O fantástico mundo das curvas

XV Brincando de Matemático

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor:	Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam
Estudantes:	Bianca Elena Wiltuschnig
	Bruno Pilatii Oleiro
	Danielly Araujo Pereira dos Santos
	Gabriel Alves de Lima
	Iann Takami Singo
	João Antonio Francisconi Lubano Thomé
	João Victor da Silva
	Larissa Moreira Sydorak
	Leonardo Gonçalves Fischer
	Marcel Thadeu de Abreu e Souza
	Marina Sayuri Vieira
	Matheus Daniel Galvão de Melo
	Matheus Kinceski Pires
	Monique Baptista Fragozo
	Priscilla Pereira de Souza
	Talia Correia Schulz
	Victor Gabriel Carazzai Zerger
	Vinicius Medeiros Prantl dos Santos
Site:	www.petmatematica.ufpr.br
Facebook:	www.facebook.com/PetMatUFPR
E-mail:	petmatufpr@gmail.com
Telefone:	(41) 3361-3672
Data do Evento:	16 a 19 de julho de 2019

Curitiba, julho de 2019.

Apresentação

Prezado Estudante!

É uma grande alegria tê-lo conosco na 15a edição do Brincando de Matemático! Tenho certeza que estes dias serão muito especiais para a sua formação matemática e trarão conhecimentos novos que o ajudarão a ampliar seus horizontes e enxergar a Matemática de uma maneira inteiramente diferente e nova.

O *Brincando de Matemático* é uma atividade de extensão gratuita da UFPR planejada, organizada e conduzida pelos alunos do PET - Matemática com o intuito de oferecer aos estudantes de Ensino Fundamental e Médio de Curitiba e Região Metropolitana que possuam interesse e potencial em Matemática a oportunidade de estudar e aprender sobre um tema matemático relevante apresentado de forma acessível, lúdica e interessante. Além disso, o Brincando oferece ao estudante uma oportunidade de conhecer melhor não somente a infraestrutura física da UFPR, mas também de interagir com docentes e estudantes de Matemática da UFPR.

O tema desta edição remonta à tempos muitos antigos, pois as curvas povoam as ideias dos matemáticos há muitos séculos e são ferramentas indispensáveis para a resolução de uma variada gama de problemas de matemática. Serão apresentados muitos resultados e curiosidades em todos os dias, sendo que o tema principal foi dividido em quatro partes, uma para cada dia. A proposta nesta atividade é aprender e ensinar matemática de primeira qualidade de forma leve e descontraída, sem minimizar o aspecto formal e abstrato do tema.

Gostaria de agradecer, de maneira especial, a cada um dos estudantes do PET - Matemática pela dedicação, afinco e cuidado com que realizam todas as atividades e também à Administração da UFPR por sempre apoiar esta iniciativa.

Prof. José Carlos Eidam
Tutor do PET-Matemática
Chefe do Departamento de Matemática

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Imagine que você tem uma mesa e em cima dela há um barbante, no qual você pode movimentar da forma que quiser. Fazer um círculo, uma linha reta, ou até mesmo obter uma forma mais “bizarra”. Essas formas que você obtém conforme movimenta o barbante é o que conhecemos como **curvas**. Veja o exemplo na Figura 1.1.

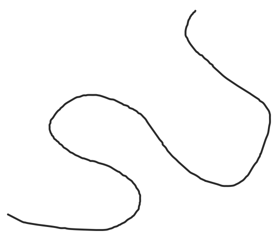


Figura 1.1: Desenho de uma curva

Veremos, ao longo das próximas seções e capítulos, uma definição mais precisa de curva, como desenhar uma curva através de equações e alguns dos exemplos mais famosos.

1.2 O que é uma função mesmo?

Lembre-se que uma **função** f é uma relação entre dois conjuntos, digamos A e B, onde todo elemento do conjunto A é associado à um elemento do conjunto B. Isso pode ser visualizado na Figura 1.2.

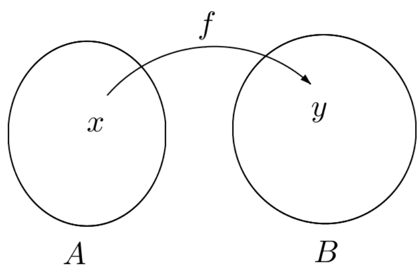


Figura 1.2: Esquema de uma função f

É importante enfatizar que um elemento x é levado à um único elemento y, caso contrário não temos uma função.

Definição 1.2.1. O conjunto A é chamado de **domínio** da função f, enquanto B é conhecido como **contradomínio** de f.

Notação 1.2.2. Se f é uma função, com domínio A e contradomínio B, costumamos denota-lá por:

$$f : A \to B$$

$$x \mapsto y$$

ou

$$f : A \to B$$

$$f(x) = y.$$

Vamos fazer alguns exemplos para fixar o conceito de função.

Exemplo 1.2.3. Considere o conjunto $A = \{\text{pessoas}\}$ e $B = \{\text{alturas}\}$. Podemos definir uma função

$$f : A \to B$$

com $f(a) = h$ onde $a \in A$ e $h \in B$.

Suponha, por exemplo, que Matheus tem $1,75$m de altura. Portanto $f(\text{Matheus}) = 1,75$.

Note que podemos ter várias pessoas com a mesma altura, ou seja, é possível ter $f(a) = f(b)$, mas uma única pessoa não possui alturas diferentes, logo f é, de fato, uma função.

Exemplo 1.2.4. Seja f uma função, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ o domínio de f e $\mathbb{R}$ contradomínio de f. Defina $f(n) = \sqrt[n]{2}$.

Temos, por exemplo, que $f(2) = \sqrt{2}$ e $f(15) = \sqrt[15]{2}$.

Dada uma função, podemos esboçar o **gráfico** dela. Mas o que seria o gráfico de uma função?

Definição 1.2.5. Dada uma função $f : A \to B$, o **gráfico de f** é o conjunto $\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in A \times B : f(x) = y\}$, isto é, o conjunto de todos os pares (x, y) onde x é levado em y pela função f.

Parece meio complicado, certo? Vamos fazer um exemplo para treinar o conceito.

Exemplo 1.2.6. Considere a função real $f(x) = x^2$. Utilizando a Definição 1.2.5, o gráfico de f será o conjunto

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\},$$

que é conhecido como a clássica **parábola**.

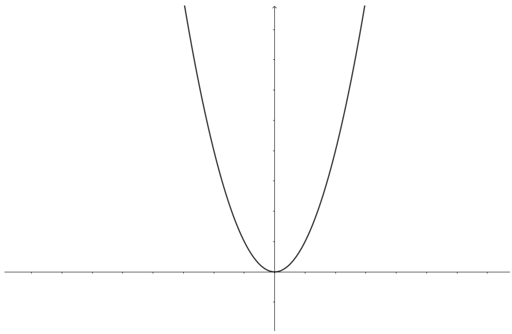


Figura 1.3: Parábola representada pela função f

Exercícios

1. Calcule $f(b)$ sabendo que:

   (a) $b = -1$ e $f(x) = x^2 - 3x + 2$

   (b) $b = 1$ e $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 1}$

2. Esboce o gráfico das funções reais a seguir.

   (a) $f(x) = \cos x$

   (b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

   (c) $x = 10y - 500$

(d) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

3. A área de um círculo é dada em função da medida r do raio, ou seja, $A = f(r) = \pi r^2$. Considerando $\pi = 3,14$, calcule:

   (a) A quando $r = 5$cm

   (b) r quando $A = 200,96$cm

4. Determine se os gráficos na Figura 1.4 a seguir representam funções de x em y nos reais.

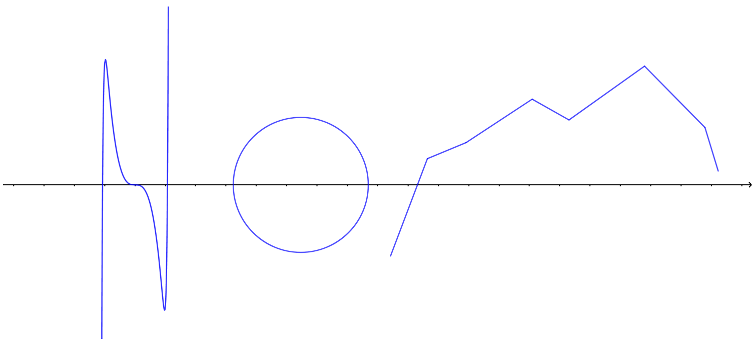


Figura 1.4

5. Mostre que se a soma de dois números positivos é constante, seu produto é o maior possível (máximo) quando eles são iguais.

6. João quer fazer uma cerca. Ele possui alambrado suficiente para 24m. Ele pretende cercar um terreno retangular de 40m^2 de área. Isso é possível?
   Dica: use o resultado provado no exercício anterior.

1.3 Equações mais conhecidas

Agora falaremos de algumas equações interessantes que serão fundamentais no estudo de curvas. Note que nem sempre poderemos associar essas equações com funções, exceto em alguns casos como a reta ou parábola, por exemplo. Entretanto, elas representam imagens no plano.

Definição 1.3.1. Equação da Reta: a equação geral da reta é da forma $ax + by + c = 0$, mas geralmente usamos a equação reduzida $y = mx + n$. Note que neste caso se trata de uma função com variável x.

Exemplo 1.3.2. Vamos esboçar a curva descrita por

$$y = -8x + 4.$$

Precisamos lembrar que uma reta é completamente determinada por dois pontos. Para facilitar os cálculos vamos escolher pontos estratégicos.

Quando $y = 0$ temos:

$$0 = -8x + 4 \Rightarrow 8x = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Agora sabemos que $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ é um ponto da reta.

Para encontrar outro ponto, vejamos quando $x = 0$. Então:

$$y = -8 \cdot 0 + 4 \Rightarrow y = 4.$$

Portanto, $(0, 4)$ é outro ponto dessa mesma reta.

Usando os pontos encontrados, podemos esboçar a reta.

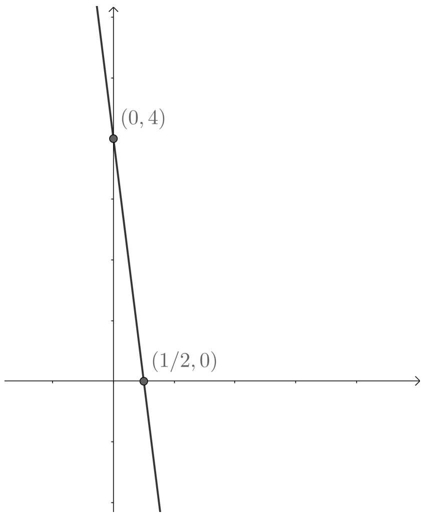


Figura 1.5

□

Definição 1.3.3. Equação da Circunferência: dada a equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, onde r é um número real positivo, os pontos que satisfazem tal equação constituem uma **circunferência**. O ponto (x_0, y_0) é dito **centro** da circunferência e r o **raio** da circunferência.

Quando $(x_0, y_0) = (0, 0)$, a circunferência em questão está centrada na **origem** do sistema cartesiano. Segue abaixo alguns exemplos:

Exemplo 1.3.4. Circunferência centrada na origem

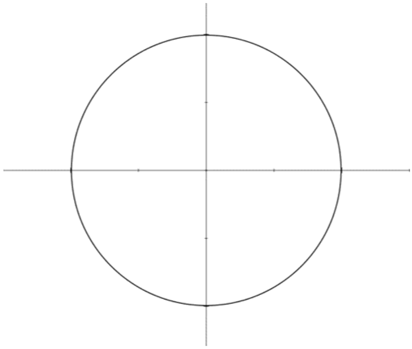


Figura 1.6

Exemplo 1.3.5. Circunferência de centro (a,b)

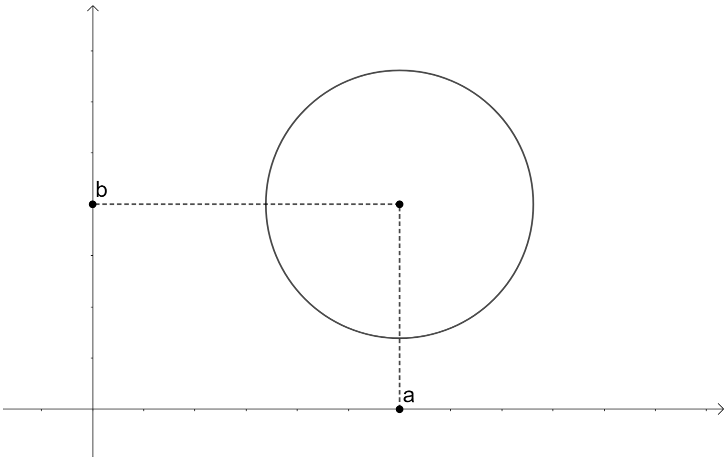


Figura 1.7

Definição 1.3.6. Equação da Elipse: os pontos que satisfazem a equação $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ com $a, b \in \mathbb{R}$ constituem a **elipse**. Quando $(x_0, y_0) = (0, 0)$ a elipse está centrada na origem.

Vamos agora discutir algumas estratégias para esboçar uma elipse na forma apresentada anteriormente. Os pontos a e b serão fundamentais neste processo.

Primeiramente, precisamos saber se $a > b$ ou $a < b$. Se $a > b$, o segmento que liga $(x_0 - a, y_0)$ e $(x_0 + a, y_0)$ é dito **eixo maior** da elipse e o segmento que liga $(x_0, y_0 - b)$ com $(x_0, y_0 + b)$ é o **eixo menor**, portanto a elipse terá a representação da Figura 1.8.

Caso contrário, ou seja, se $a < b$, então o segmento que liga $(x_0, y_0 - b)$ com $(x_0, y_0 + b)$ é dito **eixo maior** e o segmento que liga $(x_0 - a, y_0)$ e $(x_0 + a, y_0)$ é o **eixo menor** e a elipse será como na Figura 1.9.

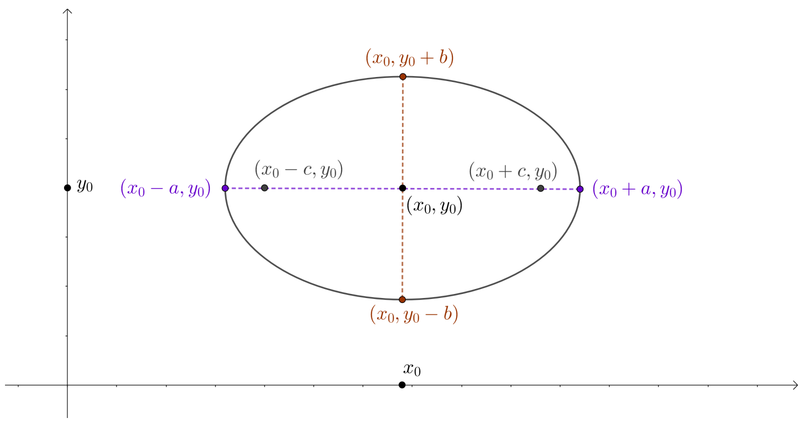


Figura 1.8

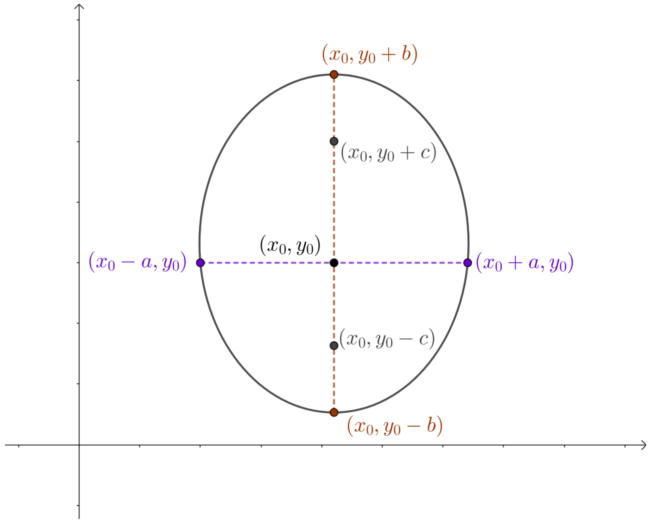


Figura 1.9

Definição 1.3.7. Equação da Parábola: estamos acostumados com parábolas do tipo $y = ax^2 + bx + c$, mas nem sempre teremos uma expressão tão "limpa".

Considere, por exemplo, a equação

$$-4y^2 - 27y + 29 = 3x - 7 + 5y^2.$$

Podemos isolar $3x$ na equação acima e, então obteremos a expressão, $3x = -9y^2 - 27y + 36$. Dividindo ambos os membros por 3, teremos $x = -3y^2 - 9y + 12$.

Se trata de uma função x com variável y. Novamente reduzimos uma equação à uma função já conhecida, agora basta esboçar o gráfico. Usando a **fórmula de Báskara**, as raízes de x serão:

$$y = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (12)}}{2 \cdot (-3)} = -4 \text{ ou } 1.$$

Podemos esboçar o gráfico de x:

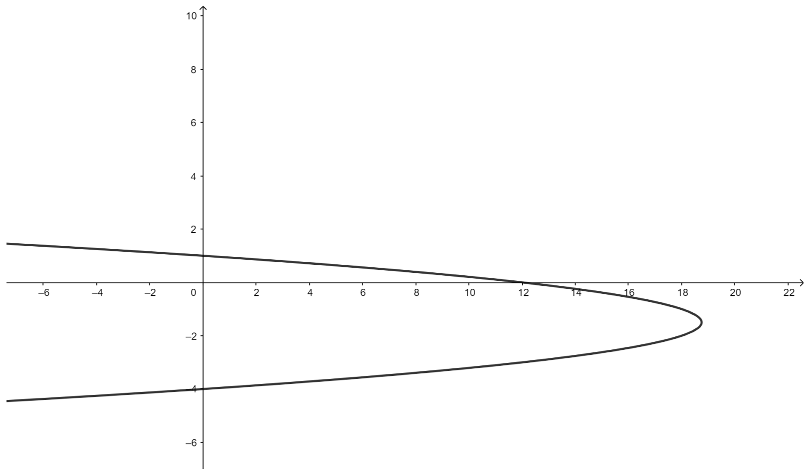


Figura 1.10

Uma forma de resolver equações quadráticas é a partir do **completamento de quadrado**. Utilizando um exemplo: queremos resolver $x^2 - 2x - 3 = 0$, vamos achar a solução sem usar a fórmula de báskhara.

Sumiremos com o x^2 da expressão, para isso lembre-se da relação $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, para o exemplo: precisamos de a e b cujo produto $2ab = -2x$, tomando $a = x$ e $b = -1$ $\Rightarrow (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

Agora basta somar e subtrair 4 na equação inicial (não altera a igualdade), e teremos $x^2 - 2x - 3 + 4 - 4 = 4 - 4$ $\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 4$. Logo, $x - 1 = \pm 2 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 3$.

Definição 1.3.8. Equação da Hipérbole: os pontos que satisfazem a equação $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ constituem a **hipérbole**.

No primeiro caso, os pontos $(-a, 0)$ e $(a, 0)$ são chamados de **vértices** da hipérbole. Analogamente, para o segundo caso, $(0, -b)$ e $(0, b)$ serão os vértices.

Outro ponto importante é o **foco** da hipérbole.

A hipérbole tem dois focos, sendo eles $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ quando se tratar da primeira equação, ou $(0, -c)$ e $(0, c)$ caso a hipérbole satisfaça a segunda equação.

Para encontrar c, basta observar que vale a relação $a^2 + b^2 = c^2$.

Por simplicidade, somente trabalharemos com hipérboles centradas na origem.

Usando as informações acima, vejamos alguns exemplos de hipérboles abaixo:

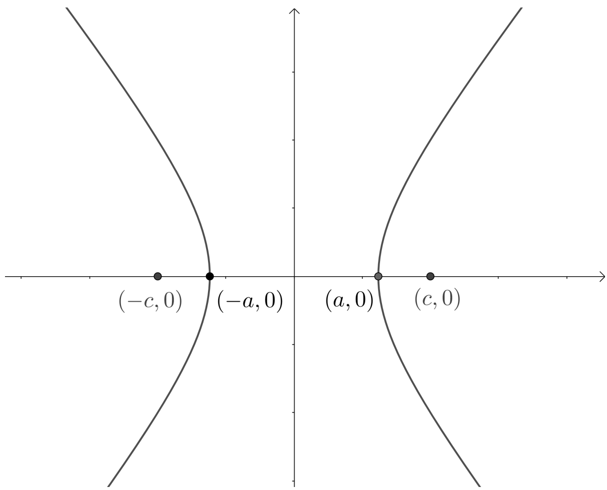


Figura 1.11: Hipérbole com equação $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

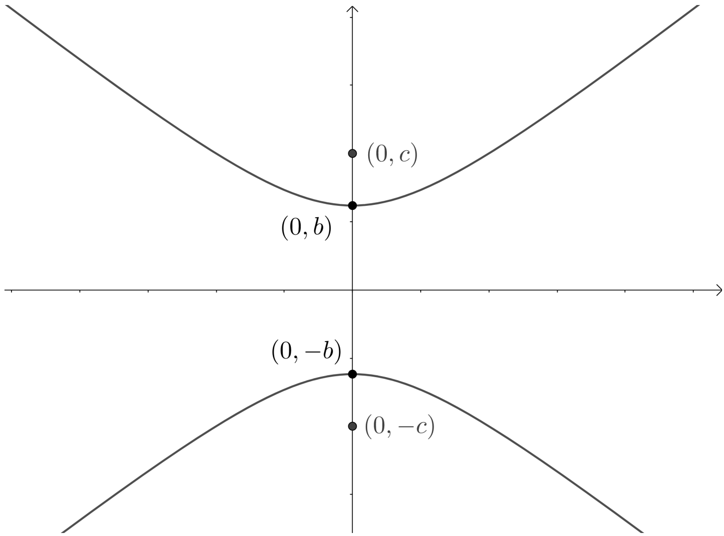


Figura 1.12: Hipérbole com equação $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

Exercícios

1. Determine a equação da circunferência que tem:
   (a) centro em $(2, 5)$ e raio 2
   (b) centro em $(-1, 4)$ e raio $\sqrt{2}$
   (c) centro em $(3, 0)$ e raio 1

2. Verifique quais dos pontos $(0, 3), (7, 2), (-1, 3)$ pertence à circunferência $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

3. (PUC-SP) O ponto $(3, b)$ pertence à circunferência de centro $(0, 3)$ e raio 5. Calcule o valor de b.

