Estudo de Sistemas Dinâmicos no Ensino Médio: O Mapa Logístico e o Modelo Brusselator

Bernardo Ramos de Godoy *
Técnico em Petróleo e Gás integrado ao Ensino Médio - UFPR
bernardo.godoy@ufpr.br

Prof[a]. Janaina Schoeffel (Orientadora)
Setor de Educação Profissional e Tecnológica - UFPR
janainaschoeffel@ufpr.br

Palavras-chave: sistemas dinâmicos, Mapa Logístico, Modelo Brusselator.

Resumo:

A teoria dos sistemas dinâmicos estuda processos iterativos não estáveis, com estados que mudam com o tempo. Esses sistemas possuem aplicações em áreas como química, física, economia e biologia, entre outras. O objetivo deste trabalho é identificar aplicações da teoria de funções, vista no ensino médio, e do cálculo diferencial, na análise de sistemas dinâmicos, bem como identificar aplicações dessa teoria em áreas associadas aos conteúdos técnicos estudados no curso Técnico em Petróleo e Gás.

A partir de uma extensa revisão bibliográfica sobre o cálculo diferencial e o estudo de alguns conceitos básicos de sistemas dinâmicos (órbita, ponto fixo, ponto/órbita periódica, conjunto estável, retrato de fase e classificação dos pontos fixos atratores e repulsores), realizou-se o estudo de um primeiro exemplo, a saber, o famoso Mapa Logístico

$$F_\mu(x) = \mu x(1-x), \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $\mu > 0$, que é um sistema dinâmico discreto que foi proposto como modelo para a dinâmica populacional de insetos, estando x associado ao número de indivíduos, e μ à taxa de crescimento da população.

Os primeiros cálculos realizados foram para identificar os pontos fixos do Mapa, conforme a variação do parâmetro μ. Independente do valor de $\mu > 0$, os únicos pontos fixos são 0 e $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$, entretanto o comportamento das órbitas varia com μ (ver figura 1):

- $0 < \mu < 1 \Rightarrow$ O ponto fixo 0 é atrator e p_μ é repulsor.

  O conjunto estável de 0 é $W^s(0) = \left(p_\mu, F_\mu^{-1}(p_\mu)\right)$;

*Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica para o Ensino Médio do CNPq.

- $1 < \mu < 3 \Rightarrow$ O ponto fixo 0 é repulsor e p_μ é atrator.
  O conjunto estável de p_μ é $W^s(p_\mu) = (0, 1)$;
- $\mu > 3 \Rightarrow$ Ambos os pontos fixos 0 e p_μ são repulsores.

Paralelamente ao estudo algébrico foram contruídos os retratos de fase no software Geogebra, que ajudaram a entender o comportamento dinâmico das órbitas (ver figura 2),

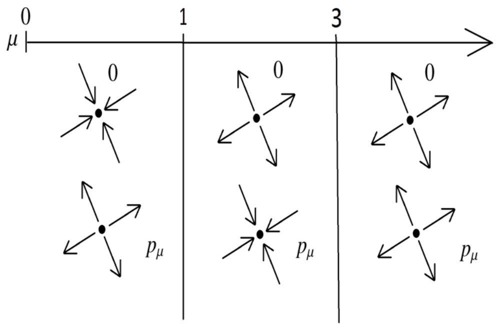

Figura 1: Pontos fixos

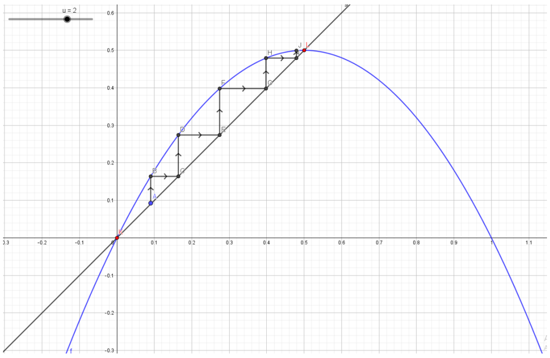

Figura 2: $\mu = 2$

bem como ensaios numéricos com programas de planilhas. Percebeu-se a partir daí que, para $\mu > 3$ (caso em que ambos os pontos fixos são repulsores), surge uma órbita periódica atratora de período 2 (ver figura 3), cujos pontos periódicos que a compõe são dados pela expressão

$$x = \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3} \pm \mu + 1}{2\mu}. \tag{2}$$

