
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor: Prof. Dr. Cleber de Medeira

Estudantes:

Amanda Maciel de Oliveira
Brenda Dal Puppo Monteiro
Gabrieli Kmiecik
João Gabriel Chiorato
Kevyan Uehara de Moraes
Laura Carolina Aymore Ferrandin
Leonardo Cortez do Nascimento
Mahmut Telles Cansiz
Mariana da Silva Freitas
Matheus Kinceski Pires
Monique Baptista Fragozo
Natalia Chicora
Nil Vinícius Gonçalvez de Carvalho
Samuel Adam Trindade de Souza
Thais Spannenberg Machado dos Passos
Thiago Batista dos Santos Martins

Site: www.petmatematica.ufpr.br

Telefone: (41) 3361-3672

Data do Evento: 09 a 11 de Novembro de 2022

Local de Realização: EQ - Bloco de Engenharia Química
Centro Politécnico - UFPR

Curitiba, outubro de 2022.

Caderno de Resumos - J3M

6º Edição - 2022
PET-Matemática

Sumário

Apresentação	viii
1 Álgebra	1
Elementos primos e elementos irredutíveis do anel \mathbb{Z}_n	
<i>Aline Kowalski</i>	2
Sequências Espectrais	
<i>Fernando Augusto de Lima Filho</i>	4
O problema de Hurwitz e a classificação das álgebras de composição	
<i>Isac Messias Michelon</i>	6
Classificação das representações indisponíveis de qui- vers euclidianos a partir do seu defeito	
<i>Kevyan Uehara de Moraes e Lucas Cabral Port</i> .	8
Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt para \mathfrak{sl}_2	
<i>Matheus Kinceski Pires</i>	10
Tetração como Operação nos Números Reais: Estudo de Propriedades e Definições	
<i>Saulo Minatti Andrade</i>	11
Introdução às Representações de Quiver	
<i>Thiago Batista dos Santos Martins</i>	13
A caracterização dos polígonos regulares construtíveis: uma abordagem por meio da teoria de corpos	
<i>Eduardo Magalhães de Castro</i>	16
Álgebras de Caminhos de Leavitt	
<i>Vinícius Marcondes Pereira</i>	18

As Estruturas de Álgebras e Módulos em Categorias Monoidais	21
<i>Vinícius Scussel Accordi</i>	
2 Análise Matemática e Equações Diferenciais	24
Modelo de Lotka-Volterra e Controlabilidade Matemática	
<i>Adriana Washington Henarejos</i>	25
Estabilidade local em modelo neuronal	
<i>João Vitor Vieira Flauzino</i>	28
Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensões 1 e 2	
<i>Jhuliene Cristina Seger</i>	31
Somatórios fracionários: como somar uma quantidade não natural de termos	
<i>Leonardo Ferreira</i>	33
Órbitas periódicas e ergódicas no Toro	
<i>Letícia Rodrigues dos Santos</i>	36
Soluções Viajantes para a Equação de Sine-Gordon	
<i>Luana Bankersen</i>	37
Hipoeliticidade Global de campos vetoriais em \mathbb{T}^2	
<i>Mahmut Telles Cansiz</i>	40
Aplicação de Modelos Clássicos para o Estudo do Crescimento da População Brasileira	
<i>Mariana da Silva Freitas</i>	42
Fractais e suas belezas	
<i>Matheus Bueno Bartkevicius</i>	44
Introdução ao cálculo de ordem não inteira	
<i>Nicoly Longaretti de Souza</i>	46
Introdução à controlabilidade de Equações Diferenciais Ordinárias com aplicações	
<i>Nicoly Longaretti de Souza</i>	49
Dinâmica Estrutural: Uma aplicação da Função de Green	
<i>Victor Antônio Lima do Nascimento</i>	52

3 Análise Numérica	53
Tomografia por Impedância Elétrica (EIT): Modelo Contínuo e Modelo Completo de Eletrodos <i>Felipe K. Riffel, Samuel B. Mendes e Lucas M. Santana</i>	54
Modelo matematico para a dinâmica imunológica celular incluindo células dendríticas <i>Milene Karine Gubetti</i>	57
4 Educação Matemática	60
Estudo de Trigonometria através de materiais concretos <i>Alexandre Ruteski, Bianca de Assis Natal, Brenda Dal Pupo Monteiro, Danyele Gorges Castanha e Leonardo Angelo Rigo</i>	61
Semana da Matemática <i>Amanda Maciel De Oliveira, Brenda Dal Pupo Monteiro, Laura Carolina Aymoré Ferrandin, Thais Spannenberg Machado Dos Passos e Natalia Chiconra</i>	64
Os saberes matemáticos empíricos dos pescadores <i>Barbara da Silva Ribeiro Gonçalves</i>	65
Propondo ações para a transição Ensino Médio-Ensino Superior nas disciplinas de Matemática dos cursos de Ciências Exatas e Técnologia <i>Beatriz Borba Guergolet</i>	69
Educação Financeira na Educação Básica: histórico e novas perspectivas <i>Bruna Teixeira Claro</i>	71
O livro didático de Matemática do Ensino Fundamental e a Sociedade <i>Bruno Mielke Schwartsburd</i>	74

Modelagem Matemática e o Supermercado: operações com números decimais utilizando lista de compras <i>Camila Costa de Oliveira e Talita Ferreira da Silva Bruguer</i>	76
POTI/TOPMAT – Nível 1: Uma experiência acadêmica <i>Carolina Pereira Lejambre, Isabele Andrade Vichnieski, Natalia Chicora e Thais Spannenberg Machado dos Passos</i>	79
Criptografias no Ensino da Matemática. <i>Clara Machado Juliatto, Júlia Villwock Gomes de Oliveira, Monique Baptista Fragozo e Raquel Rocha</i>	81
O Projeto de Extensão Matematicativa em 2022 <i>Clara Machado Juliatto, Júlia Villwock Gomes de Oliveira, Monique Baptista Fragozo, Raquel Rocha e Tayná dos Santos de Carvalho</i>	85
POTI/TOPMAT: Formação Matemática de alto nível para alunos de ensino fundamental e médio <i>Dyckson Ternoski, Fernanda de Oliveira de Jesus, Gabriela Fernanda Bundza, Izabella Calais Fernandes, Kaiky Yuji Ishiy, Leonardo Gonçalves Fischer, Mahmut Telles Cansiz e Marcel Thadeu de Abreu e Souza</i>	87
O ensino da multiplicação e divisão simples no 6º ano do Ensino Fundamental <i>Higor Afonso Cândido Pinto</i>	89
O Projeto de Extensão Caminhos Olímpicos na Matemática (COM) em 2022 <i>Hiroshi Caled Tashiro Ascorbe, Leonardo de Souza Beraldi, Lucas Gabriel Naldony, Mouses Robert Nascimento Loyola, Nayara Letícia Monteiro Rodrigues e Carlos Cesar de Carvalho Covo</i>	92

bell hooks: um referencial capaz de transgredir a sala de aula de matemática	
<i>Jéssica Gomes Furtado e Nathalie Aparecida Felicetti Luvison</i>	94
Aplicação de quebra-cabeças geométricos no Matemática	
<i>Clara Machado Juliatto, Júlia Villwock Gomes de Oliveira, Monique Baptista Fragozo e Raquel Rocha</i>	97
A Etnomatemática presente nas <i>contas de roça</i>	
<i>Nathalie Aparecida Felicetti Luvison</i>	100
Brincando de Matemático: Uma experiência de Ensino e Aprendizagem	
<i>Nil Vinícius Gonçalves de Carvalho, Mariana da Silva Freitas, Kevyan Uehara de Moraes, Matheus Kinceski Pires, Amanda Maciel Oliveira, Brenda Dal Puppo Monteiro, Gabrieli Kmiecik, João Gabriel Chiorato, Laura Carolina Aymoré Ferrandin, Leonardo Cortez, Luana Bankersen, Mahmut Telles Cansız, Mariana da Silva Freitas, Monique Baptista Fragozo, Natalia Chicora, Samuel Adam de Souza e Thais Spannenberg Machado dos Passos</i>	103
Considerações sobre o uso da linguagem matemática e atuação docente: um relato de experiência em estágio supervisionado	
<i>Samara Ortiz</i>	105
Educação Financeira no Ensino Fundamental: propostas e saberes na perspectiva histórica	
<i>Willian Hideki Batista Alves Yotsumoto</i>	108
5 Geometria e Topologia	111
Transformações de Möbius e suas propriedades	
<i>Gabrieli Kmiecik</i>	112

Trigonometria e Ladrilhamentos no Plano Hiperbolico <i>Izabella Calais Fernandes</i>	114
Formas Diferenciais e Aplicações <i>João Gabriel Chiorato</i>	116
Teoria Geral da Incidência <i>Kevyan Uehara de Moraes</i>	118
A Conjectura de Toeplitz para polígonos regulares <i>Luis Fernando Salla de Souza</i>	120
Teorema de Gauss–Bonnet: Uma abordagem moderna <i>Monica Maria Funk Drechsler</i>	122
Geometria Fractal: Uma abordagem computacional <i>Renan Rabelo Goularti</i>	125
Sombreamento em Espaços Shift <i>Sofia Meneghel Silva</i>	127
6 Otimização	129
Aprendizagem por Reforço com Q-Learning <i>Dennis Gonçalves Lemes</i>	130
Um estudo sobre métodos de máxima descida e acelerações <i>Gearlisson dos Santos Mendonça</i>	131
Precificação de Imóveis com Aprendizagem de Máquina e Engenharia de Atributos com Dados do Censo <i>Gustavo Rodrigues da Silva</i>	134
Grupo CiDAMO - Ciéncia de Dados, Aprendizagem de Máquina e Otimização <i>João Victor da Silva e Talia Correia Schulz</i>	137
Estratégias baseadas em Gradient Boosting para problemas de Regressão <i>João Victor da Silva e Talia Correia Schulz</i>	138
Planejamento da Operação a Curtíssimo Prazo para Duas Usinas em Cascata <i>João Victor da Silva e Talia Correia Schulz</i>	140

Introdução ao Aprendizado por Reforço <i>Mateus Balotim</i>	143
Máquinas de Vetores SSuporte no contexto da aprendizagem semi-supervisionada <i>Maxim Dmitri Lobkob</i>	145

Apresentação

Prezado leitor,

É com satisfação que apresentamos o caderno de resumos da 6^a edição da Jornada de Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática - J3M. Este é um evento idealizado, produzido e coordenado pelos estudantes do grupo PET - Matemática da UFPR.

A J3M nasceu da necessidade e do desejo de se criar um ambiente propício para apresentação dos trabalhos de Iniciação Científica desenvolvidos no âmbito do Departamento de Matemática da UFPR. É um evento que vem se consolidando como um importante canal de comunicação entre o grupo PET - Matemática, os Cursos de Matemática e Matemática Industrial da UFPR e estudantes de outras universidades.

Nesta edição, estão contempladas as áreas de Álgebra, Análise Matemática, Análise Numérica, Educação Matemática, Geometria e Otimização. As bancas especializadas de avaliação são compostas por docentes e estudantes de pós-graduação da UFPR. Como forma de incentivo aos alunos apresentadores são concedidas distinções aos trabalhos que obtêm as melhores avaliações por parte das bancas.

Gostaria de agradecer a cada um dos alunos do PET-Matemática pela dedicação e cuidado que dispensaram para a realização dessa edição da J3M. Também agradeço aos professores e estudantes de pós-graduação pelo excelente trabalho realizado nas bancas de avaliação. Registramos também nosso reconhecimento à Direção do Setor de Ciências Exatas, ao Departamento de Matemática e à coordenação do curso de Matemática pelo apoio

recebido em todas as etapas desse evento.

Prof. Dr. Cleber de Medeira
Tutor do PET- Matemática - UFPR
Novembro/2022

Álgebra

Banca Avaliadora:

Professores:

Prof. Edson Ribeiro Álvares
Profa. Maria Eugênia Martin
Profa. Tanise Carnieri Pierin
Prof. Willian Goulart Gomes Velasco

Estudantes da pós graduação:

Adina Verônica Remor
Moroni Menesses Bruch Bora

Elementos primos e elementos irredutíveis do anel \mathbb{Z}_n

Aline Kowalski*

Licenciatura em Matemática - UFSC Blumenau

alineekowalski@gmail.com

Prof. Felipe Vieira

Departamento de Matemática - UFSC Blumenau

f.vieira@ufsc.br

Palavras-chave: anéis Z_n , elementos primos, elementos irredutíveis.

Resumo:

Dado um anel \mathbb{Z}_n qualquer, é possível caracterizar o conjunto de seus elementos primos e o de seus elementos irredutíveis, além de calcular a quantidade de elementos de cada conjunto conforme [2].

Lebrando que temos um elemento $\bar{0} \neq \bar{p} \in \mathbb{Z}_n$ primo se $\bar{p} \mid \bar{ab}$, então $\bar{p} \mid \bar{a}$ ou $\bar{p} \mid \bar{b}$, $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$.

Teorema 1: Dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definimos o conjunto de elementos primos de \mathbb{Z}_n como

$$\{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n : \exists p \in \pi_n, p < n, \text{mdc}(a, n) = p\},$$

em que π_n é o conjunto de números primos que dividem n .

Lembre também que um elemento $\bar{0} \neq \bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ é irredutível, se \bar{a} não for inversível, e sempre que existirem $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_n$ tais que $\bar{a} = \bar{xy}$, e \bar{x} ou \bar{y} será inversível.

Teorema 2: Dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, caracterizamos o conjunto de elementos irredutíveis de \mathbb{Z}_n como

$$\{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n : \exists p \in \pi_n, p^2 \mid n, \text{mdc}(a, n) = p\},$$

em que π_n é o conjunto de números primos que dividem n .

E para verificar a cardinalidade de cada conjunto, utilizamos o seguinte teorema.

Teorema 3: Seja $n = pm \in \mathbb{N}$ e $A_p = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n : \text{mdc}(a, n) = p\}$, em que A_p é o conjunto de elementos primos de \mathbb{Z}_n . Então, a função $f : A_p \rightarrow U(\mathbb{Z}_m)$ definida por $f(\bar{a}) = \frac{a}{p}$ é bem definida e bijetora.

Corolário:

Bolsista do Programa PIBIC "C-álgebras e grupoides".

1. A quantidade de elementos primos de \mathbb{Z}_n é dado por

$$\sum_{\substack{p \in \pi_n \\ p < n}} \varphi\left(\frac{n}{p}\right),$$

2. A quantidade de elementos irredutíveis de \mathbb{Z}_n é dado por

$$\sum_{\substack{p \in \pi_n \\ p^2 \mid n}} \varphi\left(\frac{n}{p}\right),$$

em que φ é a função de Euler.

Referências

- [1] GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: SBM, 1979.
- [2] JAFARI, A. R.; JAFARI, M. H. Prime and irreducible elements of the ring of integers modulo n . **The Mathematical Gazette**, Cambridge University Press, v. 96, n. 536, p. 283-287, jul. 2012.
- [3] MARTINEZ, F.; MOREIRA, C. G.; SALDANHA, N.; TENGAN, E. **Teoria dos Números**: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- [4] VIEIRA, F.; CARVALHO, R. A. **Elementos de Aritmética e Álgebra**. Rio de Janeiro: SBM, 2020.

Sequências Espectrais

Fernando Augusto de Lima Filho
Bacharelado em Matemática - UFPR

nandolima2990@gmail.com

Prof. Eduardo Outeiral Correa Hoefel (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
hoefel@ufpr.br

Palavras-chave: Complexos, Homologia, Sequências Espectrais.

Resumo:

As sequências espectrais são ferramentas de álgebra homológica utilizadas em diversas áreas da matemática tais como álgebra, geometria e topologia. Neste trabalho daremos uma definição de sequência espectral e apresentaremos o conceito de convergência de uma sequência espectral, a seguir mostraremos alguns exemplos.

Um complexo $M = (M_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma família $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de \mathcal{R} -módulos e de morfismos de \mathcal{R} -módulos $(d_n : M_n \rightarrow M_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ sobre um anel \mathcal{R} , onde cada d_n é chamado de diferencial e satisfaz a seguinte propriedade: $d_n d_{n+1} = 0$, ou seja, $Im\ d_{n+1} \subseteq Ker\ d_n$.

$$\dots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \longrightarrow \dots$$

Definimos a n -ésima homologia do complexo $M = (M_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ como sendo o módulo quociente

$$H_n(M) := \frac{Ker\ d_n}{Im\ d_{n+1}}$$

Um complexo M é dito filtrado se existe uma família de subcomplexos $(F^p M)_{p \in \mathbb{Z}}$ tal que $F^{i-1} M \subseteq F^i M$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, e a partir dessas filtrações podemos construir as sequências espectrais. Do mesmo modo, definimos um complexo duplo como uma tripla (M, d', d'') , onde $M = (M_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ são \mathcal{R} -módulos duplamente indexados tais que $(M_{p,*}, d')$ (linhas) e $(M_{*,q}, d'')$ (colunas) são complexos e cada quadrado dos diagramas anticomuta.

$$\begin{array}{ccccccc}
& \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \longleftarrow M_{p-1,q+1} & \longleftarrow M_{p,q+1} & \longleftarrow M_{p+1,q+1} & \longleftarrow \cdots & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow d''_{p+1,q+1} & \\
\cdots & \longleftarrow M_{p-1,q} & \xleftarrow{d'_{p,*}} M_{p,q} & \xleftarrow{d'_{p+1,*}} M_{p+1,q} & \longleftarrow \cdots & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow d''_{p+1,q} & \\
\cdots & \longleftarrow M_{p-1,q-1} & \longleftarrow M_{p,q-1} & \longleftarrow M_{p+1,q-1} & \longleftarrow \cdots & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \cdots & & \cdots & & \cdots &
\end{array}$$

Dado um complexo duplo obtemos o complexo total $Tot(M) = (Tot(M)_n, D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ com filtrações $(^I F Tot(M))_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(^{II} F Tot(M))_{n \in \mathbb{Z}}$, e cada filtração da origem a uma sequência espectral que irá convergir para a homologia do complexo total. Por fim daremos alguns exemplos e utilizaremos as sequências espectrais para demonstrar o seguinte resultado.

Teorema. Sejam P_A e Q_B resoluções projetivas deletadas de um \mathcal{R} -módulo A e um \mathcal{R} -módulo B , então $Tor_n^{\mathcal{R}}(A, B) \cong tor_n^{\mathcal{R}}(A, B)$.

Referências

- [1] ROTMAN, J.J. **An Introduction to Homological Algebra**. New York: Springer, 2008.
- [2] ASSEM, I. **Algèbres et Modules**: Cours et exercices. Ottawa: Les Presses de l'Université d'Ottawa, 1997.
- [3] MCCLEARY, J. **A User's Guide to Spectral Sequences**. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

O problema de Hurwitz e a classificação das álgebras de composição

Isac Messias Michelon *

Licenciatura em Matemática - UFPR

isacmicic@gmail.com

Profa. Maria Eugênia Martin (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

eugenia@ufpr.br

Palavras-chave: álgebras de composição, processo de Cayley-Dickson, teorema de Hurwitz.

Resumo:

Uma propriedade muito interessante dos números inteiros é que o produto da soma de dois quadrados é igual à soma de dois quadrados, como por exemplo:

$$(2^2 + 3^2) \cdot (1^2 + 9^2) = 13 \cdot 82 = 1053 = 625 + 441 = 25^2 + 21^2.$$

Essa propriedade é um caso particular de uma propriedade muito mais valiosa: dados a e b dois números complexos, então a norma do produto é o produto das normas, i.e.: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. Se escrevemos $a = x_1 + ix_2$ e $b = y_1 + iy_2$, então a seguinte fórmula é válida para quaisquer números reais x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$(x_1^2 + x_2^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2.$$

A partir dessa fórmula, podemos pensar naturalmente em perguntas como: será que existe alguma fórmula análoga para soma de 3 quadrados? De 12? De n quadrados?

Grandes matemáticos como Euler e Lagrange, conheciam identidades semelhantes para a soma de 4 quadrados, mas só no começo do século XIX, C. F. Degen, encontrou o primeiro exemplo de uma identidade para a soma de 8 quadrados.

Ao longo do século XIX, vários avanços no tema ocorreram, como por exemplo a correlação entre a existência de uma identidade para soma de n quadrados e a existência de uma álgebra de divisão de uma forma quadrática positiva definida de dimensão n sobre \mathbb{R} . No final do século XIX, Hurwitz provou que as únicas álgebras de divisão munidas de uma forma quadrática positiva definida sobre os números reais são \mathbb{R} , \mathbb{C} , os quaternios \mathbb{H} e os octônios \mathbb{O} (veja [2]). Este resultado, conhecido como

*Voluntário no Programa de Voluntariado Acadêmico (PVA).

Teorema de Hurwitz, tem como consequência principal o fato de que fórmulas multiplicativas para somas de quadrados somente podem ocorrer em dimensões 1, 2, 4 e 8.

Note que a fórmula dos números complexos que motivou esse estudo é essencialmente sobre norma, e lembrando que existe o produto interno entre números complexos, podemos generalizar nosso problema da propriedade da norma para uma forma quadrática não degenerada sobre um corpo qualquer. Para quais formas quadráticas vale um resultado análogo ao teorema de Hurwitz? Essa questão, conhecida como *o problema de Hurwitz*, foi resolvida em trabalhos de Albert, Kaplansky e Jacobson. Acontece que, neste caso, o problema também se reduz à descrição de uma certa classe de álgebras, as chamadas "álgebras de composição".

Dizemos que uma álgebra (unitária) (A, \cdot) é uma **álgebra de composição** se ela possui uma forma quadrática não degenerada $n(x)$ tal que $n(x \cdot y) = n(x)n(y)$ para todo $x, y \in A$. Estas álgebras podem ser obtidas através do Processo de Cayley-Dickson, por meio do qual dada A uma álgebra com involução, constrói-se uma nova álgebra com involução que contém A e tem dimensão o dobro da dimensão de A . A álgebra resultante é uma álgebra de composição se, e somente se, a álgebra original A for associativa.

O objetivo desse trabalho foi estudar a descrição de todas as álgebras de composição sobre um corpo qualquer de característica diferente de 2 apresentada no chamado *Teorema Generalizado de Hurwitz*, [1]. Incrivelmente, existe uma semelhança impressionante entre a resposta desse problema para $F = \mathbb{R}$ e para F um corpo qualquer: As álgebras de composição têm dimensão 1, 2, 4 ou 8 e podemos encontrar uma forma explícita para a forma quadrática $n(x)$ de A em cada caso, a qual, ao admitir composição $n(x \cdot y) = n(x)n(y)$, responde o problema de Hurwitz.

Referências

- [1] S'LINKO, Z.; SHESTAKOV, I. **Rings that are nearly associative**. Moskow: Nauka, 1978.
- [2] CURTIS, M. **Abstract Linear Algebra**. Houston: Springer-Verlag New York Inc, 1990.
- [3] SCHAFER, R. D. **An Introduction on to Nonassociative Algebra**. Oklahoma: Stillwater, 1961.

Classificação das representações indecomponíveis de quivers euclidianos a partir do seu defeito

Kevyan Uehara de Moraes* e Lucas Cabral Port[†]

Bacharelado em Matemática, Licenciatura em Matemática - UFPR

kevyan.uehara@ufpr.br e lucas.cabral@ufpr.br

Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

rolo@ufpr.br

Palavras-chave: Álgebra, Teoria de Representações, Álgebras Mansas.

Resumo:

Conseguimos classificar k -álgebras com o estudo de representações de quivers, através do Teorema de Gabriel. A partir de uma k -álgebra de caminhos de um quiver Q conseguimos classificá-lo como manso ou selvagem a pela sua forma quadrática. Um dos objetivos do estudo das representações de álgebras de dimensão finita é classificar as raízes da forma quadrática associada, pois estas raízes estão diretamente ligadas a suas representações, e portanto a seus módulos. Em nosso trabalho apresentamos uma maneira de classificar todas as raízes de determinados tipos de quivers.

Sabemos que essa forma quadrática é *positiva definida* se, e somente se, o quiver é do tipo *Dynkin*. Nesse caso, dizemos que o quiver é de tipo de representação finita, o que significa que sua forma quadrática tem uma quantidade finita de raízes.

Por outro lado, a forma quadrática pode ter uma quantidade infinita de raízes. Se isso ocorre, dizemos que o quiver associado é de tipo de representação infinita. Dentro dessa possibilidade temos dois casos: o *manso* e o *selvagem*. Intuitivamente, eles correspondem às situações em que, respectivamente, conseguimos classificar todas as raízes e a que não conseguimos.

Isto nos leva a outra correspondência já conhecida: entre formas quadráticas *positivas semidefinidas* (mas não positivas definidas) e quivers ditos *euclidianos*. Esse corresponde ao caso manso, que foi tratado em nosso estudo e que apresentaremos em nossa exposição.

A classificação no caso Dynkin pode ser feita da seguinte forma: definimos uma operação *reflexão*, que preserva a forma quadrática. Consideraremos então o grupo

*Voluntário do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC)

[†]Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC)

gerado por essas reflexões, chamado de grupo de Weyl. Denotamos esse grupo por W_Q . Nesse caso, esse grupo é finito e com ele podemos conhecer todas as raízes de um quiver. Por outro lado, no caso euclideano, W_Q não é finito e temos que encontrar outros meios de classificar essas raízes.

Sendo o radical da forma quadrática estável pela ação dos elementos do grupo de Weyl, podemos definir o quociente de \mathbb{Z}^n pelo radical e assim definir elementos induzidos pelo grupo de Weyl neste quociente. Denotamos o grupo gerado por esses elementos induzidos como \bar{W}_Q . É possível mostrar que esse grupo é finito. Como \bar{W}_Q é finito, o elemento induzido pela transformação de Coxeter \bar{c} tem ordem finita r e então $c^r x \equiv x \pmod{N}$, onde N é o radical da forma quadrática. Este é gerado por um único elemento, assumindo que Q é euclidiano. Então podemos reescrever a equação como

$$c^r x = x + (\partial_c x) \cdot v,$$

onde v é um gerador do radical supracitado. Chamamos o inteiro $\partial_c x$ de *defeito de x em respeito a c*. Com isso, podemos classificar as raízes da forma quadrática em relação ao defeito, se este é negativo, positivo ou nulo. Então, com propriedades desenvolvidas sobre o defeito do quiver, e da transformação de coxeter, podemos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema. Seja $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ um quiver euclideano, c a matriz de coxeter correspondente a uma numeração admissível de Q_0 , temos:

1. As raízes positivas de defeito negativo são os vetores da forma $x = c^{-s} \cdot p_i$ onde $1 \leq i < n$ e $s > 0$.
2. As raízes positivas de defeito positivo são os vetores da forma $x = c^s \cdot q_i$ onde $1 \leq i < n$ e $s > 0$.
3. As raízes de defeito nulo são os vetores da forma $x = x_0 + \lambda \cdot v$ onde $0 \leq \lambda \in \mathbb{Z}$ e x_0 é uma raiz positiva de defeito 0 e $x_0 < v$.

Aqui p_i e q_i são raízes positivas que são obtidas a partir de uma composição de reflexões específicas nos elementos da base de \mathbb{Z}^n .

É possível provar que há uma bijeção entre as raízes positivas e negativas, e esses dois conjuntos de raízes particionam o conjunto das raízes da forma quadrática. Portanto, classificamos todas as raízes de um quiver euclideano.

Referências

- [1] ASSEM, Ibrahim. **Tame Hereditary Algebras**. Texto Manuscrito.
- [2] ASSEM, Ibrahim. **Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Techniques of Representation Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- [3] KIRILLOV, Alexander. **Quiver Representations and Quiver Varieties**. Estados Unidos: American Mathematical Society, 2016.

Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt para \mathfrak{sl}_2

Matheus Kinceski Pires *

Bacharelado em Matemática - UFPR

tiyutre@gmail.com

Prof. Matheus Batagini Brito (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

mbrito@ufpr.br

Palavras-chave: álgebra de Lie; teorema PBW; teoria de representações.

Resumo:

Escolhemos estudar a álgebra de Lie \mathfrak{sl}_2 por ser a álgebra de Lie mais simples, porém fundamental, de uma certa classe de álgebras de Lie de dimensão finita. Mais ainda, em muitos casos as ideias que são obtidas estudando \mathfrak{sl}_2 se generalizam de modo relativamente fácil para outras álgebras de Lie semissimples.

Uma das ferramentas mais importantes no estudo de estruturas algébricas é a teoria de representações: cada elemento da estrutura algébrica em questão é associado a um operador linear de algum espaço vetorial V de forma que as relações entre os elementos da estrutura são preservadas pelos operadores associados. Mais especificamente, se $\mathcal{L}(V)$ denota a álgebra associativa dos operadores lineares de V , uma representação de \mathfrak{sl}_2 é um homomorfismo de Lie $\phi : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathcal{L}(V)$, onde $\mathcal{L}(V)$ é visto como uma álgebra de Lie via comutador.

