Decomposição de Trem para tensores

Wilian de Oliveira
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
wildeolivera@gmail.com

Prof. Yuan Jin Yun (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
yuanjy@gmail.com

Palavras-chave: Tensor, SVD , Tensor trem, TT decomposição,CUR, posto.

Resumo:

O uso de tensores (ou matrizes d-dimencionais) tem aparecido em diversas áreas da matemática como, por exemplo, problema de tratamento de imagem, integração numérica múltipla, big data e métodos de otimização baseado nas séries de Taylor. Porém, nestes casos não se trunca a série na segunda ordem para se criar o método.

Nestes exemplos teremos tensores d-dimensionais onde d pode ser um número muito grande e relativamente complicado abordar estes problemas diretamente. Para contornar essa situação faz-se o uso de decomposições tensoriais, da mesmo forma que se faz com matrizes usando a decomposição SVD, LU ou a decomposição QR, por exemplo.

O objetivo é demonstrar a decomposição de trem para tensores (Tensor train decomposition) e duas outras formas de se aproximar esta decomposição obtendo assim custos computacionais diferentes

A decomposição TT pode ser obtida a partir de uma sequência de decomposições SVD feitas nas matrizes de desdobramento do tensor original.

Seja $\mathcal{A}$ um tensor d-dimensional, então

$$\mathcal{A} = \sum_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_d} G_1(i_1, \alpha_1)G_2(\alpha_1, i_2, \alpha_2) \ldots \ldots G_{d-1}(\alpha_{d-2}, i_{d-1}, \alpha_{d-1})G_d(i_d, \alpha_d).$$

A forma de se obter esta decomposição e, assim, os tensores G_i é se fazer uma sequência de desdobramentos matriciais do tensor original, por conseguinte fazer a decomposição SVD destes tensores, e, por fim, novamente se fazer o dobramento matricial obtendo os tensores G_i.

A partir deste ponto pode-se ao invés de se fazer a decomposição SVD completa para as matrizes de desdobramento, se faz o truncamento da decomposição SVD obtendo assim a melhor aproximação de posto-r para estas matrizes. Deste modo, do procedimento anterior obtém-se uma boa aproximação para o tensor original com um erro de truncamento que pode ser estimado.

A segunda forma de se aproximar a decomposição de trem segue do fato de que a decomposição SVD não é tão barata computacionalmente. Ainda se tem que as matrizes U dadas pela decomposição SVD no geral tendem a ser matrizes cheias e isso pode ser um problema para o nosso custo de armazenamento de memória.

A forma de contornar esse novo problema é substituir a decomposição SVD da aproximação feita anteriormente pela decomposição CUR. Esta nova decomposição por sua vez possui um custo de armazenamento muito menor e isto é bastante vantajoso para as aplicações em geral.

Referências

[1] W. Hackbusch. *Tensor spaces and numerical tensor calculus*, volume 42. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] M. W. Mahoney and P. Drineas. Cur matrix decompositions for improved data analysis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, pages pnas–0803205106, 2009.

[3] N. Mitrovic, M. T. Asif, U. Rasheed, J. Dauwels, and P. Jaillet. Cur decomposition for compression and compressed sensing of large-scale traffic data. In *Intelligent Transportation Systems-(ITSC), 2013 16th International IEEE Conference on*, pages 1475–1480. IEEE, 2013.

[4] I. Oseledets and E. Tyrtyshnikov. Tt-cross approximation for multidimensional arrays. *Linear Algebra and its Applications*, 432(1):70–88, 2010.

[5] M. A. O. Vasilescu and D. Terzopoulos. Tensortextures: Multilinear image-based rendering. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 23(3):336–342, 2004.