Estudo dos Espaços Topológicos via Teoria de Homologia

João Pedro Schimitka Rodrigues de Lima *
Bacharelado em Matemática - UFPR
joao.rlima@outlook.com.br

Alexandre Quesney
Departamento de Matemática - UFPR
alexandre.quesney@univ-nantes.fr

Palavras-chave: Invariante Topológico, Simplexos, Homologia.

Resumo:
A distinção de espaços topológicos é uma tarefa árdua que gera diversas questões, como fazer essa distinção, e de acordo com quais critérios? Uma das primeiras ferramentas utilizada foi a *característica de Euler*, originalmente definida para classificar poliedros como os poliedros de Platão. Contudo, esse invariante apresenta limitações e não nos permite distinguir, por exemplo, um círculo de um toro. O desenvolvimento das *teorias de homologia topológica*, na época de 1900, nos forneceram ferramentas mais eficientes e um contexto rigoroso para distinguir espaços topológicos. Como aplicações notáveis das teorias de homologia, temos os resultados do *Teorema do Ponto Fixo de Brouwer*, do *Teorema da Bola Cabeluda*, do *Teorema de Borsuk-Ulam*, etc.

Nesse resumo, apresentamos uma teoria de homologia topológica, a *homologia singular*. Essa teoria de homologia atribui a um espaço topológico X uma sequência de grupos abelianos $\{H_q(X)\}_{q\geq 0}$ que verificam certas propriedades. Em particular, a teoria de homologia singular é invariante sob homeomorfismo, ou seja, espaços X e Y homeomorfos têm uma homologia isomorfa, isto é, se $X \simeq Y$, então $H_q(X) \cong H_q(Y)$ para cada $q \in \mathbb{N}$. A construção da homologia singular $H_*(X)$ é baseada numa *triangulação* de X, e a ideia de triangulação se baseia em olhar para X como um polítopo "deformado". Mais precisamente, significa que existe um polítopo $K \subset \mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $h : K \longrightarrow X$, onde K é uma união finita de *simplexos* de várias dimensões que se arranjam de maneira "coerente". Em particular, K é constituído de *0*-simplexos, que são pontos; *1*-simplexos, que são segmentos orientados; *2*-simplexos, que são triângulos orientados; etc. De modo geral, dados $q + 1$ pontos $v_0, v_1, \cdots, v_q$ em $\mathbb{R}^n$, o simplexo *q*-dimensional correspondente é o menor conjunto

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial, PET-Matemática convexo que contém os $q+1$ pontos $v_0, \cdots, v_q$.

A partir de K, construímos um complexo $C_*(K)$, isto é, uma sequência

$$C_0(K), C_1(K), \cdots C_q(K), \cdots$$

mapeada por funções

$$\cdots \xrightarrow{\partial^{q+1}} C_q(K) \xrightarrow{\partial^q} C_{q-1}(K) \xrightarrow{\partial^{q-1}} \cdots \xrightarrow{\partial^1} C_0(K) \xrightarrow{\partial^0} 0$$

onde cada $C_q(K)$ é um $\mathbb{Z}$-módulo e $\partial^q : C_q(K) \longrightarrow C_{q-1}(K)$ verifica $\partial^q\partial^{q+1} = 0$. A ideia da construção do complexo $C_*(K)$ é de considerar $C_q(K)$ como o $\mathbb{Z}$-módulo gerado por n-simplexos orientados de K e definir o mapa ∂ como o bordo dos simplexos; por exemplo, dado um 1-simplexo orientado $(v_0, v_1) \in C_1(K)$ seu bordo $\partial^1(v_0, v_1)$ é dado pela diferença $v_1 - v_0 \in C_0(K)$. A partir de tal complexo, podemos considerar a sua homologia $H_*(K)$, definida por $H_q(K) = \dfrac{ker\ \partial^q}{Im\ \partial^{q+1}}$ para $q \in \mathbb{N}$. Afirmamos que, dada uma outra triangulação K' de X, a homologia do complexo $C_*(K')$ é isomorfa à homologia de $C_*(K)$, ou seja, a homologia de X independe da triangulação escolhida, e denotamos $H_*(X)$ por $H_*(K)$ ou $H_*(K')$.

Observamos que o grupo $H_0(X) = \dfrac{C_0(K)}{Im\ \partial^1}$ detecta as componentes conexas de K. De fato, dois elementos $v_0, v_1 \in C_0(K) = ker\ \partial^0$ induzem a mesma clase $\overline{v_0} = \overline{v_1} \in H_0(X)$ se, e somente se, existe um bordo $x \in C_1(K)$ tal que $\partial^1 x = v_1 - v_0$. Todavia, dados dois pontos v_0, v_1 em componentes conexas distintas, podemos mostrar que não existe $x \in C_1(K)$ tal que $\partial^1 x = v_1 - v_0$ e, portanto, as classes $\overline{v_0}$ e $\overline{v_1}$ são diferentes. Um argumento similar mostra que $H_1(X) = \dfrac{ker\ \partial^1}{Im\ \partial^2}$ detecta os “buracos de dimensão 1” de X. A partir da homologia, podemos distinguir o disco D^2 do círculo S^1, uma vez que $H_1(D^2) = 0$ e $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Em geral, podemos distinguir disco n-dimensional do seu bordo, a esfera $(n-1)$-dimensional, pois a construção explícita da homologia singular nos permite calcular que $H_{n-1}(D^n) = 0$ e $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$.

Como toda teoria de homologia topológica, para cada $q \in \mathbb{N}$, H_q é um *funtor*, isto é:

1. uma função contínua $f : X \longrightarrow Y$ entre espaços topológicos induz um morfismo $H_q(f) : H_q(X) \longrightarrow H_q(Y)$ entre os grupos de homologia
2. $H_q(id_X) = id_{H_q(X)}$
3. dadas duas funções $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ entre espaços topológicos, $H_q(f) \circ H_q(g) = H_q(f \circ g)$

Essas propriedades nos permite provar o *teorema do ponto fixo de Brouwer* de maneira simples. Esse teorema afirma que, para $n \geq 2$, se $f : D^n \longrightarrow D^n$ é uma aplicação contínua do disco n-dimensional dentro dele mesmo, então f tem um ponto fixo, ou seja, existe $a \in D^n$ tal que $f(a) = a$. Suponhamos, por absurdo, que f não tenha pontos fixos. Então podemos mostrar que a esfera S^{n-1}, que é o bordo de D^n, é um retrato do disco D^n, ou seja, podemos construir uma aplicação contínua $r : D^n \longrightarrow S^{n-1}$ que verifica $r \circ i = id$, onde $i : S^{n-1} \longrightarrow D^n$ é a inclusão canônica. Todavia, como $H_{n-1}(r) \circ H_{n-1}(i) = H_{n-1}(r \circ i) = H_{n-1}(id) = id$, temos que $H_{n-1}(r) : H_{n-1}(D^n) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$ é uma sobrejeção. Mas $H_{n-1}(D^n) = 0$ e $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$, o que é uma contradição.

Referências:

ARMSTRONG, M.A. **Basic Topology**. Springer, 1983.
HATCHER, A.E. **Algebraic Topology**. Cambridge University Press, 2002.
LIMA, E.L. **Elementos de Topologia Geral**. 3 ed, SBM, 2009.