Como medir infinitos

Matheus de Freitas Pereira *
Bacharelado em Engenharia Mecânica – UFPR
matcheng01@gmail.com

Prof. Roberto Ribeiro Santos Junior (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
robertoribeiro@ufpr.br

Palavras-chave: Conjuntos enumeráveis. Cardinalidade. Hipótese do contínuo.

Resumo: A noção de ”tamanho” de conjuntos infinitos é de certo modo, contra intuitiva. Veja o seguinte trecho retirado do livro A Culpa é das Estrelas ([1], p. 215):

> *. . . Não sou formada em matemática, mas sei de uma coisa: existe uma quantidade infinita de números entre 0 e 1. Tem o $0,1$ e o $0,12$ e o $0,112$ e uma infinidade de outros. Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2, ou entre o 0 e o 1 milhão. Alguns infinitos são maiores que outros.*

É natural pensar que o infinito entre $[0,2]$ é maior que o infinito entre $[0,1]$, como a própria Hazel Grace disse: “Não sou formada em matemática”. Seria de esperar que Hazel também imaginasse que o conjunto dos Inteiros é maior que o dos Naturais, e o dos Racionais maior ainda.

No nosso trabalho, nos debruçaremos sobre esse tema, o “tamanho” dos conjuntos, o qual está relacionado com o conceito de Conjunto Enumerável. Dizemos que um conjunto X qualquer é enumerável quando ele é finito ou quando podemos construir uma bijeção com os Naturais. Através desse conceito, Hazel está errada... Isso será mostrado a seguir.

Nos casos dos Inteiros e dos Racionais é fácil construir tal bijeção ([2], p. 8). O primeiro exemplo que aprendemos de conjunto não enumerável é o conjunto dos Reais ([2], p. 19).

Para “medir” os infinitos usamos a cardinalidade do conjunto, dizemos que todos os conjuntos enumeráveis tem a cardinalidade igual à dos Naturais, que é $\aleph_0$. Para os não enumeráveis, usamos os cardinais

$$\aleph_1 < \aleph_2 < ...$$

onde quanto maior o índice, maior o conjunto [3].

*Bolsista do Programa de iniciação cientifica e mestrado - PICME

Neste trabalho, mostraremos que não existe nenhum conjunto infinito X, tal que

$$Card(\mathbb{N}) < Card(X) < Card(\mathbb{R}) \tag{1}$$

Além disso, apresentaremos uma prova do teorema de Cantor o qual nos permite entender que

“Existe uma quantidade infinita de infinitos arbitrariamente grandes.”

Teorema 1 (Teorema de Cantor)**.** *Seja X um conjunto qualquer e $P(X)$ o conjunto das partes de X, isto é, $P(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de X. Então a cardinalidade de $P(X)$ é maior que a cardinalidade de X.*

Prova: Queremos mostrar que não existe nenhuma sobrejeção de X sobre $P(X)$.
Suponha que exista $F(X)$ em $P(X)$ sobrejetora, e seja

$$Z = \{x : x \in X, x \notin F(x)\}.$$

Note que Z é um subconjunto de X, assim $Z \in F(X)$, mas como F é sobrejetora, existe $a \in X$ tal que $Z = F(a)$. Daí,

$$F(a) = \{x : x \in X \text{ e } x \notin F(X)\}.$$

Visto que a é um elemento de X e $F(a)$ é um subconjunto de X então $a \in F(a)$ ou $a \notin F(a)$.

Se $a \in F(a)$, então

$$a \in \{x : x \in X, x \notin F(x)\},$$

ou seja $a \in X$ e $a \notin F(a)$. Absurdo!

Se $a \notin F(a)$, então ou $a \in X$ ou $a \notin F(a)$ é falsa. Como $a \in X$ é verdade por definição, e estamos supondo que $a \notin F(a)$, então temos outra contradição. Logo, não existe F sobrejetiva.

■

Para provar a desigualdade (1) usaremos alguns conceitos de teoria dos conjuntos, são eles:

- $\aleph_0$ é por definição a cardinalidade de $\mathbb{N}$.
- $\aleph_1$ é por definição o primeiro cardinal não enumerável.
- Hipótese do Contínuo (1ª forma): A cardinalidade do conjunto das parte de $\mathbb{N}$ é igual a $\aleph_1$.
- Hipótese do Contínuo (2ª forma)(Também conhecida como conjectura de Cantor): A cardinalidade dos Reais, $card(\mathbb{R}) = c$, é igual a $\aleph_1$.

A Hipótese do Contínuo foi proposta por Cantor que morreu (1918) antes de vê-la provada. Na verdade, Gödel (1938) e Cohen (1963) provaram que a Hipótese do Contínuo não pode ser provada nem refutada. Ela foi o primeiro problema que Hilbert propôs no Congresso Internacional dos Matemáticos de Paris, em 1900, que levou o seu nome.

Mostraremos que

$$card(P(\mathbb{N})) = card(\mathbb{R}),$$

o que implica que a Hipótese do Contínuo 1ª forma e Hipótese do Contínuo 2ª forma são equivalentes.

Referências

[1] Green J. *A culpa é das estrelas.* Intrínseca: 2012.

[2] Lima, E. L. *Análise Real volume 1: Funções de uma variável.* Rio de Janeiro: IMPA, 2006. 189 p. (Coleção Matemática Universitária).

[3] Weisstein, Eric W. *Cardinal Number.* Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/CardinalNumber.html>. Acesso em: 30 ago. 2016.