Interpolação Racional na Forma Baricêntrica

Gabriel Mendes Simoni *
Bacharelado em Engenharia Eletrônica - UTFPR
gabriel.m.s.1997@hotmail.com

Prof. Dra. Denise de Siqueira (Orientadora)
Departamento Acadêmico de Matemática - UTFPR
denisesiq@gmail.com

Palavras-chave: Interpolação racional, forma baricênctrica, interpolantes de Floater.

Resumo:

Introdução

Métodos de interpolação são úteis na resolução de diversos problemas da matemática computacional como integração e diferenciação numérica, solução numérica de equações diferenciais, entre outros. Neste contexto, um método amplamente estudado é a interpolação polinomial, devido, principalmente, à sua simplicidade. No entanto, é sabido que esta estratégia pode apresentar instabilidade em algumas situações. Exemplo disso é o conhecido fenômeno de Runge, em que ao tentar aproximar algumas funções com comportamento de decaimento nas extremidades do intervalo, o erro do método de interpolação polinomial cresce drasticamente(BURDEN; FAIRES, 2011). Uma possível solução para esse problema é a utilização dos pontos de Chebyshev na interpolação (TREFETHEN, 2000). No entanto, o que fazer se não for possível escolher arbitrariamente os pontos de interpolação? Nesse caso, a interpolação racional é uma alternativa.

O problema de interpolação racional

A interpolação racional consiste em: dado um conjunto de pontos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, i = 0, ..., N$, encontrar $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ com $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios de ordem n e m, respectivamente, tais que $n + m = N$ e $R(x_i) = \dfrac{P(x_i)}{Q(x_i)} = y_i$ para todo $i = 1, \cdots, N$, ou seja, $P(x_i) - Q(x_i)y_i = 0$, $i = 0, 1, ...N$.

No entanto, a resolução do sistema homogêneo não garante que a função racional encontrada interpole os dados. Para ilustrar este fato considere o conjunto de pontos

*Bolsista do PICME.

$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ e $(4, 2)$, cuja solução do sistema homogêneo fornece $R(x)$ como ilustrado na Figura 1. Neste caso a função racional não interpola o ponto $(3, 1)$, o que o caracteriza como um *ponto inacessível* (STOER; BULIRSCH, 1992). Além disso, a interpolação racional encontrada apresentou um pólo entre $x = 2$ e $x = 3$.

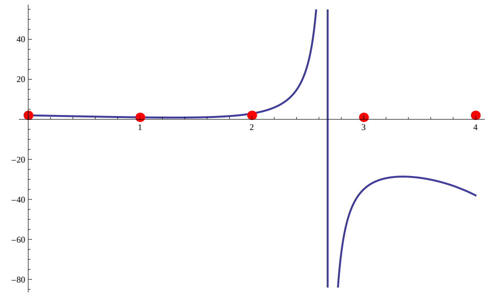

Figura 1: Presença de pólos e pontos *incessíveis*

Para resolver este problema (BERRUT et al., 2005) propôs um interpolante racional escrito na forma baricêntrica, que mais tarde foi estendido por (FLOATER; HORMANN, 2006) numa família de interpolantes racionais dados por

$$r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x) p_i(x)}{\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x)} \quad \text{com } \lambda_i(x) = \frac{(-1)^i}{(x - x_i) \cdots (x - x_{i+d})}, \tag{1}$$

em que $d = 0, \cdots, n$ e $p_i(x)$ é o único polinômio de grau no máximo d que interpola (x_i, y_i) em $d + 1$ pontos $(x_i, y_i)\,(x_{i+1}, y_{i+1}), \cdots, (x_{i+d}, y_{i+d})$. O caso $d = 0$ se reduz ao interpolante de Berrut.

Observe que os polinômios $p_i(x)$ desempenham um papel de *blending*, ou seja, funções que "colam"com o intuito de interpolar todos os pontos. Além disso, para $d = n$ o interpolante de Floater se resume à interpolação polinomial usual.

Neste contexto, o objetivo de médio prazo deste trabalho é testar o desempenho dos interpolantes de Floater para diferentes valores do parâmetro d, fazer uma análise quantitativa do erro e além disso utilizar este tipo de interpolante em métodos de colocação para aproximar soluções de Equações Diferenciais Ordinárias.

Até o presente momento, o que se fez foi um estudo do desempenho dos interpoladores de Floater considerando a aproximação da função logística $f(x) = \dfrac{2}{1 + e^{-x}}$ no intervalo $[-10, 10]$ por meio da interpolação com 10 pontos igualmente espaçados. A Figura 2 ilustra a aproximação da função para diferentes valores do parâmetro d. Observe que para $d = 2$ obtém-se uma boa aproximação. No entanto, para $d = 7$ a aproximação não é boa, pois se aproxima muito da interpolação polinomial usual.

