

# Modelagem de um vaso sanguíneo com sistema de equações diferenciais parciais

Lucas Seiffert \*

Bacharelado em Matemática - UFPR

*lucas.seiffert@ufpr.br*

Prof. Yuan Jin Yun (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

*jin@ufpr.br*

**Palavras-chave:** formulação ALE, interação fluido-estrutura, mecânica do contínuo.

## Resumo:

A construção de modelos matemáticos para o sistema circulatório humano permite o uso de simulações computacionais no estudo ou intervenção de enfermidades cardiovasculares. Por exemplo, simulações podem influenciar o planejamento de cirurgias para aterosclerose ou aneurismas, indicando como será afetado o fluxo sanguíneo na região a ser operada.

Entretanto, o funcionamento de vasos e fluxos sanguíneos é complexo, no sentido de envolver interações químicas, biológicas e multifísicas. Neste trabalho, estudamos um modelo proposto em [1], que pode ser utilizado em vasos sanguíneos largos como a aorta. Trata-se de um sistema não-linear de equações diferenciais parciais, com foco na interação fluido-estrutura, formada pelo sangue (fluido), a parede do vaso sanguíneo (estrutura elástica) e a interface de acoplamento. O domínio computacional de interesse é uma porção do vaso sanguíneo.

Para o sangue, é utilizado o modelo de fluido Newtoniano incompressível [2]. Isso significa que tratamos o sangue como fluido homogêneo, uma simplificação possível pois a dimensão do vaso sanguíneo é muito maior que o tamanho das partículas do sangue. Além disso, levamos em conta a viscosidade do sangue, embora com a simplificação de que o coeficiente de viscosidade independe da tensão aplicada ao fluido.

Com relação à formulação utilizada no estudo do fluido, temos que nem a Lagrangeana ou Euleriana são convenientes para esta modelagem. No caso da Lagrangeana, teríamos que acompanhar os elementos materiais do fluido por todo o trajeto pelo organismo. Já na formulação Euleriana, o fato da estrutura elástica modificar o domínio computacional dificulta a imposição da condição de bordo na interface do fluido com a estrutura. Por isso, utilizamos a formulação Lagrangeano-Euleriana

---

\*Bolsista de Iniciação Científica do CNPq

Arbitrária (ALE em inglês), em que o domínio computacional tem velocidade independente dos elementos materiais do fluido. Esta abordagem adiciona outro termo não-linear ao sistema de equações diferenciais, mas simplifica o acoplamento.

Para a estrutura elástica, considera-se que o vaso sanguíneo é constituído de material isotrópico, ou seja, que a resposta do material a uma tensão independe da direção em que ela é aplicada. Além disso, o material é hiperelástico, de modo que responde a uma lei de Hooke generalizada. As equações para esse material são dadas pelo modelo de elasticidade de Saint Venant-Kirchhoff [3] e da conservação de momento linear e massa, na formulação Euleriana.

O acoplamento é dividido em três condições sobre a interface entre o fluido e o material elástico. Na primeira, chamada de geométrica, consideramos que a velocidade dos pontos do domínio computacional é uma extensão (por exemplo, harmônica) da velocidade da estrutura na interface. Assim, obtemos que o domínio do fluido segue o movimento da estrutura. As outras duas condições são chamadas de condições de continuidade. Devido à viscosidade do fluido, as partículas que estão em contato com a estrutura aderem a ela, de modo que a velocidade dos elementos materiais do fluido coincide com a da estrutura na interface. A última condição é a do balanço das tensões, de modo que a tensão que o fluido aplica na estrutura é a mesma, em direção contrária, que a estrutura exerce sobre o fluido.

Consideramos também que o vaso sanguíneo é um sistema isolado, de modo que não há tensões nas paredes de fora da estrutura. Por fim, a obtenção das condições de bordo de entrada e saída do fluido do vaso sanguíneo é considerada um problema em separado. Ela pode ser feita por meio de exames do paciente a ser estudado ou por meio de um modelo mais simplificado do sistema circulatório que fornece dados aproximados para a região a ser simulada.

## Referências:

- [1] FORMAGGIA, L.; QUARTERONI, A.; VENEZIANI, A. (Ed.). **Cardiovascular Mathematics**: Modeling and simulation of the circulatory system. Milan: Springer Science & Business Media, 2010.
- [2] BATCHELOR, G. K. **An introduction to fluid dynamics**. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2000.
- [3] CIARLET, P. G. **Mathematical elasticity**. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1988. v. 1: Three-dimensional elasticity.