Newton Modificado usando Busca Linear Inexata

Fillipe Rafael Bianek Pierin *
Bacharelado em Matemática - UFPR
bianekpierin@gmail.com

Prof. Abel Soares Siqueira (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
abel.s.siqueira@gmail.com

Palavras-chave: Otimização, Newton Modificado, Busca Linear Inexata.

Resumo:

A otimização é uma vertente da matemática para resolução de problemas, onde buscamos encontrar uma opção menos custosa dentre as disponíveis. Essa opção é chamada de minimizadores e maximizadores de uma função objetivo do problema em que se esteja analisando. Problemas de otimização podem ou não possuir restrições, da modelagem. Neste projeto discutimos o método de Newton e a sua modificação Newton Modificado, para problemas irrestritos.

O problema de minimização irrestrita consiste em

$$\min_x f(x),$$

em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com $f \in C^2$.

O objetivo deste projeto é entendermos o método de Newton, a busca linear inexata de Armijo e os motivos que levam a fazer mudanças no método de Newton para resolver diferentes tipos de problemas. Em seguida, fazemos a comparação do método de Newton Modificado com busca de Armijo com outros métodos:

- Newton "puro" vs Newton Modificado;
- Newton Modificado vs BFGS[1] com busca de Armijo;
- Newton Modificado com diferentes estratégias de atualização.

O método de Newton para o caso irrestrito é um método de otimização baseado na linearização da condição de otimalidade. Tem-se três variações deste método: Newton "puro", onde fixa-se $t_k = 1, \forall k \in \mathbb{N}$, uma em que fazemos busca exata, e outra

*Iniciação Científica.

[1] O nome do método BFGS, é uma sigla, que tem referência aos nomes dos criadores do método: Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno.

para busca inexata. Encontramos a direção d^k do método de Newton resolvendo o sistema.

$$\nabla^2 f(x^k)d^k = -\nabla f(x^k)$$

Em posse da direção, fazemos a busca na direção d^k. Neste projeto a busca inexata é feita pela condição de Armijo, em que se varia o parâmetro t_k para obter

$$f(x^k + t_k d^k) < f(x^k) + \alpha_k t_k \nabla^2 f(x^k)^T d^k,$$

onde $\alpha \in (0,1)$ é o parâmetro de Armijo e $t_k \in (0,1]$. Fazemos essa busca através do *backtracking*, em que encontramos a menor potência $t_k = \sigma^p, p = 0, \ldots, n$ que satisfaça a condição de Armijo.

A busca de Armijo com $backtracking$ só funciona se a matriz Hessiana $\nabla^2 f(x^k)$ for definida positiva. Para escapar desse problema, sugerimos a modificação da Hessiana $\nabla^2 f(x^k)$ por $B_k = \nabla^2 f(x^k) + \rho_k I$, com $\rho_k \geq 0$ escolhido de forma que B_k seja definida positiva. Esse método é chamado de método de Newton modificado.

Neste projeto buscamos encontrar ρ_k, que além de tornar a Hessiana definida positiva no método de Newton, melhore o desempenho do método de Newton Modificado tornando-o mais eficiente em termos de tempo para encontrar o minimizador e a quantidade de iterações para tal minimização.

No método de Newton Modificado, uma maneira para verificar se a matriz B_k é definida positiva, é usando a decomposição de Cholesky, pois esta só existe se a matriz é definida positiva. Neste projeto também implementamos a decomposição de Cholesky.

Referências:

RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. **Otimização Contínua: aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES V. L. d. R. **Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Markon Books Brasil, 1997.

WRIGHT, S.; NOCEDAL, J. **Numerical optimization**. Springer Science, v. 35, n 67-68, p. 7, 1999.