Resoluções de equações diferenciais ordinárias por séries de potências.

Felipe de Jesus Kutz
Licenciatura em Matemática - UTFPR
felipekutz@ymail.com

Prof. Dr. Márcio Rostirolla Adames (Orientador)
Departamento de Matemática - UTFPR
marcioadames@utfpr.edu.br

Palavras-chave: EDOs, Séries de Potências, Convergência Forte de Operadores.

Resumo:

Neste trabalho estudamos a solução de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes não constantes. Para resolver problemas deste tipo utilizamos métodos de séries de potências, em particular o método das derivadas sucessivas, de maneira alternativa a usual. Comparamos os resultados obtidos com métodos já conhecidos, obtendo resultados consistentes.

Consideramos o seguinte P.V.I

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x) \tag{1}$$

com $y(x_0) = k_1$ e $y'(x_0) = k_2$, k_1 e $k_2 \in \mathbb{R}$, e onde $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ e $g(x)$ são funções analíticas em $x = x_0$. Derivando a equação (1) sucessivamente e aplicando-a em $x = x_0$ obtemos:

$$\sum_{i=0}^{n} \left(i(i-1)a_{n-i} + ib_{n-1-i} + c_{n-2-i}\right) y_i \ = g_{n-2} \tag{2}$$

Se tivermos $g(x) = 0$, teremos o caso homogêneo, também se $a_0 \neq 0$, então

$$y_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i(i-1)a_{n-i}}{n(n-1)} + i\frac{b_{n-1-i}}{n(n-1)} + \frac{c_{n-2-i}}{n(n-1)} \right) y_i \tag{3}$$

Em seguida fizemos a implementação da equação (3) no Matlab, onde conseguimos comparar as soluções que nossa implementação fornece com outras que são geradas pela rotina ODE45 do Matlab.

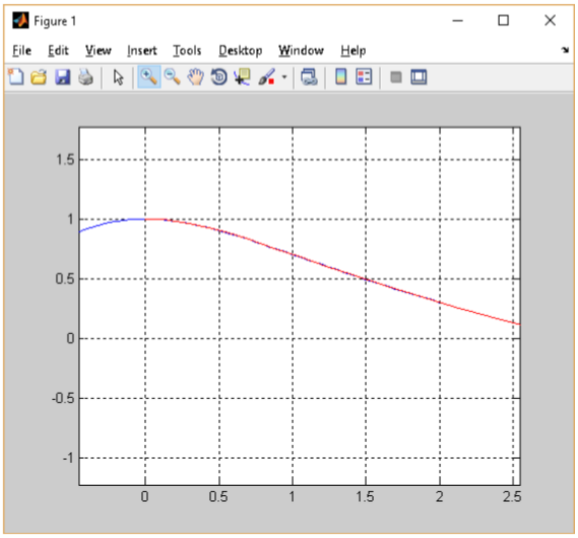

Figura 1: Soluções de $e^x y'' + y' sin(x) + y cos(x) = 0$ com $y(0) = 1, \ y'(0) = 0$

O caso mais interessante do P.V.I. (1) é aquele em que a solução é uma função analítica.

Se $a_0 = 0$ (o problema for singular), pode ser que a relação de recorrência (2) não seja possível de resolver (para o coeficiente de maior ordem, y_n) para alguns valores de n. Assim obtemos algumas restrições para a existência de uma solução analítica e/ou para restrições para a condição inicial.

Para este tipo de problema podem haver soluções múltiplas para o PVI. Por exemplo, encontramos numericamente múltiplas soluções para $x^2 y'' - 2xy' + (2 + x^2)y = 0$, com $y(0) = 0, \ y'(0) = 0$.

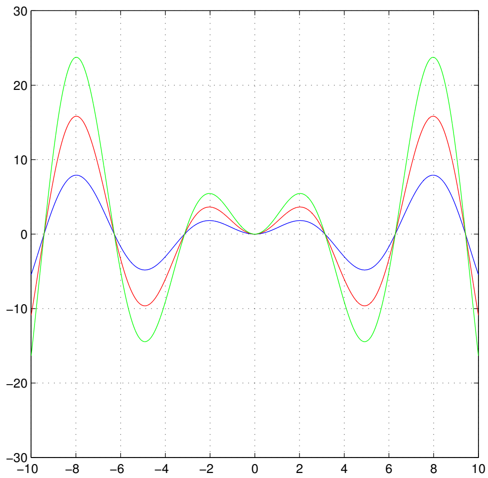

Figura 2: As soluções numéricas concordam com as obtidas analiticamente $y(x) = Cx\text{sen}(x)$.

Se for possível resolver a relação de recorrência podemos resolver a relação de recorrência obtendo

$$
\begin{aligned}
y_{n-k} =& \frac{g_{n-2}}{(n-k)(n-1-k)a_k + (n-k)b_{k-1} + c_{k-2}} \\
&- \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\left((n-k-i)(n-1-k-i)a_{i+k} + (n-k-i)b_{i+k-1} + c_{i+k-2}\right) y_{n-k-i}}{(n-k)(n-1-k)a_k + (n-k)b_{k-1} + c_{k-2}}.
\end{aligned}
$$

Os coeficientes assim gerados resolvem o PVI (1), *mesmo que o problema não seja singular regular*. Contudo, nesses casos, o raio de convergência é, necessariamente, pequeno. A Figura ilustra a situação.

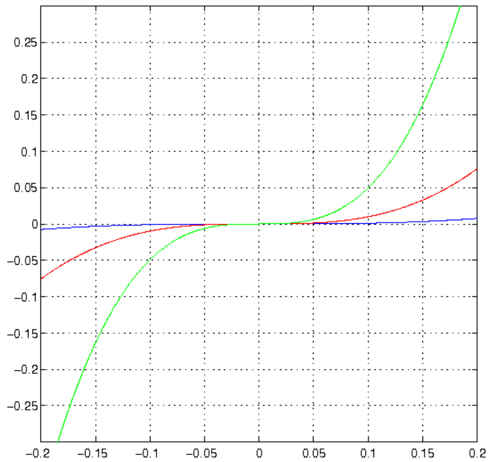

Figura 3: Soluções de $x^5y'' + 2x^2y'6xy = x^6$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Por fim enunciamos e provamos o teorema referente a convergência do método. Para isso escrevemos a relação de recorrência acima utilizando uma sequência de operadores lineares em ℓ^1 e utilizamos o Teorema da Convergência forte de operadores para provar sua convergência.

Referências

[1] ADAMES, Marcio R. **An alternative approach to the power series method**. *Preprint*, 2017.

[2] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno**. (7ª edição). LTC Editora. Rio de Janeiro, 2002.

[3] KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications.** New York: Wiley, 1989.

[4] STEWART, James. **Cálculo**. Vol. II. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

[5] TENENBAUM, Morris; POLLARD, Harry. **Ordinary differential equations: An elementary textbook for students of mathematics, engineering, and the sciences**. Courier Corporation, 1963.

[6] TESCHL, Gerald.**Ordinary Dierential Equations and Dynamical Systems.** Vol. 30. American Mathematical Society, Rhode Island, 2011.