As álgebras de Lie nem sempre são associativas, mas considerando a álgebra universal envelopante U associada, podemos estender as representações de \mathfrak{sl}_2 a representações de $U(\mathfrak{sl}_2)$, que é uma álgebra associativa.

Finalizamos este trabalho com o teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que descreve como base de $U(\mathfrak{sl}_2)$ o conjunto $\{f^i h^j e^k : i, j, k \in \mathbb{N}_0\}$ a partir de uma base ordenada de \mathfrak{sl}_2 .

Referências

- [1] MAZORCHUK, Volodymyr. **Lectures on $Sl_2(C)$ -Modules.** Uppsala University, Sweden. 2009.
- [2] AXLER, Sheldon. **Linear Algebra Done Right.** Springer International Publishing, 3^a edição. 2015.

*Bolsista Programa de Educação Tutorial de Matemática

Tetração como Operação nos Números Reais: Estudo de Propriedades e Definições

Saulo Minatti Andrade¹

Licenciatura em Matemática – UFSC

saulominatti@outlook.com

Prof. Flavia Tereza Giordani

Departamento de Matemática – UFSC

flavia.giordani@ufsc.br

Palavras-chave: aritmética, potenciação, hiperoperações.

Resumo:

O trabalho em questão pretende falar sobre operações aritméticas que não são ensinadas no ensino médio. A formação das operações inevitavelmente segue um padrão, e se seguirmos esse padrão podemos formalizar o que são conhecidas como “hiperoperações”, e tracejar definições e propriedades para a “tetração”, a operação que vem imediatamente depois da exponenciação.

Uma forma de expandir as operações aritméticas e formalizá-las, é de criar uma função. Na verdade, várias funções. Serão chamadas de H_i . A seguir, a definição das funções:

$$H_i : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

O “i” pode ser qualquer natural não nulo, e será o rótulo de cada função desse tipo. As leis de formação se comportam e variam de acordo com cada valor para “i”:

$$H_1 : (a, b) \mapsto a + b$$

$$H_2 : (a, b) \mapsto ab = H_1(a, H_1(a, H_1(a, \dots))) \quad (\text{"b" cópias de } a)$$

$$H_3 : (a, b) \mapsto a^b = H_2(a, H_2(a, H_2(a, \dots))) \quad (\text{"b" cópias de } a)$$

$$H_4 : (a, b) \mapsto H_3(a, H_3(a, H_3(a, \dots))) \quad (\text{"b" cópias de } a)$$

$$H_5 : (a, b) \mapsto H_4(a, H_4(a, H_4(a, \dots))) \quad (\text{"b" cópias de } a)$$

...

$$H_i : (a, b) \mapsto H_{i-1}(a, H_{i-1}(a, H_{i-1}(a, \dots)))$$

Para todo i maior que 1, a função H_i se define a partir da função H_{i-1} .

¹ Bolsista do PET Matemática UFSC.

Essas funções serão chamadas de hiperoperações. Cada hiperoperação se baseia em um processo repetido da hiperoperação anterior.

A tetração baseia-se na exponenciação repetida. A seguir, a sua definição, na figura 1. Empregar-se-á aqui a notação mais comumente usada:

$$b a = a^{a^a\dots}$$

Figura 1: definição de tetração
Fonte: do autor

Irá se referir a isso como “a superelevado a b”. Se tem “a” de base e “b” de tetrapoente.

Na tetração, as propriedades válidas não incluem produtos, mas sim, expoentes. Uma propriedade muito importante que decorre diretamente da definição da operação é (HOON, 2014, p. 1):

$$b+1 a = a^b a$$

Saber que existe mais além das três operações matemáticas, que vêm junto de propriedades e todo um universo de estudo por trás delas, pode maravilhar qualquer amante da matemática.

Referências:

CHUN, Ji Hoon. **What is . . . tetration?** S.L., 2014. Disponível em:
https://math.osu.edu/sites/math.osu.edu/files/chun_tetration.pdf. Acesso em: 01 out. 2022..

GOODSTEIN, RI. Transfinite ordinals in recursive number theory. **The Journal Of Symbolic Logic.** S.L., p. 123-129. 1947.

NEYRINCK, Mark. **An Investigation of Arithmetic Operations.** S.L., 1998.

WIKIPEDIA. **Tetration.** S.L: Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2022. Disponível em:
<https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Tetration&oldid=1110225033>. Acesso em: 01 out. 2022.

Introdução às Representações de Quiver

Thiago Batista dos Santos Martins *
Licenciatura em Matemática - UFPR
martinsthiago5008@ufpr.br

Prof. Heily Wagner (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
heilywagner@ufpr.br

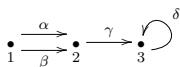
Palavras-chave: Quiver, Representação de Quiver, Álgebra Linear.

Resumo:

O objetivo do trabalho é introduzir as Representações de quiver. Tais objetos podem ser identificados com a estrutura de módulos sobre certas álgebras, dentre outras aplicações, mas o foco aqui será introdutório: definir a categoria das representações de quiver e dar início ao estudo de possíveis classificações que é comumente tratado em Teoria de Representações de Álgebras. A primeira classificação será de acordo com a finitude ou não da categoria das representações indecomponíveis de um quiver.

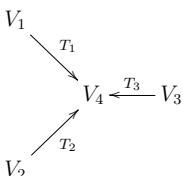
Vamos começar a clarear tais conceitos. Um **quiver** Q é um grafo orientado, ou seja, é um diagrama composto por um conjunto de vértices Q_0 e por um conjunto de flechas Q_1 .

Exemplo 1:



Fixado um quiver Q , uma **representação de Q** é determinada por um espaço vetorial para cada vértice em Q_0 e uma transformação linear para cada flecha.

Exemplo 2:



*Bolsista do Programa de Educação Tutorial - PET-Matemática.

Dadas duas representações de um mesmo quiver Q podemos definir conceitos como soma direta, morfismos, isomorfismos, etc. Assim podemos definir a categoria das representações de Q , $\text{Rep}Q$, e também a categoria das classes de isomorfismos das representações indecomponíveis de Q , $\text{Ind}Q$.

Vejamos alguns exemplos para o quiver:

$$Q : \bullet \longrightarrow \bullet$$

1. A soma direta das representações

$$V : V_1 \xrightarrow{T_v} V_2 \text{ e } W : W_1 \xrightarrow{T_w} W_2 \text{ é } V \oplus W : V_1 \oplus W_1 \xrightarrow{T_v \oplus T_w} V_2 \oplus W_2 ;$$

2. Uma representação é indecomponível se ela não pode ser escrita como soma direta;
3. Fixado um corpo k , todas as representações indecomponíveis para esse quiver são:

$$k \xrightarrow{0} 0, \quad 0 \xrightarrow{0} k \text{ e } k \xrightarrow{Id} k$$

Problema de subespaços: Para o quiver

$$Q = \begin{matrix} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 0 & \longleftarrow & 2 \end{matrix}$$

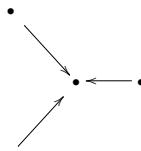
uma representação genérica é da forma:

$$V_1 \xrightarrow{T_1} V_0 \xleftarrow{T_2} V_2$$

onde V_1, V_2 são espaços vetoriais e $T_1 : V_1 \rightarrow V_0, T_2 : V_2 \rightarrow V_0$ transformações lineares.

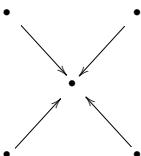
Podemos escrever $V_1 = \text{Ker}(T_1) \oplus V'_1, V_2 = \text{Ker}(T_2) \oplus V'_2$. Encontrar todas as representações indecomponíveis de Q , neste caso, se reduz a classificar triplas (V_0, V_1, V_2) com V_1 e V_2 subespaços de V_0 . Ou seja, um problema puramente de Álgebra linear que nos leva a 6 representações indecomponíveis.

Analogamente, o problema de classificar as representações do quiver



é equivalente a classificar triplas de subespaços de um mesmo subespaço. Aqui podemos verificar que há 12 representações indecomponíveis.

Já para o quiver



o problema deixa de ser finito, ou seja, há infinitas representações indecomponíveis e necessitamos de outras ferramentas para estudar essa categoria. O *Teorema de Gabriel* classifica todos os quivers que admitem uma quantidade finita de representações indecomponíveis, mas esse é um tema para outro estudo.

Referências

- [1] ASSEM, Ibrahim; SIMSON, Daniel; SKOWRONSKI, Andrzej . **Elements of the Representation Theory of Associative Algebras:** Techniques of Representation Theory. Cambridge University Press, 2006.
- [2] COELHO, Flávio Ulhoa. **Curso de Álgebra Linear.** Edusp, 2001.
- [3] KRILLOV JR, Alexander. **Quiver representations and quiver varieties.** American Mathematical Soc., 2016.
- [4] SCHIFFLER, Ralf. **Quiver representations.** Springer, 2014.

A caracterização dos polígonos regulares construtíveis: uma abordagem por meio da teoria de corpos

Victor Afonso Garcia Schmitz *
Licenciatura em Matemática - UFSC

victor.a.schmitz@gmail.com

Prof. Rafael Aleixo de Carvalhol (Orientador)
Departamento de Matemática - UFSC
rafael.aleixo@ufsc.br

30 de setembro de 2022

Palavras-chave: polígonos regulares, régua e compasso, primos de Fermat, corpos, teoria de Galois.

Resumo:

Este trabalho tem como objetivo caracterizar quais polígonos regulares são construtíveis no plano apenas com régua e compasso, dado um segmento unitário. Esse tema surgiu a partir de uma iniciação científica realizada sobre teoria de Galois, quando foram provados vários resultados interessantes sobre a construtibilidade de segmentos e ângulos no plano utilizando resultados da teoria de corpos.

As construções com régua e compasso foram estudadas por meio dos pontos construtíveis em \mathbb{R}^2 , definidos recursivamente da seguinte forma: Um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ é construtível se $P = (0,0)$, $P = (1,0)$ (que seriam as extremidades do segmento unitário dado) ou P é a intersecção entre retas e circunferências construídas a partir de pontos previamente construídos. As retas e circunferências presentes nessa definição fazem o papel, respectivamente, da régua e do compasso.

Como a construção de um novo ponto consiste em encontrar a intersecção entre retas e circunferências em \mathbb{R}^2 , isso equivale algebricamente a resolver sistemas polinomiais entre equações polinomiais de grau 2 (correspondente à equação de uma circunferência) e de grau 1 (que correspondem à equação de uma reta) em duas variáveis, para encontrar suas coordenadas. A resolução de sistemas dessa forma envolve, em geral, a resolução de uma equação de segundo grau, que por sua vez envolve extrair uma raiz quadrada de um número (o discriminante da equação). Dessa forma, se temos uma coleção de pontos construtíveis P_1, \dots, P_n com K sendo o corpo gerado por suas coordenadas, construir um novo ponto P_{n+1} corresponde a fazer a adjunção

*Voluntário do Programa de Iniciação Científica

de uma raiz quadrada sobre o corpo das coordenadas $K(\sqrt{\Delta}) \supseteq K$. E como medir a distância entre dois pontos também envolve a extração de uma raiz quadrada, temos o principal resultado que liga a álgebra às construções geométricas: Existe um segmento de medida α se, e somente se, existe uma cadeia de extensões quadráticas (extensões de corpos que fazem a adjunção de uma raiz quadrada) $K_s \supseteq \dots \supseteq K_1 \supseteq K_0 = \mathbb{Q}$ onde $\alpha \in K_s$. Em particular, se α é a medida de algum segmento construtível, temos que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ (a dimensão de $\mathbb{Q}(\alpha)$ como \mathbb{Q} -espaço vetorial) deve ser uma potência de 2. A recíproca desse caso particular nem sempre é verdadeira, ela será, porém, para uma certa classe de extensões dos racionais, chamadas de extensões abelianas, que são mais profundamente estudadas na teoria de Galois. Para a extensão $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n)) \supseteq \mathbb{Q}$ ($n \in \mathbb{N}$), que é de grande importância para a classificação dos polígonos regulares, vale a recíproca, se $[\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n)) : \mathbb{Q}]$ é uma potência de 2, é possível construir um segmento de medida $\cos(2\pi/n)$. Esse resultado se deve a resultados prévios mais técnicos, que não serão abordados aqui.

Para finalmente abordar a construção de um polígono regular de n lados, primeiro notamos que construir tal polígono equivale a criar um arco de ângulo central $2\pi/n$ sobre sua circunferência circunscrita, que por sua vez equivale a construir um segmento de medida $\cos(2\pi/n)$ (construindo um triângulo retângulo de hipotenusa 1 e cateto $\cos(2\pi/n)$). E pelo resultado mencionado no parágrafo anterior, um segmento de tal tamanho é construtível se, e somente se, $[\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n)) : \mathbb{Q}]$ é uma potência de 2. O que nos permite finalizar a caracterização, é o fato, completamente não trivial, que $[\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n)) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)/2$, onde φ é a função totiente de Euler. Assim, é possível construir um polígono de n lados se, e somente se, $\varphi(n)/2$ é uma potência de 2, e aplicando as propriedades da função totiente de Euler, junto à algumas manipulações algébricas simples, concluímos que isso equivale a dizer que $n = 2^k p_1 \cdots p_m$, para algum $k \in \mathbb{Z}_+$, com os p_i 's sendo primos de Fermat distintos. Isso revela uma conexão surpreendente e profunda entre teoria dos números, geometria e álgebra, e é o resultado final deste trabalho.

Referências

- [1] TENGAN, Eduardo.; MARTINS, Sérgio. **Álgebra exemplar:** um estudo da álgebra através de exemplos. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

Álgebras de Caminhos de Leavitt

Vinícius Marcondes Pereira

Bacharelado em Matemática - UFSC

vinimarmarcondes@gmail.com

Prof. Gilles Gonçalves de Castro (Orientador)

Departamento de Matemática - UFSC

gilles.castro@ufsc.br

Palavras-chave: grafos direcionados, álgebra de caminhos, álgebra de caminhos de Leavitt.

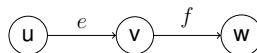
Resumo:

Um **grafo direcionado** E é uma quádrupla (E^0, E^1, r, s) , onde E^0 é um conjunto de vértices, E^1 é um conjunto de arestas e r e s são funções

$$r, s : E^1 \longrightarrow E^0$$

chamadas de função *range* e função *source* respectivamente. Intuitivamente, a função range informa para onde uma aresta vai e a função source indica de onde a aresta vem.

Tal como no grafo direcionado \mathcal{E} abaixo, as arestas podem fazer caminhos, isto acontece quando dadas n arestas e_1, \dots, e_n de um grafo direcionado, $r(e_i) = s(e_{i+1})$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$. No grafo direcionado abaixo, $r(e) = v = s(f)$, portanto as arestas e e f formam o caminho ef .



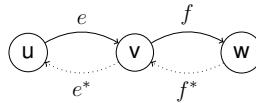
Dado um grafo direcionado E e um corpo K é possível construir a álgebra de caminhos de E sobre K , denotada por $P_K(E)$. Tal álgebra é definida como o K -espaço vetorial cuja base é formada por caminhos em E e cuja multiplicação de elementos da álgebra é dada pela concatenação de caminhos. Equivalentemente (veja [2]), $P_K(E)$ é a K -álgebra livre gerada por $E^0 \cup E^1$ sujeita as seguintes relações para todo $v, w \in E^0$ e para todo $e \in E^1$:

- (V) $vw = 0$ para todo $v \neq w$ e $vv = v$;
- (E1) $s(e)e = er(e) = e$.

O **grafo estendido** de um grafo direcionado E , denotado por \hat{E} , é o grafo direcionado com os mesmos vértices que o grafo E original e com as arestas do grafo E original, mais as arestas $(E^1)^* = \{e^* \mid e \in E^1\}$, de modo que as funções range e source são estendidas para \hat{E} do seguinte modo $r(e^*) = s(e)$ e $s(e^*) = r(e)$. Logo, com base em (E1), se impõe a seguinte condição análoga, (E2), em \hat{E} para $e \in E^1$ e $e^* \in (E^1)^*$.

- (E2) $r(e)e^* = e^*s(e) = e^*$.

O grafo estendido de \mathcal{E} , denotado por $\hat{\mathcal{E}}$, pode ser visualizado como abaixo.



Um vértice v de um grafo direcionado E é dito **regular** se $s^{-1}(v) = \{e \in E^1 \mid s(e) = v\}$ for finito e não vazio. Em tal situação o vértice v emite uma quantidade finita e não nula de arestas. O conjunto de todos os vértices regulares de um grafo direcionado E será denotado por $Reg(E)$.

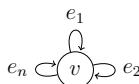
Impondo as seguintes relações adicionais para todo $v \in Reg(E)$, $e^* \in (E^1)^*$ e $f \in E^1$ em $P_K(\hat{E})$

- (CK1) $e^*f = 0$ para $e \neq f$ e $e^*e = r(e)$;
- (CK2) $v = \sum_{s^{-1}(v)} ee^*$

obtém-se a **Álgebra de Caminhos de Leavitt** do grafo E sobre um corpo K , denotada por $L_K(E)$. Equivalentemente, $L_K(E)$ é a K -álgebra livre gerada por $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$, sujeita às relações (V), (E1), (E2), (CK1) e (CK2).

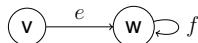
Um exemplo de aplicação de álgebras de caminhos de Leavitt vem do estudo de anéis não IBN. Um anel R com unidade é dito **IBN** se tem a propriedade do *invariant basis number*, isto é, quando $R^n \cong R^m$ para $n, m \in \{1, 2, \dots\}$ implica que $n = m$.

No livro [1] é construída a álgebra universal para algum corpo K , denotada por $L_K(1, n)$ para $n \geq 2$ que satisfaz a relação $L_K(1, n) \cong L_K(1, n)^n$. Seja R_n o grafo direcionado abaixo, chamado de rosa em n pétalas, composto de um vértice v e n arestas.

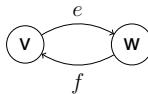


A álgebra de caminho de Leavitt de R_n , denotada por $L_K(R_n)$ está sujeita às mesmas relações que $L_K(1, n)$, de modo que estas duas álgebras são isomórfas [1, Proposition 1.3.2], isto é, $L_K(R_n) \cong L_K(1, n)$ para todo $n \geq 2$.

Dada a aplicação deste tipo de álgebras, surge o problema da classificação, isto é, quais condições são necessárias e ou suficientes para que duas álgebras de caminhos de Leavitt sejam isomórficas. Na referência [2] é mostrado que os grafos



e



possuem álgebras de caminhos de Leavitt isomórfas, mesmo sendo dessemelhantes ,afinal o primeiro grafo possui um loop enquanto o segundo não. Segue que para classificar este tipo de estrutura, é necessário o desenvolvimento de algumas ferramentas algébricas. Este trabalho se dedica a apresentar tais ferramentas e mostrar como são usadas para a classificação de álgebras de caminhos de Leavitt.

Referências

- [1] G. ABRAMS, et al. **Leavitt Path Algebras: A Primer and Handbook**. London: Springer, 2017.
- [2] LIA VAS, **Introduction to Graph Algebras and Attempts at their Classification**

As Estruturas de Álgebras e Módulos em Categorias Monoidais

Vinícius Scussel Accordi

Bacharelado em Matemática - UFSC

vinicius.scussel.accordi@grad.ufsc.br

Profa. Dra. Virgínia Silva Rodrigues

Departamento de Matemática - UFSC

v.rodrigues@ufsc.br

Palavras-chave: Álgebra, Categorias monoidais, módulos.

Resumo:

A priori, infere-se que os objetivos deste trabalho consistem em apresentar conceitos de módulos e álgebras em categorias monoidais, uma extensão dos conceitos primários vistos no curso de Estruturas Algébricas. Além disso, caracterizam-se as noções estruturais básicas relacionadas aos módulos e às álgebras, além disso, identificam-se coálgebras e bíalgebras em categorias monoidais. Por fim, são dispostos os pré-requisitos necessários para a definição de uma álgebra de Hopf na produção de um estudo no tocante aos módulos sobre uma álgebra de Hopf.

A partir de um projeto de Iniciação Científica, sob orientação da professora Virgínia, e de algumas disciplinas cursadas nos semestres de 2021.1 e 2021.2, houve um crescente interesse a respeito do funcionamento e caracterização das estruturas envolvidas em alguns objetos de estudo. Em especial, houve uma investigação envolvendo, a priori, módulos, álgebras e suas respectivas dualizações e, a posteriori, categorias, em particular, categorias monoidais.

Dessa forma, em acordo com o próprio projeto, dadas as inferências necessárias das etapas anteriores, faz-se indispensável promover um acoplamento coerente de afinidade entre cada uma das partes citadas. Uma vez que, buscam-se não apenas processos lógicos advindos de teoremas e corolários, mas também de exemplos mais explícitos, já que o ramo trabalhado está imerso em abstração.

Destarte, este projeto opera, em essência, de forma característica a uma extensão, um aprimoramento e, primordialmente, um aprofundamento das laborações e dos esforços produzidos ao longo dos últimos meses com a ocupação proveniente do projeto descrito acima. Em melhores noções ao leitor, deve-se também providenciar efeitos àquele que não apresentou contato com a teoria de categorias; logo, espera-se a possibilidade de entendimento, interpretação e correlação entre os objetos tratados.

Outrossim, dada a fartura de conceitos generalizados a partir da teoria de categorias, o princípio do trabalho consiste também na representação um modelo introdutório

envolvendo o tema citado anteriormente com ênfase sobre as noções de módulos, álgebras e principalmente, álgebras de Hopf. Em especial, instiga-se uma premissa demasiadamente interessante, ainda que necessite de uma quantidade significativa de base teórica, tendo em vista que muitos termos serão relembrados, mesmo que apenas para exemplificar algumas definições e resultados.

Nesse sentido, dadas as restrições de subtemas, há um desejo que se constitui, em amplo contexto, no fornecimento de uma visão que discuta as seguintes relações: a equivalência entre a definição clássica de álgebra e a sua definição na categoria monoïdal dos espaços vetoriais - via diagramas - sobre um corpo, a necessidade de dualizar o conceito de uma álgebra, isto é, caracterizar uma coálgebra e, por fim, a descrição e o funcionamento das álgebras em outras categorias monoïdais como, por exemplo, a categoria *Set*.

Por conseguinte, delimitados o tema e os objetos, resta designar os livros observados e, nesta alíquota, é possível descrever duas literaturas preponderantes cujo funcionamento ao longo do texto define, além essencialidade nos produtos, caráter justificativo de objeto metalinguístico. Em especial, a frase anterior respalda-se na questão avaliativa dos motivos levados, para cada autor, de tomar certos ramos.

Isto é, a fim de exemplificar, constatar-se-á os propósitos do livro *Hopf Algebras: An Introduction* tratar as álgebras e módulos na categoria dos espaços vetoriais sobre um corpo. No mais, em adição à referência acima, o outro livro indispensável é *Corings and Comodules* de Brzezinski e Wisbauer, o qual trata dos mesmos objetos citados previamente, porém, desta vez, na categoria \mathcal{M}_R . Por fim, adota-se uma bibliografia complementar com o propósito de sustentar, ainda mais, a base própria já bem definida.

Logo, através da adjunção de todos os fatores aludidos antecipadamente, espera-se que o leitor consiga desfrutar das discussões dispostas de modo a evidenciar a importância da estrutura categórica selecionada por cada autor. Em suma, ainda que o projeto atue como fundação intermediária do ramo da álgebra, obtém-se encorramento de repertório matemático para futuras pesquisas envolvendo a intersecção dos ramos da teoria de categorias e álgebras de Hopf em um programa de pós-graduação em matemática.

Referências

- [1] BORCEUX, F. **Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory.** 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. v. 1.
- [2] BRZEZINSKI, T; WISBAUER, R. **Corings and Comodules.** Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [3] DASCALESCU, S; NASTASESCU, C.; RAIANU, S. **Hopf Algebras: An Introduction.** Nova York: Marcel Dekker, 2001.
- [4] JACOBSON, N. **Basic Algebra I.** 2. ed. Nova York: W. H. Freeman and Company, 1985.
- [5] JACOBSON, N. **Basic Algebra II.** 2. ed. Nova York: W. H. Freeman and Company, 1989.

- [6] ROTMAN, J. **Advanced Modern Algebra: Graduate Studies in Mathematics**.
2. ed. Providence: American Mathematical Society, 2003. v. 114.

Análise Matemática e Equações Diferenciais

Banca Avaliadora:

Professores:

Prof. Alexandre Kirilov

Prof. Fernando de Ávila Silva

Prof. Jurandir Ceccon

Prof. Wagner Augusto Almeida de Moraes

Estudantes da pós graduação:

André Pedroso Kowacs

Vinicius Medeiros Prantl dos Santos

Modelo de Lotka-Volterra e Controlabilidade Matemática

Adriana Washington Henarejos
Licenciatura em Matemática - UFSC
adriana.washington@grad.ufsc.br

Prof. Francis Félix Córdova Puma (Orientador)
Departamento de Matemática - UFSC
francis.cordova@ufsc.br

Palavras-chave: controlabilidade local; modelagem matemática; sistema presa-predador.

Resumo:

Os sistemas dinâmicos podem ser modelados através de sistemas de equações diferenciais que dependem do tempo. Através do tempo, podemos observar, com esses sistemas, representações de vários aspectos da natureza. Esse estudo investigou o modelo de Lotka-Volterra, conhecido também como sistema presa-predador. Este sistema dinâmico retrata como duas espécies de populações: uma presa e outra predadora, interagem num mesmo ambiente, ao decorrer do tempo. Dentre as características matemáticas do modelo foco de estudo, pode-se destacar que trata-se de um par de equações diferenciais, de primeira ordem, não lineares. A partir do estudo do modelo, consegue-se constatar que há uma clara interação cíclica nas relações que ocorrem entre as populações de presa e predador. O movimento cíclico pode ser bem observado na Figura 1.

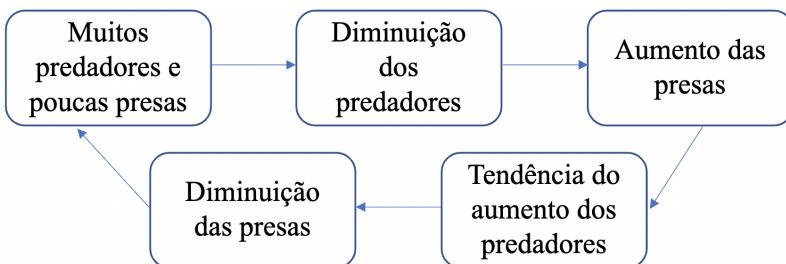


Figura 1: Movimento Cíclico do Modelo de Lotka-Volterra. Fonte: elaborada pelo autor.

Visando a interferência nesse ciclo, para controlar a população de presas, para que essa não apresente um crescimento descontrolado, tornando-se uma praga, surge a necessidade de aplicar ferramentas da teoria de controle. Desse modo, o empenho principal do estudo foi verificar a existência do controle local no Modelo de Lotka-Volterra, bem como, em quais condições tal controle existe. Para conseguir alcançar os resultados obtidos foi necessário efetuar uma revisão bibliográfica acerca dos principais conteúdos relativos a equações diferenciais e sistemas de equações diferenciais, linearização de sistemas não lineares, aplicação dos Teoremas de Controle Local, bem como o Teorema Kalman, estudo dos pontos de equilíbrio, assim como outros conteúdos relacionados, para os quais fez-se o estudo e revisão teórica das referências [1], [2], [3], [4] e [5].

O modelo de Lotka-Volterra é dado por (1):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - cxy \\ \frac{dy}{dt} = -by + dxy \end{cases} \quad (1)$$

em que, x é a densidade da população de presas (no instante t); y é a densidade da população de predadores (no instante t); a é o coeficiente de crescimento das presas; b é o coeficiente de decrescimento dos predadores; c é o coeficiente de morte das presas por predador e d é o coeficiente de predadores devido a existência de presas [1]. É necessário definir o ponto de equilíbrio do sistema com o qual se fará o restante do estudo. Nesse sentido, o ponto de equilíbrio escolhido foi o ponto $P = (b/d, a/c)$. O outro ponto de equilíbrio obtido: $Q = (0, 0)$, trata-se da origem, ou seja, não é um ponto de interesse para o estudo.

