Modelagem e Controle de Vibrações Mecânicas

Jéssica Meneguel[1]
Graduação em Engenharia Mecânica – UFPR
jmmeneguel@gmail.com

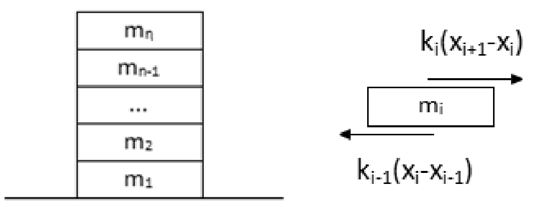
Adriana Luiza do Prado
Departamento de Matemática – UFPR
alprado@ufpr.br

Palavras-chave: vibrações mecânicas; amortecedores dinâmicos;

Resumo:

Vibrações são fenômenos cotidianos e uma preocupação real durante o projeto de uma estrutura. O estudo desses fenômenos possibilita a criação de mecanismos para evitá-las. O objetivo dessa pesquisa é modelar matematicamente um prédio de vários andares e amortecedores.

Para obter uma resposta aproximada de um sistema a uma força excitadora simplificamos o sistema real, obtemos um modelo analítico, ao qual aplicamos os princípios da dinâmica, e temos como resultado um sistema de equações diferenciais. Podemos modelar um prédio de n andares como um sistema com n massas dispostas uma sobre as outras. Tais massas estarão conectadas por junções elásticas, cujos efeitos são semelhantes a molas devido ao comportamento altamente elástico dos materiais utilizados comumente na construção (Fig.1). Aplicando o equilíbrio e a Segunda Lei de Newton, temos:



$$m_1 x_1'' = -k_0 x_1 + k_1(x_2 - x_1)$$

$$m_2 x_2'' = -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2)$$

$$\dots$$

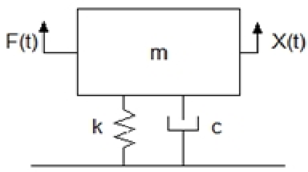
$$m_n x_n'' = -k_n(x_n - x_{n-1})$$

Figura 1

Matricialmente: $MX'' = KX$, onde M é a matriz de massa do sistema, K a de rigidez, e X e X'', de posição e aceleração, respectivamente. Definimos, portanto $A = M^{-1}K$, então, $X'' = AX$, o qual é denominado Forma Modal do Sistema. Os autovalores da matriz A, nos fornecerão as n frequências naturais da estrutura, que são extremamente úteis, visto que diversas vezes é necessário saber somente as condições críticas de vibração do sistema.

[1] Bolsista do Programa PICME

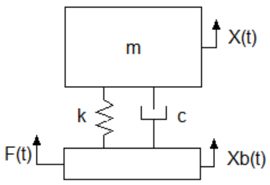
Agora, assumindo um sistema de um grau de liberdade, por simplicidade, aplicamos equilíbrio de forças a um sistema excitado pela massa (Fig.2), e outro pela base (Fig.3):



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

$$-m\omega^2 X(\omega) + i\omega c X(\omega) + kX(\omega) = F(\omega)$$

Figura 2



$$F(t) - k(x_b(t) - x(t)) - c(\dot{x}_b(t) - \dot{x}(t)) = 0$$

$$k(x_b(t) - x(t)) - c(\dot{x}_b(t) - \dot{x}(t)) = m\,\ddot{x}(t)$$

Figura 3

Aplicando a transformada de Fourier a essas equações, podemos expressar a função $K(\omega) = \frac{F(\omega)}{X(\omega)}$, denominada rigidez dinâmica da estrutura, a qual expressa a oposição da estrutura ao movimento vibratório. Representando graficamente o módulo dessas duas funções observamos que, enquanto a rigidez dinâmica para o sistema excitado na massa é zero(Fig. 4a), quando $\omega=\omega_n$, a rigidez dinâmica para o sistema excitado pela base tende ao infinito(Fig 4b).

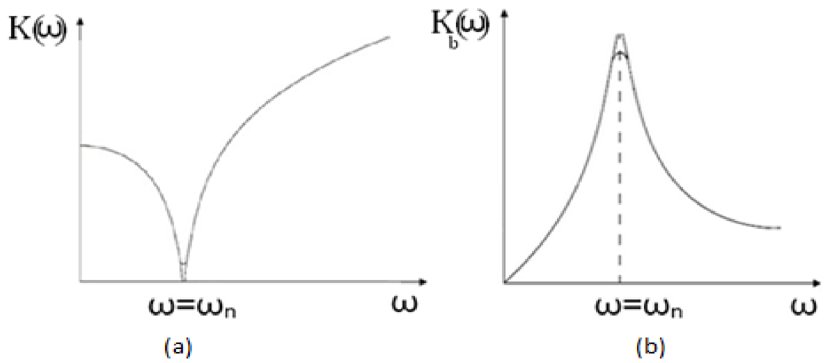


Figura 4

Acoplando esses dois sistemas, aquele excitado pela base passa a atuar como amortecedor, cujas características (massa, rigidez e amortecimento) podem ser alteradas de modo a propiciar condição de menor vibração. Ao escolhermos a frequência natural do amortecedor igual a frequência natural do sistema primário, teremos vibração nula na frequência natural, e assim obtemos o controle de banda estreita das vibrações.

Referências:

RAO, Singiresu. Vibrações Mecânicas. São Paulo: Pearson, 2014. 424p.

CANALE, Steven Chapra; CANALE, Raymond P. Métodos Numéricos para Engenharia. São Paulo: McGrawHill, 2008. 809 p.