4. Use completamento de quadrado para resolver as seguintes equações:

(a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

(b) $x^2 + 10x + 21 = 0$

(c) $3x^2 - 8x = 33$ *(Dica: divida a equação por* 3.*)*

(d) $ax^2 + bx + c = 0$

5. Calcule os pontos que forem necessários e esboce a figura dada pelas equações:

    (a) $4y^2 - 2 = 0$

    (b) $(x-4)^2 + y^2 = 1$

    (c) $500x - 95 = 5$

    (d) $x^2 - 2x + 1 + (y-1)^2 = 3^2$

    (e) $16x^2 - 64y^2 = 256$

    (f) $1000x^2 + 1000y^2 - 100 = 0$

1.4 O que é uma curva?

Definição 1.4.1. Considere uma aplicação $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, onde I é um intervalo da reta e $\mathbb{R}^2$ o conjunto de todos os pares (x, y) com $x, y \in \mathbb{R}$. A aplicação γ é chamada de **curva**.

Exemplo 1.4.2. Seja:

$$\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

A aplicação γ é uma curva. Ou seja, em geral, uma curva γ qualquer leva um parâmetro $t \in \mathbb{R}$ à um par $(x(t), y(t))$ com $x(t)$ e $y(t)$ funções que dependem de t.

Veja que, ao contrário das funções estudadas anteriormente, aqui não faz sentido falar em gráfico da curva, pois não temos uma aplicação que tem $\mathbb{R}$ como domínio e contradomínio.

Nem tudo está acabado! Diferente das funções de antes, uma curva não terá gráfico, mas ainda teremos uma representação visual.

Definição 1.4.3. A "linha" que representa a trajetória realizada por uma curva γ é dita **traço** de γ.

Usando o Exemplo 1.4.2, vamos esboçar o traço de $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, com $t \in [0, 2\pi)$.

Sabemos que $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \operatorname{sen} t$. Note que se elevarmos ao quadrado ambas equações e as somarmos, teremos:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1.$$

Denotando $x = x(t)$ e $y = y(t)$, temos que a curva inicial é equivalente à $x^2 + y^2 = 1$, ou seja, uma circunferência de raio 1. Veja a representação dessa curva na Figura 1.13 a seguir.

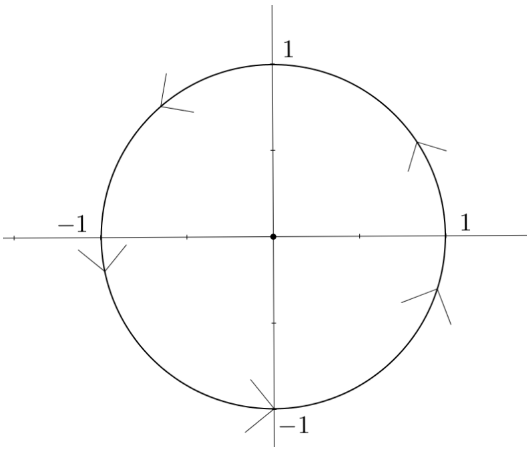


Figura 1.13: Círculo unitário

Note que na imagem aparecem algumas setas. A função dessas setas é de representar o **sentido da curva**.

Podemos imaginar a curva como sendo a trajetória de uma partícula. O sentido é como essa trajetória está sendo realizada.

Vejamos como alguns pontos se comportam. Quando $t = 0$, o ponto associado à curva será $(\cos 0, \operatorname{sen} 0) = (1, 0)$. Se aumentarmos o valor de t até chegar em 2π, obtemos a seguinte tabela, para alguns valores:

t	$\gamma(t)$
0	$(1, 0)$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$
π	$(-1, 0)$
$\frac{3\pi}{2}$	$(0, -1)$
2π	$(1, 0)$

Com os valores encontrados na tabela acima, confirmamos visualmente a trajetória que a curva realiza (Figura 1.14).

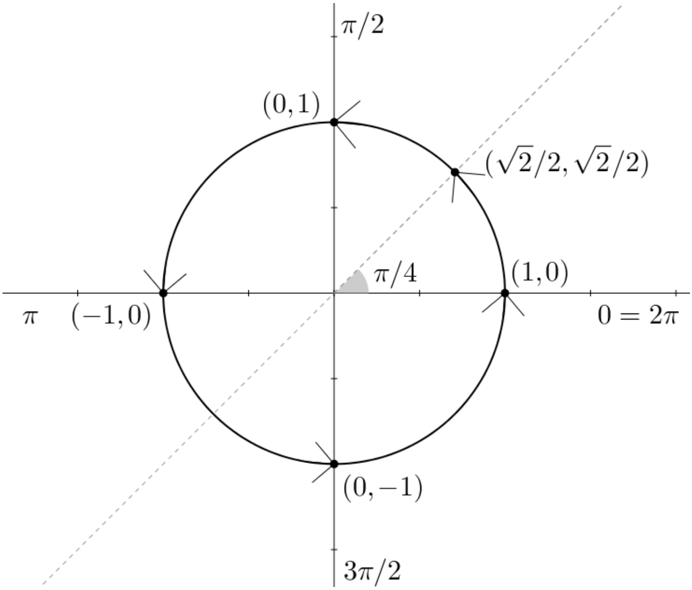


Figura 1.14

Exercícios

1. Faça o esboço das curvas a seguir.

   (a) $\gamma_1(t) = (3\cos t, 3\,\mathrm{sen}\,t)$

   (b) $\gamma_2(t) = (t, t^2)$

   (c) $\gamma_3(t) = (t^2, t)$

   (d) $\gamma_4(t) = (\sqrt{t}, \sqrt{t})$

   (e) $\gamma_5(t) = (5, t)$

1.5 Parametrizações de Curvas

Nesta seção, estudaremos equações paramétricas. No plano, equações paramétricas são úteis para descrever curvas quaisquer.

Definição 1.5.1. Se x e y são funções contínuas de t em um intervalo I, então as equações $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são chamadas de **equações paramétricas** e t é chamado de **parâmetro**. O conjunto dos pontos (x, y) obtidos ao variar t ao longo do intervalo I é chamado de **traço** da curva.

Exemplo 1.5.2. Seja a curva $\gamma : [0, 20] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = (t\cos t, t\,\text{sen}\,t).$$

O traço de γ é uma **espiral** (Figura 1.15).

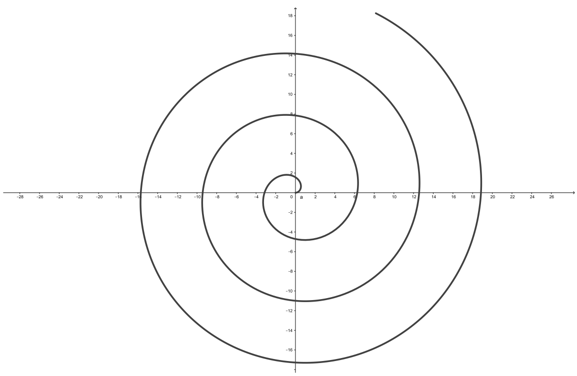


Figura 1.15

Legal, não é mesmo? Vamos agora aprender a manipular essa e muitas outras curvas a nosso favor.

1.5.1 Como assassinar o parâmetro?

De forma a entender melhor o traço de uma curva parametrizada, é normal reescrevermos as duas equações que representam a curva em apenas uma equação que relacione ambas as variáveis x e y, de forma que o parâmetro seja eliminado. Chamamos essa equação de equação cartesiana da curva.

Vamos começar com um exemplo.

Exemplo 1.5.3. Seja a curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 - t \end{cases} , \ t \in \mathbb{R}$$

Queremos eliminar o parâmetro t. Isolemos t na equação de x. Temos então:

$$x = 1 + 3t \Rightarrow x - 1 = 3t \Rightarrow \frac{x-1}{3} = t \Rightarrow t = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}.$$

Agora substituindo o t obtido na equação de y, temos:

$$y = -2 - t = -2 - \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{3} - \frac{x}{3}.$$

Logo, temos que α pode ser representada pela equação cartesiana

$$y = -\frac{1}{3}\,x - \frac{5}{3},$$

isto é, α é uma **reta** (Figura 1.16).

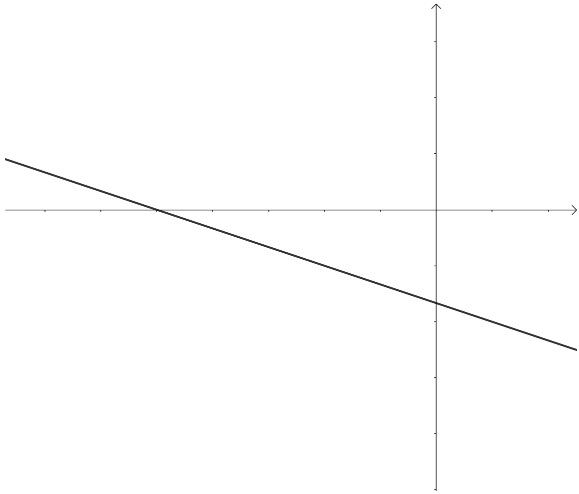


Figura 1.16

$\square$

Vamos estudar outro exemplo.

Exemplo 1.5.4. Seja a curva $\beta : [-1, 4] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\beta : \begin{cases} x = \sqrt{2t+3} \\ y = 2t - 4 \end{cases} \quad , \ -1 \leq t \leq 4$$

Queremos eliminar o parâmetro t. Isolemos t na equação de y. Temos:

$$y = 2t - 4 \Rightarrow 2t = y + 4 \Rightarrow t = \frac{y+4}{2}.$$

Agora substituindo o t obtido, na equação de x, temos:

$$x = \sqrt{2t+3} = \sqrt{2\left(\frac{y+4}{2}\right) + 3} = \sqrt{y+7}.$$

Se colocarmos y em função de x, temos:

$$x = \sqrt{y+7} \Rightarrow x^2 = y + 7 \Rightarrow y = x^2 - 7.$$

Podemos concluir então que β é uma **parábola** (Figura 1.17).

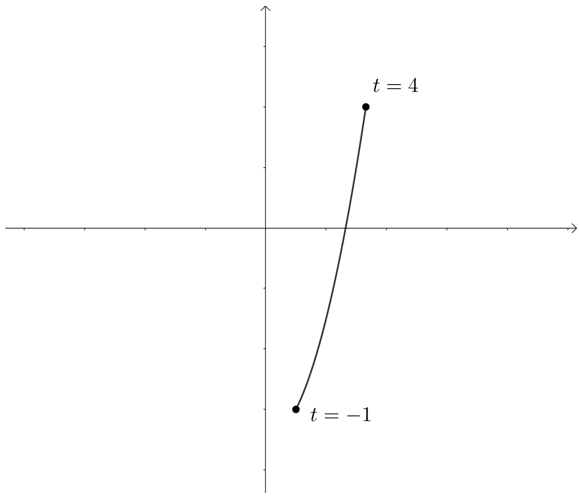


Figura 1.17

$\square$

Até agora está muito fácil, não? Vamos apimentar um pouco as coisas com os próximos dois exemplos.

Exemplo 1.5.5. Seja a curva $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma : \begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Queremos eliminar o parâmetro θ. Às vezes precisamos ser um pouco criativos ao eliminar o parâmetro. Temos:

$$x = 3\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{3},$$

$$y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta = \frac{y}{2}.$$

Agora substituímos essas expressões na identidade trigonométrica fundamental:

$$\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Essa é a equação de uma **elipse** centrada na origem com eixo maior de medida 6 e eixo menor de medida 4 (Figura 1.18).

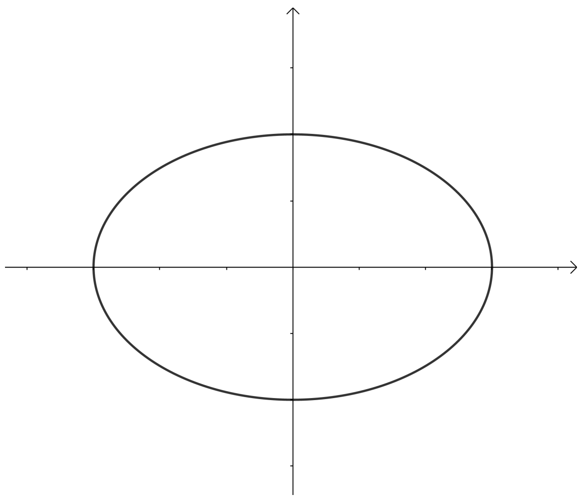


Figura 1.18

□

Exemplo 1.5.6. Seja a curva $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\delta : \begin{cases} x = e^{2t} \\ y = 3e^{4t} + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Queremos eliminar o parâmetro t. Vamos isolar t na equação de x. Temos:

$$x = e^{2t} \Rightarrow \ln x = \ln e^{2t} \Rightarrow \ln x = 2t \Rightarrow t = \frac{\ln x}{2}.$$

Substituindo na equação de y, temos:

$$y = 3e^{4t} + 1 = 3e^{2\ln x} + 1 = 3e^{\ln x^2} + 1 = 3x^2 + 1.$$

Logo, δ pode ser representada pela equação cartesiana

$$y = 3x^2 + 1,$$

e, portanto, δ é uma **parábola** (Figura 1.19).

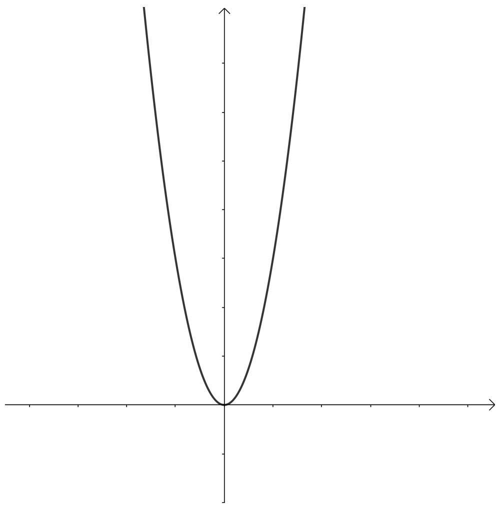


Figura 1.19

$\square$

Agora é a sua vez de colocar a mão na massa!

Exercícios

1. Elimine o parâmetro t e encontre equações cartesianas para as curvas a seguir.

   (a) $\gamma_1(t) = (1, t)$

   (b) $\gamma_2(t) = (t - 11, t^4 + 1)$

   (c) $\gamma_3(t) = (2t^2 - 6, 3t^2 - 9)$

   (d) $\gamma_4(t) = (5\cos t, 5\operatorname{sen} t)$

   (e) $\gamma_5(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$

   (f) $\gamma_6(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\operatorname{sen} t)$

   (g) $\gamma_7(t) = (\operatorname{sen} 2t, \cos t)$

   (h) $\gamma_8(t) = (e^t, t^2)$

   (i) $\gamma_9(t) = (\sec t, \operatorname{tg} t), -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$

   (j) $\gamma_{10}(t) = (\ln t, \sqrt{t}), t \geq 1$

1.5.2 Como fabricar o paramêtro?

Aprendemos a eliminar o parâmetro de uma curva descrita por equações paramétricas, de forma a escrevê-la como uma equação cartesiana. Agora será que é possível fazer o inverso, isto é, gerar um paramêtro de forma a parametrizar uma curva definida por uma equação cartesiana?

Vamos tentar no exemplo a seguir.

Exemplo 1.5.7. Seja a reta α definida por

$$y = 2x + 4.$$

Queremos encontrar um par de equações paramétricas que descrevam essa reta.

De fato, é possível parametrizá-la definindo $x = t$, e então substituindo x por t na equação de y. Logo, teremos a parametrização:

$$\alpha_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 4 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Como não há restrições no domínio de $y = 2x + 4$, então não há restrições nos valores de t.

Perceba que podemos parametrizar α de várias formas. Poderíamos, por exemplo, definir $x = 3t - 1$. Substituindo x na equação de y, teríamos:

$$y = 2x + 4 = 2(3t - 1) + 4 = 6t - 2 + 4 = 6t + 2.$$

Logo, outra parametrização para α seria:

$$\alpha_2 : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 6t + 2 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Note que a parametrização α_2 percorre a reta mais rápido que a parametrização α_1. □

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 1.5.8. Seja agora a curva β definida pela equação

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4,$$

ou seja, β é uma circunferência de raio 2 centrado no ponto $(2, 0)$.

Queremos encontrar um par de equações paramétricas que descrevam essa curva. Dividindo ambos os lados da equação por 4, temos:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1.$$

Pela identidade trigonométrica fundamental, temos $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, $0 \leq t < 2\pi$. Então:

$$\frac{x-2}{2} = \cos t \Rightarrow x - 2 = 2\cos t \Rightarrow x = 2\cos t + 2,$$

$$\frac{y}{2} = \operatorname{sen} t \Rightarrow y = 2\operatorname{sen} t.$$

Logo, temos a seguinte parametrização para β:

$$\beta : \begin{cases} x = 2\cos t + 2 \\ y = 2\operatorname{sen} t \end{cases}, \ 0 \leq t < 2\pi$$

O sentido da trajetória de uma curva depende da parametrização feita. Esboce o traço de β e verifique que o sentido de sua trajetória nesta parametrização é anti-horário. $\square$

Exemplo 1.5.9. Seja a curva γ definida pela equação

$$y^2 = x^2 y + x^3.$$

Queremos encontrar uma parametrização para γ.

Neste caso, tomaremos $y = tx$. Temos:

$$y^2 = x^2 y + x^3 \Rightarrow (tx)^2 = x^2(tx) + x^3 \Rightarrow t^2 x^2 = x^2(tx + x).$$

Se $x = 0$, temos que $y^2 = 0$ e portanto $y = 0$. Se $x \neq 0$, então $t^2 = tx + x = x(t+1) \Rightarrow x = \dfrac{t^2}{1+t}$.

Substituindo em $y = tx$, temos que $y = \dfrac{t^3}{1+t}$.

Logo, uma possível parametrização para γ é:

$$\gamma : \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t} \\ y = \dfrac{t^3}{1+t} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

$\square$

Com um pouco de prática, você estará craque em parametrizar curvas!

Exercícios

1. Encontre equações paramétricas para as curvas definidas pelas equações cartesianas a seguir.

   (a) $y = x^5$
   (b) $x^2 - y^2 = 1$
   (c) $3(x-1)^2 + 5y^2 = 15$
   (d) $y^2 - 4y + 3 - x = 0$
   (e) $x^3 + y^3 = 6xy$
   (f) $y^2 = x^3$
   (g) $y^2 = x^3 + x^2$
   (h) $(x^2 + y^2)^2 = xy$
   (i) $x^8 + y^8 = x + y$
   (j) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

2. Encontre as equações paramétricas para a trajetória de uma partícula que se move ao longo do círculo $x^2+(y-1)^2 = 4$ da seguinte maneira:

   (a) Uma vez no sentido horário, a partir de $(2, 1)$.
   (b) Três vezes no sentido anti-horário, a partir de $(2, 1)$.
   (c) Meia-volta no sentido anti-horário, a partir de $(0, 3)$.

1.6 Coordenadas polares

O sistema de coordenadas cartesianas é um meio de mapear pontos em par ordenados e vice-versa. Já o sistema de coordenadas polares é um método alternativo de mapear pontos em par ordenados, que, em muitos casos, pode ser mais pertinente usar do que o sistemas de coordenadas cartesianas.

Considere a Figura 1.20.

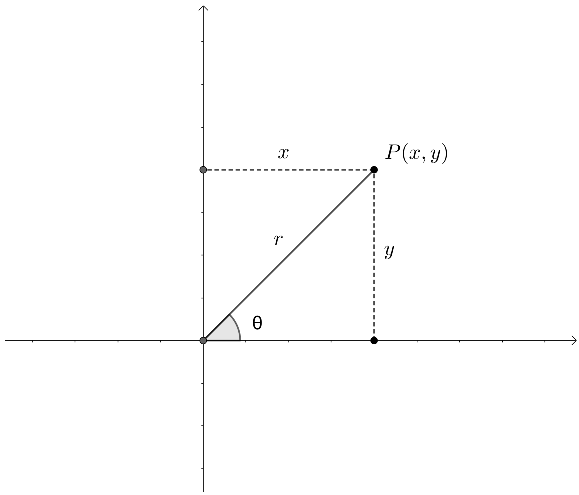


Figura 1.20

O ponto P possui coordenadas cartesianas (x, y). O segmento de reta que conecta a origem ao ponto P mede a distância da origem a P, cuja medida é r. O ângulo entre OP e o eixo x positivo tem medida θ. Esta observação sugere uma correspondência natural entre os pares (x, y) e (r, θ). Essa correspondência é a base do sistema de coordenadas polares. A coordenada r é chamada de coordenada radial e a coordenada θ é chamada de coordenada angular.

