matemáticas na Licenciatura em Matemática** . Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-4, 16 ago. 2021.

[8] SILVA, J. P. DA; MOREIRA, P. C. **Formação Matemática na Licenciatura e Demandas da Prática Docente Escolar: o Caso da Álgebra.** Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-32, 29 jul. 2021.

Saberes a ensinar e para ensinar Educação Financeira em livros didáticos de matemática para o Ensino Fundamental (séries finais) e na Base Nacional Comum

Eduarda Calegari Dos Santos
eduarda.santos.56@estudante.unespar.edu.br [1]

Prof. Liceia Alves Pires (Orientadora)
liceia.pires@unespar.edu.br [2]

Alexsandra Camara (Coorientadora)
alexsandra.camara@unespar.edu.br [3]

[1,2,3] Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) – Campus Paranaguá

Palavras-chave: Saberes a e para ensinar, Educação Financeira, Livros didáticos de Matemática.

Resumo:

O objetivo central deste estudo consiste em analisar os saberes a ensinar e para ensinar Educação Financeira presentes em livros didáticos de Matemática aprovados no último PNLD[2] que são ou que foram utilizados nas séries finais do Ensino Fundamental de escolas públicas do Litoral do Estado do Paraná e também na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). No decorrer do trabalho, tem-se como objetivos específicos: realizar estudos sobre o que são saberes a e para ensinar; identificar livros de Matemática aprovados pelo último Plano Nacional do Livro Didático (PNDL) e que são utilizados no Ensino Fundamental em escolas públicas do estado do Paraná; investigar quais saberes a e para ensinar de educação financeira estão presentes nesses livros e, por fim, analisar, nos livros didáticos e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os saberes a ensinar e para ensinar Educação Financeira. Para embasar essa investigação, são utilizados estudos de Chervel (1990), Bittencourt (2003) e Pinto (2014) que fornecem elementos para a exploração da História das Disciplinas Escolares. Adicionalmente, as ideias de Choppin (2004) sobre livros didáticos são empregadas para compreender a influência desses materiais no processo de ensino e aprendizagem.

A compreensão dos saberes docentes é também uma peça-chave neste estudo, desta forma, as contribuições de Hofstetter e Valente (2017) fornecem uma

---

[1] Bolsista do Projeto de Iniciação Científica (PIBIC), da UNESPAR (2023/2024), com recursos pela Fundação Araucária do Paraná.
[2] PNLD é o Programa Nacional do Livro Didático, é executado em ciclos trienais alternados e visa prover as escolas públicas de ensino fundamental e médio com livros didáticos, dicionários e obras complementares de qualidade.

estrutura para avaliar como os professores abordam a Educação Financeira em sala de aula, considerando sua formação e experiência profissional.

A metodologia adotada para a pesquisa compreende tanto uma abordagem exploratória quanto explicativa (Lakatos, 2003). A natureza exploratória permite uma análise aprofundada dos conteúdos presentes nos livros didáticos, identificando tendências e lacunas. A abordagem explicativa, por sua vez, visa compreender o processo de implementação da Educação Financeira no contexto da Educação Básica. Por fim, a escolha desta temática se deve à relativa novidade do tema nas escolas e à sua fase de consolidação no currículo educacional. Assim, esta proposta visa contribuir para a compreensão da incorporação da Educação Financeira no Ensino Fundamental, analisando a concordância entre os conteúdos presentes nos livros didáticos e as diretrizes da BNCC. Ao considerar teorias de renomados autores e adotar uma metodologia abrangente, o estudo almeja fornecer uma visão sobre a evolução e implementação desse tema na educação matemática.

Referências:

[1] [BITTENCOURT, C. M. F. **Disciplinas escolares**: história e pesquisa. In: História das disciplinas escolares no Brasil: contribuição para o debate. Bragança Paulista: Edusf, 2003.

[2] CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria e Educação,** n. 2, 1990.

[3] CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa,** São Paulo, v. 30, n. 3, 2004.

[4] HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (Orgs.). Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores.

[5] LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 5ª ed. São Paulo: Atlas 2003.

[6] PINTO, N. B. História das disciplinas escolares: reflexão sobre aspectosteóricos-metodológicos de uma pratica historiográfica. **Revista Diálogo Educacional,** Curitiba, 2014.

Análise de uma tarefa não-rotineira de Matemática.

Fabio de Oliveira Lima[1+]
fabiolima.mat@gmail.com [1]

Vanessa Barros Soares[1+]
soarexxx.oficial.vanessa@gmail.com [1]

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)
gabrielss@ufpr.br [1]

[1] Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Educação Matemática Realística, Avaliação da Aprendizagem Escolar, Tarefas Não-Rotineiras.

Resumo:

Para avaliar o conhecimento do aluno sobre determinado conteúdo matemático, o professor pode recorrer a um vasto leque de instrumentos de avaliação. Esses, por sua vez, podem focar no rendimento do aluno — atribuindo sua nota como produto final de seu conhecimento — ou na aprendizagem — onde a visão já é voltada para o processo de construção do conhecimento (BURIASCO, 2000). Ademais, sob a ótica da aprendizagem dos estudantes, Freudenthal (1973), promotor da Educação Matemática Realística (RME), defende que os alunos devem ser participantes ativos de seus processos de aprendizagem, desenvolvendo eles mesmos estratégias para a resolução de problemas matemáticos, e não se servindo de uma resolução **passo-a-passo** já construída.

Perante essas perspectivas, este estudo objetiva investigar as estratégias e procedimentos utilizados por estudantes da região metropolitana de Londrina (três turmas de 8º ano do Ensino Fundamental e três do 9º ano) na resolução de uma tarefa não-rotineira de matemática sobre divisão de números inteiros. Uma tarefa não-rotineira, segundo Buriasco (1999) é aquela que muito pouco ou quase nunca aparece na sala de aula ou no livro didático.

Busca-se avaliar a aprendizagem do aluno referente a dois pontos: a aplicação do algoritmo; e como lida com os resultados que essa operação gera, levando em conta o contexto na qual foi aplicada.

Para a escolha da tarefa, os autores — graduandos em Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR) e participantes do programa de voluntariado de iniciação científica em Educação Matemática — se reuniram semanalmente durante o segundo trimestre de 2023 no departamento de

[1+] Voluntário

Matemática do Centro Politécnico da UFPR, em reuniões ministradas pelo orientador Dr. Gabriel dos Santos e Silva, professor adjunto do Departamento de Matemática.

Dentre uma lista de tarefas sugeridas, os autores utilizaram como parâmetro de escolha os trabalhos de Van den Heuvel-Panhuizen (1996), a qual considera bons problemas de avaliação na perspectiva da RME aqueles que são: informativos, significativos, transparentes, flexíveis e acessíveis; isto é, a tarefa proporciona o máximo de informação possível a respeito do conhecimento do aluno, ela é convidativa e desafiadora, além de permitir sua resolução de várias maneiras, deixando assim o aluno explicitar seu raciocínio utilizado através de suas próprias palavras, e, por fim, apresenta um enunciado claro quanto ao que pede do estudante. Sob essa base, a tarefa escolhida foi a seguinte:

> Resolva:
>
> a) 300 soldados devem ser transportados de jipe para o local de treinamento. Cada jipe pode levar 8 soldados. Quantos jipes serão necessários?
>
> b) No local de treinamento, os soldados são levados para o hangar. Neste hangar havia um grande número de caixotes que precisavam ser transportados para outro hangar. Precisa-se de oito homens para carregar cada um deles. Quantos caixotes podem ser transportados por 300 soldados?
>
> c) Voltando para as barracas, todos os soldados estão com muita fome. O cozinheiro preparou 300 litros de cozido. Para isso, ele usou de 8 vasilhas grandes, completamente cheias e do mesmo tamanho. Quantos litros de cozido contém cada vasilha?
>
> d) No início da noite os soldados tinham que participar de uma parada militar. Eles tinham que formar filas de 8. Quantos soldados foram deixados de fora?

De modo a classificar o enunciado da tarefa, será utilizado como referência a tese de Ferreira (2013), na qual são analisados os trabalhos de Diaz e Poblete (2005), De Lange (1987), Butts (1997), e as classificações do PISA baseado na OECD (2010).

Segundo a classificação de Diaz e Poblete (2005), o contexto da tarefa é **realista**, isto é, trata-se de uma simulação que realmente pode ocorrer.

Já quanto De Lange (1987), o contexto é de **primeira ordem**: o enunciado é importante para o desenvolvimento da solução, visto que é necessário levar em conta a situação inserida.

Conforme Butts (1997), a tarefa é de **problema de aplicação**, visto que o aluno precisa matematizar a situação através de símbolos para só então aplicar um algoritmo que resolva a tarefa, no caso a divisão de números inteiros.

Por fim, o PISA, baseado nos documentos da OECD (2010), enquadra a tarefa como uma **situação profissional**, pois trata sobre tomadas de decisões relacionadas ao trabalho dos soldados.

Após a aplicação da tarefa, serão analisados os diversos métodos de resolução utilizados pelos alunos. A resolução mais esperada pelos autores é a seguinte:

a) Aplicar o maior inteiro na divisão 300/8, resultando em 38 jipes.
b) Aplicar o menor inteiro na divisão 300/8, resultando em 37 caixotes.
c) Aplicar a divisão 300/8 considerando casas decimais não nulas, resultando em 37,5 litros.
d) Calcular o resto da divisão 300/8, resultando em 4 soldados.

Logo, ao final do trabalho, os autores esperam visualizar como está o processo de aprendizagem dos alunos em relação a matematização de contextos de divisão, através das resoluções por eles propostas, assim evidenciando o que eles sabem e como aplicam suas estratégias.

Referências:

BURIASCO, R. L. C. de. Análise da Produção Escrita: a busca do conhecimento escondido. In: XII ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, 2004, Curitiba. **Anais**... Curitiba: Champagnat, 2004. v.3, p. 243-251.

BURIASCO, R. L. C. de. **Avaliação em matemática : um estudo das respostas de alunos e professores**. 1999. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual Paulista, Campus de Marília, Marília, 1999.

BUTTS, T. **Formulando problemas adequadamente.** In: KRULIK, S.; REYS, R. E. A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo: Atual, 1997. p. 32-48.

DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning.** Utrecht: OW &OC, 1987.

DÍAZ, V.; POBLETE, A. Competencias en Matemáticas y Tipos de problemas. In: CIBEM – Proccedings V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, n. 5., 2005, Portugal. **Anais**... Portugal: Publicaciones con Comité Editorial, 2005.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. de. Enunciados de Tarefas de Matemática Baseados na Perspectiva da Educação Matemática Realística. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 29, n. 52, p. 452–472, ago. 2015.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**, Riedel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands, 1973.

OECD. **PISA 2012. Mathematics Framework**. Paris: OECD Publications, 2010.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. **Assessment and Realistic Mathematics Education.** Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.

Análise de uma tarefa não-rotineira de matemática

Gabrielle Mamede Cordeiro[1]
gabriellemamede@ufpr.br

Luiza Tomielo Paraizo[1]
luiza.paraizo@ufpr.br

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)[1]
gabrielss@ufpr.br

[1] Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática, Tarefa Não-Rotineira de Matemática, Análise de Enunciados.

Resumo:

Este trabalho foi desenvolvido como parte do Programa de Voluntariado Acadêmico (PVA) em Educação Matemática e apresenta a análise de um enunciado de uma tarefa não-rotineira de matemática, a qual será aplicada no Ensino Fundamental - Anos Finais. A tarefa foi escolhida por abordar vários conceitos matemáticos, para a obtenção de mais de uma forma de resolução, e a partir disso, vamos analisá-la sob a perspectiva da Educação Matemática Realística (RME), com base nas ideias apresentadas por Ferreira (2013).

Desse modo, é importante ressaltar que a abordagem Educação Matemática Realística, surgiu na Holanda no final da década de 1960, e defende a ideia da matemática como uma atividade humana, de busca e resolução de tarefas, e, de maneira mais ampla, como uma atividade de organizar e lidar matematicamente com a **realidade**, abordagem a qual foi inspirada por Hans Freudenthal (1905-1990), que a nomeou de “matematização”. Além disso, para ele, os estudantes devem ter a oportunidade de “fazer” matemática, a partir da **reinvenção guiada** (FREUDENTHAL, 1994,p.48), a qual, proposta por ele, ao invés de apresentar a matemática pronta, com suas ferramentas e fórmulas, dá-se a possibilidade de recriá-la, num processo de matematização.

Sob esse aspecto, a análise de uma tarefa não-rotineira nos permite identificar boas tarefas, as quais possibilitem ao aluno pensar em sua resolução a partir do que já se tem conhecimento, mas também explorar a criatividade, sem fórmulas e conceitos já vistos. Dessa forma, tarefas não-rotineiras estimulam a criticidade, uma vez que os alunos precisam avaliar diferentes abordagens para resolver a tarefa. Além disso, ao não terem uma solução pré-determinada, os alunos são incentivados a buscar soluções criativas e únicas.

Diante desse contexto, a tarefa a ser analisada é a seguinte:

Para colorir um mapa, você pode usar uma mesma cor mais de uma vez, desde que dois países vizinhos sejam pintados com cores diferentes. De quantas maneiras diferentes você poderá colorir o mapa abaixo, usando apenas quatro cores?

De acordo com Díaz e Poblete (2005), um problema de contexto geralmente requer matematização, que pode envolver exploração por parte dos estudantes na resolução. Caso a matematização ocorra de maneira natural e sem grande esforço, o problema pode se transformar em um simples exercício de matematização. Para além da simulação em sala de aula, contextualizar o conhecimento matemático implica compreender como os alunos representam esse conhecimento e o significado de suas concepções.

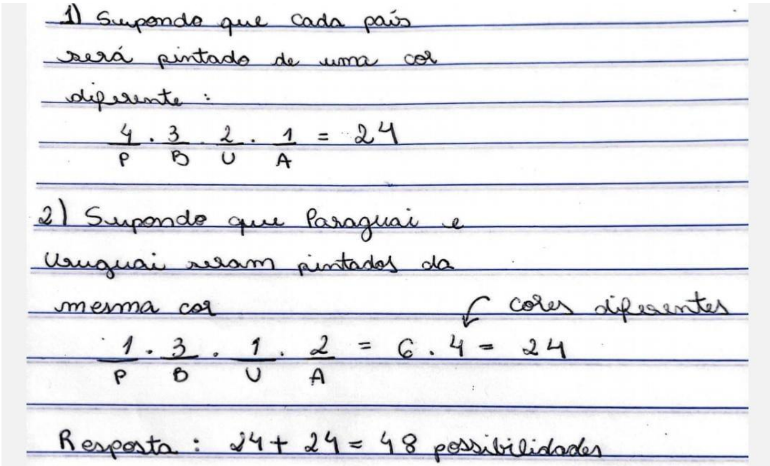
Díaz e Poblete (2005) propõem uma classificação de tarefas ou problemas com base em seu contexto. Dentro dessa classificação, a tarefa escolhida pode ser categorizada como um "Problema de Contexto Realista", pois embora não ocorra efetivamente na realidade, é uma simulação de uma situação real, em que a coloração do mapa se relaciona com princípios que podem ser aplicados na realidade, como planejamento urbano, gráficos ou representações geográficas.

Consonante a isso, no que se refere às diversas formas de matematização, De Lange (1987) propõe uma classificação das várias utilidades dos contextos em diferentes ordens. A tarefa pode ser classificada como "Contexto de Segunda Ordem", pois os estudantes são confrontados com uma situação realística (coloração do mapa) e são incentivados a utilizar ferramentas matemáticas para organizar e resolver a tarefa. Essa estrutura particular envolve a matematização de cenários reais, o que a distingue como contexto de segunda ordem pela classificação de De Lange.

Butts (1997) nos fornece a classificação de diferentes tipos de tarefas, que podem ajudar a entender a natureza das tarefas matemáticas. Podemos classificar a tarefa do mapa, pela taxonomia de Butts como "Problema de Aplicação", porque a tarefa envolve a aplicação direta de um procedimento matemático específico para resolver um problema prático.

Outrossim, o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) apresenta em seus documentos (OECD, 2010), classificações que auxiliam a avaliação das tarefas em diferentes situações (contextos). Para o PISA, a situação é a parte do mundo do estudante em que as tarefas se situam e está localizada a uma certa distância do estudante. A tarefa que envolve a coloração do mapa é classificada como “Ocupacional ou Profissional”, pois reflete a aplicação de habilidades matemáticas em um contexto de trabalho ou projeto profissional, uma vez que está alinhada com as práticas de profissionais como cartógrafos, geógrafos, urbanistas e designers de mapas que trabalham com a criação e interpretação de mapas.

Possíveis formas de resolver a tarefa estão apresentadas nas imagens abaixo:



Em síntese, este trabalho investigativo propõe analisar tarefas matemáticas não-rotineiras, alinhando-se ao referencial teórico da Educação Matemática Realística. Através da análise da tarefa, busca-se explorar como os elementos contextuais influenciam as estratégias de resolução e a compreensão matemática dos alunos.

Referências:

BUTTS, T. **Formulando problemas adequadamente**. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo: Atual, 1997. p. 32-48.

DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW &OC, 1987.

DÍAZ, V.; POBLETE, A. Competencias en Matemáticas y Tipos de problemas. In: CIBEM – Proccedings V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, n. 5, 2005, Portugal. **Anais**... Portugal: Publicaciones con Comité Editorial, 2005.

FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de Tarefas de Matemática: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística**. 2013. 121 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Mathematics Education Library, Países Baixos, v. 9, n. 1, p. 1-202, 1994.

OECD. **PISA 2012. Mathematics Framework**. Paris: OECD Publications, 2010.

O ensino de Sistemas de Equações Lineares: um estudo por meio da Modelagem Matemática

Helen Cristina Ferreira *
helenferreira@alunos.utfpr.edu.br [1]

Ingrid Albuquerque Alves +
ingrid.2018@alunos.utfpr.edu.br [2]

Luciana Schreiner de Oliveira ♣
lucianaoliveira@utfpr.edu.br [3]

[1,2,3] Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Palavras-chave: Educação Matemática, Modelagem Matemática, Sistemas de Equações Lineares.

Resumo:

O trabalho relata uma experiência do Programa Residência Pedagógica (PRP) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) - Câmpus Curitiba, conduzida na Escola Estadual Aline Picheth, sob supervisão da professora preceptora, com estudantes do 8° ano do Ensino Fundamental. A situação foi inspirada na proposta apresentada por Silva (2017) em sua dissertação de mestrado e abrange temas como expressões e equações do 1° grau que recaem em sistemas de equações lineares, esta envolve modelar e resolver problemas que podem ser encontrados no cotidiano dos estudantes, estimulando a aplicação prática de conceitos matemáticos. O estudo buscou analisar os resultados da aplicação da atividade e seu impacto na formação docente dos envolvidos, considerando como metodologia a Modelagem Matemática.

A Modelagem Matemática, numa visão geral, pode ser definida como um processo de construção de modelos matemáticos que buscam representar fenômenos reais, com o objetivo de compreendê-los e solucionar problemas. Esta metodologia é essencial para o desenvolvimento de soluções para problemas e para a compreensão de fenômenos naturais e sociais. No contexto educacional,

---

* Bolsista do Programa Residência Pedagógica (PRP) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
+ Bolsista do Programa Residência Pedagógica (PRP) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
♣ Coordenador de Área - Programa Residência Pedagógica (PRP) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Biembengut (2013) defende que é uma metodologia de ensino capaz de desenvolver habilidades e competências nos estudantes, tais como a capacidade de análise e resolução de problemas, a criatividade, a comunicação e a cooperação. No que se refere ao ensino de sistemas de equações lineares, Lima (2007) expõe que o tema é um tópico de grande interesse prático, visto que o estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados. O autor argumenta que o tópico de estudo pode servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais, e abre possibilidades para resolver problemas cotidianos e ver a aplicação de conceitos matemáticos no dia a dia.

Foi utilizada uma situação-problema de uma lanchonete móvel, que contém algumas promoções de combos de lanches, e a proposta era encontrar o valor independente de cada elemento do combo usando conceitos matemáticos e técnicas para desenvolver modelos que expressem o problema de forma adequada.

Para fins de organizar a análise, a situação foi dividida em alguns momentos, que chamaremos de momentos 1a, 1b, 1c e momento 2. No momento 1a, os estudantes atribuíram valores a uma fatia de pizza e um copo de suco para satisfazer uma promoção com o valor de R$9,00, em seguida, solicitou-se que estes tentassem expressar a situação através de uma equação, utilizando as letras X para a fatia de pizza e Y para o suco. No momento 1b acrescentou-se uma nova restrição: com o dinheiro da fatia de pizza daria para comprar outro suco e ainda sobraria R$3,00. Novamente, os estudantes atribuíram valores e expressaram a situação através de uma equação, utilizando as mesmas incógnitas. No momento 1c, os estudantes foram questionados se conseguiam encontrar algum valor que satisfizesse as duas equações simultaneamente. Deveriam analisá-las e assim teriam condições de resolver o problema, utilizando sistemas de equações. Por fim, o momento 2 referia-se às situações: Um hambúrguer e três refrigerantes custando R$33,00 e três hambúrgueres e um refrigerante custando R$43,00, acompanhadas apenas do questionamento: “O que podemos concluir sobre o preço do hambúrguer e do refrigerante?”. A intenção era deixar livre para que os estudantes escolhessem a estratégia, com base nos momentos anteriores, que iriam utilizar para encontrar os valores do hambúrguer e do refrigerante.

As turmas foram divididas em duplas e trios. As equipes não apresentaram grandes dificuldades em compreender os momentos 1a, 1b e 1c. Alguns estudantes chegaram na resposta no momento 1b, pois perceberam que havia apenas um valor capaz de satisfazer as duas condições simultaneamente, outros estudantes não chegaram direto a esta conclusão, mas perceberam que havia uma incoerência em atribuir valores para a segunda condição sem que estes valores satisfizessem a primeira. Alguns, apesar de atribuírem os mesmos valores na primeira e na segunda condição, não conseguiram compreender que estes eram a solução do problema.

Uma outra limitação que fomos capazes de pontuar foi com relação a interpretação da segunda condição, a dificuldade não era encontrar valores que a satisfizesse, mas sim compreender o que matematicamente significava que “o dinheiro da fatia de pizza daria para comprar outro suco e ainda sobraria R$3,00.

Referente ao momento 2, grande parte dos estudantes não conseguiu associar o problema com um sistema de equações lineares, o método que os estudantes utilizaram nesta resolução foi estimar valores e por meio de tentativa e erro encontraram o valor que encaixasse na situação.

Acredita-se que a atividade norteou os pontos que podem ser melhorados, diante disso auxilia na criação de um planejamento didático para retomar conceitos que não estão nítidos para os estudantes. Esse conhecimento e experiência adquiridos serão valiosos na atuação como educadoras, possibilitando uma abordagem mais dinâmica e contextualizada.

Referências:

[1] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino.** 5. ed. São Paulo: Contexto, 2013.

[2] LIMA, E. L. et al. **Matemática e ensino.** Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

[3] SILVA, M. R. P. **Uma abordagem de sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas.** Dissertação Mestrado - Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2017.

Modelagem Matemática: Análise do custo benefício de produtos em embalagens econômicas

Ingrid Tavares de Miranda*
ingridTavares01@hotmail.com [1]

Patrícia Margarete de Paula Oliveira+
pamargarete@gmail.com [2]

Rebeca Cristine Tavares da Costa♣
RebecaTavares82@gmail.com [3]

Cristianne do Rocio de Mello Maron (Orientadora)
Cristienne.maron@unespar.edu.br [4]

[1,2,3] Licenciatura em Matemática – UNESPAR
[4] Colegiado de Matemática – UNESPAR

Palavras-chave: Educação Matemática, Modelagem Matemática, Matemática Financeira.

Resumo:

A intenção do trabalho é mostrar para os estudantes qual é a realidade das embalagens promocionais de alguns produtos, fazendo com que esse aluno entenda a necessidade de adquiri-los. Na proposta acima, o aluno entenderá se é melhor comprar da forma promocional ou unitária, nesse trabalho usaremos Burak (1992) como fundamentação.

Por meio da comparação entre as embalagens promocionais e as embalagens dos produtos unitários, o aluno terá uma visão de quantidade, e diferença de valor, noções ambientais. Nessa proposta o aluno vai se tornando um sujeito crítico, porque ele passa a observar e entender as diferenças e saber se é vantagem ou não adquirir esses produtos.
Os estudantes ainda sentem muita dificuldade na disciplina de matemática, seja por falta de motivação, falta de estudo ou outros problemas de aprendizagem. Uma forma de desmistificar isso é propor uma aula em que os alunos percebam que a matemática não é somente cálculos e fórmulas, mas também é uma disciplina que pode solucionar problemas do próprio cotidiano.

Dentro da concepção de Burak (1992) a Modelagem Matemática "constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões" (BURAK, 1992, p.62), e considera

---

* Voluntária
+ Voluntária
♣ Voluntária

que

> na perspectiva da Modelagem Matemática o processo de ensino e aprendizagem é alicerçado "nas teorias da cognição, constituída principalmente por uma visão construtivista, sócio--interacionista e de aprendizagem significativa que consideram o estudante como um agente da construção do próprio conhecimento" (BURAK, 2010, p.18).

Começamos a aula apresentando a proposta da aula para os alunos e perguntando se eles iam ao supermercado e prestavam atenção nas embalagens econômicas, fizemos reflexões de como poderíamos usar a matemática dentro do supermercado, para ver se eles se sentiam à vontade em participar da nossa aula.

Em seguida mostramos exemplos de produtos em embalagens econômicas e dos mesmos em embalagem unitária, para que eles pudessem perceber a matemática ali presente. Sozinhos conseguiram comparar o pote de margarina de 500g com o de 1 kg, entenderam que o de 1 kg é o dobro da embalagem de 500g, e que ali na embalagem estavam presentes muitos conceitos da matemática, como medidas de massa, a geometria no formato da embalagem, matemática ambiental, entre outros.

Começamos a conversar sobre os valores dos produtos em embalagem unitária e na embalagem econômica, sobre qual seria melhor comprar e quais as vantagens que eles teriam em comprar os produtos. A maioria conseguiu compreender qual era nossa intenção ali, dialogaram entre si, e começaram a falar o que pensavam sobre cada produto.

No decorrer da aula os estudantes nos deram exemplos de produtos com embalagem econômica e embalagem unitária, a partir dos exemplos dados, nós escolhemos dois produtos para fazer os cálculos e demonstrar na prática como nós economizamos se escolhermos determinados produtos.

Através do tema proposto “Análise de embalagens econômicas e unitárias”, os alunos puderam perceber as vantagens presentes nas embalagens econômicas, após pesquisas realizadas, bem como discussões em sala de aula, possibilitando o desenvolvimento de vários tipos de operações matemáticas, como a soma, subtração, e a multiplicação.

Pode-se concluir, com essa aplicação de modelagem matemática, que os alunos identificaram com sucesso a matemática que está oculta no dia a dia, contribuindo com a sua formação como cidadãos conscientes, críticos e comprometidos com a sociedade onde vivem.

Referências:

[1] BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a sala de aula.

[2] BURAK, D; MARTINS, M. A. Modelagem Matemática nos anos iniciais da Educação Básica: uma discussão necessária. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, v. 8, n. 1, 2015.

[3] UNIOESTE PPGECEM. Modelagem na Educação Matemática: elementos diferenciadores e implicações para sua prática. Youtube.

Um estudo sobre fracasso escolar no Ensino Superior de Matemática

Isac Messias Michelon
Licenciatura em Matemática - UFPR
isacmicic@gmail.com

Prof. Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
gabriel.santos22@gmail.com

Palavras-chave: Educação Matemática, fracasso escolar, história oral, ensino superior de matemática.

