Métodos numéricos para encontrar zeros de funções reais e suas aplicações

Matheus Daniel Galvão de Melo
Bacharelado em Matemática - UFPR
matheusdgm@hotmail.com

Profa. Mael Sachine
Departamento de Matemática - UFPR
mael@ufpr.br

Palavras-chave: Métodos numéricos, aproximação de zeros de funções, processos iterativos.

Resumo:

Em muitas circunstâncias, é preciso encontrar zeros de funções que possuem um alto grau de dificuldade para serem estudadas. Para este fim, é comum serem utilizados métodos numéricos para aproximar, através de passos iterativos, zeros destas funções. Alguns destes métodos são:

Método da Bissecção: Consiste em encontrar um zero de uma determinada função contínua desde que, dado um intervalo $[a, b]$, os valores da função nos pontos a e b possuam sinais diferentes. Com estas condições satisfeitas, o método aproxima um zero da função iterativamente através de:

$$x_k = \frac{a+b}{2}.$$

Se o valor de $f(x_k)$ possui sinal equivalente ao de $f(a)$, então para a próxima iteração teremos $a = x_k$. Caso contrário, $b = x_k$.

Curiosidade: Existe um método similar ao da bissecção, chamado Método da Posição Falsa, que usa uma média ponderada ao invés de uma média aritmética.

Método do Ponto Fixo: Consiste em transformar a equação $f(x) = 0$ em outra equação equivalente $\varphi(x) = x$, e a partir de uma aproximação inicial x_0, gera uma sequência iterativa de aproximações para um zero da função da forma $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. A forma geral da função de iteração é $\varphi(x) = x + A(x)f(x)$, onde $A(x)$ é uma função não nula se calculada no zero de $f(x)$. Para que o processo seja convergente, é preciso satisfazer as seguintes condições: $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ contínuas num intervalo I centrado em ξ, $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$ e $x_0 \in I$.

Método de Newton: É um método do ponto fixo em que $A(x) = \dfrac{-1}{f'(x)}$ e cuja sequência iterativa é determinada por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Dos métodos numéricos aqui estudados, este é o método com a maior velocidade de convergência.

Graficamente ele consiste em, dado x_0, traçamos a reta tangente ao gráfico da função f em $(x_0, f(x_0))$, e o próximo iterando x_1 será o ponto de interseção desta reta tangente com o eixo das abscissas.

Método da Secante: Para certas funções o cálculo da derivada pode ter alto custo computacional, inviabilizando a aplicação do método de Newton. Nesse caso uma alternativa é utilizarmos o método da secante.

Note que $f'(x_k)$ é aproximadamente $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$. Geometricamente, x_{k+1} é obtido a partir da interseção do eixo das abscissas com a reta secante que passa pelos pontos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$.

A taxa de convergência do método da secante é menor que a do método de Newton, no entanto é maior do que os demais métodos estudados.

Com bases nestes métodos aqui apresentados, pretendemos pretendemos discorrer sobre alguns exercícios em particular que nos permitem perceber peculiaridades sobre os métodos aqui estudados.

Referências:

[1] RUGGIERO, M. A. G; LOPES, V. L. R. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais, 2ª edição. São Paulo: Pearson Makron Books, 2014.

[2] CAMPELLO, R. Lista de exercícios. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~campello/pm004/lista1comments.pdf>. Acesso em: 06 set. 2017