Usando relações trigonométricas do triângulo retângulo, temos:

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}.$$

Todo ponto do plano pode ser representado por coordenadas polares. Perceba que a equação $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$ possui infinitas soluções, qualquer que seja o par (x, y). Entretanto, se restringirmos as soluções para valores entre 0 e 2π, então podemos associar uma única solução ao quadrante no qual o ponto (x, y) está localizado. Com isso, o valor correspondente de r é positivo.

1.6.1 Como converter pontos entre coordenadas polares e cartesianas?

Definimos como funciona o sistema de coordenadas polares e vimos que não há segredos. Agora, como podemos converter pontos entre sistemas de coordenadas?

Dado um ponto P no plano com coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), as seguintes relações são válidas:

$$x = r\cos\theta, \ y = r \operatorname{sen}\theta,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}.$$

Através dessas relações, podemos então converter pontos entre os respectivos sistemas de coordenadas.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.6.1. Seja $(2, 1)$ um ponto dado em coordenadas cartesianas. Vamos convertê-lo em coordenadas polares.

Use $x = 2$ e $y = 1$ nas equações $r^2 = x^2 + y^2$ e $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$. Temos:

$$r^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow r = \sqrt{5}.$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Logo, o ponto $(2,1)$ pode ser representado como $\left(\sqrt{5}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ em coordenadas polares. $\square$

Exemplo 1.6.2. Vamos agora fazer o inverso, isto é, dado um ponto em coordenadas polares, queremos convertê-lo em coordenadas cartesianas.

Considere o ponto $\left(3, \dfrac{\pi}{3}\right)$ em coordenadas polares.

Use $r = 3$ e $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ nas equações $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$. Temos:

$$x = 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.$$

$$y = 3 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Concluímos então que o ponto $\left(3, \dfrac{\pi}{3}\right)$ pode ser representado como $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ em coordenadas cartesianas. $\square$

A representação polar de um ponto não é única! Por exemplo, as coordenadas polares $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$ e $\left(2, \dfrac{7\pi}{3}\right)$ representam o ponto $(1, \sqrt{3})$ em coordenadas cartesianas. Também, o valor de r pode ser negativo. Então, o ponto em coordenadas polares $\left(-2, \dfrac{4\pi}{3}\right)$ também representa o ponto $(1, \sqrt{3})$ em coordenadas cartesianas.

Agora é sua vez de praticar!

Exercícios

1. Cada ponto a seguir está representado em coordenadas cartesianas. Converta-os em coordenadas polares.

   (a) $(1, 0)$
   (b) $(0, 4)$
   (c) $(-2, -2)$
   (d) $(5, -5)$

2. Cada ponto a seguir está representado em coordenadas polares. Converta-os em coordenadas cartesianas.

   (a) $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$
   (b) $\left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$
   (c) $\left(-2, \dfrac{4\pi}{3}\right)$
   (d) $\left(2, -\dfrac{5\pi}{3}\right)$

1.6.2 Equações polares de curvas

Da mesma forma em que podemos representar coordenadas cartesianas em coordenadas polares, também podemos reescrever equações cartesianas em equações polares. Veremos que em muitos casos, equações polares facilitam o nosso trabalho com curvas.

Vamos à alguns exemplos.

Exemplo 1.6.3. Seja α a curva representada pela equação cartesiana

$$x^2 + y^2 = 4,$$

que representa uma circunferência de centro na origem e raio 2.

Queremos determinar a equação polar de α. Vimos que $r^2 = x^2 + y^2$. Então:

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2.$$

Concluímos que a equação

$$r = 2$$

é uma equação polar da circunferência α. $\square$

Exemplo 1.6.4. Seja β a reta representada pela equação cartesiana

$$y = \sqrt{3}x.$$

Queremos determinar a equação polar de β.

Vimos que $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Substituindo na equação de β, temos:

$$y = \sqrt{3}x \Rightarrow r\,\mathrm{sen}\,\theta = \sqrt{3}r\cos\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Logo, a equação

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

é uma equação polar da reta β. $\square$

Converter equações polares em equações cartesianas é possível também! Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 1.6.5. Seja γ a curva representada pela equação polar

$$r = 1 - \cos\theta.$$

Queremos determinar a equação cartesiana de γ. Vimos que $x = r\cos\theta$, o que implica que $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$. Vimos também que $r^2 = x^2 + y^2$. Então:

$$r = 1 - \cos\theta \Rightarrow r = 1 - \frac{x}{r} \Rightarrow r^2 = r - x$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\Rightarrow (x^2 + y^2 + x)^2 = x^2 + y^2.$$

Concluímos que

$$(x^2 + y^2 + x)^2 = x^2 + y^2$$

é uma equação cartesiana para γ. A curva γ é chamada de **cardioide** (Figura 1.21).

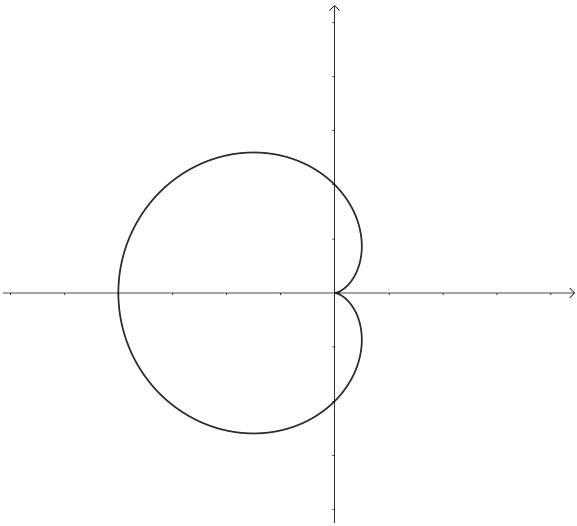


Figura 1.21

$\square$

Hora de praticar!

1.6.3 Exercícios

1. Encontre equações polares para as curvas definidas pelas equações cartesianas a seguir.

(a) $2x + 3y = 1$

(b) $x^2 + y^2 = 20x$

(c) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$

(d) $4x^2 = 81(x^2 + y^2)$

(e) $y^2(2 - x) = x^3$

(f) $x^4 = x^2 - y^2$

2. Encontre equações cartesianas para as curvas definidas pelas equações polares a seguir.

(a) $\theta = \pi$

(b) $r = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$

(c) $r = \dfrac{2}{3\,\mathrm{sen}\,\theta - 5\mathrm{cos}\theta}$

(d) $\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{cos}\theta$

(e) $r = \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta$

(f) $r = 4\mathrm{cos}^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$

Capítulo 2

Um pouco de cálculo

No capítulo anterior vimos algumas técnicas que nos ajudam a esboçar o traço de algumas curvas. Mas será que essas técnicas são suficientes para esboçar para esboçar o traço da curva $\sigma(t) = (t^2+t, t^3-t)$? Infelizmente não. Além dessa, existem muitas outras curvas que não vamos conseguir esboçar seu traço utilizando apenas o que vimos no capítulo 1. Mas então, como fazer? Nós vamos usar o cálculo!

O cálculo é uma boa ferramenta que nos permitirá esboçar o traço de curvas através do limite, da derivada, dos vetores tangente e normal, e da curvatura. Neste capítulo vamos conhecer essas ferramentas que precisaremos utilizar.

2.1 Limites

O limite de uma função possui grande importância no cálculo diferencial e em outros ramos da análise matemática, definindo derivadas e continuidade de funções. *"Derivada? Continuidade? O que é isso?"*. Calma, nós vamos explicar. Antes precisamos entender o que é um limite.

O limite de uma função é o valor que esta se aproxima quando a variável se aproxima de um valor. Vamos tentar entender com um exemplo: Considere a função $f(x) = 2x+1$. Observe que a medida que x se aproxima de 4 o valor de $y = f(x)$ se aproxima de 9. Por exemplo, em $x = 3,9$, temos $f(3,9) = 2\cdot(3,9)+1 = 8,8$. Para um ponto mais próximo de 4 como $x = 3,99999$ temos que $f(3,99999) = 2\cdot(3,99999)+1 = 8,99998$, perceba que quanto mais próximo x está de 4, mais próximo o valor de f está de 9. Dizemos então que o limite de $f(x)$ é 9 para x tendendo a 4 e utilizamos a seguinte notação:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 9.$$

Parece muito mais fácil apenas substituir $x = 4$ em $f(x) = 2x + 1$ não é? E é exatamente a primeira coisa que vamos fazer em um limite. Assim, neste caso,

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} 2x + 1 = 2(4) + 1 = 9$$

Porém em algumas funções não podemos apenas substituir o valor de x, por exemplo, considere a função $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}$. Note que a função não está definida em $x = -2$, pois $g(-2) = \dfrac{0}{0}$ que é uma indeterminação, mas nem tudo está perdido. Neste caso ainda é possível encontrar o limite em $x = -2$. Para isso, vamos efetuar a divisão de polinômios que definem $g(x)$, isto é, vamos dividir $x^2 - x - 6$ por $x + 2$. Assim teremos que $g(x) = x - 3$, note que podemos aplicar o limite com $x \to -2$ utilizar o mesmo método que utilizamos anteriormente tomando pontos muito próximos de -2. Fazendo as contas conseguimos chegar que

$$\lim_{x\to -2} g(x) = -5.$$

Esse é um exemplo de limite existente porque a função tende à uma altura apesar de não alcançá-la na verdade. Então vimos que a função não precisa existir em um determinado ponto para encontrarmos seu limite, basta somente ela se aproximar de um valor.

De modo geral, dizemos que o limite de uma função se aproxima de um valor L a medida que x se aproxima de um valor a.

Notação 2.1.1.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L. \tag{2.1}$$

Exercício 2.1.2. Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to -3} x^2 + x - 6$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} x^4 - x^3 + x - 3$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x}{3x-1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \ln(x)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \cos(x)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to \sqrt{3}} \arctan(x)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$

Desafio 2.1.3. Há um teorema muito importante para o Cálculo chamado Teorema do Confronto (ou Teorema do Sanduíche) que diz que dadas f,g,h funções tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$, então $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = L$. Com isso em mente, calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$.

2.1.1 Limites laterais

Existem algumas funções que possuem uma característica um tanto quanto peculiar, onde em um determinado ponto temos uma certa altura à direita e outra à esquerda desse ponto. Para entender melhor como isso ocorre observe o gráfico da função $f(x)$ na Figura 2.1 onde $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se} \quad x \leq 0, \\ x+1, & \text{se} \quad x > 0, \end{cases}$$

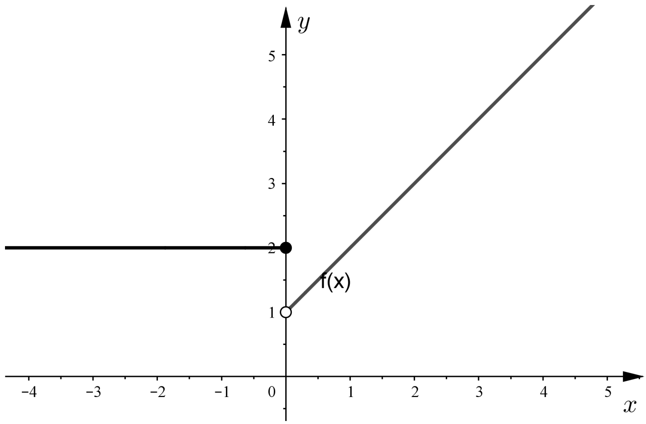


Figura 2.1: Gráfico da função $f(x)$.

Perceba que se você se aproximar de 0 do lado esquerdo do eixo y a função é constante igual a 2 e do lado direito do eixo y a função é $x+1$. Mas e agora? por onde devemos nos aproximar, pela direita ou pela esquerda? Podemos calcular o limite dos dois lados, o que chamamos de limite lateral. Então, veja que

- Se nos aproximarmos por valores maiores que 0, ou seja, pela direita, teremos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + 1 = 1.$$

- Se nos aproximarmos por valores menores que 0, ou seja, pela esquerda, teremos

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2 = 2.$$

Definição 2.1.4. Um *limite esquerdo* é a altura a que uma função tende à medida que você se aproxima de x por valores menores, isto é, a partir da esquerda; o *limite direito* é a altura a que um função tende à medida que você se aproxima de x por valores maiores, isto é, a partir da direita. Vamos denotar esses limites da seguinte maneira:

i) Limite direito:

$$\lim_{x\to a^+} f(x).$$

ii) Limite esquerdo:

$$\lim_{x\to a^-} f(x).$$

2.1.2 Limites no infinito

Vamos voltar ao exemplo da função $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}$, lembre que ela não está definida em $x = -2$ pois teríamos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Você deve esta se perguntando o que é uma indeterminação. Dizemos que uma expressão é uma *indeterminação* se não sabemos o seu valor, como por exemplo $\dfrac{0}{0}$, pois não existe divisão por 0 (isso vem da definição de número racional: "Se $x \in \mathbb{Q}$, então $x = \dfrac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$").

Veremos mais adiante que vamos precisar calcular os limites em pontos especiais das curvas para ver como elas se comportam. Nesses pontos é extremamente comum que o limite resulte em indeterminações.

As indeterminações mais comuns são:

- $\dfrac{a}{0}, a \in \mathbb{R}$;
- 0^0;
- $\dfrac{\infty}{\infty}$;
- ∞^0;
- $\dfrac{a}{\infty}, a \in \mathbb{R}$;
- $a^\infty, a \in \mathbb{R}$;
- $\dfrac{\infty}{a}, a \in \mathbb{R}$;
- $\infty \pm \infty$;

Essa é uma das partes mais importantes de limite: para esboçar os gráficos das curvas, calculamos o limite de uma função quando x tende para $\pm\infty$. Obviamente nós não poderemos apenas substituir o valor de x (lembre da definição de limite em que não importa se x alcança o valor ou não, queremos apenas saber o que acontece com $f(x)$). a ideia aqui é colocarmos valores tanto positivos quanto negativos muito grandes para x na função e ver o que acontece com o valor que ela assume.

Exemplo 2.1.5. Seja $f(x) = e^x$, cujo gráfico está representado na Figura 2.2:

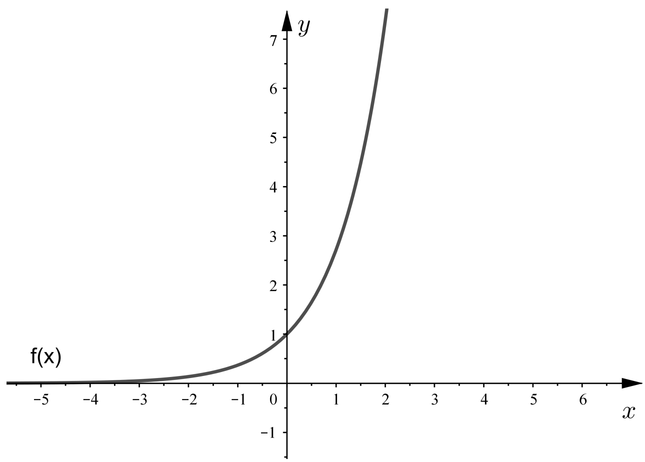


Figura 2.2: Gráfico da função $f(x) = e^x$.

Ao analisarmos o gráfico veremos que a medida que x cresce o valor de $f(x)$ fica muito grande, assim

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$$

Podemos também calcular o limite tendendo a $-\infty$ que neste caso podemos observar pelo gráfico que a medida que x diminui e se aproxima de valores negativos muito grandes, a função $f(x)$ se aproxima de 0,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Exemplo 2.1.6. Considere a função $g(x) = \dfrac{1}{x}$, observando a Figura 2.3, vemos que a medida que x assume valores positivos muito grandes o valor de $g(x)$ se aproxima de 0 por valores positivos, de modo análogo se x se aproxima de valores muito grandes negativos o valor de $g(x)$ também se aproxima de 0 por valores negativos.Logo temos que,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ainda utilizando esse exemplo vamos calcular os limites laterais em $x = 0$:

i) Ao nos aproximamos de 0 por valores positivos, o valor de $f(x)$ aumenta. Olhando o gráfico percebemos que para valores positivos muito próximos de 0, $f(x)$ explode para $+\infty$, portanto, temos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

ii) Ao nos aproximarmos de 0 por valores negativos, $f(x)$ aumenta e para valores negativos muito próximos de 0, $f(x)$ explode para $-\infty$, portanto,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

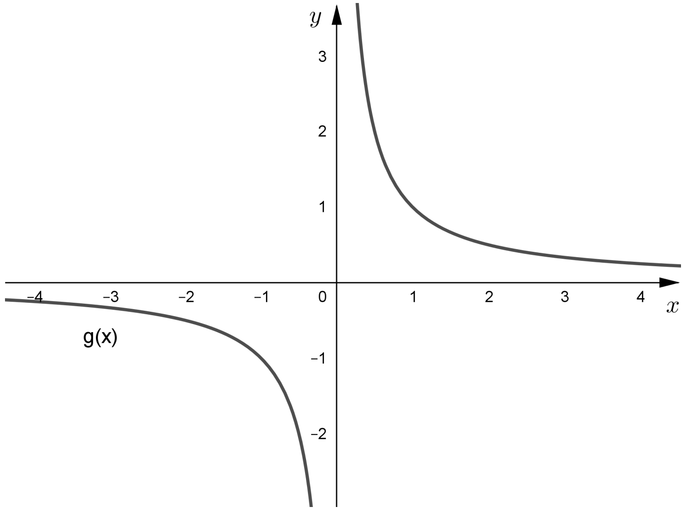


Figura 2.3: Gráfico da função $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Mas e agora? Quanto vale $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$? Como os limites laterais são diferentes dizemos que *"o limite não existe"*.

Definição 2.1.7. Dizemos que o limite de uma função em um determinado ponto $x = c, c \in \mathbb{R}$ existe se:

1) O limite esquerdo existe;

2) O limite direito existe;

3) Os limites esquerdo e direito forem iguais.

Agora que entendemos como funciona um limite vamos apresentar alguns "truques"para facilitar as contas de limites tendendo para $\pm\infty$.

Para calcularmos o limite de um polinômio ou de um quociente de polinômios, vamos calcular o limite apenas para o coeficiente de maior grau ou para os coeficientes de maior grau do numerador e do denominador. Para entender melhor veja o exemplo;

Exemplos 2.1.8. Vamos calcular o limite de x tendendo para $\pm\infty$ de $p(x)$:

a) Se $p(x) = x^3 + 5x^2 - 5x + 3$. Então

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 + 5x^2 - 5x + 3 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 + 5x^2 - 5x + 3 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

b) Se $p(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 4$, então

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 - 2x^3 + 3x - 4 = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^4 - 2x^3 + 3x - 4 = \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$$

Exemplo 2.1.9. Vamos calcular o limite de x tendendo para $\pm\infty$ de $\dfrac{3x^5 + 4x^4 - x^2 + 3}{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}$, logo para $+\infty$ temos,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^4 - x^2 + 3}{x^3 + 4x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^4}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} 4x = +\infty.$$

Para $-\infty$ temos,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^4 - x^2 + 3}{x^3 + 4x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^4}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} 4x = -\infty.$$

Observação 2.1.10. Note que quando calculamos o limite tendendo a $-\infty$ para polinômios de grau ímpar o resultado será $-\infty$, já para polinômios de grau par, o resultado será $+\infty$.

A observação anterior será de grande importância quando tivermos que calcular os limites para saber o como uma curva se comporta no infinito, mas isso são cenas dos próximos capítulos.

Exercício 2.1.11. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+3}{3n+1}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+3x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2+3}}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x^3-3}$

e) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2+3x}{x^2-4}$

f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

h) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^3-x^2}$

Exercício 2.1.12. Supondo $0 < t < 1$, calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} t^n$.

2.1.3 Continuidade

A continuidade de uma função é algo bem intuitivo e simples de se entender, porém sua definição formal é dada por um limite.

Definição 2.1.13. Dizemos que uma função $f(x)$ é *contínua* em um ponto a, $a \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{2.2}$$

A definição de continuidade é dita um conceito local, pois o limite avalia apenas um ponto do domínio da função. Agora, se conseguirmos calcular o limite em 2.2 para todo x pertencente ao seu domínio, dizemos que a função é contínua. Podemos também a grosso modo dizer que uma função é contínua se conseguimos esboçar seu gráfico sem tirar o lápis do papel. Trabalhar com funções descontínuas é bastante complicado do ponto de vista do cálculo e as coisas complicam ainda mais quando trabalhamos com curvas. Por isso nós iremos trabalhar apenas com funções contínuas que em praticamente todos os exemplos serão funções polinomiais e trigonométricas.

Exercício 2.1.14. Mostre que $h(x)$ não é contínua em $x = 0$. onde $h(x)$ é dada por:

$$h(x) = \begin{cases} -\cos(x), & se \quad x < 0, \\ 0, & se \quad x = 0, \\ x^2 + 2, & se \quad x > 0. \end{cases}$$

2.2 Derivadas

Um ponto chave para esboçar curvas é saber como é o seu comportamento, e por comportamento estamos querendo dizer a forma como ela varia. Veremos mais a frente que a derivada está relacionada com a taxa de variação, e então, a derivada será uma ferramenta que nos auxiliará para entender como uma curva varia.

Primeiramente, veremos o que é a derivada de uma função f, e após como aplicá-la no contexto das curvas. Nossos estudos se iniciarão com a taxa de variação.

