Resolubilidade global de certos operadores lineares com coeficientes constantes

Fernanda Dartora Musha
Bacharelado e Licenciatura em Matemática - UFPR
fernanda.musha@gmail.com

Prof. Cleber de Medeira (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
clebermedeira@ufpr.br

Palavras-chave: Resolubilidade global, série de Fourier, números de Liouville.

Resumo:

Neste trabalho estudamos a resolubilidade global da seguinte classe de operadores diferencias parciais lineares de primeira ordem

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha + i\beta)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Buscando soluções periódicas para $Lu = f$, usamos como ferramenta principal a *série de Fourier* para caracterizar as funções suaves periódicas através do decaimento dos seus coeficientes de Fourier.

Se f é uma função 2π-periódica e suave, para que exista uma solução da equação $Lu = f$, é necessário que o coeficiente de Fourier $\widehat{f}(0,0)$ seja nulo. Dessa forma consideramos apenas funções f definidas no seguinte conjunto

$$E = \{f \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^2);\ \widehat{f}(0,0) = 0\}.$$

Definição 1 *Dizemos que o operador L é globalmente resolúvel em $\mathbb{R}^2$ se, dada uma função $f \in E$, existe uma função suave periódica $u(x,y)$ tal que $Lu = f$.*

A aproximação de números reais por números irracionais é uma importante ferramenta que aparece naturalmente em nossos resultados. Nesse sentido, uma das principais classes de números irracionais que estudamos é a dos números de Liouville, os quais são definidos da seguinte forma.

Definição 2 *Um número irracional α é chamado de número de Liouville se, para todo $N > 0$, existem infinitos racionais p/q que satisfazem a desigualdade*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^N}.$$

Um resultado interessante dessa classe de números é que todo número de Liouville é transcendente.

O teorema principal do trabalho apresenta uma caracterização completa da resolubilidade global para a classe de operadores definida previamente.

Teorema 3 *O operador diferencial parcial linear*

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha + i\beta)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

é globalmente resolúvel se, e somente se, vale uma das seguintes condições:

1. $\beta \neq 0$*;*
2. $\beta = 0$ *e* $\alpha \in \mathbb{Q}$*;*
3. $\beta = 0$ *e* $\alpha \notin \mathbb{Q}$ *é não-Liouville.*

Como consequência desse teorema, o operador L é globalmente resolúvel quando α é um número algébrico.

Referências

[1] FIGUEIREDO, D. G.. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, IMPA, 4 ed. Rio de Janeiro, 2009.

[2] GOULART, J. A. I.. *Hipoeliticidade Global e Aproximação de números reais*, Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática) - Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

[3] HOUNIE J.. *Globally Hypoelliptic and globally solvable first order evolution equations*, Transactions of the American Mathematical Society, v. 252, p. 233-248, 1979.

[4] LIMA, E. L.. *Curso de Análise Vol. 1*, IMPA, ed. 14 Rio de Janeiro, 2016.

[5] LIMA, E. L.. *Curso de Análise Vol. 2*, IMPA, ed. 11 Rio de Janeiro, 2015.

[6] MARTINEZ, F.; MOREIRA, C.; SALDANHA, N.; TENGAN, E.. *Teoria dos Números, um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

[7] TAKAHASHI, L. T., *Hipoeliticidade Global de Certas Classes de Operadores Diferenciais Parciais*.
Dissertação (mestrado em matemática), PPG-M, UFSCar, São Carlos, 1999.