Resumo:

Fracasso escolar pode ser descrito como a junção de vários fenômenos educacionais, como por exemplo: dificuldades na leitura, escrita e matemática, baixo rendimento, reprovação, repetência, evasão, etc. Seu estudo gira em torno de tentar entender a causa dessas situações, trazendo à tona problemas importantes na discussão de educação (PATTO, 1999; PINHEIRO et al, 2020).

Historicamente, os estudos de fracasso escolar têm como foco o indivíduo e sua realidade, seja a cor da sua pele, seja o local onde ele mora, seja sua família ou sua classe econômica. Esses e outros discursos colocam a responsabilidade da qualidade acadêmica do estudante nele mesmo, e acabam, então, deixando de lado indicativos sócio-culturais externos ao indivíduo. Ou seja, olham para suas características como determinantes do seu resultado acadêmico.

Pensando nisso, este trabalho tem como objetivo protagonizar a história do estudante, especialmente do ensino superior de matemática, tentando resgatar esse lado negligenciado em muitas pesquisas na área. Isto será feito a partir da metodologia da história oral, que

> pensada como metodologia de pesquisa, a História Oral exige uma pré-seleção dos depoentes – ou um critério significativo para selecioná-los –, entrevistas gravadas – gravações essas que se constituirão no documento-base da pesquisa –, instâncias de transformação do documento oral em texto escrito – conjunto de processos distintamente denominado e conceituado nas investigações sob análise (fala-se em transcrição, de-gravação, transcriação e textualização) –, um momento que poderia ser chamado “legitimação” – quando o documento em sua versão escrita retorna aos depoentes para conferência e posterior cessão de direitos de uso pelo pesquisador e, finalmente, um momento de “análise” – certamente o de mais difícil apreensão (GARNICA, 2003, p.10).

Esta é uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, em que se reconhece as seguintes características:

(a) a transitoriedade de seus resultados;

(b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar;

(c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar;

(d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-la podem ser (re)configuradas; e

(e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARNICA, 2019, p. 74).

O objetivo da entrevista é contar uma história, mostrar as experiências de vida nesse viés qualitativo. Com ela eu não espero uma solução ou uma resposta, mas espero falar sobre um lado geralmente esquecido da educação, procurando sensibilizar, de alguma forma, formadores de professores e futuros educadores matemáticos.

Referências:

[1] GARNICA, Antonio. História Oral e Educação Matemática: de um inventário a uma regulação, **ZETETIKÉ**, v.11, n. 19, 2003.

[2] GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019. 128p.

[3] PATTO, Maria. **A Produção do Fracasso Escolar:** Histórias de Submissão e Rebeldia. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1990.

[4] PINHEIRO, Silvia Nara Siqueira; COUTO, Maria Laura de Oliveira; CARVALHO, Hudson Cristiano Wander de; PINHEIRO, Henrique Siqueira. Fracasso Escolar: naturalização ou construção histórico-cultural?. **Fractal: Revista de Psicologia**, v. 32, n. 1, p. 82-90, 2020.

Aplicando probabilidade ao futebol: uma atividade de modelagem matemática no ensino fundamental

Jhonatan Matheus Ribeiro de Camargo[1]
jhonatancamargo@alunos.utfpr.edu.br [1]

Luciana Schreiner de Oliveira (Orientadora)[2]
lucianaoliveira@utfpr.edu.br [2]

[1,2] Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Palavras-chave: Futebol, Modelagem, Probabilidade.

Resumo:

Este relato de experiência se baseia em uma atividade realizada no programa de Programa de Residência Pedagógica da Universidade Tecnológica do Paraná - Campus Curitiba. Durante o programa, foram realizadas diversas atividades com alunos do Colégio Estadual Inez Vicente Borocz sendo, em sua grande maioria, atividades com alunos do 8° e 9° ano do Ensino Fundamental - Anos Finais.

Durante as regências no colégio, reparei algo nos alunos: eles sempre estavam falando sobre futebol. Era raro algum dia que eu estava no colégio e pelo menos um aluno de uma turma me perguntava “professor, qual é o seu time?” ou “Viu os jogos do final de semana?”. Fora do ambiente escolar, existe no imaginário do brasileiro de que somos “o país do futebol”. Considerando isso, pensei em uma aula que visava juntar a matemática e o futebol com os alunos do 8° ano do Ensino Fundamental.

A partir disso, utilizei a metodologia de modelagem matemática, mais especificamente o que a autora Maria Salett Biembengut define como modelação matemática em seu livro Modelagem Matemática no ensino.

Ela define essa metodologia da seguinte forma “A modelação matemática norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e orientar o aluno na realização do seu próprio modelo-modelagem” (BIEMBENGUT, 2013, p.18)

Para trabalhar em conjunto com a metodologia de modelagem, foi desenvolvido um modelo que pode ser utilizado para ensino-aprendizagem do conteúdo de probabilidade.

[1] Bolsista do Programa Residência Pedagógica
[2] Professora do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

É importante ressaltar que o conteúdo de probabilidade está presente na Base Nacional Comum Curricular, BNCC, como parte do conteúdo programático para o 8° ano.

Sobre a importância de estudar probabilidade, podemos citar Lopes (2008, s/p): “[...] ao considerarmos o mundo em rápida mudança como o que estamos vivendo, é imprescindível o conhecimento da probabilidade de ocorrência de acontecimentos para agilizarmos a tomada de decisão e fazermos previsões”.

Por conta do curto espaço de tempo, o modelo foi desenvolvido por mim. Os alunos ficaram responsáveis pela busca de dados e preenchimento do modelo. A atividade faz uma comparação entre os chutes dados por atletas de futebol e qual a probabilidade de erro ou acerto em cada finalização. O modelo pode ser observado abaixo.

Figura 1 - Modelo de tabela proposto para os alunos

Jogador/time:

	Chutes bloqueados	Chutes para fora	Chutes no gol	Chutes totais	Gols marcados
Partida 1:					
Partida 2:					
Partida 3:					
Partida 4:					
Partida 5:					
Total:					

Fonte: Autoria própria

Com esse modelo, o objetivo era que os alunos preenchessem a tabela através de dados recolhidos no site SOFASCORE[3] . Os alunos poderiam escolher qualquer jogador presente na base de dados, podendo escolher o jogador que tivessem maior identificação. Essa liberdade de escolhas é importante para a modelagem presente na atividade, proporcionando resultados diferentes para cada um dos estudantes. O objetivo com o preenchimento da tabela era também que os alunos construíssem e entendessem o espaço amostral que seria trabalhado. Após o preenchimento da tabela, foram propostas as seguintes questões para os alunos:

1. Analisando a tabela, qual a probabilidade de um chute aleatório dado pelo jogador ter sido bloqueado?
2. E qual é a probabilidade de um chute aleatório dado pelo jogador ter sido para fora?

[3] O SOFASCORE é um dos principais sites com dados e estatísticas esportivas. Acesso disponível em https://www.sofascore.com

3. E qual é a probabilidade de um chute aleatório do jogador ter sido para fora ou no gol?
4. Para que um gol aconteça, o chute precisa ser no gol. Qual é a probabilidade de um chute aleatório ter sido no gol e o gol ter sido marcado?

A aplicação total da atividade durou o tempo de 3 h/a, sendo que os estudantes foram separados em grupos. Os alunos demonstraram um interesse maior pela atividade do que normalmente apresentam para outras atividades da disciplina, sendo que esse era um dos objetivos ao trabalhar com algo do dia-a-dia deles.

Em relação às questões, a grande maioria dos alunos conseguiu resolver a primeira e segunda questões de forma tranquila. A terceira questão cerca de metade dos grupos conseguiram resolver. A quarta questão não foi resolvida por nenhum grupo. Isso se deu por conta do conteúdo apresentado passar um pouco do programado. Pode-se dizer que foi “um passo maior do que as pernas” por conta de se adicionar conteúdo além do que foi trabalhado na grade dos alunos. Outras questões poderiam ter sido abordadas com eles. Entretanto, os estudantes conseguiram atingir o objetivo da atividade com as outras questões.

Referências:

[1] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino.** São Paulo, SP: Contexto, 2013. p. 9-29.

[2] BRASIL, Ministério da Educação e Cultura (MEC), **Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base.** Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/.

[3] LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Cadernos CEDES**, v. 28, n. 74, p. 57–73, abr. 2008.

Saberes A E para ensinar presentes nos materiais utilizados pelos professores da Rede Pública Estadual, no Litoral do Paraná, no Ensino Médio, na disciplina de Educação Financeira, entre os anos de 2021 a 2023

José de Paula Pontes Neto[1]
josepaulapontes@gmail.com [1]

Liceia Alves Pires (Orientadora)
liceia.pires@unespar.edu.br [2]

Alexsandra Camara (Coorientadora)
alexsandra.camara@unespar.edu.br [3]

[1,2,3] Universidade Estadual do Paraná (Unespar) – Campus Paranaguá

Palavras-chave: Educação Financeira, Educação Básica, Materiais Escolares.

Resumo:

A crescente complexidade das finanças pessoais, os problemas com endividamento da população brasileira e a ampla gama de opções de produtos financeiros, colocaram em evidência a necessidade de preparar os indivíduos, desde a tenra idade, para tomar decisões conscientes sobre seu dinheiro, e isso vem sendo feito, também, por meio da educação financeira[2].

O tema é recente e passa a se difundir a partir de 2010, conforme indicado por Giordano, Assis e Coutinho (2019, p.3), pois “passa a se popularizar substancialmente a partir da elaboração da Estratégia Nacional de Educação Financeira em 2010”.

No âmbito escolar, a Educação Financeira é oficializada a partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que a preconiza como um tema a ser trabalhado de forma interdisciplinar. Esta disciplina, por sua vez, é algo mais recente em alguns estados, como no caso do Paraná, que a implantou em 2021, inicialmente no Ensino Médio.

Com base nesse contexto, foi elaborado o presente projeto de Iniciação Científica, à luz da História das Disciplinas Escolares de Chervel (1990), Bitencourt (2003), Pinto (2014) e dos saberes a e para ensinar em Valente (2020) e Hofstetter e Valente (2017).

O objetivo central da pesquisa é compreender quais são os saberes a e para ensinar educação financeira que estiveram e estão presentes em materiais educacionais, utilizados pelos professores da rede estadual de ensino, tais como livros, apostilas, apresentações de Power Point, dentre outros, na disciplina de

[1] Bolsista do projeto de Iniciação Científica (PIBIC 2023/2024), pela Universidade Estadual do Paraná, Campus Paranaguá.
[2] Será usado o termo em letra minúscula quando se tratar de um conhecimento e com letra maiúscula quando se tratar da disciplina escolar.

Educação Financeira, no Ensino Médio, entre os anos de 2021 a 2023, em escolas do litoral do Paraná.

Os objetivos específicos buscam realizar um estudo sobre os conceitos de saber a e para ensinar matemática, bem como explorar a história das disciplinas escolares e livros didáticos. A metodologia da pesquisa será a exploratória e explicativa, proposta por Lakatos (2003).

Vale ressaltar que a Educação Financeira foi introduzida no estado do Paraná, como disciplina, no Ensino Médio, a partir de 2021, estabelecida com uma aula semanal em cada uma das séries do Ensino Médio, transformando-se em um novo componente curricular. Pesquisas preliminares apontam que em 2022, em algumas escolas de tempo integral, a disciplina também foi implantada no Ensino Fundamental, séries finais.

Em síntese, este projeto de pesquisa, por meio de perspectiva histórica e da análise dos saberes a e para ensinar, procura trazer resultados que auxiliem na compreensão do contexto da disciplina de Educação Financeira na Educação Básica.

Referências:

[1] BITTENCOURT, C. M. F. **Disciplinas escolares**: história e pesquisa. In: História das disciplinas escolares no Brasil: contribuição para o debate. Bragança Paulista: Edusf, 2003.

[2] CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, n. 2, p. 177-229. 1990.

[3] HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (Orgs.). **Saberes em (trans)formação:** tema central da formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

[4] GIORDANO, Cassio Cristiano, ASSIS, Marco Rodrigo da Silva, COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. A Educação Financeira e a Base Nacional Comum Curricular. **Em Téia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** – vol. 10 - número 3 – 2019.

[5] LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5ª ed. São Paulo: Atlas 2003.

[6] PINTO, N.B. História das disciplinas escolares: reflexão sobre aspectos teóricos-metodológicos de uma prática historiográfica. **Revista Diálogo Educacional,** Curitiba, 2014.

[7] VALENTE, W. R. Matemática, educação e história da matemática: campos disciplinares e o saber profissional do professor que ensina matemática. In: VALENTE, W. R. (Org.). **Ciências da educação, campos disciplinares e profissionalização:** saberes em debate para a formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da

Física, 2020. 1 ed. p. 189-210.

Análise do Enunciado de uma Tarefa Não-Rotineira de Matemática

José Divaldo Xavier da Silva *
jose.silva1@ufpr.br [1]

Luana da Silva Oliveira +
oliveirasiluana@ufpr.br [2]

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)
gabrielss@ufpr.br [3]

[1,2,3] Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Educação Matemática, tarefas não-rotineiras de Matemática, análise de enunciados.

Resumo:

O presente trabalho faz parte do Programa de Voluntariado Acadêmico na área de Educação Matemática e busca analisar uma tarefa não-rotineira de matemática sob a perspectiva da Educação Matemática Realística (RME). Essa abordagem considera a matemática como uma atividade intrinsecamente ligada à natureza humana, enfatizando sua exploração, a resolução ampla de problemas e sua aplicação no contexto do mundo real. Fundamentada em princípios que buscam estabelecer conexões entre situações cotidianas e o processo de construção do conhecimento matemático, essa abordagem pedagógica envolve os alunos de maneira ativa e participativa.

O objetivo central deste estudo é investigar como a abordagem educacional da RME pode aprimorar a compreensão e a aplicação dos conceitos matemáticos, por meio de uma análise minuciosa do enunciado. A escolha criteriosa dessa tarefa segue a visão defendida por Ferreira (2013), que destaca a importância de uma abordagem reflexiva e contextualizada no ensino da matemática. Além disso, a tarefa selecionada visa explorar diversas formas de conhecimento, incluindo a relação entre elementos visuais não verbais e informações textuais presentes no enunciado.

Nesse contexto, a tarefa foi escolhida com o propósito de permitir um desenvolvimento abrangente. Ela exige não apenas a aplicação de valores e cálculos, mas também a análise da correspondência entre esses valores e os símbolos apresentados na tarefa. Além disso, é necessário verificar se tais valores satisfazem as condições estabelecidas no enunciado. Dessa forma, a resolução da

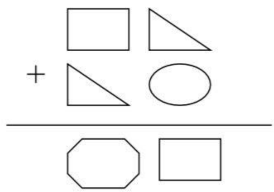
* Voluntário
+ Voluntária

questão demanda uma abordagem completa, que vai desde a compreensão do enunciado, enfoque do nosso trabalho, da tarefa até a interpretação das soluções à luz das informações fornecidas.

Ao abordar questões desafiadoras de forma reflexiva e contextualizada, os alunos são incentivados não apenas a resolver problemas, mas a compreender os processos subjacentes e a aplicabilidade dos conceitos matemáticos no mundo real.

Segue a análise do enunciado da tarefa não-rotineira de matemática:

Coloque os números 2, 3, 5 e 7 dentro das figuras abaixo. Figuras iguais correspondem a números iguais. Qual é o resultado da adição?



A tarefa será classificada com base na tese de Ferreira (2013).

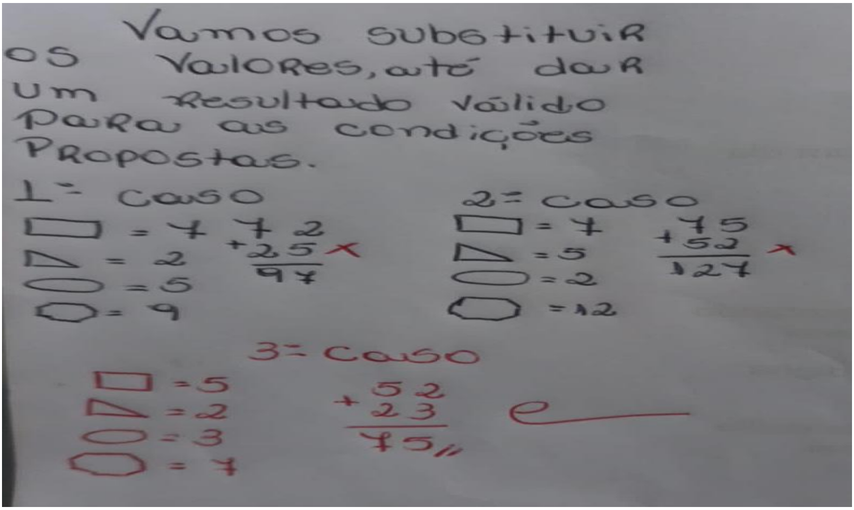
De acordo com Díaz e Poblete (2005) a tarefa supramencionada enquadra-se em uma classificação de Problema de Contexto Puramente Matemático - pois se refere exclusivamente a objetos matemáticos como símbolos numéricos, relações e operações aritméticas, figuras geométricas, dentre outros.

Segundo a classificação de De Lange (1987, p.76-77) nossa tarefa se enquadra em um Contexto de Segunda Ordem, é aquele com o qual o estudante é confrontado com uma situação realística e dele é esperado que encontre ferramentas matemáticas para organizar, estruturar e resolver a tarefa.

Já para Butts (1997), ela se encaixa em um problema de aplicação, envolvendo algoritmos aplicativos. Os problemas tradicionais caem nessa categoria, exigindo sua resolução: (A) formulação do problema simbolicamente e depois (B) manipulação dos símbolos mediante algoritmos diversos.

Por último no agrupamento a respeito do Tipo de Situação segundo PISA (DE LANGE, 2003; INEE, 2005, OECD, 2010). A tarefa é da categoria educacional, pois refere-se às atividades escolares (INEE, 2005), "vida escolar [está] relacionada ao entendimento do papel da matemática na sociedade, eventos escolares (por exemplo, esportes, times, programação), dados para a compreensão, computadores, e assim por diante" (DE LANGE, 2013 p.80).

Segue uma possível resolução da tarefa:



Referências:

[1] BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. A **Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 32-48.

[2] DE LANGE, **J. Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW &OC, 1987.

[3] DÍAZ, V.; POBLETE, A. Competencias en Matemáticas y Tipos de problemas. In: CIBEM – Proccedings V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, n. 5, 2005, Portugal. **Anais...** Portugal: Publicaciones con Comité Editorial, 2005.

[4] FERREIRA, Pamela Emanueli Alves. **Enunciados de Tarefas de Matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. 121f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

[5] INEE. **PISA para docentes**: la evaluación como oportunidad de aprendizaje. INEE– Instituto Nacional Para La Evaluación De La Educación, **México, 2005**.

[6] PISA 2012 Mathematics Framework. Paris: OECD Publications, 2010.

A metodologia do Núcleo de Educação Popular 13 de Maio na Educação Matemática: interfaces teóricas

Kevyan Uehara de Moraes*
kevyan.uehara@ufpr.br [1]

[1]Bacharelado em Matemática – Universidade Federal do Parana, Curitiba – PR – Brasil

Palavras-chave: Educação Matemática, Educação Popular, Educação Matemática Crítica.

Resumo:

Considerando apenas as Teses e Dissertações que constam na plataforma CAPES, as produções que relacionam "Educação Matemática" com "Educação Popular" não tem volume expressivo quando levamos em conta a produção total de trabalhos de apenas "Educação Matemática". No momento de escrita deste texto, essas primeiras totalizam 9 trabalhos, enquanto que há 8384 trabalhos da segunda.

É dentro dessa lacuna onde o trabalho se desenha. O objetivo deste trabalho é apresentar indagações e contornos de possibilidades das *teorias* e *práticas* do Núcleo de Educação Popular 13 de Maio (doravante abreviado de NEP) com a Educação Matemática. Essa entidade foi escolhida pelo contato prévio do autor com a mesma.

O NEP surgiu nos anos 1980, após uma serie de derrotas dos movimentos operários que aconteceram nos anos anteriores em decorrência da ditadura. Nessa época, um "novo sindicalismo" se desenvolveu em oposição ao movimento sindical controlado pelos interventores militares. O NEP, neste contexto, ajudava essas "Oposições sindicais" com um "trabalho direto", que buscava dar apoio para os grupos de trabalhadores buscando formas de se reorganizar (OLIVEIRA; TUMOLO, 2010).

O envolvimento com o trabalho sindical, as influências das formações politicas dos partidos comunistas do passado e a tradição cristã empregada pelas comunidades eclesiásticas de base (CEB's) foram algumas das influências para a construção da metodologia da entidade. Apesar dessa heterogeneidade, a unidade do NEP se realiza dentro do materialismo histórico e dialético.

Sobre a metologia treziana, Silva (2008) destaca três pontos principais:

1. A concepção de Educação Popular da entidade;

2. As dinâmicas de grupos utilizadas nos cursos;

*Bolsista do PET - matemática

3. A *maiêutica*, em uma versão particular da entidade, empregada junto dessas dinâmicas.

Um ponto que baliza a discussão: o primeiro é assumir, conforme Skovsmose e Valero (2012) que as formas pelas quais os indivíduos interagem com o mundo são matemáticas, principalmente nas interações com tecnologias. Fazemos essa afirmação de forma profunda: a interações entre indivíduos, coletividades e Capital *são* também, matemáticas.

E portanto, os conhecimentos matemáticos se tornam também partes essenciais para a compreensão e transformação da realidade. E a transformação da sociedade é um dos elementos principais na concepção de educação popular do NEP, sendo que ela:

> Se baseia na necessidade de socializar os elementos teóricos básicos para a compreensão da realidade, fazendo com que isto seja um instrumento nas mãos daqueles que querem se tornar sujeitos das transformações necessárias.(SILVA, 2008, p. 137, apud. 13 de Maio NEP, 1994, grifos nossos)

Nessa perspectiva, as práticas da entidade podem ser elucidativas para construir uma matemática mais politica e transformadora. E como se constituem essas práticas? A entidade as sintetizam da seguinte maneira:

> Sabemos que qualquer novo valor ou conceito não é assumido a não ser pelo fato de ser vivenciado, de preferência em situações de grupalização. Assim, partimos de um conhecimento universal, já existente antes da atividade de formação, na forma de conhecimento acumulado que, na situação do curso, deve ser vivenciado pelo grupo, reconstruído como conceito e traduzido para aquela realidade particular. Não adianta definir conceitos, eles devem ser vividos. Isto é feito nas atividades através de uma série de mediações, recursos e dinâmicas que permitem aos participantes traduzirem os conceitos para sua realidade. Simulam-se situações e criam-se problemas que exigem soluções e o grupo vai recriando conceitos dirigidos pelo monitor.(SILVA, 2008, apud. 13 de Maio NEP, 1994)

Isso vem do entendimentos que os indivíduos tem conhecimentos que são ao mesmo tempo próprios e derivados das suas vivências (politicas e matemática). E esses sentidos construídos são "São relações vivenciadas e fortemente enraizadas com carga afetiva, vividas como verdade, como realidade e naturalidade" (*ibid.*)

Outros questionamentos podem ser buscados a partir de Iasi (2004). Por exemplo as diferenças entre a *aparência* e a *essência* dos fenômenos.

A maiêutica é abordada como técnica mais geral do que quando inserida apenas no contexto do NEP em Nogueira (2008) e apresentada nessa mesma perspectiva também em Schio (2019). Algumas questões que levantamos são: "como se constrói o 'senso comum matemático' (e também a 'matemática do senso comum') e como socializamos uma compreensão mais aprofundada a partir desses conhecimentos acumulados?".

Referências

IASI, M. L. Educação popular: formação da consciência e luta política. *SEMINÁRIO DE EDUCAÇÃO POPULAR RIO DE JANEIRO, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro: Centro de Filosofia e Ciências Humanas/UFRJ*, 2004.

NOGUEIRA, R. R. A maiêutica como técnica educativa no serviço social. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

OLIVEIRA, C. de; TUMOLO, P. Formação política e projeto histórico de classe. a trajetória histórico-política do 13 de maio nep–núcleo de educação popular. *Germinal: Marxismo e Educação em Debate*, v. 2, n. 2, p. 118–131, 2010.

SCHIO, L. G. Trabalho pedagógico em um núcleo de educação popular: possibilidade de práxis pedagógica? Universidade Federal de Santa Maria, 2019.

SILVA, C. d. O. O resgate da trajetória histórico-política do 13 de maio nep-núcleo de educação popular. Florianópolis, SC, 2008.

SKOVSMOSE, O.; VALERO, P. Rompimiento de la neutralidad política: el compromiso crítico de la educación matemática con la democracia. una empresa docente, 2012.

Letramento Estatístico: um estudo sobre sua presença na BNCC

Laura Carolina Aymoré Ferrandin
Licenciatura em Matemática - UFPR
lauraaymore@ufpr.br

Emerson Rolkouski (Orientador)
Departamento de Expressão Gráfica - UFPR
rolkouski@ufpr.br

Palavras-chave: Educação Estatística, BNCC, Letramento Estatístico.

Resumo:

Este trabalho aborda o tema do letramento estatístico na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), explorando sua importância e ampliando a sua compreensão na formação educacional. Temos como objetivo avaliar quais são os níveis de letramento estatístico esperados pelas habilidades da BNCC em cada ano escolar e, futuramente, comparar os resultados obtidos com o nível de letramento estatístico compreendidos em atividades propostas por institutos e plataformas educacionais do país.

Para tanto, iniciamos apresentando uma definição de educação estatística e letramento estatístico, juntamente com sua relevância, além da estrutura da BNCC no campo de conhecimento referente à matemática. A educação estatística compreende o ensino de conceitos, métodos e habilidades estatísticas, com o objetivo de capacitar os indivíduos a compreender, interpretar e utilizar dados estatísticos de maneira eficaz. Por sua vez, o letramento estatístico envolve a habilidade de aplicar esse conhecimento estatístico em situações cotidianas, permitindo a tomada de decisões informadas e críticas com base em informações estatísticas.

Além disso, definimos como uma das bases do trabalho a classificação de Watson e Callingham (2003), a qual divide o letramento estatístico em seis diferentes níveis: Idiossincrático, informal, inconsciente, consciente não crítico, crítico e matematicamente crítico, como segue:

Tabela 1 - Níveis de Letramento Estatístico por Watson e Callinghan (2003)

Idiossincrático	Habilidades matemáticas básicas, referentes a contagem um a um e a leitura de valores em tabelas. Abrange apenas uma interação idiossincrática com o contexto e um uso tautológico de terminologias.
Informal	Habilidades referentes ao uso de elementos simples da terminologia, a partir de crenças intuitivas e não estatísticas devido a uma interação

	informal com o contexto, realização de cálculos básicos a partir de tabelas, gráficos e em questões que envolvem chance.
Inconsistente	Habilidade referente ao uso qualitativo de ideias estatísticas, interação pontual com o contexto, e obtenção de conclusões concretas, porém sem justificativa.
Consistente não crítico	Habilidade referente ao uso de terminologias estatísticas referentes a média, variação, probabilidades simples e interpretação de gráficos. Existe uma maior interação com o contexto, ainda que não crítica.
Crítico	Habilidade essencial para realizar questionamentos em contextos específicos, utilizando a terminologia apropriada, é realizado o uso qualitativo de ideias estatísticas principalmente em relação a questões que envolvem chances e se é compreendido o conceito de variação.
Matematicamente crítico	Habilidade matemática sofisticada com interações críticas com o contexto, compreensão dos aspectos sutis da linguagem estatística. Uso da interpretação quantitativa em contextos que envolvem média e chance, e reconhecimento da incerteza ao realizar predições.

Porém, ao iniciarmos a classificação das habilidades da BNCC nesses níveis, observamos algumas dificuldades. Dessa forma, propusemos um desdobramento dos indicadores de cada nível em interpretação, terminologia, compreensão gráfica e tabular.