2.2.1 A taxa de variação

Para facilitar a notação considere o seguinte: dado um ponto $A = (1, 2)$, quando quisermos falar de sua coordenada x vamos escrever A_x, e analogamente, se quisermos falar de sua coordenada y escreveremos A_y. Assim, $A_x = 1$ e $A_y = 2$. Agora para os pontos $B = (t - 1, t^2 + 3t)$ e $C = (x, x^3 - 5)$, temos $B_x = t - 1$, $B_y = t^2 + 3t$, $C_x = x$ e $C_y = x^3 - 5$.

Sabemos que a taxa de variação (ou coeficiente angular) da função afim $f(x) = 2x+1$ é 2. Vejamos o porquê. Observe a figura 2.4.

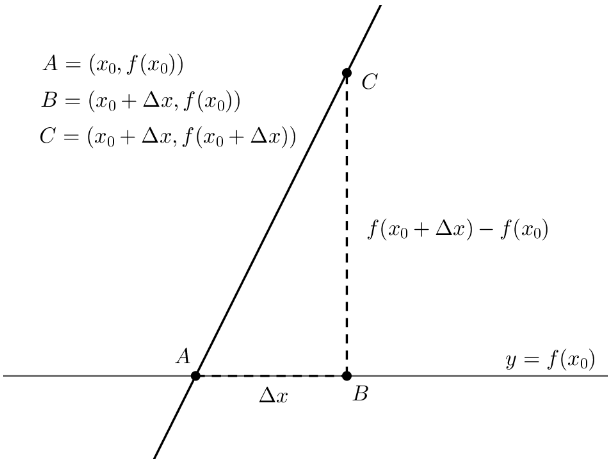


Figura 2.4: Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$

Na figura podemos observar os pontos $A = (x_0, f(x_0))$, $B = (x_0 + \Delta x, f(x_0))$ e $C = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ com $\Delta x \neq 0$ (podendo ser negativo). Então, a taxa de variação no ponto x_0 é obtida calculando o seguinte quociente:

$$\begin{aligned} \frac{C_y - B_y}{B_x - A_x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} \\ &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Como $f(x) = 2x + 1$, então na equação 2.3 temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \frac{[2(x_0 + \Delta x) + 1] - [2x_0 + 1]}{\Delta x} \\ &= \frac{2x_0 + 2\Delta x + 1 - 2x_0 - 1}{\Delta x} \\ &= \frac{2\Delta x}{\Delta x}, \end{aligned}$$

e como $\Delta x \neq 0$ temos que $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2$ no ponto x_0. Porém, como tomamos x_0 um número qualquer, temos que a taxa da variação da função $f(x) = 2x + 1$ é 2 em qualquer ponto.

Da mesma forma como fizemos anteriormente, podemos concluir que a taxa de variação da função afim $f(x) = ax + b$ é a.

Vejamos agora como encontrar a taxa de variação de uma função f qualquer. A taxa de variação da função f em um ponto x_0 é a taxa de variação da *reta tangente* à f no ponto x_0. Mas o que é reta tangente? Podemos entender por reta tangente à f no ponto x_0 como sendo a reta que toca a função (ou curva) no ponto $(x_0, f(x_0))$ e em mais nenhum ponto que está próximo desse ponto. A Figura 2.5 mostra um exemplo de reta tangente.

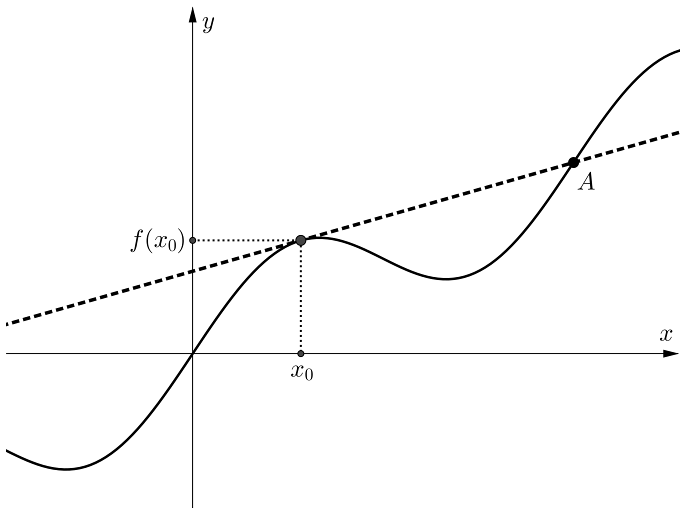
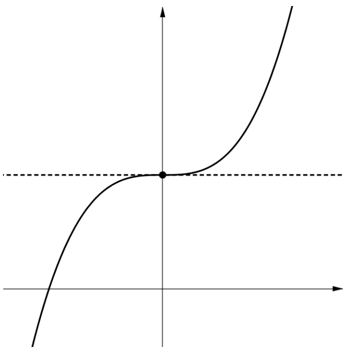
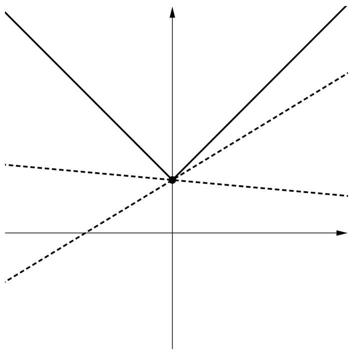


Figura 2.5: Reta tangente à f no ponto x_0

A reta tracejada é a reta tangente a f no ponto x_0 pois, próximo do ponto $(x_0, f(x_0))$, a reta toca a função f apenas nesse ponto. Por mais que a reta "furou" a função no ponto A, ela não deixou de ser tangente ao ponto $(x_0, f(x_0))$, pois o ponto A está "longe" do ponto $(x_0, f(x_0))$. Um outro exemplo é o da figura (a) a seguir, onde a reta tangente fura a função no ponto de tangência. Existem também funções (ou curvas) nas quais dizemos que não possui reta tangente em algum ponto. A figura (b) mostra um exemplo no qual dizemos que não existe reta tangente, pois não existe uma única reta tangente.



(a)



(b)

Observe a Figura 2.6 abaixo. Pela figura, fixando o ponto $(x_0, f(x_0))$ e para $\Delta x \neq 0$, encontramos uma reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ (essa reta é chamada de *reta secante*). Note que podemos calcular a taxa de variação da reta secante usando a equação 2.3. Note também que se tomarmos Δx cada vez mais próximo de 0, a reta secante ficará mais próxima da reta tangente. Então, se tomarmos o limite para Δx tendendo a zero encontramos a taxa de variação da função f no ponto x_0. Em símbolos,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

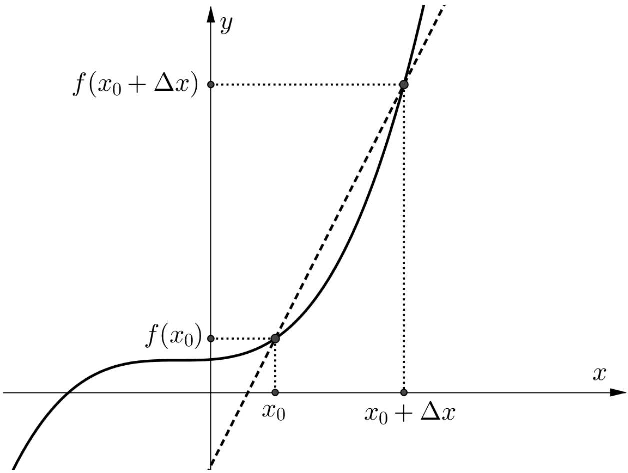


Figura 2.6: Taxa de variação de uma função em um ponto x_0

é a taxa de variação da função f no ponto x_0.

2.2.2 A derivada e suas propriedades

O limite visto anteriormente é de fundamental importância para o estudo de funções, e também será útil para o estudo das curvas paramétricas. Por isso, vamos defini-lo formalmente.

Definição 2.2.1. Sejam f uma função e x_0 um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

quando existe e é finito, denomina-se *derivada* de f em x_0, indica-se por $f'(x_0)$ e lê-se "f linha aplicada em x_0". Assim,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2.4}$$

Se f admite derivada em x_0, então diremos que f é *derivável* em x_0.

Exemplo 2.2.2. Neste exemplo vamos calcular a derivada (ou seja, a taxa de variação) da função $f(x) = x^2$ em um ponto x_0 qualquer, e após, para $x_0 = 1$.

Pela definição de derivada (equação (2.4)), a derivada de f no ponto x_0 é

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2.5}$$

Fazendo antes o cálculo do quociente $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2}{\Delta x} \\ &= \frac{{x_0}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - {x_0}^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= 2x_0 + \Delta x. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Então, substituindo (2.6) em (2.5), obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x \\ &= 2x_0, \end{aligned}$$

ou seja, a derivada de f em qualquer ponto x_0 é $f'(x_0) = 2x_0$. Então, para encontrar o valor da derivada de f no ponto $x_0 = 1$, basta substituir x_0 por 1 na equação acima, obtendo $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Observando a Figura 2.7, vemos que a reta tangente é $y = 2x - 1$, isto é, a reta tem taxa de variação 2.

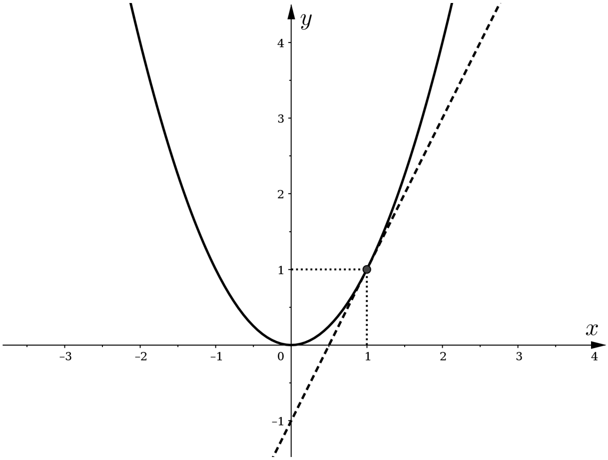


Figura 2.7: Reta tangente à $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$.

A equação (2.4) nos mostra qual é o valor da derivada de f no ponto x_0. Porém, podemos escrever essa equação da seguinte forma:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{2.7}$$

ou seja, podemos olhar para a derivada como sendo também uma função. Então, no nosso exemplo, temos que a função derivada de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$.

No exemplo dado tínhamos $f(x) = x^2$, cuja derivada é $f'(x) = 2x$. Observe que existe uma relação entre o sinal de $f'(x)$ (ou seja, quando $f'(x)$ é positiva ou negativa) e o gráfico de f. Quando $x < 0$, ou seja, no intervalo $(-\infty, 0)$, a $f'(x)$ é negativa e a $f(x)$ é decrescente; e quando $x > 0$, ou seja, no intervalo $(0, +\infty)$, a $f'(x)$ é positiva e a $f(x)$ é crescente. Isso ocorre pois a derivada é a taxa de variação de f, ou seja, o sinal da derivada indica se a função é crescente ou decrescente. Mas e nos pontos onde $f'(x) = 0$, caso existam? No nosso exemplo, $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$, e então, a reta tangente à f no ponto $(x_0, f(x_0))$ tem taxa de variação 0. Note que, para a função do exemplo, a reta tangente está em cima do eixo x. Temos então as seguintes propriedades:

Propriedades 2.2.3. Seja f uma função derivável. Então,

- A função f é crescente em algum intervalo se $f'(x)$ for positiva nesse intervalo;
- A função f é decrescente em algum intervalo se $f'(x)$ for negativa nesse intervalo;
- Se em algum x_0 tivermos $f(x_0) = 0$ então a reta tangente a f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é horizontal, ou seja, é paralela ao eixo x.

Usando a equação (2.7) podemos encontrar a derivada de diversas funções. Vejamos algumas.

i. Se $f(x) = c$ com c constante então $f'(x) = 0$;

ii. Se $f(x) = ax + b$ então $f'(x) = a$;

iii. Se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = nx^{n-1}$;

iv. Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ então $f'(x) = \cos(x)$;

v. Se $f(x) = \cos(x)$ então $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$;

vi. Se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x$;

vii. Se $f(x) = a^x$ então $f'(x) = a^x \ln(a)$;

viii. Se $f(x) = \ln(x)$ então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$;

ix. Se $f(x) = \log_a(x)$ então $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$.

Também podemos encontrar algumas propriedades da derivada (que são chamadas de Regras de Derivação). Vejamos algumas.

Propriedades 2.2.4. Se f, g e h são funções deriváveis e c é uma constante então:

(P1) Se $f(x) = c \cdot g(x)$ então $f'(x) = c \cdot g'(x)$;

(P2) Se $h(x) = f(x) + g(x)$ então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$;

(P3) Se $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ então $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;

(P4) Se $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ então $h'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

(P5 - Regra da Cadeia) Se $f(x) = g(h(x))$ então $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$;

Vejamos um exemplo para a Regra da Cadeia.

Exemplo 2.2.5. Seja $f(x) = (2x+1)^2$. Podemos escrever f como sendo $f(x) = g(h(x))$ com $g(x) = x^2$ e $h(x) = 2x + 1$. Consultando a lista de derivadas acima, temos que a derivada de g é $g'(x) = 2x$ e a derivada de h é $h'(x) = 2$. Pela Regra da Cadeia, precisamos saber quem é $g'(h(x))$. Para isso, basta fazer a composição das funções g' e h, resultando em $g'(h(x)) = 2(2x + 1)$. Então, $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) =$ $= 2(2x + 1) \cdot 2 = 8x + 4$.

2.2.3 A notação de Leibniz

Existem diversas maneiras de denotar a derivada de uma função $f(x)$. A notação que vimos (f') é chamada notação

de Lagrange. Uma outra maneira é chamada notação de Leibniz:
$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{df}{dx}(x).$$
Por mais que estejamos denotando a derivada da função f em forma da "fração" $\dfrac{df}{dx}$, isso não representa uma fração. Com a notação de Leibniz conseguimos deixar bem claro sobre qual variável estamos derivando. No caso $\dfrac{df}{dx}$, o dx no "denominador da fração" indica que a função f está escrita em função de x e estamos derivando em relação à x. Se $f(t) = t^3$, temos que a f está escrita em função de t e a sua derivada será em relação à t, e então escrevemos
$$f'(t) = \frac{df}{dt}(t) = 3t^2.$$
Se tivermos $x(t) = t^2$ e precisarmos calcular a sua derivada, escrevemos
$$x'(t) = \frac{dx}{dt}(t) = 2t.$$
Exercício 2.2.6. Seja $f(x) = 5x + 3$. Calcule $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1000)$ e $f'(x)$. Essa função é crescente ou decrescente? Por quê?

Exercício 2.2.7. Seja $f(x) = x^2 - 8$. Calcule $f'(0)$, $f'(-2)$ e $f'(x)$ e encontre os intervalos onde ela é crescente e decrescente.

Exercício 2.2.8. Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = x^5 + x^2 + 1$;

b) $f(t) = 4t^3$;

c) $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$;

d) $f(x) = x\cos(x)$;

e) $f(x) = \ln(t^2)$;

f) $f(t) = e^{x^2}\ln(3x)$.

Exercício 2.2.9. Dada a função $x(t) = \operatorname{sen}(2t)$, calcule $\dfrac{dx}{dt}(t)$ e $\dfrac{dx}{dt}(\pi)$.

2.2.4 A derivada de segunda ordem

Até o momento vimos como derivar algumas funções e as propriedades da derivada. Podemos chamar essas derivadas de *derivadas de primeira ordem*, pois efetuamos a derivada de uma função uma única vez. Mas uma outra ferramenta que será muito útil é a *derivada de segunda ordem*. Mas o quê é a derivada de segunda ordem? É a função derivada duas vezes. Vejamos alguns exemplos:

i. Se $g(x) = x^3$, temos que a derivada de g é $3x^2$, e derivando agora $3x^2$ obtemos $6x$, ou seja, a derivada de segunda ordem de $g(x) = x^3$ é $6x$.

ii. Se $h(t) = t^2+t$ então a sua derivada é $2t+1$, e derivando $2t + 1$ obtemos 2, que é a derivada de segunda ordem de $h(t)$.

iii. Se $f(x) = x^3 - x + 1$, então a sua derivada é $3x^2 - 1$ e a sua derivada de segunda ordem é $6x$.

A derivada de segunda ordem de uma função $f(x)$ pode ser denotada da seguinte forma:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right),$$

onde a última igualdade está nos dizendo que estamos derivando em relação à x a derivada de f em relação à x. Para facilitar a compreensão da última igualdade, vamos refazer o exemplo **iii**. Como $f(x) = x^3 - x + 1$, então

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(3x^2 - 1\right) \\ &= 6x \end{aligned}$$

Vejamos o gráfico da função $f(x) = x^3 - x + 1$ (Figura 2.8). Note que existe uma relação entre o gráfico de f e o sinal de f''. Quando $x < 0$, $f''(x)$ é negativa e, nesse intervalo, f é côncava para baixo. Já quando $x > 0$, $f''(x)$ é positiva e f é côncava para cima. Essa relação sempre acontecerá para as funções nas quais podemos encontrar a sua derivada de segunda ordem.

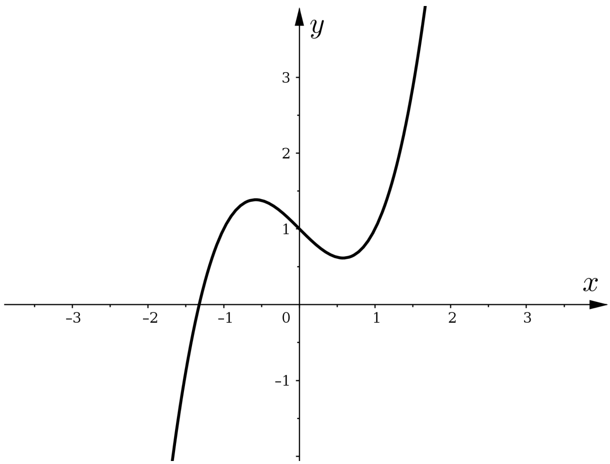


Figura 2.8: Gráfico de $f(x) = x^3 - x + 1$

Os pontos onde $f''(x)$ se anula são chamados de *pontos de inflexão*, que são os pontos onde a f troca de concavidade. No caso, a função $f(x) = x^3 - x + 1$ possui apenas o ponto $x = 0$ como ponto de inflexão. Colocando como propriedade, temos:

Propriedades 2.2.10. Seja f uma função derivável que admite a derivada de segunda ordem. Então,

- A função f é côncava para cima em algum intervalo se $f''(x)$ for positiva nesse intervalo;

- A função f é côncava para baixo em algum intervalo se $f''(x)$ for negativa nesse intervalo;

- Se em algum x_0 tivermos $f''(x_0) = 0$ então o ponto $(x_0, f(x_0))$ é ponto de inflexão.

Exercício 2.2.11. Calcule a derivada de segunda ordem da função $f(x) = x^2 - 8$. Qual é a concavidade dessa função?

Exercício 2.2.12. Dadas as funções $f(x) = x\ln(x^2)$, $g(x) = -x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 3x + 9$ e $h(x) = e^{3x}$, encontre os intervalos onde se tem concavidade para cima e concavidade para baixo.

Exercício 2.2.13. Quais são as relações entre os números a, b, c e d para que a função $f(x) = x^4 + 2ax^3 + 6bx^2 + 2cx + d$ seja côncava para cima em todo o seu domínio?

2.3 Vetor Tangente & Vetor Normal

Agora que já vimos o que é uma derivada, vamos aplicar esse conceito. Lembre do capítulo anterior que uma curva C é parametrizada da forma $\sigma(t) = (x, y)$, onde x e y estão em função de t ($x = x(t)$,$y = y(t)$). Até agora nós calculamos as derivadas de funções que dependiam apenas de x, a partir de agora para calcular a derivada de $\sigma(t)$ teremos que calcular as derivadas de $x(t)$ e $y(t)$. Assim teremos que $\sigma'(t) = (x'(t), y'(t))$.

Definição 2.3.1. O *Vetor tangente* à uma curva é o vetor dado pela derivada da curva em um determinado ponto, ou seja, o vetor tangente da curva $\sigma(t)$ em um determinado ponto $t = a$ é dado por $\sigma'(a)$. O vetor tangente também é chamado de vetor velocidade.

Mais a frente precisaremos do vetor *tangente unitário*. A única diferença é que vamos dividir o vetor tangente por $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$.

Observação 2.3.2. Seja $\vec{v} = (x, y)$ um vetor, o *módulo* de $\vec{v}$ é dado por $||\vec{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dizemos que um vetor é *unitário* se o seu módulo é igual a 1, isto é, $||\vec{v}|| = 1$.

Assim, o vetor tangente unitário $\vec{T}$ será dado por:

$$\vec{T} = \frac{\sigma'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \tag{2.8}$$

Definição 2.3.3. O *vetor normal* de uma curva é o vetor ortogonal ao vetor tangente à curva, que aponta para o sentido anti-horário, ou seja, para a esquerda do vetor tangente como mostra a Figura 2.9.

