Discretização de equações do calor e de águas rasas através do MDF

Renan O. Domingues *
Bacharelado em Engenharia Química - UFPR
renan.oclides@hotmail.com

Prof. Abel S. Siqueira
Departamento de Matemática - UFPR
abel.s.siqueira@gmail.com

Agosto de 2016

Palavras-chave: Método de Diferenças Finitas, Equação do Calor, Equação de Ondas Rasas.

Resumo:

Grandezas físicas estão frequentemente relacionadas com sua taxa de variação em função de certas dimensões, tais como a posição espacial e o tempo. Essas relações podem ser escritas matematicamente usando equações diferenciais, que são muito utilizadas na modelagem de problemas físicos, e com isso, importantes para a matemática aplicada.

Uma técnica capaz de resolver equações diferenciais é o *Método de Diferenças Finitas*, sendo esse o método que utilizamos para solucionar os problemas estudados nesse trabalho. No Método das Diferenças Finitas as derivadas são aproximadas por fórmulas que podem ser obtidas pelo truncamento da série de Taylor da função derivada [2].

Foi feita uma análise do erro das fórmulas de discretização empregadas nos problemas estudados, por meio de sua construção pela série de Taylor com resto. Com isso, foram verificadas as condições para estabilidade, consistência e convergência do método.

Os problemas estudados nesse trabalho incluem a equação do calor e a equação da onda, submetidos à diferentes condições de contorno. As discretizações foram implementadas em Julia [3], uma linguagem de alto nível para computação matemática.

Chamamos de equação do calor uma equação diferencial parabólica que descreve a temperatura de um corpo em função da posição e do tempo [1]. Ela pode ser escrita de forma generalizada para uma dimensão por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sigma(x)u - f(x),$$

*Bolsista do PICME

onde a temperatura é representada por u, a posição espacial pela coordenada x e o instante de tempo por t. Os termos σ e f representam a dissipação, e a transferência térmica por uma fonte externa, respectivamente. Já o valor ε é o coeficiente de dissipação térmica característico do material. Geralmente são aplicadas simplificações nessa equação.

Um exemplo de simplificação da equação do calor surge quando consideramos uma barra cilíndrica homogênea, cujo comprimento L é muito superior ao diâmetro, isolada e sem fonte externa, de forma que ocorra troca térmica apenas pelos seus extremos. Nessas condições a equação diferencial resultante é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde a constante ε é o coeficiente de dissipação térmica característico do material.

Supondo que o perfil de temperatura no instante inicial $u(x,0) = \phi(x)$ seja conhecido, e que as temperaturas em suas extremidades sejam mantidas constantes - $u(0,t) = u_0; u(L,t) = u_L$ - podemos discretizar o problema por diferenças finitas.

Usando a fórmula avançada de primeira ordem para a derivada no tempo e a centrada para a de segunda ordem obtém-se uma solução explícita. A figura 1 a seguir nos permite visualisar uma solução, usando a forma explícita, para o caso onde $u(t=0) = 380x(1-x) + 26$, sujeito à condição $u(x=0) = u(x=1) = 26$.

Serão apresentadas também discretizações para a equação do calor aplicada em duas dimensões e para a equação de ondas rasas. A equação de águas rasas é deduzida a partir das equações de Euler e descreve o comportamento de ondas cujo comprimento é relativamente maior que a profundidade do canal.

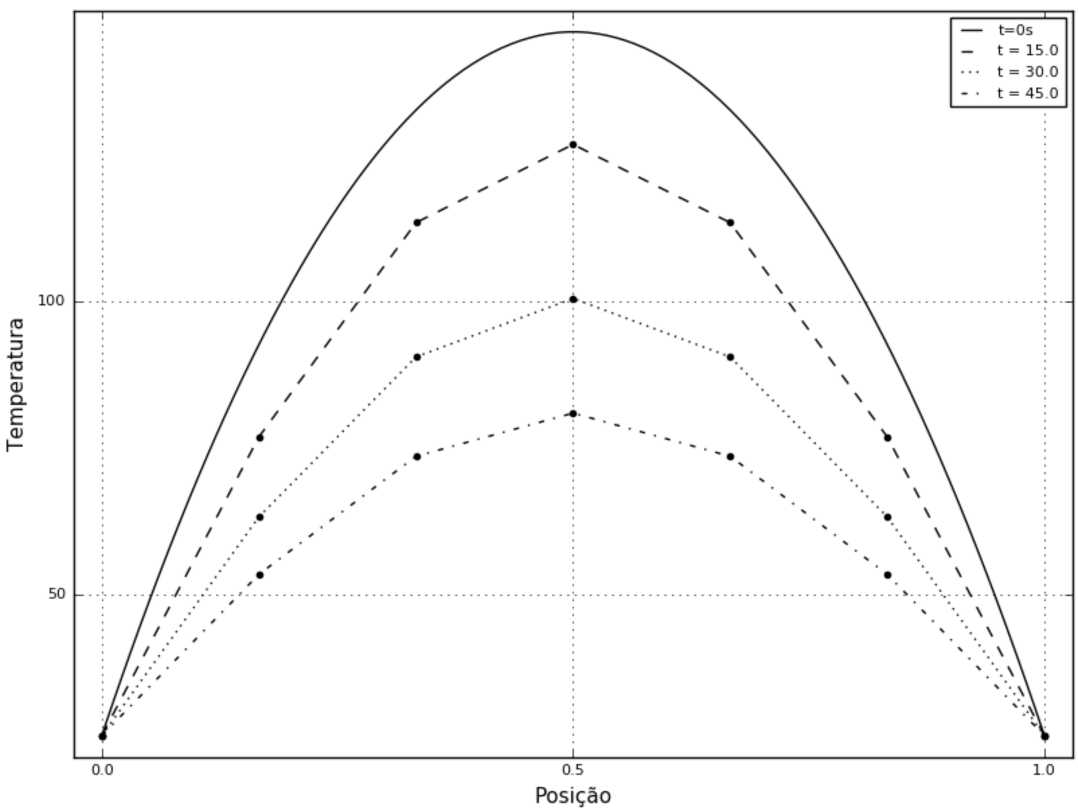

Figura 1: Aproximação usando a forma explícita

Referências:

[1] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical analysis**. 9ª ed. Pacific Grove: Brooks/Cole, 2011.

[2] PULINO, P. Métodos de Diferenças Finitas - Aspectos Teóricos, Computacionais e Aplicações. Jul. 2008. URL: `http://www.ime.unicamp.br/~pulino/MDF_AsTeCA/Textos2008/`.

[3] **The Julia Language**. URL: `http://julialang.org/` (acesso em 30/08/2016).