Para os dois primeiros indicadores – interpretação e terminologia - utilizamos nosso próprio entendimento, já para as compreensões gráfica e tabular, nos baseamos em Curcio (1998) e Wainer (1995), respectivamente. A seguir apresentamos um exemplo de como esses indicadores serão utilizados no caso do primeiro nível:

Tabela 2 – Exemplo de subclassificação

NÍVEL	IDIOSSINCRÁTICO
INTERPRETAÇÃO	Baseada em experiências pessoais.
TERMINOLOGIA	É usada de forma tautológica, ou seja, o indivíduo apenas reproduz a ideia central com palavras diferentes, porém com o mesmo sentido.
NÍVEL GRÁFICO	Não consta. Porém, será atribuído o nível de leitura de dados, visto que o nível requer apenas a leitura literal dos dados.
NÍVEL TABULAR	Nível elementar.

Conforme apontado, o objetivo desse trabalho é, inicialmente, destacar os níveis de letramento estatístico esperados pela BNCC e, posteriormente, comparar esses resultados com as atividades propostas por institutos e plataformas educacionais do país. Ao contrário dos livros didáticos fornecidos pelo Programa Nacional de Livro Didático (PNLD), tais atividades, ainda que presentes nas salas de aula, não sofrem avaliação, o que indica a necessidade da realização de pesquisas acadêmicas como aqui se propõe. Espera-se que os resultados obtidos por essa pesquisa, sirva, de algum modo, para a salutar discussão sobre a qualidade e efetividade desses recursos.

Referências:

[1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

[2] CURCIO, Frances R. **Developing Graph Comprehension. Elementary and Middle School Activities**. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1906 Association Drive, Reston, VA 22091, 1989.

[3] WAINER, Howard. **A study of display methods for NAEP results: I. Tables**. ETS Research Report Series, v. 1995, n. 1, 1995

[4] WATSON, Jane; CALLINGHAM, Rosemary**. Statistical Literacy: A Complex Hierarchical Construct. Statistics Education**. Research Journal, v. 2, n. 2, p. 3-49, novembro 2003.

Análise do enunciado de uma questão não-rotineira de Matemática

Mariah Fragallo Ihlenfeldt
marih.fragallo@gmail.com [1]

Karoline Lorenz Rutyna
karollorenz@hotmail.com [2]

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)
gabrielss@ufpr.br [3]

[1,2,3] Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Educação Matemática, tarefas de Matemática, Análise da Produção Escrita, Análise de Enunciados, contexto.

Resumo:

Neste resumo será realizada a classificação, agrupamento e análise do enunciado de uma tarefa construída para estudantes de 9° e 8° ano. A motivação vem de um Programa Voluntariado Acadêmico que está em andamento na Universidade Federal do Paraná (UFPR), junto ao orientador Prof. Dr. Gabriel Santos e Silva, do Departamento de Matemática. Esse programa tem por objetivo a escrita de um artigo científico de Educação Matemática, que estudará as respostas de tarefas escolhidas pelos integrantes do programa, respostas estas que serão fornecidas por estudantes da rede pública e privada.

A tarefa que será analisada foi escolhida após o orientador do programa fornecer diversas questões, em que os integrantes selecionaram as que mais chamaram a atenção. As tarefas selecionadas foram comentadas, e assim escolhemos uma para ter o enunciado analisado aqui neste resumo. A escolhemos buscando uma tarefa não-rotineira (que não costuma aparecer em avaliações tradicionais), que tivesse diversas formas de ser resolvida, e por abrir diversos caminhos para a análise. Sendo assim, a tarefa escolhida foi:

Numa árvore pousam pássaros. Se pousarem dois pássaros em cada galho, fica um galho sem pássaro. Se pousar um pássaro em cada galho, fica um pássaro sem galho. Determine o número de pássaros e o número de galhos.

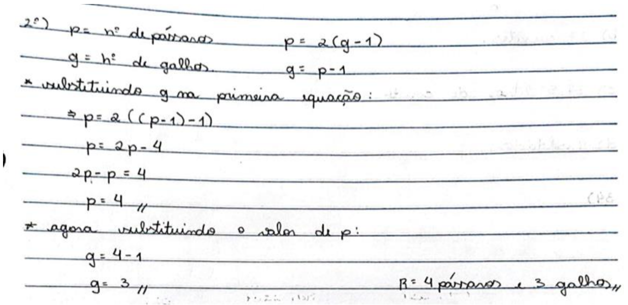
A tarefa será analisada segundo Ferreira (2013). Sendo assim, ela pode ser classificada da seguinte maneira:

1. **Segundo o contexto:** de acordo com Ferreira (2013, p. 42), "um problema de contexto necessita de matematização, o que pode demandar certa exploração do estudante que resolve o problema". Contudo, se não há um processo de exploração, a tarefa já não é vista como um problema de contexto, mas sim um exercício de matematização. Assim, classificamos a tarefa apresentada em um "**problema de contexto realista**" (DIAZ; POBLETE, 2005), já que se trata de uma situação possível de acontecer no mundo real, mas que ao mesmo tempo não possui caráter afetivo com as crianças.
2. **Segundo a finalidade do contexto:** ao resolver uma tarefa, o estudante pode desenvolver diversos caminhos e utilizar diversas ferramentas matemáticas. "No que diz respeito às possibilidades de matematização, De Lange (1987, p. 76-77) classifica diferentes usos/utilidades/fins/objetivos (*uses)* contextos" (FERREIRA 2013). Assim classificamos a tarefa apresentada em "**contexto de ordem zero**" (DE LANGE, 1987), em que temos que o contexto do enunciado pode ser mudado sem afetar a forma de resolver nem os caminhos a se seguir para resolver, logo ele não possui relevância alguma para solucionar a tarefa ou para analisar sua resposta.
3. **Segundo a familiaridade da tarefa:** quando o estudante tem familiaridade com a tarefa proposta, acaba se tornado apenas mais uma, sem muita exploração. Sendo assim, a classificação segunda a familiaridade (BUTTS, 1997), auxilia no entendimento a respeito do costume do estudante com tarefas de matemática. Assim, classificamos a tarefa selecionada em "**problema de aplicação"**, onde na resolução da tarefa é necessário primeiro esquematizar pensamentos e ideias entendo que caminho seguir, e assim aplicar as simbologias necessárias e manipulá-las.
4. **Segundo o tipo de situação: "**para o PISA (OECD, 2006), a situação é a parte do mundo do estudante em que as tarefas se situam e está localizada a uma certa distância do estudante" (FERREIRA, 2013). Nisso são apresentados agrupamentos dos diferentes tipos de situações de uma tarefa. Aqui, nesta classificação, onde a tarefa é agrupada de acordo ao tipo de situação, concluímos que a tarefa selecionada ela não possui seu contexto muito elaborado para encaixá-lo em alguma das agrupações apresentadas,

mostrando que talvez seja necessária a indicação de mais um grupo para encaixar a tarefa.

Em resumo, a importância de se analisar o enunciado da tarefa vem da premissa de querer diversificar as questões apresentadas aos estudantes, de entender o que o professor está trabalhando. Isso também auxilia na compreensão da produção escrita apresentada nas resoluções de tarefas, o que pode evitar a repetição em sala de aula, e expandir o processo de aprendizagem.

A título de curiosidade, uma das formas de resolver a tarefa está apresentada na figura a seguir:



Referências:

[1] BUTTS, T. **Formulando problemas adequadamente**. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo: Atual, 1997. p.32-48.

[2] DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW &OC, 1987.

[3] DÍAZ, V.; POBLETE, A. **Competencias en Matemáticas y Tipos de problemas**. In: CIBEM – Proccedings V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, n. 5, 2005, Portugal. Anais... Portugal: Publicaciones con Comité Editorial, 2005

[4] FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de tarefas de matemática: um estudo sob a perspectiva da educação matemática realística**. 2013. 121f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

Metodologia ativa para uma aprendizagem efetiva

Marlete Terumi Honjo Maruyama
marletemaruyama@yahoo.com.br [1]

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)
gabrielss@ufpr.br

UFPR [1]

Palavras-chave: metodologia ativa, aprendizagem, aluno protagonista.

Resumo:

No cenário atual por ser época de celeridade na informação, globalização, tem gerado pessoas com maior flexibilidade às constantes variações, estão mais ligados no mundo, preocupados com o futuro, são mais ansiosos, imediatistas, individualistas e competitivos. Pois, sua maior preocupação é gerar novas experiências e dinamismo. Com isso, na educação, também há a necessidade de métodos com diversas alterações e atualizações, onde estamos tendo que repensar para trabalhar de maneira diferente da tradicional, a qual chamamos de metodologia ativa.

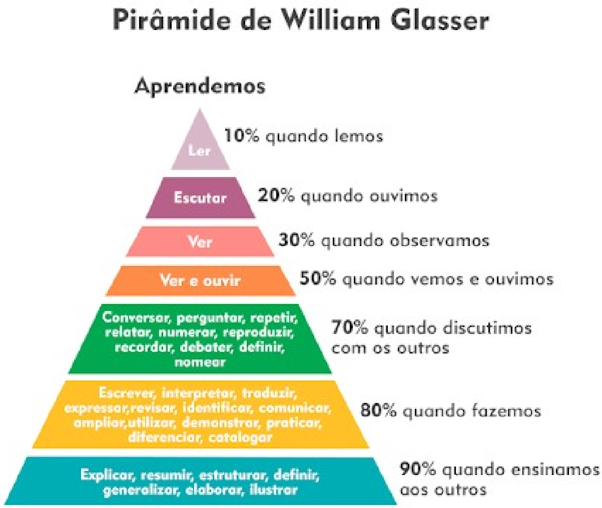
Na metodologia tradicional, o professor têm o papel de trazer todo o conhecimento e o aluno apenas recebe de forma passiva, já na metodologia ativa de aprendizagem é quando o aluno é colocado como protagonista e não mero espectador, ou seja, o aluno será o responsável pela busca de conhecimento por conta própria, contando com a ajuda do professor que por sua vez atuará como mediador desse aprendizado, esclarecendo as dúvidas precisas e mostrando a forma de como seguir adiante focado em seu conhecimento.

Essa proposta de metodologia ativa de ensino surgiu a partir dos estudos de William Glasser (1925-2013), onde mostra (ver a pirâmide) que esse método de aprendizagem tem trazido mais benefícios, pois é onde obtém se o alcance do aprendizado efetivo, distanciando do modelo tradicional de ensino mecânico que tem pouca retenção e em pouco tempo, o esquecimento.

Existem diversas metodologias ativas que podem ser utilizadas como por exemplo, a sala de aula invertida (*flipped classroom*), ensino híbrido (*blended learning*), gamificação, aprendizagem baseada em projetos (*Project based learning*), aprendizagem entre times (*team based learning*).

[1] Acadêmica de licenciatura em Matemática

Partindo dessa premissa, as escolas e instituições terão que romper os paradigmas e adotar novas práticas, sem dúvida será um grande desafio, pois para toda mudança requer esforço e gera um desconforto. Mas, como disse o poeta Dr Daisaku Ikeda: “não faz mal que seja pouco, o que importa é que o avanço de hoje seja maior que o de ontem. Que nossos passos de amanhã sejam mais largos que os de hoje”.



Pirâmide de Aprendizagem de William Glasser

Referências:

https://www.google.com/search?q=william+glasser+e+sua+pirâ

[1] BACICH, L; MORAN, J. Metodologias Ativas para uma educação inovadora**:** Uma abordagem Teórico-Prático. Porto Alegre: Penso, 2017.

[2] Cursos:

- Sala de aula invertida (UFPR aberta) - 2023
- Noções práticas em educação aberta (UFPR aberta) - 2023
- Competencia Tecnologica para a Docência (UFPR aberta) - 2023
- Competencia em Informação para a Docencia (UFPR aberta) - 2023
- Pós graduação em Docencia e Prática de ensino em Matemática - 2023

Acadêmica de licenciatura em Matemática

Oficina de Geometria: uma possibilidade de aproximação entre a educação superior e a educação básica

Monica Cristina Pontes dos Santos Forigo
monicaforigo@gmail.com [1]

Paolla Cristina Berno Alves
pa.mar25@hotmail.com [2]

Prof. Mauro Roberto dos Santos (Orientador)
mauroroberto.santos@unespar.edu.br [3]

[1,2,3] UNESPAR – Universidade Estadual do Paraná – Campus Paranaguá

Palavras-chave: Geometria, Formação de professores, Atividades lúdicas.

Resumo:

A proposta de uma oficina matemática surgiu a partir da disciplina de Fundamentos da Geometria, primeiro ano do Curso de Licenciatura em Matemática, UNESPAR/Campus Paranaguá, a qual prevê ações extensionistas com a finalidade de socializar conhecimentos entre seus licenciandos e a comunidade escolar da Educação Básica, promovendo uma maior aproximação entre Universidade e Educação Básica.

Sobre o projeto de extensão que contempla a disciplina de Fundamentos da Geometria, representa um dos três pilares que norteiam as ações da Universidade: ensino, pesquisa e extensão. O próprio Plano Nacional de Extensão Universitária prevê a participação das universidades na atuação em projetos de extensão:

> a) as instituições de ensino superior, por meio das suas atividades de extensão, deverão proporcionar aos seus corpos discentes oportunidades de participação em programas de melhoria das condições de vida da comunidade e no processo geral de desenvolvimento. (PNE 2018, p.7)

Outro ponto a ressaltar, consiste na aproximação entre a Geometria e o cotidiano dos estudantes, pois a Base Nacional Comum Curricular destaca que: "A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento". (BRASIL 2018, p.271)

Desse modo, a oficina de Geometria configura-se como uma ação promovida com o intuito de apresentar ao estudante da educação básica, conceitos geométricos como um conhecimento essencial para o seu pleno desenvolvimento, pois a Geometria ocupa um papel importante na sua formação,

fornecendo conhecimentos que auxiliam o seu desenvolvimento de processos mentais e raciocínios para a compreensão e aprendizagem da matemática.

No que diz respeito às atividades previstas nessa oficina geométrica, os conteúdos foram definidos a partir de relatos das equipes pedagógicas das escolas envolvidas no projeto, as quais mencionaram a necessidade de reforçar conteúdos voltados a Geometria, tais como: figuras geométricas planas, polígonos regulares, sólidos geométricos e planificação voltados a uma classe de estudantes do sexto ano do ensino fundamental de uma determinada escola do município de Paranaguá.

Pensando em tornar a oficina de geometria mais atrativa e proporcionar um momento de aprendizagem significativa, foram elaboradas atividades lúdicas de construção de sólidos geométricos para que os estudantes tivessem a oportunidade de construir, desenvolver e visualizar concretamente conceitos até então abstratos. Acerca das atividades lúdicas, Porto e Lopes (2013, p.5) destacam que:

> As técnicas lúdicas, material concreto, brincadeiras, jogos, músicas, fazem com que a criança aprenda com prazer, alegria e entretenimento, sendo relevante ressaltar que a educação lúdica está distante da concepção ingênua de passatempo, brincadeira vulgar, diversão superficial.

Definida pela atividade lúdica, passou-se à preparação da oficina em si, bem como a forma de abordagem dos conteúdos aos estudantes. No primeiro momento, o grupo de licenciandos apresentou-se aos estudantes, bem como sobre o conteúdo matemático a ser trabalhado, ao mesmo tempo em que coletavam informações preliminares acerca dos conhecimentos geométricos desses estudantes.

No segundo momento, as atividades práticas propostas: a) a construção de sólidos geométricos a partir de palito de fósforo e massa modelar; b) a planificação de sólidos geométricos, por meio de papel cartão e o do tipo milimetrado. Por meio dessas atividades, os estudantes puderam explorar diferentes elementos geométricos: arestas, faces, vértices e figuras planas.

No terceiro momento, os estudantes participaram de um jogo de perguntas e respostas formulado pelos acadêmicos de Matemática, onde os estudantes demonstraram uma boa compreensão acerca dos conceitos apresentados, tais como: os sólidos geométricos e suas planificações.

Os momentos vividos nessa oficina geométrica proporcionaram a percepção sobre a relevância do lúdico no ensino da Geometria, inclusive como estratégia de promover o ensino-aprendizagem mais dinâmico, o conteúdo mais compreensível, a aula participativa, a potencialização do interesse dos estudantes pela própria matemática, bem como a socialização de saberes.

Cabe ressaltar a importância do projeto de extensão na formação de professores, pois os licenciandos que participaram desse evento foram sujeitos ativos nas construções dos saberes necessários à docência. Desse modo, Rêgo (2006) enfatiza que o professor é um sujeito da sua própria aprendizagem e a formação oferece a cada um, pensamento crítico-reflexivo e autônomo, realizando a ação e reflexão do seu fazer.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Fundamental Anos Finais. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br Acesso em 16/08/2023.

[2] BRASIL, **Plano Nacional de Extensão Universitária**, Brasília, 2018. Disponível em: portal.mec.gov.br. Acesso em 16/08/2023.

[3] PORTO, Adriana Silva; LOPES, Lailson dos Reis Pereira. **Utilizando o lúdico na resolução de problemas matemáticos: Um estudo nas séries iniciais de uma escola parceira do PIBID**. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ISSN 2178-034X. Disponível em: http://sou.ucs.br. Acesso em 16/08/2023.

[4] RÊGO, Maria Carmem Freire Diógenes**. A formação docente no fazer e refazer da prática pedagógica.** Natal, 2006. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

“Mas matemática também não precisa ser só professor, né?”: trajetórias e percepções de Licenciandas em Matemática na UFPR

Monique Baptista Fragozo
mbaptistafragozo@gmail.com [1]

Elenilton Vieira Godoy (Orientador)
elenilton@ufpr.br [1]

Yasmin Cartaxo Lima (Co-orientadora)
yasclima@gmail.com [1]

[1]Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Gênero. Análise do discurso. Licenciatura em Matemática.

Resumo:

O presente trabalho, produzido em uma pesquisa de Iniciação Científica no curso de Matemática da Universidade Federal do Paraná, tem por objetivo realizar uma Análise de Discurso, baseada em Eni P. Orlandi, a partir de material coletado em um grupo focal sobre gênero realizado com licenciadas em Matemática da Universidade Federal do Paraná.

O grupo focal foi realizado virtualmente com quatro estudantes de Licenciatura em Matemática de diferentes períodos, e o tema do grupo foi “Gênero e Matemática”.

Percebe-se que muitos dos familiares das entrevistadas não possuem reclamações sobre a escolha delas pelo curso de Matemática, mas quando se trata especificamente da Licenciatura, essa escolha não os agrada. Além disso, as quatro entrevistadas relataram não gostar, ou não realizar o gosto pela Matemática no Ensino Básico, e, mesmo assim, atualmente estão matriculadas na Licenciatura em Matemática da UFPR.

Visando o cumprimento do objetivo da pesquisa, o qual é realizar uma Análise de Discurso, com base nas contribuições de Eni P. Orlandi, sobre as relações de gênero no curso de Matemática de uma IESP a partir da visão de mulheres matriculadas no curso, o primeiro passo foi a elaboração de um formulário on-line enviado por e-mail para todas as mulheres que estão cursando Matemática na universidade em questão. O objetivo do formulário era a obtenção de um perfil das estudantes, constando sua identificação de gênero, raça, orientação sexual, idade, se é portadora de algum tipo de deficiência, ano de ingresso na Universidade, modalidade do curso (Bacharelado ou Licenciatura) e a disponibilidade em participar de um grupo para discutir gênero em sua interlocução com a Matemática.

Após o prazo estabelecido para a resposta do formulário, foi enviado um e-mail para todas as respondentes que sinalizaram positivo para a participação do grupo.

A metodologia aplicada para a realização do grupo foi a de grupo focal. Nesse método, é feita uma seleção de participantes segundo alguns critérios conforme o problema a ser estudado, baseando-se em Bernardete Angelina Gatti (2005). No caso da presente pesquisa, a partir do formulário, foram selecionadas mulheres, matriculadas no curso de Matemática da UFPR que concordaram em participar do grupo. Como as pessoas participantes devem ter alguma vivência com o tema a ser discutido, optamos por trabalhar apenas com mulheres - não que homens não possuam gênero ou opiniões a serem discutidas acerca do assunto - no entanto, queríamos um espaço no qual as mulheres se sentissem confortáveis para falar - e até mesmo denunciar - sobre situações que vivenciaram ao longo de suas vidas.

O grupo realizado também se enquadra como grupo focal visto que este consiste em um conjunto de pessoas reunidas para discutir sobre tema pré-determinado pelas pesquisadoras, sendo focalizado justamente por envolver uma atividade coletiva sobre um assunto específico (GATTI, 2005).

Para analisar o material coletado via grupo focal, utilizaremos a Análise de Discurso baseada em Eni P. Orlandi. De acordo com a autora, a Análise de Discurso não almeja encontrar um sentido verdadeiro, pelo contrário, compreende que os sentidos são múltiplos, sendo que o que dita quais sentidos irão surgir são os efeitos produzidos na interlocução das pessoas envolvidas no processo discursivo. Portanto, o papel de analista é compreender como um objeto simbólico - no caso deste trabalho, as falas das mulheres participantes do grupo focal - produz sentidos ideologicamente determinados a partir de uma relação entre sujeito-língua-história. Ressaltamos ainda que a noção de discurso não é limitada apenas ao que é falado, ele também é formado pela/o sujeita/o da enunciação envolvido em uma relação de forças que determina o que pode ou não ser dito, pelo momento histórico tanto da formulação quanto da análise, e pela memória discursiva, ou seja, a relação que determinado discurso faz com formações discursivas que o precedem (ORLANDI, 2020).

A partir da delimitação do objeto simbólico que será analisado e de situar o local de fala das sujeitas participantes, a primeira etapa da análise consiste em construir objetos discursivos a partir do texto, sendo que tais objetos são afetados por esquecimentos enunciativos da ordem da enunciação, fazendo com que as sujeitas esqueçam que o que é dito por elas não poderia ser dito de outra maneira. Dessa forma, os objetos discursivos serão formulados a partir do exercício da metáfora - tomar uma palavra por outra - objetivando deslizar sentidos (ORLANDI, 2020). Usando a metáfora, busca-se a polissemia de sentidos que podem relacionar os dizerem com outros possíveis, fazendo com os elementos significantes para a análise fiquem revestidos de sentido (ORLANDI, 2012). O não-dito também será uma metodologia empregada na Análise de Discurso, partindo da noção de que o que é dito tem relação estrita com o que não é dito, sendo este também de extrema relevância para a análise (ORLANDI, 2020).

A análise do discurso, neste trabalho, focará na trajetória da escolha do curso e percepções sobre a Licenciatura e o Bacharelado, tanto das entrevistadas quanto de pessoas de seu convívio, conforme relatado durante o grupo focal.

Referências:

[1] GATTI, Bernardete Angelina. **Grupo Focal na Pesquisa em Ciências Sociais e Humanas**. Brasília, DF: Líber Livro, 2005.

[2] ORLANDI, Eni Puccinelli. **Análise de discurso:** princípios & procedimentos. Campinas: Pontes, 2020.

[3] ORLANDI, Eni Puccinelli. **Discurso e leitura**. São Paulo: Cortez, 2012.

Oficina de Geometria: uma possibilidade de aproximação entre a Educação Superior e a Educação Básica

Patricia Alves da Cruz
p.a.c.pgua@gmail.com [1]

Patrícia Vieira Alves
patriciavieira.matematica@outlook.com [2]

Prof. Mauro Roberto dos Santos (Orientador)
mauroroberto.santos@unespar.edu.br [3]

[1,2,3] Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) – Campus Paranaguá

Palavras-chave: Geometria, Oficina matemática, Práticas docentes.

Resumo:

O projeto "Dialogando com a Educação Básica: o que podem as oficinas de Geometria?" representa uma iniciativa integrada à curricularização de extensão do curso de Matemática da UNESPAR/Campus de Paranaguá. Nesse sentido, a oficina de Geometria promovida pelo curso de Matemática teve como objetivo geral socializar conhecimentos da Geometria, adquiridos pelos seus acadêmicos, com os estudantes da Educação Básica. Este projeto apresenta relevância acadêmica e social, uma vez que visa estreitar os laços entre a universidade e a comunidade escolar, compartilhando o conhecimento acadêmico, enquanto formação de professores, por meio de oficina matemática que possibilite a articulação entre a teoria e prática. Os workshops dessa natureza criam espaços favoráveis aos estudantes da Educação Básica para a construção de significados relacionados à Geometria, o desenvolvimento do pensamento geométrico, e por outro lado, oferecem aos acadêmicos uma experiência formativa, valiosa e reflexiva para a arquitetura de suas futuras práticas docentes.

Portanto, as oficinas matemáticas potencializam a compreensão e o desempenho do estudante da Educação Básica em Geometria, contribuindo para o desenvolvimento do seu raciocínio visual, habilidade fundamental no cotidiano e na condução e compreensão em diversas áreas do conhecimento. Tais práticas colaboram no preenchimento de lacunas no ensino de Geometria, quer sejam pelas políticas educacionais, metodologias, preparo do professor, e outras. Nesse viés, tais atividades contempladas nesse espaço formativo, concorrem para uma abordagem prática e contextualizada, com o uso de materiais concretos destinados ao processo de ensino-aprendizagem. Rego e Vieira explicitam a relevância da Geometria para a compreensão do mundo em que vivemos:

> A Geometria é considerada importante por pesquisadores e curriculistas porque, por meio dela, a criança desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive, além de ser um campo fértil para se trabalhar com situações problema (PIRES; CURY & CAMPOS, 2000, p.15 apud RÊGO; RÊGO & VIEIRA, 2012, p.10).

A relevância social da Geometria é enfatizada, já que ela desenvolve o raciocínio visual essencial para enfrentar situações cotidianas geometrizadas, tais como: a percepção quanto às formas das edificações; a noção de distância; as atividades de uma costureira, uma obra de arte, um esquema tático para uma partida de futebol, entre outras situações. O projeto pretende, assim, melhorar a compreensão e resolução de questões em diversas áreas do conhecimento humano, dentre delas a matemática interagindo com a Física, a Biologia, a Química, a Sociologia, a Filosofia, a Astronomia, a Navegação, a Geografia, e demais esferas do conhecimento.

A metodologia envolveu uma revisão teórica dos fundamentos da Geometria, entre eles: Costa (2012), Dante (2009), Euclides (2009), Gibilisco (2013), entre outros. Quanto às atividades, ocorreram nas dependências da Universidade em um momento descontraído e acolhedor, com o intuito de apresentar a UNESPAR aos estudantes da Educação Básica. Na ocasião, houve a participação de 29 (vinte e nove) estudantes do 6º ano, de um colégio da Rede Estadual de Ensino, do Município de Paranaguá.

A primeira atividade apresentada, com formas geométricas, os levou a identificar cada forma com sua descrição e utilizá-las em uma dinâmica com tapete geométrico e dado geométrico. À medida que jogavam o dado para avançar uma etapa do jogo, era necessário descrever a forma geométrica. A dinâmica enfatizou a avaliação do conhecimento prévio dos alunos sobre os materiais e conceitos geométricos, permitindo que eles manipulassem os materiais didáticos.

O segundo momento de atividade prática contemplou o cálculo do comprimento uma circunferência, utilizando uma roda de bicicleta. Optou-se por essa dinâmica pelo fato de a bicicleta ser um meio de transporte predominante em nossa região, pois o relevo favorece tal prática. Por outro lado, o cálculo do perímetro da circunferência constitui um dos conhecimentos da Geometria. Trabalhou-se o conceito de raio e circunferência, por meio figuras desenhadas na lousa, bem como a fórmula: $C = 2\pi r$.

Convém ressaltar a relevância de uma oficina matemática, considerando a possibilidade de aproximação entre a Geometria e o cotidiano dos estudantes, pois a BNCC (2018) destaca que “A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento”.