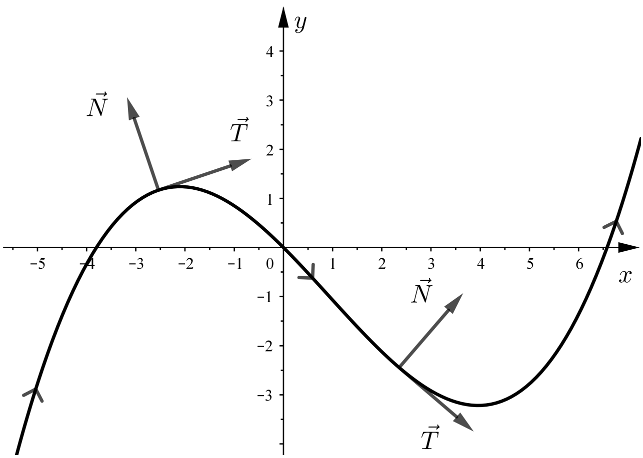


Figura 2.9: Vetor tangente e normal a uma curva

Para calcularmos o vetor normal unitário $\vec{N}$ vamos derivar o vetor tangente unitário e dividir pelo seu módulo, ou seja,

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'(t)}{||\vec{T}'(t)||}.$$

Não existe uma expressão bonita como a 2.8, que utiliza a função $\sigma(t)$ para o vetor normal. Mas fique tranquilo, a expressão acima serve apenas para encontrarmos o vetor e o que realmente nos interessa aqui é apenas a ortogonalidade do vetor normal com o vetor tangente.

Na seção anterior vimos que conseguimos calcular onde uma função cresce e onde ela decresce derivando ela duas vezes e analisando seu sinal. Porém fizemos isso lidando apenas com uma função. E como funciona para as curvas que dependem de duas funções $x(t)$ e $y(t)$? Se você for avaliar o crescimento de duas funções simultaneamente em um intervalo, teremos duas possibilidades para a concavidade. Para descobrirmos qual é a concavidade da curva utilizaremos os recursos dos vetores normal e tangente e um outro vetor que definiremos a seguir.

2.4 Curvatura

Vimos anteriormente que a derivada de segunda ordem de uma função f nos informa a concavidade da função em um certo intervalo. Para o caso das curvas paramétricas, existe uma outra ferramenta que, aliada ao vetor normal, nos informará qual é a concavidade da curva em um determinado intervalo. Essa ferramenta é a curvatura.

Vimos que o vetor tangente é um vetor que aponta para o sentido da curva, e o vetor normal forma um ângulo de $90°$ com o vetor tangente no sentido anti-horário. Existe um terceiro vetor (que chamaremos de $\vec{r}$) que aponta para a região onde a curva é côncava, e esse vetor $\vec{r}$ está sobre a mesma reta que contém o vetor normal. Porém, esses dois vetores não necessariamente apontam para o mesmo sentido. Uma forma de saber se eles apontam para o mesmo sentido é estudando o sinal da função curvatura, que é a seguinte: dada uma curva paramétrica $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, a função curvatura é

$$K(t) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Parece ser muito difícil calcular a curvatura, não é? Mas, como precisamos apenas do sinal da curvatura, podemos estudar o sinal do numerador e "esquecer" o denominador. Mas por quê? Olhando para o denominador, vemos que ele é o número $x'(t)^2+y'(t)^2$ elevado à $\dfrac{3}{2}$, e como $x'(t)^2+y'(t)^2$ é positivo ou zero (pois é a soma de números positivos ou zero), temos que $(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}$ é positivo ou zero. Então, para saber o sinal da curvatura basta estudar o sinal do numerador

$$y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t), \tag{2.9}$$

pois a curvatura terá o mesmo sinal do numerador.

Se a função curvatura for positiva em um determinado intervalo, então os vetores normal e $\vec{r}$ apontam para o mesmo sentido nesse intervalo; e se a função curvatura for negativa nesse intervalo, os vetores $\vec{r}$ e normal apontam para sentidos opostos. Vejamos um exemplo:

Exemplo 2.4.1. Considere a curva $\sigma(t) = (t, t^3 - t + 1)$. Conforme visto no capítulo 1, podemos expressar a curva em coordenadas cartesianas como $y = x^3 - x + 1$, que é a mesma função estudada anteriormente na derivada de segunda ordem (veja a Figura 2.8). Já sabemos as regiões onde a função $f(x) = x^3 - x + 1$ é côncava para baixo (no intervalo $(-\infty, 0)$); e onde é côncava para cima (no intervalo

$(0, +\infty)$). Logo, na curva $\sigma(t)$, como temos $x = t$, também sabemos que a curva é côncava para baixo quando t percorre o intervalo $(-\infty, 0)$ e côncava para cima quando t percorre o intervalo $(0, +\infty)$. Olhando o traçado da curva (Figura 2.10), observamos os vetores tangente (pontilhado), normal (cinza) e $\vec{r}$ (preto).

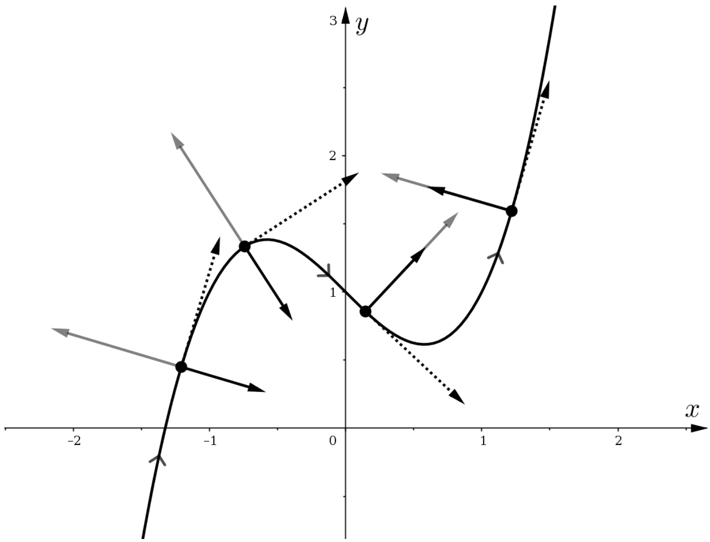


Figura 2.10: traço de $\sigma(t) = (t, t^3 - t + 1)$

Como visto na definição (2.3.1), o vetor tangente é um vetor que possui o mesmo sentido do movimento, e é exatamente isso que observamos na figura. Note que o vetor normal forma um ângulo de $90°$ no sentido anti-horário em relação ao vetor tangente.

Vamos observar o intervalo $t < 0$ (ou seja, para $x < 0$) onde a curva tem concavidade para baixo. Observe que nesse intervalo o vetor $\vec{r}$, a grosso modo, está orientado para baixo (pois nesse intervalo a curva é côncava para baixo). Observe também que o vetor normal aponta para o sentido oposto ao do vetor $\vec{r}$. Logo, nesse intervalo, a curvatura deve ser negativa, pois os vetores $\vec{r}$ e normal apontam para sentidos opostos.

Já no intervalo $t > 0$ $(x > 0)$, onde a curva é côncava para cima, o vetor $\vec{r}$ aponta para cima, e o vetor normal aponta para a mesma direção. Logo, nesse intervalo, a curvatura deve ser positiva, pois os vetores $\vec{r}$ e normal apontam para o mesmo sentido.

Vejamos se a função curvatura de fato é negativa no intervalo $(-\infty, 0)$, e positiva no intervalo $(0, +\infty)$. Primeiramente, vamos calcular $x'(t), x''(t), y'(t)$ e $y''(t)$.

- $x'(t) = (t)' = 1$;
- $x''(t) = (x'(t))' = (1)' = 0$;
- $y'(t) = (t^3 - t + 1)' = 3t^2 - 1$;
- $y''(t) = (y'(t))' = (3t^2 - 1)' = 6t$.

Conforme observado anteriormente, para estudar o sinal da função curvatura, basta estudar o sinal da expressão (2.4). Então,

$$\begin{aligned} y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t) &= (6t)(1) - (3t^2 - 1)(0) \\ &= 6t, \end{aligned}$$

ou seja, a curvatura é positiva quando quando $t > 0$ e é negativa quando $t < 0$, que é o resultado esperado.

Perceba que iremos utilizar a curvatura de forma inversa à forma como vimos no exemplo. Como assim? No exemplo, utilizamos propriedades que já conhecíamos do gráfico da função $f(x) = x^3 - x + 1$ para justificar propriedades do traço da curva $\sigma(t) = (t, t^3 - t + 1)$, e então observamos a relação entre os vetores normal e $\vec{r}$ com o auxílio da curvatura. No próximo capítulo, vamos aprender a esboçar o traço de uma curva $\sigma(t)$, ou seja, não teremos o seu traçado, teremos apenas a sua expressão algébrica. A partir da expressão algébrica de uma curva vamos utilizar o que aprendemos sobre o vetor tangente, o vetor normal e a curvatura para esboçar o traçado da curva.

Exercício 2.4.2. Encontre os intervalos onde a curvatura é positiva e onde é negativa das seguintes curvas:

a) $\sigma(t) = (t^3 - 3t - 1, t^2 + t)$;

b) $\sigma(t) = (2t^2 - 1, t^3 + t^2 + 3t)$;

c) $\sigma(t) = (t^3 - 12t, 2t^3 - 15t^2 + 36t)$;

d) $\sigma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$;

e) $\sigma(t) = (e^t \cos(t), e^t \operatorname{sen}(t))$.

Capítulo 3

Esboçando Curvas

Neste capítulo, iremos aplicar as ferramentas, conceitos e propriedades estudadas nos dias anteriores para tentarmos resolver alguns problemas envolvendo curvas.

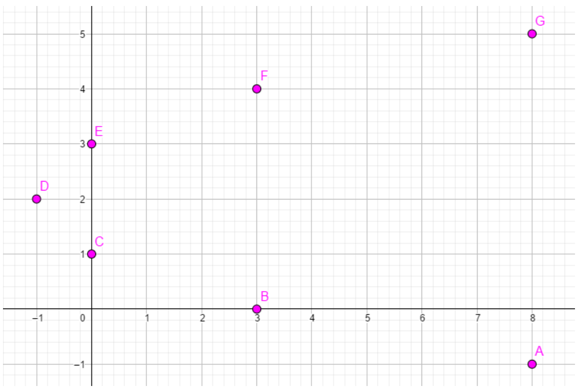
3.1 Curvas polinomiais

Assim como foi antes visto, nem todas as curvas são possíveis de serem expressas apenas como y em função de x. Porém elas podem ser expressas colocando x e y, cada um como uma função de uma outra variável t. Por exemplo: Considere a curva definida pelas equações: $x = t^2 - 2t$ e $y = t + 1$. Repare então, que a cada valor diferente de t, teremos valores diferentes de x e de y. Para conseguirmos uma noção maior sobre como é o traço da curva, podemos escolher alguns valores arbitrários de t.
Por exemplo:

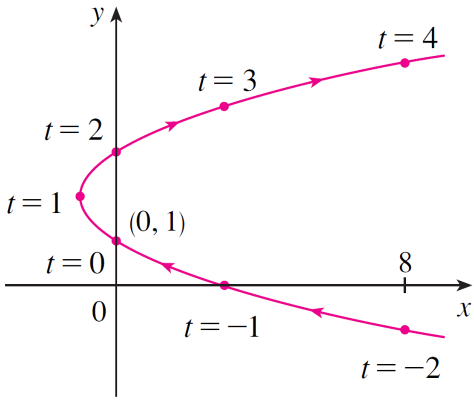
Quando t for igual a -2, teremos então que:

$$x = (-2)^2 - 2.(-2) = 8 \ e \ y = -2 + 1 = -1$$

Ou seja, se $t = -2$, a curva corresponderá com o ponto $(8, -1)$, vamos chamar esse ponto de A. Para conseguirmos mais informação sobre como é o traço da curva, vamos precisar de mais pontos, vamos seguir um raciocínio similar e encontrar mais pontos na curva. Seja B o ponto correspondente da curva se $t = -1$, então, $B = (3, 0)$. Prosseguindo de forma semelhante, para $t = 0, 1, 2, 3, 4$, obtemos os pontos correspondentes $C = (0, 1)$, $D = (-1, 2)$, $E = (0, 3)$, $F = (3, 4)$ e $G = (8, 5)$. Temos já vários pontos da curva e a partir disso conseguimos ter uma noção de qual é o formato de seu traço.



Com isso, já conseguimos imaginar que a função vai ser mais ou menos assim:



No entanto, apesar de conseguirmos imaginar que ela vai ser dessa forma, nós não conseguimos provar que ela é de fato assim apenas traçando uma curva a partir de pontos arbitrários. É preciso mais informação se quisermos ter certeza de como é exatamente o traço de uma curva, ainda mais se for uma curva mais complicada.

Neste capítulo veremos como utilizar as ferramentas desenvolvidas nos capítulos anteriores para conseguirmos saber exatamente como será o traço de uma determinada curva.

3.2 Esboçando curvas

Uma das melhores ferramentas para nos ajudar a compreender e esboçar uma curva, é fazer uso das derivadas nas equações paramétricas que definem a curva, para assim sabermos em que momentos a curva é crescente ou decrescente. Por exemplo, considere a curva C dada pelas seguintes equações paramétricas: $x = t^2$ e $y = t^3 - 3t$. Derivando as equações paramétricas, obtemos $x' = 2t$ e $y' = 3t^2 - 3$. Como vimos nos capítulos anteriores, sabemos que a derivada de uma função nos diz como ela se comporta, se ela é crescente ou decrescente. O mesmo conceito se aplica para curvas, as derivadas de uma equação paramétrica nos diz como a curva se comporta.

Por exemplo, a derivada da equação paramétrica y de uma dada curva, quando negativa, indica que a curva é decrescente em y, quando positiva, indica que a curva é crescente em y. Esse raciocínio nos ajuda grandemente para o esboço de curvas, vamos ver como usar ele para esboçar a curva C que estávamos trabalhando: Temos que a derivada da equação paramétrica da curva C em x, $x' = 2t$ é negativa quando t é menor que zero, e positiva quando t é maior que zero. Isso nos diz que antes de t chegar em zero, a curva vai estar seguindo para a esquerda, isto é, ela será decrescente em x. E para quando t passar de 0, ela seguirá para a direita, isto é, começará a crescer em x.

Considere a figura a seguir, que relaciona a direção em que C está correndo em x dependendo de t:

t	$t < 0$	$t > 0$
x	$\leftarrow$	$\rightarrow$

Isso já nos permite afirmar com segurança como a curva C se comporta em x, agora vamos realizar o mesmo estudo para saber como a curva se comporta em y.

Em y, a derivada da equação paramétrica é dada por:

$$y' = 3t^2 - 3$$

Precisamos saber quando y é negativo e quando y é positivo para saber quando a curva C é decrescente ou crescente em y. Para isso, calculamos as raízes de y':

$$3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3t^2 = 3 \Rightarrow t^2 = 1 \ \Rightarrow t = 1 \ ou \ t = -1$$

Com isso, sabemos que y' é positivo antes de -1, negativo entre -1 e 1, e positivo depois de 1. Isso nos diz que a curva

C antes de -1 seguirá para cima, pois como y' é positivo antes de -1, C tem que ser crescente em y até esse ponto. De -1 até 1, y' é negativo, isso nos diz que, com certeza, C seguirá para baixo entre -1 e 1, pois deve ser decrescente em y entre esses pontos. De 1 em diante ela seguirá crescente em y para sempre.

Considere a figura a seguir, que relaciona de que modo C cresce ou decresce em y dependendo de t:

t	$t < -1$	$-1 < t < 1$	$t > 1$
y	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

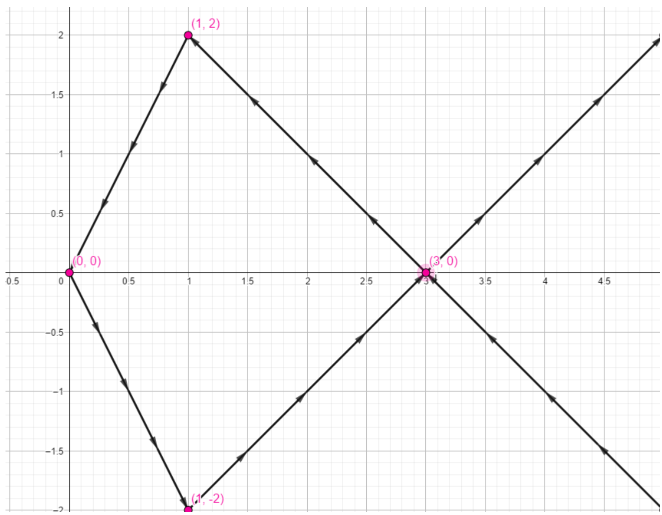
Temos já bastante informação sobre como a curva C se comporta, vamos compilar tudo que sabemos até agora:

t	$t < -1$	$-1 < t < 0$	$0 < t < 1$	$t > 1$
x	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
y	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
C	$\nwarrow$	$\swarrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Realmente, isso já nos dá uma noção bem boa de como a curva se parece. Para conseguirmos esboçá-la, é importante que a gente saiba o valor da curva nos pontos em que ela tem uma mudança no sentido que está seguindo, isto é, precisamos saber o valor de C, nos pontos em que as derivadas das equações diferenciais é 0.

Já sabemos que esses pontos ocorrem quando $t = -1$, 0 ou 1, vamos calcular C nesses pontos então: se $t = -1$ então $C = (t^2, 3t^3 - 3t) = (1, 2)$; para $t = 0$, temos $C = (t^2, 3t^3 - 3t) = (0, 0)$ e para $t = 1$, $C = (t^2, 3t^3 - 3t) = (1, -2)$. Outro aspecto que vale notar na curva C é que, olhando para a equação paramétrica de $y = t^3 - 3t = t(t^2 - 3)$, percebemos que y será zero quado $t = 0$, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$. Mas como a expressão de x é uma equação da forma t^2, x será igual tanto em $\sqrt{3}$ quanto em $-\sqrt{3}$. Ou seja, a curva vai passar duas vezes pelo ponto $C = (3, 0)$, o que significa que a curva C se intercepta em si mesma nesse ponto.

Até agora, já temos bastante informações sobre a curva C, temos bastante noção sobre como ela se comporta, mas será que ainda tem como descobrirmos mais coisas sobre ela? Com o que temos aqui, se fôssemos esboçar a curva C de uma maneira mais crua, usando apenas o que já sabemos até aqui, ficaria mais ou menos assim:



Bom, parece que realmente conseguimos agora dizer exatamente os sentidos que a curva toma nos mais variados pontos. Mas, ainda falta algo para conseguirmos a esboçar certinho, não acha? Apesar de conseguirmos já ter uma boa ideia da curva com o que temos, falta algo ainda mais fundamental, o que faz uma curva ser uma curva mesmo, falta conseguirmos dizer como é a curvatura da curva. E para isso usamos a segunda derivada das equações paramétricas. Para tal, precisamos calcular:

$$\left(\frac{y}{x}\right)'' = \frac{(y'/x')'}{x'}$$

Essa informação nos será capaz de dizer como será a concavidade nos variados pontos t da curva, a partir disso poderemos deduzir como será a curvatura da curva.

No caso da nossa curva C, fazendo as devidas contas, temos que:

$$\left(\frac{y}{x}\right)'' = \frac{3(t^2+1)}{4t^3}$$

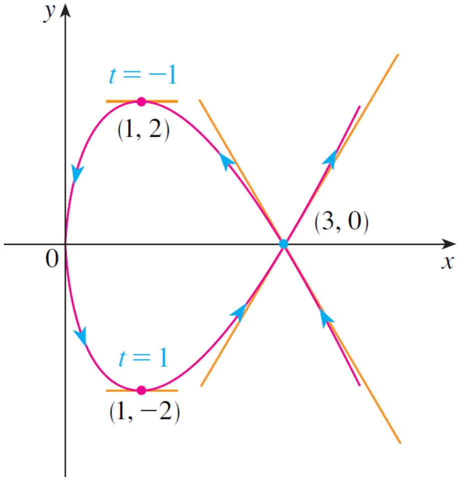
Com isso, conseguimos informação sobre como se comporta a concavidade da curva, isto é, para que direção ela está curvada conforme varia t. Usamos essa informação da seguinte forma: *Quando* $(\frac{y}{x})'' > 0$ *a curva terá concavidade para cima, e a curva terá concavidade para baixo quando* $(\frac{y}{x})'' < 0$.

No nosso caso,

$$\left(\frac{y}{x}\right)'' = \frac{3(t^2+1)}{4t^3}$$

É positiva se $t > 0$, pois o numerador sempre será positivo independente do t, e como o denominador só é negativo quando $t < 0$, e só é positivo quando $t > 0$. Então temos que curva C terá concavidade para cima para $t > 0$ e concavidade para baixo para $t < 0$. C corresponde com $(0, 0)$ para $t = 0$. Ou seja, conforme varia t, a curva virá com concavidade para baixo até o ponto $(0, 0)$, e seguirá com concavidade para cima de $(0, 0)$ em diante.

Adicionando essa informação ao nosso antigo esboço rústico de C, conseguimos finalmente esboçar o traço da nossa curva:



3.3 Esboçando curvas famosas

Veremos agora como esboçar algumas curvas historicamente importantes.

