# Equações algébricas nos quatérnios de Hamilton

Gustavo Sanches Dalazen *
Licenciatura em Matemática - UTFPR
*dida.sanches@hotmail.com*

Prof. Dr. Ronie Peterson Dario (Orientador)
Departamento Acadêmico de Matemática - UTFPR
*ronie@utfpr.edu.br*

**Palavras-chave**: equações algébricas, quatérnios, Fórmula de Cardano.

**Resumo**:

Neste trabalho estudamos equações algébricas (equações polinominais) sobre a álgebra de divisão dos quatérnios de Hamilton. Um quatérnio é uma combinação linear $a + bi + cj + dk$, onde os coeficientes $a, b, c, d$ são números reais e $i, j, k$ são unidades imaginárias satisfazendo as relações básicas $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ e $ij = -ji = k$. Assim, é também um espaço vetorial de dimensão $4$ sobre o corpo dos números reais e tem, além de inúmeras aplicações, importância histórica, por ser o primeiro exemplo de "corpo não comutativo"(anel de divisão).

Ivan Niven [4] foi o primeiro a apresentar um método para obter as raízes de uma equação polinomial sobre os quatérnios. Um método mais eficiente, do ponto de vista computacional, foi exibido em [2].

Uma outra abordagem para o problema segue a teoria clássica das equações algébricas, no sentido de expressar as raízes em termos de operações algébricas elementares e radicais envolvendo os coeficientes da equação. Para o caso da equação quadrática isso foi feito em [3]. Nós estudamos o correspondente problema para a equação cúbica e para a equação de quarto grau. No caso da equação cúbica, não existe uma fórmula geral para as raízes sem a (forte) restrição de que existe um quatérnio puro como raiz [1]. Sem assumir isto, densenvolvemos uma versão da fórmula de Cardano nos quatérnios, assumindo que os coeficientes são números reais [5]. A fórmula que obtivemos vale para uma raiz qualquer da equação cúbica, desde que esta tenha coeficentes reais. Para esse resultado, utilizamos em parte o método de Niven.

Para a equação cúbica geral (coeficientes quatérnios) obtivemos as raízes e sua natureza (esféricas ou isoladas), assumindo uma restrição sobre os coeficientes. Utilizamos neste caso o método de Niven, que mostrou-se insuficiente para a resolução da equação cúbica geral.

Resolvemos também a equação de quarto grau com coeficientes reais, determinando suas raízes e a natureza das mesmas.

**Referências**

- [1] CHAPMAN, A. Pure imaginary roots of quaternion standard polynomials. 22 setembro 2011. Disponível em: http://arxiv.org/abs/1109.4967 . Acesso em: 16/10/2015.
- [2] JANOVSKÁ, G. A note on the computation of all zeros of simple quaternionic polynomials. SIAM J. Numer. Anal, Vol. 48, No. 1, pp. 244-256
- [3] HUANG, L. Quadratic formulas for quaternions. Applied Mathematics Letters, v. 15, n. 5, p. 533-540, 2002.
- [4] NIVEN, I. Equations in quaternions. The American Mathematical Monthly, v. 48, n. 10, p. 654-661, 1941.
- [5] DALAZEN, G.; DARIO, R. P. Fórmulas resolutivas da equação quadrática e da equação cúbica sobre os quatérnios de Hamilton. Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 390–400

*Bolsista de Iniciação Científica (Edital 07/2014 - PROPPG-UTFPR)