A participação no projeto de extensão proporcionou uma compreensão a respeito da relevância do uso de abordagens lúdicas no ensino da Geometria. Com base em feedback dos estudantes e na percepção dos acadêmicos quanto à atividade, notou-se o desenvolvimento do conteúdo proposto de forma mais acessível aos estudantes, promovendo a reflexão quanto a práticas docentes dos professores em formação.

Referências:

[1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Fundamental Anos Finais. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br Acesso em 07/09/2023.

[2] BRASIL, **Plano Nacional de Extensão Universitária**, Brasília, 2018. Disponível em: portal.mec.gov.br Acesso em 07/09/2023.

[3] RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M. do; VIEIRA, K. M. **Laboratório de ensino de geometria**. Campinas: Autores Associados, 2012. 07/09/2023.

O ensino de medidas de tendência central no ensino médio: uma abordagem através da investigação matemática

Rafael Augusto Evangelista Gonçalves[1]
rafgon@alunos.utfpr.edu.br

Magno Nicolau de Souza[2]
magnosouza@alunos.utfpr.edu.br

Maria Eduarda Kobylinski da Silva[3]
marsil.2002@alunos.utfpr.edu.br

Luciana Schreiner de Oliveira[4]
lucianaoliveira@utfpr.edu.br

[1,2,3,4] Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Palavras-chave: Estatística; Medidas de Tendência Central; Lançamento de Dados.

Resumo:

A fim de abordar o conteúdo de Medida de Tendência Central de uma forma mais atrativa e estimulando o trabalho em grupo, nossa equipe de licenciandos do Programa de Residência Pedagógica abordou o conteúdo de Medida de Tendência Central de uma maneira atraente e interativa. Realizamos uma aula com as turmas do segundo ano do Ensino Médio no Colégio Estadual Júlia Wanderley, situado na cidade de Curitiba, Paraná. Nosso objetivo era não apenas ensinar os conceitos de média, moda e mediana, mas também promover a colaboração e a participação ativa dos alunos.

A metodologia escolhida foi a Investigação Matemática, que coloca os alunos no papel de pesquisadores e coletadores de dados. Isso não só desperta o interesse deles, mas também os engaja em todo o processo de aprendizado. Com a supervisão atenta do professor preceptor Wagner Alexandre do Amaral e da professora orientadora Drª. Luciana Schreiner de Oliveira, nossa atividade foi elaborada com base nos resultados dos lançamentos de um dado de seis faces.

---

[1] Bolsista do programa Residência Pedagógica e graduando pelo Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR;

[2] Bolsista do programa Residência Pedagógica e graduando pelo Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR;

[3] Bolsista do programa Residência Pedagógica e graduando pelo Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR;

[4] Professor orientador: Professor do Magistério Superior da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR;

A aula teve início com a exposição teórica dos conteúdos pertinentes, seguida da divisão da turma em quartetos, com o intuito de promover o trabalho em grupo, uma habilidade crucial para o desenvolvimento acadêmico e profissional. Cada aluno recebeu um dado, e uma ficha foi entregue aos grupos. Essa ficha não apenas auxiliou na marcação da frequência dos lançamentos, mas também serviu como um guia para a avaliação do processo. Além da tabela, a ficha continha perguntas como "Qual a média, moda e mediana dos lançamentos individuais?" e "Qual a média, moda e mediana dos lançamentos em grupo?".

A atividade em si consistiu em registrar os resultados dos lançamentos do dado de seis faces. Cada aluno anotou em uma folha os valores das faces voltadas para cima em cada um dos dez lançamentos. Em seguida, o grupo analisou quais foram os valores mais frequentes ao longo dos dez lançamentos e marcou "x" nas faces correspondentes. Esse processo ajudou os alunos a determinar a moda, que é o valor mais frequente na amostra.

No dia 03 de julho de 2023 nossa aula foi realizada em duas turmas de segundo ano do Ensino Médio e podemos afirmar que nosso objetivo de aplicar uma atividade que os auxiliassem a desenvolver habilidades sociais foi alcançado, uma vez que os quartetos se organizaram, colaboraram e aprenderam uns com os outros. Os alunos demonstraram a capacidade de ajudar uns aos outros a compreender conceitos, como o cálculo da média individual dos lançamentos.

Houve momentos de discussão sobre o significado da média e como ela pode ser influenciada pelas alterações na amostra. Um aluno se destacou ao organizar sua amostra em chaves, o que é comumente usado para explicar amostras em Estatística. Esse aluno explicou que essa técnica ajudava a visualizar os números que precisavam ser somados. Ele também mencionou que a separação com vírgulas facilitava a contagem dos elementos na amostra, e o resultado dessa adição seria o denominador da média.

No entanto, a mediana provou ser um desafio para muitos alunos. Muitos deles esqueceram de colocar os valores em ordem crescente e não consideraram se a amostra tinha um número par ou ímpar de elementos. Como resultado, alguns escolheram incorretamente o valor "central" entre todos os valores, em vez de calcular a mediana corretamente.

Além disso, alguns alunos enfrentaram dificuldades com operações aritméticas básicas e o cálculo de frações. Lidar com divisões quando o denominador é maior que o numerador se revelou um desafio para alguns. No entanto, apesar dessas dificuldades, a atividade promoveu a socialização dos resultados e incentivou os alunos a argumentar e justificar suas respostas com base em seus lançamentos.

O uso da Investigação Matemática levou os alunos a se tornaram ativos na busca por soluções, estimulou o pensamento crítico, a comunicação matemática e a compreensão dos conceitos de Medida de Tendência Central. Como destacado por Lamonato e Passos (2011), essa abordagem incentiva a troca de conhecimento entre os alunos e promove a observação e a exploração independentes. Em face dessas considerações, Silva, Souza e Valetini (2018, p.3) concluem que utilizar Investigação Matemática como Metodologia pode atrair os estudantes ao estudo da Estatística, pois, além de colocar o aluno em ação, tem o objetivo de “aprimorar seus conhecimentos sobre organização e análise de dados; potencializar e consolidar as ideias já conhecidas sobre conteúdos fundamentais da Estatística, tais como: medidas de posição”.

Nossa aula foi projetada para envolver os alunos na pesquisa de dados que eles próprios coletaram. Os desafios enfrentados pelos alunos durante a atividade os levaram a questionar seus resultados e a explorar estratégias diferentes. Logo, essa movimentação verificada na atividade enriquece o processo de investigação, pois, segundo Beline e Teodoro (2013), a investigação matemática quando realizada em grupo estimula o aluno a apresentar as estratégias utilizadas e a refletir, desenvolvendo não só o pensamento crítico, mas sua comunicação matemática.

REFERÊNCIAS

[1] ARAÚJO, José Ronaldo Alves; ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira. Contribuições do GeoGebra nas dialéticas de uma situação didática para o estudo das Medidas de Tendência Central. **Educação Matemática Debate**, v. 3, n. 9, p. 282-302, 2019.

[2] BOAVENTURA, Maria Gracelina Matos de; FERNANDES, José António. **Dificuldades de alunos do 12º ano nas Medidas de Tendência Centra**l: o contributo dos Manuais Escolares. 2004.

[3] GOMES, A. A. Molina e NACARATO, O Mendes. **Pistas, indícios... A comunicação de ideias matemáticas na EJA**. REMAT – ISSN 2177 5095, nº 2 2010 –Revista eletrônica de matemática. Disponível em HTTP/ufg.br/ojs/index.php/matemática. Acesso em 31 jul.2023.

[4] IFRN. **Ensino de estatística com uso de jogo de dados em uma intervenção didática com alunos do 3º ano do ensino médio.** Disponível em: https://ead.ifrn.edu.br/coloquio/anais/2017/trabalhos/eixo2/E2A21.pdf. Acesso em: 06 jun. 2023.

[5] LAMONATO, Maiza; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. **Zetetiké**, v. 19, n. 2, 2011.

[6] SILVA, Aleff Hermínio Da et al.. **O ensino de estatística por meio da investigação matemática: um relato e reflexão de experiência**. Anais V CONEDU... Campina Grande: Realize Editora, 2018. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/48043>. Acesso em: 13/08/2023 17:52.

[7] TEODORO, F. P.; BELLINE, W. Investigação matemática em sala de aula na educação básica: um estudo com alunos do 3º ano do ensino médio. **O método científico. VIII encontro de produção científica e tecnológica**, 2013.

Análise da Produção Escrita em questões de Educação Financeira: um estudo

Raíssa Gomes Freitas Ribeiro [1]
raissa2002.rg@gmail.com [1]

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)
gabrielss@ufpr.br [2]

[1,2] Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática, Avaliação e Análise da Produção Escrita.

Resumo:

Este estudo está relacionado a um projeto de pesquisa desenvolvido no Departamento de Matemática da UFPR e coordenado pelo professor Gabriel dos Santos e Silva. Foi feita a aplicação de uma prova escrita ocorrida na disciplina de Educação Estatística e Financeira do curso de Licenciatura em Matemática da referida instituição, com 11 alunos matriculados no período vespertino, em 08 de agosto de 2023. As aulas desta disciplina são ministradas às terças-feiras, das 13h30 às 17h30, e a atividade em questão teve duração de duas horas, compreendendo a resolução de sete questões.

O objetivo deste estudo é apresentar uma análise da produção escrita de estudantes de uma disciplina do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná a partir de uma tarefa de Educação Financeira.

A tarefa proposta tem como intuito analisar e tentar compreender como os estudantes chegaram aos resultados apresentados, pensando nas investigações como oportunidade de aprendizagem. Foi aplicado um pré-teste, uma prova escrita no primeiro dia de aula, para conhecer os alunos da turma de Educação Estatística e Financeira do curso de Matemática Licenciatura. Neste artigo serão analisadas questões do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que podem ser resolvidas de várias maneiras. Um aluno traz consigo muitas de experiências, nenhuma com a mesma vivência, portanto é de se esperar diferentes interpretações das questões.

Os alunos assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido no qual os pesquisadores se comprometiam com o anonimato anonimato das suas resoluções, preservando o material da pesquisa, em que também, neste termo, os alunos escolheram seus pseudônimos. Foram escolhidos Midori, Valdir, Dallas, Miguel, Nicole, Ventura, Nina, Jack, Celeste e Neimauro Jr como os nomes a serem referidos.

A avaliação educacional tem um papel crucial no processo de ensino e aprendizagem, fornecendo informações valiosas sobre o progresso dos alunos e a

[1] Voluntária do Programa de Voluntariado Acadêmico

eficácia do ensino. Além disso, influencia diretamente os alunos, professores e o desenvolvimento da aprendizagem.

Esses impactos têm o poder de moldar a experiência dos alunos na sala de aula. Questões discursivas, por exemplo, diferem das questões de alternativa, pois exigem respostas mais elaboradas e promovem o pensamento crítico. A forma como as avaliações são estruturadas pode influenciar o interesse e o desempenho dos alunos. Investigações Matemáticas no geral servem para fazer com que os alunos acreditem mais em si e busquem ser mais, procurando novas respostas, se tornando verdadeiros estudantes de matemática. Quando se tarefas avaliativas somente são associadas a notas e reprovações, pensamos que essa tarefa só nos mostra o que o aluno não sabe e é exatamente ao contrário.

As avaliações fornecem informações detalhadas sobre o desenvolvimento deles, " avaliação escolar constitui-se como um meio pelo qual se pode acompanhar e mediar o desenvolvimento da aprendizagem" (BURIASCO, 2010). Isso permite que os professores adaptem seus métodos de ensino, intervenham quando necessário e criem estratégias personalizadas de ensino. O feedback das avaliações é uma ferramenta valiosa para aprimorar o plano de aula, incorporar intervenções matemáticas e relacionar o conteúdo às experiências diárias dos alunos. Em resumo, as avaliações desempenham um papel multifacetado no ambiente educacional. Elas não medem o conhecimento dos alunos, mas têm o potencial de impulsionar o aprendizado e melhorar a qualidade do ensino. Com uma abordagem cuidadosa e reflexiva das avaliações, professores podem aproveitar ao máximo essas ferramentas para benefício dos estudantes e do processo de ensino como um todo.

A seguir, apresenta-se o enunciado das questões escolhidas para esse estudo, optou-se por trabalhar apenas com as questões 2 e 3 porque são abertas e possibilitam diferentes resoluções.

QUESTÃO 1:
Quais das afirmações sobre o gráfico são verdadeiras?
Circule "Verdadeira" ou "Falsa" para cada afirmação.

Afirmação	Esta afirmação é verdadeira ou falsa?
O melhor mês para comprar as ações foi setembro.	Verdadeira / Falsa
O preço da ação aumentou cerca de 50% no período de um ano.	Verdadeira / Falsa

QUESTÃO 2:
Elabore uma afirmação verdadeira e uma falsa a partir do gráfico.

QUESTÃO 3:
Elabore o enunciado de uma questão de Matemática a partir do gráfico.

Umas das soluções das questões propostas foi a seguinte:

QUESTÃO 2:
Elabore uma afirmação verdadeira e uma falsa a partir do gráfico.

O melhor período de venda das ações foi em fevereiro ou março.
A partir de junho houve apenas lucro, aumento das ações.

QUESTÃO 3:
Elabore o enunciado de uma questão de Matemática a partir do gráfico.

Considere o gráfico a seguir que representa o preço das ações da mineradora Pedra Lascada num período de 12 meses:
a) Qual o menor valor que a ação atingiu? Quando?
b) Qual o maior valor que a ação atingiu? Quando?
c) Em quais períodos o valor das ações aumentou? E em quais diminuiu?

Referências:

[1] ALMEIDA, Vanessa Lucena Camargo de; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Processo de Matematização:** Investigação de registros escritos de aluno de licenciatura e bacharelado em Matemática. Paraná: Alexandria, 2010.

Problematizando o ensino de matemática no 3º ano do Ensino Médio: relato de experiência de um estágio supervisionado

Samara Ortiz[1]
samaraeq@gmail.com [1]

Débora Regina Wagner (Orientadora)
deb.rwagner@gmail.com [2]

[1,2] Universidade Federal de Santa Catarina

Palavras-chave: estágio supervisionado, atuação docente, vestibulares.

Resumo:

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996), o Ensino Médio, última etapa da educação básica, tem como objetivos aprofundar o aprendizado do Ensino Fundamental e formar os estudantes para o exercício da cidadania. Mas, na prática, percebe-se que estes objetivos se estendem para a preparação dos estudantes para os processos seletivos em instituições e universidades de todo país.

No decorrer do curso de graduação em licenciatura em Matemática tornou-se evidente a dinâmica diferenciada que se tem nas aulas do Ensino Médio (EM), principalmente no 3º ano, cujo ensino de conteúdos e a resolução de exercícios com foco na otimização de tempo torna-se a principal estratégia para preparar os estudantes para provas como vestibular e Enem. Particularmente, ao cursar a disciplina de Estágio Supervisionado III e atuar em uma turma de 3º ano do EM, ficou explícito os direcionamentos e interesses focados no vestibular nessa fase da escolaridade. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é relatar a atenção à atuação docente durante o período do estágio no que tange à postura do professor frente ao ensino focado em aprender o conteúdo, mas também prover ferramentas aos estudantes de como resolver questões de vestibulares e do Enem, com foco na objetividade.

Durante a atuação docente neste período de estágio, fui instruída que, ao preparar as aulas, eu estruturasse resolução de questões do Enem e de vestibulares com abordagem dos conteúdos de forma resumida, pensando em apresentar o conteúdo ali tratado como uma ferramenta para a agilidade na resolução. Este estágio foi realizado no Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Santa Catarina (CA/UFSC), localizado em Florianópolis/SC, no 3º ano do EM. O período de realização do estágio foi de 11 semanas, sendo que seu início foi em 19 de setembro de 2022 e finalizou dia 02 de dezembro de 2022, compreendido por uma etapa de observação do ambiente escolar e pela prática docente. Tal ambiente tornou-se um lugar de problematização das questões que de algum modo já me inquietavam, em especial, me provocaram a pensar sobre como os vestibulares e Enem influenciam e direcionam a atuação docente.

É importante ressaltar que a realização do estágio não ocorreu em uma turma regular, mas em uma turma especial, denominada Recuperação de Estudos (RE).

[1] Bolsista do PET-Matemática/UFSC.

As aulas dessa turma aconteceram no Laboratório de Matemática da escola no horário do contraturno e tinham duração de duas horas, uma vez na semana. No ensino fundamental, os estudantes com notas abaixo da média são chamados para participar da RE. Já no ensino médio, este horário é aberto, de modo que qualquer estudante que queira participar será bem vindo. Particularmente, na RE do terceiro ano do EM, que é a turma na qual atuei juntamente com dois colegas no Estágio Supervisionado III, a professora regente solicitou que abordássemos o conteúdo de trigonometria do 1º e do 2º ano do EM. Isso porque boa parte deste conteúdo foi ministrado durante a pandemia de forma remota, deixando lacunas no aprendizado dos estudantes.

Ao planejar o conteúdo buscamos seguir as orientações da professora que sugeriu que trabalhássemos principalmente a resolução de questões do Enem e de vestibulares. Sendo assim, as aulas planejadas pelos estagiários seguiram tais orientações e mantiveram o foco nas questões e problemas voltados para os vestibulares e ENEM. Porém, se de um lado nossas aulas mantiveram o foco no conteúdo e na resolução de problemas, por outro, fomos provocados a pensar: qual o papel da educação básica no Brasil? Que tipo de sujeitos deseja-se formar? A que modelo de sociedade estamos servindo? Afinal, uma formação cidadã envolve muito mais do que simplesmente aprender conteúdos para passar no vestibular e assumir postos de trabalhos onde simplesmente operamos como mais uma engrenagem do sistema.

De acordo com Barros (2014) os processos seletivos para o acesso às universidades (vestibulares e Enem) são guiados por uma lógica individualista e competitiva. Deste modo, estas provas exaltam quase exclusivamente a dedicação individual, desviando o olhar de todos os demais fatores que são fundamentais para a aprovação dos estudantes.

Na primeira aula da minha atuação docente, que foi no dia seguinte à prova do Enem, houve uma conversa entre algumas professoras da escola e as estudantes presentes que fizeram a prova, sobre como tal método, dito de avaliação, parece irreal para as condições que o ensino público oferece. Em especial, um ponto que ficou latente na conversa foi do cansaço e o desgaste físico e mental provocados pelo tempo excessivo dispendido pelos candidatos ao realizar as provas.

Nessa aula, abordei o conteúdo das funções seno e cosseno para números reais. Preparei uma revisão sucinta e quatro questões para serem resolvidas em sala. Ao longo da aula, o modo como as estudantes se relacionavam com o conteúdo e com as questões propostas chamou minha atenção, pois olhavam para as opções de resposta numa tentativa de eliminar alguma alternativa e otimizar a resolução da questão, tudo isso com um único propósito que era economizar tempo. E, por conta disso, acabavam perdendo informações importantes e oportunidade de aprender os conceitos de outro modo, dando sentido e significado para a matemática.

Barros (2014) destaca o fato de que os estudantes começam a ser treinados para os vestibulares desde os anos finais do Ensino Fundamental (EF), à partir do 6º ano. Durante minha atuação no Estágio Supervisionado II, no 7º ano do EF pude verificar essa constatação, uma vez que questões de vestibulares e Enem faziam parte do dia a dia da sala de aula de matemática.

Já na segunda aula da minha atuação docente, apresentei a função tangente e revisamos alguns aspectos das funções seno e cosseno, seguindo para a resolução de questões. Nesta aula chamou minha atenção a postura das estudantes que pareciam mais reflexivas sobre o conteúdo, buscando construir alternativas para resolver as questões, com foco no aprofundamento do conteúdo e não na otimização do tempo. Como de costume, no ambiente da RE conversa-se sobre inquietudes em relação a questões escolares e, neste dia, não foi diferente. A discussão foi sobre as pegadinhas presentes nas questões de vestibulares, que possuem a característica de desclassificar os estudantes por detalhes sutis.

Do mesmo modo, durante minha atuação como professora no Gauss (curso pré-vestibular social, que é projeto de extensão do PET Matemática/UFSC), também me deparo com inquietudes semelhantes. Isto porque o Gauss é voltado para os vestibulares e o Enem, porém, reconheço que existem lacunas no aprendizado. Essas inquietudes me colocam em estado de constante reflexão sobre como abordar os temas nas aulas de modo que os estudantes possam desenvolver habilidades que os auxiliem almejar a tão sonhada vaga nas universidades sem que, com isso, minimize-se o aprendizado significativo.

Neste contexto, Santos (2011) afirma que o treinamento sabota o caráter espontâneo de se adquirir conhecimento, pois recorre a macetes, dicas, atalhos para resolver as questões de modo mais rápido. Por outro lado, a concorrência é algo que preocupa os educadores pois acaba por nivelar com a mesma régua capacidades individuais e distintas.

O Estágio Supervisionado é uma oportunidade que proporciona ao professor em formação a reunião das teorias e das práticas abordadas durante o curso de forma que possa, à sua maneira, desenvolver a atuação na sala de aula (SANTOS FILHO, 2010). Neste sentido, a experiência vivenciada durante o período do Estágio Supervisionado III possibilitou que eu aplicasse os aprendizados que tive até então na minha jornada acadêmica. Para além do aprendizado do Estágio Supervisionado III, pude perceber a diferença em lecionar para outra faixa etária e com outros objetivos para além da aprendizagem, como vestibulares e o Enem.

Dentre muitas problemáticas educacionais que nos deparamos durante o estágio, o papel do ensino da matemática, em especial no 3º ano do EM, chama nossa atenção e nos convoca pensar e problematizar o modo como viemos fazendo e conduzindo essa etapa da escolaridade. Esta é uma reflexão muito importante que deve acompanhar o professor uma vez que o cenário atual da educação não tem dado sinais de mudanças de rumo quando se trata de ingressar no ingresso Ensino Superior. Com isso, o que deve estar em jogo não é a adaptação ao sistema ou a construção de mecanismos e estratégias que o alimentem, mas antes, a possibilidade de questioná-lo, desnaturaliza-lo, considerando as implicações e as ressonâncias de um aprendizado significativo para a formação dos estudantes.

Referências:

[1] BARROS, Aparecida da Silva Xavier. Vestibular e Enem: um debate contemporâneo. **Ensaio: avaliação e políticas públicas em educação**, v. 22, p. 1057-1090, 2014.

[2] BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, LDB. 9394/1996.

[3] SANTOS FILHO, Agnaldo Pedro. O Estágio Supervisionado e sua importância na formação docente. **Revista P@rtes**. 2010. Disponível em: https://www.partes.com.br/2010/01/04/o-estagio-supervisionado-e-sua-importancia-na-formacao-docente/ Acesso em: 06/12/2022.

[4] SANTOS, Jean Mac Cole Tavares. Exame Nacional do Ensino Médio: entre a regulação da qualidade do Ensino Médio e o vestibular. **Educar em revista**, p. 195-205, 2011.

Diversidade de corpos e almas: proposta de um jogo para trabalho com Educação Matemática Inclusiva

Sibeli da Rosa Da Rocha
Licenciatura em Matemática - UFPR
sibarocha02@gmail.com

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
gabriel.santos22@gmail.com

Palavras-chave: Educação Matemática, Diversidade, Educação Inclusiva.

Resumo:

No período dos séculos XIX e XX, já existia o reconhecimento em relação à demanda de uma educação especial voltada para pessoas com deficiência. Nesse cenário, entretanto, a educação era frequentemente segregada entre as pessoas consideradas “normais” ou “típicas” e aquelas que apresentavam alguma deficiência. Com os anos, surgiram movimentos favoráveis ao reconhecimento dos direitos das pessoas com deficiência, aliados às consequências advindas da Segunda Guerra Mundial, as quais contribuíram para uma onda de sensibilização para com as pautas de inclusão (ROGALSKI, 2010).

A abordagem da Educação Inclusiva surgiu posteriormente à Educação Especial com uma perspectiva mais abrangente, que visa a participação de todos os alunos em ambientes educacionais inclusivos, sendo impulsionada por mudanças sociais, legais e educacionais, de modo a assegurar que todas as pessoas, independentemente de suas características individuais, tenham acesso a uma educação de qualidade em ambientes de aprendizagem que respeitem suas necessidades e promovam a igualdade de oportunidades. Portanto, a abordagem relativa à Educação Inclusiva transcende a Educação Especial que prioriza pessoas com deficiência, visto que abrange um escopo mais amplo, visando à incorporação integral de todos os indivíduos (D’AMBRÓSIO, 1996).

A instituição escolar, desempenhando seu papel como entidade social encarregada da formação ética e do ensino de novas gerações, encontra-se responsável por assumir uma função primordial na edificação de uma sociedade caracterizada pela justiça, equidade e solidariedade. Nesse contexto, é imprescindível que a escola adote uma abordagem educacional pautada na diversidade, com o objetivo de proporcionar um ambiente em que os jovens, que vivenciam processos inclusivos, possam se desenvolver e, consequentemente, passem a assumir atitudes, quando chegarem na vida adulta, que promovam a valorização da inclusão. É sob a orientação da escola que os discentes são preparados para a convivência em sociedade, de modo que a escola, ao permitir uma Educação Inclusiva, viabilize um espaço propício para o debate sobre a

pluralidade, possibilitando reflexões que auxiliem o estudante na construção de sua criticidade (RAMOS, 2021).

A intersecção entre a Educação Matemática e as questões de diversidade de gênero, orientação sexual e racial configura-se como um espaço frutífero para o desenvolvimento de abordagens pedagógicas que transcendam estereótipos e preconceitos. Na essência dessa abordagem, reside a premissa de que a Educação Matemática Inclusiva não apenas reconhece a multiplicidade de identidades e trajetórias dos alunos, mas também almeja empoderá-los por meio do desenvolvimento de habilidades matemáticas críticas e do estímulo à reflexão sobre as implicações sociais e culturais da matemática de forma a promover uma formação matemática que seja verdadeiramente acessível e significativa para todos os estudantes, independentemente de sua identidade de gênero, orientação sexual ou origem étnica (MANTOAN, 2003).

O jogo que será apresentado neste trabalho está inserido no âmbito da Educação Matemática nas discussões de Educação Matemática Inclusiva, particularmente, daquelas que tratam de diversidade de gênero, de orientação sexual e racial. O objetivo deste trabalho é apresentar e dar continuidade na produção do jogo intitulado “Diversidade de Corpos e Almas”, o qual foi produzido inicialmente para ser entregue como trabalho final da disciplina "Diversidade Étnico-Racial, de Gênero e Sexualidade", ministrada pela Professora Mestra Lennita Oliveira Ruggi, durante o segundo semestre letivo de 2021 da Universidade Federal do Paraná .

No que diz respeito à dinâmica do jogo, configura-se em uma sequência de dois tabuleiros, sendo que os jogadores desconhecem quais são os marcadores sociais atribuídos a cada peão, fundamentado pela realidade, na qual não se detém controle sobre a definição dos próprios marcadores sociais. Por outro lado, os peões poderão ser impressos para serem personalizados de forma que passem a representar a identidade de seus respectivos jogadores. A trajetória individual de cada peão traçará um percurso único, embora todos os caminhos se intersectam com pelo menos um outro caminho, de forma que esperasse simbolizar a noção de interseccionalidade, a qual se refere aos múltiplos traços e marcadores sociais que juntos moldam a identidade de cada indivíduo.

Ao longo da jornada do primeiro tabuleiro, torna-se evidente que os marcadores sociais próprios a cada peão influenciam sobre a dinâmica do jogo. O intuito do jogo reside em mostrar que entre as esferas da vida e da sociedade, existem vantagens e desvantagens, de modo que se faz essencial reconhecer as variadas manifestações de opressão e privilégio que podem ser vivenciadas pelas pessoas devido à multiplicidade de suas identidades.

