RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE POISSON BIDIMENSIONAL ATRAVÉS DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Ana Cláudia Adriano de Alvarenga
Licenciatura em Matemática – UEPG
ana_alvarenga30@hotmail.com

Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia (Orientador)
gguardia@uepg.br
Prof. Dra. Fabiane de Oliveira (Co-orientadora)
faboliveira@uepg.br
Departamento de Matemática e Estatística – UEPG

Palavras-chave: Métodos Iterativos, Discretização, Gauss- Seidel *Red-Black*.

Resumo:

A modelagem de problemas que surgem em fenômenos físicos pode gerar modelos matemáticos envolvendo equações diferenciais parciais. Estes modelos matemáticos, em geral, não possuem solução analítica. Buscam-se então soluções numéricas transformando o modelo contínuo em um modelo discreto.

A ideia do método numérico é resolver as equações diferenciais, substituindo as derivadas nela existentes por expressões algébricas envolvendo a função incógnita. Ao contrário do método analítico, que permite calcular os valores das variáveis dependentes em um número infinito de pontos, a aproximação numérica fornece a solução em um número discreto de pontos (nós) definido pela malha computacional, (MESQUITA, 2000). Em geral, se o sistema numérico for consistente, quanto maior for o número de pontos, mais próxima será a solução numérica da solução analítica.

Neste trabalho estudou-se a equação de Poisson bidimensional utilizando, para isso, o método de diferenças finitas com condições de contorno de Dirichlet.

Para a obtenção de uma solução numérica mais precisa torna-se necessário a utilização de uma malha bem refinada. Em malhas mais refinadas, aumenta-se o tempo computacional utilizado para a resolução do sistema linear envolvido. Mediante a análise dos métodos iterativos verificou-se o valor da temperatura numérica média bem como o valor da temperatura analítica média.

O modelo matemático considerado neste trabalho refere-se a um problema bidimensional linear de condução de calor governado pela equação de Poisson Bidimensional (INCROPERA e DEWITT,1998):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f \tag{1}$$

em que *x* e *y* são as direções coordenadas (variáveis independentes), *T* representa a variável dependente (temperatura) e o termo fonte é definido por $f = -2\left[\left(1-6x^2\right)y^2\left(1-y^2\right)+\left(1-6y^2\right)x^2\left(1-x^2\right)\right]$. As condições de contorno são dadas por $T(0,y)=T(x,0)=T(1,y)=T(x,1)=0$, e a solução analítica é dada por $T\left(x,y\right)=(x^2-x^4)(y^4-y^2)$.

A discretização foi feita com malhas uniformes, onde o domínio é particionado em subconjuntos através de um número de incógnitas (ou número de pontos), dado por $N=N_x x N_y$, em que N_xe N_y são os números de pontos nas direções coordenadas x e y, respectivamente (incluindo os contornos). Para cada um dos pontos inteiros da malha, a Eq. (1) foi discretizada com o método das diferenças finitas (MDF) com diferença central (CDS), (BURDEN e FAIRES, 2008; TANNEHILL et al.,1997).

Após a discretização, cada ponto origina uma equação linear, resultando então em um sistema de equações algébricas do tipo $A.T= f$. A matriz dos coeficientes A_{NxN} é pentadiagonal, simétrica e definida positiva (Briggs et al.,2000), T é um vetor de incógnitas e f o termo fonte.

Executou-se simulações com o objetivo comparar as soluções numéricas com a solução analítica obtida para a equação de Poisson bidimensional. As soluções numéricas foram obtidas através do *solver* Gauss-Seidel *red-black*. A Fig. 1 apresenta as temperaturas médias em função do número de variáveis. Verifica-se que à medida que se aumenta o número de nós na malha discretizada, as temperaturas numéricas médias se aproximam cada vez mais da temperatura analítica média.

Comparando a temperatura analítica no nó central com as temperaturas numéricas no nó central, apresentadas na Fig. 2, verifica-se que, à medida que a malha é refinada, a temperatura numérica no nó central se aproxima cada vez mais da temperatura analítica no nó central.

Figura 1: Temperatura numérica média *versus* número de nós.