A matriz jacobiana do modelo será dada por (2):

$$J(x; y) = \begin{pmatrix} a - cy & -cx \\ dy & -b + dx \end{pmatrix} \quad (2)$$

Logo, a matriz jacobiana do modelo, aplicada no ponto de equilíbrio P será dada por (3):

$$A = J\left(\frac{b}{d}; \frac{a}{c}\right) = \begin{pmatrix} a - c\frac{a}{c} & -c\frac{b}{d} \\ d\frac{a}{c} & -b + d\frac{b}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cb}{d} \\ \frac{da}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Em sequência denota-se por $z = (x, y)$ o vetor das populações, $z_0 = (x_0, y_0)$ os dados iniciais (no instante $t = 0$) e por $F(z, t)$ o campo de velocidades. Perturbando o campo de velocidades, obtemos $F(z, t, u) = F(z, t) + Bu$, em que $B = [1 \ 0]^T$ é a matriz de entrada do controle u , na primeira equação do sistema (1), que representa a espécie de presas. O problema de controle é composto de, dados $z_1 = (x_1, y_1)$ e um tempo $T > 0$, existe um controle u , tal que $z(T) = (x_1, y_1)$, satisfazendo:

$$\begin{cases} z'(t) = F(z, t, u) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (4)$$

Deve-se garantir em (4) um controle u , para isso, aplica-se o Teorema do Controle Local. Ou seja, sendo (z_e, u_e) um ponto de equilíbrio e o sistema de controle linearizado em torno do ponto de equilíbrio (5):

$$z' = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}(z_e, u_e)}_{=A} z + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u}(z_e, u_e) u}_{=B} \quad (5)$$

Obtém-se, pelo Teorema do Controle Local que, caso o sistema de controle linearizado (5) seja controlável, em consequência o sistema (4) será localmente controlável em torno do ponto de equilíbrio escolhido. Isto é, $\exists \delta > 0$; $\forall |z_0 - z_e|_{\mathbb{R}^n} < \delta$, $|z_1 - z_e|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ e existe u , um controle, tal que a solução de (4) satisfaz $z(T) = z_1$.

Torna-se necessário portanto, garantir a controlabilidade do sistema linearizado, para isso considera-se o sistema linear (6):

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t), t \in [0, T] \\ z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (6)$$

em que, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ (definido em (3)) e $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ ($B = [1 \ 0]^T$), $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Visando a assegurar a controlabilidade de (6), aplica-se o Teorema de Kalman, que afirma que, (6) é exatamente controlável no tempo $T > 0$ se, e somente se (7) é satisfeito.

$$\text{rank}[B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B] = n. \quad (7)$$

Por fim, como na matriz de Kalman aplicada em nosso sistema: $[BAB]$ há duas linhas linearmente independentes, cujo posto é 2, então $\text{rank}[BAB] = 2$ e pelo Teorema de Kalman, o sistema será controlável para qualquer tempo, porém de forma local, no ponto de equilíbrio escolhido. Portanto, obteve-se a garantia da controlabilidade local do modelo de Lotka-Volterra, em torno do ponto de equilíbrio, para o problema do controle da população de presas.

Referências

- [1] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C.. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 10a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. isbn: 9788521627357.
- [2] BRANTON, Michael. “Nonlinear Systems”. Em: ODE Architect Companion. John Wiley Sons, Inc, 1999. Cap. 7, pp. 115–134.
- [3] CORON, Jean-Michel. Control and nonlinearity. 136. American Mathematical Soc., 2007.
- [4] KALMAN, R. E.. “On the general theory of control systems”. Em: Proceedings First International Conference on Automatic Control. 1960, pp. 481–492. doi: 10.1016/S1474-6670(17)70094-8.
- [5] PERKO, L.. Differential Equations and Dynamical Systems. 3a. ed. Nova Iorque: Springer, 2001. isbn: 978-1461265269.

Estabilidade local em modelo neuronal

João Vitor Vieira Flauzino *
Bacharelado em Física - UFPR
joaofl@fisica.ufpr.br

Prof. Sergio Roberto Lopes (Orientador)
Departamento de Física - UFPR
lopes@fisica.ufpr.br

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Estabilidade, Equações Diferenciais.

Resumo:

Um dos maiores desafios na pesquisa de sistemas complexos é que são modelados por equações diferenciais que podem exibir comportamentos diversos, trajetórias caóticas e, na maioria dos casos, não possuem solução analítica. Com o objetivo de tratar desse desafio, fizemos uma exploração matemática do modelo de atividade neuronal de Hindmarsh-Rose (HR)[1] sob uma perspectiva da Teoria dos Sistemas Dinâmicos[2] e Teoria de Estabilidade, utilizando ferramentas de Cálculo Diferencial e Álgebra Linear combinadas a um estudo numérico do sistema.

O modelo HR simula as rajadas de disparos do potencial de membrana de um neurônio cerebral e consiste no sistema de equações diferenciais não-lineares acopladas 1, sendo $x(t)$ a variável dinâmica relevante associada ao potencial e b, I, μ e k parâmetros do neurônio. Para a análise, fixamos $I = 4k - 1$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + bx^2 + I - z \\ \dot{y} = 1 - 5x^2 - y \\ \dot{z} = \mu(4(x + k) - z) \end{cases} . \quad (1)$$

Os pontos onde o fluxo do sistema 1 permanece invariante no tempo são chamados de pontos fixos e possuem importância para entender o comportamento de equações diferenciais. Pontos fixos implicam que $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, ou seja, satisfazem o sistema 2.

$$\begin{cases} z = 4(x + k) \\ y = 1 - 5x^2 \\ -x^3 + (b - 5)x^2 - 4x + I - 4k + 1 = 0 \end{cases} . \quad (2)$$

Como tomamos $I = 4k - 1$, a última equação do sistema 2 pode ser reescrita como $x(-x^2 + (b - 5)x - 4) = 0$ e tem três raízes: $x_1^* = 0$ e $x_{2,3}^* = \frac{(b-5)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(b-5)}{2}\right)^2 - 4}$. Usando

*Bolsista do PIBIC.

isso para satisfazer o sistema 2 nas variáveis y e z , obtemos que os pontos fixos são os mostrados em 3.

$$\begin{cases} P_1 = (x_1^*, y_1^*, z_1^*) = (0, 1, 4k) \\ P_2 = (x_2^*, y_2^*, z_2^*) = \left(\left(\frac{(b-5)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(b-5)}{2} \right)^2 - 4} \right), (1 - 5x_2^{*2}), 4(x_2^* + k) \right) \\ P_3 = (x_3^*, y_3^*, z_3^*) = \left(\left(\frac{(b-5)}{2} - \sqrt{\left(\frac{(b-5)}{2} \right)^2 - 4} \right), (1 - 5x_3^{*2}), 4(x_3^* + k) \right) \end{cases}. \quad (3)$$

Isso significa que trajetórias do sistema 1 com condições iniciais exatamente sobre os pontos P_1 , P_2 e P_3 permanecem constantes, isto é, não variam no tempo.

A fim de estudar o comportamento do neurônio quando as condições iniciais estão suficientemente próximas desses pontos fixos, podemos linearizar o sistema 1 através da matriz jacobiana Df avaliada em cada ponto fixo, conforme feito na equação 4.

$$Df(x^*, y^*, z^*) = \begin{bmatrix} \partial \dot{x} / \partial x & \partial \dot{x} / \partial y & \partial \dot{x} / \partial z \\ \partial \dot{y} / \partial x & \partial \dot{y} / \partial y & \partial \dot{y} / \partial z \\ \partial \dot{z} / \partial x & \partial \dot{z} / \partial y & \partial \dot{z} / \partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x^{*2} + 2bx^* & 1 & -1 \\ -10x^* & -1 & 0 \\ 4\mu & 0 & -\mu \end{bmatrix} \quad (4)$$

O polinômio característico $p(\lambda)$ de Df é dado por $p(\lambda) = \det(Df - \lambda I)$. Portanto, temos que $-p(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, onde os coeficientes são dados em 5.

$$\begin{cases} a_2 = 3x^{*2} - 2bx^* + 1 + \mu \\ a_1 = (3x^{*2} - 2bx^*)(\mu + 1) + 5\mu + 10x^* \\ a_0 = \mu(3x^{*2} + (10 - 2b)x^* + 4) \end{cases}. \quad (5)$$

Os autovalores são as raízes desse polinômio, isto é, $\det(Df - \lambda I) = 0$. Usando que $x_1^* = 0$ nos coeficientes em 5, o polinômio característico de Df avaliada no ponto fixo P_1 é $(-1 - \lambda)(\lambda^2 + \mu\lambda + 4\mu)$ e seus autovalores são mostrados em 6.

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(-1, \left(\frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 16\mu}}{2} \right), \left(\frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 16\mu}}{2} \right) \right) \quad (6)$$

Assim, vemos que $\lambda_{2,3} > 0 \Leftrightarrow (-\mu + \sqrt{\mu^2 - 16\mu}) > 0 \Leftrightarrow \mu < 0$. Logo, para $\mu > 0$, $\lambda_{1,2,3} < 0$, o que implica que o ponto fixo P_1 é estável. Além disso, o fato de $\lambda_{2,3}$ serem complexos para $\mu < 16$ demonstra que trajetórias próximas tendem para esse ponto fixo de maneira oscilante. Portanto, podemos afirmar que P_1 é um foco estável para $0 < \mu < 16$. Isso pode ser elucidado através da integração numérica do sistema 1, conforme exposto na figura 1a, onde usamos a condição inicial $(0, 01, 1, 4k)$. Também pode ser afirmado que P_1 trata-se de um atrator, uma vez que demonstramos que trajetórias podem tender para P_1 quando atingirem o estado estacionário.

Em contrapartida, $\mu < 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} > 0$, mas $\lambda_1 < 0$ independentemente de μ . Nesse caso, P_1 é chamado de ponto de sela (instável). Dessa forma, há uma bifurcação em $\mu = 0$ que consiste na inversão da estabilidade de P_1 devido à variação de μ .

Por sua vez, os pontos P_2 e P_3 dependem diretamente do parâmetro b e, para termos noção sobre suas estabilidades ao se variar μ , fixaremos $b = 10$. Pelo critério de Routh-Hurwitz, os autovalores de Df só serão todos negativos se, e somente se, os coeficientes em 5 satisfizerem $a_0 > 0$, $a_2 > 0$ e $a_2a_1 > a_0$.

Como $b = 10 \Rightarrow x_2^* = 4$, então $a_2 = \mu - 31 \Rightarrow a_2 > 0 \Leftrightarrow \mu > 31$. Já $a_0 = 12\mu \Rightarrow a_0 > 0 \Leftrightarrow \mu > 0$. Semelhantemente, $a_1 = -27\mu + 8 \therefore a_2a_1 > a_0 \Leftrightarrow -27\mu^2 + 833\mu - 248 > 0$. Chamando $K_+ = \frac{833 + \sqrt{667105}}{54}$ e $K_- = \frac{833 - \sqrt{667105}}{54}$, então $a_2a_1 > a_0 \Leftrightarrow K_- < \mu < K_+$. Mas isso contradiz $a_2 > 0$, pois $K_+ < 31$.

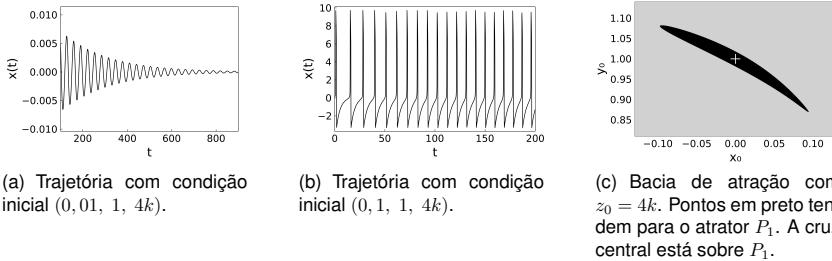


Figura 1: Sistema 1 com $b = 10$, $k = 1,6$ e $\mu = 0,01$.

Portanto, as inequações $a_2 a_1 > a_0$ e $a_2 > 0$ não podem ser ambas satisfeitas concomitantemente. Como consequência, o critério de Routh-Hurwitz indica que os autovalores de P_2 não podem ser todos negativos, ou seja, P_2 é ponto instável independente do valor de μ . Um procedimento análogo pode ser realizado para o ponto P_3 , demonstrando que também é instável.

Dessa maneira, obtemos o comportamento de trajetórias próximas aos pontos fixos através da análise da estabilidade linear. Todavia, o sistema 1 é não-linear, o que limita nossa certeza sobre a estabilidade de trajetórias que se iniciam a partir de um limiar de distância dos pontos fixos calculados.

Por exemplo, na figura 1b usamos a condição inicial $(0, 1, 1, 4k)$ e obtemos um comportamento neuronal chamado de regime de *spikes*. Nesse caso, a trajetória não mais tende para P_1 e há um outro atrator que caracteriza esse regime.

Nesse sentido, podemos considerar a evolução das trajetórias do sistema no espaço de possíveis condições iniciais, chamado de espaço de fase, obtendo se determinadas condições tendem ou não para o atrator P_1 via integração numérica. O espaço de fase do modelo HR é tridimensional, sendo necessário conhecer três condições iniciais (x_0, y_0, z_0) . Assim, é preciso tomar uma seção de Poincaré para visualizar melhor esse espaço, isto é, fixamos $z_0 = 4k$ e analisamos (x_0, y_0) .

Por conseguinte, esboçamos o espaço de fase na figura 1c, em que os pontos pretos representam as condições iniciais (x_0, y_0) que tendem para o atrator P_1 . A esse conjunto dá-se o nome de bacia de atração de P_1 . Os pontos em cinza são as condições que resultam no regime de *spikes*.

Logo, essa investigação matemática da estabilidade local do sistema 1 revela importantes características do comportamento das trajetórias do modelo HR, baseia abordagens numéricas para problemas mais complexos e elucida conceitos fundamentais de sistemas dinâmicos não-lineares.

Referências

- [1] BARRIO, Roberto et al. **Macro-and micro-chaotic structures in the Hindmarsh-Rose model of bursting neurons**. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, v. 24, n. 2, p. 023128, 2014.
- [2] ALLIGOOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. A.(1996), **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems**. [SI]. 2003.

Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensões 1 e 2

Jhuliene Cristina Seger

Licenciatura em Matemática - UFSC

jhulienecs01@gmail.com

Prof. Felipe Vieira (Orientador)

Departamento de Matemática - UFSC

f.vieira@ufsc.br

Palavras-chave: pontos fixos, continuidade, compacidade, retração.

Resumo:

Neste trabalho estudamos o teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensões 1 e 2, que nos garante a existência de um ponto fixo sempre que uma função contínua aplica um conjunto fechado dentro de si mesmo. Nossa objetivo principal é demonstrar o teorema em cada dimensão proposta e para isso, usamos estratégias distintas para cada um dos enunciados.

A ideia de ponto fixo é um tanto simples e é compreendida como um ponto cuja imagem via certa função é o próprio ponto. Ou seja, dada uma função f e um ponto x_0 , se ao aplicar a função obtivermos que $f(x_0) = x_0$, então x_0 é um ponto fixo para esta tal função f .

Note que encontrar um ponto fixo para uma dada função f é o mesmo que encontrar um ponto de intersecção entre os gráficos de $y = f(x)$ e da função identidade $y = x$.

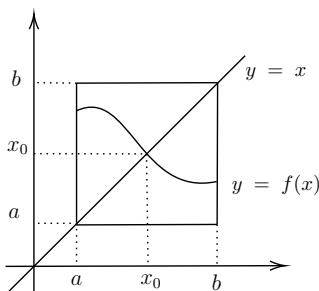


Figura 1: Gráfico de uma função f qualquer e reta $y = x$

O teorema em dimensão 1 nos diz que:

Teorema 1 (Ponto Fixo de Brouwer em dimensão 1) Qualquer função contínua $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ tem pelo menos um ponto fixo, isto é, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

O provamos a partir da construção de uma sequência de intervalos fechados encaixados, dividindo o intervalo fechado $[a, b]$ em subintervalos cujos pontos extremos são levados pela função em direções opostas.

O teorema em dimensão 2 nos diz que:

Teorema 2 (Ponto Fixo de Brouwer em dimensão 2) Qualquer função $f : D \rightarrow D$ contínua, com $D \subset \mathbb{R}^2$ um disco, tem pelo menos um ponto fixo.

Enunciamos desta forma, sendo $D \subset \mathbb{R}^2$ um disco, pois é possível mostrar que o disco é homeomorfo a outros subconjuntos compactos de \mathbb{R}^2 .

Para a demonstração deste teorema, usamos o conceito de retração, definido abaixo.

Definição 1 (Retração) Dados $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $B \subseteq A$. Dizemos que a função $r : A \rightarrow B$ é uma retração se for contínua e se $r(b) = b$, para todo $b \in B$.

Com isso, mostramos a equivalência do Teorema 2 e do teorema que segue:

Teorema 3 (Não-Retração) Não existe qualquer retração que aplique o disco unitário fechado D em sua borda, B .

Ao longo do trabalho, além de demonstrarmos o teorema como proposto, mostramos a equivalência do teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensão 1 com os teoremas que seguem:

Teorema 4 (Valor Intermediário) Seja f contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$. Se um número c satisfaz a condição de $f(a) < c < f(b)$, então existe um ponto $x_0 \in [a, b]$ para o qual $f(x_0) = c$.

Teorema 5 (Anulamento) Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários em relação ao eixo x , então existirá pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

E por fim, apresentamos também algumas aplicações do Teorema 1 a partir das equivalências comentadas.

Referências

- [1] FERREIRA, Wenderson; MARTINS, Eder; SANTOS, Márcio André. **Os Teoremas das Panquecas**. Revista de Matemática de Ouro Preto, 2019.
- [2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- [3] SHASHKIN, Yu A. **Fixed Points**. Volume 2, Traduzido do russo por Viktor Mina-chin, AMS, 1991.
- [4] VAZ, Felipe Rodrigues. **Teoremas de ponto fixo e algumas aplicações**. Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2015.

Somatórios fracionários: como somar uma quantidade não natural de termos

Leonardo Ferreira *

Bacharelado em Matemática Aplicada - UEPG

22001109@uepg.br

Prof. Giuliano G. La Guardia (orientador)

Departamento de Matemática e Estatística - UEPG

gguardia@uepg.br

Prof. Jocemar Q. Chagas (co-orientador)

Departamento de Matemática e Estatística - UEPG

jocemarchagas@uepg.br

Palavras-chave: Soma Fracionária, Constante de Euler-Mascheroni, Números de Bernoulli, Função Gama, Função Zeta.

Resumo:

A noção de adição vista como uma certa “quantidade de quantidades” é primordial na Matemática; sabe-se somar três números, quatro números, mil números. Assim, pode-se questionar: o que poderia significar, por exemplo, a soma de -3 números, a soma de π números ou, de forma geral, a soma de $z \in \mathbb{C}$ números?

Como primeiro exemplo, ao se considerar $S(n) = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, demonstra-se que $S(n) = n(n+1)/2$, de forma que a função $f(x) = x(x+1)/2$, definida sobre \mathbb{R} (ou \mathbb{C}), interpola $S(n)$, ou seja, $f|_{\mathbb{N}} = S$. Ademais, tal interpolação parece ser a mais natural possível. Assim, parece intuitivo definir $\sum_{i=1}^{\pi} i := \pi(\pi+1)/2$. Analogamente, obtém-se as “versões contínuas” de somatórios clássicos, tais como $\sum_{i=1}^n i^2$, $\sum_{i=1}^n i^3$ e $\sum_{i=1}^n q^i$, utilizando-se as respectivas fórmulas fechadas.

Dessa forma, definir a “soma dos primeiros z termos de uma função f ” corresponde a definir a interpolação “mais natural” para a função $n \mapsto \sum_{k=1}^n f(k)$ e, em seguida, calcular o valor de tal interpolação no ponto z . Por mais estranho que tal ideia possa parecer, algumas somas exibem certas propriedades somente quando são analisadas sob um “contexto contínuo”.

Motivações:

Dada uma função $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, a função $x \mapsto \Sigma^x f := \sum_{k=1}^x f(k)$ que associa a cada $x \in V \subset \mathbb{C}$ a “soma dos $x \in \mathbb{C}$ primeiros termos de f ” [2], será denominado

*Bolsista PICME

somatório fracionário de f . Para um caso particular de um tipo especial de funções, denominadas *fracionário-somáveis* [1], calcula-se seu somatório fracionário a partir de

$$\sum_{k=1}^x f = \sum_{k=1}^{\infty} (f(k) - f(k+x)). \quad (1)$$

Por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é fracionário-somável, donde:

$$F(x) = \sum_{k=1}^x f = \sum_{k=1}^x \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right). \quad (2)$$

Observa-se que tal função possui propriedades interessantes, tais como $F'(0) = \pi^2/6$ e $\int_0^1 F(t) dt = \gamma$, em que γ é a constante de Euler-Mascheroni. De forma geral, com respeito à derivada avaliada em zero, quando o seguinte limite existir, definimos a *essência de f* por:

$$\text{ess}(f) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h f = \left(\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^x f \right) \Big|_{x=0} \quad (3)$$

De fato, a partir de certas propriedades e axiomas encontrados em [2], pode-se demonstrar que $\sum^0 f = 0$. Listamos, a seguir, a essência de algumas funções:

f	$\text{ess}(f)$
$x \mapsto c$	c
$x \mapsto x^w$, $w \notin \{0\}$	$-w \cdot \zeta(-w+1)$
$x \mapsto w^x$, $w \notin \{0, 1\}$	$\frac{w}{w-1} \ln(w)$
$x \mapsto \ln(x)$	$-\gamma$
$x \mapsto e^{\pi i x}$	$\frac{\pi i}{2}$
$x \mapsto \operatorname{sen}(\pi x)$	$\frac{\pi}{2}$
$x \mapsto \cos(\pi x)$	0
$x \mapsto e^{\pi i x}$	$\frac{\pi i}{4} + \frac{1}{2}$

Outras propriedades importantes com respeito a somatórios fracionários são:

- 1) $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\sum_{k=1}^n f = \sum_{k=1}^n f(k)$,
- 2) $\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2$, $\sum_{k=x}^y f(k) = \sum_{k=x}^y f - \sum_{k=x}^{x-1} f$,
- 3) $\forall (x, y, s) \in \mathbb{C}^3$, $\sum_{k=x+s}^{y+s} f(k) = \sum_{k=x}^y f(k+s)$,
- 4) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\sum_{k=1}^x (\lambda f + \mu g) = \lambda \sum_{k=1}^x f + \mu \sum_{k=1}^x g$.

Ademais, o *produto fracionário de f* é definido por:

$$\prod_{k=1}^x f := \prod_{k=1}^x f(k) := \exp \left(\sum_{k=1}^x (\ln \circ f) \right). \quad (4)$$

Como exemplo de produto fracionário, a função gama pode ser escrita por:

$$\Gamma(x+1) := \prod_{k=1}^x \text{id} = \prod_{k=1}^x k. \quad (5)$$

Relações com resultados clássicos:

Para uma vasta família de funções, pode-se mostrar as seguintes identidades:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^x f = \text{ess}(f) + \sum_{k=1}^x f' \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^x f = \sum_{k=1}^{\infty} \text{ess}(f^{(k-1)}) \frac{x^k}{k!}.$$

Tais resultados geram identidades clássicas tais como

$$\ln(\Gamma(x+1)) = -\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{k} (-x)^k, \quad (6)$$

pois $\sum x \ln = \ln(\Gamma(x+1))$, $\text{ess}(\ln) = -\gamma$ e $\text{ess}(\ln) = (-1)^k (k-1)! \zeta(k)$ para $k \geq 2$.

Como $\text{ess}(\sum_{k=1}^n g_k) = \sum_{k=1}^n \text{ess}(g_k)$, se supusermos que $\text{ess}(\sum_{k=1}^{\infty} g_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{ess}(g_k)$, para uma função f que pode ser escrita como série de Taylor em torno de zero, pode-se realizar o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^x f &= \sum_{k=1}^{\infty} \text{ess}\left(y \mapsto \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(k-1+l)}(0)}{l!} y^l\right) \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(k-1+l)}(0)}{l!} \text{ess}(y \mapsto y^l) \right) \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l \cdot f^{(k-1+l)}(0) x^k}{l! k!} \\ &= \int_0^x f(t) dt + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{B_l}{l!} (f^{(l-1)}(x) - f^{(l-1)}(0)), \end{aligned}$$

em que B_l são os números de Bernoulli com $B_1 = \frac{1}{2}$. A igualdade acima é o análogo à fórmula de Euler-Maclaurin, válida para somatórios fracionários.

Regularização para séries divergentes:

Como para algumas funções temos $\text{ess}(\varphi') = -\sum_{k=1}^{\infty} \varphi'(k)$, propomos a seguinte regularização para uma série divergente $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$:

$$\# \sum_{k=1}^{\infty} f(k) := -\text{ess}(F), \quad (7)$$

em que F é a “primitiva mais natural de f ”. Por exemplo, para $f(x) = x$, deve-se considerar $F(x) = \frac{x^2}{2}$; como $\text{ess}(x \mapsto x^2) = \frac{1}{6}$, segue-se que $-\text{ess}(F) = -\frac{1}{12}$, donde $\# \sum_{k=1}^{\infty} k := -\frac{1}{12}$. Outras funções foram testadas, tais como $1, \frac{1}{x}, -e^{\pi i x}, e^{-e^{\pi i x}} x$, e os resultados coincidiram com os resultados da literatura.

Referências

- [1] GALVÃO, A. T.; CHAGAS, J. Q. **Uma introdução a somatórios fracionários:** aprendendo a somar uma quantidade não inteira de parcelas. Revista Matemática Universitária, 2021.
- [2] MÜLLER, M.; SCHLEICHER, D. **How to add a noninteger number of Terms:** from axioms to new identities. The American Mathematical Monthly, 2011.

Órbitas periódicas e ergódicas no Toro

Letícia Rodrigues dos Santos
Licenciatura em Matemática - UFPR
leticia.rodrigues1@ufpr.br

Prof. Fernando de Ávila Silva (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
fernando.avila@ufpr.br

Palavras-chave: Campos Vetoriais, Toro Plano, Órbitas Periódicas, Órbitas Ergódicas.

Resumo:

O presente trabalho tem como objetivo fazer um estudo sobre as diferentes órbitas no toro \mathbb{T} , mais especificamente deseja-se responder a pergunta: Quando uma órbita que passa por um ponto p será periódica e quando ela será ergódica?

Mais precisamente, sejam X um campo de vetores no toro, $p \in \mathbb{T}$ um ponto, $\varphi(t, p)$ a curva integral de X passando por p e $C(p) = \{\varphi(t, p), \forall t\}$. Dizemos que órbita $C(p)$ é periódica se existem $t_1 < t_2$ tais que

$$\varphi(t_1, p) = \varphi(t_2, p), \text{ mas } \varphi(t, p) \neq \varphi(t_1, p), \forall t \in (t_1, t_2)$$

Por outro lado, dizemos que $C(p)$ é ergódica quando $\overline{C(p)} = \mathbb{T}$.

Assim, neste trabalho iremos investigar o problema acima considerando o campo constante X_{ab} definido por $X_{ab}(v) = (a, b)$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$ com $a^2 + b^2 \neq 0$. Exibiremos em nossa apresentação as principais ideias na demonstração do seguinte teorema:

Teorema Com respeito as órbitas do campo X_{ab} apenas uma das seguintes possibilidades ocorre:

- Todas as órbitas são periódicas se $a = 0$, ou b/a é um número racional;
- Todas as órbitas são ergódicas se b/a é um número irracional;

Referências

- [1] TAMURA, Itiro. **Topology of Foliations:** An Introduction, Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Soc., 1992.
- [2] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos** Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

Soluções Viajantes para a Equação de Sine-Gordon

Luana Bankersen
Licenciatura em Matemática - UFPR
lubankersen@gmail.com

Prof. Roberto Ribeiro Santos Junior (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
robertoribeiro@ufpr.br

Palavras-chave: Equação de Sine-Gordon, Ondas Viajantes, Equações Diferenciais Parciais.

Resumo: Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de mostrar como alguns conceitos dos cursos de Cálculo, Cálculo Numérico e Equações Diferenciais Parciais (EDP's) podem ser utilizados para modelar fenômenos físicos. Em particular, o foco específico se constituiu na busca por soluções viajantes para a equação de Sine-Gordon.

Inicialmente iremos analisar o contexto e a interpretação física da equação de Sine-Gordon. Observe o vídeo a seguir: [Pêndulos - Sine-Gordon](#).

Note que nos é apresentado um instrumento utilizando pêndulos ligados por um barbante elástico. Ao tirarmos um pêndulo de sua posição inicial, isto gera uma perturbação em todos os outros pêndulos. A equação de Sine-Gordon modela este experimento e é dada por:

$$u_{tt} = u_{xx} - \sin(u).$$

Neste caso, $u(x, t)$ corresponde ao ângulo que o pêndulo que está na posição x faz com sua posição de equilíbrio no instante t .

