Não existência de órbitas periódicas em campos autônomos unidimensionais

Eduardo Pelanda Amaro *
Bacharelado em Engenharia Mecânica - UFPR
edu.pelanda@gmail.com

Prof. Roberto Ribeiro Santos Junior (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
robertoribeiro@ufpr.br

Palavras-chave: Campo unidimensional. Campo autônomo. Órbitas periódicas.

Resumo:

Neste trabalho serão discutidos alguns aspectos do retrato de fase de equações diferenciais ordinárias (EDO) unidimensionais da forma $x' = f(x)$. Mostraremos que EDOs desse tipo não possuem órbitas periódicas, portanto os únicos padrões de trajetórias possíveis para esse tipo de EDO são: órbitas constantes, órbitas monotônicas que se aproximam assintoticamente de um ponto de equilíbrio ou órbitas que divergem para $\pm\infty$. Inicialmente serão introduzidos conceitos básicos de sistemas dinâmicos, em seguida apresentaremos algumas demonstrações da não existência de órbitas periódicas.

Um sistema dinâmico é constituído de equações diferenciais que descrevem a evolução do sistema no tempo contínuo. O campo vetorial x' por x de um sistema descreve o comportamento da velocidade de uma partícula, enquanto o retrato de fase indica qual será a evolução no tempo t das trajetórias para diferentes pontos iniciais x_0. As EDOs nas quais o campo de velocidade não depende do tempo são chamadas de autônomas, *e.g.* $x' = f(x)$. Sistemas não autônomos são da forma $x' = f(x, t)$.

Na apresentação mostraremos que usando ferramentas simples de cálculo I é possível provar o seguinte teorema:

Teorema 1. *O sistema*

$$x' = f(x),$$

onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, não possuí órbitas periódicas.*

Uma outra maneira de abordar as órbitas das partículas do sistema dinâmico $x' = f(x)$ é por meio da ideia de energia potencial. Definimos o potencial como uma função $V(x)$ tal que $f(x) = -\frac{dV}{dx}$, com o sinal negativo indicando que a tendência da partícula

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME.

é de sempre ir para a região de menor potencial. Por meio dessa teoria obtemos uma outra prova para o Teorema 1.

É fácil ver que é impossível que um sistema $x' = f(x)$ apresente órbitas fechadas se o seu potencial é sempre negativo, já que para tempos distintos, t_1 e t_2, a igualdade $x(t_1) = x(t_2)$ só seria possível se a função potencial $V(x(t))$ fosse crescente em algum momento.

Sob determinadas hipóteses é possível generalizar o Teorema 1 para dimensões mais altas.

Teorema 2. *Seja o sistema gradiente*

$$\mathbf{X}' = -\nabla V(\mathbf{X}),$$

onde $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $V(\mathbf{X})$ *é uma função diferenciável. Então esse sistema não possui órbitas periódicas.*

Todos os campos vetoriais unidimensionais representados por funções integráveis são sistemas gradientes. Contudo, os sistemas dinâmicos de maior dimensão em sua maioria não são desse tipo. Assim a identificação de um sistema gradiente é útil para mostrar que o mesmo não possui órbitas fechadas.

No nosso trabalho mostramos como o potencial do sistema $x' = f(x)$ se relaciona com os pontos de equilíbrio x_0 da EDO (pontos nos quais $f(x_0) = 0$). Os pontos de equilíbrio são classificados como estáveis ou instáveis. Intuitivamente dizemos que um ponto x_0 é estável se para todo b suficientemente próximo de x_0 a solução da EDO $x' = f(x)$, $x(0) = b$, é atraída para x_0. De forma análoga, x_0 é dito instável se para todo b suficientemente próximo de x_0 a solução desta EDO se afasta de x_0.

Uma das maneiras para avaliar a estabilidade de um ponto de equilíbrio é perturbar o sistema e determinar se essa perturbação cresce ou decresce. Porém, se conhecermos o potencial $V(x)$ do sistema $x' = f(x)$, basta analisar o gráfico de $V(x)$ para obtermos a classificação dos pontos de equilíbrio. A função potencial possui picos nos pontos de equilíbrio instáveis e vales nos pontos de equilíbrio estáveis.

A referência principal para esse trabalho é o livro de Strogatz [1], o qual apresenta a teoria de sistemas dinâmicos de forma introdutória e com diversos exemplos de aplicações em problemas do mundo real.

Referências:

[1] STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos**. Perseus Books, 1994.