Conclusão

A utilização de um interpolante polinomial nem sempre oferece bons resultados e a escolha dos pontos de interpolação são fundamentais para este tipo de abordagem. Quando não se tem a liberdade da escolha da localização dos pontos de interpolação a interpolação racional pode ser uma alternativa. Em particular, os interpoladores racionais de Floater oferecem a liberdade de escolha dos pontos além de se poder escolher o parâmetro d que melhor se adeque ao conjunto de dados. A análise de erro mediante a variação deste parâmetro bem como a aplicação deste tipo de interpolante

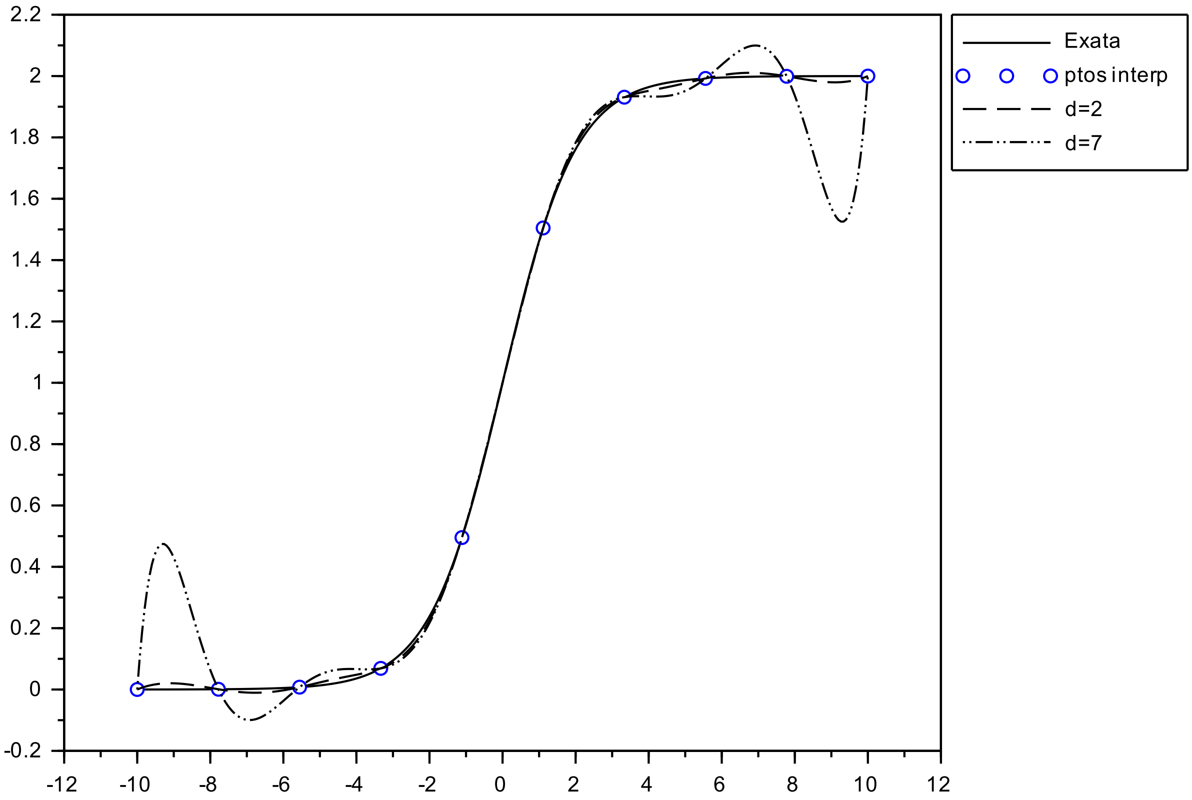

Figura 2: Interpolação racional de Floater.

na resolução numérica de equações diferenciais ordinárias são as próximas etapas deste trabalho.

Referências

BERRUT, J.; BALTENSPERGER, R.; MITTELMANN, H. D. Recent developments in barycentric rational interpolation. **International Series of Numerical Mathematics**, v. 1, 2005.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. [S.l.]: Richard Stratton, 2011.

FLOATER, M. S.; HORMANN, K. Barycentric rational interpolation with no poles and high rates of approximation. **Ifl Technical Report Series**, 2006.

STOER, J.; BULIRSCH, R. **Introduction to Numerical Analysis**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1992.

TREFETHEN, L. N. **Spectral Methods in MatLab**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathemetics, 2000.