Seguindo essa linha de raciocínio e para reforçar a veracidade dessa condição, a segunda parte da sequência se propõe a delinear a trajetória das conquistas de determinados direitos por parte dos diferentes peões, de modo a ilustrar como as vantagens e desvantagens influenciaram para que alguns direitos ainda não tenham sido conquistados. Em razão disso, os peões nomeados por “hétero”, “homem cis” e “branco” são os únicos a conseguirem finalizar todo o caminho chegando ao centro, de modo a representar que esses são os únicos que possuem todos os seus direitos garantidos.

Almejando facilitar o acesso ao material produzido para o jogo, todas as partes receberam sua versão digitalizada através da plataforma *Canva* na versão gratuita. Além disso, todos os links de acesso foram compilados em um único site, o qual pode ser acessado através do link https://linktr.ee/diversidadedecorposealmas.

A aplicação desse jogo em aulas de matemática viabiliza uma abordagem educacional pautada na diversidade, com o intuito de criar um ambiente propício para o desenvolvimento de abordagens pedagógicas que transcendam estereótipos e preconceitos, de tal forma que os alunos estejam inseridos em um ambiente que estimule-os à reflexão sobre as implicações sociais e culturais da matemática, de forma a proporcionar uma formação matemática que seja genuinamente acessível e significativa para todos os estudantes, independentemente de sua identidade de gênero, orientação sexual ou origem étnica.

De mais a mais, acredita-se que o jogo apresentado nesse trabalho possui potencial para ser ampliado para mais disciplinas, permitindo que outros educadores possam se apropriar da essência do jogo para adaptá-lo conforme suas práticas específicas. Por exemplo: um professor de geografia poderia concentrar-se nas questões relacionadas aos gráficos que retratam os temas por região, enquanto o professor de história poderia incorporar o uso do segundo tabuleiro para explorar os acontecimentos ocultos que influenciaram as conquistas dos direitos de cada peão através da representação de fatos históricos. Como resultado, torna-se evidente que o jogo tem a capacidade de ser adaptado ou reestruturado para abranger diversas áreas de estudo presentes na escola, de modo a transcender a Educação Matemática Inclusiva para uma abordagem mais ampla da Educação Inclusiva.

Referências:

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: Da teoria à prática. 12. ed. São Paulo: Papirus, 1996.

MANTOAN, Maria Teresa Eglér. **Inclusão escolar**: O que é? Por quê? Como fazer? São Paulo: Moderna, 2003.

RAMOS, Leni Rodrigues. **A interseccionalidade na educação inclusiva:** marcadores sociais da diferença. 2021. TCC (Especialização) - Curso de Pós-Graduação Lato Sensu em Diversidade e Gênero na Educação, Universidade Federal da Integração Latinoamericana (UNILA), Foz do Iguaçu, 2021.

ROGALSKI, Solange Menin. **Histórico do surgimento da educação especial**. REI Revista de Educação do IDEAU, Passo Fundo, v. 5, n. 12, p. 169-182, jul./dez. 2010. Disponível em: https://www.caxias.ideau.com.br/wp-content/files_mf/f6c2ec65b238d0bd435622272470b9dd168_1.pdf. Acesso em: 28 de Agosto de 2023.

A Matemática nos anais do Congresso de Leitura (COLE)

Sibeli da Rosa Da Rocha[1]
Licenciatura em Matemática - UFPR
sibarocha02@gmail.com

Elenilton Vieira Godoy (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
elenilton@ufpr.br

Palavras-chave: Congresso, Matemática, Revisão Bibliográfica Sistemática.

Resumo:

O Congresso de Leitura (COLE) teve sua primeira edição em 1978 e 23 edições, que ocorrem com periodicidade bianual, entre o seu ano inicial e o ano de 2023. O COLE é realizado pela Associação de Leitura do Brasil (ALB) com o objetivo de promover temas como leitura, literatura, educação e escrita e reunir pesquisadores(as), educadores(as), estudantes, escritores(as) e promotores(as) de leitura para debater tais temas visando contribuir para a formação de professores(as) e para o desenvolvimento da pesquisa na área de leitura no Brasil.

Por se tratar de um evento consolidado nacionalmente, surge a questão: "Como a Matemática aparece nos artigos do Congresso de Leitura do Brasil ?". A partir dessa indagação é estabelecido o objetivo de pesquisar como a Matemática é apresentada nos anais do COLE. Devido a isso, foi necessário pensar quais métodos seriam usados para alcançar o propósito e responder a pergunta orientadora, portanto, decidiu-se prosseguir por meio de uma revisão bibliográfica sistemática (RBS), em busca de todos os trabalhos das comunicações orais dos anais do evento que envolvam Matemática.

De mais a mais, a fonte primária desse trabalho foi toda retirada do site oficial da Associação de Leitura do Brasil (ALB) para garantir a confiabilidade, visto que a ALB é responsável por organizar o evento e de publicar os trabalhos em suas revistas. Das vinte e três edições do COLE, apenas os anais a partir da décima segunda edição estão disponíveis, contudo apenas os links de dez edições estavam funcionando integralmente, tendo estes sido objeto de análise.

Deu-se início a RBS pela definição das etapas a serem seguidas e dos filtros a serem aplicados. Do total de 5575 trabalhos disponíveis, 272 foram selecionados após os critérios de identificação e qualificação, porém, apenas 211 foram escolhidos para compor o *corpus* de análise do projeto em virtude da aplicação do filtro 1, o qual selecionou somente os artigos que possuem sua versão integral para acesso. Prosseguindo com a análise, os trabalhos foram categorizados de acordo

[1]Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) financiado pelo CNPq

com o nível de escolaridade, segmentando-se em: Educação Infantil, Ensino Fundamental Anos Iniciais (1º ao 5º ano), Ensino Fundamental Anos Finais (6º ao 9º ano), Ensino Médio e Ensino Superior. Importa mencionar que determinados artigos não se sujeitaram a uma única classificação, uma vez que foram englobados, simultaneamente, em diferentes níveis de escolaridade. Em virtude dessa constatação, foi-se necessário incluir as classificações mistas envolvendo mais de um nível de escolaridade. Juntamente a essas categorias há o grupo de "não identificado", o qual foi atribuído a trabalhos que não detalharam o nível de escolaridade referente ou que abordaram perspectivas teóricas.

Devido à limitação de tempo estabelecido para a realização desse projeto, optou-se por selecionar um subconjunto das categorizações para ser objeto de análise minuciosa através da leitura na íntegra. Portanto, a continuação foi direcionada aos artigos classificados como Ensino Médio, bem como àqueles que abordam a categorização mista, envolvendo turmas do Ensino Médio e Ensino Fundamental Anos Finais. Nesse contexto, dos 211 artigos previamente selecionados, foram submetidos à análise detalhada um total de 16 trabalhos.

O COLE é um evento itinerante que realiza suas edições em diferentes cidades do país. Nesse contexto, os artigos que estão sendo submetidos a análise provêm de edições distintas do COLE, realizadas em diversas cidades brasileiras. O COLE de 2012 foi sediado na cidade de Curitiba, Paraná; o de 2009 ocorreu em Campinas, São Paulo; o de 2005 teve lugar em Porto Alegre, Rio Grande do Sul; já o COLE de 2003 foi realizado em Florianópolis, Santa Catarina.

Em relação à análise das regiões de cada trabalho, destaca-se que, dentre as quatro edições mencionadas, três tiveram sua realização nos estados da região Sul do Brasil, enquanto apenas uma se deu na região Sudeste. Ainda assim, é válido notar que dos trabalhos selecionados, para análise pertencentes à amostra final deste estudo, provém predominantemente da região Sudeste, representando aproximadamente 94% do total. Esta dominância pode ser atribuída, em parte, ao fato de que a edição de São Paulo, ocorrida em 2005, contribuiu significativamente para a amostra, com 12 dos 16 artigos analisados, sendo que sozinhos já representam 75% do total.

Quando se procede à análise dos autores presentes nas bibliografias de cada trabalho, é perceptível que há um total de 107 autores referenciados nos 16 trabalhos selecionados. Assim sendo, é relevante notar que, desse repertório, nove autores são mencionados em mais de um artigo. Nota-se que os autores mais citados foram todos referenciados em pelo menos três artigos. Além disso, os autores mais referenciados são Ubiratan D'Ambrosio e Ole Skovsmose, os quais são mencionados em quatro dos 16 artigos analisados.

Ao proceder com a análise do *corpus*, fica evidente a presença de temas que se destacam, sendo estes: Aluno como Leitor, Contextualização, Ser Crítico, Interdisciplinaridade, Conhecimento com Significado, Uso dos Temas Presentes no Contexto do Aluno, Autonomia do Aluno. De modo que é perceptível que tais temas estão correlacionados entre si, de uma maneira que juntos revelam a existência de um movimento contrário ao ensino tradicional da Matemática. Esse movimento reconhece a necessidade de incentivar a criticidade dos alunos para torná-los autônomos para a tomada de decisões dentro e fora da sala de aula, de modo que assumam a responsabilidade de sua própria aprendizagem. Ademais, a contextualização corrobora para potencializar o engajamento do aluno com a Matemática, principalmente se a contextualização se der por temas que são de interesse do aluno. Para isso, o professor pode recorrer ao um ensino interdisciplinar, uma vez que trabalhar um conteúdo através das diferentes visões de cada disciplina permite uma melhor compreensão por parte do aluno. Para mais, faz-se necessário se atentar para a interdisciplinaridade entre a Matemática e a língua materna, e como a segunda é usada para traduzir a primeira, por isso o aluno deve ser um leitor capaz de dominar a língua materna para conseguir entender e expressar a Matemática; para que dessa forma, possibilite a existência de um ensino que priorize o conhecimento com significado. Por fim, fica evidente que a Matemática é vista como um instrumento, o qual está sendo utilizado para desenvolver o aluno como cidadão capaz de tomar decisões sociais e políticas.

O que torna um matemático um bom professor?

Sibeli da Rosa Da Rocha
Licenciatura em Matemática - UFPR
sibarocha02@gmail.com

Tania Teresinha Bruns Zimer (Orientadora)
Departamento de Teoria e Prática em Ensino - UFPR
taniatbz@ufpr.br

Palavras-chave: Matemática, Formação de Professores, Investigação.

Resumo:

Durante a graduação em um curso de licenciatura, os discentes buscam entender quais são os requisitos para se tornarem bons docentes. A tarefa de ser professor e como ser um bom professor não vem explicada em livros, uma vez que não há uma receita de como agir para cumprir as responsabilidades da profissão. Dessa forma, entre as possibilidades formativas, uma delas, é basear-se nas experiências dos docentes atuantes, de modo que esses, ao transmitirem informações, orientações, conselhos e ensinamentos sobre suas próprias trajetórias, inspirem os licenciandos que estão iniciando na área.

Este trabalho se refere a um recorte de uma das atividades desenvolvidas com duas turmas da disciplina de Prática de Docência em Matemática I, do 2º semestre de 2022, do curso de Matemática da Universidade Federal do Paraná. E tem como objetivo refletir sobre o que torna um matemático um bom professor a partir da análise de aspectos da relação professor e alunos e da prática docente, revelados por professores de Matemática, atuantes na Educação Básica. Por conseguinte, este trabalho realizará a análise das respostas coletadas pelos licenciandos durante o estágio obrigatório, com o interesse de encontrar possíveis relações entre os professores entrevistados e suas práticas docentes, buscando indícios do que pensam que torna um licenciando em Matemática um bom professor.

Os licenciandos, discentes da disciplina, foram organizados em grupos para acompanharem nove professores supervisores de Matemática, atuantes em cinco instituições públicas de ensino, com o propósito de assistirem às aulas; analisarem a aprendizagem matemática dos alunos e entrevistarem os professores supervisores para responderem a um questionário com questões sobre a rotina do professor de Matemática na Escola.

Para essa pesquisa, foram analisadas as duas versões do questionário aplicado, sendo a versão do turno vespertino com 40 perguntas e a versão do turno noturno com 51 perguntas, separadas em blocos temáticos sobre: Características Gerais da Escola; Motivação Docente; Professor no Início de Carreira; Conselho de Classe; Relação entre Professor e Alunos; Planejamento; Metodologia de Ensino e

Prática Docente. Até o momento, foram finalizadas as análises relativas aos blocos de “Relação entre Professor e Aluno” e "Prática Docente", dentre essas estão nove perguntas do primeiro bloco e seis perguntas do segundo. As perguntas sobre o bloco temático Relação entre Professor e Alunos abordam sobre as concepções dos professores a respeito do limite da relação pessoal e profissional do professor com os alunos e da interferência dessas relações na aprendizagem. Ainda, neste bloco, os professores são questionados em relação à responsabilidade de suas falas e o efeito que essas repercutem nos alunos, além de como identificar e trabalhar com a dificuldade em relação à aprendizagem da matemática. Enquanto, no segundo bloco, as perguntas abordam sobre a Prática Docente do professor supervisor, erros a serem evitados e conselhos que esses gostariam de receber no início de sua carreira.

Para analisar o conteúdo das respostas às 15 perguntas, primeiramente reuniu-se os dados de todos os respondentes em um único documento separado em seções para cada bloco de perguntas. Cada seção continha para cada pergunta, as respostas dos licenciandos agrupados conforme o professor supervisor. Em seguida, foi realizada uma leitura integral do arquivo para obter-se uma visão geral, para então, as respostas serem sintetizadas e transferidas para uma única planilha, com o intuito de simplificar a organização dos dados. Na etapa seguinte, iniciou-se um processo de identificação utilizando cores para sinalizar aproximações e similaridades das informações reveladas nas respostas. Por fim, as comparações resultantes desse processo foram reunidas em um arquivo separado, facilitando a elaboração das considerações finais, com base nos resultados encontrados.

Tratando-se ainda de análises iniciais, pode-se destacar que os resultados dos dois primeiros blocos analisados evidenciam que é de forma majoritária que os professores acreditam que é possível manter uma relação pessoal com o aluno, desde que seja mantido o profissionalismo e respeito de ambas as partes, não ultrapassando um limite estabelecido. Caso necessário, buscam recorrer à equipe pedagógica para entender a situação do aluno e em situações de falas mal interpretadas, os professores tentam resolver a questão imediatamente. Com relação à Prática Docente, a maioria respondeu que a sua formação acadêmica não foi suficiente para assumir uma sala de aula, porém não houve concordância sobre quanto tempo é necessário para que o docente se sinta preparado.

A análise em curso abrange os demais blocos, sendo que as perguntas relativas ao bloco Característica Gerais da Escola visam identificar não apenas as condições estruturais da instituição escolar, mas também determinar quais são os recursos e apoios disponíveis para o professor de Matemática. Ao passo que as perguntas relativas aos blocos Motivação Docente e Professor em Início de Carreira têm o propósito de entender, respectivamente, as motivações pessoais para seguir na profissão docente e as experiências no início da carreira, incluindo os desafios, os erros e o apoio da comunidade escolar. No que se refere às perguntas relativas ao bloco Conselho de Classe, tem-se como finalidade questionar a condução e atuação do conselho de classe, enquanto, as perguntas relativas ao bloco Metodologias de Ensino têm a intenção de averiguar os critérios adotados por cada professor para a seleção de suas metodologias de ensino e se essas escolhas impactam nas avaliações dos alunos. Por último, as perguntas relacionadas ao bloco Planejamento buscam compreender quais as adaptações são necessárias para lidar com os imprevistos inevitáveis ao longo do ano.

De mais a mais, faz-se necessário anunciar como aviso prévio que não existe uma única e certa resposta referente a pergunta “o que é ser um bom professor?”, tampouco para a pergunta “o que torna um matemático um bom professor?”. Haja visto que, como já mencionado, não existe uma receita pronta com as instruções a serem seguidas para cumprir a tarefa de ser um bom professor. Dessa forma, as experiências de cada indivíduo, que busca ser um bom professor, serão responsáveis por moldar e transformar suas práticas pedagógicas.

Revisitando experiências: investigando as concepções de professores de Matemática acerca de suas vivências no PIBID

Thais Spannenberg Machado dos Passos[1]
tatasmp10@gmail.com

Elenilton Vieira Godoy (Orientador)
elenilton@ufpr.br

Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: História Oral, Licenciatura em Matemática, Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência.

Resumo:

Este resumo é referente a investigação “Revisitando experiências no PIBID: investigando as concepções de professores de Matemática acerca de suas vivências no PIBID” realizada pelos autores junto ao edital de 2020 do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) da Universidade Federal do Paraná (UFPR). A pesquisa referida identificou os aprendizados docentes adquiridos por um grupo de licenciandos que teve seu contato com a sala de aula antecipado devido a sua participação no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da UFPR. Seu desenvolvimento se deu por meio do contraste entre as opiniões de tais estudantes acerca do programa do qual fizeram parte enquanto estavam na graduação e, após sua graduação, durante sua atuação profissional.

Os posicionamentos destes indivíduos durante sua participação no programa foram identificados por meio da revisão dos relatórios redigidos pelos pibidianos ao final de sua experiência no projeto. A análise destes textos permitiu a identificação de assuntos recorrentes em seus relatos acerca do papel do PIBID em sua formação, possibilitando a formulação de cinco tópicos de revisão: Decisivo para a permanência/desistência do curso; Propiciou mudança na visão em relação ao ambiente escolar; Propiciou mudança na visão em relação ao papel do professor da educação básica; Auxiliou no aprimoramento de conceitos matemáticos e/ou educacionais; e Auxiliou no desenvolvimento de características pessoais.

Para identificar as visões atuais de tais docentes com respeito aos tópicos abordados por eles e seus colegas em seus relatórios de participação no PIBID, foram elaboradas entrevistas semi-estruturadas utilizando como inspiração a História Oral Temática e os excertos de texto retirados dos relatórios. Dentre os autores dos relatórios analisados, fizemos contato com quatro deles, sendo que dois aceitaram

[1] Voluntária do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica

colaborar com a pesquisa. Como proposto pela metodologia escolhida, após realizadas as entrevistas, as conversas foram transcritas, textualizadas e aprovadas pelos entrevistados antes de serem analisadas. A partir destes textos foi possível identificar três tópicos principais para as análises: Considerações a respeito da experiência na Universidade; Influências com relação à carreira docente; e Considerações com respeito à participação no PIBID. Os dados coletados por meio destas entrevistas foram analisados e relacionados aos relatórios, anteriormente examinados, para que pudéssemos entender a importância da participação desses professores no PIBID durante sua graduação.

Uma das conclusões construídas ao final da investigação indica que, por mais que os resultados de outras pesquisas e as análises desta investigação nos mostrem que o PIBID é um espaço que auxilia o desenvolvimento dos licenciandos e proporciona experiências únicas para sua formação, observamos que a formação inicial docente realizada pelo curso de Licenciatura em Matemática da UFPR enfrenta um grande desafio na preparação de seus docentes a respeito das suas habilidades sociais relacionadas às vivências no ambiente escolar para além do ensino da Matemática.

Aulas Paraná: um estudo sobre a Geometria

Vinícius Bueno da Costa
Licenciatura em Matemática - UFPR
vinicius.b.costa@ufpr.br

Prof. Emerson Rolkouski (Orientador)
Departamento de Expressão Gráfica - UFPR
rolkouski@ufpr.br

Palavras-chave: Educação Matemática, Geometria, Aulas Paraná.

Resumo:

O projeto "Aulas Paraná" foi desenvolvido em resposta à situação emergencial da pandemia do Covid-19, no intuito de fornecer recursos de ensino remoto. No entanto, mesmo passada a pandemia e com ela o retorno às aulas presenciais, esses materiais se tornaram parte essencial da rotina escolar, muitas vezes se tornando obrigatórios, o que justifica a necessidade de uma análise crítica.

Este estudo tem como objetivo contribuir nesse movimento e se propõe a analisar o conteúdo dos slides disponibilizados no projeto "Aulas Paraná" na unidade temática de Geometria dos anos finais do Ensino Fundamental. Tal análise terá como foco incorreções conceituais e metodológicas.

Os procedimentos metodológicos iniciaram-se com uma leitura flutuante de todo o material disponível, abrangendo os anos finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Essa leitura indicou maiores problemas na unidade temática de Geometria e nos anos finais do Ensino Fundamental, razão pela qual tal unidade e nível foi escolhido. A partir daí, realizamos uma leitura minuciosa dos slides, procurando por incorreções conceituais e incoerências metodológicas. Por fim, categorizamos as incoerências encontradas em três grupos principais: “conceito”, “representação e notação” e “metodologia e didática”.

A fundamentação teórica para esta análise abrangeu pressupostos da Educação Matemática, permitindo-nos avaliar o material em diálogo com as teorias e tendências dessa área de pesquisa.

A identificação de uma quantidade considerável de incorreções já nas primeiras leituras sugere que não houve uma avaliação criteriosa desse material. Com isso, espera-se que os resultados deste estudo forneçam indicadores para o necessário abandono desses materiais que, pela natureza de sua construção, deveriam se restringir ao momento emergencial para o qual foram elaborados, evitando o seu uso, por vezes obrigatório, tanto por professores do quadro próprio do magistério quanto

pelos professores contratados via Processo Seletivo Simplificado.

Referências:

[1] EDITORA AUTÊNTICA. **COLEÇÃO TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.** Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2001.

[2] Secretaria de Estado da Educação e do Esporte do Paraná. (2020). **Aulas Paraná**. Disponível em: https://www.aulaparana.pr.gov.br/. Acesso em: 05 de setembro de 2023.

Educação Financeira no Ensino Fundamental: propostas e saberes na perspectiva histórica

Willian Hideki Batista Alves Yotsumoto
willianyotsumoto@gmail.com [1]

Prof. Mariliza Simonete Portela (Orientadora)
mariliza.portela@unespar.edu.br [2]

Prof. Liceia Alves Pires (Coorientadora)
liceia.pires@unespar.edu.br [3]

[1,2,3] Universidade Estadual do Paraná (Unespar) – Campus Paranaguá

Palavras-chave: História da Educação Matemática, Educação Financeira, Ensino Fundamental.

Resumo:

O trabalho aqui apresentado deriva do Programa de iniciação científica (PIC) que tem como objetivo estudar a presença da educação financeira nas propostas escolares, na perspectiva histórica, buscando compreender como esse conteúdo de ensino esteve presente em documentos oficiais normativos. As fontes de pesquisa utilizadas são dois documentos normativos na esfera federal e um na esfera estadual: a Base Nacional Comum Curricular (2018), os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) e o Currículo para a Escola Básica do estado do Paraná (1990). Tratando-se de uma pesquisa em História da Educação Matemática, os escritos de historiadores como Valente (2020), Pinto (2014), Vidal (2010) e Mendes (2015) darão suporte teórico. Entendendo que a cultura escolar e a história das disciplinas estão presentes nos estudos, os escritos de Chervel (1990) norteiam a pesquisa. Deste modo, podemos aprofundar conhecimentos, discutindo a oportunidade de aprofundar conhecimentos, discutindo com pesquisadores experientes acerca dos saberes constituintes da profissionalização do educador matemático e da própria história do ensino da matemática, além de desenvolver a capacidade crítica para melhor exercer a docência. Estudar as propostas e os saberes da profissionalização “deve assegurar aos professores uma formação com qualidade que possa ser repercutida sobre o conjunto do sistema educativo” (BORER, 2017, p. 173). No bojo dos saberes voltados para cada área do conhecimento, há aqueles necessários para o ensino de matemática, entretanto o olhar sobre os saberes também precisa ser discutido. Essas discussões, na perspectiva histórica, têm sido apresentadas na forma de livros e artigos, fundamentando novas pesquisas aplicadas a temas específicos. Neste contexto, a História da Educação Matemática é um campo recente de pesquisas e, segundo Valente (2020), é no final da década de 1980 que surge como um novo campo disciplinar e profissional. A educação Financeira está presente na atual proposta da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) 2018, no conjunto das ideias que compõem

a Matemática favorecendo um estudo interdisciplinar nas dimensões "culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro" (BRASIL, 2018, p. 271). Essa abertura permite, além das relações com os conceitos matemáticos, a discussão da função e uso do dinheiro, do consumo em momentos históricos diversos, promovendo desenvolvimento de competências pessoais e sociais para a vida prática. O documento anterior que direcionava a educação, Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), aponta a matemática como um componente importante na construção da cidadania que deveria estar ao alcance de todos. O documento faz uma abordagem histórica da disciplina e segue atendendo a organização de uma escolaridade em ciclos – que no caso do estado do Paraná, está presente nos documentos orientadores de 1990. Ao estudar o Currículo para a Escola Básica do estado do Paraná (1990), observamos que a proposta previa professores e alunos inseridos numa prática social global e embora com funções diferenciadas devem ter práticas articuladas para promover o conhecimento. Para entender como cada proposta é construída se faz necessário um olhar da cultura local e da cultura escolar. Esses estudos são necessários para que o pesquisador situe seu objeto de pesquisa no espaço e no tempo que lhes são próprios. Assim é possível entender o presente e nele intervir se considerar importante. Nesse contexto, temos questões muito interessantes para serem investigadas, a começar pela atual proposta (BNCC, 2018): como está proposta a abordagem desse tema no documento em questão e quais os saberes indicados para esse ensino? O aprofundamento dessa temática na perspectiva histórica se dará com o estudo dos documentos anteriores propostos direcionados pelas questões que derivam da inicial: como estavam propostos, nos documentos anteriores, os direcionamentos para as discussões no âmbito da educação financeira? Quais as nomenclaturas utilizadas? Como figuravam os saberes na matemática a ser ensinada? Os professores tinham orientações nesse sentido? Espera-se com essa pesquisa compreender elementos importantes da educação matemática, assim como da educação financeira e poder promover discussões ao processo de ensinar e aprender matemática no Ensino Fundamental.

Referências:

[1] BORER, V. L. Saberes: uma questão crucial para a institucionalização da formação de professores. In HOFESTETTER e VALENTE Orgs, **Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores.** 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

[2] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

[4] CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, n. 2, p. 177-229. 1990.

[5] MENDES I. A. M. **História da Matemática no ensino:** entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

[6] PARANÁ, **Currículo Básico para a Escola Pública do Estado do Paraná, SEED.** Curitiba: Imprensa Oficial do Estado do Paraná,1990.

[7] PINTO, N.B. História das disciplinas escolares**:** reflexão sobre aspectos teóricosmetodológicos de uma prática historiográfica. **Rev. Diálogo Educacional**, Curitiba, 2014.

[8] VALENTE, W. R. **Ciências da Educação, campos disciplinares e profissionalização:** saberes em debate para a formação de professores**.** 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

[9] VIDAL D. G. e SCHWARTZ, C. M. Orgs. **História das Culturas Escolares no Brasil.** Vitória: EDUFES, 2010.

Equações Diferenciais

Corretores de resumos:

Professores:

Prof. Roberto Ribeiro Santos Júnior

Banca Avaliadora:

Professores:

Prof$^{\underline{a}}$. Janaína Schoeffel
Prof$^{\underline{a}}$. Nara Bobko
Prof. Roberto Ribeiro Santos Júnior

Um estudo sobre séries de Fourier e a energia transportada por ondas numa corda

Cezar Augusto Glislere*
czr.glislere@ufpr.br [1]

Prof. Dr. Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)
wagnermoraes@ufpr.br [2]

[1,2] Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: equação da onda, série de Fourier, energia mecânica.

Resumo:

Este trabalho visa a dedução da equação da onda unidimensional e, com base nela, realizar uma análise da energia mecânica transportada por uma corda. A equação da onda é uma equação diferencial parcial que descreve a propagação de ondas, como ondas sonoras, ondas eletromagnéticas e ondas de água, em um meio. Ela tem uma longa história na física e na matemática, e sua formulação e compreensão evoluíram ao longo do tempo. A teoria das ondas começou a ser desenvolvida no século XVIII com os trabalhos de cientistas como Daniel Bernoulli e Leonhard Euler. Eles estudaram a propagação de ondas em cordas vibrantes e fluidos. No século XX, a teoria das ondas continuou a se desenvolver com contribuições significativas da física quântica e da teoria eletromagnética de Maxwell. As equações da onda foram fundamentais para descrever fenômenos como a propagação da luz e as ondas de matéria.

