O Teorema de Lindemann e a transcendência de e e π

Gabriel Cordeiro Chileider *
Licenciatura em Matemática - UFPR
gabriel.chileider@ufpr.br

Prof.Dr. Marcelo Muniz Silva Alves (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
marcelomsa@ufpr.br

Palavras-chave: Teorema de Lindemann, Números Transcendentes, Números Algébricos.

Resumo:

Os números naturais surgiram pela necessidade da contagem, números racionais estão ligados a mensuração e os números reais estão associados a problemas do dia a dia, já os números complexos apareceram como soluções de equações cúbicas e quárticas. No entanto, os números podem ser relacionados a equações algébricas, como por exemplo os números algébricos. Um número complexo é chamado *algébrico* se é raiz de um polinômio não nulo, com coeficientes racionais. Caso contrário, é chamado *transcendente.*

A palavra transcendente significa, segundo Euler, que esses números transcendem o poder das operações algébricas. Mesmo sendo uma definição do século XVIII, a existência de números transcendentes continuou aberta até 1844 quando Liouville estabeleceu que para todo número algébrico α de grau n existe uma constante $A > 0$ tal que $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{A}{q^n}; \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Assim, qualquer número que não satisfaz tal propriedade é transcendente. O próprio Liouville construiu esses números, por exemplo $\sum\limits_{j=1}^{\infty} 10^{-j!}$, que mais tarde ficou conhecido como *Constante de Liouville* é e considerado históricamente o primeiro número transcendente.

Em 1873 Hermite provou que e é transcendente e um ano depois Cantor demonstrou que existem mais números transcendentes do que algébricos, porém é um grande desafio provar a transcendência de um número. Em 1884, Lindemann utilizou o método de Hermite para provar que π é transcendente, mais tarde, Lindemann mostrou que a transcendência de e e π são casos particulares de um teorema mais geral, este teorema, que será apresentado a seguir.

*Bolsista do Programa Licenciar

Teorema de Lindemann: *Se $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ são números algébricos distintos, então $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, ..., e^{\alpha_m}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$.*

O Teorema de Lindemann é considerado um dos teoremas mais importantes na Teoria de Números Transcendentes, pois nos permite demonstrar de maneira imediata a transcendência de e e π, além de outros números oriundos das funções exponencial, logaritmica e trigonométricas. Uma pequena amostra da importância do Teorema de Lindemann é o seguinte corolário:

Corolário *Seja α algébrico sobre $\mathbb{Q}$ não nulo. Então e^{α} e π são transcendentes.*

O objetivo deste trabalho é justamente apresentar uma prova do Teorema de Lindemann, a qual envolve Extensões Normais de Corpos, o Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos e Análise Matemática. A ideia da prova consiste em supor, por contradição, que existe uma dependência linear entre os elementos $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, ..., e^{\alpha_m}$ e, a partir disso, utilizar as "ferramentas" acima para construir uma equação algébrica relacionando duas expressões: a primeira é uma soma de inteiros que não é divisível por nenhum primo suficientemente grande, e portanto é um inteiro não nulo; por sua vez, a segunda é uma integral que pode ser estimada e tem limite 0 quando enviamos um primo p para infinito. Deste modo, chega-se a uma contradição.

O Teorema de Lindemann fornece várias outras famílias de números transcendentes. De fato, segue como consequência imediata a transcendência dos números lnα, arcsenα, arccosα e arctanα para α algébrico, $\alpha \notin \{0, 1\}$.

Referências:

[1] FIGUEIREDO, D. **Números Irracionais e Transcendentes**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM (Coleção de Iniciação Científica), 2002.

[2] MARQUES,D. **Teoria dos Números Transcendentes.**1.ed. Rio de Janeiro: SBM (Textos Universitários), 2013.p165-176