3.3.1 Curva de Agnesi

Começamos com a Curva de Agnesi. Essa é uma curva estudada por Maria Agnesi em 1748 no seu livro *Propositiones philosophicae*. O procedimento de construção desta curva é o seguinte: *Fixada uma circunferência, toma-se um ponto O nela. De qualquer outro ponto A da circunferência, traça-se a secante OA. Seja M o ponto diametralmente oposto a O; a intersecção entre a reta OA e a reta tangente à circunferência no ponto M é o ponto N. Por A, traça-se uma reta paralela a MN, e por N uma reta paralela a OM. Seja P a interseção entre essas duas retas. O caminho que P faz ao variarmos A é a chamada Curva de Agnesi.*

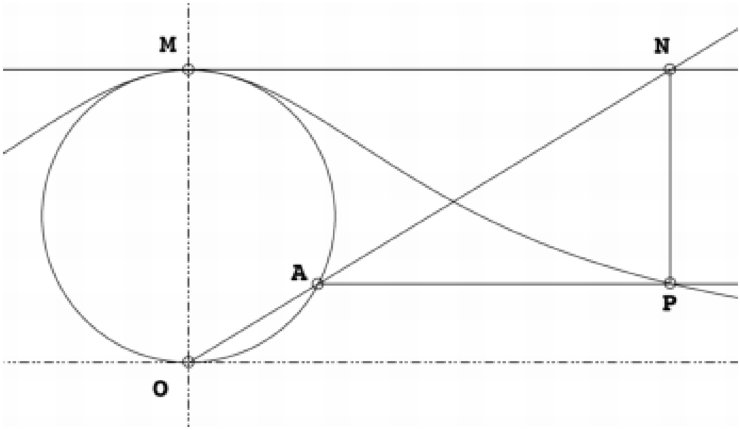


Figura 3.1: Curva de Agnesi

As equações paramétricas desta curva são

$$x = 2a\text{tg}\, t \;\; e \;\; y = 2a\cos^2 t\,, \;\; t \in (0, 2\pi)\,,$$

onde $a > 0$ é um parâmetro arbitrário. Isolando o termo tg$t$ na primeira equação e lembrando que $\text{tg}^2 t = \sec^2 t - 1$, obtemos

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}\,.$$

Usando o que sabemos de Cálculo para esboçar o gráfico desta função, concluímos que, de fato o traço da curva de Agnesi tem a forma esboçada acima.

3.3.2 Cardióide

Outra curva interessante é a *Cardióide*. Esta curva recebe este nome porque seu traço lembra a forma de um coração. A cardióide foi pela primeira vez mencionada em 1741 pelo matemático Castillon. Genericamente, esta curva tem equação polar do tipo

$$r = a + b\cos\theta \;\; \text{ou} \;\; r = a + b\,\text{sen}\,\theta\,,$$

onde $a, b > 0$. Por exemplo, a curva $r = 1 + \cos\theta$ tem traço da forma

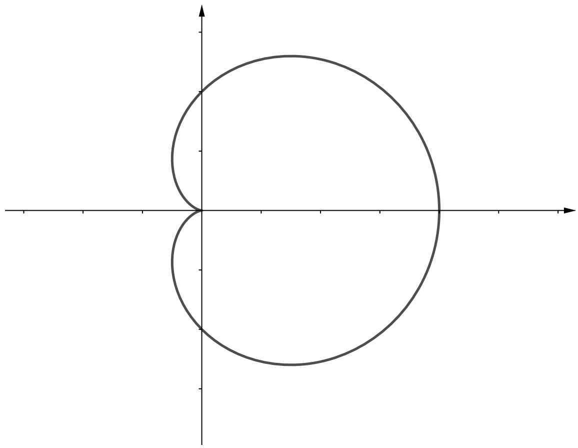


Figura 3.2: Cardióide

Mais detalhes sobre como esboçar curvas dadas em equações polares podem ser encontrados em [6].

3.3.3 Conchoide de Nicomedes

Sejam $a, b > 0$ r a reta horizontal $y = a$. Tracemos uma reta s partindo da origem em direção à r e chamemos de P o ponto de intersecção de s e r. Os pontos Q e R tais que as medidas dos segmentos PQ e PR são constantes iguais a b formam uma curva chamada de *Conchoide de Nicomedes*.

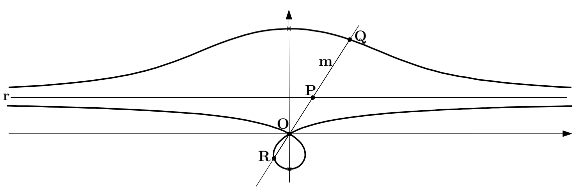


Figura 3.3: Conchoide de Nicomedes

Usando o ângulo θ entre a reta s e o eixo x como parâmetro, vemos que a curva γ tem equações paramétricas

$$x(\theta) = a \cot\theta + b\cos\theta \text{ e } y(\theta) = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$$

para $-\pi < \theta < \pi$. A Conchoide de Nicomedes pode ser utilizada para resolver o problema clássico da trissecção do ângulo, conforme será visto no próximo capítulo.

3.3.4 Cicloide

A Cicloide é a curva definida por um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar sobre uma reta. Esta curva desempenha historicamente um papel muito relevante na Matemática sendo solução de diversos problemas interessantes, como o da *braquistócrona*, por exemplo.

Uma cicloide iniciada na origem dos eixos cartesianos, obtida a partir de uma circunferência de raio r, tem equações paramétricas dadas por

$$x(t) = r(t - \mathrm{sen}\,t) \text{ e } y(t) = r(1 - \cos t)\,.$$

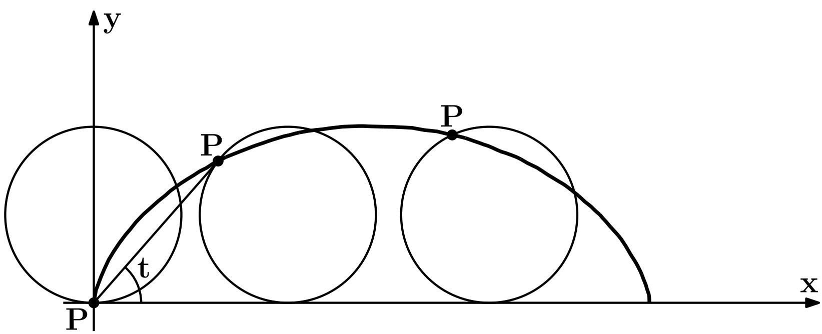


Figura 3.4: Cicloide

3.4 Exercícios

1. Esboce o traço das curvas cujas equações paramétricas são dadas abaixo:

   a) $x = t$ e $y = 2t^2 - 1$

   b) $x = \dfrac{2}{t}$ e $y = \dfrac{2}{t+1}$

   c) $x = t$ e $y = 9 - t$

   d) $x = t$ e $y = \operatorname{sen} t$

   e) $x = 8 - 4\operatorname{sen} t$ e $y = 2\cos t$

   f) $x = \operatorname{sen} t$ e $y = \operatorname{sen}^3 t$

   g) $x = \sec t$ e $y = \operatorname{tg} t$

   h) $x = \operatorname{sen} 2t$ e $y = \cos t$

   i) $x = \cos^3 t$ e $y = \operatorname{sen}^3 t$

   j) $x = 1 - t^2$ e $y = 2t^2 + 1$

   k) $x = t^3 - 3t^2$ e $y = t^3 - 12t$.

2. **(Cissoide)** Seja C o círculo de centro $(r, 0)$ e raio $r > 0$ e considere a reta $x = 2r$, conforme mostra a figura abaixo. Traçando uma semi-reta s qualquer partindo da origem, sejam K e N os seus pontos de intersecção com C e s, respectivamente. O ponto Q sobre s tem a propriedade que $OQ = KN$. Os pontos $P = (x, y)$ obtidos quando traçamos todas as semi-retas que partem da origem e intersectam s formam uma curva γ chamada de *Cissoide de Diocles*. O parâmetro que usaremos para parametrizar esta curva é o ângulo θ entre o segmento ON e o eixo x.

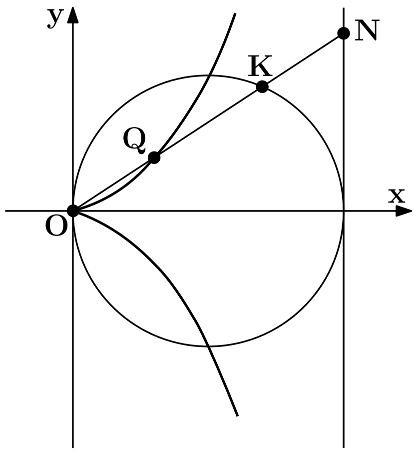


Figura 3.5: Cissoide

(a) Mostre que $OK = 2r\cos\theta$ e $ON = \dfrac{2r}{\cos\theta}$. Conclua que $KN = 2r\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$.

(b) Obtenha equações paramétricas para γ.

(c) Mostre que a equação de γ em coordenadas polares é $r = 2r\operatorname{sen}\theta\operatorname{tg}\theta$.

(d) Mostre que γ tem equação cartesiana $x^3 + (x - 2r)y^2 = 0$.

3. O *fólium de Descartes* é a curva γ descrita pelas equações paramétricas $x(t) = \dfrac{3at}{1+t^3}$ e $y(t) = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$, com $t \neq -1$, onde $a > 0$ é fixado.

   (a) Mostre que γ satisfaz a equação cartesiana $x^3 + y^3 = 3axy$. Em particular, γ é simétrica em relação à reta $y = x$.

   (b) Mostre que a reta $x + y + a = 0$ é uma assíntota de γ.

(c) Faça um esboço de γ .

4. A *lemniscata de Bernoulli* é a curva γ descrita pelas equações paramétricas $x(t) = \dfrac{t}{1+t^4}$ e $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4}$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que γ satisfaz a equação cartesiana $(x^2 + y^2)^2 = xy$. Em particular, γ é simétrica em relação à reta $y = x$.

   (b) Faça um esboço de γ.

Capítulo 4

Os três problemas clássicos

Os matemáticos gregos definiram três grandes problemas clássicos em geometria: a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo; e mais ainda: todos deveriam ser resolvidos somente utilizando régua e compasso. Não conseguimos jogar esse jogo de encontrar respostas de forma justa, tanto que esses dilemas ocuparam matemáticos por 2200 anos até se provar que todos eles eram impossíveis, mas, se desobedecermos as regras e usarmos algumas curvas, veremos que conseguimos resolvê-los em uma aula.

4.1 História Matemática

O problema de quadrar o círculo aparece inicialmente relacionado com Anaxágoras, um filósofo natural que escreveu o primeiro best-seller científico, *On Nature* (Sobre a Natureza - podia-se comprar uma cópia em Atenas por um dracma). Anaxágoras foi preso por negar que o Sol fosse uma divindade, dizendo que este era uma enorme rocha incandescente, maior do que toda a península e ilhas gregas, e que a luz emitida pela Lua provinha do Sol. Enquanto estava na prisão, Anaxágoras ocupou-se tentando descobrir uma maneira de "quadrar o círculo" - dado um círculo, criar um quadrado de área exatamente igual usando somente régua e compasso.

O problema de dobrar o cubo surgiu na época da grande praga de Atenas (430 a.C.). Aristóteles relata que o povo consultou o oráculo em Delos, e o deus Apolo ordenou que, para eliminar a praga, eles deveriam dobrar o tamanho de seu altar (volume). Eles, de forma ingênua, dobraram as dimensões do altar, mas isso naturalmente aumentou seu volume em um fator de oito (2^3), não de dois. Apolo não ficou satisfeito, e a praga continuou matando um quarto da população. O artesão grego, que não pôde fazer o que Apolo queria, pediu a opinião do filósofo Platão. A resposta foi que a intensão do oráculo foi humilhar os gregos por terem negligenciado a matemática e a geometria em particular.

Há outra versão para a origem desse problema, na qual Minos, o rei de Creta, encomendou uma tumba para seu filhinho Glaucus, que morreu quando caiu dentro de um tanque de mel. Minos acha que a tumba proposta é muito pequena e pede que seu tamanho seja dobrado.

As escrituras védicas hindus estabelecem que uma segunda súplica em um altar no mesmo lugar da primeira necessitava de um altar cúbico com o dobro do volume do primeiro, e isso pode ter sugerido o problema para os gregos.

O matemático alemão Carl Friedrich Gauss afirmou que não era possível dobrar o volume do cubo usando apenas régua e compasso, o que foi provado formalmente por Pierre Wantzel em 1837.

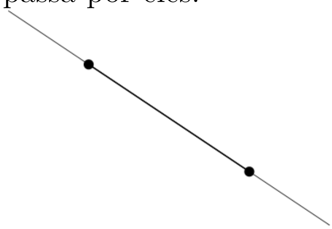
Dividir um ângulo em três partes é um problema menos lendário e não tem uma história mítica empolgante ligada a ele; é possível que ele tenha surgido da necessidade dos egípcios em dividir ângulos entre as estrelas para poder determinar o tempo à noite. O problema é simplesmente dividir um ângulo em três partes iguais usando apenas régua e compasso. É possívem dividir alguns ângulos (por exemplo, um ângulo reto) e há métodos mecânicos para dividir por três qualquer ângulo que era conhecido pelos gregos. No entanto, o desejo dos gregos por métodos puros ou teóricos os levou a continuar a busca, mesmo com a falta de necessidade prática. Também em 1837, Pierre Wantzel concluiu a impossibilidade de trisseccionar um ângulo genérico mediante construção com régua e compasso.

4.2 Construções com régua e compasso

Nos *Elementos* de Euclides, os métodos tradicionais para construir figuras geométricas são versões idealizadas de dois instrumentos matemáticos: a régua e o compasso. Estamos falando em idealizados pois consideramos as linhas desenhadas pelos instrumentos infinitamente finas, as retas são exatamente retas, os círculos são perfeitamente redondos e o papel é perfeitamente plano e regular. Cada uma dessas imperfeições na vida real implicam em imprecisões nos resultados. Porém vamos assumir que o que conseguimos fazer com lápis e papel é suficiente, e sempre consideraremos um número finito de passos, caso contrário não terminaríamos nunca.

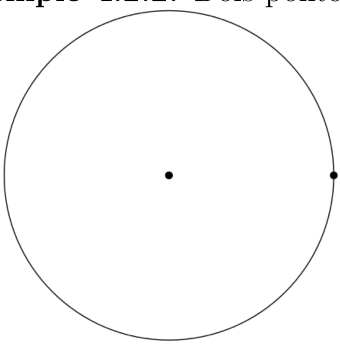
Cada instrumento tem como finalidade desenhar tipos diferentes de elementos geométricos: o compasso é usado para desenhar círculos ou partes de círculos (com um centro específico e um raio específico), e a régua é usada para desenhar linhas retas, lembrando que uma “régua euclidiana” não possui marcas (não conseguimos usar a régua para medir 1cm, por exemplo). Outro elemento importante nas construções são os pontos, que são pequenas marcas no papel e também outra idealização, pois na verdade um ponto não tem tamanho. Um movimento que nos será permitido fazer com os instrumentos é transferir medidas, ou seja, dois segmentos terão o mesmo comprimento se abrirmos o compasso entre as extremidades de um segmento e transportá-lo para o segundo e as extremidades se encaixarem (isso tudo acontece sem medirmos o comprimento real dos segmentos).

Exemplo 4.2.1. Dois pontos determinam uma reta, a única que passa por eles.



Para construir a reta basta colocar a régua de maneira que ela passe pelos dois pontos e correr o lápis ao longo dela.

Exemplo 4.2.2. Dois pontos determinam um círculo.



Escolha um dos pontos como centro e coloque a ponta seca do compasso nele, ajuste o compasso de modo que a ponta do lápis caia em cima do outro ponto e gire o compasso traçando o círculo.

Exemplo 4.2.3. Duas retas se cruzam em um único ponto, se forem concorrentes, e não se cruzam em lugar nenhum se forem paralelas.

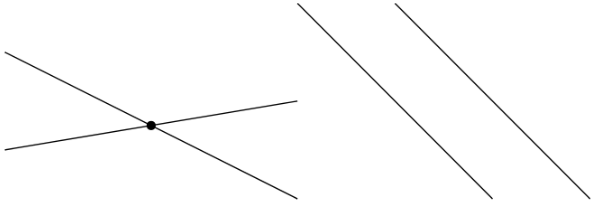


Figura 4.1

Exemplo 4.2.4. A interseção de uma reta e uma circunferência pode determinar dois pontos, um ponto (dizemos que a reta é tengente à circunferência) ou nenhum.

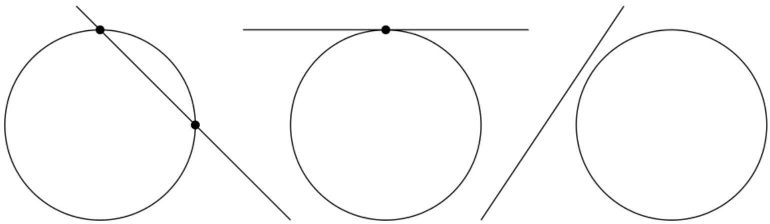


Figura 4.2

Exemplo 4.2.5. A interseção de duas circunferências pode determinar dois pontos, um ponto ou nenhum.

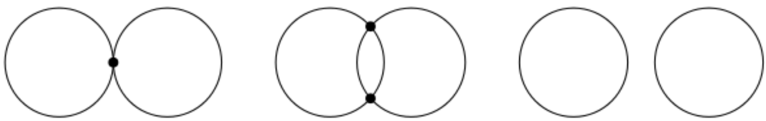


Figura 4.3

Exercício 4.2.6. Três pontos determinam um triângulo, a menos que estejam sobre uma mesma reta.

Gabarito 4.2.7. Exercício 4.2.6: Basta unir os pontos com segmentos de reta. Se eles estiverem sobre uma mesma reta, não haverá ângulos formados entre os segmentos que os unem (que estarão sobre a reta também), logo não conseguimos um triângulo.

Exemplo 4.2.8. Dados dois pontos unidos por um segmento de reta, determine seu ponto médio.

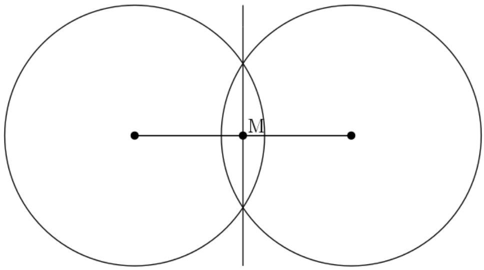


Figura 4.4

Para encontrar o ponto médio do segmento, primeiro precisamos desenhar duas circunferências com o mesmo raio (que deve ser maior que a metade do segmento) e centros nos pontos que formam as extremidades do segmento. A interseção da reta formada pelos dois pontos de interseção das circunferências e o segmento será o ponto médio.

Exercício 4.2.9. Dados dois pontos A e B unidos por um segmento de reta, divida o segmento em três partes iguais.

Gabarito 4.2.10. Exercício 4.2.9: Dado o segmento de reta $\overline{AB}$, desenhe uma semi-reta oblíqua partindo de uma das extremidades do segmento, digamos que seja do ponto A. Nessa semi-reta, marcamos três pontos equidistantes com o compasso (transferindo segmentos), que chamaremos de C, D e E. Ligamos o últimos desses pontos com a outra extremidade do segmento, formando $\overline{EB}$. Traçando linhas paralelas a EB que passam por C e D, teremos que a interseção dessas retas com o segmento $\overline{AB}$ dividem-no em três partes iguais.

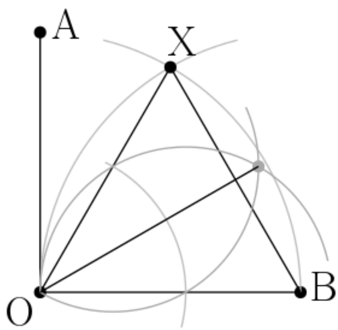
Exemplo 4.2.11. Dado um ângulo, determine a sua bissetriz (reta que divide o ângulo em dois ângulos iguais).
Primeiro, trace um arco com o compasso entre as semi-retas que formam o ângulo, com a ponta seca no vértice do ângulo. Depois, com a mesma abertura do compasso, trace dois arcos de circunferência posicionando a ponta seca nas duas interseções do arco que desenhamos no primeiro passo com as semi-retas que formam o ângulo. A bissetriz do ângulo será a reta que liga o vértice do ângulo com a interseção desses últimos arcos.

Exemplo 4.2.12. Dados dois pontos unidos por um segmento de reta, construa um triângulo equilátero que tenha como um dos lados esse segmento.
Abra o compasso de modo que cada ponta esteja sobre uma das extremidades do segmento dado. Primeiro com a ponta seca em um dos extremos, trace um arco de circunferência. Depois com a ponta seca no outro extremo, trace outro arco de circunferência. O ponto de interseção desses arcos será equidistante às extremidades do segmento dado, e ligando esses três pontos obtemos um triângulo equilátero.

Exercício 4.2.13. Dada uma reta, construa uma reta perpendicular a ela.

Gabarito 4.2.14. Exercício 4.2.13: Na construção do ponto médio, a reta que liga as interseções das circunferências é perpendicular ao segmento. Logo, para construir uma reta perpendicular, basta tomarmos dois pontos quaisquer sobre a reta dada e seguir os passos para determinar o ponto médio, ao ligar as interseções das circunferências, obtemos a reta perpendicular.

Exemplo 4.2.15. Trisseccione o ângulo reto ($90°$).



Se o ângulo $A\hat{O}B$ for reto, a trissecção é feita construindo um triângulo equilátero XOB (cujos ângulos internos medem 60°) e bisseccionar o ângulo $X\hat{O}B$, obtendo assim três ângulos de 30°.

Observação 4.2.16. Se temos um âgulo qualquer φ com $90° < \varphi < 180°$, podemos escrever $\varphi = 90° + \theta$. Se $180° < \varphi < 270°$, escrevemos $\varphi = 180° + \theta$. Se $270° < \varphi < 360°$, escrevemos $\varphi = 270° + \theta$. Em todos os casos temos que θ é um ângulo agudo, e é possível trisseccionar os ângulos 90°, 180° e 270° com régua e compasso, logo o problema da trissecção de um ângulo qualquer se resume na trissecção de um ângulo agudo.

