Classificação das álgebras de Lie semissimples de dimensão finita

Eduardo Magalhães de Castro *
Bacharelado em Matemática - UFPR
eduardomdecastro@gmail.com

Prof. Dr. Matheus Batagini Brito (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
mbrito@ufpr.br

Palavras-chave: álgebras de Lie, diagramas de Dynkin, sistema de raízes, representações

Resumo:

Apesar de inicialmente apresentar um interesse geométrico, a Teoria de Lie se bifurcou diversas vezes até que o interesse em álgebras de Lie - cujo conhecimento era essencialmente visto como ferramenta para o estudo de propriedades de seus grupos de Lie associados - se aprofundou e se tornou independente de suas vinculações com outras áreas e problemas iniciais. Um dos resultados mais célebres dessa área é a classificação de álgebras de Lie semissimples de dimensão finita via diagramas de Dynkin. Cada diagrama está associado a um único sistema de raízes, que por sua vez define estruturalmente uma única álgebra de Lie semissimples a menos de isomorfismo. Neste trabalho, assumiremos alguns conceitos básicos de álgebras de Lie como subálgebras de Lie, ideais, homomorfismos de álgebras de Lie e visaremos como objetivo passar a ideia central da demonstração da classificação em si. Para isso, seguiremos um roteiro cujos itens serão essencialmente os seguintes:

1. **Revisitar e introduzir algumas definições relevantes ao estudo** - forma de Killing, representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathfrak{sl}(2)$.
2. **Introduzir ideias sobre decomposição de espaço de raízes e obter propriedades a partir de sua geometria.** - álgebras de Lie toroidais, decomposição de Cartan, sistema de raízes (associado a uma álgebra de Lie)
3. **Apresentar as matrizes de Cartan e os diagramas de Dynkin, pontuando o método empregado para a obtenção da classificação final.**

*Bolsista do Programa PET-Matemática

O exemplo mais usual de álgebra de Lie seria o espaço de endomorfismos de um espaço vetorial V, munido com o comutador $[x, y] = xy - yx$, denotado por $\mathfrak{gl}(V)$ ou $\mathfrak{gl}(n)$ onde n é a dimensão de V.

Uma importante subálgebra de $\mathfrak{gl}(n)$ é a álgebra $\mathfrak{sl}(n)$ que consiste dos endomorfismos cujo traço é nulo.

Referências:

[1] HUMPHREYS, J. Introduction to Lie algebras and representation theory. Springer, 1972.

[2] SAN MARTIN, L. Álgebras de Lie. Second edition, Editora Unicamp, 2010.

[3] TAO, T. (2013, Abril) Notes on the classification of complex Lie algebras. https://terrytao.wordpr
on-the-classification-of-complex-lie-algebras/ Acesso: 30 de Agosto de 2017