Vamos deduzir a equação da onda em um cenário unidimensional, focando especificamente em como ela descreve as vibrações transversais de uma corda ou cabo elástico. Essa corda elástica pode ser encontrada em diferentes contextos, como uma corda de instrumento musical, como um violino, um cabo de reboque ou até mesmo uma linha de transmissão em uma rede elétrica.

Imagine uma corda completamente flexível e elástica esticada entre dois pontos fixos, alinhados no mesmo plano horizontal. Estabelecemos o eixo x ao longo dessa corda, com suas extremidades localizadas em $x = 0$ e $x = L$. Quando a corda é iniciada em movimento em um determinado momento $t = 0$ e está livre de influências externas, ela vibrará verticalmente por conta própria, desde que não haja nenhum tipo de amortecimento, como a resistência do ar, por exemplo. Para encontrar a equação diferencial que governa o movimento dessa corda, vamos analisar as forças que atuam em um pequeno segmento da corda, com comprimento Δx, localizado entre os pontos x e $x + \Delta x$. Vamos supor que o movimento da corda seja pequeno o suficiente para

*Voluntário do Programa de Voluntariado Acadêmico (PVA) que cada ponto da corda se desloque apenas verticalmente em um segmento de linha reta. Denotaremos por $u(x,t)$ o deslocamento vertical do ponto x em um momento t. Para deslocamentos de pequena amplitude na corda, a equação assume sua forma convencional

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = c^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \tag{1}$$

em que c é uma constante que envolve a densidade da corda ρ e a tensão aplicada na corda τ. Como a corda está presa nas extremidades temos duas condições de contorno

$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$$

para todo t. Além disso, o padrão de movimento da corda será influenciado pela sua deflexão inicial, representada como $f(x)$ no instante de tempo $t = 0$, e pela sua velocidade inicial, denotada por $g(x)$ no mesmo momento. Portanto, temos essas duas condições iniciais

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ 0 \leq x \leq L.$$

Ao empregarmos o método de separação de variáveis, supomos que nossa solução é da forma

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

e obtemos duas Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's): uma associada a $F(x)$ e outra a $G(t)$. Isso nos capacita a encontrar soluções para essas EDO's que estejam em conformidade com as condições de contorno especificadas.

Posteriormente, mediante a utilização das Séries de Fourier, combinamos as soluções obtidas para alcançar a solução da equação (1) que satisfaça as condições de contorno. Com esse procedimento, alcançamos a solução para o modelo da corda vibrante, que terá a seguinte forma (com $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \lambda_n t + B_n \lambda_n t) \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{2}$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

em que A_n e B_n são chamados de **coeficientes de Fourier**. Uma pergunta que naturalmente surge ao examinar essa serie é se ela realmente converge para uma solução $u(x,t)$. Através do **teorema da Representação em Séries de Fourier**, podemos concluir que (2) converge de fato para uma solução $u(x,t)$ quando as condições iniciais são suficientemente regulares.

Ao adentrarmos nas aplicações da física, com ênfase no estudo das energias cinética e potencial nas frequências fundamentais, podemos utilizar a equação (2) como ponto de partida. Ao explorarmos suas implicações no contexto físico, torna-se possível calcular a energia mecânica de um sistema de corda vibrante. Esse cálculo nos capacitará a conduzir uma análise minuciosa dos elementos que influenciam a energia mecânica em tal sistema vibratório.

Iniciando com a energia cinética, podemos reescrevê-la como:

$$K = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2.$$

Seguindo o mesmo procedimento com a energia potencial elástica, obtemos:

$$V = \frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

Ao estabelecermos uma relação entre ambas as equações e a equação (2), obtemos o seguinte resultado para a média das energias cinéticas e potencial na corda durante o período fundamental:

$$\overline{K} = \frac{L\rho}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2\left(A_n^2 + B_n^2\right)$$
$$\overline{V} = \frac{L\tau}{8}\sum_{n=1}^{\infty}k_n^2\left(A_n^2 + B_n^2\right)$$

Ao efetuarmos a soma das equações, conseguimos calcular a média da energia mecânica total de um sistema de cordas vibrantes:

$$\overline{E} = \overline{K} + \overline{V} = \frac{L\rho}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2\left(A_n^2 + B_n^2\right)$$

com os coeficientes de Fourier representados A_n e B_n. Com isso, podemos chegar à conclusão de que a energia total de vibração de um segmento de corda é formada por contribuições independentes de cada uma das oscilações em que a vibração pode ser dividida.

Referências

[1] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

[2] KREYSZIG, Erwin. **Matemática superior para engenharia**. LTC, 2018.

[3] ELMORE, William Cronk; ELMORE, William C.; HEALD, Mark A. **Physics of waves**. Courier Corporation, 1985.

Equações Diferenciais e Modelos Epidemiológicos

Leonardo Cortez*
leonardo.cortez@ufpr.br [1]
Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)
wagnermoraes@ufpr.br [2]
[1,2]Universidade Federal do Paraná - UFPR

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias, Modelos Epidemiológicos, Sistemas de Equações Diferenciais.

Resumo:

Na população humana, uma doença infecciosa como o sarampo, gripe ou COVID-19 espalha-se devido à combinação de características patogênicas e comportamento humano. As características patogênicas determinam as circunstâncias sob as quais uma pessoa contagiosa pode infectar outra. O comportamento humano determina a frequência com que estas circunstâncias ocorrem. O objetivo deste trabalho foi estudar a disseminação do vírus da COVID-19, em uma população considerada constante, através de modelos epidemiológicos dados por sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Em um primeiro modelo, supomos que um indivíduo suscetível pode contrair a doença de um indivíduo infectado. O indivíduo suscetível, então, torna-se infectado, e mantém-se infectado até ficar curado. Uma vez curado, o infectado volta a ser suscetível, dado que não existe imunidade a esta doença. Este modelo é conhecido como modelo SIS e possui a seguinte formulação matemática:

Supomos que a população tem tamanho constante. Seja $S(t)$ a fração da população que é suscetível no instante t e seja $I(t)$ a fração da população que está infectada no instante t. Temos $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$ e $S(t)+I(t) = 1$. Um indivíduo suscetível torna-se infeccioso devido a um contato com um indivíduo infeccioso. Esse contato tem que ter as características apropriadas para a transmissão da doença. Estas características podem estar relacionadas com a duração do contato, a proximidade dos indivíduos durante o contato, onde o contato ocorre, se o indivíduo doente espirra, etc. Estes pressupostos levam ao seguinte par de equações para as taxas:

$$\begin{cases} S'(t) = & -\beta S(t)I(t) & +\gamma I(t) \\ I'(t) = & \beta S(t)I(t) & -\gamma I(t). \end{cases}$$

*Bolsista PET-Matemática UFPR

A constante β é chamada de coeficiente de transmissão, sendo a taxa de novas infecções quando todas as pessoas contactadas são suscetíveis:

$$\beta = \frac{\text{pessoas contactadas}}{\text{pessoa infectada} \cdot \text{dia}} \cdot \text{ probabilidade de transmissão.}$$

Já a constante γ está relacionada com o tempo de recuperação da doença. O tempo médio para o qual as pessoas ficam doentes com a doença que está sendo modelada é dado por $1/\gamma$.

O número básico de reprodução R_0 é o valor mais importante calculado em modelos epidemiológicos. R_0 é o número médio de indivíduos infectados por cada indivíduo infectado quando uma doença é introduzida numa população, no pressuposto de que a totalidade da população, em particular todas as pessoas que se encontram com individuo infectado, é suscetível à doença. Além disso, vale que:

- Se $R_0 < 1$, então a fração da população infectada tende a 0, ou seja, a fração da população infectada se aproximará de 0 e a doença desaparecerá.
- Se $R_0 > 1$, então a fração da população infectada se aproximará de um valor de equilíbrio positivo:
$$I(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{R_0}$$
e a doença se torna então endêmica.

Para um segundo modelo, podemos supor que uma vez contraída a doença, o indivíduo se torna imune a doença. Assim, dividimos a população em três grupos: suscetíveis, infectados e recuperados. Sejam $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ as frações da população em cada grupo no tempo t. Temos que os três termos são não-negativos e $S(t)+I(t)+R(t) = 1$, para todo t e, semelhantemente ao caso anterior, obtemos o sistema SIR:

$$\begin{cases} S'(t) = & -\beta S(t)I(t) & \\ I'(t) = & \beta S(t)I(t) & -\gamma I(t) \\ R'(t) = & & \gamma I(t), \end{cases}$$

em que as constantes β e γ possuem o mesmo significado como anteriormente. É possível mostrar que ao considerar uma doença que possa ser fatal obtemos um sistema análogo ao SIR, mas tendo em mente que as constantes β e γ e o grupo $R(t)$ possuem novas interpretações.

Basedos no modelo SEIR, que considera que os infectados por uma doença não são contagiosos imediatamente após adquirí-la, e sim após um determinado tempo, podemos deduzir um modelo que considera os diferentes tipos de infectados causados pela COVID-19. Os suscetíveis que contraem Covid-19 ficam assintomáticos e não contagiosos por cerca de 2,5 dias (chamamos de Expostos). Eles, então, se tornam contagiosos por cerca de 2,5 dias antes de desenvolver qualquer sintomas (chamamos de Contagiosos). Após esse período, cerca de um terço dos portadores da Covid continua assintomático, mas contagioso (chamamos de Assintomáticos) os outros dois terços desenvolvem sintomas enquanto permanecem contagiosos (chamamos de Infectados). O grupo assintomático deixa de ser contagioso após cerca de cinco dias, o grupo sintomático após cerca de dez dias. Chamamos esse modelo de modelo SECIAR, por conta de seus compartimentos:

- S para Suscetíveis: sem doença e sem imunidade;
- E para Expostos: infectados, não contagiosos e sem sintomas;
- C para Contagiosos: infectados, contagiosos e sem sintomas;
- I para Infectados: infectados, contagiosos e com sintomas;
- A para Assintomáticos; infectados, contagiosos e sem sintomas;
- R para Removidos: recuperados imunes ou falecidos.

As equações para o modelo SECIAR são:

$$\left\{\begin{array}{rcl} S'(t) & = & -\beta_C S(t)C(t) - \beta_I S(t)I(t) - \beta_A S(t)A(t) \\ E'(t) & = & \beta_C S(t)C(t) + \beta_I S(t)I(t) + \beta_A S(t)A(t) - \gamma_E E(t) \\ C'(t) & = & \gamma_E E(t) - \gamma_C C(t) \\ I'(t) & = & p\gamma_C C(t) - \gamma_I I(t) \\ A'(t) & = & (1-p)\gamma_C C(t) - \gamma_A A(t) \\ R'(t) & = & \gamma_C C(t) + \gamma_A A(t). \end{array}\right.$$

Podemos considerar o modelo SECIAR como uma cópia do modelo SIR em mais alta dimensão de infectados, i.e., como os compartimentos E, C, I e A são todos infectados, passamos de um compartimento infectado 1-dimensional para um 4-dimensional. Para fazer a análise desse modelo, utilizamos o método da Matriz da Próxima Geração (MPG), a fim de encontrar o valor de R_0.

Referências

[1] LOPEZ-FLORES, M.M.; MARCHESIN, D.; MATOS, V.; SCHECTER, S. **Equações diferenciais e modelos epidemiológicos.** Rio de Janeiro: Editora IMPA, 2021.

[2] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

[3] KREYSZIG, E. **Matemática Superior para Engenharia.** 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

Modelagem Matemática da Dinâmica de COVID-19

Mariana da Silva Freitas *
Licenciatura em Matemática - UFPR
mariandasilvafreitas@hotmail.com

Profª. María Rosario Astudillo Rojas (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
maria.astudillo@ufpr.br

Palavras-chave: Covid-19, modelo de Gompertz, modelo SIRD adaptado.

Resumo:

A pandemia de COVID-19 teve impactos significativos na saúde pública e na sociedade em âmbito global. Desde o início das medidas de isolamento no Brasil em março de 2020, a disseminação do vírus aconteceu de maneira rápida, resultando em um elevado número de casos de infecção e óbitos. Diante dessa crise sanitária, compreender a propagação da doença e desenvolver estratégias de controle eficazes tornou-se primordial para as autoridades responsáveis. Este trabalho tem como objetivo prinicipal analisar e aplicar os modelos de Gompertz e SIRD adaptado aos dados de COVID-19 no Brasil fornecidos pelo Ministério da Saúde do Brasil.

O modelo de Gompertz, originado do trabalho de Benjamin Gompertz, inicialmente idealizado para descrever o crescimento populacional, tem encontrado ampla aplicação na pesquisa sobre a COVID-19. Isso ocorre devido à semelhança entre o comportamento desse modelo e o desempenho de uma pandemia. No entanto, nesse modelo, não há uma separação nítida entre os estados que um indivíduo pode ocupar durante a pandemia.

Em contrapartida, o modelo SIR, proposto por Kermack e McKendrick, divide a população em três compartimentos distintos: suscetíveis (S), infectados (I) e recuperados (R), e descreve as taxas de transmissão da doença e de recuperação como parâmetros fundamentais. Esse modelo caracteriza o estado de um indivíduo (suscetível, infectado ou recuperado) ao longo do desenvolvimento de uma doença, relacionando esses estados por meio de um sistema não-linear de equações diferenciais. Uma das principais hipóteses consideradas é de que o tamanho da população permance constante. Ao adicionar um quarto compartimento, que representa os óbitos relacionados à doença, tem-se uma variação desse modelo: o modelo SIRD (Suscetíveis-Infectados-Recuperados-Óbitos).

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) - Matemática.

É importante ressaltar que, apesar de o modelo SIR possuir uma solução analítica, ela é fornecida na forma paramética, o que dificulta a sua análise. Entretanto, quando a hipótese de que o tamanho da população é constante é desconsiderada, e é incluída a taxa de mortalidade, é possível encontrar uma solução explícita para o modelo, dando origem ao modelo SIRD adaptado.

Os dados coletados pelo Ministério da Saúde do Brasil foram utilizados na aplicação e análise dos modelos de Gompertz e SIRD adaptado. Com os resultados obtidos, foi possível comparar a capacidade preditiva dos modelos Gompertz e SIRD adaptado em relação à propagação da doença.

Referências

[1] BORKAR, V. S.; MANJUNATH, D. **Revisiting sir in the age of covid-19:** Explicit solutions and control problems. SIAM Journal on Control and Optimization, 2022.

[2] MEDINA-MENDIETA JUAN FELIPE; CORTÉS-CORTÉS, M. C.-I. M. **Covid-19 forecasts for cuba using logistic regression and gompertz curves.** Medicc Review, 2020

[3] Ministério da Saúde. **Coronavírus Brasil**. 2023. Acesso em: 23 de agosto de 2023. Disponível em: https://covid.saude.gov.br/.

Estudo das equações em diferenças com algumas aplicações biológicas

Mireya Mendiguren Mager *
mireya.mendiguren@grad.ufsc.br [1]

Dr. Francis Félix Cordova Puma (Orientador)
francis.cordova@ufsc.br [2]

[1,2] Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Campus Blumenau

Palavras-chave: modelagem matemática, equações em diferenças, dinâmica populacional, propagação de plantas.

Resumo:

O objetivo principal deste estudo é modelar matematicamente fenômenos biológicos associados a crescimento ou propagação de indivíduos de uma população ou conjunto, usando as equações em diferenças. Com isso mostramos como a Teoria relacionada pode ser uma ferramenta útil para esse fim.

Na jornada de assimilar novos conceitos matemáticos, frequentemente nos deparamos com situações nas quais precisamos confiar nas teorias existentes, sendo um desafio a aplicação dessas em situações biológicas. No entanto, para uma compreensão sólida, é essencial ser capaz de visualizar esses conceitos de forma tangível, contextualizando-os e dando forma ao que inicialmente parece abstrato. Nesse contexto que a modelagem matemática deu significado ao estudo das equações em diferenças.

Como um exemplo do crescimento Malthusiano, onde não há uma interferência externa, modelamos a divisão celular como $x_{n+1} = \alpha x_n$, onde α representa o parâmetro biótico (rapidez de aumento ou diminuição populacional). A solução geral está relacionada com a Progressão Geométrica.

Ainda, o modelo de Verhulst, para o crescimento populacional, representa uma função logística, onde tende a uma capacidade de suporte, do qual não ultrapassa. A relação de recorrência representada como $x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n)$, mostra comportamentos variados de acordo com os valores de μ.

Incorporando limitações ambientais ao crescimento populacional, como exemplo a propagação de plantas, na modelagem incorporamos novos parâmetros, com o qual nos deparamos com uma equação em diferenças homogênea de 2° ordem, $x_{n+2} = \alpha x_{n+1} + \beta x_n$. Para a solução encontramos um método de redução de ordem.

*Voluntaria

Essa abordagem nos permite observar novos parâmetros bióticos suficientes para um controle populacional.

Referências

[1] BASSANEZI, R. C. **Ensino:** aprendizagem com Modelagem Matemática. São Paulo: Contexto, 2002.

[2] BONOMO, W. **Sistemas dinâmicos discretos:** estabilidade, comportamento assintótico e sincronização. 83 f. Dissertação de Mestrado em Ciências (Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

[3] CIPOLLI, V. G. **Sistemas Dinâmicos Discretos:** análise de estabilidade. 149 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática (Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

[4] DINIZ, G. L. **Equações de diferenças e sistemas:** com aplicações biológicas. São Carlos: SBMAC, 2011.

[5] HENAREJOS, A. W. **Observabilidade e controlabilidade de modelos biológicos.** 139 f. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (Licenciatura em Matemática) – Centro Tecnológico de Ciências Exatas e Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, 2023.

[6] JESUS, E. A. de; TELLES, T. da S.; D'AFONSECA, L. A. **Sistemas Dinâmicos Discretos.** 78 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) – Sociedade Brasileira de Matemática, Universidade Federal de São João Del-Rei, São João Del-Rei, 2016.

[7] SILVA, D. M. da. **Modelagem Matemática Aplicada ao Controle e Manejo Integrado de Pragas em Lavouras do Milho.** 115 f. Dissertação de Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional (Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados à Engenharia e Ciência) - Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2019.

Estudo de equações diferenciais ordinárias no desenvolvimento do vírus HIV

Nicole Cristine Schwaemmle
nicole.schwaemmle@ufsc.br [1]

Louise Reips (Orientadora)
l.reips@ufsc.br [2]

[1,2]Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Campus Blumenau

Palavras-chave: parâmetros, modelo, modelagem, equações, imunodeficiência humana.

Resumo:

Modelos matemáticos permitem, de forma clara e objetiva, criar instrumentos para explicar e analisar eventos e fenômenos presentes no cotidiano humano. Tais ferramentas facilitam diversas estimativas e previsões, tornando-se assim, de suma importância para futuras tomadas de decisões. Em virtude disso, elaborou-se um estudo matemático a respeito da propagação do HIV, vírus da imunodeficiência humana. O principal intuito dessa pesquisa foi analisar e prever, de forma matemática, a a contaminação e desenvolvimento do vírus levando em consideração as interações celulares humanas. Tal estudo relaciona termos que representam quantidade de células CD4 +T, células CD4+T infectadas, e quantidade de vírus no exterior dessas células, através do modelo preexistente conhecido como SIR, que trata-se de um dos mais simplórios existentes. Além dos dados citados, foi realizada uma ampla pesquisa na literatura em busca de parâmetros úteis para a representação matemática em questão. Por fim, após o desenvolvimento e estudo das equações diferenciais ordinárias que modelam o comportamento biológico, utilizou-se, em conjunto, algoritmos de programação para obter resultados através da simulação numérica.

Referências

[1] CHOU, Ching-Shan; FRIEDMAN, Avner. **Introduction to mathematical biology**. Switzerland: Springer, 2016.

Geometria e Topologia

Corretores de resumos:

Professores:

Prof. Carlos Eduardo Durán Fernández
Prof. Ricardo Paleari da Silva

Banca Avaliadora:

Professores:

Prof. Carlos Eduardo Durán Fernández
Prof. Ricardo Paleari da Silva

Estudantes de pós-graduação:

Thiago Paulichen

Um Estudo de Curvas no Espaço de Lorentz-Minkowski

Arthur Rothenberger

Licenciatura em Ciências Exatas - UFPR

arthurdrothenberger@gmail.com

Alex Paulo Francisco (Orientador)

CPP - CEM UFPR

alexpf@ufpr.br

Palavras-chave: Lorentz-Minkowski, Curvas, Relatividade Geral.

Resumo: Frequentemente, encontramos em filmes, livros e séries de ficção representações de viagens no espaço e no tempo, como por exemplo em, “De volta para o futuro”, “Vingadores: Ultimato”, “Interestelar” e muitos outros. Será que as concepções apresentadas nessas obras possuem algum tipo de fundamento físico-matemático? Até que ponto esses eventos cinematográficos condizem com a ciência atual e a partir de que ponto passa a ser apenas ficção? Neste trabalho abordamos problemas relacionados com essas questões e trazemos o que a ciência nos diz sobre viagens no tempo e no espaço. Por exemplo, segundo a ciência, seria possível viajar no tempo? No filme “Interestelar” observamos que a viagem no espaço acarreta uma diferença de idade (tempo) entre as pessoas na Terra e as que realizaram a viagem espacial, o que a ciência nos diz sobre esses efeitos da viagem no espaço?

Analisando questões como essas, é possível observar algumas aplicações interessantes que são moldadas através da Teoria da Relatividade Geral. Um ponto interessante é que: “A Geometria Diferencial Lorentziana transcende o interesse puramente matemático e se estende até o domínio da física, tornando-se a linguagem matemática da Teoria da Relatividade Geral”[2].

Na teoria da relatividade especial de Albert Einstein, o mundo real é modelado pelo chamado espaço de Minkowski, o qual é, basicamente, uma combinação de um espaço euclidiano com uma dimensão extra envolvendo o tempo. Para definir formalmente tal espaço, iniciamos definindo um produto escalar Pseudo-Euclideano de

índice $v \in \mathbb{N}$, que pode ser entendido como uma forma bilinear $\langle .,. \rangle_v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, com $n \geq 2$, dada por:

$$\langle x, y \rangle \doteq \sum_{i=1}^{n-v} x_i y_i - \sum_{i=n-v+1}^{n} x_i y_i, \qquad \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Definimos o espaço Pseudo-Euclideano de índice $v \geq 1$, denotado $\mathbb{R}^n_v$, como o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, equipado com suas operações convencionais de adição e multiplicação por escalar, munido agora do pseudo-produto escalar $\langle .,. \rangle_v$.

Um caso particular de espaço Pseudo-Euclidiano surge quando tomamos $v = 1$, tal espaço é chamado de espaço de Lorentz-Minkowski, denotado por $\mathbb{L}^n \doteq \mathbb{R}^n_1$.

Munido dessas definições, observamos que, para $v \geq 1$, o produto não define uma forma bilinear positiva definida, o que torna possível classificar os elementos em $\mathbb{R}^n_v$ conforme o valor do pseudo-produto escalar de um vetor consigo mesmo e atribuindo um caráter causal a tal vetor. Essa classificação define três categorias, chamadas caráter causal: Dado $u \in \mathbb{R}^n_v$ temos que u é tipo "espaço" quando $\langle u, u \rangle > 0$ ou $u = 0$, tipo "tempo" quando $\langle u, u \rangle < 0$ e tipo "luz" quando $\langle u, u \rangle = 0$. Essa característica essencial promove uma mudança tanto na nossa compreensão matemática quanto visual do espaço. Além disso, essas propriedades exercem um impacto significativo na Álgebra Linear aplicada a esse espaço, reconfigurando conceitos fundamentais como ortogonalidade e distância. É essencial enfatizar que devido à tricotomia da relação de ordem dos números reais, cada vetor adquire exclusivamente um único tipo causal.

A partir de tal classificação, podemos identificar as regiões correspondentes a cada caráter causal, em especial estaremos interessados na região de $\mathbb{R}^n_v$ formada por todos os vetores do tipo luz, a qual é chamada de "cone de luz". Em particular, para $v = 1$ e $n = 3$, temos que o "cone de luz" é representado por um cone de fato, o qual divide $\mathbb{L}^3$ nas regiões do tipo tempo, no interior do cone, e do tipo espaço, no exterior do cone.

O principal objetivo deste estudo é entender as diferenças na Álgebra Linear ocasionadas por essa mudança na métrica e explorar a Geometria Diferencial de curvas, identificando as principais diferenças em relação ao espaço euclidiano. Além disso, também será realizada uma análise superficial de algumas propriedades físicas que se relacionam com esse espaço.

Referências

[1] CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**, v. 6. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[2] COUTO, I. T.; LYMBEROPOULOS, A. **Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

[3] DE PAULA, C. T.; DE ÁVILA RODRIGUES, L.M.D. **A geometria do espaço de Minkowski e a teoria da relatividade especial**. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, v. 9, n. 1, 2023.

[4] O'NEILL, B. **Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity**. Academic Press, 1983.

[5] SANTOS, J. C. **Minkowski, Geometria e Relatividade** . Revista Brasileira de História da Matemática, v. 9, n. 18, p. 115–131, jul. 2009.

[6] TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. Editora Blucher, 2008.

Borsuk-Ulam para $\mathbb{S}^2$ e o Teorema das Panquecas.

Gabriel Luiz de Freitas* e Mahmut Telles Cansiz†

Bacharelado em Matemática - UFPR

gabrielfreitas@ufpr.br e mahmut@ufpr.br

Profa. Gisele Texeira Paula (Orientadora)

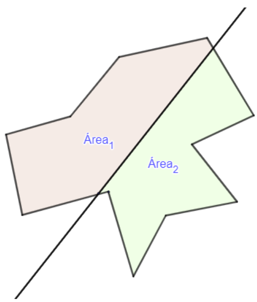
Departamento de Matemática - UFPR

giseleteixeira@ufpr.br

Palavras-chave: Topologia Algébrica, Homotopia, Teorema de Borsuk-Ulam.

Resumo:

Considere a seguinte pergunta: Dado um polígono limitado com um formato qualquer, será que conseguimos, com um único corte em linha reta, dividí-lo em dois polígonos de mesma área?



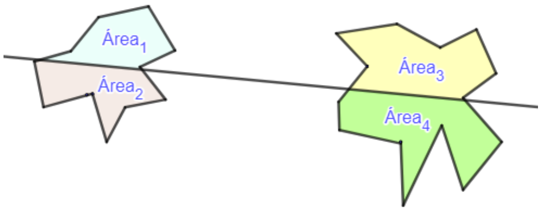
Sim! E podemos provar isso usando apenas conceitos de análise na reta.

Mas e se quisermos fazer a mesma coisa, só que com dois desses polígonos?

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial: PET-Matemática.

†Bolsista do Polo Olímpico de Treinamento Intensivo: POTI-UFPR.

Isto é, com um único corte em linha reta, podemos dividí-los em menores polígonos com metade de suas áreas originais?



A resposta é sim! Mas provar isso não é tão simples...

Com tal motivação, o objetivo desse trabalho é apresentar, seguindo a abordagem de [1], algumas noções de ferramentas da topologia algébrica, usadas para demonstrar os seguintes teoremas:

Borsuk-Ulam para $\mathbb{S}^2$: Dada uma função contínua $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$, então existe $x \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Teorema das Panquecas: Dadas duas regiões poligonais em $\mathbb{R}^2$, então existe uma reta em $\mathbb{R}^2$ que as bisecta.

Vale comentar que, em nosso caso, enunciamos o resultado para regiões poligonais, pois são mais simples de trabalhar. Entretanto, não precisamos nos restringir a conjuntos dessa forma, basta apenas que os conjuntos sejam mensuráveis e limitados, mas essa abordagem envolvendo teoria da medida foge do objetivo da apresentação. Além disso, ambos os resultados podem ser generalizados para maiores dimensões, como mostrado em sequência, mas suas demonstrações exigem ferramentas mais avançadas de topologia algébrica.

