

Transformação do Gato de Arnold

Bianca Elena Wiltuschnig *
Bacharelado em Matemática - UFPR
bianca.elena.w@gmail.com

Prof.^a Dr.^a Paula Rogéria Lima Couto (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
paulacouto@ufpr.br

Prof.^a Dr.^a Ailin Ruiz de Zarate Fabregas (Coorientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
ailin@ufpr.br

Palavras-chave: Transformação do Gato de Arnold, Sequência de Fibonacci, Operação módulo N , Período da transformação.

Resumo:

O objetivo desse trabalho é estudar a Transformação do Gato de Arnold e a sua periodicidade em relação a um conjunto de pontos (x, y) que formam uma imagem. A Transformação do Gato de Arnold propriamente dita é dada por:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{N},$$

onde (\tilde{x}, \tilde{y}) será a nova posição do ponto (x, y) sobre o qual é aplicada a transformação. Restringimos x e y aos inteiros $0, 1, \dots, N - 1$ e efetuamos as operações de adição e multiplicação módulo N . Com essa definição, a transformação atua em pontos, e queremos aplicá-la em uma imagem. Para isso, começamos com uma imagem em preto e branco dividida em $N \times N$ quadrados discretos chamados pixels, e, posicionando-a no plano xy , podemos analisá-la como sendo uma associação de cores aos pontos do plano.

Aplicando a Transformação do Gato de Arnold repetidas vezes a todos os pontos (x, y) que formam a imagem, a tendência à desordem é iminente. Porém a configuração inicial retornará em algum momento, porque a transformação é bijetora e há $2^{N \times N}$ possíveis configurações dos $N \times N$ pixels, nas quais cada pixel é preto ou branco. Se um pixel retorna à sua posição inicial depois de m aplicações da transformação do

*Bolsista do Programa PET-Matemática.

gato de Arnold, mas não retorna com menos do que m aplicações, dizemos que o pixel tem período m . Para a imagem formada por $N \times N$ pontos de pixel, denotamos por $\Pi(N)$ o menor número inteiro que é um múltiplo comum de todos os períodos de todos os pontos de pixel do mapa. Segue que o mapa de pixels retorna à sua posição inicial em $\Pi(N)$ iterações da transformação do gato de Arnold (mas não antes). Por esse motivo, $\Pi(N)$ é chamado de período do mapa de pixels, e está fortemente relacionado ao número de pixels N .

Iterando a Transformação do Gato de Arnold em um ponto (x, y) , conseguimos observar uma relação entre os termos da Sequência de Fibonacci e a matriz da n -ésima iteração da transformação. A partir de propriedades dos termos da sequência de Fibonacci, conseguimos obter alguns resultados para restringir o período da transformação em função de N .

Referências:

DYSON, F. J.; FALK, H. **Period of a Discrete Cat Mapping**. The American Mathematical Monthly, v. 99, n. 7, p. 603-614, ago./set. 1992.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2001.