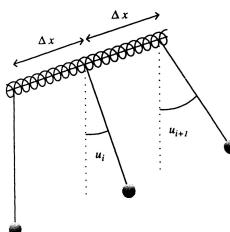


Figura 1: Angulação. Fonte: KNOBEL, 2000, p. 39.

Vejamos as definições a seguir.

Definição: Ondas representadas por funções da forma $u(x, t) = f(x - ct)$, onde f é uma função de uma variável e c uma constante não nula, são chamadas de **ondas viajantes**. A função f determina o **perfil da onda** e $|c|$ sua **velocidade de propagação**.[1]

Definição: Uma **solução viajante** de uma EDP é uma solução que tem a forma de uma onda viajante $u(x, t) = f(x - ct)$.

Para determinarmos soluções viajantes, utilizamos o seguinte algoritmo de resolução:

- **Passo 1:** Supomos que $u(x, t) = f(x - ct)$ é solução da EDP.
- **Passo 2:** Determinamos a função f e a constante c de forma que o Passo 1 seja válido.

Ao fazermos isso, ao fim do Passo 1 trocamos a EDP em u por uma EDO em f .

Fazendo uso desta ferramenta conseguimos, por exemplo, encontrar facilmente soluções viajantes para a equação da onda de primeira ordem:

$$u_t + cu_x = 0.$$

A equação diferencial ordinária obtida para esta EDP é dada por

$$(a - c)f'(z) = 0.$$

Temos duas possibilidades para que a equação da onda tenha soluções viajantes: $c = a$, então f é qualquer função uma vez diferenciável. Se $c \neq a$, então $f'(z) = 0$. Para que $f'(z)$ seja igual a zero, $f(z) = B$ constante. Donde, tem-se a solução trivial.

O objetivo deste trabalho é verificar analiticamente que as expressões 1, 2, 3 a seguir são soluções viajantes da equação de Sine-Gordon. Além disso, implementar computacionalmente cada uma destas soluções de modo a simular a dinâmica dos pêndulos.

$$1. u(x, t) = 4 \arctan \left[\exp \left(\frac{x - ct}{\sqrt{1 - c^2}} \right) \right],$$

que tem a seguinte animação: [Solução Viajante 1](#).

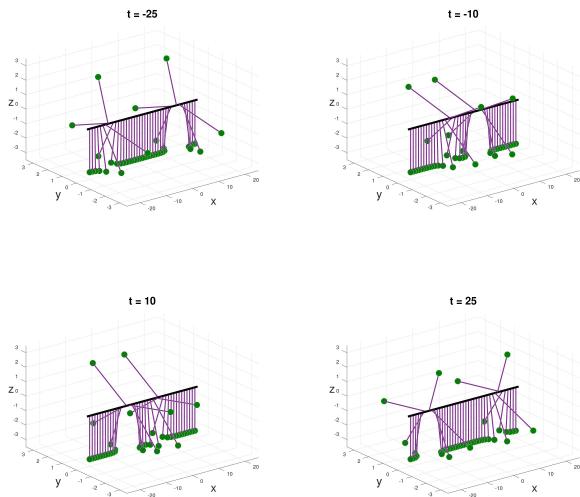
$$2. u(x, t) = 4 \arctan \left[\exp \left(\frac{-(x - ct)}{\sqrt{1 - c^2}} \right) \right],$$

cuja animação é dada por: [Solução Viajante 2](#).

$$3. u(x, t) = 4 \arctan \left[\frac{\sinh \left(\frac{ct}{\sqrt{1 - c^2}} \right)}{c \cosh \left(\frac{x}{\sqrt{1 - c^2}} \right)} \right],$$

esta é uma solução especial pois representa uma colisão. Sua animação é dada por [Solução Partícula-Antipartícula](#).

Vejamos abaixo alguns gráficos comparativos da solução partícula-antipartícula:



Referências

- [1] KNOBEL, Roger. **An introduction to the mathematical theory of waves**. United States of America: American Mathematical Society, 2000.
- [2] SUZUKI, Takashi. soliton-Test3. **YouTube**, 2009. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=SAbQ4MvDqEEt=4s>. Acesso em 9 set. 2022.

Hipoeliticidade Global de campos vetoriais em \mathbb{T}^2

Mahmut Telles Cansiz *

Bacharelado em Matemática - UFPR

mahmut@ufpr.br

Prof. Fernando de Ávila Silva (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

fernando.avila@ufpr.br

Palavras-chave: Hipoeliticidade Global, Séries de Fourier, Sequências Rapidamente Decrescentes, Distribuições.

Resumo:

Em nosso trabalho investigamos a hipoeliticidade global do campo

$$L = \frac{\partial}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

definido no toro \mathbb{T}^2 , isto é, estudamos o seguinte problema: sejam u uma distribuição em \mathbb{T}^2 e $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tais que $Lu = f$. Sob quais condições podemos afirmar que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$?

A resposta para tal problema é obtida através de uma interessante combinação entre estudo das propriedades das Séries de Fourier da função f e da distribuição u com propriedades Diofantinas do coeficiente α .

Nesta apresentação exibiremos as principais ideias contidas na demonstração do seguinte resultado:

O campo vetorial L é globalmente hipoelítico se, e somente se, umas das duas possibilidades ocorre:

a) $\alpha \notin \mathbb{R}$;

b) α é um número irracional e não-Liouville, isto é, existem constantes positivas A e B tais que

$$|m - \alpha n| \geq \frac{A}{\|(m, n)\|^B}, \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial: PET-Matemática.

Referências

- [1] Bobko, N. **Cadernos PET-Matemática:** Hipoeliticidade Global no Toro bidimensional. Curitiba: Imprensa Universitária , 2007.
- [2] Lima, E. L.; **Curso de Análise:** Vol.1 15.ed. . Rio de Janeiro: Impa, 2019.
- [3] Greenfield, S. J.; Wallach, N. R. **Global Hypoellipticity and Liouville Numbers:** Proceedings of the American Mathematical Society Volume 31, No. 1, January 1972
- [4] Beals, R.; **Advanced Mathematical Analysis** 2nd Printing: Springer 1973

Aplicação de Modelos Clássicos para o Estudo do Crescimento da População Brasileira

Mariana da Silva Freitas *
Licenciatura em Matemática
marianadasilvafreitas@hotmail.com

Prof. María Rosario Astudillo Rojas (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
maria.astudillo@ufpr.br

Palavras-chave: crescimento populacional, modelo de Malthus, modelo de Gompertz, modelo de Verhulst.

Resumo:

Este trabalho tem como objetivo principal analisar o crescimento populacional brasileiro através dos modelos clássicos de Malthus, Gompertz e Verhulst. Os dados utilizados para a aplicação desses modelos são do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), que é responsável pelo Censo Demográfico. O Censo acontece a cada 10 anos no Brasil e é uma pesquisa que coleta diversas informações da população brasileira. Os dados do último Censo são de 2010. Em 2020, devido à pandemia e aos cortes de orçamento, o Censo não ocorreu. Isso afetou diretamente, por exemplo, na campanha de vacinação da Covid-19, em que era necessário estimar a quantidade de vacinas a serem compradas com base nos dados da população. Como há imprevistos dessa forma, e não é viável fazer essa pesquisa todos os anos por causa do alto custo, é muito importante que haja outras formas de estudar o crescimento populacional. Desse modo, a aplicação de modelos matemáticos ajuda na previsão e projeção de diferentes cenários.

A previsão do crescimento populacional através de modelos auxilia no desenvolvimento e implementação de políticas públicas e na realização de investimentos públicos e privados. Na área de estudo das dinâmicas de crescimento populacional, há três modelos clássicos: o Modelo de Malthus, o Modelo de Gompertz e o Modelo de Verhulst. Os dados coletados através do Censo foram utilizados na aplicação e análise dos modelos de Malthus, Gompertz e Verhulst para a previsão do tamanho da população brasileira em 2021. Os resultados obtidos foram comparados com os dados previstos e disponíveis pelo IBGE para esse mesmo ano.

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial(PET) - Matemática.

Referências

- [1] BACAËR, N. **A Short History of Mathematical Population Dynamics**. London: Springer, 2011.
- [2] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2010.
- [3] IBGE. **Censo Demográfico**. Disponível em:
<https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/2098-np-censo-demografico/9662-censo-demografico-2010.html?t=series-historicas>. Acesso em: 14 jun.2022.
- [4] IBGE. **Panorama**. Disponível em:
<https://cidades.ibge.gov.br/brasil/panorama>. Acesso em: 14 jun. 2022.

Fractais e suas belezas

Matheus Bueno Bartkevicius *

Bacharelado em Engenharia de Computação - UEPG

matheusbartkev@gmail.com

Prof. Marciano Pereira (Orientador)

Departamento de Matemática e Estatística - UEPG

marciano@uepg.br

Palavras-chave: Fractais, Conjunto de Julia, Ruido fractal, Conjunto de Mandelbrot.

Resumo:

Os fractais são figuras com propriedades e características peculiares, que os diferenciam das figuras geométricas habituais. Intuitivamente, um fractal é um conjunto que satisfaz uma ou mais das condições: i) tem estrutura fina, isto é, sua forma é extremamente irregular ou fragmentada e tem essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas, no sentido que o grau de detalhamento não diminui se examinarmos uma porção arbitrariamente pequena da mesma; ii) é tão irregular para ser descrito pela linguagem da geometria tradicional; iii) tem alguma forma de auto-similaridade; iv) geralmente possui dimensão fractal não inteira; v) em muitos casos é definido de maneira bastante simples, talvez recursivamente.

Mesmo essas figuras tendo características tão exóticas, aparecem em muitos fenômenos físicos, e por sua aparição tão recorrente, são conhecidas como a “geometria da natureza”.

O termo **Fractal**, do latim *Fractus*, que significa quebrado, foi introduzido em 1975 por Benoît Mandelbrot. Entretanto, Pierre Fatou e Gaston Julia iniciaram, independentemente, estudos sobre iterações de funções complexas já no início do século XX, porém tal área só se popularizou recentemente, quando a computação gráfica avançou o suficiente para revelar as intrincadas formas do conjunto de Julia.

Neste trabalho realizamos um estudo das estruturas, características e propriedades relacionadas a fractais, especialmente os gerados por iterações de funções polinomiais complexas com grau maior ou igual a 2. Particularmente para as funções quadráticas complexas estudamos o conjunto de Mandelbrot, bem como uma caracterização alternativa do mesmo, chamada Teorema Fundamental de Mandelbrot, bastante útil do ponto de vista computacional para a construção aproximada da sua imagem.

Além disso, apresentamos uma aplicação de fractais na área da computação gráfica para geração de terrenos e estruturas que se parecem muito com objetos da vida real, como nuvens, montanhas, águas.

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica pelo PIBIC.

Referências

- [1] SERRA, C. P.; KARAS, E. W. **Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos**. Curitiba: Champagnat, 1997.
- [2] FALCONER, K. J. **Fractal geometry: mathematical foundations and applications**. Chichester: Wiley, 2003.
- [3] BEARDON, A. **Iteration of Rational Functions**. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [4] BARNSLEY, F. M. **Fractals everywhere - Second edition**. Georiga: Atlanta, 1993.

Introdução ao cálculo de ordem não inteira

Nicoly Longaretti de Souza
Licenciatura em Matemática - UFSC Blumenau
nicolylong@gmail.com

Prof. Dr. Maicon José Benvenutti (Orientador)
Departamento de Matemática - UFSC Blumenau
m.benvenutti@ufsc.br

Palavras-chave: Calculo Fracionário, Integral de Riemann-Liouville, Derivada de Caputo.

Resumo:

O Cálculo de ordem inteira, sustentado pela Geometria Analítica, foi a maior ferramenta matemática do século XVII, resolvendo problemas até então insolúveis. O motivo de despertar tanta atenção dos matemáticos da época foi a aplicabilidade em amplos campos de estudo, como economia, biologia, engenharias, medicina, física e química [1].

Hoje se aceita o fato de que o Cálculo de ordem inteira foi inventado por Isaac Newton (1642-1727) e por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) durante a década de 1665-1675 [1]. Individualmente, eles configuraram algoritmos de derivada e integral inteiras, os mesmos usados até hoje.

Os cálculos diferencial e integral de ordem inteira ocupam-se essencialmente da formulação de dois problemas: a área sob uma curva e a reta tangente. O problema da área sob uma curva é resolvido por uma integral definida, enquanto o problema da reta tangente é resolvido pela primeira derivada da função em questão.

É verdade que generalizar conceitos tende a ser um processo trabalhoso dentro da matemática e, em particular, a generalização do cálculo para ordem não inteira tem-se mostrado uma tarefa surpreendentemente complicada. Aqui, os termos *Cálculo de ordem não inteira* e *Cálculo fracionário* serão tratados como sinônimos.

Os primórdios do cálculo fracionário remetem a uma troca de correspondências entre Leibniz e Guillaume François Antonie l'Hôpital (1661-1704), em que Leibniz questionou sobre a generalização de uma derivada usual para uma derivada de ordem arbitrária. Ao responder, l'Hôpital apresentou um caso particular: derivada de ordem $1/2$ da função $f(x)$, e fez uso da notação do próprio Leibniz. Sendo profético, Leibniz respondeu que a possibilidade de existir o conceito de tal derivada seria um aparente paradoxo e que, algum dia, consequências frutíferas seriam geradas [2].

Apesar da consolidação como área de pesquisa, ainda existem muitos questionamentos no que tange as aplicações, interpretações e validade das propriedades advindas do cálculo de ordem inteira. Ademais, no contexto do cálculo de ordem não

inteira, as derivadas e integrais são escassas de interpretações geométricas ou físicas [2].

São necessários alguns conceitos preliminares antes de definir a integral e a derivada fracionária. A função Gama é, de fato, a mais importante dentro deste contexto, uma vez que será usada para definir o operador de integração. Considerada uma generalização do conceito de factorial, possibilita o cômputo do factorial de um número $n \in \mathbb{R}_+$ através de uma integral imprópria. Conforme proposto por Euler, a integral imprópria que define o factorial de $n \in \mathbb{N}_+$ é tal que

$$n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt.$$

No qual, a extensão da definição de factorial para $x \in \mathbb{R}_+$ é feita através da função Gama Γ :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Note que $\Gamma(n+1) = n!$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_+$.

Outra função essencial para a definição de integral de ordem não inteira é a chamada função de Gelfand-Shilov. Com $n \in \mathbb{N}$, a função de Gelfand-Shilov de ordem n é definida por

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{se } t \geq 0; \\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

E com $v \in \mathbb{R}_+$, a função de Gelfand-Shilov de ordem v é definida por

$$\phi_v(t) = \begin{cases} \frac{t^v}{\Gamma(v)}, & \text{se } t \geq 0; \\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Agora sim é viável definir a integral de ordem não inteira. Com $f(x)$ sendo uma função localmente integrável, a integral de ordem $v \in \mathbb{R}_+$, denotada pelo operador integral $\mathcal{I}^v f(x)$, é tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^v f(x) &:= \int_0^x \phi_v(x-\tau) f(\tau) d\tau \\ &= \int_0^x \frac{(x-\tau)^{v-1}}{\Gamma(v)} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

No caso em que $v \in \mathbb{N}$, recupera-se o resultado para a integral de ordem inteira. Note que nos conceitos acima a região de integração é $[0, x]$. Dado $a \in \mathbb{R}_+$ ou mesmo $a = -\infty$, é possível generalizar os conceitos para o caso de integração $(a, x]$ e essa classe de integrais são as chamadas integrais de ordem não inteira no sentido de Riemann-Liouville.

Fixado $a \in \mathbb{R}$, com $-\infty < a < \infty$, os operadores integrais laterais de Riemann-Liouville de ordem $v \in \mathbb{R}_+$, denotados por $\mathcal{I}_{a+}^v f(x)$ e $\mathcal{I}_{a-}^v f(x)$, que atuam na função $f(x)$ são definidos por

$$\mathcal{I}_{a+}^v f(x) := \frac{1}{\Gamma(v)} \int_a^x (x-\tau)^{v-1} f(\tau) d\tau, \quad x > a,$$

e

$$\mathcal{I}_{a-}^v f(x) := \frac{1}{\Gamma(v)} \int_x^a (\tau-x)^{v-1} f(\tau) d\tau, \quad x < a.$$

Essas integrais são chamadas de integrais de Riemann-Liouville (RL) à esquerda e à direita, respectivamente. No caso em que $v \in \mathbb{N}$, as integrais de RL coincidem com as integrais de ordem inteira n .

Para as derivadas fracionárias, existem diversas formulações e, aqui, será exposta apenas a derivada fracionária no sentido de Caputo. Seja $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e considere $n = [\alpha] + 1$. Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n , define-se a derivada fracionárias no sentido de Caputo de f com ordem α como $(^C\text{D}_{a+}^\alpha f)(x)$ e $(^C\text{D}_{b-}^\alpha f)(x)$, à esquerda e à direita e há dois casos: se $\alpha \notin \mathbb{N}$ ou se $\alpha \in \mathbb{N}$.

O primeiro, se $\alpha \notin \mathbb{N}$, então

$$(^C\text{D}_{a+}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} =: (I_{a+}^{n-\alpha} D^n f)(x)$$

e

$$(^C\text{D}_{b-}^\alpha f)(x) := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} =: (-1)^n (I_{b-}^{n-\alpha} D^n f)(x),$$

respectivamente, onde $D = d/dx$ e $n = [\alpha] + 1$. Em particular, quando $0 < \alpha < 1$,

$$(^C\text{D}_{a+}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f'(t)dt}{(x-t)^\alpha} =: (I_{a+}^{1-\alpha} D f)(x)$$

e

$$(^C\text{D}_{b-}^\alpha f)(x) := -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{f'(t)dt}{(t-x)^\alpha} =: - (I_{b-}^{1-\alpha} D f)(x).$$

No segundo caso, se $\alpha \in \mathbb{N}$, então as derivadas de Caputo à direita e à esquerda são dadas por

$$(^C\text{D}_{a+}^n f)(x) = f^{(n)}(x) \quad \text{e} \quad (^C\text{D}_{b-}^n f)(x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

Em particular, se $\alpha = 0$, então

$$(^C\text{D}_{a+}^0 f)(x) := (^C\text{D}_{b-}^0 f)(x) = f(x).$$

A partir da integral e da derivada fracionária, se torna possível discutir a generalização da função exponencial, bem como as transformadas integrais, como a de Fourier ou a de Laplace. Também é possível construir a teoria de Equações Diferenciais Fracionárias, que podem ser empregadas em três situações: na aplicação de problemas oriundos do cálculo de inteiro, na descrição mais refinada para fenômenos naturais e em generalizações da teoria [2].

Referências

- [1] EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Unicamp, 1995.
- [2] CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo Fracionário**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

Introdução à controlabilidade de Equações Diferenciais Ordinárias com aplicações

Nicoly Longaretti de Souza
Licenciatura em Matemática - UFSC Blumenau
nicolylong@gmail.com

Prof. Dr. Francis Felix Cordova Puma (Orientador)
Departamento de Matemática - UFSC Blumenau
francis.cordova@ufsc.br

Palavras-chave: Equações diferenciais, Circuito RLC, Controlabilidade.

Resumo:

É de interesse prático a descrição de fenômenos naturais através de sistemas de equações em função de suas variáveis, pois estas equações induzem previsões e facilitam o controle dos fenômenos [2]. As equações serão chamadas de diferenciais no caso em que os sistemas são descritos por variações instantâneas, isto é, através de elementos diferenciais. O nascimento das equações diferenciais se deu a partir do estudo do cálculo por Isaac Newton (1642–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) durante o século XVII.

Apesar de não serem visualizáveis, as equações diferenciais encontram-se presentes no cotidiano das pessoas. Pode-se citar como exemplo a corrente elétrica que passa num circuito fechado, cuja intensidade pode variar com o tempo e, usando leis da eletricidade, modela-se o sistema dinâmico associado. Esses sistemas dinâmicos são ubíquos na matemática e na natureza e são usados para modelar e fazer previsões de sistemas físicos, biológicos, financeiros e outros. Consequentemente, a teoria de controle de sistemas dinâmicos encontra também as mais diversas aplicações e uma aplicação da teoria é o Circuito RLC em série com fonte em que, para a modelagem, inicialmente, é importante ressaltar alguns conceitos de Física Eletrostática.

Um circuito elétrico é uma interconexão de dispositivos elétricos conectados entre si [1] e o circuito RLC tem como componentes uma resistência R , um indutor L e um capacitor C . Também será considerada uma fonte de tensão V_s e a configuração desses dispositivos é feita em série.

A corrente elétrica i é o fenômeno em que os elétrons são conduzidos pelo interior de algum material em razão da aplicação de uma diferença de potencial elétrico. Assim, a corrente $i(t)$ é dada pela variação positiva da carga q no tempo: $i = \frac{dq}{dt}$. E a tensão $v(t)$ é definida como a diferença de potencial elétrico entre dois pontos [1].

O primeiro componente do circuito RLC é o resistor, em que a resistência R de um elemento representa sua capacidade de resistir ao fluxo de corrente elétrica. A Lei de

Ohm diz que a queda de tensão em um resistor é proporcional à corrente que passa por ele, então $v_R(t) = Ri(t)$, sendo R a constante positiva de resistência [1].

O segundo elemento é um capacitor formado por duas placas condutoras separadas por um isolante, em que a capacitância C é a razão entre a carga depositada em uma placa de um capacitor e a diferença de potencial entre as duas placas. Assim, tem-se que a carga q acumulada em um capacitor é proporcional à tensão entre seus polos. Então $q_C(t) = Cv_C(t)$, sendo C a constante positiva de capacitância. Uma forma de escrever a capacitância C é em função da carga q e da tensão $v(t)$: $C = \frac{q}{v(t)}$ [1]. Assim, $q = Cv(t)$ e, portanto, $i = C\frac{dv(t)}{dt}$. A tensão no indutor será a mesma da fonte de tensão, ou seja, $v_C(t) = v(t)$.

Por fim, um indutor consiste em uma bobina de fio condutor que limita a variação da corrente. A Lei de Henry diz que a queda de tensão em um indutor L é proporcional à variação da corrente, ou seja, $v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$, sendo L a a constante positiva de indutância. É possível reescrever a tensão do indutor como $v_L(t) = LC\frac{d^2v(t)}{dt^2}$ [1].

Ademais, a Lei de Kirchhoff para tensão diz que a soma das quedas de tensão em torno de uma malha fechada é zero. Dessa forma, combinando as tensões obtidas anteriormente, obtém-se a Equação Diferencial Ordinária do circuito RLC em termos matriciais:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} \end{bmatrix}.$$

Agora, fazendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

e considerando o valor inicial $y(0) = y_0$, tem-se que o sistema dinâmico do circuito RLC, também chamado de equação de estado, é

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

Assim, pelo método de solução com autovalores, a solução será da forma $y = e^{At}v_0 + e^{At}v_1$ e as raízes do polinômio característico da matriz A, ou também chamadas de frequências naturais, serão da forma

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

Uma utilidade do Circuito RLC é nos aparelhos de rádio FM, em que o circuito é usado para selecionar e amplificar o sinal de rádio. O aparelho de rádio possui um indutor fixo, um capacitor variável e sua resistência intrínseca. Então o usuário ajusta a capacitância para que a frequência de ressonância do circuito coincida com a frequência de alguma estação de rádio já existente. Uma questão importante é o que pode ser feito quando há algum ruído ou interferência no sinal, uma vez que a perturbação pode ser natural ou proposital.

A teoria de controle é uma área da matemática aplicada que tem como foco a análise de sistemas que permitem a atuação de uma entrada no sistema que influencia seu comportamento. Como a teoria de controle trabalha com qualquer sistema dinâmico, pode ser aplicada em qualquer área que seja possível modelar, indo das

questões da engenharia até economia e ecologia. Para aplicar um controle $u(t)$ em um sistema dinâmico, basta adicioná-lo na equação de estado:

$$\begin{cases} y'(t) = A \cdot y(t) + B \cdot u(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Usando a matriz A e o vetor $y(t)$ encontrados anteriormente e considerando que só é possível aplicar controle na segunda linha da matriz A , a equação de estado com controle, escrita em termos matriciais, é da forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ \begin{bmatrix} v(0) \\ \frac{dv(0)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Um dos importantes teoremas na teoria de controle é o Teorema de Kalman [3], que afirma que o sistema é exatamente controlável no tempo $T > 0$ se, e somente se,

$$\text{posto} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n,$$

em que n é o número de equações do sistema de EDO associado. Isso significa que se o sistema é controlável em algum tempo $T > 0$, ele será controlável em qualquer tempo. A matriz $\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ será chamada de matriz de controlabilidade e, em particular, esse resultado conclui que, para EDO's lineares, o tempo de controle é irrelevante.

Sendo $AB = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}^T$ e aplicando o Teorema de Kalman no circuito RLC, conclui-se que a matriz de controlabilidade é

$$\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

e o posto dessa matriz de controlabilidade será

$$\text{posto} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{R}{L} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Note que o sistema de EDO associado ao circuito RLC possui 2 equações. Portanto, pelo Teorema de Kalman, o circuito RLC é exatamente controlável em $T > 0$ e poderá ser aplicado um controle viável $u(t)$.

Referências

- [1] ALEXANDRE, C. K.; SADIQU, M. N. O. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. Porto Alegre: AMGH, 2013.
- [2] BAUMEISTER, J.; LEITÃO, A. **Introdução à teoria de controle e programação dinâmica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [3] KALMAN, R. E. On the general theory of control systems. In **Proceedings First International Conference on Automatic Control**. Moscow: IFAC, pages 481–492, 1960.

Uma aplicação da Função de Green

Victor Antônio Lima do Nascimento
Licenciatura em Matemática - UFSC
victorantoniolima99@email.com

Prof. Felipe Vieira (Orientador)
Departamento de Matemática - UFSC
f.vieira@ufsc.br

Palavras-chave: equação de poisson, distribuição delta de dirac, função de green.

Resumo:

O objetivo deste trabalho é estudar a Função de Green para resolver uma Equação Diferencial Parcial dada pela Equação de Poisson

$$\nabla^2 u = \rho,$$

para $u(x, y, z)$, onde $\rho(x, y, z)$ é uma função dada.

A função dada que iremos utilizar é a função conhecida como Função Delta de Dirac, que não é uma função em seu real significado, é, na verdade uma distribuição normal, denotada por:

$$\delta(x - y),$$

também conhecida como função de impulso unitário.

Definição: A Função Delta de Dirac satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\delta(x - y) = 0$ para $x \neq y$;

2. $\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(x - y) dy = 1$.

Assim, estaremos interessados em analisar Função de Green $G(x, y)$ para encontrar uma solução para a EDP, como enunciado no teorema seguinte.

Teorema: Se $G(x, y)$ satisfaz a equação diferencial $\nabla^2 u = \rho$, com ρ substituído por $\delta(x - y)$, então

$$u(x) = \iiint_{\mathbb{R}^3} G(x, y) \rho(y) dy$$

é solução para $\nabla^2 u = \rho$.

Referências

- [1] IÓRIO, Valéria. **EDP**:Um curso de Graduação. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [2] MARSDEN, E. J.; TROMBA, A. **Internet Supplement for Vector Calculus**. New York: W.H. Freeman and Company, 2003.

Análise Numérica

Banca Avaliadora:

Professores:

Profa. Ailin Ruiz Zarate de Fábregas

Prof. Roberto Ribeiro Santos Júnior

Estudantes da pós graduação:

Pedro Henrique Antunes de Oliveira

Tomografia por Impedância Elétrica (EIT): Modelo Contínuo e Modelo Completo de Eletrodos

Felipe K. Riffel * , Samuel B. Mendes † e Lucas M. Santana ‡
Matemática - Bacharelado e Licenciatura - UFSC

riffel.felipe@grad.ufsc.br, samuel.baldini.mendes@gmail.com, l.m.santana@grad.ufsc.br

Prof. Dr. Fábio Junior Margotti (Orientador)
Departamento de Matemática - UFSC
fabio.margotti@ufsc.br

Palavras-chave: EIT, Problemas Inversos Não-Lineares, Modelo Contínuo, Modelo Completo de Eletrodos.

Resumo:

A Tomografia por Impedância Elétrica consiste no seguinte problema inverso: aplicam-se correntes elétricas em alguns eletrodos sobre a superfície de um corpo, e, medindo os potenciais resultantes, tenta-se reconstruir uma imagem desse corpo através de sua condutividade elétrica. Há alguns modelos matemáticos que procuram descrever tal problema e permitir sua solução numérica. Tratar-se-á de dois dos principais: os chamados Modelo Contínuo e Modelo Completo de Eletrodos.