Teorema de Borsuk-Ulam: Dada uma função contínua $f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, então existe $x \in \mathbb{S}^{n+1}$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Teorema: Se $A_1, A_2, \dots A_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ forem conjuntos limitados e mensuráveis, então existe um n-plano que os bisecta.

Referências

[1] Munkres, J. R. **Topology**; Pearson College Div; 2nd edition (January 1, 2000)

O Teorema de Milnor–Schwarz

Isac Messias Michelon e Mahmut Telles Cansiz*

Bacharelado em Matemática - UFPR

isacmicic@gmail.com e mahmut@ufpr.br

Profa. Gisele Texeira Paula (Orientadora)

Departamento de Matemática - UFPR

giseleteixeira@ufpr.br

Palavras-chave: geometria de grupos, quasi-isometrias, ações de grupos.

Resumo:

A álgebra e a geometria são áreas consolidadas da matemática dentro e fora do universo acadêmico. Não só são duas grandes áreas de pesquisa da matemática, como acompanham de perto o aluno na sua trajetória pelo ensino básico. Elas sempre andam muito próximas, quase de mãos dadas, e isso fica evidente ao olhar o processo de aprendizagem e abstração matemática, como por exemplo utilizar de conceitos de volume para explicar multiplicação de monômios, ou posteriormente do conhecimento de manipulações e operações algébricas para desenvolver a trigonometria e refinar o estudo geométrico. No ambiente acadêmico, a relação entre ferramentas dessas duas grandes áreas é algo constante, e nossa proposta é apresentar um resultado que exemplifica bem isso, inserido no contexto de Teoria Geométrica de Grupos.

A Teoria Geométrica de Grupos é uma área relativamente recente. Ela traz ferramentas interessantes tanto para auxiliar na identificação de propriedades geométricas de espaços métricos através de propriedades de grupos que agem sobre esses espaços, quanto fazer o caminho inverso, identificar propriedades algébricas de grupos a partir de propriedades geométricas de espaços onde se consegue exibir uma ação desse grupo com "propriedades boas".

Um resultado interessante dessa via de mão dupla é o Teorema de Milnor-Schwarz, que afirma que se existir uma ação de um grupo em um espaço métrico, sob certas condições que definiremos na apresentação, então podemos concluir que esse grupo é finitamente gerado e quasi-isométrico ao espaço métrico. Iremos usar a abordagem de [1] para apresentar os resultados propostos.

*Bolsista do Polo Olímpico de Treinamento Intensivo: POTI-UFPR.

Para entendermos melhor o conceito de quasi-isometria mencionado no teorema, vamos pensar que essa é uma relação de equivalência entre espaços métricos, definida da seguinte forma: dizemos que X e Y são quasi-isométricos se existir uma quasi-isometria entre eles, isto é, uma aplicação $f : X \to Y$ que é grosseiramente bilipschitz, no seguinte sentido: existem contantes $L \geq 0$ e $C \geq 0$ tais que, para $x, y \in X$,

$$\tfrac{1}{L} d_X(x,y) - C \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_x(x,y) + C,$$

bem como uma “quasi-inversa” para f, isto é, uma função $g : Y \to X$ com a mesma propriedade acima, e tal que existe uma constante $K \geq 0$ tal que, para todos $x \in X$ e $y \in Y$,

$$d_X(g \circ f(x), x) \leq K \text{ e } d_Y(f \circ g(y), y) \leq K.$$

Retornando ao enunciado do teorema, notamos que a partir de uma ação de grupos sobre um espaço, nós conseguimos, ao pensar o grupo como um espaço métrico:

- Encontrar semelhanças entre a geometria do grupo e a do espaço;
- concluir propriedades puramente algébricas do grupo.

O objetivo dessa apresentação é dar uma ideia da demonstração do teorema e mostrar algumas de suas consequências.

Futuramente, estudaremos noções tanto de espaços métricos quanto de grupos que são invariantes por quasi-isometrias. Esse resultado permitirá transitar de um ambiente para outro preservando essas noções.

Referências

[1] Loh, C. **Geometric group theory** Springer; 1st ed. 2017 edition (January 19, 2018)

O Teorema de Seifert-Van Kampen e suas consequências.

Mahmut Telles Cansiz*

Bacharelado em Matemática - UFPR

mahmut@ufpr.br

Profa. Gisele Texeira Paula (Orientadora)

Departamento de Matemática - UFPR

giseleteixeira@ufpr.br

Palavras-chave: Topologia Algébrica, Grupo Fundamental, Teorema de Seifert-Van Kampen.

Resumo:

A topologia é a área que tem como principal objetivo descobrir formas de identificar quando é que dois espaços topológicos são homeomorfos. Uma estratégia para isto é a de buscar invariantes topológicos por homeomorfismos, isto é, propriedades topológicas que são passadas de um espaço para outro através de um homeomorfismo.

Motivado por isso, um dos tópicos clássicos de topologia algébrica é o grupo fundamental de um espaço topológico, um objeto algébrico associado ao espaço através da relação de equivalência de homotopia de caminhos.
Dois espaços homeomorfos tem grupos fundamentais isomorfos, ou seja, sabendo que o grupo fundamental de dois espaços não são isomorfos podemos afirmar que os espaços não são homeomorfos.
Isso faz com que um problema que era puramente topológico (identificar a possibilidade de dois espaços serem homeomorfos) possa ser transformado em um problema algébrico (dizer se os grupos fundamentais são isomorfos).

A partir de sua definição e de alguns resultados iniciais, é possível identificar o grupo fundamental de espaços topológicos simples, como $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^1$, mas para espaços um pouco mais complicados são necessários teoremas mais fortes, como o Teorema de Seifert-van Kampen.

O que o Teorema de Seifert-Van Kampen afirma é que se X é um espaço topológico que satisfaz:

---

*Bolsista do Polo Olímpico de Treinamento Intensivo: POTI-UFPR.

$$\begin{cases} X = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \text{ onde cada } U_\lambda \text{ é um aberto conexo por caminhos.} \\ \exists x_0 \in \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \\ U_\alpha \cap U_\beta, \text{ é conexo por caminhos pra todo } \alpha, \beta \in \Lambda. \\ U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma, \text{ é conexo por caminhos pra todo } \alpha, \beta, \gamma \in \Lambda. \end{cases}$$

então os grupos fundamentais de tais abertos, bem como o de suas interseções, nos dizem como é o grupo fundamental de X, e uma apresentação explícita desse grupo fundamental é fornecida em [2].

O objetivo dessa apresentação é enunciar o teorema e suas variações apresentadas em [1], dar uma ideia de suas demonstrações e calcular o grupo fundamental de alguns espaços como consequência do teorema.

Referências

[1] Munkres, J. R. **Topology**; Pearson College Div; 2nd edition (January 1, 2000)

[2] Hatcher, A. **Algebraic Topology**; Cambridge University Press; 1st edition (December 3, 2001).

Noções de topologia diferencial e aplicações

Natalia Chicora*
nataliachicora@gmail.com [1]

Prof. Dr. Eduardo Outeiral Correa Hoefel (Orientador)
hoefel@ufpr.br [2]

[1]Licenciatura em Matemática - UFPR
[2]Departamento de Matemática - UFPR

Palavras-chave: topologia, valores regulares, variedades, funções diferenciáveis.

Resumo:

O objetivo desse trabalho é estudar os conceitos introdutórios de topologia diferencial e algumas aplicações. Em especial, abordaremos o **Teorema Fundamental da Álgebra** (todo polinômio complexo não constante $P(z)$ deve ter uma raiz). Para a demonstração de tal teorema, utilizaremos a projeção estereográfica e a definição de **Valores Regulares**.

O conceito base do estudo da topologia diferencial é o de variedade diferenciável. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão m no $\mathbb{R}^n$ se para cada $x \in M$ há uma vizinhança $W \cap M$, com W aberto, que é difeomorfa a um conjunto U, também aberto, do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$. Qualquer difeomorfismo $h : U \to W \cap M$ é chamado de parametrização da região $W \cap M$.

Uma função $f : X \to Y$, com X e Y variedades diferenciáveis, é chamada difeomorfismo se f leva X homeomorficamente para Y e se f e f^{-1} são diferenciáveis. Um importante teorema que será apresentado é o **Teorema da Função Inversa**: se a derivada df_x é não singular, então f mapeia algum conjunto aberto U' suficientemente pequeno sobre x difeomorficamente para um conjunto aberto $f(U')$.

Seja $f : M \to N$ uma função diferenciável entre variedades. Dizemos que $x \in M$ é um ponto regular de f se a derivada df_x é não singular (uma transformação linear de posto máximo). Dizemos que um ponto $y \in N$ é um valor regular de f se $f^{-1}(y)$ contém apenas pontos regulares.

Outro teorema importante para esse estudo é o **Teorema da Função Implícita**: se $f : M \to N$ é uma função diferenciável entre variedades de dimensão $m \geq n$, e se $y \in N$ é um valor regular, então o conjunto $f^{-1}(y) \subset M$ é uma variedade diferenciável de dimensão $m - n$. A partir de tal proposição, podemos dar inúmeros exemplos de variedades em diferentes dimensões.

Um objeto topológico que exemplificaremos ao final do trabalho é a Garrafa de Klein, que é uma superfície não orientável. Como toda superfície que é imagem in-

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática versa de valor regular é orientável, temos que a Garrafa de Klein não pode ser dada como imagem inversa de um valor regular.

Referências

[1] MILNOR, John; WEAVER, David W. **Topology from the differentiable viewpoint**. Princeton university press, 1995.

[2] MUNKRES, James R. **Analysis on manifolds**. CRC Press, 1991.

[3] LIMA, Elon Lages. **Análise real:** funções de uma variável. IMPA, Coleção Matemática Universitária, v. 13, 2014.

[4] LIMA, Elon Lages. **Análise no espaço Rn**. IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2ª edição, 2014.

Projetos

Corretores de resumos:

Professores:

Prof$^{\underline{a}}$. Bruna Moraes Battistelli
Prof$^{\underline{a}}$. Maria Tereza Carneiro Soares

Estudantes de pós-graduação:
Marcia Regina Rodrigues da Silva Zago

Banca Avaliadora:

Professores:

Prof$^{\underline{a}}$. Bruna Moraes Battistelli
Prof. Emerson Rolkouski
Prof$^{\underline{a}}$. Maria Tereza Carneiro Soares

Estudantes de pós-graduação:

Amanda Cristina Foetsch
Marcia Regina Rodrigues da Silva Zago

Brincando de Matemático XVIII
Fractais e o Caos no Infinito

Ana Cleo Matias Vieira da Motta*, Brenda Dal Puppo Monteiro*, Carlos Alberto Lopes Clé Ventura da Silva*, Gabriel Luiz de Freitas*, Gabrieli Kmiecik*, João Gabriel Chiorato*, Kaiky Yuji Ishiy*, Kevyan Uehara de Moraes*, Laura Carolina Aymore Ferrandin*, Leonardo Cortez do Nascimento*, Lucca Gonçalves de Carvalho*, Mariana da Silva Freitas*, Natalia Chicora*, Samuel Adam Trindade de Souza*, Thais Spannenberg Machado dos Passos*, Thiago Batista dos Santos Martins*, Yanko Szuszko Soares [*]

petmatematica@ufpr.br [1]

Cléber de Medeira (Orientador)

clebermedeira@ufpr.br [1]

[1]Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino Médio; Sequências; Fractais.

Resumo:

O Brincando de Matemático é um evento de extensão promovido pelo PET Matemática da UFPR que tem como público alvo alunos do Ensino Médio e dos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. O grupo PET tem como objetivo principal com o Brincando tratar de forma descontraída assuntos da matemática que normalmente não são vistos na trajetória escolar convencional dos alunos, além de promover a matemática divertida, oferecendo uma oportunidade de prática docente diferenciada aos integrantes do grupo.

Para o planejamento do evento os integrantes do PET definiram o tema, a partir da apresentação de seminários internos com sugestões para este. Posteriormente, o foco foi voltado para a escrita do material, no qual foi embutido todo o conteúdo necessário para o desenvolvimento das atividades a serem realizadas no dia da aplicação do evento, para que este fosse entregue aos alunos como uma base do que veriam. Os planos de aula e as atividades a serem desenvolvidas com os alunos foram preparados na sequência. Além destas ações, todo o processo de divulgação, inscrição, produção de certificados, e outros aspectos logísticos foram realizados pela equipe do PET.

O XVIII Brincando de Matemático foi realizado presencialmente no centro politécnico nos dias 10, 11 e 12 de julho de 2023, e teve como tema “Fractais e o Caos no Infinito”. No primeiro dia do evento foi tratado o assunto sobre sequências (progressões

[*]Membros do PET Matemática UFPR

aritméticas e geométricas), a sequência de Fibonacci e sua relação com o Retângulo de Ouro, e o número de Euler. Já no segundo dia tratamos sobre os fractais, sua definição e identificação, o Triângulo de Sierpinski, e abordamos o cálculo de área e perímetro de fractais gerados por figuras geométricas conhecidas. Por fim, no terceiro dia do evento desenvolvemos outros métodos para criação de fractais, como o Jogo do Caos, e apresentamos os fractais de Cantor e Koch e os conjuntos de Mandelbrot e Julia, dando aos estudantes uma breve definição de números complexos. Em todos os dias do evento desenvolvemos dinâmicas e atividades lúdicas para o desenvolvimento dos temas abordados.

Referências

[1] AZEVEDO, N. d. C. D. **O número de outro e suas construções geométricas**. Universidade Federal de Goiás, 2013.

[2] FERRER, J. V. **O número de outro na arte, arquitetura e natureza: beleza e harmonia**. Trabalho Apresentado à Universidade Católica de Brasília - UCB. Distrito Federal, 2005.

[3] FIGUEIRA, R. F. **O número de Euler**. Universidade Federal de Paraíba, 2017.

[4] KLEBANOFF, A. π **in the Mandelbrot set**. *Fractals*, World Scientific, v. 9, n. 04, p. 393-402, 2001.

[5] MENDES, M. **Polos olímpicos de treinamento**. Agora, v. 10, n. 2, p. 2.

[6] PAIXÃO, F. d. C. et al. **Aprendendo matemática com o triângulo de Sierpinski.**. XII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), 2016.

[7] PEITGEN, H. -O. et al. **Chaos and fractals: new frontiers of science**. [S.l.]: Springer, 2004 v. 106.

[8] SALLUM, É. M. **Fractais no ensino médio**. *Revista do professor de matemática*, v. 59, p. 1-8, 2005.

[9] SERRA, C. P.; KARAS, E. W. **Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos**. [S.l.]: Universitaria Champagnat, 1997.

[10] SIGLER, L. **Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's book of calculation**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003

[11] SOUZA, C. H S. de.; CLEMENTE, G. L. **Fractais: figuras de outra dimensão - parte i**.

Semana da Matemática

Brenda Dal Puppo Monteiro*, Gabriel Luiz de Freitas*, Gabrieli Kmiecik*, João Gabriel Chiorato*, Kaiky Yuji Ishiy*, Kevyan Uehara de Moraes*, Laura Carolina Aymoré Ferrandin*, Leonardo Cortez do Nascimento*, Marina da Silva Freitas*, Natalia Chicora*, Samuel Adam Trindade de Souza*, Thais Spannenberg Machado dos Passos*, Thiago Batista dos Santos Martins*
petmatematica@ufpr.br [1]

Prof. Cleber de Medeira (Orientador)
clebermedeira@ufpr.br [2]

[1]Licenciatura em Matemática, Bacharelado em Matemática - UFPR
[2]Professor no Departamento de Matemática - UFPR

Palavras-chave: Matemática, Graduação em Matemática, Projeto de Extensão.

Resumo:
O grupo PET-Matemática, com a atividade mencionada neste trabalho, tem como objetivo a melhoria do ensino de graduação, fornecendo assim uma formação acadêmica mais ampla aos estudantes matriculados nos cursos de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná. A Semana da Matemática é um evento que substitui a semana acadêmica dentro do curso de Matemática da UFPR; durante ela são apresentadas as várias faces de um profissional de matemática - professor, pesquisador, estudante, etc - tanto para alunos matriculados no curso quanto para os demais estudantes da instituição. O evento ocorreu nos dias 21 e 22 de março de 2023 e as atividades se deram por meio de palestras, mesas redondas e minicursos, contando com a presença de alunos(as), ex-alunos(as) e professores(as) do Departamento de Matemática da UFPR. Dentre os temas abordados, contamos com as palestras: “Mudanças nos Conteúdos de Ensino Médio e Ensino Fundamental” e “Qual a relação entre a disputa marítima entre Peru e Chile e as cônicas parábola, elipse e hipérbole?”, com mesas redondas sobre Ensino, Pós graduação e Carreiras, além dos minicursos de Látex e Geometria Dinâmica.

*Membros do Programa de Educação Tutorial - Matemática

Assistência em Matemática no Colégio Professor Julio Mesquita: uma atividade do projeto Caminhos Olímpicos na Matemática

Eduardo Faria Kruger
eduardokruger@ufpr.br [1]

Paula Rogeria Lima Couto (Orientadora)
paulacouto@ufpr.br [2]

[1,2] Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Educação, Assistência, Matemática.

Resumo:

O projeto Caminhos Olímpicos da Matemática (COM) iniciou suas atividades em 2022 e deu continuidade às ações de extensão iniciadas em 2006 em parceria com a OBMEP. A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP) não finaliza suas intervenções na cerimônia de entrega das medalhas. Ela promove, dentre outras ações, o Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC) para os alunos medalhistas em vários polos no Brasil.

O PIC é uma oportunidade para os(as) estudantes estudarem a Matemática de forma mais aprofundada através da metodologia de Resolução de Problemas [1]. Em 2023 ocorreu o 17° PIC e atendemos 121 estudantes premiados divididos em seis turmas: três do Grupo 1 (7º e 8º ano do Ensino Fundamental – EF), duas do Grupo 2 (9º ano do EF e 1º ano do Ensino Médio – EM) e uma do Grupo 3 (2º e 3º ano do EM). As aulas para estes estudantes foram ministradas aos sábados, das 8h às 12h, por professores de matemática da rede pública participantes do programa de formação de professores da OBMEP, e a equipe também conta com os bolsistas desse projeto para eventuais reposições no caso de algum professor não conseguir dar aula em um determinado dia.

Além desta principal ação extensionista, foram formadas duas turmas de aprofundamento em Matemática para alunos do Colégio Estadual Professor Júlio Mesquita, ministradas pelos alunos bolsistas do projeto, aos sábados pela manhã, das 8h às 11h. Essas aulas de aprofundamento têm como objetivo auxiliar o estudante diretamente na dificuldade dele, seja para aprofundar algum conhecimento, revisar algum conteúdo desejado, reforço para provas e recuperações, e também auxiliar com questões de vestibulares, como a prova do Instituto Federal do Paraná (IFPR), instituição que vários alunos das aulas de aprofundamento pretendem cursar. Da mesma forma que o PIC, as aulas de aprofundamento são baseadas na metodologia de Resolução de Problemas [2], a partir do enunciado de provas como a OBMEP, ENEM e IFPR, pois uma exposição a esse tipo de prova prepara o aluno com o conteúdo que vai ser utilizado tanto nesses vestibulares, quanto nas avaliações da própria escola.

As características do PIC mudam de um ano para o outro, de acordo com as diretrizes da OBMEP. Em 2023 os alunos de graduação não atuaram diretamente no PIC, apenas como professores substitutos quando necessário, para não haver a falta de aula, mas puderam contribuir com as solicitações da Escola Júlio Mesquita, que através da interação com a coordenação do Projeto explicitou necessidades de formação de turmas para reforço em matemática. Neste sentido a interação e experiências do PIC favoreceram a escolha e a produção de materiais didáticos específicos para estas turmas da escola e o planejamento das aulas.

Figura 1. Alunos em aula no Colegio Estadual Professor Julio Mesquita. 2023.

Figura 2. Aula de aprofundamento com o Professor Eduardo Faria. 2023.

Figura 3. Foto em conjunto com o diretor Paulo Cesar. 2023.

Referencias:

[1] POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**, 1ª ed., Sao Paulo: Bookman, 1978.

[2] GONÇALVES, R.; ALLEVATO, N. S. G. **Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino e Aprendizagem Significativa das Funções Definidas por Várias Sentenças.** Curitiba: CRV, 2020.

Escape Room da Matemática

Fábio De Oliveira Lima[1], Leonardo Angelo Rigo[1], Lucas Henrique de Castro Fonseca[1], Mayara Isabele Arcenio[1], Sibeli Da Rosa Da Rocha[2], Vanessa Barros Soares[1]
Licenciatura em Matemática - UFPR
fabiolima.mat@gmail.com [1], leonardorigo76@gmail.com[1], lucashenriquecastro12@gmail.com[1], mayaraarcenio455@gmail.com[1], sibarocha02@gmail.com[2] , soarexxx.oficial.vanessa@gmail.com[1],

Emerson Rolkouski (Orientador)
Departamento de Expressão Gráfica - UFPR
rolkouski@ufpr.br

Gabriel dos Santos e Silva (Coorientador)
Departamento de Matemática - UFPR
gabriel.santos22@gmail.com

Palavras-chave: Educação Matemática, Ensino Médio, PIBID, Escape Room.

Resumo:

O termo *Escape Room* vem do inglês e significa “sala de fuga”, o qual é o nome para uma atividade interativa em que os jogadores são “trancados” em uma sala temática. O jogo tem como objetivo fazer os jogadores desvendar enigmas, quebra-cabeças e desafios para conseguir encontrar pistas, objetos e por fim a chave para abrir a porta de saída. O conceito possui raízes em várias partes do mundo, entretanto sua versão mais moderna tem suas origens frequentemente associadas ao Japão, pois o precursor do escape room moderno é considerado o jogo de computador *Crimson Room*, criado pelo designer de jogos japonês Toshimitsu Takagi, lançado em 2004. Os membros do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) do curso de matemática da Universidade Federal do Paraná viram a proposta da dinâmica como uma excelente oportunidade para proporcionar a criação de um ambiente para que os alunos possam interagir mais abrangentemente e de forma divertida com a Matemática e, dessa forma, colocar em prática os conhecimentos trabalhados ao longo das aulas de Matemática. Desse modo, essa proposta será aplicada no Colégio Estadual do Paraná (CEP) com as turmas de 1ª série do Ensino Médio das classes 1A e 1B nos períodos vespertino e noturno com missões que abrangem todos os conteúdos estudados nas aulas de matemática ao longo do ano de 2023: Unidade de Medidas, Matrizes, Sistemas Lineares, Função Afim e Estatística, em particular Medidas de Tendência Central e interpretação de gráficos e tabelas.

[1]Bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)
[2]Voluntária do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)

O Ensino Da Estatística Utilizada Como Ferramenta Para Despertar O Ser Crítico Do Aluno

Fábio De Oliveira Lima[1], Leonardo Angelo Rigo[1], Lucas Henrique de Castro Fonseca[1], Mayara Isabele Arcenio[1], Sibeli Da Rosa Da Rocha[2], Vanessa Barros Soares[1]
Licenciatura em Matemática - UFPR
fabiolima.mat@gmail.com [1], leonardorigo76@gmail.com[1], lucashenriquecastro12@gmail.com[1], mayaraarcenio455@gmail.com[1], sibarocha02@gmail.com[2], soarexxx.oficial.vanessa@gmail.com[1],

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
gabriel.santos22@gmail.com

Emerson Rolkouski (Coorientador)
Departamento de Expressão Gráfica - UFPR
rolkouski@ufpr.br

Palavras-chave: Educação Estatística, Ensino Médio, PIBID.

Resumo:

A Estatística é um campo da matemática que pode ser usado pelo professor como uma ferramenta para desenvolver a análise crítica dos seus alunos, uma vez que ao compreenderem como analisar gráficos, manipular dados e interpretar símbolos estatísticos, esses adquirem os recursos necessários para questionar a veracidade e a procedência das informações que são expostas no mundo ao seu redor. Isso pode auxiliá-los a tornarem-se cidadãos mais críticos, que não só entendem, mas interpretam as informações, haja visto que as mídias frequentemente manipulam os dados para influenciar as tomadas de decisões. Ademais, a Educação Estatística possibilita que o professor se distancie de um estudo baseado na memorização de fórmulas, ao possibilitar o uso de uma abordagem fundamentada na investigação e aplicação em contextos que se aproximam da realidade dos alunos. Dessa forma, eles participam ativamente em todo o processo, desde a pesquisa, a coleta e produção de dados até a investigação e o questionamento dos resultados obtidos. Durante o processo, espera-se que os alunos produzam suas próprias técnicas para reconhecer como, quando e por que usar as ferramentas estatísticas desenvolvidas, indo além de aspectos procedimentais e olhando também para os contextos sociais envolvidos. Diante dessa perspectiva, os integrantes do projeto PIBID do curso de

[1]Bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)
[2]Voluntária do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)

Matemática da Universidade Federal do Paraná optaram por abordagens contextualizadas e colaborativas de prática investigativa nas atividades propostas, dando início pela aplicação de um questionário que foi respondido pelos próprios alunos com perguntas de cunho pessoal com o propósito de que as respostas obtidas sejam utilizadas para a construção de gráficos e demais conceitos estatísticos. Após a aplicação das aulas programadas para o conteúdo de Estatística do 1º ano do Ensino Médio, os alunos utilizaram o que aprenderam para produzirem um trabalho com um tema de sua escolha, com a condição de que a temática fosse capaz de produzir dois gráficos previamente determinados e fundamentados por um questionário, também produzido pelos alunos, aplicado com os colegas de sala de aula. Por fim, tivemos como objetivo alcançar o engajamento dos alunos em seu processo de aprendizagem, de modo a participarem das discussões, das trocas de descobertas, das resoluções de problemas, da formulação de perguntas e conduções de investigações estatísticas em um contexto relevante e significativo.

Vaivém: uma nova possibilidade de avaliação

Fábio De Oliveira Lima[1], Leonardo Angelo Rigo[1], Lucas Henrique de Castro Fonseca[1], Mayara Isabele Arcenio[1], Sibeli Da Rosa Da Rocha[2], Vanessa Barros Soares[1]
Licenciatura em Matemática - UFPR
fabiolima.mat@gmail.com [1], leonardorigo76@gmail.com[1], lucashenriquecastro12@gmail.com[1], mayaraarcenio455@gmail.com[1], sibarocha02@gmail.com[2], soarexxx.oficial.vanessa@gmail.com[1],

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
gabriel.santos22@gmail.com

Emerson Rolkouski (Coorientador)
Departamento de Expressão Gráfica - UFPR
rolkouski@ufpr.br

Palavras-chave: Avaliação, Ensino Médio, PIBID

Resumo:

Este trabalho foi realizado por graduandos em licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná, que também são integrantes do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), os quais como alunos entendem e vivenciam as angústias relacionadas a avaliações, com destaque para as provas escritas. Embora exista a possibilidade da aplicação de diferentes instrumentos de avaliação, tanto no ambiente escolar quanto no universitário, ainda é perceptível a predominância de avaliações que se baseiam e limitam-se à dicotomia certo-errado, apesar dessas não serem capazes de avaliar de forma adequada o que os estudantes realmente sabem. Como consequência, muitos alunos deixam de se concentrar em sua aprendizagem e passam a direcionar seus medos e ansiedades para a possibilidade de não alcançarem os resultados esperados. De mais a mais, os alunos também se intimidam com a possibilidade de serem rotulados como incapazes, o que é um fator que frequentemente impede que esses participem mais ativamente das aulas em razão do medo da possibilidade de oferecerem respostas consideradas erradas. Diante disso, surge a ideia de aplicar outro instrumento de avaliação que possibilite que os alunos possam refletir, repensar e revisar suas respostas durante o processo de aprendizagem. Ao mesmo tempo, o professor pode utilizar desse método para investigar os processos de ensino e aprendizagem tentando identificar o que o aluno sabe e a partir disso realizar retomadas, para que por meio dos erros e acertos se iniciem novas discussões. Dessa forma, utilizaremos um instrumento de avaliação denominado

[1]Bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)
[2]Voluntária do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)

Vaivém, em que estudantes e professor se comunicam por escrito e de forma sigilosa a partir de uma questão inicial, que possibilita a criação de um espaço de diálogo individual entre professor e aluno. Com isso, pode-se auxiliar os estudantes a se tornarem ativos no processo de sua aprendizagem. Os autores dividiram-se em grupos, e aplicaram o Vaivém em 4 turmas de 1ª série do Ensino Médio no Colégio Estadual do Paraná (CEP) durante o ensino de um conteúdo de Estatística com o objetivo de criar um novo vínculo de aproximação com esses alunos em um ambiente sem a influência de aflições acerca das notas e da crítica dos demais colegas de sala de aula.