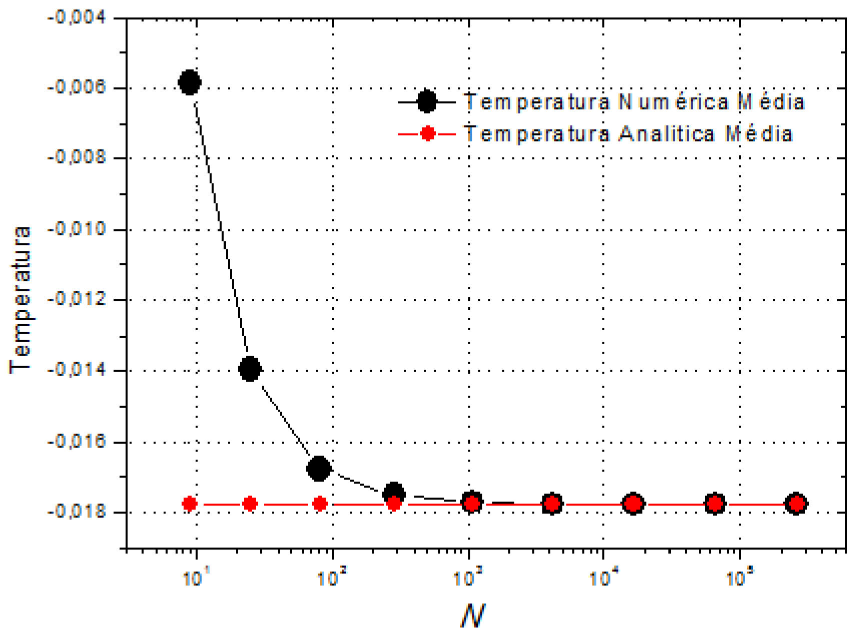
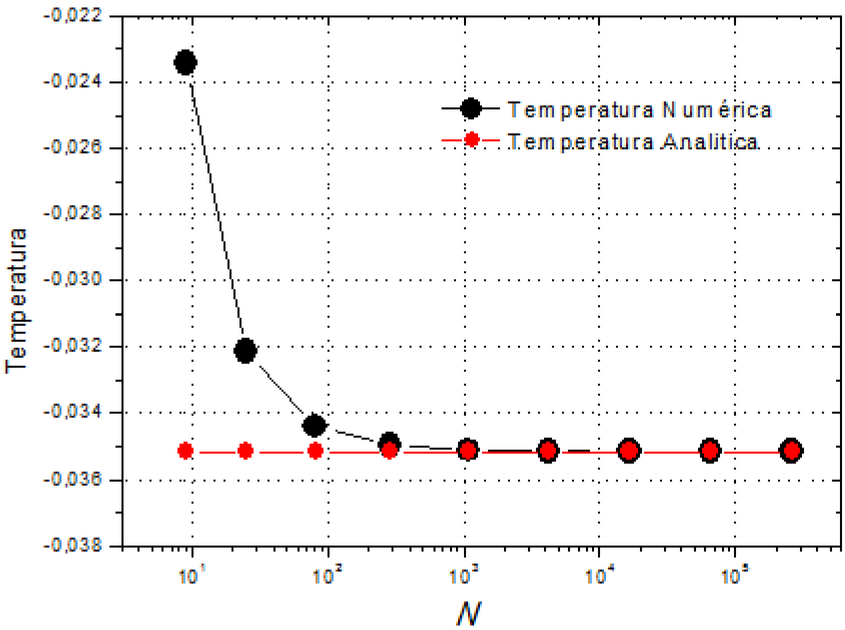


Figura 2: Temperatura numérica no nó central *versus* número de nós.



Neste trabalho foi resolvido numericamente um problema bidimensional linear de condução de calor, governado pela equação de Poisson, com condições de contorno de Dirichlet. Utilizou-se o método das diferenças finitas com diferença central. Para a resolução dos sistemas dos sistemas lineares oriundos da discretização utilizou-se o *solver* Gauss-Seidel *red-black*. Com base nos resultados obtidos neste trabalho, verificou-se que:

(1) à medida que se aumenta o número de nós na malha discretizada, as temperaturas numéricas médias se aproximam cada vez mais da temperatura analítica média;

(2) à medida que a malha é refinada, a temperatura numérica no nó central se aproxima cada vez mais da temperatura analítica no nó central.

Referências:

[1] Burden, R. L.; Faires, J. D. *Análise Numérica*, Tradutor: Ricardo Lenzi Tombi. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2008.

[2] Cunha, C. *Métodos Numéricos***,** 2 ed. rev. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2000.

[3] Gilat, A., Subramanian, V.*Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas*, John Wiley& Sons-Bookman, 2008.

[4] Mesquita, M. S. Solução Numérica de Escoamentos bidimensionais Não-isotérmicos usando o Método Multigrid. Dissertação de mestrado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica. Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos, SP, 2000.

[5] Incropera, F. P.; Dewitt, D. P. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*, 4 ed.Rio de Janeiro: LTC Editora, 1998.

[6] Tannehill, J. C.; Anderson, D. A.; Pletcher, R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2 ed. Washington: Taylor &Francis, 1997.