No Modelo Contínuo, descrito inicialmente por Calderón [1], considera-se um corpo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ com certas propriedades munido de uma condutividade $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Denotam-se $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ as correntes aplicadas sobre a fronteira, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a distribuição do potencial resultante em Ω e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ as voltagens resultantes sobre a fronteira. Nesse modelo são consideradas as propriedades as quais $\int_{\partial\Omega} g = 0$ e as seguintes equações obtidas por propriedades eletromagnéticas:

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0, \text{ em } \Omega$$

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} = g, \text{ em } \partial\Omega,$$

tal que η é o vetor normal unitário apontando para fora do conjunto em cada ponto sobre $\partial\Omega$. Através desse modelo, como mostram Astala e Päivärinta (2006, *apud* [2]), é possível demonstrar a existência de uma única função u que satisfaz todas as condições, dadas γ e g pertencentes a espaços vetoriais apropriados, além de que

*Pesquisador Voluntário de Iniciação Científica pela Universidade Federal de Santa Catarina.

†Pesquisador Voluntário de Iniciação Científica pela Universidade Federal de Santa Catarina.

‡Bolsista de Iniciação Científica pela Universidade Federal de Santa Catarina.

$f = u|_{\partial\Omega}$. Ou seja, com uma condutividade γ , para cada corrente g aplicada há só uma distribuição de potencial u que respeita as restrições dadas. Com isso, pode-se definir ainda um operador Λ_γ que associa cada corrente g à voltagem f correspondente sobre a fronteira, chamado operador Neumann para Dirichlet, o qual depende somente de γ e é definido para cada γ nos espaços apropriados.

Assim, o problema inverso associado trata de reconstruir γ com conhecimento parcial das informações de Λ_γ , as quais são obtidas aplicando k correntes elétricas conhecidas (g_1, \dots, g_k) sobre a fronteira e seus respectivos potenciais resultantes (f_1, \dots, f_k) medidos também sobre a fronteira. Isso se traduz ainda considerando o operador direto F que leva cada γ ao operador Λ_γ correspondente, onde se mostra que F se trata de um operador injetivo, não linear e diferenciável. Assim, é possível reconstruir uma solução aproximada através de métodos de regularização usando sua derivada.

No chamado Modelo Completo de Eletrodos, como descrito em [3], consideramos um corpo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ com interior não vazio tendo uma condutividade γ , e na superfície $\partial\Omega$ são atrelados L eletrodos. Denotamos $e_i \subseteq \partial\Omega$ a parcela da superfície que corresponde ao i -ésimo eletrodo, com $1 \leq i \leq L$ e $e_i \cap e_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Em cada e_i é aplicada uma corrente com amperagem média $I_i \in \mathbb{R}$. Essas correntes aplicadas sobre a superfície do corpo, atravessando-o considerando sua condutividade, geram um potencial $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sobre Ω , o qual resulta em potenciais $U_i \in \mathbb{R}$ medidos sobre cada eletrodo.

Como mostram Somersalo *et. al.* [3], pelas propriedades físicas do eletromagnetismo obtemos algumas relações que ajudam a modelar o problema. Primeiramente, pelo princípio de conservação de carga:

$$\sum_{j=1}^L I_j = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^L U_j = 0, \text{ dado o potencial terra como referência.} \quad (2)$$

Além disso, obtemos quatro equações que relacionam as diferentes funções envolvidas. São elas:

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0, \text{ em } \Omega \quad (3)$$

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \text{ em } \partial\Omega \setminus \cup_{j=1}^L e_j \quad (4)$$

$$\int_{e_j} \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} = I_j, j = 1, \dots, L \quad (5)$$

$$u|_{e_j} + z_j \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} = U_j, j = 1 \dots L \quad (6)$$

nas quais η é o vetor normal unitário a $\partial\Omega$ que aponta para fora do conjunto em cada ponto, $u|_{e_j}$ representa o potencial u restrito à fronteira na região de cada eletrodo e_j e cada z_j é uma constante positiva que representa a chamada impedância de contato em cada eletrodo respectivo. Essa modelagem do problema, composta das quatro relações acima em conjunto com as propriedades das correntes e potenciais, é a qual se chama de Modelo Completo de Eletrodos.

Assim como no Modelo Contínuo, Somersalo *et. al.* [3] mostram que pode-se chegar em equações variacionais nas quais se demonstra que existe um único par (u, U) , onde $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $U = (U_1, \dots, U_L) \in \mathbb{R}^L$, que satisfaz as hipóteses do modelo para cada condutividade γ e para cada padrão de corrente $I = (I_1, \dots, I_L)$ aplicado com as condições dadas. Logo, é possível definir também um operador $\Lambda_\gamma : \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}^L$ que leva cada padrão de correntes I ao padrão de potenciais U associado, o qual compõe o problema inverso associado de reconstruir γ a partir das informações de Λ_γ .

Na prática, consideramos o operador direto F_G , que dado um vetor de padrões de correntes $G = (I^{(1)}, \dots, I^{(k)}) \in \mathbb{R}^{L \cdot k}$ associa cada γ a um vetor de padrões de potenciais resultantes $\Gamma_\gamma = (U^{(1)}, \dots, U^{(k)})$, além de que se demonstra ser um operador diferenciável nos espaços de Banach apropriados. Assim, aplicam-se diferentes k padrões de correntes I , obtendo um total de k padrões de potenciais U medidos sobre a fronteira, a fim de tentar aproximar Λ_γ , para então tentar obter γ a partir de técnicas de regularização.

Neste projeto de pesquisa, buscamos estudar os modelos para a Tomografia por Impedância Elétrica, bem como os métodos de discretização do problema, principalmente através do chamado Método de Elementos Finitos. Ainda, estudamos as técnicas de regularização de problemas inversos a fim de implementar e aperfeiçoar as implementações já realizadas anteriormente para resolução do problema, as quais foram desenvolvidas com uso da linguagem Python em especial com uso da biblioteca FEniCS, a qual provém métodos e ferramentas para os Métodos Finitos.

Referências

- [1] CALDERÓN, Alberto P. On an inverse boundary value problem. **Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics** (Rio de Janeiro, 1980), p. 65–73. Soc. Brasil. Mat., Rio de Janeiro, 1980.
- [2] MARGOTTI, Fabio J. **On Inexact Newton Methods for Inverse Problems in Banach Spaces**. 2015. Tese (Doutorado) - Faculdade de Matemática do Instituto de Tecnologia de Karlsruhe (KIT), Karlsruhe. 2015.
- [3] SOMERSALO, Erkki; CHENEY, Margaret; ISAACSON, David. Existence and uniqueness for electrode models for Electric Current Computed Tomography. **SIAM Journal on Applied Mathematics**. Vol. 52, No. 4, p. 1023-1040. 1992.

Modelo matemático para a dinâmica imunológica celular incluindo células dendríticas

Milene Karine Gubetti*

Licencianda em Matemática - UFSC

milene.gubetti@grad.ufsc.br

Prof^a. Louise Reips (Orientadora)

Departamento de Matemática - UFSC

l.reips@ufsc.br

Palavras-chave: câncer; células dendríticas; equações diferenciais; modelo matemático; simulação numérica.

Resumo:

O câncer é uma patologia que surge de uma mutação durante o processo de divisão celular descontrolado. Esse processo pode ter várias causas, entre fatores externos e internos, como a genética. O sistema imune inato pode ser visto como um sistema de defesa que combate o estabelecimento do foco da infecção; mas, mesmo sendo inadequado para essa função, ele inicia - ao recrutar e ativar as células dendríticas (D) - a resposta imune adaptativa, que compõe uma parte fundamental das defesas humanas contra infecção [7]. As citocinas regulam a ativação ou inibição de células imunes e proliferação de células tumorais. Sinais imunológicos do tipo 1, incluindo macrófagos do tipo 1 (M_1), células T citotóxicas (T_C), células natural killer (N_K), T-helper 0 (T_0) e T-helper 1 (T_1) produzem citocinas pró-inflamatórias, enquanto citocinas anti-inflamatórias são secretadas por sinais imunológicos tipo 2, como macrófagos do tipo 2 (M_2), células T-helper 2 (T_2) e T-helper 17 (T_{17}) [1]. Citocinas como o I_α são importantes no processo de ativação das células dendríticas, enquanto que outras, como a I_{10} , são fatores de desativação celular [4].

A pesquisa busca estudar equações diferenciais capazes de descrever a dinâmica imunológica celular em pacientes com tumores sólidos. Para tal, fez-se um estudo das células e interleucinas concernentes no processo da patologia, uma revisão da literatura [3, 6], e criou-se uma equação que representa as células dendríticas pertencentes ao sistema de defesa para reconhecer e atacar células tumorais (C) a partir do modelo de [1].

A taxa de crescimento das populações celulares pode ser descrita como:

$$\frac{dM_1}{dt} = \rho_m I_\alpha C_i + \frac{\alpha_m M_1 \left(1 - \frac{M_1}{\beta_m}\right)}{1 + \eta_3(I_\beta + I_{23})} - \delta_m M_1 C - \mu_m M_1 \quad (1)$$

*Bolsista/Voluntário do Programa de Iniciação Científica.

$$\frac{dM_2}{dt} = \rho_m I_{10} C_i + \frac{\alpha_m M_2 \left(1 - \frac{M_2}{\beta_m}\right)}{1 + \eta_1 I_\gamma} - \mu_m M_2 \quad (2)$$

$$\frac{dN_K}{dt} = \rho_K I_\alpha C_i + \frac{\alpha_K N_K \left(1 - \frac{N_K}{\beta_K}\right)}{1 + \eta_3 (I_\beta + I_{23})} - \delta_K N_K C - \mu_K N_K \quad (3)$$

$$\frac{dT_C}{dt} = \rho_8 I_{12} C_i + \frac{\alpha_t T_C \left(1 - \frac{T_C}{\beta_t}\right)}{1 + \eta_3 I_\beta} - \delta_t T_C C - \mu_8 T_C \quad (4)$$

$$\frac{dT_0}{dt} = \rho_t I_{12} C_i + \frac{\alpha_t T_0 \left(1 - \frac{T_0}{\beta_t}\right)}{1 + \eta_3 I_\beta} - \delta_t T_0 C - \mu_t T_0 \quad (5)$$

$$\frac{dT_1}{dt} = \rho_t I_{12} T_0 + \frac{\alpha_t T_1 \left(1 - \frac{T_1}{\beta_t}\right)}{1 + (\eta_3 I_\beta + \eta_2 I_4)} - \delta_t T_1 C - \mu_t T_1 \quad (6)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \rho_t I_4 T_0 + \frac{\alpha_t T_2 \left(1 - \frac{T_2}{\beta_t}\right)}{1 + \eta_3 I_\beta} - \mu_t T_2 \quad (7)$$

$$\frac{dT_{17}}{dt} = \rho_t I_6 T_0 + \frac{\alpha_t T_{17} \left(1 - \frac{T_{17}}{\beta_t}\right)}{1 + \eta_1 (I_2 + I_{16})} - \mu_t T_{17} \quad (8)$$

$$\frac{dD}{dt} = \phi_D I_\alpha C_i + \frac{\alpha_D D \left(1 - \frac{D}{\beta_D}\right)}{1 + \eta_3 I_{10}} - \delta_D D C - \mu_D D \quad (9)$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha_C C \left(1 - \frac{C}{\beta_C}\right) + \theta_C M_2 C - \left[\frac{\Lambda_C (M_1 + N_K + T_C + T_1 + D)}{1 + \eta_3 I_B} \right] C - \mu_C C \quad (10)$$

com condições iniciais para $t = 0$:

$$M_1(t), M_2(t), N_K(t), D(t), C(t) > 0 \text{ e } T_C(t), T_0(t), T_1(t), T_2(t), T_{17}(t) = 0. \quad (11)$$

Em que: (i) $C_i = \frac{C}{(k+C)}$ é a saturação de células cancerígenas e k representa a média de saturação das células cancerígenas estimuladas pela resposta imune; (ii) populações celulares têm crescimento logístico a uma taxa α_i até uma capacidade de suporte β_i ; (iii) células que interagem com as células tumorais são desativadas a uma taxa δ_i ; (iv) as células têm um período de meia vida μ_i^{-1} .

Analizando o modelo, observa-se que cada uma das funções e suas derivadas parciais são contínuas em uma região Ω do espaço. Então, existe um intervalo no qual existe uma única solução do sistema de equações diferenciais (1-10) que também satisfaz as condições iniciais (11), pelo Teorema de Existência e Unicidade para Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem [2]. O modelo não deve ferir as condições biológicas e, por isso, provam-se restrições, como a não negatividade, nas soluções.

Resolvendo o problema de valor inicial (1-11) utilizando os parâmetros médicos da literatura e o método numérico explícito Runge-Kutta de ordem 4 e 5, obtém-se resultados apresentados na Figura (1) que reafirmam os da literatura revisada em relação à população tumoral.

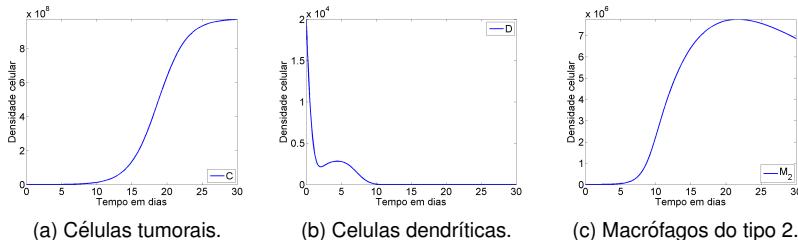


Figura 1: Crescimento populacional de células tumorais, dendríticas e macrófagos tipo 2.

O modelo matemático apresentado contém uma nova equação referente ao crescimento populacional de células dendríticas. O comportamento encontrado, por meio de métodos numéricos, para o crescimento de células tumorais coincide com dados já publicados [5]. Alcança-se o objetivo de aperfeiçoar modelos matemáticos capazes de prever o comportamento de tal doença após sua descoberta como forma de auxiliar no prognóstico terapêutico.

Referências

- [1] AMIMA, I. M.; FRIEDMAN, A. **Investigating tumour micro environment dynamics based on cytokine-mediated innate-adaptive immunity**. Tese de Doutorado. Stellenbosch: Stellenbosch University, 2018.
- [2] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [3] CHOU, C. S.; FRIEDMAN, A. **Introduction to mathematical biology**. Switzerland: Springer, 2016.
- [4] CONTI, Bruno José; SANTIAGO, Karina Basso; SFORCIN, José Maurício. Células dendríticas: mini-revisão. **BioSaúde**, v. 16, n. 1, p. 28-33, 2014.
- [5] DEN BREEMS, Nicoline Y.; EFTIMIE, Raluca. The re-polarisation of M2 and M1 macrophages and its role on cancer outcomes. **Journal of theoretical biology**, v. 390, p. 23-39, 2016.
- [6] GUIRALDELLO, R. T. **Modelo matemático de tratamento de câncer via quimioterapia em ciclos**. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2015.
- [7] MURPHY, K. **Imunobiologia de Janeway**. Artmed Editora, 2014.

Educação Matemática

Banca Avaliadora:

Professores:

Prof. Luiz Antônio Ribeiro de Santana
prof. Emerson Rolkouski
prof.^a Priscila Kabbaz Alves da Costa
prof.^a Tania Teresinha Bruns Zimer
prof.^a Elisângela de Campos
prof. Elenilton Vieira Godoy

Estudantes da pós graduação:

Eduarda de Almeida
Bruno Teilor
Keith Gabriella Flenik
Rafael Moreira

Estudo de Trigonometria através de materiais concretos

Alexandre Ruteski¹, Bianca de Assis Natal², Brenda Dal Pupo Monteiro³, Danyele Gorges Castanha⁴, Leonardo Angelo Rigo⁵
Licenciatura em Matemática – UFPR

*ale.ruteski@outlook.com, bianca-natal@hotmail.com, brendadalpupo@gmail.com,
danyele.gorges@ufpr.br, leonardorigo76@gmail.com*

Prof. Elisângela de Campos (Orientadora)

Departamento de Matemática – UFPR

eliscampomat@gmail.com

Palavras-chave: Trigonometria, radianos, funções trigonométricas.

Resumo:

Este trabalho tem o objetivo de relatar a prática que foi realizada no Colégio Estadual Maria Aguiar Teixeira por alunos participantes do Programa Licenciar – projeto matemática – da Universidade Federal do Paraná. A atividade foi aplicada em duas turmas do 2º ano do Ensino Médio no retorno das férias escolares, sendo baseada no uso de materiais concretos para o estudo de trigonometria.

O Programa Licenciar: Laboratório de ensino de Matemática é um projeto de extensão da Universidade Federal do Paraná que tem como objetivo capacitar os alunos do curso de Licenciatura em Matemática a trabalhar em um Laboratório de Matemática, desenvolvendo atividade e materiais didáticos que envolvam investigação matemática, resolução de problemas e jogos.

O Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) é um lugar onde é possível desenvolver e realizar atividades investigativas, construir o pensamento matemático, é também um ambiente de exploração tanto dos alunos quanto dos professores para conjecturar e questionar. Além de ser um lugar onde é possível guardar materiais e onde o professor irá tirar as possíveis dúvidas dos alunos.

Então, com o objetivo de fazer um estudo de trigonometria através de materiais concretos, as atividades foram divididas em etapas, sendo que a aplicação ocorreu em duas aulas de 50 minutos cada, para cada uma das duas turmas. Através dessas atividades, buscou-se facilitar o aprendizado, instigando os alunos a pensarem como matemáticos.

No momento do desenvolvimento das atividades aconteceram alguns imprevistos, como por exemplo criar atividades que estivessem mais acentuadas a realidade dos alunos, com um objetivo claro e direto, a confecção do material, que deveria ser de fácil acesso aos professores e alunos, mas que foram contornados. Esses imprevistos serviram como aprendizado para nós que durante o projeto iremos analisar tanto a preparação das atividades, como a construção dos materiais, além de que, podem contribuir para a melhoria das futuras aplicações.

Para o desenvolvimento dessa proposta, foi feita a leitura do artigo “Cenários para Investigação” de Ole Skovsmose e também a leitura “Investigações matemáticas na sala de aula” livro de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira. Durante a aplicação das atividades, temos como objetivo assumir uma postura interrogativa, a fim de promover a reflexão dos estudantes sobre o que vão fazer, visto que uma atividade investigativa deve incentivar o aluno a agir e pensar como um matemático.

Sobre o conteúdo, a trigonometria tem como objeto de estudo a relação entre a medida dos lados e dos ângulos de um triângulo, sendo que sua aplicação se estende a outros campos além

¹ Bolsista do Programa Licenciar.

² Bolsista do Programa Licenciar.

³ Bolsista do Programa Licenciar.

⁴ Voluntário do Programa Licenciar.

⁵ Voluntário do Programa Licenciar.

da Matemática, como da Mecânica, Acústica, Música, Topologia, Engenharia, entre outros. Atualmente, a trigonometria não aparece de modo explícito na Base Nacional Comum Curricular – BNCC, mas está articulada com a Geometria. Sendo assim, através da trigonometria, pretende-se contemplar as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

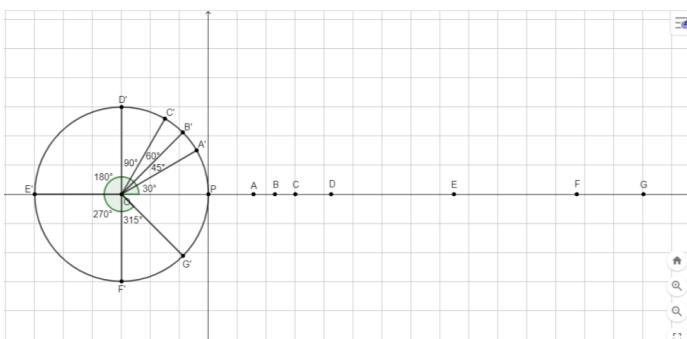
Dentro desse conteúdo, temos questões frequentes como: O que é radiano? Por que o seu uso é necessário? Sendo que existem diversas definições de ângulos e radianos presentes em livros didáticos, mas tal divergência dificulta a compreensão desse conceito tanto para alunos como para professores. Esses questionamentos podem acabar sendo omitidos, buscando facilitar o trabalho para aqueles que ensinam, mas também para aqueles que aprendem, o que pode acarretar uma série de problemas subsequentes, visto que esses conflitos começam a se destacar à medida que os conteúdos avançam.

É possível notar que grande parte dos alunos acabam confundindo o conceito de radiano com um algoritmo usado apenas para conversão para graus. Sendo assim, a primeira atividade dessa sequência tem como objetivo apresentar o conceito de radiano de maneira mais esclarecedora. Em seguida, faremos uma revisão, sobre como é o círculo trigonométrico e por que o seno é representado pelo eixo y, o cosseno pelo eixo x e onde está localizada a tangente, para posteriormente propor uma atividade para a construção das funções trigonométricas.

Na atividade que aborda o conceito de radianos, utilizando 3 círculos com diferentes raios, o aluno deve medir com um barbante o tamanho do raio do círculo e colocá-lo sobre o comprimento do círculo, marcar a medida encontrada e com o transferidor encontrar o ângulo correspondente a esse arco. Com isso, o aluno irá construir a medida de radiano e poderá observar o que acontece quando a medida do raio aumenta. Assim, pode-se concluir então que não importa a medida do raio a ser utilizado, o ângulo será sempre o mesmo. Além disso, é possível estabelecer a relação de que uma circunferência possui como medida 2π radianos.

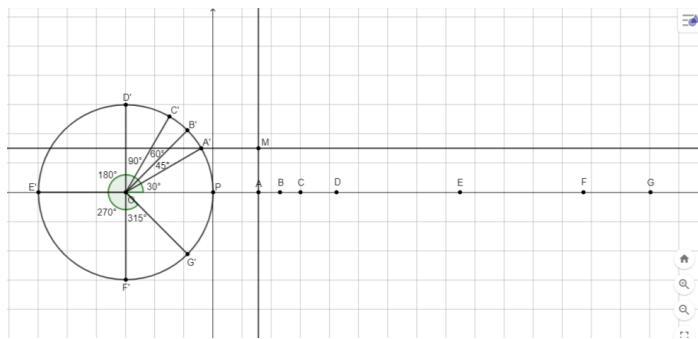
Já na atividade de construção dos gráficos das funções trigonométricas, os alunos irão construir o gráfico das funções seno, cosseno e tangente, a fim de observar o comportamento de cada função. A forma para a construção de cada função segue a mesma ideia, então mostraremos aqui apenas a construção da função seno. Para isso, utilizaremos folhas milimetradas, um pedaço de barbante, tachinhas ou fita adesiva, régua, transferidor, compasso e EVA. Segue o passo a passo para a construção da função seno:

1. No papel milimetrado você irá traçar um círculo e um par de eixos x e y;
2. Fixar o barbante no centro da circunferência (para isso, posicione o EVA em baixo do papel milimetrado e prenda o barbante com a tachinha);
3. Com o auxílio do transferidor, marcar os ângulos $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ e 315° ;
4. Medir o tamanho do arco de cada um desses ângulos com o barbante e transferir para o eixo x, a partir da origem do eixo;



Fonte: Os autores, 2022

5. Após transferidos os pontos, traçar uma reta perpendicular no primeiro ponto, paralela ao eixo y. Em seguida, traçar uma reta paralela ao eixo x no ponto do ângulo correspondente. Por fim, marcar o ponto na interseção dessas duas novas retas, e esse será o primeiro ponto do gráfico;



Fonte: Os autores, 2022

6. Repetir esse mesmo processo para os outros pontos.

Referências:

- [1] BRASIL . Base Nacional Comum Curricular. Ensino Médio. Brasília: MEC.
- [2] SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.
- [3] OLIVEIRA, Hélia; BROCARDO, Joana; DA PONTE, João Pedro. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Autêntica, 2016.

Semana da Matemática

Amanda Maciel De Oliveira, Brenda Dal Puppo Monteiro, Laura Carolina Aymoré Ferrandin, Thais Spannenberg Machado Dos Passos e Natalia Chicora.

Licenciatura em Matemática – UFPR

amanda.maciel@ufpr.br, brendadalpuppo@gmail.com, lauraferrandin@gmail.com,
nataliachicora@gmail.com, tatasmp10@gmail.com

Prof. Cleber de Medeira

Departamento de Matemática – UFPR

clebermedeira@ufpr.br

Palavras-chave: Matemática, Graduação em Matemática, Evento de Extensão.

Resumo:

A Semana da Matemática (SMAT) é um evento realizado pelo grupo Programa de Educação Tutorial-PET Matemática na Universidade Federal do Paraná-Centro Politécnico, no qual são apresentadas as várias frentes nas quais um profissional da Matemática pode atuar como: pesquisa em uma carreira acadêmica, docência na educação básica, saúde mental durante a graduação ou até mesmo a atuação no setor financeiro e na indústria. Esse evento teve como público alvo os alunos da Matemática, principalmente os calouros ingressantes em 2021 e 2022, mas também é aberto para alunos dos demais cursos. Nesse ano de 2022, a SMAT ocorreu presencialmente, após o retorno das aulas presenciais, nos dias 06, 07 e 08 de junho, sendo o primeiro dia do evento voltado para a apresentação da grade curricular do curso à comunidade matemática, de forma que os alunos dos turnos da tarde e da noite ficassem a par de como funciona o curso. Além disso, no primeiro turno foram realizadas uma mesa-redonda com professores e uma palestra com o tema “HQs como recurso didático”.

No segundo e terceiro dias de evento foram ministrados os minicursos de Latex e Geogebra, realizadas outras duas mesas-redondas - conversa com alunos e sobre carreira no exterior - e ministradas as palestras “Saúde mental na graduação” e “Matemática e arte”. Contando com a presença de alunos(as), ex-alunos(as) e professores(as) da UFPR.