POTI/TOPMAT (níveis 2 e 3): formação olímpica de alto nível para estudantes do Ensino Fundamental II e Médio

Fernanda de Oliveira de Jesus[*] Mahmut Telles Cansiz[1] Nil Vinícius Gonçalves de Carvalho[2]
Matemática - UFPR
potin2@ufpr.br e potin3@ufpr.br

Prof. Dr. José Carlos Eidam (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
eidam@ufpr.br

Palavras-chave: Matemática, Olimpíadas, Treinamento.

Resumo:

O POTI/TOPMAT (Programa de Formação em Matemática Olímpica) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) é um programa desenvolvido pelo IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) e pelo Departamento de Matemática da UFPR. Ele é voltado à preparação para as olimpíadas de Matemática, e é ofertado gratuitamente para estudantes do ensino básico de escolas públicas e particulares. O programa é constituído de aulas ministradas semanalmente pela equipe de professores formada por graduandos da UFPR.

Além de oferecer uma preparação para que os alunos obtenham bons resultados nas principais olimpíadas, como, por exemplo, a OBMEP, OPRM e OBM, o programa tem como objetivo oferecer suporte para que esses estudantes aprofundem e ampliem seu interesse pela Matemática, instigando-os com problemas incomuns e interessantes.

A partir do bom desempenho nas aulas e em olímpiadas, ocasionalmente, esses estudantes têm a oportunidade de participarem de eventos promovidos por outras instituições de ensino, que agregam na sua formação olímpica. Neste ano, em particular, reconhecido pelos bons resultados dos últimos anos, o polo UFPR foi convidado para participar do curso de inverno Seleção de Talentos do Centro para o Desenvolvimento da Matemática e Ciências (CDMC) da Fundação Getúlio Vargas (FGV), que ocorreu entre os dias 24 e 28 de julho, no Rio de Janeiro.

Resumidamente, o programa busca promover um ambiente para que os graduandos desenvolvam habilidades profissionais enquanto docentes e também acolhedor para que os estudantes recebam auxílio necessário para superar suas eventuais dificuldades e maximizar o seu aproveitamento.

[*] Coordenadora do POTI/TOPMAT nível 3
[+] Coordenador do POTI/TOPMAT nível 3 e bolsista
[♣] Coordenador do POTI/TOPMAT nível 2 e bolsista

Desvendando o VOSviewer: uso de um software de bibliometria no estudo da previsão de inundações

Isabela das Chagas Luiz*
isabelachagasluiz@gmail.com [1]

Elisa Henning (Orientadora)
elisa.henning@udesc.br [2]

[1]Universidade do Estado de Santa Catarina
[2]Universidade do Estado de Santa Catarina

Palavras-chave: bibliometria, e-book, consumo de água.

Resumo:

Esse trabalho faz parte do projeto de pesquisa Métodos Estatísticos e de Aprendizado de Máquina para Análise do Consumo de Água em Edificações. Nessa vertente da água no espaço urbano pretende-se avaliar a suscetibilidade à inundação na Bacia Hidrográfica do Rio Cachoeira na cidade de Joinville, estado de Santa Catarina. Assim, tem como objetivo apresentar as potencialidades do software de bibliometria VOSviewer no estudo da previsão de inundações, a partir de modelos de aprendizado de máquina. A bibliometria é um campo responsável por fazer a análise quantitativa sobre produções científicas. A partir de uma unidade de análise como periódicos, ela permite destacar os pesquisadores e instituições mais influentes, monitorar o desenvolvimento de áreas de pesquisa, medir o impacto de determinadas publicações, entre outros indicadores permitindo a organização e sistematização de informações científicas.

O VOSviewer é um software para construção e visualização de mapas baseados em redes bibliométricas, ou seja, serve para quantificar e analisar literatura científica. O uso do VOSviewer apresenta como pontos positivos o fato de ser intuitivo, de fácil compreensão, gratuito e destaca-se pela possibilidade de exportar os dados processados para outros programas.

O software adota o método conhecido como VOS (*Visualization of Similarities*) para definir os nós e ligações de sua rede. Assim, ele cria visualizações em duas dimensões em que objetos com alta similaridade estão mais próximos, por exemplo, se dois pesquisadores estão proximamente localizados na visualização e é maior a ligação entre eles, então há maior tendência de eles serem citados na mesma publicação. Podemos usar periódicos, pesquisadores ou publicações e criar redes de relações de acoplamento bibliográfico, citações, cocitação e coautoria, sendo que cada uma dessas opções é escolhida pelo usuário conforme a necessidade.

---

* Bolsista

Para utilizar as potencialidades que o software VOSviewer dispõe, foi elaborado um E-book educativo como manual introdutório a respeito do programa e suas ferramentas, exibindo exemplos de análises realizadas com ele e que envolvessem fatores relacionados ao consumo de água. O E-book foi dividido em seções que apresentassem ao usuário como instalar e reconhecer as funções do software, como pesquisar e extrair os dados de análise em três diferentes bancos de análises Web of Science, Periódicos da CAPES e Scopus, e por fim foi apresentado como criar o mapa com exemplos de casos envolvendo termos, autores e referências a respeito do consumo de água e fatores relacionados a isso.

O aprendizado de máquina é uma ferramenta computacional capaz de melhorar o desempenho na realização de tarefas por meio da experiência, permitindo aos computadores adquirirem conhecimento através de exemplos e analogias (MITCHELL et al., 1997). Mosavi, Ozturk e Chau (2018) descrevem o estado da arte dos modelos de aprendizado de máquina na previsão de inundações e apresentam uma relação dos métodos mais promissores para previsão de longo e curto prazo, assim, fazer um estudo a respeito não apenas sobre inundações, mas relacionado ao uso de aprendizado de máquina mostrou-se necessário.

Um dos estudos realizados com o uso do software foi a respeito dos termos "*flood*" e "*machine learning*" e com o filtro de publicações feitas no Brasil e publicadas nos periódicos indexados no exterior. A busca foi realizada no banco de dados Scopus e foi criado um mapa de visualização no VOSviewer, como mostra na **Figura 1**, de cocitação afim de mostrar os autores mais influentes nesse tópico de busca e quais são citados juntos.

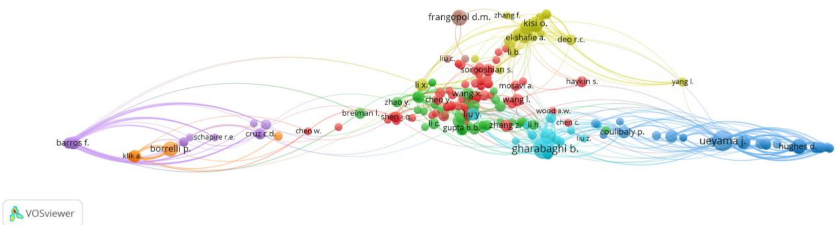


Figura 1- Mapa de visualização de cocitação a partir dos termos "*flood*" e "*machine learning*" em periódicos no Brasil.

O mapa nos permite visualizar facilmente o nome de autores mais influentes (em que o ícone é maior) e quais são citados juntos (conforme as redes de ligação). Outro ponto é como alguns autores são influentes, mas não são interligados.

Referências:

[1]ADAMS, F.; LAUDGHLINI, G. **Uma biografia do universo:** do big-bang à desintegração final. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

[2]MITCHELL, T. M. et al. **Machine learning**.1997. Burr Ridge, IL: McGraw Hill, v. 45,n. 37, p. 870–877, 1997.
[3]MOSAVI, A.; OZTURK, P.; CHAU, K.-w.Flood prediction using machine learning models: Literature review. **Water**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 10, n. 11,p. 1536, 2018.

O Projeto de Extensão MatematicAtiva em 2023

Luana da Silva Oliveira[1], Lucas Bisoni[2], Luis Gustavo Nadalin[3], Luiza Tomielo Paraizo[4], Nadia Luana Lobkov[5]
oliveirasiluana@ufpr.br, lucas.bisoni@ufpr.br, luisnadalin@ufpr.br, luiza.paraizo@ufpr.br, nadialobkov@ufpr.br *

Prof.ª Paula Rogéria Lima Couto (Orientadora)
Departamento de Matemática
paulacouto@ufpr.br *

Prof.ª Ximena Mujica Serdio (Orientadora)
Departamento de Matemática
xmujica@ufpr.br *

*Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Projeto, Extensão, Materiais Manipuláveis, Educação Matemática.

Resumo:

O MatematicATIVA é um projeto de extensão da Universidade Federal do Paraná (UFPR), vinculado ao Departamento de Matemática (DMAT). Ele teve início em maio de 2017 e, desde então, atua nas escolas, realizando visitas, oficinas, palestras e workshops com o objetivo de promover o contato dos(as) estudantes do Ensino Básico (Fundamental e Médio) com temas da matemática que são pouco ou não explorados durante as aulas, como quebras-cabeças geométricos, criptografia, topologia, grafos e teoria de nós, por meio de uma abordagem lúdica e interativa.

Em geral, os eventos do MatematicATIVA caracterizam-se pela presença de diversos materiais manipuláveis, os quais foram propostos e construídos pelos participantes do projeto ao longo dos anos. Assim, a cada exposição, os(as) estudantes tem a oportunidade interagir com os seguintes jogos: Tangrans, Polígonos Replicantes, Cifras de César e Espartana, Fita de Möbius, Mágicas com as cordas e Pintando Mapas com 4 Cores.

[1] Voluntária do Projeto de Extensão MatematicATIVA
[2] Bolsista do Projeto de Extensão MatematicATIVA
[3] Voluntário do Projeto de Extensão MatematicATIVA
[4] Bolsista do Projeto de Extensão MatematicATIVA
[5] Voluntária do Projeto de Extensão MatematicATIVA

Em especial, no ano de 2023, o *Yaguareté Korá*, ou Xadrez Guarani, foi adicionado à coletânea que compõe o MatematicATIVA, como proposta dos(as) estudantes do projeto. Essa nova atividade objetiva estimular o raciocínio lógico, ao mesmo tempo que valoriza uma prática da cultura indígena e promove a difusão de saberes matemáticos distintos dos vinculados à tradição ocidental.

Por meio de reuniões semanais, das quais participaram as professoras orientadoras e os(as) estudantes voluntários(as) e bolsistas, foi possível a familiarização de toda a equipe com os materiais disponíveis e a organização do cronograma de atividades a serem desenvolvidas ao longo do ano.

Primeiramente, em 2023, o MatematicATIVA organizou um workshop interativo voltado para a comunidade acadêmica da UFPR, realizado no Centro Politécnico, em Curitiba, de modo a divulgar o projeto e conseguir mais participantes para acompanhar as visitas nas escolas. Além disso, esse momento também contribuiu para habituar os integrantes à proposta de trabalho do MatematicATIVA.

Em seguida, foram agendadas três visitas escolares: a primeira realizada no Colégio Estadual Elias Abrahão, em agosto, a segunda efetuada no Colégio Estadual Rio Branco, em setembro, e a terceira programada para o Colégio Estadual Júlio Mesquita, também em setembro. Nas duas visitações que já ocorreram, os(as) estudantes da UFPR tiveram a oportunidade de interagir com os professores e estudantes do Ensino Básico, e mesmo discentes egressos do curso de Matemática, que agora estão atuando na rede pública de educação. Esse contato visa estreitar os vínculos da comunidade universitária com as instituições de ensino, permitindo a divulgação das atividades promovidas pela UFPR, ao mesmo tempo que estimula a aproximação dos membros do projeto com a realidade da sala de aula.

Abaixo, constam alguns registros fotográficos dos eventos realizados este ano:

Figura 1: Colégio Elias Abrahão

Figura 2: Colégio Rio Branco

Desse modo, foi possível perceber que as atividades trabalhadas estimularam os(as) estudantes a buscar soluções para os problemas apresentados, a partir do uso do raciocínio lógico e da criatividade em conjunto, de modo a expor uma nova interpretação dos desafios matemáticos. Alguns dos relatos dos(as) estudantes incluiram frases como: “todas as aulas de matemática poderiam ser assim”e “quando vocês aparecem de novo?”, as quais mostram como o projeto tem apresentado resultados relevantes na promoção do ensino da Matemática. De fato, muitas dessas interações permitiram também a apresentação de novos conceitos e atuaram na contextualização de questões trabalhadas em sala de aula, promovendo a expansão do repertório didático-metodológico dos docentes.

Assim, espera-se que os(as) estudantes e professores das escolas tenham vivido uma experiência positiva com a Matemática e tenham se sentido motivados a participar de novas e diferentes experiências com a Matemática, de modo a contribuir para uma formação mais ampla destes participantes para além das atividades do projeto.

Referências

[1] FOETSCH et al. **Matematicativa 2019:** Matemática Divertida. In: 5ª Jornada de Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática (J3M). Caderno de Resumos. Curitiba, 2019.

[2] LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino da Matemática na Formação de Professores**. 2ªed. Campinas: Autores Associados, 2009.

Yaguareté Korá: O xadrez guarani no projeto de extensão MatematicAtiva

Lucas Bisoni*
Licenciatura em Matemática
lucas.bisoni@ufpr.br [1]

Prof.ª Paula Rogéria Lima Couto (Orientadora)
Departamento de Matemática
paulacouto@ufpr.br [1]

Prof.ª Ximena Mujica Serdio (Orientadora)
Departamento de Matemática
xmujica@ufpr.br [1]

[1]Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Etnomatemática, jogos escolares, práticas lúdicas, Guarani Mbyá.

Resumo:

O ensino da Matemática ainda conserva uma raiz eurocêntrica, herança histórica do passado colonial, no qual a reprodução fiel das formas ocidentais foi valorizada em detrimento dos saberes locais de povos e culturas rotulados periféricos. Nesse sentido, Farias e Nhampingal (2021) discorrem sobre como o pensamento matemático distanciou-se do lócus dos(as) estudantes, sendo caracterizado como demasiado abstrato e impraticável no contexto cotidiano.

Contudo, com o desenvolvimento de pesquisas na área da educação, essa corrente de pensamento reproduzida pela epistemologia dominante vem sendo questionada, dando lugar a uma outra interpretação do ensino, que culminou na criação de um novo campo de estudo: a etnomatemática. Por meio de um viés interpretativo, a etnomatemática busca compreender os modos de pensar e interpretar matematicamente os fenômenos, problemas e situações cotidianas dos diversos grupos étnicos e sociais, culturas e subculturas. Seria uma espécie de "zona de confluência entre a matemática e a antropologia cultural", como definiu o Grupo Internacional de Estudo em Etnomatemática (IGSEm), em 1986. (FERREIRA, 2003, p.4)

É sob esta ótica que o MatematicATIVA, projeto de extensão da Universidade Federal do Paraná (UFPR) vinculado ao Departamento de Matemática (DMAT), adicionou em seu acervo de atividades no ano de 2023 o *Yaguareté Korá*, um jogo tradicional do povo *Guarani Mbyá*. O objetivo dessa implementação foi levar para as escolas de

*Bolsista do projeto de extensão MatematicAtiva.

Ensino Básico da região metropolitana de Curitiba, juntamente com outras atividades, um jogo de origem indígena que permita o contato dos estudantes com manifestações distintas do saber matemático, as quais transgridem a tradição ocidental.

A proposta do jogo, cujo nome seria traduzido como “Toca da Onça”, é a seguinte: um jogador assumirá o papel da onça, enquanto o outro o papel dos cachorros, e eles jogarão em turnos alternados. O objetivo da onça é devorar seis cachorros, enquanto o objetivo dos cachorros é encurralar a onça no tabuleiro, deixando-a sem movimentos. Para devorar uma peça, a onça deve saltar sobre ela (como no jogo de damas), parando no espaço posterior. Caso este espaço não esteja vazio, ela não poderá devorar a peça (LORENZONI et al, 2022).

Abaixo está uma representação do tabuleiro na sua posição inicial, onde os círculos pretos seriam os cachorros, enquanto o círculo cinza seria a onça:

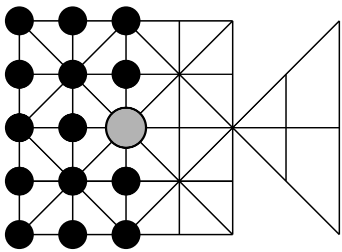


Figura 1: Tabuleiro do *Yaguareté Korá*

A fim de trabalhar o jogo com os(as) estudantes, a equipe do MatematicATIVA construiu quatro tabuleiros interativos, os quais foram levados às visitas nas escolas realizadas pelo projeto este ano. O uso de matérias-primas leves e de baixo custo na confecção dos jogos, como EVA e tampinhas de garrafa, visava facilitar o transporte e manejo dos tabuleiros, de modo a ofertar aos(às) estudantes um material concreto que fosse colorido e atrativo, mas também prático e de fácil acesso.

Até o momento, o jogo já foi apresentado aos(às) estudantes dos colégios estaduais Elias Abrahão e Rio Branco, ambos localizados na cidade de Curitiba. Em geral, foi possível perceber que eles se envolveram com a atividade, disputando com os seus colegas e invertendo os papéis (de onça e cachorros) entre si. Nesse sentido, o caráter assimétrico do jogo tornou-o mais dinâmico, permitindo que os discentes explorassem ambas perspectivas ao longo das visitas.

Ademais, as partidas tiveram uma média de 10 a 15 minutos cada, o que torna o jogo adequado para o formato do projeto e adaptável para uma prática lúdica em sala de aula, na qual os elementos da atividade podem ser explorados pelo docente e estendidos ao âmbito do ensino da matemática e da geometria.

Com efeito, Ibarrola (2022) comenta sobre à inclusão do jogo em cadernos de atividades, afirmando que “a inclusão desta proposta é valiosa porque contribui para reduzir a invisibilidade histórica dos povos indígenas [...] e estabelece relações entre os saberes envolvidos no jogo com conhecimentos matemáticos e geométricos”[1].

Dessa maneira, mais do que estimular o raciocínio matemático, o *Yaguareté Korá* é capaz de instigar a curiosidade dos(as) estudantes em relação à cultura dos *Guarani Mbyá* e, eventualmente, de outros povos indígenas também.

[1] Tradução livre feita pelo autor.

Diferentemente do que versa a tradição ocidental, não se busca interpretar essa prática cultural local a partir da visão matemática convencional e eurocêntrica. Pelo contrário, a proposta está em justamente viabilizar ao estudante do Ensino Básico um vislumbre nas experiências e modos de vida alheios ao seu contexto sociocultural, com uma abordagem compreensiva.

Assim, os(as) estudantes das escolas tiveram a oportunidade de conhecer um pouco sobre a cultura indígena por meio da matemática. Inclusive, durante as partidas, surgiram sugestões de adaptações nas regras, as quais permitiram uma interação diversificada com a atividade e mostraram o envolvimento dos(as) estudantes com ela.

Por fim, ao longo do projeto, pretende-se levar este jogo a diversas instituições de ensino, de maneira a promover as culturas indígenas e apresentar formas distintas do pensamento lógico-matemático, distanciando-se do viés regulador da norma ocidental.

Figura 2: Imagem de evento realizado pelo MatematicATIVA no Colégio Estadual Elias Abrahão

Referências

[1] FARIAS, L. M.; NHAMPINGAL, A.A.. **Circulação de Saberes entre Instituições:** Um caminho para a decolonização da didática da Matemática. ODEERE, Bahia, v.6, n.2, p.167-201, jul./dez. 2021.

[2] FERNANDES, Guilherme Buzzo. **A Etnomatemática e os Mitos *Guarani Mbyá***. Orientador: José Maria Carlini. 64 pp. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2019.

[3] FERREIRA, Eduardo Sebastiani. **O que é Etnomatemática?**. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Unicamp, 2003. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/sites/default/files/inline/1137/o_que_e_etnomatematica.pdf >. Acesso em 07 de setembro de 2023.

[4] IBARROLA, Belén. **La Interculturalidad en los Cuadernillos de "Recreo"de Seguimos Educando**. Revista Lúdicamente, Buenos Aires, v.10, n.21, out./abr. 2022.

[5] LORENZONI et al. **Jogos, Brincadeiras e Experiências em Matemática com os Guarani e Tupinikim**. Vitória: Edifes, 2022.

Aulas de Matemática para a Turma de Altas Habilidades do Colégio Professor Júlio Mesquita: uma ação extensionista do projeto Caminhos Olímpicos na Matemática

Matheus Margoti
matheus.margoti@ufpr.br [1]

Profa. Paula Rogeria Lima Couto (Orientadora)
paulacouto@ufpr.br [2]

[1,2] Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Caminhos da Matemática, Altas Habilidades, Ensino de Matemática, Caminhos Olímpicos da Matemática, Aulas de Matemática, Método de Ensino, Projeto de Extensão.

Resumo:

O projeto Caminhos Olímpicos na Matemática (COM) tem como principal objetivo realizar a cada ano as atividades do Programa de Iniciação Científica (PIC) da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas), que utiliza a metodologia de Resolução de Problemas para ensinar Matemática para os(as) estudantes que foram medalhistas da edição do ano anterior da OBMEP. Contudo, desde 2022, o projeto vem atendendo também à comunidade escolar do Colégio Estadual Professor Júlio Mesquita, do bairro Jardim das Américas, onde se situa o Centro Politécnico da UFPR, oferecendo aulas de Matemática Básica para uma turma de alunos com altas habilidades. Este trabalho tem como objetivo relatar esta ação do COM.

As aulas tomam lugar na sala de recursos da turma de altas habilidades da professora Caciana Regina Heinzen na Escola Estadual Professor Júlio Mesquita todas as terças-feiras das 7h30 as 9h da manhã e possui um total de 9 alunos, todos possuindo altas habilidades ou superdotação, porém nenhum com área de habilidade em matemática. Logo para a facilitação da aprendizagem dos alunos foi desenvolvido um estilo de ensino único que o principal objetivo é, além de estimular a capacidade de compreender melhor a matemática, serve para despertar o interesse dos alunos na matéria.

Sobre a sala de recursos para superdotados:

> “A sala de recursos para os superdotados caracteriza-se como um serviço de atendimento, de natureza pedagógica, conduzido por professor especializado, que suplementa o atendimento educacional realizado em classes comuns da rede regular de ensino. A proposta para este atendimento visa enriquecimento curricular através do desenvolvimento de projetos ou atividades que propiciem ao aluno superdotado ampliar seus conhecimentos,

> aprimorar suas habilidades e, quando possível, especializar-se nas áreas em que apresenta maior habilidade e interesse.”([1] pag. 9).

Ao método de ensino existem três pontos principais que o diferenciam de um método convencional, sendo eles: forma de abordagem dos alunos, tipos de materiais utilizados e tipos de aulas. Mas antes de especificar os tópicos é necessário apontar uma característica muito importante observada nos alunos em sala de aula que precisa ser levada em consideração para que o método funcione. A característica em questão é de que o(a) aluno(a) em sala de aula encontra-se livre do cenário familiar e de obrigações, além de estar em meio aos seus colegas que dispõe da mesma liberdade, portanto é esperado que o aluno(a), dispondo de qualquer tipo de obrigação, siga um ritmo mais solto e alegre e que interaja mais com seus colegas durante as aulas, logo ao tentar impor a obrigação de estudar no(a) aluno(a) acaba prejudicando o seu aprendizado e interesse na matéria.

1: Para que o que foi prescrito seja evitado, em sala não é obrigado do aluno que preste atenção na aula ou que realize as atividades, no caso o aluno fará tal ações apenas por vontade própria pois enxerga que estudar não é uma tarefa chata e cansativa. A abordagem pode ser simplesmente não impor que a atenção do(a) aluno(a) ou a diminuição na cobrança por parte do professor, lembrando que em sala não deixa de existir o dever dos alunos em aprender, apenas que é aproveitado o estado de liberdade do aluno facilitando o processo de aprendizagem.

2: Na aula de matemática é utilizada uma abordagem de ensino que prioriza motivar o aprendizado da matemática além de conteúdos mais resumidos e simples. Utilizamos problemas desafiadores e aplicações da matemática para desenvolver os conteúdos e chamar a atenção dos(as) estudantes sobre fatos interessantes relacionados aos assuntos da aula. Costumamos seguir um padrão de materiais a serem utilizados, realizando um ciclo com 3 aulas:

- na 1ª utilizamos o quadro negro, projetor ou folhas impressas com um conteúdo simples;

- na 2ª o uso de um material divertido e intuitivo, podendo ser um jogo ou um vídeo para reforçar o conteúdo passado na aula anterior;

- na 3ª aula sempre é uma lista de exercícios para finalizar o conteúdo, podendo ser uma folha impressa ou desafios.

3: Na condução das aulas, cada uma das 3 aulas se diferencia, na 1ª a aula é mais parecida com uma conversa ou podcast pros alunos pois a aula é planejada para despertar o interesse do aluno(a) no conteúdo e não impor o dever de aprender. A 2ª a aula serve para explorar o interesse o aluno(a), girando basicamente no conceito de entreter/desafiar o aluno com o assunto para facilitar o aprendizado, centrado principalmente no uso de jogos e atividades divertidas e a 3ª aula irá definitivamente ensinar o conteúdo para o aluno, com aula se aproximando mais ao método convencional de ensinar. Procuramos manter um ambiente sem cobranças excessivas, já que as aulas regulares acontecem normalmente e nelas isso já ocorre.

Ao contrário, valorizamos a sensação de liberdade de escolha do aluno por estar ali, facilitando assim o processo de aprendizagem.

Ressaltamos que por serem portadores de altas habilidade ou superdotação, acreditamos que a capacidade de aprendizagem e intelecto diferenciado podem ajudar no interesse pelas atividades propostas. Destacamos ainda que os principais desafios encontrados foram que nenhum dos alunos com altas habilidades possui área de habilidade elevada em matemática e que todos possuem um atraso de aprendizagem e péssimo relacionamento devido ao isolamento social causado pela pandemia do Covid-19, além de variarem da 6ª à 8ª série, o que dificulta o ensino dos tópicos selecionados.

Concluindo, o projeto vem trazendo desafios e ensinamentos importantes para os alunos e também pra minha atuação como docente, fortalecendo meu aprendizado sobre psicologia da educação e capacidade de ensinar matemática. Para os alunos busco além de dar aulas de matemática, demonstrar que existem outras formas de estudar que não precisam ser chatas e cansativas podendo até ser divertido aprender o difícil, sempre destacando o uso de jogos na educação para melhorar a atenção do aluno(a) e os enturmar melhor.

Referências:

[1] A IDENTIFICAÇÃO E INCLUSÃO DO ALUNO COM ALTAS HABILIDADES OU SUPERDOTAÇÃO NA REDE PÚBLICA DE ENSINO DO ESTADO DO PARANÁ. Orientação para professores. Disponivel em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1075-2.pdf .

[2] Perfil de Aprendizagem/Áreas de Habilidade de cada aluno da sala de Altas Habilidades do Colégio Estadual Professor Júlio Mesquita via Profa.Caciana Regina Heinzen. Disponível em: https://ufprbr0-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/matheus_margoti_ufpr_br/Eaulb-nWRNtJikZbZtUr3eABGMMBYe0IaycvcqWsYPIiwA?e=AIh67S.