Sistemas Dinâmicos em Superfícies: Densidade, Periodicidade e Invariância.

Marla Rodrigues de Oliveira
Licenciatura em Matemática – UFPR
marla_rodriguesdeoliveira@hotmail.com

Prof. Eduardo Hoefel
Departamento de Matemática – UFPR
eduardo.hoefel@gmail.com

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Densidade e Periodicidade.

Resumo:

Inicialmente com o projeto abordaremos a principio apenas conceitos fundamentais da teoria de Sistemas Dinâmicos. De tal maneira que esclareça o assunto para utilizarmos mais tarde em Sistemas Dinâmicos em superfícies. Um Sistema Dinâmico é uma função f tal que $f: X \rightarrow X$ e a dinâmica, a passagem do tempo, é vista como sendo a iteração dessa função. No caso de sistemas dinâmicos em **N**, onde **N** é o conjunto dos números naturais, ou seja, $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ é o foco principal para analisar neste trabalho.

A propósito, o objetivo é estudar a evolução no tempo de um ponto x, ou seja, o conjunto formado pelas imagens de x pelas iterações da função. Isso é exatamente a órbita de um determinado ponto. Dizemos que um conjunto $B \subseteq X$ é um atrator para um ponto x se é um conjunto invariante por f e a órbita de x se aproximar dos pontos B, se caso a orbita de x entrar nesse conjunto não poderá mais sair. O conjunto dos pontos em que a órbita se aproxima desse conjunto é chamado de bacia de atração de B. Também tem o caso do repulsor que é uma noção de inversa ao atrator. A bacia de atração de B pode ter dois casos, o caso em que a $B=X$ sendo X um conjunto finito, todos os pontos de x são atraídos pela órbita periódica ou, então, B é diferente do conjunto X, ou seja, a órbita futura de um ponto y não pode estar na bacia de atração. Esta ideia aparentemente simples desempenhou um papel importante para clarificar um dos teoremas da referência utilizada. Dizemos que um conjunto $R \subseteq X$ é um repulsor se $f^{-1}(R)=R$ e, para todo ponto $x \in X$, a orbita de x se aproxima de R mas no "passado",ou seja, os pontos da forma $f^{-k}(x)$ se aproximam de R.

Neste trabalho analisaremos em especial os conceitos de Densidade, Periodicidade e Invariância. Quanto à densidade, analisaremos dois tipos de órbitas: densas e estritamente densas. Órbitas densas são aquelas que possuem todos os naturais e órbitas estritamente densas são aquelas que são densas e sem repetição. Logo após faremos um estudo comparativo entre essas órbitas. Para uma transformação ter órbita densa, é preciso que seja conjugada a alguma translação $t: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, onde $T(n)=n+1$. No que diz respeito à periodicidade, dizemos que um ponto x é periódico de período l quando $f^{k}(x)=f^{k+l}(x)$ para todo k pertencente aos naturais. Para pontos periódicos, suas órbitas são conjuntos finitos, conhecidos como órbitas periódicas. Dado um conjunto A, dizemos que A é um conjunto invariante quando

f(A)=A, um exemplo de conjunto invariante são dadas pelas órbitas, pois toda órbita é um conjunto invariante. Neste trabalho estudaremos os problemas quanto à existência, ou não, de órbitas periódicas e conjuntos invariantes que um dado sistema dinâmico pode admitir.

Mais tarde, utilizando conceitos sobre Sistemas Dinâmicos estudaremos um pouco sobre espaços topológicos mais precisamente como um sistema dinâmico se comporta sobre uma superfície topológica. Nesse trabalho, estudaremos inicialmente os aspectos teóricos e posteriormente visualizaremos os conceitos através de exemplos de sistemas dinâmicos envolvendo superfícies. As demonstrações têm um cargo muito relevante. Por isso, deixaremos mais claras as demonstrações do livro utilizado afim de obtermos uma melhor compreensão do que está sendo visto. E assim, conectar exemplos com as demonstrações.

Referência:

BARAVIEIRA, A.;BRANCO, F. M. *Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão*, Instituto de Matemática – UFRGS. Disponível em: <http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SU-2.02.pdf> Acesso em: 08/2014.