OS SABERES MATEMÁTICOS EMPÍRICOS DOS PESCADORES

GONÇALVES, Barbara da Silva Ribeiro

Universidade Estadual do Paraná – Campus Paranaguá

Email: babilica2589@gmail.com

Orientadora: Prof. Ms. Cristienne do Rocio Maron

Email: Cristienne.marron@unespar.edu.br

RESUMO: Motivados pelos trabalhos do professor Ubiratan D'Ambrosio e suas ideias sobre a Etnomatemática é que este trabalho, resultado de um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), em andamento, está sendo desenvolvido. Tem como questão central o seguinte questionamento: quais são os saberes matemáticos empíricos dos pescadores presentes em suas atividades profissionais? Desta forma, foram escolhidos para a pesquisa os pescadores dallha do Mel, no município de Paranaguá. Considerando que o objetivo deste estudo consiste em analisar os saberes de um grupo, buscando um maior entendimento acerca de aspectos que não podem ser facilmente observados, tampouco quantificados, optou-se pelo uso de uma abordagem qualitativa. Desta forma a pesquisa de campo será realizada no mês de setembro de 2022, através de entrevistas semiestruturadas, aplicadas aos pescadores da comunidade. As entrevistas constituem um roteiro simples de perguntas e questões que serão levantadas e, posteriormente, serão complementadas pelo entrevistado, de modo que haja flexibilidade entre o entrevistador e o entrevistado na coleta de informações, incluindo, por exemplo, perguntas não inicialmente previstas no roteiro e possíveis opiniões do entrevistado. Para levantamento dos dados serão realizadas entrevistas de modo que, metade dos pescadores ou das casas da vila, sejam abordados. Serão solicitadas informações sobre o perfil social do pescador (como idade, sexo, estado civil, nível de escolaridade, número de filhos) e sobre o perfil econômico (como tipo de habitação, acesso a serviços públicos como: água tratada, energia elétrica, posse e uso de embarcações, e sobre a forma de conservação e comercialização do pescado). Serão abordados também outros aspectos como recebimento de seguro defeso, tipo de influência para o início da atividade pesqueira e o motivo pela permanência na atividade. Com relação a fundamentação teórica do trabalho, inicialmente foi feito um resgate histórico sobre a história da educação matemática, perpassando pelas tendências em educação Matemática, entre as quais a Modelagem Matemática, a Resolução de problemas, a História no Ensino da Matemática, Educação Matemática Crítica, o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação, serão aprofundados estudos na tendência Etnomatemática, visto que ela poderá apresentar subsídios para o entendimento da pergunta norteadora deste estudo. Para o entendimento da Etnomatemática serão realizados estudos utilizando autores como:

D `Ambrosio (1993, 2012), Knijnik (2019), Gerdes (1991), Ascher (1986), dentre outros. Além disso, serão feitos estudos sobre o conceito de cultura, que vem sendo difundido na atualidade, embasados nos autores Bauman (2012) e (Eagleton, 2005), Maksenas (2005), Cunha (1982), dentre outros. Após os estudos teóricos, será executado um resgate histórico a respeito das comunidades a serem pesquisadas e os motivos pelos quais elas ainda se mantêm como tais, bem como suas expectativas de continuarem na atividade pesqueira e quanto ao futuro das vilas. Em pesquisas preliminares observou-se que a pesca artesanal na Ilha do Mel está ameaçada por diversos fatores. No caso da Ponta Oeste, esta é ameaçada, além da crise dos estoques pesqueiros, pela introdução de unidades de conservação que restringiu seu espaço e o uso de recursos. Na vila de Encantadas, os pescadores encontram-se ameaçados tanto pela crise da pesca, com a diminuição dos estoques, como pelo avançando turismo sobre seu território. Este, por um lado, oferece oportunidades para complementar a renda da pesca, mas, por outro, é responsável pela aculturação da comunidade bem como pelo abandono de suas atividades tradicionais. A escolha de uma dessas duas vilas para o estudo se deu por concentrar a maioria de pescadores da ilha e por apresentar situações extremas: a Ponta Oeste, uma vila pequena e pouco desenvolvida, onde a pesca é a única atividade geradora de renda. A ideia neste estudo, é de explorar a cultura de tradições e as práticas de um determinado grupo, as suas convicções matemáticas e trabalhar para que tal grupo assimile seus conhecimentos matemáticos populares, com o conhecimento matemático acadêmico, e assim comparar os dois saberes. A Ilha do Mel, apesar de estar próxima a importantes áreas pesqueiras do estado, como Paranaguá e Pontal do Sul, geralmente não é incluída nos estudos relacionados à pesca. No final da década de 1970 dificuldades de acesso e a falta de meios de comunicação reduziam a influência urbana na ilha. A pesca era a principal atividade econômica do local que era exercida para o consumo e escambo (KRAEMER, 1978). A partir da década de 1980, as pressões de ocupação aumentaram por parte de veranistas cuja intenção era possuir residências na Ilha. Com a instalação da luz elétrica em 1988, além da implementação do serviço de barcos de transporte, a população da Ilha passou a ter maior acesso a bens de consumo como TV, rádio, eletrodomésticos e mobiliário. Os antigos hábitos, valores e atitudes da população foram sendo substituídos por um estilo de vida mais urbano. Com relação a Ilha do Mel destaca-se que o local deste estudo foi formado por uma sucessão de eventos naturais, o avanço e recuo do mar por diversas vezes, que resultou na Ilha do Mel, formada por uma extensa planície arenosa, sendo que a região com maior elevação é o Morro Bento Alves, com 148 m de altitude. Sua área total tem 2.894 hectares de extensão, com 35 km de praias belíssimas, desertas ou com pouca urbanização. Uma grande parte de seu território se constitui de área de preservação, onde não é permitido o acesso. A Ilha do Mel é rústica, não possui asfalto e suas ruas são pequenas e de terra, dando a impressão que o lugar parou no tempo. Localizada no estado do Paraná, pertence ao município de Paranaguá. É uma área de preservação administrada pelo IAP (Instituto Ambiental do Paraná). A população da Ilha de pouco mais de mil habitantes se distribui entre algumas pequenas vilas: Encantadas, Nova Brasília, Farol, Praia Grande e Fortaleza. Para preservar o meio-ambiente e evitar a degradação da Ilha, não é permitido veículos automotores e de tração animal, e o número de visitantes é limitado a 5.000 pessoas por dia e tem o recorde nas altas temporadas que se dão nas datas de fim de ano, carnaval, e o famoso feriado de 7 de setembro, datas em que a Ilha

recebe um cuidado maior, pois há um grande aumento no fluxo de turistas. Os pontos turísticos de maior destaque na Ilha do Mel são a Gruta das Encantadas, o Farol das Conchas e a Fortaleza de N. S. dos Prazeres, todos abertos à visitação pública. O Farol das Conchas, localizado no Morro da Concha é uma construção de 1870 e o seu objetivo é de orientar a navegação na Baía de Paranaguá. Lá do alto do farol é possível ter uma bela vista panorâmica de quase toda a ilha e sua região. Na Ilha do Mel tudo é muito simples, afinal a comunidade em si é de uma cultura mais simples, porém não deixam de ser o povo animado. Lá eles têm a celebração a São Pedro que é o padroeiro dos pescadores que se estende até a Festa da Tainha, quase um mês de celebração com inúmeras atrações, dentre elas, danças, apresentações de cantores locais, corrida da canoa, eleição da Miss Tainha, com as moças da comunidade. A comunidade realiza diversos tipos de pescas, esta que citamosé uma das mais tradicionais que é a pesca da Tainha. Há, também, a forma de pesca que consiste em "camboar", que significa usar pedaços de paus presos a redes menores, onde ficam alguns pescadores em terra, saem dois ou três na canoa sem motor para não fazer barulho, enquanto uns rezam, outro vai soltando a rede, na intenção de cercar o cardume, até voltarem em terra novamente, e lá com ajuda de outros pescadores, mulheres e até turistas se estiver lá no momento, também podem ajudar a puxar a rede. O que nos chama atenção é que todos, incluindo o turista que lá estava, ajudou a puxar a rede, também ganha sua parte na partilha dos peixes.

Palavras-chave: Educação Matemática, Etnomatematica, Pescadores, Ilha do Mel.

REFERÊNCIAS

- ASCHER, M. and R. ASCHER 1986. **Ethnomathematics**. History of Science, 24, 125-144
- BAUMAN, Z. **Ensaios sobre o conceito de cultura**. Tradução de: Carlos Alberto Medeiros. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- CUNHA, A. G. DA. **Dicionário etimológico nova Fronteira da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1982.
- D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.
- D'AMBROSIO, U. Educação matemática: Uma Visão do Estado da Arte. **Pro-Posições** V.4,N.1, mar. 1993.
- EAGLETON, T. **A ideia de cultura**. Tradução de: Sandra Castello Branco. São Paulo: Unesp, 2005.
- GERDES, P. **Etnomatemática**: cultura, matemática, educação. Maputo: Instituto Superior Pedagógico, 1991. 116p.
- KNIJIK, G. **Etnomatemática em Movimento**. Autêntica; 4º edição, 2019.
- KRAEMER, M.C. 1978. **Malhas da Pobreza - Exploração do Trabalho de pescadores artesanais na Baía de Paranaguá**. Dissertação de mestrado (Ciências sociais), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- MEKSENAS, P. **Aprendendo sociologia**:⁶⁷paixão de conhecer a vida. 9. ed. São

Paulo:Loyola, 2005.

PROPONDO AÇÕES PARA A TRANSIÇÃO ENSINO MÉDIO-ENSINO SUPERIOR NAS DISCIPLINAS DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DOS CURSOS DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

Beatriz Borba Guergolet¹ Licenciatura em Matemática – UFPR
beatrizguergolet@email.com

Prof. Elenilton Vieira Godoy (Orientador)
Departamento de Matemática – UFPR
elenilton1973@live.com

Palavras-chave: Matemática emocional. Afetividade matemática. Dimensão Afetiva.

Resumo:

Esta pesquisa busca contribuir para a discussão envolvendo a afetividade e a Educação Matemática nos cursos de Ciências e Exatas e Tecnologia da UFPR - Universidade Federal do Paraná, tendo como base o mapeamento realizado no plano de trabalho (01/8/2019-31/07/2020) acerca das dificuldades apresentadas pelos alunos e alunas ingressantes e não ingressantes nas aulas das disciplinas da área de Matemática. Este projeto se insere na abordagem qualitativa de pesquisa, a metodologia escolhida foi a análise de discurso onde por meio desta buscamos categorizar as dificuldades encontradas no mapeamento anterior em abordagens metodológicas a respeito da afetividade matemática. Considerando os pontos levantados anteriormente quando falamos sobre as dificuldades dos e das discentes conseguimos encaixá-las na *dimensão afetiva da matemática* onde são apresentados os conceitos de crenças e atitudes matemática que trazem uma associação entre a cognição e a afetividade matemática, o que nos traz uma elucidação a respeito de como as emoções e, portanto, o subconsciente e os sentimentos de forma subjetiva podem afetar o comportamento do discente e a forma como suas atitudes são construídas, como seu apreço e interesse na aprendizagem é construído a partir de suas crenças pessoais, sejam elas

¹ Bolsista do Programa PIBIC - Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica, pelo CNPq.

relacionadas à matemática por si só, ou por suas crenças em si mesmo e em seus docentes.

Referências:

- CUNHA, M. I. **Docência na universidade, cultura e avaliação institucional: saberes silenciados em questão.** Revista Brasileira de Educação, v. 11, n. 32 maio/ago. 2006.
- FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 2003.
- LEITE, S. A. S. **Afetividade nas práticas pedagógicas.** Temas em Psicologia, v. 20, n. 2, p. 355-368, 2012.
- MASETTO, M. T. **Competências pedagógicas do professor universitário.** São Paulo: Summus, 2003.
- PIMENTA, S. G.; ANASTASIOU, L. G. C. **Docência no Ensino Superior.** São Paulo: Cortez, 2002.
- VYGOTSKY, L. S. **Psicologia Pedagógica.** São Paulo: Martins Fontes, 2004.
- CHACÓN, G. M. I. **Matemática Emocional: Os afetos na Aprendizagem Matemática.** Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003.
- MCLEOD, D. B. **Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization.** Grows, D.A., Ed., Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Macmillan Publishing Company, New York, 575-596, 1992.
- LOOS-SANT'ANA, H.; BRITTO, F. R. M. **Atitude e Desempenho em Matemática, Crenças Autorreferenciadas e Família: uma path-analysis.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 31, n. 58, p. 590-613, ago. 2017.

Educação Financeira na Educação Básica: histórico e novas perspectivas

Bruna Teixeira Claro

Licenciatura de Matemática – Unespar Campus Paranaguá

Brunaarthur19@gmail.com

Prof. Liceia Alves Pires (Orientadora)

Colegiado de Matemática – Unespar Campus Paranaguá

Liceia.pires@unespar.edu.br

Prof. Mariliza Simonete Portela (Coorientadora)

Colegiado de Matemática – Unespar Campus Paranaguá

Mariliza.portela@unespar.edu.br

Palavras-chave: Educação Financeira, Educação Básica, Histórico e perspectivas.

Resumo:

Com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC – 2018), abre-se mais espaço para a implantação da Educação Financeira na Educação Básica. No estado do Paraná, a partir dos anos 2021, vem sendo implantada a disciplina de Educação Financeira, no Ensino Médio e a partir desta data, também, no Ensino Fundamental. Entende-se que a Educação Financeira, possa ser um tópico que permite a abordagem num sentido, de não apenas, estudar conteúdos e temas que venham prontos e acabados por meio de indicações de órgãos gestores, mas sim, que parta dos próprios professores e dos alunos, num sentido mais crítico da educação. No entanto, fica o questionamento: Como a Educação Financeira está sendo tratada na Educação Básica? A indagação se desdobra em outras questões: Como o tema está sendo abordado nos documentos oficiais da educação, em especial, em documentos que norteiam a educação do estado do Paraná, nos últimos anos? Os professores, do Litoral do Paraná, mais especificamente das Ilhas, receberam e recebem capacitação para este trabalho? Como é efetivamente trabalhada a Educação Financeira em Escolas das Ilhas do Litoral do Paraná? Neste sentido, este trabalho, que está no início, e que é desenvolvido a partir de um projeto de Iniciação Científica, promovido pela Unespar Campus de Paranaguá, com recursos pela Fundação Araucária do Paraná e que conta com apoio do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática (GPEMAT-Paranaguá) busca responder as questões acima. O trabalho tem como apporte teórico a História das Disciplinas Escolares, amparando em Chervel (1990), Bittencourt (2003), Choppin (2004), Pinto (2014), dentre outros estudiosos sobre o tema. Entende-se que a História das Disciplinas Escolares, irá ajudar a entender o surgimento de um novo conhecimento ou mesmo de uma disciplina denominada de Educação Financeira. Tem como objetivo geral investigar como vem ocorrendo a implantação da Educação Financeira na Educação Básica, Ensino Fundamental (séries finais) e Ensino Médio. Para isso serão percorridos alguns caminhos, entre eles: fazer um levantamento histórico sobre a trajetória da

Educação Financeira até se configurar como um conhecimento ou disciplina na Educação Básica: séries finais e Ensino Médio; entrevistar pedagogos, diretores e professores de escolas do Litoral do Paraná, especialmente das Ilhas do Litoral do Paraná, para coletar informações acerca da implantação efetiva da Educação Financeira no nas séries finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Com relação aos procedimentos de pesquisa, inicialmente será feito um estudo de documentos oficiais da Educação Básica, nacionais e estaduais, tais como: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), Referencial Curricular do Paraná (2018), Currículo da Rede Estadual Paranaense (2020), além de, teses, dissertações e livros que abordem a Educação Financeira. Esta etapa da pesquisa, tem a finalidade de traçar uma trajetória histórica sobre a criação da disciplina ou implantação do conhecimento, na Educação Básica, no Estado do Paraná. Na sequência serão elaborados questionários que serão aplicados, de forma *on-line*, e/ou presencial, para diretores, pedagogos e professores de escolas estaduais do Ensino Fundamental (séries finais) e Ensino Médio, buscando identificar como ocorreu e está ocorrendo a implantação da Educação Financeira nas escolas. Como resultado da pesquisa espera-se entender como vem se configurando a implantação da Educação Financeira, na Educação Básica (Ensino Fundamental – séries finais) e Ensino médio, no Estado do Paraná, e se ela vem sendo trabalhada num sentido mais crítico, levando os alunos a fazer reflexões sobre as questões financeiras. Além disso, mais tarde, pretende-se elaborar projetos a serem aplicados na escola, de forma a apresentar uma Educação Financeira, desvinculada de instituições financeiras, que muitas vezes tem como intensão a comercialização de seus produtos.

Referências:

- BITTENCOURT, C. M. F.. Disciplinas escolares: história e pesquisa. In: **História das disciplinas escolares no Brasil**: contribuição para o debate. Bragança Paulista: Edusf, 2003. p. 9-38.
- BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais** : Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, n. 2, p. 177-229. 1990.
- CHOPPIN, A.. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v.30, n.3, p. 549-566, set./dez. 2004.
- PARANÁ. **Referencial Curricular do Paraná**: princípios, direitos e orientações, Curitiba, 2018. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/bncc/2018/referencial_curricular_parana_cee.pdf. Acesso em set. 2022.

PARANÁ. **Currículo da rede estadual paranaense – Matemática.** Curitiba, 2020. Disponível em https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-05/crep_matematica_2021_anosfinais.pdf. Acesso em set. 2022.

PINTO, N.B. História das disciplinas escolares: reflexão sobre aspectos teóricos-metodológicos de uma prática historiográfica. **Rev. Diálogo Educacional**, Curitiba, 2014.

O livro didático de Matemática do Ensino Fundamental e a Sociedade

Bruno Mielke Schwartsburg

Licenciatura e Bacharelado em Matemática – UFPR

bruno-m.s@hotmail.com

Prof. Elenilton Vieira Godoy (Orientador)

Departamento de Matemática – UFPR

elenilton@ufpr.br

Palavras-chave: Matemática escolar, Livro didático, currículo, Sociedade

Resumo:

O projeto intitulado “O livro didático de Matemática do Ensino Fundamental e a Sociedade” tem como objetivo identificar e analisar de que modo os livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental II abordam questões sociais. Do ponto de vista teórico apoiar-se-á em estudos e pesquisas no campo da Educação Matemática que trabalham com as dimensões social, cultural e política e com o livro didático como política cultural. O projeto a ser realizado insere-se numa abordagem qualitativa de pesquisa. A metodologia escolhida para desenvolver esse projeto de Iniciação Científica será de natureza bibliográfica e para tanto as atividades do licenciando serão: 1) Revisão bibliográfica sobre estudos e pesquisas envolvendo o livro didático de Matemática e questões sociais; 2) seleção e leitura flutuante de cada livro didático de Matemática do Ensino Fundamental das coleções escolhidas; e 3) A análise dos livros para compreender como são abordadas as questões sociais. Dentre as possíveis contribuições esta pesquisa poderá contribuir para compreender como as questões sociais são abordadas na sala de aula de Matemática a partir do livro didático.

Referências:

DRABACH, A. L. M. **Livro didático de matemática: um caminho trilhado desde sua concepção ao uso na escola rural do Assentamento do Contestado.** 110 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática (PPGECM) da Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba, 2017.

OGLIARI, L. N. **A matemática no cotidiano e na sociedade: perspectivas do aluno do ensino médio** 145 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciência e Matemática) do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUC-RS, Porto Alegre, 2008

LIMA, C. A. **Aproximações entre Ciência-Tecnologia-Sociedade e os temas transversais no livro didático de matemática do ensino fundamental da 5^a a 8^a séries.** 199 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Científica e tecnológica) do Programa de Pós-

Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT) da Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Florianópolis, 2008

LIPP, T. H. P. **Estudo do desenvolvimento de competências críticas e reflexivas a partir de uma Unidade de Aprendizagem em aulas de Matemática** 100p Dissertação (Mestrado em Educação em Ciência e Matemática) do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUC-RS, Porto Alegre, 2008

VELOSO, N. D. **A Interdisciplinaridade no ensino fundamental: conectando a matemática às ciências naturais e humanas** 125 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Luterana Do Brasil – ULBRA, Canoas 2009

ALTENHOFEN, M. E. **Atividades contextualizadas nas aulas de matemática para a formação de um cidadão crítico** 108 p. (Mestrado em Educação em Ciência e Matemática) Dissertação (Mestrado em Educação em Ciência e Matemática) do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUC-RS, Porto Alegre, 2008

SOARES, D. A. **Educação matemática crítica: contribuições para o debate teórico e seus reflexos nos trabalhos acadêmicos** 135 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática (PEPGEM) – PUC-SP, São Paulo, 2008

Modelagem Matemática e o Supermercado: operações com números decimais utilizando lista de compras

Camila Costa de Oliveira¹ e Talita Ferreira da Silva Bruguer²

Licenciatura em Matemática – UNESPAR

costacamila426@gmail.com e talitabruguer@gmail.com

Prof. Cristienne do Rocio de Mello Maron

Departamento de Matemática – UNESPAR

cristienne.maron@unespar.edu.br

Palavras-chave: Educação Matemática, Matemática Financeira, Modelagem Matemática.

Resumo:

Os alimentos estão presente na vida de todos os animais, sendo eles racionais ou não. Na história dos seres humanos, isso não é diferente. Uma das necessidades básicas do homem é alimentação e ao longo dos anos essa necessidade foi atendida de diversas formas, utilizando a caça, a pesca e a plantação. No decorrer da história, o homem buscou formas de variar seus alimentos e adquirir novos produtos. No início, isso ocorria através do escambo, que é a troca de produtos. Determinados grupos de produtores trocavam seus produtos entre si e assim, conseguiam uma variação de produtos e diferentes tipos de alimentos. Hoje, com o avanço do comércio e da tecnologia, podemos facilmente comprar alimentos em supermercados, feiras, mercearias, ou ainda, de forma online. Além de encontrar variações de um mesmo produto, podemos nos deparar com diferentes qualidades, custos e benefícios. Na compra de um alimento, por exemplo, podemos encontrar tal alimento mais caro ou mais barato que em outro local. Muitas vezes essa diferença se apresenta em forma de número decimal. No próprio valor do produto podemos perceber a presença desse conjunto.

A temática escolhida para esse trabalho, além de tratar dos números decimais, também traz a questão social. O indivíduo como um cidadão ativo, necessita tomar decisões e atuar para o desenvolvimento da sociedade na qual está inserido. Dessa forma, o ato de comprar se torna inevitável e cabe ao cidadão refletir sobre as possibilidades de desenvolvimento econômico e social.

Sendo assim, destacamos a alimentação como uma necessidade e o ato de comprar, como uma prática comum do ser humano. Com isso, pretendemos trazer essa temática para uma aplicação pedagógica em sala de aula. Nessa aplicação faremos o uso da modelagem matemática como uma metodologia de ensino. Baseando-se nos estudos do autor Jonei Cerqueira Barbosa, convidamos os alunos a desenvolver a temática compras de supermercado, visando alcançar o conteúdo de

¹Acadêmica do Curso de Matemática da UNESPAR – Paranaguá.

²Acadêmica do Curso de Matemática da UNESPAR – Paranaguá.

números decimais. Tendo em vista que este tema é algo presente na rotina da maioria dos indivíduos, pretendemos demonstrar aos alunos relações entre situações presentes na vida social e a matemática escolar, utilizando-se da modelagem matemática.

A modelagem matemática busca resolver situações da realidade através da matemática. Dessa forma, a utilização dessa metodologia auxilia no processo de ensino e aprendizagem, além de dar maior significado aos conteúdos matemáticos ensinados na escola. Barbosa (2001, p. 74) acredita que “as atividades de Modelagem podem contribuir para desafiar a ideologia da certeza e colocar lentes críticas sobre as aplicações da matemática.” Nessa perspectiva, a modelagem pode romper com a ideia superestimada de que a matemática é uma ciência inalcançável e com respostas únicas. Com isso, acreditamos que a matemática não é uma ciência pronta, mas que ela pode sim, ser questionada e construída a partir de pensamentos críticos.

A concepção de modelagem de Barbosa está relacionada com duas características importantes: o ambiente de aprendizagem e o convite aos alunos. Para ele, “o ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação.” (Barbosa, 2004, p.75). Dessa maneira, além do aluno receber o convite para participar do processo, ele também tem nas mãos o poder de levantar questões, buscar e pesquisar formas de tratar as informações coletadas. Assim, Barbosa (2004, p.75) define a modelagem como “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade.”

Em seu texto “MODELAGEM MATEMÁTICA: O QUE É? POR QUE? COMO?” (2004), Barbosa se inspira em Galbraith (1995), e apresenta três casos de atividade de modelagem matemática em sala de aula. Nesse trabalho, vamos nos atentar ao caso 2, onde o aluno se encontra com um problema a ser investigado, mas precisa sair da sala de aula e coletar os dados necessários. É nessa perspectiva que o presente trabalho será desenvolvido. Assim, temos como intuito, convidar os alunos a resolver situações relacionadas às compras de supermercado, utilizando a modelagem matemática como apporte no processo de ensino e aprendizagem.

Para o desenvolvimento desse trabalho, serão utilizadas duas aulas de matemática em uma turma do 6º ano, no Colégio Estadual Rocha Pombo, na cidade de Antonina, no litoral do Paraná.

Para a escrita desse trabalho e a aplicação da atividade, nos fundamentamos na concepção de Barbosa (2004), utilizando como ideia principal, o convite aos alunos. Nos atentaremos a não impor nada aos alunos, mas sim, convidá-los a participar.

Referências:

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: **REUNIÃO ANUAL DA ANPED**, 24., 2001, Caxambu. Anais... Caxambu: ANPED, 2001. 1 CDROM.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.

GALBRAITH, P. Modelling, teaching, reflecting – what I have learned. In: SLOYER, C. et al. Advances and perspectives in

the teaching of Mathematical modelling and Applications. Yorklyn, DE: Water Street Mathematics, 1995. p. 21-45.

POTI/TOPMAT – Nível 1: Uma experiência acadêmica

Carolina Pereira Lejambre ¹, Isabele Andrade Vichinieski ², Natalia Chicora ³ e Thais

Spannenberg Machado dos Passos ⁴

Licenciatura em Matemática – UFPR

carolina.lejambre@gmail.com, isavichinieski@gmail.com, nataliachicora@gmail.com e
tatasmp10@gmail.com

Prof. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)

Departamento de Matemática – UFPR

zeca77@gmail.com

Palavras-chave: Olimpíadas de Matemática, Educação, Matemática.

Resumo:

O POTI/TOPMAT (Programa de Formação em Matemática Olímpica) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) é um programa desenvolvido pelo IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) e pelo Departamento de Matemática da UFPR. Ele é voltado à preparação para as Olimpíadas de Matemática de alunos do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio. O programa é ofertado aos sábados pela manhã, para estudantes de escolas públicas e particulares, gratuitamente.

Para ingressar no programa é realizada uma prova de seleção, constituída de questões de múltipla escolha com o conteúdo visto nos anos escolares anteriores e questões de lógica. O objetivo dessa seleção é encontrar os alunos mais interessados em matemática e que já tenham algum conhecimento prévio sobre os conteúdos que serão trabalhados e aprofundados. O projeto é subdividido em três níveis: Nível 1 para alunos de 6º e 7º anos, Nível 2, 8º e 9º anos e Nível 3, Ensino Médio. Essa divisão é baseada nas Olimpíadas de Matemática e neste trabalho comentaremos especificamente sobre o Nível 1. Os alunos de 6º e 7º anos estão começando a ter contato com a matemática olímpica agora, então preferimos trabalhar em equipes menores para que os professores do POTI possam incluir dinâmicas para despertar a paixão e o interesse dos alunos em suas aulas. Os conteúdos a serem abordados foram divididos em duas disciplinas: Aritmética e Geometria. Para isso, foi criado um material autoral desenvolvido pelos professores bolsistas e voluntários do projeto. Nele, temos a explicação dos conteúdos e diversos exercícios de olimpíadas. A cada aula são escolhidos 3 exercícios para os alunos fazerem como lição de casa, referente ao assunto abordado no dia. Nestes exercícios avaliamos a resolução e a justificativa dos alunos, com o objetivo de

¹ Bolsista do IMPA.

² Voluntária do POTI/TOPMAT.

³ Bolsista do LICENCIAR.

⁴ Estagiária do DMAT.

auxiliá-los na 2^a fase das olimpíadas, que é discursiva. Realizamos 3 simulados ao longo do programa, sendo dois objetivos e o último, discursivo, com o objetivo de simular as provas das olimpíadas. Estes contam com questões desenvolvidas pelos professores do projeto, referentes aos conteúdos abordados até o momento, tanto de geometria quanto de aritmética. Como incentivo para que os alunos realizem as lições de casa e melhorem seu desempenho nas mesmas, desenvolvemos um jogo parecido com o trunfo que é bastante conhecido. Nele, temos três categorias: ataque, defesa e fraqueza, cada uma dessas categorias está relacionada às notas das lições de aritmética, as notas das lições de geometria e as ocorrências da equipe, respectivamente. As 5 melhores notas de cada equipe entram para a competição, que acontece na aula seguinte da aplicação dos simulados. Nestas aulas, iniciamos com o jogo, em seguida fazemos uma confraternização com os alunos, para descontração, e, encerramos com a correção de todos os exercícios do simulado. Os alunos que participam do programa melhoraram seu desempenho nas olimpíadas e até mesmo na escola. Muitos recebem medalhas e menções honrosas, o que indica que estamos no caminho correto. Porém, o projeto não é bom apenas para os alunos, a maioria dos professores são graduandos do curso de Licenciatura em Matemática e relatam que é determinante as experiências adquiridas. Ter contato com a docência desde o início da graduação é essencial para aprender com situações práticas e compreender os passos que deverão ser seguidos ao longo da carreira.

Criptografias no Ensino da Matemática.

Clara Machado Julianatto, Júlia Villwock Gomes de Oliveira*, Monique
Baptista Fragozo, Raquel Rocha*

clarajuliatto@ufpr.br, julia.villwock@ufpr.br, monique.baptista@ufpr.br,
raquelrocha@ufpr.br

Prof^a. Fernanda Buhrer Rizzato (Orientadora), Prof^a. Gisele Teixeira
Paula (Orientadora), Prof^a. Paula Rogeria Lima Couto
(Coordenadora/Orientadora), Prof^a. Ximena Mujica (Vice-
coordenadora/Orientadora)

fernandab@ufpr.br, giseleteixeira@ufpr.br, paulacouto@ufpr.br,
xmujica@ufpr.br

Palavras – chave: Criptografia, Cifra de Cesar, Cifra Espartana

O MatematicATIVA é um projeto de extensão da Universidade Federal do Paraná (UFPR), vinculado ao Departamento de Matemática (DMAT). Desde maio de 2017, o projeto atua em escolas de Ensino Básico na região metropolitana de Curitiba, realizando eventos que englobam palestras sobre matemática e uma exposição interativa de materiais manipuláveis. Reforço aqui a importância desse projeto de extensão ao colocar em diálogo docentes da Universidade, licenciandos/as de matemática e discentes da educação básica a partir de atividades que procuram romper com processos de ensino e de aprendizagem tradicionais.

O objetivo das atividades criadas é apresentar a Matemática de forma lúdica e descontraída, através do acesso a materiais educativos e de qualidade, mostrando aspectos curiosos e divertidos relacionados a diversos temas e, desta maneira, promover o interesse e o encanto pela Matemática.

Uma das atividades realizadas é a de criptografia, onde são trabalhadas a Cifra de César e a Cifra Espartana. A necessidade de esconder, ou disfarçar mensagens para que somente um certo destinatário

possa entendê-la existe desde a antiguidade e persiste nos dias atuais. A criptografia hoje em dia é utilizada principalmente na internet, em computadores, celulares, aplicativos e redes sociais. Ela dá a segurança de saber que os dados de quem utiliza a rede tem muito menos chances de serem descobertos por terceiros. O que muitas crianças (e também adultos) não sabem é que há muita matemática por trás desse conceito.

