A Espiral de Euler

Gabriel Cordeiro Chileider *
Licenciatura em Matemática - UFPR
gabriel.chileider@ufpr.br

Prof. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
eidam@ufpr.br

Palavras-chave: Espiral de Euler, Clotoide, Radioide aos arcos.

Resumo:

A Espiral de Euler, também conhecida como Clotoide, é uma notória curva plana que foi estudada por grandes matemáticos, como James Bernoulli e Augustin-Jean Fresnel por estar associada a Teoria da difração e elástica. Outro matemático que a estudou foi Ernesto Cesàro, este que, descobriu algumas propriedades relacionadas a geometria. Neste trabalho apresentaremos algumas dessas propriedades e uma aplicação relacionada a rodovias.

A Clotoide é definida como uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cuja curvatura k(s) é proporcional ao seu comprimento de arco s (e inversamente proporcional ao seu raio de curvatura ρ). Em outras palavras, a Clotoide pode ser definida pela equação:

$$\rho.s = a^2,$$

onde a é uma constante positiva.

Utilizando essa Equação e o Teorema fundamental das Curvas Planas é possível mostrar que, a menos de rotações e translações, a Espiral de Euler é a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s cos \left(\frac{t^2}{2a^2} \right) dt, \int_0^s sen \left(\frac{t^2}{2a^2} \right) dt \right)$$

As integrais acima são denominadas Integrais de Fresnel e a curva γ leva o nome de Leonhard Euler pois foi ele o responsável por descobrir que quando $s \to \infty$, $\gamma(s)$ converge para o ponto $\left(a\frac{\sqrt{\pi}}{2}, a\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$. Esta informação juntamente com o vetor tangente permitiu a Euler esboçar o traço da clotoide.

*Bolsista do Programa de Iniciação Cientifica Matematicativa

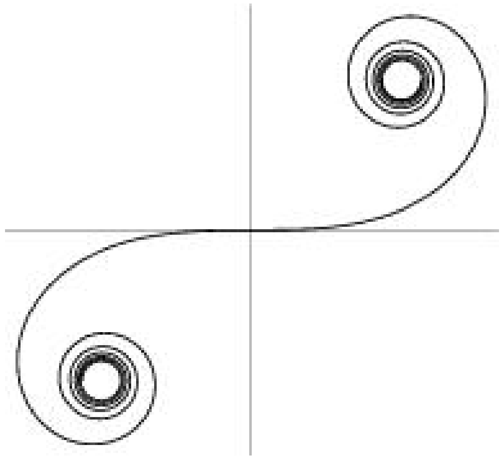

Figura 1: Traço - Espiral de Euler

Com o Auxilio do Teste de Dirichlet mostraremos que as integrais de Fresnel convergem. O cálculo destas integrais é um problema interessante e desafiador que utiliza integrais compléxas e o critério da comparação.

Algo interessante a se considerar na Clotoide é o centro de Gravidade de um arco arbitrário, ele está contido na reta que une os centros dos círculos osculadores das extremidades deste arco. Embora o centro de gravidade esteja situado na reta que une os centros dos círculos osculadores, esta propriedade não o caracteriza. Outra propriedade que será abordada é que o centro de gravidade de um arco da espiral é o centro de homotetia dos círculos osculadores das extremidades do arco. Dessa forma, podemos determinar o seu centro de gravidade.

Para finalizar, mostraremos uma aplicação em rodovias, concluindo que a velocidade máxima sem derrapar de um veículo em uma estrada que possui o formato da Espiral de Euler, é inversamente proporcional a raiz quadrada de sua curvatura. Logo, conforme varia o comprimento de arco e quanto maior a curvatura em um ponto da estrada, menor terá de ser a velocidade do veículo.

Referências:

[1]LEVIEN, Raphael Linus. From Spiral to Spline: Optimal Techniques in Interactive Curve Design. 2009. 191f. Dissertação (Phd Thesis in techniques for interactive curve design) - University of California, Berkley - USA. PDF.

[2]CASTRO, R.L. A Espiral de Euler e suas principais propriedades. Monografia Pós-Graduação - Instituto de Ciências Exatas - ICEx, Departamento de Matemática, da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

[3]SOARES, M.G. Calculo em uma varíavel complexa:5.ed.Rio de Janeiro:IMPA.