Classificação dos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos de peso irredutíveis

João Antonio Francisconi Lubanco Thomé*
Bacharelado em Matemática - UFPR
jolubanco@gmail.com

Prof. Dr. Matheus Batagini Brito (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
mbrito@ufpr.br

Palavras-chave: álgebras de Lie, representações, classificação dos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos.

Resumo

No estudo da álgebra abstrata, muitas vezes é importante e eficiente trabalhar com suas representações. Para o caso particular de álgebras de Lie semi-simples de dimensão finita, a teoria de representação de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ desempenha um papel crucial. Neste trabalho focamos no estudo das representações da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e classificamos todos os seus módulos de peso irredutíveis.

Diremos que um módulo sobre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, ou um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-*módulo*, é um espaço vetorial V com três operadores lineares fixados, E, F e H em V satisfazendo as seguintes relações:

(i) $EF - FE = H$

(ii) $HE - EH = 2E$

(iii) $HF - FH = -2F$

Além disso, utilizaremos duas classes importantes de módulos: os irredutíveis e os de peso. Diremos que um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo V é *irredutível* se os únicos submódulos de V são os triviais e um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo V é dito *módulo de peso* se

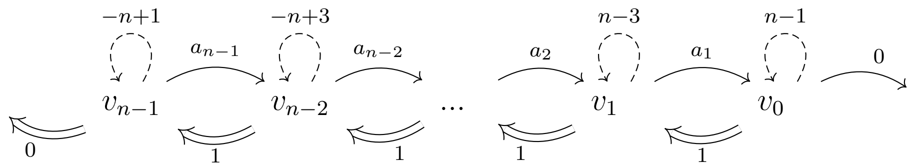
$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda$$

onde $V_\lambda = \{v \in V : H(v) = \lambda v\}$ para $\lambda \in \mathbb{C}$. Por fim, a classificação será dada a partir de quatro famílias de módulos, e para fazer suas construções definiremos as ações dos operadores E, F e H nos elementos da base, a partir dos diagramas abaixo, onde

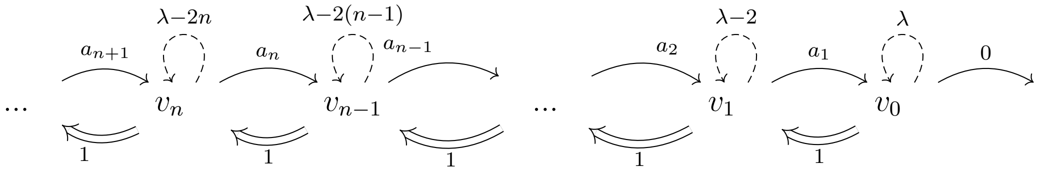
*Bolsista do Programa PET-Matemática.

as flechas simples representam as ações de E, as flechas duplas as ações de F e as pontilhadas as ações de H.

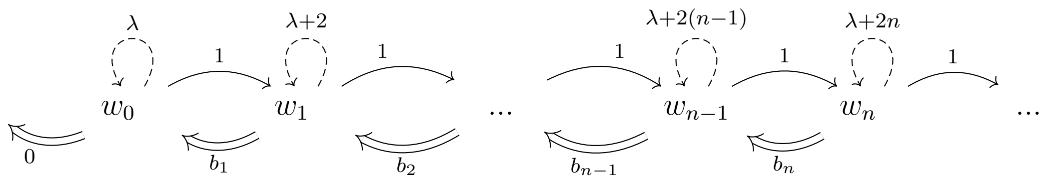
$V^{(n)}$: onde $a_i = i(n-i)$ com $n \in \mathbb{N}$



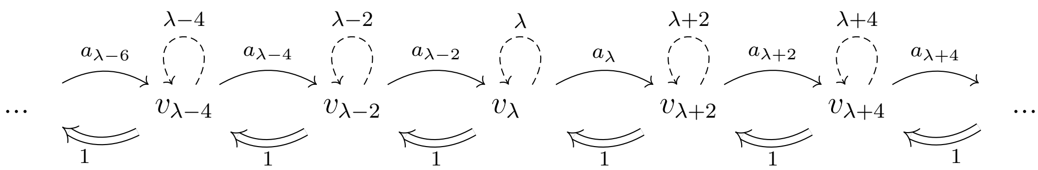
$M(\lambda)$: onde $a_i = i(\lambda - i + 1)$ com $\lambda \in \mathbb{C}$.



$\overline{M}(\lambda)$: onde $b_i = -i(\lambda + i - 1)$ com $\lambda \in \mathbb{C}$.



$V(\xi,\tau)$: onde $a_\lambda = \frac{1}{4}(\tau - (\lambda+1)^2)$ com $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$, $\lambda \in \xi$ e $\tau \in \mathbb{C}$.



Tais diagramas serão cruciais na classificação dos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos, pois analisaremos como os operadores E e F agem nos elementos da base de um módulo de peso V. Assim, a partir da construção destes módulos, temos o seguinte resultado de classificação.

Teorema 1 (Classificação dos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-Módulos de Peso Irredutíveis) *Cada $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo de peso irredutível é isomorfo a um dos seguintes módulos:*

(i) $V^{(n)}$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $M(\lambda)$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}_0$.

(iii) $\overline{M}(-\lambda)$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}_0$.

(iv) $V(\xi,\tau)$ *para algum* $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$ *e* $\tau \in \mathbb{C}$ *tal que* $\tau \neq (\mu+1)^2$ *para todo* $\mu \in \xi$.

Referências

[1] MAZORCHUK, V. **Lectures on $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-modules**. Imperial College Price, 2009.

[2] SAN MARTIN, L.A.B. **Álgebras de Lie**. 2. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2010.

[3] ROMAN, S. **Advanced Linear Algebra**. Springer-Verlag, 1992.