A Cifra de César foi criada por volta de 50 a.C. por Júlio César, e inicialmente consistia em trocar uma letra do alfabeto pela letra que a sucede em três posições [2], como representado na figura abaixo.

Normal	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
Código	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P

Normal	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Código	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Figura 1: Cifra de César.

Fonte: Ferrando, 2014 [2].

Por exemplo, MatematicATIVA se tornaria PdwhpdwlfdWLyd. No entanto, a cifra pode ser utilizada com qualquer número de posições a serem trocadas. Atualmente essa cifra não é tão usada por conta de ser muito simples e, assim, ser muito fácil “quebrá-la”.

A Cifra ou Cítila Espartana, ou ainda Bastão de Licurgo, foi introduzida em Esparta, por volta do século V a.C. Os militares utilizavam um bastão de madeira e enrolavam nele uma tira de papel. A mensagem a ser entregue era escrita na vertical, em colunas, de modo que, quando a tira de papel fosse removida do bastão, haveria apenas letras embaralhadas sem sentido [1].

O destinatário, ao receber a tira de papel, conseguia decifrar a mensagem com um bastão de mesmo diâmetro e comprimento do remetente.

Ao trabalhar essas duas cifras com as crianças, espera-se que as mesmas consigam “quebrá-las”, ou seja, decifrar mensagens previamente

criptografadas pela equipe, utilizando uma das duas técnicas citadas acima. Não é informado ao estudante qual das técnicas foi utilizada, apenas brevemente explicado como elas funcionam. Assim, espera-se que ele compreenda a diferença das duas técnicas e busque por uma chave para decifrar a mensagem que tem em mãos, seja via cifra de César ou Espartana, e que se questione se existem outras formas de criptografar mensagens e onde essas técnicas são usadas nos dias de hoje. Decriptografar mensagens desperta a curiosidade e envolve muito raciocínio lógico dos estudantes.

A equipe do MatematicATIVA elaborou materiais concretos e coloridos para trabalhar essas cifras, como pode ser visto na Figura 2, além das mensagens criptografadas, principalmente de teor motivacional, poemas matemáticos, clichês de mensagem cotidianas, entre outras.



Figura 2: imagem retirada de evento realizado pelo MatematicATIVA no Colégio Júlio Mesquita. Curitiba, 2022.

Referências

- [1] COSTA, C., FIGUEIREDO, L. M. *Introdução a Criptografia*, v.1. Fundação CECIERJ. Rio de Janeiro, 2010.
- [2] PET MATEMÁTICA UFPR. *Brincando de Matemático - Criptografia*. Programa de Educação Tutorial - Matemática UFPR. Curitiba, 2014.

O Projeto de Extensão Matematicativa em 2022

Clara Machado Julianatto, Júlia Villwock Gomes de Oliveira*, Monique Baptista Fragozo, Raquel Rocha*, Tayná dos Santos de Carvalho

clarajuliatto@ufpr.br, julia.villwock@ufpr.br, monique.baptista@ufpr.br,
raquelrocha@ufpr.br, taynacarvalho@ufpr.br

Prof^a. Fernanda Buhrer Rizzato (Orientadora), Prof^a. Gisele Teixeira

Paula (Orientadora), Prof^a. Paula Rogeria Lima Couto (Orientadora),

Prof^a. Ximena Mujica (Orientadora)

fernandab@ufpr.br, giseleteixeira@ufpr.br, paulacouto@ufpr.br,
xmujica@ufpr.br

Palavras-chave: projeto, extensão, materiais manipuláveis.

Resumo:

O MatematicATIVA é um projeto de extensão da Universidade Federal do Paraná (UFPR), vinculado ao Departamento de Matemática (DMAT). Desde maio de 2017, o projeto atua em escolas de Ensino Básico na região metropolitana de Curitiba, realizando eventos que englobam palestras sobre matemática e uma exposição interativa de materiais manipuláveis. Houve uma interrupção destas atividades presenciais por dois anos devido à pandemia do COVID-19. Neste ano, após o retorno das atividades presenciais da Universidade, o projeto retomou os encontros entre as discentes e as docentes participantes no intuito de montar novos materiais concretos a partir do material digital produzido no segundo ano da pandemia, bem como tomar conhecimento e dominar os temas e atividades produzidas para as exposições antes da parada, para que possam ser levados com excelência para as escolas. O objetivo das atividades criadas é apresentar a Matemática de forma lúdica e descontraída, mostrando aspectos curiosos e divertidos relacionados a diversos temas e, desta maneira, promover o interesse e o encanto pela

Matemática. Assim, com as reuniões alinhadas, organizadas e ocorrendo semanalmente - com a participação de todos os membros do projeto - foram marcados os eventos de 2022. Primeiramente, foi realizada uma exposição no Centro Politécnico da UFPR, em Curitiba, visando divulgar o projeto para os graduandos e assim, conseguir mais participantes para levar os eventos às escolas. A primeira escola a ser contemplada foi o Colégio Estadual Professor Júlio Mesquita, em agosto, a segunda foi o Colégio Estadual Hildebrando de Araújo, agendada para o final de outubro. O MatematicATIVA engajou-se também em um evento promovido pela OBMEP, marcado para o início de novembro, para desenvolver a sua exposição para alunos medalhistas nas olimpíadas de Matemática e seus professores. A metodologia consistiu na discussão sobre os temas, na criação dos roteiros, na preparação dos materiais, além da organização e gerenciamento das visitas. O domínio das especificidades dos materiais e das áreas Matemáticas envolvidas, bem como o planejamento destes, foi uma oportunidade de aprendizado e de aplicação de vários tipos de conhecimentos. Promover o acesso a materiais educativos e de qualidade foi uma tarefa que contribuiu tanto para a formação acadêmica dos estudantes envolvidos quanto para o público que o recebeu. Pode-se dizer que o objetivo principal do projeto foi retomado, permitindo uma forma mais efetiva de troca de conhecimentos entre a Universidade e a comunidade escolar.

POTI/TOPMAT: Formação Matemática de alto nível para alunos de ensino fundamental e médio

Dyckson Ternoski; Fernanda de Oliveira de Jesus, Gabriela
Fernanda Bundza, Izabella Calais Fernandes[†] Kaiky Yuji Ishiy[‡]
Leonardo Gonçalves Fischer, Mahmut Telles Cansiz,
Marcel Thadeu de Abreu e Souza[§]
Matemática - UFPR
potin2@ufpr.br e potin3@ufpr.br

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
eidam@ufpr.br

Palavras-chave: Matemática, Olimpíadas, Treinamento.

Resumo:

O POTI/TOPMAT (Programa de Formação em Matemática Olímpica) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) é um programa desenvolvido pelo IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) e pelo Departamento de Matemática da UFPR. Ele é voltado à preparação para as Olimpíadas de Matemática, e é oferecido gratuitamente a alunos do Ensino Básico, de escolas públicas e particulares. O programa é constituído de aulas ministradas semanalmente por professores e estudantes da UFPR, e de atividades alternativas, como seminários e jogos. O propósito do programa é não apenas oferecer uma preparação para que os alunos se saiam bem nas principais olimpíadas de matemática (como a OBMEP, a OPRM e a OBM), mas também algo mais amplo: por um lado, incentivar os alunos a aprofundarem ainda mais o seu interesse pela Matemática, instigando-os com problemas incomuns e interessantes; por outro, promover a interação entre universidade e escola básica, construindo uma “ponte matemática” entre elas.

As consequências são positivas tanto para os alunos quanto para os professores do programa: os alunos têm a oportunidade de desenvolver e aprofundar seus conhecimentos e habilidades matemáticas com uma abordagem diferente da usualmente adotada nas escolas, muito mais dinâmica e desafiadora; os professores são incentivados a reestruturar o formalismo abstrato de parte da matemática superior

^{*}Coordenador do Nível 2 e Estagiário do DMAT para o Programa POTI/TOPMAT

[†]Bolsista do Nível 2 do POTI/TOPMAT, pelo Programa Licenciar

[‡]Bolsista do Nível 3 do POTI/TOPMAT, pelo Programa Licenciar

[§]Coordenador do Nível 3 e Voluntário do Programa POTI/TOPMAT

para torná-lo acessível a crianças e adolescentes – o que faz com que a sua própria habilidade matemática se torne mais flexível e, assim, fortaleça-se.

O programa conta hoje com cerca de 30 professores, a maioria sendo alunos do Curso de Matemática da UFPR. Eles atendem cerca de 200 alunos de Ensino Básico no Centro Politécnico aos sábados pela manhã. Mais informações podem ser obtidas no website do projeto: <http://poti.ufpr.br/>. O projeto conta com apoio da Direção do Setor de Ciências Exatas e do Departamento de Matemática.

O ENSINO DA MULTIPLICAÇÃO E NA DIVISÃO SIMPLES NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Higor Afonso Candido Pinto¹
Licenciatura em Matemática – UFPR
higorunited@outlook.com

Profª. Drª. Tânia Teresinha Bruns Zimer (Orientador)
Departamento de Teoria e Prática de Ensino – UFPR
taniatbz@gmail.com

Palavras-chave: Multiplicação, Ensino, Aprendizagem, 6º Ano.

Resumo:

As operações são elementos matemáticos que estão presentes desde a alfabetização matemática, além de serem fundamentais para relações entre os números. Observando a multiplicação, que é a adição de parcelas iguais, e a divisão, que é a repartição em parcelas iguais, são operações que ampliam os conceitos de operações desde o 1º Ano do Ensino Fundamental. Ou seja, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental o trabalho é mais focado no lúdico e em materiais manipuláveis e por Guérios, Agranionih e Zimer “tais atividades contribuem para a construção de esquemas que favorecem o desencadear do processo de compreensão das operações básicas” (GUÉRIOS, AGRANIONIH e ZIMER em BRASIL, 2014, p. 6).

Conforme o aluno vai avançando nos anos escolares o uso da ludicidade e dos materiais concretos vai dando espaço para pela resolução de problemas e resolução de exercícios em si, sem o auxílio destas abordagens. Muitas vezes isso é feito de maneira abrupta, deixando de lado a manipulação do problema e a ludicidade para uma melhor compreensão dos algoritmos algorítmicos a partir de reflexões sobre o problema e exercícios a serem resolvidos. Com isso, o ensino das operações se tornam apenas exercícios para a realização do algoritmo nos cálculos, não tendo significado para o aluno e relação com a constante trabalho lúdico presentes nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Dante disso, o professor observa o progresso do aluno se eles “estão avançando em relação a esses conteúdos é muitas vezes confundido com o fato de

¹ Formado em Matemática/Licenciatura pela Universidade Federal do Paraná (UFPR).

“eles saberem ou não fazer contas” (SMOLE e Diniz, 2012, p. 23). Isso é muito reforçado sobre o estudo e “decorar” a Tabuada de Multiplicações, reforçando um aprendizado da multiplicação de saber fazer operações sem contexto somente para falar “que sabe fazer de cabeça”.

Este trabalho decorre de uma das atividades de estágio obrigatório, desenvolvido no contexto das disciplinas de Prática de Docência I e II, de um curso de licenciatura em Matemática, com alunos do 6º do ensino fundamental. Neste estágio foi possível observar que os alunos têm conhecimentos da multiplicação e divisão fracionados, conseguem operar algoritmos, mas quando questionados sobre como realizou ou como interpretaram os exercícios não conseguiram argumentar sobre o que faziam. Isto se tornou um dificultador para a resolução de problemas. O foco estava em fazer a conta.

Com isso, o objetivo deste trabalho apresentar algumas propostas de atividades para a multiplicação e a divisão simples para os alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental, apresentando metodologias para a melhora destes paradigmas das crianças.

Sabendo que existem várias visões e perspectivas de professores, pesquisadores e outros envolvidos na educação para propostas de atividades, projetos e/ou sequências didáticas para ser ensinado a multiplicação e divisão, temos que cada uma delas tem suas particularidades de acordo com o contexto em que estão inseridos, além de a comparação qualitativa delas não são apropriadas para uma discussão.

Algo que é necessário para trazer mais significado é a proposta da discussão e análise de seu raciocínio. Com isso, o professor precisa trabalhar com situações que traga investigações dos alunos, tanto coletivo como individualmente. Este trabalho faz uma reflexão do estudante do seu raciocínio, além de diferentes estratégias trazidas para a sala de aula. Com estas reflexões, a construção do conceito e de seus elementos coletivamente traz mais significado, além do recurso de socialização das diferentes possibilidades de interpretar um mesmo conceito e de criar estratégias variadas. Nacarato, Mengali e Passos trazem uma das implicações que a análise de registros e estratégias dos alunos para a resolução de um problema de divisão:

Um registro como este pode provocar o questionamento de ser ele um registro escolar e de evidenciar uma possível perda de tempo do aluno em

desenhar o material dourado. No entanto, defendemos que o aluno, ao proceder assim, revela compreensão tanto da ideia de repartição – uma das ideias da divisão – quanto da compreensão do algoritmo (NACARATO, MENGALI e PASSOS, 2009, p. 94).

Para esta ação na sala de aula o professor deve ser o pivô do movimento de estímulos de ideias. Ou seja, trazer situações para uma ação reflexiva para os alunos, além de estar aberto a discutir com os estudantes suas estratégias e raciocínios para que o aluno perceba o seu equívoco quanto acontecer, ou em alguns casos o aluno aprimorar suas estratégias para resolver problemas futuramente. Com isso, uma das propostas é o uso da **tabuada, calculadora, a Gelósia, a Régua de Cálculo** para a multiplicação e **Régua de Genaille-Lucas** para a divisão.

Portanto, percebemos que mesmo com as dificuldades dos alunos nos anos anteriores em relação aos conceitos de multiplicação e divisão, temos que trabalhar com os alunos que ingressam no 6º Ano para trazer um aprendizado mais significativo para os alunos e dando possibilidade de aprimoramento de seus raciocínios matemáticos e estratégias de resolução de problemas, investigações e cálculos. Para que isso ocorra, o professor deve planejar a sua prática olhando para a discussão e transposição de ideias dos alunos e professor, fazendo assim uma conceitualização mais dinâmica e presentes na compreensão dos estudantes.

Referências:

- NACARATO. A. M.; MENGALI. B. L. S.; PASSOS. C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: Tecendo Fios do ensinar e do aprender.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.
- SANTOS. V. C.S.; SOUZA. L. B. B.; CHAQUIAM. M. **Dispositivos aritméticos históricos na aprendizagem de multiplicação e divisão.** Cuiabá: ENEM. 2019.
- SMOLE. K. C.; DINIZ. M. I. **Materiais manipulativos para o ensino das Quatro Operações.** Coleção Mathemoteca, Vol. 2. São Paulo: Mathema, 2012.
- BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Operações na resolução de problemas.** Brasília: MEC, SEC, 2014.

O Projeto de Extensão Caminhos Olímpicos na Matemática (COM) em 2022

Hiroshi Caled Tashiro Ascorbe¹, Leonardo de Souza Beraldi², Lucas Gabriel Naldony³, Mouses Robert Nascimento Loyola⁴, Nayara Letícia Monteiro Rodrigues⁵, Carlos Cesar de Carvalho Covo⁶

Licenciatura em Matemática – UFPR¹⁻³ e UTPFR⁴⁻⁵, Colégio Estadual Hildebrando de Araújo⁶

hiroshi_ast@outlook.es, leonardo.beraldi1@gmail.com, lucasgnadolny@gmail.com, mouses_robert@hotmail.com, nayararodrigues@alunos.utfpr.edu.br e carloscccovo@gmail.com

Prof^a. Paula Rogeria Lima Couto e Prof^a. Florinda Katsume Miyaoka⁷(Orientadoras)

Departamento de Matemática – UFPR
paulacouto@ufpr.br e forindaky@gmail.com

Palavras-chave: OBMEP, PIC, ONE.

Resumo:

O projeto de extensão Caminhos Olímpicos na Matemática (COM) articula e desenvolve na UFPR as ações extensionistas ligadas ao Programa de Iniciação Científica Júnior da OBMEP (PIC) e ao Programa OBMEP na Escola (ONE) [2][3]. A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é nacionalmente conhecida por revelar talentos em Matemática [1]. Mas o que é pouco conhecido é todo um conjunto de ações que ela fomenta para assegurar que os talentos descobertos sejam incentivados a uma carreira científica, preferencialmente na Matemática, alicerçada por uma forte base de conhecimento matemático. Em cada edição da OBMEP, entre 6.500 a 7.475 alunos recebem medalhas, entre ouro, prata e bronze. Todos eles são convidados para participar do PIC no ano seguinte, como um prêmio. Os alunos que confirmam sua participação, fazem o PIC em um pólo localizado na região geográfica da sua residência na modalidade presencial, se possível. Além disso, os professores de Matemática das escolas públicas que participam da OBMEP têm a oportunidade de participar do ONE, onde recebem formação continuada em Matemática e apoio para montar uma turma de estudantes nas suas escolas, como uma atividade extracurricular, onde a Matemática é ensinada com a metodologia de Resolução de Problemas, servindo, inclusive, como uma preparação para as provas da OBMEP [4]. Na UFPR, o PIC acontecia desde 2006 e

¹ Bolsista do Programa PIC/OBMEP.

² Bolsista do Programa PIC/OBMEP.

³ Bolsista do Programa PIC/OBMEP.

⁴ Bolsista do Programa PIC/OBMEP.

⁵ Bolsista do Programa PIC/OBMEP.

⁶ Bolsista do Programa PIC/OBMEP.

⁷ Professora aposentada.

o ONE desde 2015 sem estarem vinculados a um projeto ou programa de extensão. A partir de abril de 2022, eles passaram a ser as principais ações do projeto COM. Neste ano, o COM atinge 52 estudantes premiados(as) do Grupo 1 (sétimo e oitavo ano do Ensino Fundamental (EF)), 42 do Grupo 2 (nono ano do EF e primeiro ano do Ensino Médio (EM)), 19 do Grupo 3 (segundo e terceiro ano do EM) e 3 professores de Matemática da rede pública de Ensino. Três alunos do curso de Matemática da UFPR, dois da UTFPR e um professor do Ensino Básico da rede estadual atuam como professores orientadores dos estudantes medalhistas da OBMEP. Cada um deles tem entre 15 a 20 alunos sob sua responsabilidade. As aulas acontecem no Centro Politécnico da UFPR, aos sábados, seguindo um calendário nacional. Neste ano, as aulas começaram em abril e terminarão em novembro, totalizando 7 ciclos com duas aulas presenciais com os medalhistas. Para os professores orientadores são programados 7 encontros de formação, para prepará-los para sua atuação em sala de aula. Espera-se que os resultados do projeto sejam atingidos a longo prazo com um aprofundamento do conhecimento matemático de todos os participantes do projeto e, em especial, do conhecimento pedagógico do ensino dos professores e estudantes de licenciatura envolvidos.

Referências:

- [1] OBMEP. **OBMEP**, c2022. Informações gerais. Disponível em <<http://www.obmep.org.br/>>. Acesso em: 28 de fev. de 2022.
- [2] PIC OBMEP. **OBMEP**, c2022. Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC). Disponível em <www.obmep.org.br/pic.htm>. Acesso em: 28 de fev. de 2022.
- [3] OBMEP na Escola. **OBMEP**, c2022. OBMEP na ESCOLA. Disponível em <<http://www.obmep.org.br/na-escola.htm>>. Acesso em: 28 de fev. de 2022.
- [4] SILVA, C. M. S. da; SIQUEIRA FILHO, M. G. Matemática: Resolução de Problemas. Brasília: Liber Livro, 2011.

bell hooks¹: um referencial capaz de transgredir a sala de aula de matemática

Jéssica Gomes Furtado e Nathalie Aparecida Felicetti Luvison

Licenciatura em Matemática – UFPR

jessicagomesfurtado@gmail.com e nathalie.fluvison@gmail.com

Prof.^a Dr.^a Ettiène Cordeiro Guérios (Orientadora)

Departamento de Teoria e Prática de Ensino – UFPR

ettiene@ufpr.br

Prof.^a Dr.^a Tania Teresinha Bruns Zimer (Orientadora)

Departamento de Teoria e Prática de Ensino – UFPR

taniatbz@gmail.com

Palavras-chave: Metodologia Entre Pares, Prática de Docência, Autonomia.

Resumo:

No primeiro semestre letivo de 2022, matriculadas na disciplina de Prática de Docência em Matemática III, componente curricular obrigatório para o curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal do Paraná, tinha-se como propósito a realização do estágio de observação e intervenção pedagógica em uma escola pública de ensino técnico integrada ao Ensino Médio, na cidade de Curitiba-PR. A partir das observações das dificuldades dos estudantes, o objetivo era realizar um projeto de intervenção pedagógica, com as duas turmas do primeiro ano do Ensino Médio, sendo elas: TC e TPG, as abreviaturas foram utilizadas para manter o anonimato dos estudantes.

Ao iniciar as aulas, percebeu-se que uma das turmas se encontrava bem desunida, os estudantes não tinham grande interação, o que acabou sendo algo notável para se trabalhar no projeto de intervenção. Buscava-se, portanto, um projeto que integrasse os discentes, gerando contribuições entre eles, e assim, iniciou-se a procura por assuntos nos quais os estudantes tivessem dificuldades em comum para abordar no projeto de intervenção. Todavia, diante das observações, não foi notada nenhuma dificuldade matemática convergente, isto é, os estudantes não apresentavam nenhuma dúvida referente a temas específicos que estavam sendo trabalhados, mas sim a conteúdos que deveriam ter sido assimilados no Ensino Fundamental II. O fato de não haver um conteúdo específico a ser trabalhado acarretou no questionamento do que deveria ser desenvolvido.

Durante uma das aulas de Prática de Docência, um dos colegas, que estava realizando o estágio com o Ensino Superior, comentou que uma estudante o questionou sobre como realizar uma pesquisa, no sentido de conseguir sanar suas

¹ Em seu livro: “*Talking back: thinking feminist, thinking black*”, bell hooks (2015) explica que adotou esse pseudônimo (escrito com letras minúsculas) com a tentativa de distanciar sua identidade de sua obra, ou seja, a autora esperava que que os leitores lessem seus textos livres de ideias pré-concebidas a partir de sua identidade. Nas palavras de bell hooks (2015, p. 164): “o objetivo do pseudônimo não era mascarar, esconder minha identidade, mas sim mudar o foco, para torná-lo menos relevante”.

dúvidas buscando esse aprendizado de maneira autônoma. Com o relato apresentado desse colega, começou-se a pensar no projeto de maneira que os estudantes tivessem essa autonomia na hora de tirar as suas dúvidas, e foi com esse pensamento que se começou a delinear a trajetória percorrida por esses estudantes nos últimos anos. Os estudantes que estavam sendo acompanhados conheciam-se, em sua maioria, há menos de seis meses, por estarem adentrando uma nova instituição de ensino, o que pode ser considerada uma justificativa para a desunião encontrada na turma TC. Outro ponto a ser destacado é a tentativa de volta à normalidade após dois anos da pandemia da Covid-19, período no qual a comunicação entre pares ficou restrita, visto que as aulas passaram a ser conduzidas de maneira remota, a comunicação era realizada por meio de tecnologias digitais e o conhecimento só era validado pelos docentes.

Diante do cenário pandêmico e por tratar-se de estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, percebeu-se que a algebrização dos discentes ficou defasada, foi notório a falta de generalização dos conhecimentos provenientes do Ensino Fundamental II. Dessa maneira, optou-se pela realização de uma revisão de conteúdos previstos até o primeiro ano do Ensino Médio. Pensada nessa retomada de conteúdos, a metodologia das aulas entrou em discussão a partir do referencial teórico do livro “Ensinando a transgredir: a educação como prática da liberdade”, de bell hooks (2013), especificamente a prática de diálogo apresentada no capítulo 10, intitulado “A construção de uma comunidade pedagógica”, no qual bell hooks e o professor Ron Scapp desenvolvem o seguinte diálogo:

bh: No que se refere às práticas pedagógicas, temos de intervir para alterar a estrutura pedagógica existente e ensinar os alunos a escutar, a ouvir uns aos outros.

RS: Por isso, uma das responsabilidades do professor é criar um ambiente onde os alunos aprendam que, além de falar, é importante ouvir os outros com respeito. (...) Observo que muitos alunos têm dificuldade para levar a sério o que eles mesmos dizem, pois estão convictos de que a única pessoa que diz algo digno de nota é o professor. Mesmo que outro aluno diga algo que o professor considera bom, útil, inteligente ou seja o que for, é somente pela validação do professor que os outros alunos o percebem. (...) Entendo como uma responsabilidade fundamental do professor demonstrar pelo exemplo a capacidade de ouvir os outros a sério. (HOOKS, 2013, p. 200 e 201)

A partir da citação apresentada, decidiu-se elaborar um projeto de intervenção cuja metodologia fosse a Metodologia Entre Pares², com a intenção de criar um ambiente de interação entre os estudantes, no qual os mesmos não esperem a validação do docente. Pensando em todos esses processos que almejava-se construir ao longo do projeto de intervenção, decidiu-se avaliar cada etapa a partir da Sequência Didática Interativa (SDI), definida como “uma proposta didático-metodológica para ser utilizada no contexto da sala de aula” (OLIVEIRA, 2013, p. 43). Optou-se por essa forma de avaliação, pois entende-se que a avaliação deve ser contínua, para que ocorra o acompanhamento da aprendizagem dos estudantes.

² Tal termo, “Metodologia Entre Pares”, foi cunhado a partir do exposto por hooks (2013) em diálogo com Scapp, os quais afirmam que é responsabilidade do professor criar um ambiente no qual o estudante é convidado a escutar seus pares, interagir e reconhecer o conhecimento trazido pelos mesmos.

Definido o referencial teórico abarcado, bell hooks (2013), a metodologia de ensino, Metodologia Entre Pares, e o processo de avaliação, SDI, pensou-se no projeto de intervenção descrito a seguir. Como etapa inicial, foi elaborado um formulário cuja proposta deu-se como processo de reflexão individual acerca dos conteúdos matemáticos já abordados ou previstos em alguma etapa de ensino, pedindo para que cada estudante elencasse os conteúdos nos quais havia menos compreensão. O formulário foi respondido por 31,25% dos estudantes de cada turma e os conteúdos por eles indicados foram aglutinados por temas. Os estudantes da turma TC foram organizados nos seguintes temas: Frações; Equações; Radiciação; Unidades de medida; Porcentagem. Enquanto os estudantes da turma TPG foram organizados nos seguintes temas: Frações; Conjuntos; Matemática Financeira; Sistemas Lineares; Interpretação; Equações.

O processo de organização dos estudantes em grupos por temas deu-se conforme explicado a seguir. Foi escrito na lousa todos os temas, tanto na turma TC quanto na turma TPG, e em seguida foi entregue um *post it* para cada estudante colocar o seu nome e elencar dois dos temas apresentados que mais possuía dificuldade. A partir dos temas escolhidos pelos estudantes, definiu-se os grupos, aproximando, dessa forma, os estudantes por tema de interesse. Em seguida, explicou-se que a atividade consistia em um trabalho escrito e uma apresentação oral sobre o tema escolhido. O trabalho escrito deveria conter os seguintes tópicos: dúvidas em relação ao tema; resumo com a pesquisa realizada a partir das dúvidas; possíveis aplicações cotidianas; proposta de um exercício sobre o tema e as referências.

Com o trabalho escrito elaborado, os grupos deveriam realizar uma apresentação oral do que haviam encontrado. Para isso, os estudantes foram organizados em círculo, com a motivação de conseguir enxergar seus pares e, assim, facilitar o diálogo. As apresentações foram avaliadas pelos próprios estudantes, por meio de uma ficha de critérios, que solicitava a atribuição de uma nota de 0 à 1. Essa pontuação converteu-se em 1 ponto do peso total do trabalho, o qual constituiu peso 3. Nos critérios de avaliação constava: (i) interesse, envolvimento, responsabilidade e compromisso. (ii) comunicação clara e respeitosa; (iii) interação com a turma; (iv) domínio do conteúdo apresentado; (v) apresentação de aplicações cotidianas da Matemática; (vi) uso de estratégias e recursos adequados; (vii) harmonia do grupo.

A intenção dos critérios de avaliação, tal como a avaliação entre pares, era estimular a concentração no que os estudantes estavam apresentando, além das possíveis perguntas a serem elaboradas no final de cada apresentação. Dessa maneira, a comunicação entre os discentes foi eficiente. Ademais, o processo de validação do conhecimento matemático transgrediu a esfera docente e alcançou a esfera discente.

Referências:

HOOKS, bell. **Ensinando a transgredir: a educação como prática da liberdade.** São Paulo: WMF Martins Fontes, 2013.