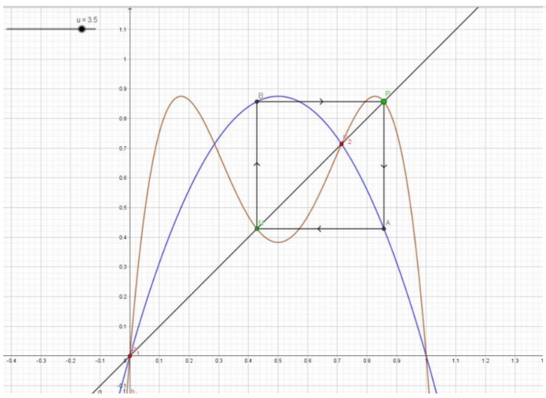

Figura 3: $\mu = 3,5$

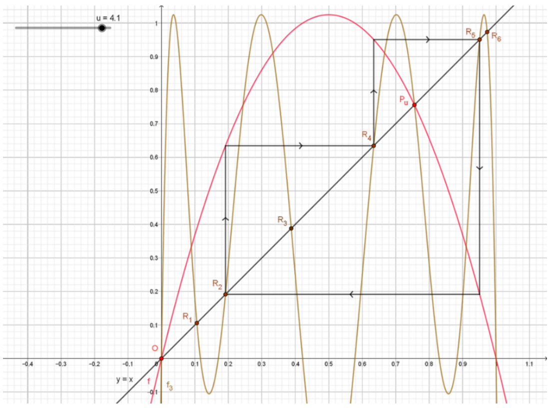

Figura 4: $\mu = 4,1$

Aumentando ainda mais o valor μ foi possível observar numericamente o aparecimento de órbitas de período 3 e 4, entretanto, por conta do alto grau do polinômio envolvido no cálculo desses pontos periódicos, não foi mais possível obter expressões gerais para os mesmos e recorreu-se ao programa de computação algébrica *Maxima* a fim de se obter os valores dos pontos periódicos para valores específicos de μ(ver figura 4).

Desse modo, foi possível observar como a complexidade da dinâmica do modelo aumenta, apesar de sua fórmula simples, levando ao caos, comportamento que fica evidente ao se observar o diagrama de bifurcações completo.

Na sequência buscou-se aplicar a mesma teoria para o estudo do Modelo Brusselator, que descreve uma reação química trimolecular abstrata dada por $A+B \to C+D$. Essa reação ocorre em 4 etapas

$$\begin{cases} A \overset{k1}{\to} X \\ 2X + Y \overset{k2}{\to} 3X \\ B + Y \overset{k3}{\to} Y + C \\ X \overset{k4}{\to} D, \end{cases} \tag{3}$$

em que os reagentes A e B formam os produtos C e D, com a presença dos elementos intermediários X e Y.

A dinâmica das concentrações dos elementos intermediários pode ser descrita pelas equações, já discretizadas:

$$\begin{cases} f(x,y) = A + x^2 y - Bx \\ g(x,y) = Bx - (x^2 - 1)y, \end{cases} \tag{4}$$

onde x, y são as concentrações adimensionalizadas dos metabólitos da reação e A, B são os parâmetros da reação adimensionalizados.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} f(x,y) = x \\ g(x,y) = y \end{cases}$ obtém-se o ponto fixo $(x_0, y_0) = \left(B, \dfrac{B}{A}\right)$. Os cálculos necessários para classificar o ponto fixo envolve conceitos de álgebra linear e fornecem que

- O ponto fixo (x_0, y_0) é atrator para $B < A^2 + 1$;
- O ponto fixo (x_0, y_0) é repulsor para $B > A^2 + 1$;

revelando uma bifurcação no comportamento do fenômeno.

Referências:

DEVANEY, R. L. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. 2a edição. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática Completa**. São Paulo: FTD, 2005.

KANG, H. **Dynamics of local map for a discrete brusselator model**. 67 f. Tesis (Doctor of Philosophy) - Department of Mathematics, The Pennsylvania State University, State College, 2007.

LAVROVA, A. I.; POSTNIKOV, E.B.; ROMANOVSKI, Yu M. Brusselator: an abstract chemical reaction?. **Physics – Uspeckhi**, v. 52, n. 12, p. 1239- 1244, 2009.

PRIGORIE, I.; LEFEVER, R. Symmetry Breaking Instabilities in Dissipative Systems. II. **The Journal of Chemical Physics**, v. 48, n. 4, p. 1695-1700, fev. 1968.

VAIDYNATHAN, S. Dynamics and Control of Brusselator Chemical Reaction **International Journal of ChemTech Research**, v. 8, n. 6, p. 740-749, set. 2015.