4.3 Números Construtíveis

Digamos que eu te dê um segmento de reta de comprimento uma unidade, será que você consegue construir, com régua e compasso, um segmento com o dobro do original? Tente fazer! Talvez você não tenha tido muita difuldade com esse problema, pois basta tomar o compasso e traçar a circunferência de raio uma unidade, e tomar o diâmetro, que terá duas unidades de comprimento. Veja que quando o número é inteiro, pode-se repetir várias vezes este processo e obter o comprimento desejado. Agora me responda: "Todo número é possível construir com régua e compasso?". Lembre-se que estamos tomando a régua sem marcações. A resposta para essa pergunta é não, tente pensar no número $\sqrt[3]{3}$. Assim, vamos definir uma classe de números em que essa pergunta seja verdadeira, os **números construtíveis**.

Definição 4.3.1. Diremos que um número $a \in \mathbb{R}$ é **construtível** se $a = 0$ ou se é possível construir um segmento de reta com comprimento $|a|$ a partir de um segmento tomado como unidade.

Veja que como ja falamos antes, todos os números inteiros são construtíveis. Ainda mais, observe que $\sqrt{2}$ também é construtível, pois segue do Teorema de Pitágoras, que basta construir um quadrado de lado 1, e tomar sua diagonal que terá comprimento $\sqrt{2}$, verifique! Mais você deve estar se perguntando porque estamos falando de números construtíveis em um livro sobre curvas. Calma, chegaremos lá, mas primeiro vamos tentar obter algum resultado que me diga quando um número é ou não construtível, pois só a partir da definição fica difícil decidir isso. Caso você se interesse por números construtíveis e suas propriedades, sugiro olhar em [2] que lá tem vários resultados interessantes.

4.4 Uma pitada de polinômios

Vamos estudar um pouco os polinômios, se você não sabe nada sobre eles não tem problema, vamos começar do básico. Um **polinômio** com coeficiente racionais de grau n é da seguinte forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, onde os coeficientes a_i são números racionais e o grau do polinômio, denotado por $gr(p)$, é a maior potência de x, em que o coeficiente que acompanha ele não é nulo. Na teoria de polinômios não precisamos tomar números racionais, mais aqui será suficiente.

Mais um pouco de definições, diremos que um polinômio $p(x)$, de grau n, é **mônico**, se $a_n = 1$, por exemplo $p(x) = x^2 + 1$ é mônico enquanto $q(x) = 2x^3$ não é. Também diremos que um polinômio monico $p(x)$ é **irredutível** se não for possível escreve-lo como produto de outros polinômios de grau menor. Aqui também estamos sempre pensando em polinômios racionais. Essa é um pouco mais complicada, vamos ver dois exemplos, o polinômio $q(x) = x^2 + 1$ é irredutível pois a única forma de obter uma decomposição seria $q(x) = (x - i)(x + i)$ mas $x - i$ é um polinômio com coeficiente complexos, logo deve ser irredutível. Por outro lado, o polinômio $h(x) = x^2 - 1$ tem a seguinte decomposição $h(x) = (x-1)(x+1)$ ambos polinômios racionais, logo dizemos que ele é **redutível**.

Por fim, eu prometo, diremos que um número $a \in \mathbb{R}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$, ou em nosso caso, apenas **álgébrico** se existe algum polinômio mônico $q(x)$ com coeficientes racionais tal que $q(a) = 0$, ou seja, a é raiz deste polinômio. E agora que vem o pulo da gato, vamos conseguir relacionair números construtíveis com números algébrico e grau de polinômios, da seguinte maneira.

Teorema 4.4.1. Um número $a \in \mathbb{R}$ é construtível se, e somente se, a é algébrico e $gr(q) = 2^k$ onde $q(x)$ é o polinômio minimal irredutível que anula a.

Quando dizemos polinômio minimal, estamos pensando no polinômio de menor grau que tem a propriedade de ser irredutível e anular a. Não iremos demonstrar este resultado pois ele requer uma teoria algébrica mais avançada, conhecida como **Teoria de Galois**, mais iremos utilizá-lo fortemente em breve, aguarde! Mais para se divertir, tente mostrar que o número $\sqrt{3}$ é construtível, e se tiver coragem, generalize o resultado mostrando que todo número da forma $\sqrt{a}$ é álgébrico se $a \in \mathbb{N}$. Ainda neste espírito, já que definimos um número construtível, devemos mostrar algum que não seja possível construir apenas com régua e compasso. Afirmamos que o número $\sqrt[3]{2}$ não é construtível. Tente mostrar usando o Teorema 4.4.1. **Dica**: Olhe com carinho para o polinômio $p(x) = x^3 - 2$.

4.5 Trissecção do Ângulo

4.5.1 A impossibilidade de construção com régua e compasso

Consideremos um ponto A no círculo unitário centrado na origem, de modo que a medida do ângulo AÔB seja um valor arbitrário θ e o ponto A tenha coordenadas $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

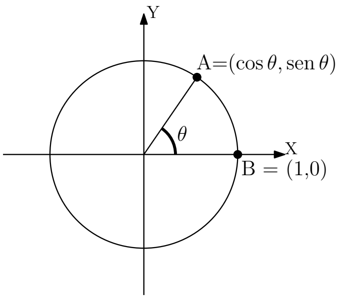


Figura 4.5

Se pudermos trisseccionar o ângulo AÔB, poderemos construir o ponto $\left(\cos\frac{\theta}{3}, \operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right)$, o que implica que tanto $\cos\frac{\theta}{3}$ quanto $\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}$ devem ser números construtíveis.

Começaremos considerando $\cos\frac{\theta}{3}$. Temos que

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}.$$

Exercício 4.5.1. Mostre que, a partir da relação fundamental e das identidades trigonométricas de soma de arcos, obtemos a relação acima.

Gabarito 4.5.2. Exercício 4.5.1

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\theta}{3}\right)\\
&= \cos\frac{\theta}{3}\cos\frac{2\theta}{3} - \operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\operatorname{sen}\frac{2\theta}{3}\\
&= \cos\frac{\theta}{3}\left(\cos^2\frac{\theta}{3} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{3}\right) - \operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\left(2\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)\\
&= \cos^3\frac{\theta}{3} - \cos\frac{\theta}{3}\left(1-\cos^2\frac{\theta}{3}\right) - 2\left(1-\cos^2\frac{\theta}{3}\right)\cos\frac{\theta}{3}\\
&= 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\cos\frac{\theta}{3}$ é raiz do polinômio $4x^3 - 3x - \cos\theta$. Mostraremos que existem infinitos valores de $\cos\theta$ para os quais o polinômio é irredutível.

Olhemos para os casos em que $\cos\theta = \frac{1}{p}$, com $p > 2$ primo. Se $\cos\theta$ não for racional, o polinômo não terá coeficientes em $\mathbb{Q}$, e $\cos\frac{\theta}{3}$ não será algébrico, logo não será construtível. Suponhamos que o polinômio seja redutível em $\mathbb{Q}$. Devido à existência de um fator de primeiro grau, tal polinômio apresenta uma raiz racional $r = \frac{m}{n}$, com $\frac{m}{n}$ uma fração irredutível.

Substituindo r no polinômio, obtemos

$$4\left(\frac{m}{n}\right)^3 - 3\left(\frac{m}{n}\right) - \frac{1}{p} = 0$$

$$\iff \frac{4m^3p - 3mn^2p - n^3}{n^3p} = 0$$

$$\Longleftrightarrow p(4m^3 - 3mn^2) = n^3$$

$$\Longleftrightarrow pt = n^3, \quad t = 4m^3 - 3mn^2$$

Assim temos que p divide n^3, e como p é primo, p divide n e portanto p^3 divide n^3. Suponhamos agora que $mdc(p^3, t) = d > 1$. Segue que $d = p$, $d = p^2$ ou $d = p^3$. Em qualquer um dos três casos p divide t. Como p divide n^2 (pois divide n), a relação $t = 4m^3 - 3mn^2$ nos diz que p divide $4m^3$. Assim p deve dividir 4, pois, se p dividisse m^3, dividiria m, o que contradiz o fato de que $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível. Porém p dividir 4 é um absurdo, já que p é um número primo maior que 2. Portanto a suposição de que $d > 1$ está errada e devemos ter $mdc(p^3, t) = d = 1$. Mas concluímos antes que p^3 divide $pt = n^3$, logo segue que p^3 divide p, que também é absurdo. Assim o polinômio não possui raízes racionais e é irredutível em $\mathbb{Q}$.

Então, para cada θ tal que $\cos\theta = \frac{1}{p}$, com $p > 2$ primo, temos que $4x^3 - 3x - \cos\theta$ é o polinômio mínimo de $\cos\frac{\theta}{3}$ sobre $\mathbb{Q}$. E como o polinômio mínimo tem grau 3, que não é uma potência de 2, então $\cos\frac{\theta}{3}$ não é um número construtível e não poderemos trisseccionar o ângumo θ. Concluímos assim que não existe um método para trisseccionar um ângulo arbitrário com o uso de régua e compasso.

4.5.2 A conchoide de Nicomedes

Curva descoberta por Nicomedes no século III a.C.

Seja M um ponto fixado, c uma curva dada que não contém M e Q um ponto qualquer de c. Consideremos a reta l que passa por M e Q. Escolhendo uma constante positiva k ficam determinados pontos P_1 e P_2 em l (na imagem

4.6 com Q entre M e P_1) de modo que $P_1Q = QP_2 = k$.

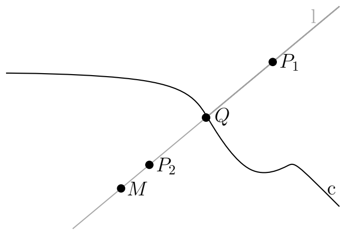


Figura 4.6

Fazendo Q percorrer c, o lugar geométrico dos pontos P_1 e P_2 é a **conchoide** da curva c com respeito a M. Dizemos que M é o polo e k é o módulo da conchoide.

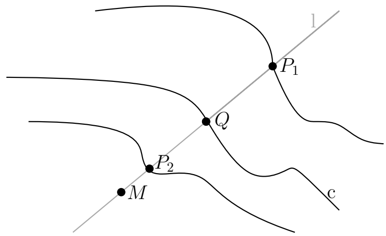


Figura 4.7

Observação 4.5.3. Note que a conchoide possui dois ramos, um mais próximo do ponto M e outro mais distante (este gerado pelos pontos de l que deixam Q entre si e o ponto M).

Sejam

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

as equações paramétricas da curva c, onde t, $f(t)$ e $g(t)$ são reais. Assim, o ponto genérico Q de c tem coordenadas $(f(t), g(t))$. Consideremos o ponto $P = (x, y)$ da reta l

de modo que Q esteja entre M e P, e $QP = k$. Ao fazer Q percorrer a curva c (variando o parâmetro t), o ponto P vai gerar o ramo da conchoide mais distante de M.

Na figura 4.8, dispusemos os elementos em um sistema de coordenadas cartesianas com origem O, em que M tem coordenadas (x_0, y_0).

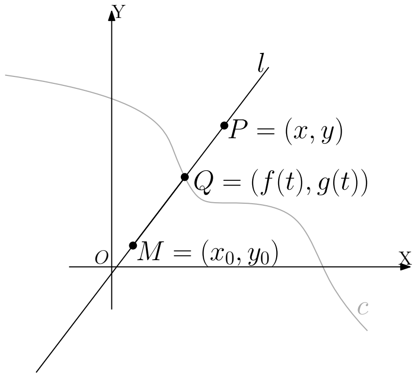


Figura 4.8

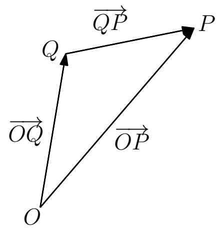


Figura 4.9

Queremos que $\left|\overrightarrow{QP}\right| = k$. Como o vetor $\dfrac{\overrightarrow{MQ}}{\left|\overrightarrow{MQ}\right|}$ é unitário e tem a mesma direção e sentido do vetor $\overrightarrow{QP}$, temos que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP} &= k\frac{\overrightarrow{MQ}}{\left|\overrightarrow{MQ}\right|} \\ &= k\frac{(f(t), g(t)) - (x_0, y_0)}{|(f(t), g(t)) - (x_0, y_0)|} \\ &= \frac{(k(f(t) - x_0), k(g(t) - y_0))}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (g(t) - y_0)^2}}.\end{aligned}$$

Além disso, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$. Então

$$(x,y)=(f(t),g(t))+\frac{(k(f(t)-x_0),k(g(t)-y_0))}{\sqrt{(f(t)-x_0)^2+(g(t)-y_0)^2}}$$

Assim, obtemos as seguintes equações paramétricas para o ramo da conchóide mais distante de M:

$$\begin{cases} x=f(t)+\dfrac{k(f(t)-x_0)}{\sqrt{(f(t)-x_0)^2+(g(t)-y_0)^2}} \\ y=g(t)+\dfrac{k(g(t)-y_0)}{\sqrt{(f(t)-x_0)^2+(g(t)-y_0)^2}}. \end{cases}$$

Para as equações do ramo da conchoide mais próximo do polo, devemos considerar o ponto $P=(x,y)$ em l de forma que Q não esteja entre M e P.

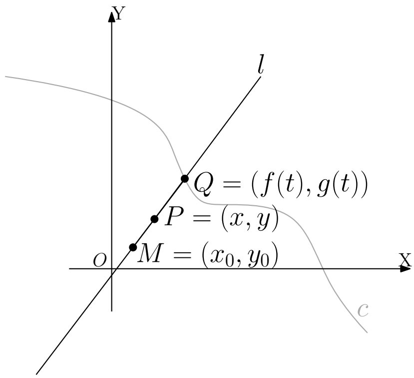


Figura 4.10

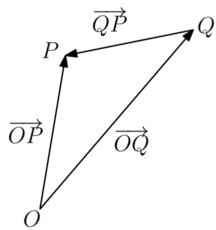


Figura 4.11

Assim temos que $\overrightarrow{QP}=-k\dfrac{\overrightarrow{MQ}}{\left|\overrightarrow{MQ}\right|}$. E, seguindo os mesmos passos que fizemos anteriormente, obtemos as seguintes equações paramétricas para o outro ramo da conchoide:

$$\begin{cases} x = f(t) - \dfrac{k(f(t) - x_0)}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (g(t) - y_0)^2}} \\ y = g(t) - \dfrac{k(g(t) - y_0)}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (g(t) - y_0)^2}}. \end{cases}$$

Exemplo 4.5.4. Parametrize a conchoide para $c : y = 1$, $M = (0, 0)$ e $k = 2$. Esboce a curva.
As equações paramétricas de c são (com t parâmetro real):

$$c(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 1. \end{cases}$$

Como temos $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $f(t) = t$ e $g(t) = 1$, o ramo mais distante de $(0, 0)$ da conchoide terá parametrização:

$$a(t) = \begin{cases} x = t + \dfrac{2t}{\sqrt{t^2 + 1}} \\ y = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{t^2 + 1}}. \end{cases}$$

E o ramo mais próximo de $(0, 0)$ terá parametrização:

$$b(t) = \begin{cases} x = t - \dfrac{2t}{\sqrt{t^2 + 1}} \\ y = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{t^2 + 1}}. \end{cases}$$

E o esboço da curva é dado na figura 4.13

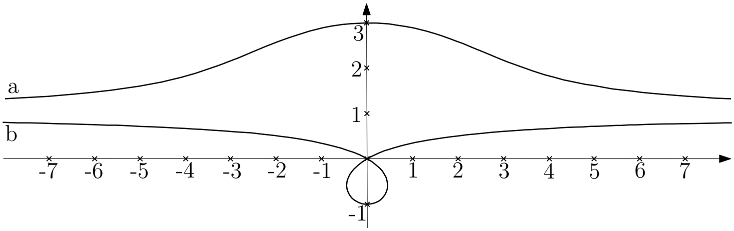


Figura 4.12

Desafio 4.5.5. Parametrize a conchoide para $c : x^2 + (y - 3)^2 = 2^2$, $M = (0, 0)$ e $k = 2$. Esboce a curva.

Gabarito 4.5.6. Exercício 4.5.5
Para $t \in [0, 2\pi]$, temos que

$$c(t) = \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3 + 2\operatorname{sen} t. \end{cases}$$

E assim, o ramo da conchoide mais distante de M será

$$a(t) = \begin{cases} x = 2\cos t + \dfrac{4\cos t}{\sqrt{4\cos^2 t + (3 + 2\operatorname{sen} t)^2}} \\ y = 3 + 2\operatorname{sen} t + \dfrac{6 + 4\operatorname{sen} t}{\sqrt{4\cos^2 t + (3 + 2\operatorname{sen} t)^2}}. \end{cases}$$

E o mais próximo de M será

$$b(t) = \begin{cases} x = 2\cos t - \dfrac{4\cos t}{\sqrt{4\cos^2 t + (3 + 2\operatorname{sen} t)^2}} \\ y = 3 + 2\operatorname{sen} t - \dfrac{6 + 4\operatorname{sen} t}{\sqrt{4\cos^2 t + (3 + 2\operatorname{sen} t)^2}}. \end{cases}$$

Por fim, o traço da conchoide será

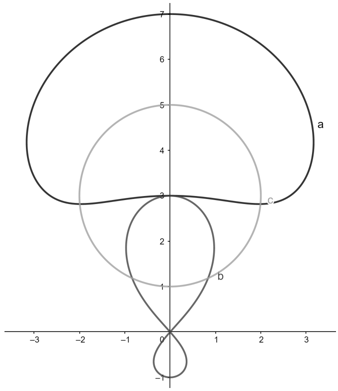


Figura 4.13

4.5.3 Solução para o problema

Seja $A\hat{O}B$ um ângulo agudo, r a reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OB}$ passando por A, e s a paralela a $\overleftrightarrow{OB}$ passando por A. Marquemos sobre a reta s o ponto C tal que $CD = 2 \cdot OA$, onde D é a interseção do segmento $\overline{OC}$ com a reta r, como na figura 4.14:

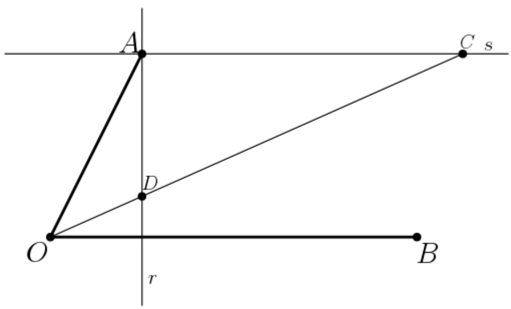


Figura 4.14

Sendo E o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, temos que o triângulo retângulo ADC é circunscrito por um círculo de centro E e raio DE, de modo que $AO = AE = EC$. Assim AOE e ACE são isósceles com $A\hat{O}E = A\hat{E}O = \alpha$ e $E\hat{C}A = \beta$.

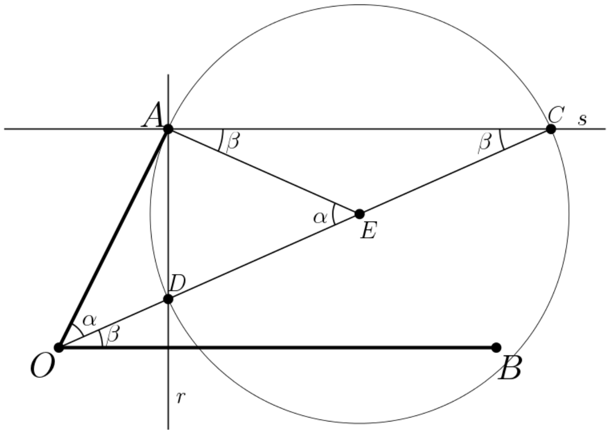


Figura 4.15

Usando o teorema do ângulo externo no triângulo ACE, temos que $A\hat{E}O = E\hat{A}C + A\hat{C}E$, ou seja $\alpha = 2\beta$. Como a reta $\overleftrightarrow{AC}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{OB}$, também vale $B\hat{O}C = A\hat{C}O = \beta$. Assim, $A\hat{O}B = A\hat{O}C + B\hat{O}C \Rightarrow A\hat{O}B = \alpha + \beta \Rightarrow A\hat{O}B = 3\beta$. Logo $\beta = B\hat{O}C = \dfrac{A\hat{O}B}{3}$. E foi feita a trissecção do ângulo.

A dificuldade dessa construção é encontrar o ponto C na reta s satisfazendo as condições exigidas. É quando entra a conchoide de Nicomedes.

Consideremos o estágio da construção em que foram traçadas apenas as retas r e s.

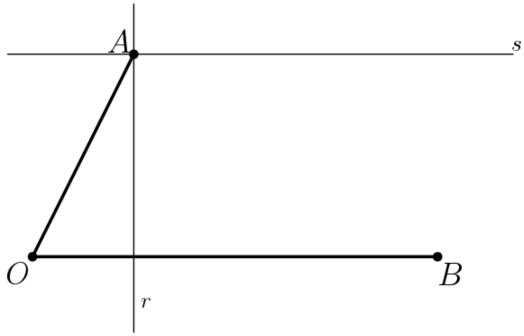


Figura 4.16

Agora traçamos a conchoide da reta r com polo no ponto O e módulo $2 \cdot OA$.

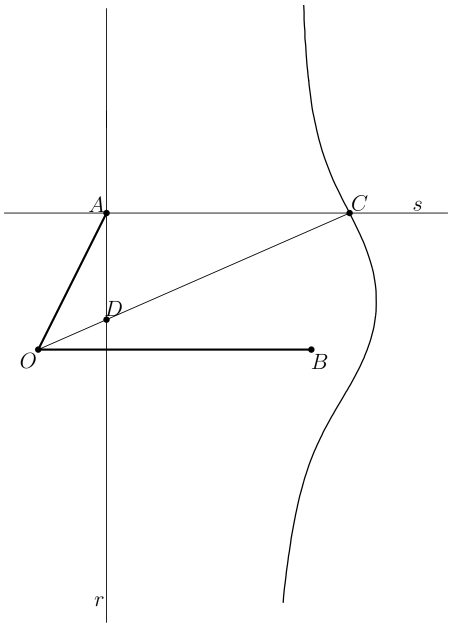
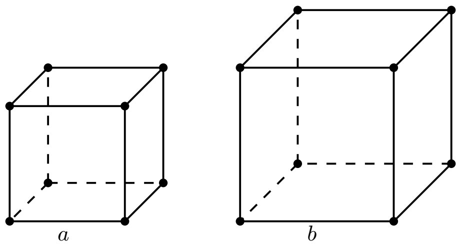


Figura 4.17

Sendo C a interseção da conchoide com a reta s e D a interseção do segmento $\overline{OC}$ com a reta r temos que $DC = 2 \cdot OA$. E assim concluímos que $B\hat{O}C = \dfrac{A\hat{O}C}{3}$.

4.6 Duplicação do cubo

Vamos agora que você ja conhece a lenda por trás deste problema vamos tentar resolve-lo, lembre se a ideia do problema é: "Dado um cubo de aresta a construir, apenas com régua e compasso, um cubo com o dobro de seu volume".



Ou seja, como um cubo de aresta a tem volume a^3, queremos que o novo cubo tenha volume $2b^3$, para isso, a aresta deste novo cubo deve ser $b = \sqrt[3]{2}a$. Logo, surge uma pergunta, como construir o segmento de tamanho $\sqrt[3]{2}$? Como já vimos, usando apenas régua e compasso é impossível realizar essa construção, porém vamos "burlar"as regras gregas, e procurar uma maneira de construir esse segmento a partir do uso de **curvas**.

Mas antes disso, vamos nos concentrar em um problema mais simples, a **Duplicação do Quadrado**. Para isso, considere um quadrado de lado a, cuja área é a^2, e construa um novo quadrado com o dobro de sua área, de acordo com a Figura 4.18.

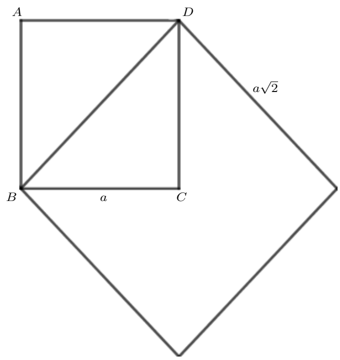


Figura 4.18

Observe que, segue do teorema de Pitágoras que $BD^2 = 2BC^2 = 2a^2$, assim da forma como construimos, o segmento $BD = \sqrt{2}a$. Então para construir com regua e compasso este quadrado, basta saber como contruir o segmento de comprimento $\sqrt{2}$, que já vimos que é construtível, mas para isso basta considerar o quadrado de lado 1, e como sabemos sua diagonal tem comprimento $\sqrt{2}$, e pronto temos a duplicação do quadrado. Veja, que neste caso conseguimos resolver o problema sem "roubar", apenas utilizando as regras impostas pelos gregos, mas no caso da duplicação do cubo não é tão simples.

Tente ver se você consegue encontrar uma figura, que possa ser construida com régua e compasso, de modo a obter o segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$, de maneira parecida como fizemos. **Dica**: Não se preocupe se não achar, é porque não existe mesmo!

Agora, vamos utilizar a ferramenta base deste livro: **Curvas**. Existem várias curvas que resolvem este problema, como os demais problemas clássicos, mas vamos nos atentar em uma especial, a **Cissoide de Diócles.**

4.6.1 Cissoide de Diócles

Primeiro, vamos realizar a contrução dessa curva e depois ver como ela se relaciona com o problema clássico. Para isso considere no plano cartesiano um círculo de centro $A = (1/2, 0)$ e raio $1/2$, junto com a reta $x = 1$. Note que cada ponto M do círculo, exceto a origem, gera um segemento $\overline{0M_1}$, onde M_1 é a interceção da reta $x = 1$ com o prolongamento do segmento $\overline{0M}$. Agora, vamos construir um novo ponto M_2 a partir de M e M_1 da seguinte maneira, tome M_2 no segmento $\overline{OM_1}$ tal que $OM_2 = MM_1$. Então quando o ponto M percorre todo o círculo, M_2 descreve a curva que chamaremos **Cissoide de Diócles** Cis, descrita na Figura 4.19.

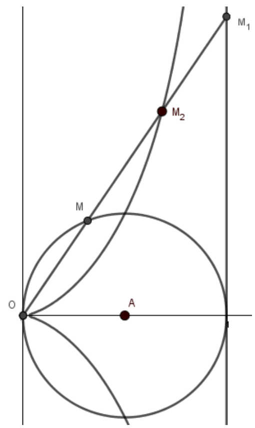


Figura 4.19

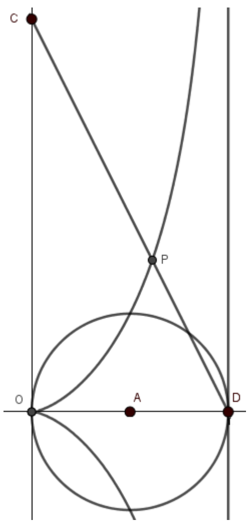
Veja que aqui aparece a impossibilidade de construir a curva Cis com régua e compasso. Por mais que a Cissoide seja obtida a partir da interceção de uma reta com uma circunferência, que são movimentos permitidos com régua e compasso, para realizar sua construção precisamos repetir este processo infinitamente o que não era permitido segundo os gregos.

Agora, vamos utilizar o seu conhecimento sobre curvas, para obter as equações do círculo, da reta e da curva Cis em coordenadas polares. A equação do círculo de centro $(1/2, 0)$ e raio $1/2$ é $r = \cos\theta$, já da reta $x = 1$ é $r = 1/\cos\theta$, verifique. Por fim, veja que podemos obter o segmento MM_1 da seguinte maneira $MM_1 = OM_1 - OM$, mas da construção da cissoide, segue que $MM_1 = OM_2$ então fazendo $r = OM_2$ obtemos

$$r = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta \Rightarrow r = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta},$$

e temos a equação polar da cissoide. Assim, dado um ponto genérico $B = (x, y)$ na curva Cis, pela mudança de variável para coordenadas polares, temos que $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, logo como $x^2 + y^2 = r^2$ obtemos a equação cartesiana

$$(x^2 + y^2)x - y^2 = 0$$



Agora, vamos ser malandros e considerar os ponto $C = (0, 2)$ e $D = (1, 0)$, então a reta que passa por estes dois pontos é dada pela equação cartesiana $y = 2(-x+1)$, e ainda mais tome $P = (x_0, y_0)$ um ponto que pertence a interseção da reta que passa por C e D com a Cissóide, como descreve a figura. Como o ponto P, está na interseção, deve satisfazer as duas curvas ao mesmo tempo, ou seja, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} y_0 = 2(1 - x_0). \\ x_0(x_0^2 + y_0^2) - y_0 = 0. \end{cases}$$

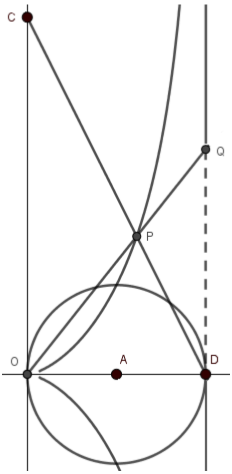


Figura 4.20

Resolvendo, fica como exercício, obtemos a seguinte solução $y_0 = \sqrt[3]{2}x_0$. Estamos quase lá, veja que a reta que passa pelos pontos O e P é $y = \sqrt[3]{2}x$, então se supormos que $Q = (1, m)$ é o ponto de interção da reta OP com a reta $x = 1$, segue que $m = \sqrt[3]{2}$ já que satisfaz a reta $y = \sqrt[3]{2}x$. Pronto, como vemos na Figura, foi possível construir um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$ como queríamos. Lembra que tinhamos encontrado o lado do cubo duplicado como sendo $b = \sqrt[3]{2}a$? Então, basta mostrarmos como multiplicar os segmentos $\sqrt[3]{2}$ e a para obter b, usando régua e compasso.

4.6.2 Multiplicação de Segmentos

Vamos construir o segmento que é a multiplicação de outros dois para o nosso caso particular da duplicação do cubo, mais o procedimento se aplica de forma similar para quaisquer outros dois segmentos que se queira multiplicar. Assim, considere duas semi retas que se encontram no ponto O, e marque os ponto A e B. Agora, vamos considerar os pontos P e Q que estão na semi reta OA, de modo que $OP = 1$ e $PQ = \sqrt[3]{2}$. Algumas observações, veja que conhecemos o segmento de 1 unidade, pois começamos com tal segmento, e o segmento $\sqrt[3]{2}$ foi construído a partir da Cissoide, então tais construções podem ser feitas com régua e compasso. Como conhecemos o lado a do cubo que queremos duplicar, considere o ponto R na semi reta OB tal que $OR = a$. Agora trace o segmento $\overline{RP}$ e um segmento paralelo à este, que passe por Q, e denote por S o ponto de interseção com a semi reta OB, como mostra a Figura 4.21.

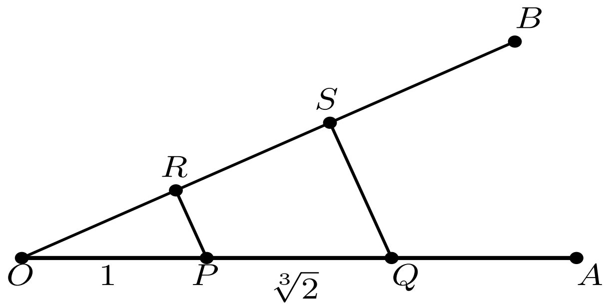


Figura 4.21

Por fim, segue do Teorema de Tales, a seguinte relação de proporcionalidade dos segmentos

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{PO}} \Rightarrow \overline{RS} = \frac{\overline{QP} \cdot \overline{OR}}{\overline{PO}} = a\sqrt[3]{2}.$$

E assim, conseguimos construir, com régua e compasso, o produto dos segmentos $\sqrt[3]{2}$ e a, e temos portanto a resolução do problema de duplicação do cubo.

4.7 Quadratura do Círculo

Como já vimos, este problema consiste em construir um quadrado, com régua e compasso, de modo que ele possua a área de um círculo dado. Vamos inverstigar melhor essa ideia. Sabemos que a área de um círculo de raio r é πr^2, logo como a área do quadro de lado a é a^2 para obtermos um quadrado com a área do círculo devemos ter $a^2 = \pi r^2$, ou seja, o lado do quadro que buscamos deve ter o comprimento $a = r\sqrt{\pi}$, e nos deparamos novamente com o problema de encontrar uma forma de construir o segmento $\sqrt{\pi}$, a partir apenas do uso de régua e compasso.

Novamente, teremos que o número $\sqrt{\pi}$ não é construtível e para mostrar isso, podemos usar o Teorema 4.4.1 como havíamos feito para o caso $\sqrt[3]{2}$, entretanto que lá a condição que falhava para ser construtível era a do grau do polinômio minimal, e aqui será o fato de π não ser algébrico, isto é, π é **transcendente**. Porém mostrar que π é transcendente não é uma tarefa simples, e por isso não faremos aqui, mas caso você esteja curioso, a demonstração pode ser encontrada na referência [1].

Desta forma, vamos novamente apelar para a poderosa ferramenta das curvas, para obter tal segmento, e novamente existem algumas curvas que fazem este trabalho, mas vamos tratar aqui da **Trissectriz de Hipias**, que também pode ser utilizada para resolver o problema da trissecção do ângulo.

4.7.1 Trissectriz de Hipias

Mas antes de resolver o problema, vamos construi-la. Para isso, considere o quadrado $ABCD$ junto com o arco de circunferência de raio AD que liga o ponto D ao ponto B. Faremos a construção a partir da movimentação dos lados do quadrado, então considere que o segmento $\overline{DC}$ que se desloca ao segmento $\overline{AB}$ com velocidade constante e o segmento $\overline{AD}$ gira em torno do ponto A, com velocidade angular constante, de modo a se mover até o segmento AB e ambos segmentos chegarem no mesmo momento. A curva formada pelo interseção do movimento destes dois segmentos é chamada de **quadratriz**, como descreve a Figura 4.22.

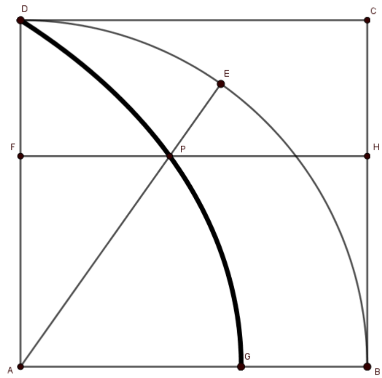


Figura 4.22

Considere, P um ponto da curva e E o ponto obtido da interseçao do prolongamento do segmetno $\overline{AP}$ com o arco de circunferência, como indica a imagem. Ainda mais, tome o segmeto $\overline{FH}$ paralelo ao segmento $\overline{AB}$ de modo que F pertença à $\overline{AD}$ e H pertença à $\overline{CB}$. Nosso objetivo é mostrar que o segmento $\overline{AG}$ possui comprimento $2/\pi$ para isso, considere o ângulo $\theta = \angle EAB$. Vamos utilizar uma relação importatne da trissectriz

$$\frac{AF}{AD} = \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}},$$

deixamos como exercício mostrar essa equação. Então segue que

$$\frac{AF}{1} = \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}} \Longrightarrow AF = \frac{2\theta}{\pi}$$

Agora, como $\operatorname{sen}\theta = AF/r$ temos que a equação polar da trisectriz é

$$r = \frac{2\theta}{\pi \operatorname{sen}\theta}.$$

Precisaremos usar um resultado famoso de cálculo, mas não se preocupe com formalidades, tente se convencer com uma interpretação geométrica. Pense na função $g(x) = x$ e na função $f(x) = \operatorname{sen} x$, ambas quando avaliamos em zero valem zero, e se analisarmos o gráfico, na Figura 4.23, vemos que "muito"próximo de zero elas são quase a mesma função, logo se dividirmos uma pela outra quando elas ficam basicamente iguais teremos que essa divisão vale 1!

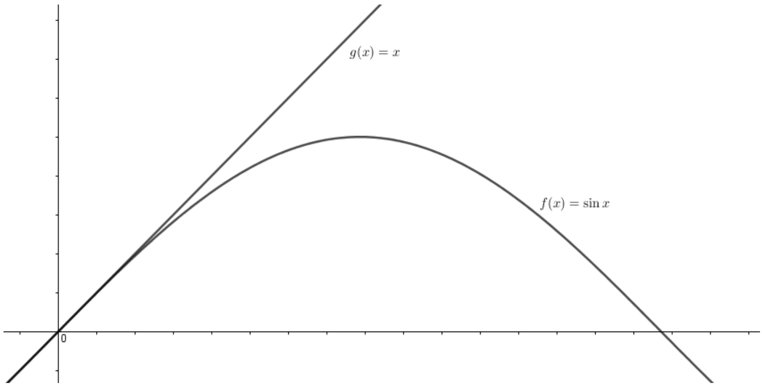


Figura 4.23

Podemos reescrever essa conversa como $\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\operatorname{sen} \theta} = 1$. Existe uma maneira formal de mostrar tal resultado, mas não será relevante aqui. Voltando ao problema, note que quanto mais diminuímos o ângulo θ mais o ponto P se aproxima de G, logo $\lim_{\theta \to 0} r = AG$ e utilizando o resultado que acabamos de ver, temos que

$$\lim_{\theta \to 0} r = \lim_{\theta \to 0} \frac{2\theta}{\pi \operatorname{sen} \theta} = \frac{2}{\pi}.$$

Portanto, juntando as informações temos que $AG = 2/\pi$. Estamos quase lá, resta construir o segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$, e novamente vamos utilizar o Teorema de Tales. Para isso, considere duas semi retas que se cruzam no ponto O, em que uma contem o ponto X e outro o ponto Y, marque o ponto P na semi reta OX de modo que $OP = 1$. Já na semi reta OY marque os pontos R e S tais que $OR = 2/\pi$ e $S = 1$, porfim trace os segmentos $\overline{RP}$ e $\overline{SQ}$ de modo que sejam paralelos e Q é o ponto que intersecta a semi reta OX, como mostra a Figura 4.24.

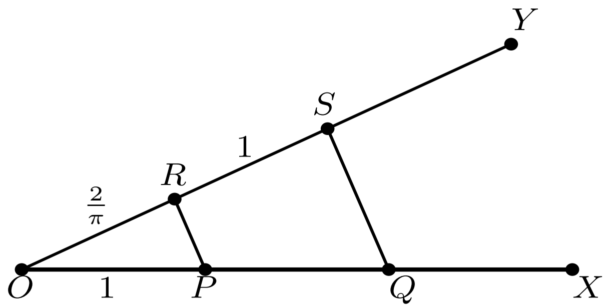


Figura 4.24

Segue então do Teorema de Tales a seguinte relação de proporção

$$\frac{PQ}{1} = \frac{1}{\frac{2}{\pi}} \Longrightarrow PQ = \frac{\pi}{2}$$

Você deve estar se perguntando: "Conseguimos contruir $\pi/2$ e não π". Mas lembre-se como fizemos anteriormente, basta traçar a circunferência de raio PQ e tomar seu diâmetro que terá tamanho π. Ainda não terminamos, mas falta bem pouco, resta encontrarmos uma maneira de encontrar raiz quadrada de um segmento. Novamente, faremos de forma particular mas pode-se obter uma maneira genérica de encontrar raiz quadrada de um segmento a partir de construções de régua e compasso.

4.7.2 Raiz Quadrada de Segmentos

Como já conhecemos uma forma de construir o segmento π, considere o segmento $\overline{AD}$ de comprimento π e $\overline{DB}$ de comprimento 1, somando os dois obtemos $AB = \pi + 1$, trace a mediatriz desse segmento que passa pelo ponto M e assim construa a semi circunferência de raio AM. No ponto D trace uma perpendicular que cruza a semi circunferência no ponto C, formando assim os triângulos ΔACD e ΔCDB, como mostra a Figura 4.25.

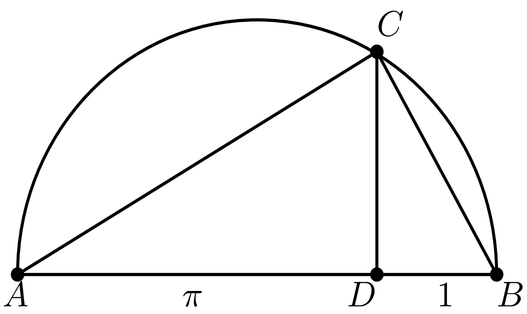


Figura 4.25

Como o triângulo ΔACB está inscrito em um circunferêcia e tem a hipotenusa como diâmetro, segue das propriedades de geometria euclidiana, ou do Exercício 4.8.1 proposto para você se divertir, que o triângulo ΔACB é retângulo em C. Ainda mais, CD é a altura referete à hipotenusa e portanto, do Exercício 4.8.2, temos que $CD^2 = AD \cdot DB$ e assim $CD = \sqrt{\pi}$ como queríamos. Portanto, como ja vimos como multiplicar segmentos, conseguimos obter o quadrado de lado $b = \sqrt{\pi}r$ e assim o problema da quadradura do círculo de raio r está resolvido, com o uso de curvas.

4.8 Exercícios Propostos

Exercício 4.8.1. Mostre que se um triâgulo ΔABC está inscrito em uma circunferência de diâmetro AB então este triângulo é retângulo em C.

Exercício 4.8.2. Mostre que o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto dos segmentos que ela determina na hipotenusa. No nosso exemplo, mostre que $CD^2 = AD \cdot DB$.

Referências Bibliográficas

[1] Marques, D. **Teoria dos Números Transcendetes**. SBM, 2013. Rio de Janeiro. 1ª edição.

[2] **Números: O Império dos Irracionais** - XIII Brincando de Matemático. PET-Matemática, 2017. Acessado em: ⟨ http://www.petmatematica.ufpr.br/arquivos/13_brincando.pdf ⟩.

[3] STEWART, I. **Os maiores problemas matemáticos de todos os tempos.** Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

[4] ROONEY, A. **A História da Matemática:** Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.Books, 2012.

[5] OLIVEIRA, E.S. **Os Três Problemas Clássicos**: Impossiblidade da solução com régua e compasso e soluções alternativas. 2017.

[6] STEWART, J. **Cálculo: Volume II.** Tradução de: MORETTI, A. C.; MARTINS, A. C. G. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007. Título original: Calculus.

[7] MATHEMATICS LibreTexts. Disponível em: <https://math.libretexts.org/Courses/University_of_California%2C_Davis/UCD_Mat_21C%3A_Multivariate_Calculus/10%3A_Parametric_Equations_and_Polar_Coordinates>. Acesso em: 2 maio 2019.

[8] DANTE, L. R. **Matemática.** Volume único. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

[9] KELLEY, W. M. **O Guia Completo Para Quem Não é C.D.F.: Cálculo**. 2 ed. Rio de Janeiro, 2013 Alta Books.

[10] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. vol 1. Rio de Janeiro, 2001 LTC.