HOOKS, bell. **Talking back: thinking feminist, thinking black.** New York: Routledge, 2015.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

Aplicação de quebra-cabeças geométricos no Matematicativa

Clara Machado Juliano, Júlia Villwock Gomes de Oliveira*,

Monique Baptista Fragozo, Raquel Rocha*

clarajulianot@ufpr.br, julia.villwock@ufpr.br,

monique.baptista@ufpr.br, raquelrocha@ufpr.br

Profª. Fernanda Buhrer Rizzato (Orientadora), Profª. Gisele Teixeira

Paula (Orientadora), Profª. Paula Rogeria Lima Couto (Orientadora),

Profª. Ximena Mujica (Orientadora)

fernandab@ufpr.br, giseleteixeira@ufpr.br,

paulacouto@ufpr.br, xmujica@ufpr.br

Palavras-chave: quebra-cabeças geométricos, tangram, figuras replicantes.

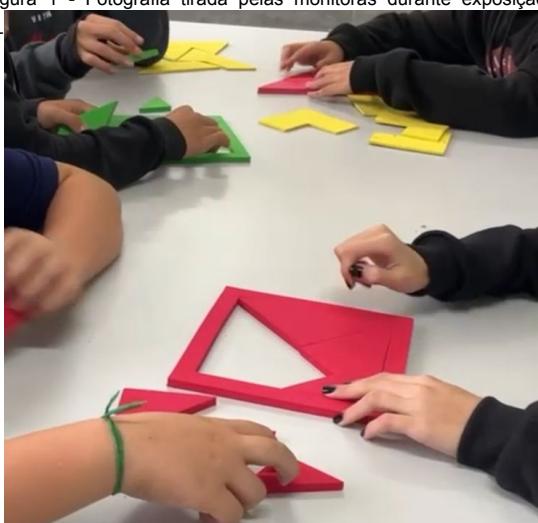
O MatematicATIVA é um projeto de extensão da Universidade Federal do Paraná (UFPR), vinculado ao Departamento de Matemática (DMAT). Desde maio de 2017, o projeto atua em escolas de Ensino Básico na região metropolitana de Curitiba, realizando eventos que englobam palestras sobre matemática e uma exposição interativa de materiais manipuláveis. O objetivo das atividades criadas é apresentar a Matemática de forma lúdica e descontraída, através do acesso a materiais educativos e de qualidade, mostrando aspectos curiosos e divertidos relacionados a diversos temas e, desta maneira, promover o interesse e o encanto pela Matemática.

O presente resumo descreve as atividades relacionadas à quebra-cabeças geométricos, aplicadas no ano de 2022, que compõem a exposição do projeto. O tangram e os polígonos replicantes foram as atividades exploradas nessa área. Assim, despertando o interesse dos alunos com suas cores vibrantes, diversas formas e possibilidades, é possível ensinar a matemática de forma divertida na prática.

*Aluna bolsista do Projeto de Extensão MatematicATIVA

A primeira dinâmica que envolve quebra-cabeças geométricos é o tangram, um antigo jogo chinês, que consiste em formar figuras por meio da combinação de peças de diferentes formas e tamanhos. A atividade possui algumas regras a serem seguidas, como: todas as peças devem ser utilizadas e não é permitido sobrepor nenhuma peça [1]. Durante sua realização, percebe-se que quanto mais o aluno manuseia o material, maior será a criatividade e raciocínio geométrico que aplicará para resolver o enigma, analisando diferentes formas, construções, representações e desconstruções do tangram.

Figura 1 - Fotografia tirada pelas monitoras durante exposição no colégio Júlio Mesquita - Crianças organizando peças de tangram em diferentes formatos.



A segunda dinâmica trabalha com os polígonos replicantes, figuras geométricas de tamanho menor, que ao se unirem, resultam no mesmo formato expandido. Diante desta situação, podemos trabalhar o conceito de semelhança de figuras geométricas e proporção. A realização de atividades com a manipulação de polígonos replicantes estimula a observação e comparação de elementos, desenvolvendo novas visualizações de congruência e semelhança, além de expandir a percepção espacial e aumentar a capacidade de análise

Através da realização dos quebra-cabeças geométricos, evidencia-se o estímulo ao espírito de investigação, a criatividade, a curiosidade e ao desenvolvimento da capacidade de resolver problemas [2]. Com isso, o estudante desenvolve a capacidade de concentração e coordenação. Também, valoriza-se a observação das formas geométricas que compõem o quebra-cabeça, ajudando os alunos a compreender os conceitos de área e de semelhanças de figuras planas.

Essas atividades foram aplicadas em classes escolares do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. As escolas disponibilizaram espaços com mesas, em que foram dispostos os itens confeccionados, de forma que fosse possível a interação dos estudantes com o material, além de facilitar o contato com os monitores, que possuem o papel de estimular a curiosidade na matemática por trás de cada dinâmica. Durante a prática, é possível perceber que quanto mais o estudante remonta, analisa e discute sobre a resolução, maior será seu raciocínio geométrico.

REFERÊNCIAS:

- [1] DANTAS, Tiago. **Tangram.** Uol. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/curiosidades/tangram.htm>. Acesso em: 04 set. 2022.
- [2] BENEVENUTI, Luiz Cláudio; SANTOS, Rejane Costa dos. **O uso do tangram como material lúdico pedagógico na construção da aprendizagem matemática.** Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades, 2016. Disponível em: http://www.sbmembrazil.org.br/enem2016/anais/pdf/6458_3698_ID.pdf. Acesso em: 04 set. 2022.

A Etnomatemática presente nas *contas de roça*

Nathalie Aparecida Felicetti Luvison
Licenciatura em Matemática – UFPR
nathalie.fluvison@gmail.com

Prof. Dra Elisângela de Campos (Orientadora)
Departamento de Matemática – UFPR
eliscamposmat@gmail.com

Palavras-chave: *contas de roça*, Etnomatemática, Etnomatemática do Campo.

Resumo:

O presente resumo é um recorte do Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado “A Etnomatemática presente nas *contas de roça* dos agricultores do Meio-Oeste Catarinense”, as *contas de roça* são cálculos realizados para descrever a área aproximada de um dado terreno. As contas realizadas não possuem o rigor da matemática acadêmica, com isso são compreendidas como uma Etnomatemática do Campo. O objetivo desse trabalho definiu-se por apresentar o conhecimento matemático dos agricultores da região do Meio-Oeste Catarinense, exemplificando o que são as *contas de roça*. Para tal, foram realizadas entrevistas semiestruturadas com sete agricultores e agricultoras da região pesquisada, as análises realizadas a partir das entrevistas, foram abordadas, principalmente, pelo referencial teórico de Ubiratan D’Ambrosio (2020) e Gelsa Knijnik (2019; 2001), que tratam a compreensão e exemplificação do Programa Etnomatemática, a autora ainda trabalha com o enfoque da matemática na agricultura.

Para exemplificar as *contas de roça*, será descrito por meio de exemplos dos entrevistados, como era realizado o cálculo de aproximação da área do terreno. Já na primeira conversa sobre o assunto, o Entrevistado 1 deu como exemplo o terreno da Figura 1, onde é necessário fazer o recorte em várias figuras geométricas para conseguir realizar o cálculo de área, é possível ver na imagem as áreas que se assemelham a de um triângulo e dois retângulos.

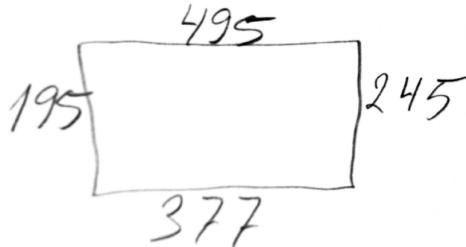
FIGURA 1 – ESBOÇO DE UM TERRENO RURAL DESENHADO PELO ENTREVISTADO 1



FONTE: Arquivo pessoal (2020)

O Entrevistado 3 esboçou o exemplo de um terreno “retangular”, as aspas servem para entendermos que não se trata de dimensões geométricas regulares, mas visualmente no dia a dia é a figura que mais aparenta com a realidade. Dito isso, seguimos com o esboço do terreno dado pela Figura 2, que é descrito como uma figura contendo os lados com 495m, 245m, 377m e 195m.

FIGURA 2 – ESBOÇO DE UM TERRENO RURAL REALIZADO PELO ENTREVISTADO 3



FONTE: Arquivo pessoal (2020)

Já na Figuras 3, tem-se as descrições de como inicia a realização das *contas de roça*. O Entrevistado 3 realiza a operação de soma das medidas dos lados opostos, isto é, o lado com 495m está oposto ao lado de 377m, logo, esses lados são somados totalizando 872m, analogamente os lados de 245m e 195m também possuem suas medidas somadas, por tratarem-se de lados opostos, totalizando 440m.

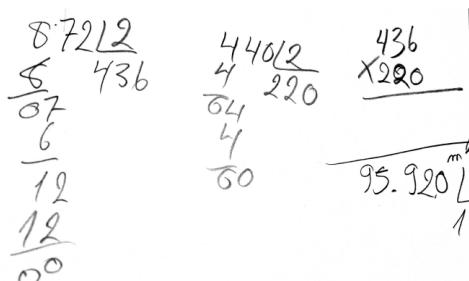
FIGURA 3 – CONTAS DE ROÇA REALIZADAS PELO ENTREVISTADO 3

$$\begin{array}{r}
 495 \\
 + 377 \\
 \hline
 872
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 195 \\
 + 245 \\
 \hline
 440
 \end{array}$$

FONTE: Arquivo pessoal (2020)

Na Figura 4, tem-se as descrições de como são finalizadas as *contas de roça*. O Entrevistado 3 utiliza o resultado da primeira soma dos lados opostos, nesse caso o resultado é 872 e divide por 2, totalizando 436m. Analogamente ocorre para a segunda soma, o resultado 440m é dividido por 2, totalizando 220m. Por fim, basta realizar o cálculo de área, o Entrevistado 3 realiza o produto de ambos os lados, assim 436m vezes 220m, resulta em 95.920m².

FIGURA 4 – CONTAS DE ROÇA REALIZADAS PELO ENTREVISTADO 3



FONTE: Arquivo pessoal (2020)

Exemplificada as *contas de roça*, temos que esse método é similar a cubação de terra, descrita por Knijnik (2001), é interessante pensarmos na ancestralidade dessas contas, a pesquisadora ainda traz no seu artigo, que esses cálculos possuem uma referência histórica do Antigo Egito, como retratada na citação a seguir.

Pesquisadores como o egíptólogo Eric Peet afirmam haver evidências históricas que os levam a afirmar que o método de cálculo acima descrito [cubação de terra] era usado já nos períodos ptolomaicos, romanos e cóticos do Egito, para fins de taxação. (KNIJNIK, 2001, p. 88)

Portanto, fica evidente o caráter histórico dessas *contas de roça*, e o modo como a sua perpetuação, por meio da comunicação, deu-se como forma de sobrevivência de um povo originário da agricultura familiar.

Referências:

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade. 6. ed – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

KNIJNIK, G. et al. Etnomatemática em movimento. 3. ed – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

KNIJNIK, G. A matemática da cubação da terra: Trabalhadores rurais do sul do país desenvolvem técnicas alternativas de medir o terreno. Revista Scientific American Brasil, Edição Especial Etnomatemática, nº 11, p. 86-89, 2001.

Brincando de Matemático: Uma experiência de Ensino e Aprendizagem

Nil Vinícius Gonçalves de Carvalho*, Mariana da Silva Freitas* , Kevyan Uehara de Moraes* , Matheus Kinceski Pires* , Amanda Maciel Oliveira* , Brenda Dal Pupo Monteiro* , Gabrieli Kmiecik* , João Gabriel Chiorato* , Laura Carolina Aymoré Ferrandin* , Leonardo Cortez* , Luana Bankersen* , Mahmut Telles Cansız* , Mariana da Silva Freitas* , Monique Baptista Fragozo* , Natalia Chicora* , Samuel Adam de Souza* , Thais Spannenberg Machado dos Passos*
Licenciatura em Matemática, Bacharelado em Matemática - UFPR

petmatufpr@gmail.com

Prof. Dr. Cleber de Medeira (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

clebermedeira@ufpr.br

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino Médio; Poliedros; Números complexos.

Resumo:

O Brincando de Matemático é um evento de extensão e educação promovido pelo PET Matemática da UFPR que tem como público alvo alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Ele é realizado desde 2005 e tem como objetivo enriquecer a formação desses alunos com um conteúdos matemáticos.

Devido a pandemia, ocorreu de forma remota em 2019 e 2021 e não foi realizado nos anos 2020. Este ano ocorreu de forma presencial, no Centro Politécnico, nos dias 23 e 24 de julho de 2022, abordando o tema "Poliedros Além da Imaginação".

O primeiro dia do evento foi desenvolvido a partir da Fórmula de Euler Para Poliedros, onde trabalhamos: Poliedros de Platão; Fita de Möbius; introdução à Topologia e Teoria de Grafos. A teoria de Grafos foi exemplificada com Padrão de Dobras de origamis e Planificações. Já no segundo, foi abordado o conteúdo de números complexos com os alunos. Esse conteúdo foi utilizado para desenvolver uma caça-ao-tesouro com questões sobre o tema.

O objetivo principal foi tratar de forma lúdica assuntos da matemática que normalmente não são vistos na trajetória escolar dos alunos. Também é esperado que os

*Membros do Programa de Educação Tutorial - Matemática

integrantes do PET tenham experiência na pesquisa para a escrita do material didático e na atividade docente.

A organização do Brincando de Matemático é feita da seguinte maneira:

- 1) Algumas equipes são divididas com os integrantes do PET, cada uma defendendo um tema para basearmos o evento;
- 2) Decidido o assunto, separamos uma equipe para cuidar do evento e a mesma realiza seminários internos semanalmente com o intuito de aprender o conteúdo em grupo;
- 3) Dentro da equipe do evento, nos dividimos em subequipes para escrita do material de cada dia. Geralmente, os professores são os escritores da sua parte do material;
- 4) Próximo ao evento, os livros são impressos e preparamos as aulas. Normalmente esse processo ocorre durante um ano. Mas, devido ao COVID-19, em 2022 ele foi realizado em cinco meses.

Todo o processo de divulgação, inscrição, e outros aspectos logísticos foram realizados pela equipe do PET. Obtivemos os seguintes resultados: a produção do material impresso junto a marca páginas e camisetas do evento; a inscrição de 38 alunos, dos quais 36 participaram; e feedbacks positivos em relação à clareza do material e a condução das aulas e atividades lúdicas. Algumas reclamações foram feitas sobre a duração do evento: dois dias, ao invés de três, como usual.

Os participantes do PET foram capazes de avaliar seu processo de escrita e docência de forma crítica a fim de melhorar esses aspectos. Devido a boa experiência propiciada, o XVIII Brincando de Matemático já está sendo pensado.

Referências

- [1] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. **A Matemática do Ensino Médio**: Volume 2. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.
- [2] STEWART, Ian. **17 Equações que Mudaram o Mundo**. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.
- [3] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria espacial. 4. ed. São Paulo: Atual, 1992.
- [4] GONÇALVES JÚNIOR, Oscar. **Matemática por Assunto**: geometria plana e espacial. 6. ed. São Paulo: Scipione, 1998.
- [5] RICHESON, David S.. **Euler's Gem**: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- [6] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Complexos, Polinômios, Equações, Volume 6, 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- [7] OCHI, Masashi. **Guia Mangá - Números Complexos**. 2010.

Considerações sobre o uso da linguagem matemática e atuação docente: um relato de experiência em estágio supervisionado

Samara Ortiz¹

Licenciatura em Matemática – UFSC

samaraeq@gmail.com

Profª Rosilene Beatriz Machado (Orientadora)
Departamento de Metodologia de Ensino – UFSC

rosibmachado@gmail.com

Palavras-chave: estágio supervisionado, linguagem matemática, processo de ensino-aprendizagem.

Resumo:

Conforme aprofundamento em discussões com professores e colegas sobre educação matemática no decorrer do curso de graduação em licenciatura, tornou-se evidente que questões de linguagem relacionadas com o ensino e aprendizagem constituem-se como um objeto de estudo no campo de pesquisa em educação matemática. Nestas pesquisas, relata-se que a linguagem matemática adequada atua como uma barreira no entendimento das questões a serem resolvidas, compondo pauta de discussão e problematização por diversos autores, como nos trabalhos apresentados por Sadovsky (2007) e Silveira (2020).

Inclusive, durante a elaboração do Trabalho de Conclusão do Curso, estou olhando com mais atenção para estas questões, de modo que pretendo avaliar a linguagem matemática utilizada nos livros didáticos para a introdução de novos conceitos matemáticos. Para além do que o livro didático apresenta, Silveira (2020) cita a necessidade de que o professor utilize palavras adequadas para esclarecer o significado do que se quer transmitir, sem priorizar por um vocabulário simples. Com estas inquietações em mente, durante a minha atuação docente no estágio supervisionado, esta vivência apresentou-se como um lugar de problematização do uso da linguagem matemática adequada, especificamente em relação ao conteúdo de potenciação, que foi o qual eu lecionei.

Sendo assim, o objetivo deste trabalho é relatar a atenção à atuação docente durante o período do estágio no que tange a utilização da linguagem matemática adequada no ambiente escolar, bem como observar a assimilação de novos conceitos matemáticos por parte dos estudantes.

Durante a atuação docente neste período de estágio, me atentei no momento de preparar as aulas para que eu estruturasse as frases e conceitos com uso da linguagem matemática adequada. Além disso, me preocupei em repetir estes conceitos diversas vezes ao longo do período de docência. Este estágio foi realizado no Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Santa Catarina (CA/UFSC), localizado em Florianópolis/SC, no 7º ano do Ensino Fundamental. O período de

¹ Bolsista do PET-Matemática/UFSC.

realização do estágio foi de 09/05/2022 a 15/07/2022, sendo compreendido por uma etapa de observação do ambiente escolar e pela prática docente. Esta docência, que ocorreu no período de 23/05/2022 a 15/06/2022, com 5 horas/aula semanais, resultou em um lugar principal de problematização das questões de linguagem matemática em relação ao conteúdo de potenciação.

Nestas aulas, durante a abordagem do conteúdo de potenciação, pude refletir sobre o uso da linguagem matemática adequada como ferramenta para evitar erros e interpretações equivocadas. Até porque para o aprendizado de conteúdos matemáticos mais aprofundados nos anos seguintes de escolarização, se faz necessário que os estudantes possuam domínio de conceitos matemáticos fundamentais (FERREIRA, 2013). Sendo assim, uma compreensão adequada de potenciação é fundamental para o acompanhamento de conteúdos posteriores que utilizam de seus conceitos, como radiciação e funções (SILVA, 2019).

Os conceitos mais repetidos foram de multiplicação e de potenciação, frisando a diferença entre eles, pois, como observado durante as aulas e constatado na análise realizada por Silva (2019), os erros relacionados à técnica da definição são os mais frequentes. Ou seja, os estudantes possuem dificuldades em distinguir potenciação de multiplicação. Sendo assim, constantemente eu repetia que: “Multiplicação é a repetição da operação soma. Potenciação é a repetição da operação multiplicação.”. Destaca-se que no contexto do 7º ano do Ensino Fundamental, trabalha-se apenas com potenciação tendo na base um número inteiro e no expoente um número natural. Sendo assim, as definições apresentadas são fundamentadas neste universo matemático. Durante as aulas de resolução de exercícios, pude notar que alguns estudantes repetiam as definições para resolverem as questões, como uma forma de lembrete a si mesmo.

Evitei ao máximo utilizar vocabulário e expressões mais simplificados para o assunto, uma vez que, de acordo com Sadovsky (2007), a superficialidade pedagógica ao se ensinar matemática e o uso de expressões como “vai um”, “pegar emprestado”, “passa para o outro lado”, dificultam o entendimento do que estas operações, de fato, significam. Entendo que tal vocabulário pode ser utilizado para ilustrar a regra, uma vez que eu mesma utilizei algumas vezes durante as aulas, mas creio que no decorrer da fala do professor, a linguagem matemática deve ser corretamente estabelecida, bem como a correta explicação de o que, de fato, está sendo desenvolvido. Por exemplo, eu evitei falar expressões como “o número de baixo e o número de cima” e quando o fazia, logo na sequência falava a linguagem matemática apropriada, ou seja, “o número da base e o número do expoente”, de modo a conceituar de forma correta e significativa.

Como apontado, o vocabulário adequado é importante para esclarecer o significado do que se quer transmitir. Afinal, como destacado por Ferreira (2013), a dificuldade com o uso da linguagem matemática e desconhecimento do vocabulário específico da matemática por parte dos estudantes é algo presente em todos os anos escolares e dificulta o desenvolvimento do aprendizado.

E isto, de fato, foi observado no decorrer do período de estágio. Cito situações em que alguns estudantes da turma na qual atuei mostravam-se confusos com o algoritmo da divisão, uma vez que eles haviam decorado tal operação, sem o entendimento do porquê o algoritmo funciona. Nesta linha, Sadovsky (2007) observa que a falta de formalidade na linguagem matemática no ambiente escolar acarreta perdas significativas na aprendizagem de conteúdos sequenciais por falta de compreensão de conceitos elementares.

Para além das leituras e discussões sobre a importância do uso da linguagem matemática adequada, pude perceber o reflexo de se tentar simplificar os termos corretos, uma vez que se perde significados e o correto entendimento dos conceitos trabalhados. Destaco que, sabendo da importância da linguagem matemática adequada na apresentação de novos conceitos, bem como em todas as etapas do processo de ensino-aprendizagem, tomei um cuidado extra em elaborar minha fala de modo apropriado. E, apesar disso, houve confusões por parte dos estudantes nas definições apresentadas. Deste modo, pude constatar que as dificuldades são mais complexas do que o uso da linguagem matemática adequada. O mesmo foi observado por Richartz (2005) em seu trabalho, que foi motivado pela preocupação referente à aprendizagem do conteúdo de potenciação. Suas conclusões não abordam especificamente sobre a linguagem matemática, mas sim sobre a dificuldade no entendimento do conceito de potenciação por parte dos estudantes que, concordando com o citado anteriormente, confundem com a multiplicação.

Sendo assim, surge aqui a inquietação sobre a possibilidade de que, evitar simplificar o vocabulário em detrimento dos significados dos conceitos matemáticos deva ser uma postura adotada desde a alfabetização das crianças para potencializar o ensino e aprendizagem de matemática. Outro questionamento que persiste é sobre o fato de muitos estudantes considerarem a matemática como uma disciplina difícil. Mas, será que tal desgosto é realmente pelo conteúdo ou por ser algo que os estudantes não entendem, logo, evitam e rejeitam?

Desde que eu ingressei no curso de licenciatura em Matemática, me vejo desconstruindo diversas opiniões sobre ensino-aprendizagem da matemática. Durante o período de estágio, vivenciando o ambiente escolar, pude problematizar outras questões que tinha como ‘resolvidas’.

Referências:

- FERREIRA, C.V. **Um estudo sobre as dificuldades dos alunos de 7º ano para compreender as quatro operações.** Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 34 folhas, 2013.
- RICHARTZ, M. **Potenciação** – Um estudo didático. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 91 folhas, 2005.
- SADOVSKY, P. **Falta Fundamentação Didática no Ensino da Matemática.** Nova Escola. São Paulo, Ed. Abril, Jan./Fev. 2007.
- SILVA, Z. A. **Potenciação:** uma análise de erros na resolução de questões em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 42 folhas, 2019.
- SILVEIRA, M. R. A. **A ênfase da linguagem na educação matemática: das palavras incertas às palavras com sentido.** *RenCiMa - Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v. 11, n.1, p. 1-12, 2020.

Educação Financeira no Ensino Fundamental: propostas e saberes na perspectiva histórica

Willian Hideki Batista Alves Yotsumoto (Orientando)

wilianyotsumoto@gmail.com

Curso de Matemática – Unespar Campus Paranaguá

Prof. Mariliza Simonete Portela (Orientador)

mariliza.portela@unespar.edu.br

Colegiado do Curso de Matemática – Unespar Campus Paranaguá

Prof. Liceia Alves Pires (Coorientador)

liceia.pires@unespar.edu.br

Colegiado do Curso de Matemática – Unespar Campus Paranaguá

Palavras-chave: História da Educação matemática, Educação Financeira, Ensino Fundamental.

Resumo:

A pesquisa no âmbito de uma Universidade tem como um dos objetivos contribuir no processo de formação de futuros professores. Sendo um modo de intervir positivamente na formação de sujeitos atuantes na educação, os seus resultados são agentes que podem cooperar com as transformações. Nesse sentido o trabalho em questão, derivado do Programa de Iniciação Científica (PIC) terá como objetivo geral: estudar a presença da educação financeira nas propostas escolares, na perspectiva histórica buscando compreender como esse conteúdo de ensino esteve presente em documentos oficiais normativos. As fontes de pesquisa que se pretende utilizar são três, dois deles normativos na esfera federal e um na esfera estadual: a Base Nacional Comum Curricular (2018), os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) e o Currículo para a Escola Básica do estado do Paraná (1990). Tratando-se de uma pesquisa em História da Educação Matemática, os escritos de historiadores como Valente (2020), Pinto (2014), Vidal (2010) e Mendes (2015) darão suporte teórico. Entendendo que a cultura escolar e a história das disciplinas estarão presentes nos estudos, os escritos de Chervel (1990) nortearão a pesquisa. Assim, a proposta aqui apresentada visa a oportunidade de oferecer aos discentes, tempo e espaço para discutir com pesquisadores experientes, os saberes constituintes da profissionalização do educador matemático e a própria história do ensino da matemática. Acreditando que assim o discente tem possibilidade de desenvolver a capacidade crítica para melhor exercer a docência futura. Estudar as propostas e os saberes da profissionalização” devem assegurar aos professores uma formação com

qualidade que possa ser repercutida sobre o conjunto do sistema educativo" (BORER, 2017, p. 173). No bojo dos saberes voltados para cada área do conhecimento, há aqueles necessários para o ensino de matemática, entretanto o olhar sobre os saberes também precisa ser discutido. Essas discussões, na perspectiva histórica, têm sido apresentadas na forma de livros e artigos, fundamentando novas pesquisas aplicadas a temas específicos. Isso tudo, no contexto da História da educação matemática, um campo recente de pesquisas e que segundo Valente (2020) é em finais da década de 1980 que surge como um novo campo disciplinar e profissional. E, como vertente desse novo campo, abre-se o caminho para uma nova ramificação, a História da educação matemática (Hem). A educação Financeira, está presente na atual proposta da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) 2018, no conjunto das ideias que compõem a Matemática favorecendo um estudo interdisciplinar nas dimensões "culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro" (BRASIL, 2018, p. 271). Essa abertura permite além das relações com os conceitos matemáticos, a discussão da função e uso do dinheiro, do consumo em momentos históricos diversos promovendo desenvolvimento de competências pessoais e sociais para a vida prática. O documento anterior que direcionava a educação, Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), aponta a matemática como um componente importante na construção da cidadania que deveria estar ao alcance de todos. Faz uma abordagem histórica da disciplina e apresenta-se numa perspectiva diferenciada da atual proposta e segue atendendo a organização de uma escolaridade em ciclos que no caso do estado do Paraná, está presente nos documentos orientadores de 1990. Os estudos preliminares mostram que o Currículo da Escola Básica do estado do Paraná (1990), apresenta o tema na perspectiva de uma escola renovada. Para entender como cada proposta é construída se faz necessário um olhar da cultura local e da cultura escolar. Esses estudos são necessários para que o pesquisador situe seu objeto de pesquisa no espaço e no tempo que lhes são próprios. Assim é possível entender o presente e nele intervir se considerar importante. Nesse contexto, temos questões muito interessantes para serem investigadas a começar pela atual proposta (BNCC, 2018): Como está proposta a abordagem desse tema no documento em questão e quais os saberes indicados para esse ensino? O aprofundamento dessa temática na perspectiva histórica, se dará com o estudo dos documentos anteriores propostos direcionados pelas questões que derivam da inicial: Como estavam propostos, nos documentos anteriores, os direcionamentos para as discussões no âmbito da educação financeira? Qual(is) as nomenclaturas utilizadas? Como figuravam os saberes na matemática a ser ensinada? Os professores tinham orientações nesse sentido? Espera-se com essa pesquisa compreender elementos importantes na educação matemática, como a educação financeira e poder promover discussões ao processo de ensinar e aprender matemática no Ensino Fundamental.

Referências:

BORER, V. L. Saberes: uma questão crucial para a institucionalização da formação de professores. In HOFESTETTER e VALENTE Orgs, **Saberes em**

(trans)formação: tema central da formação de professores. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, n. 2, p. 177-229. 1990.

MENDES I. A. M. **História da Matemática no ensino**: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

PARANÁ, **Currículo Básico para a Escola Pública do Estado do Paraná**, SEED. Curitiba: Imprensa Oficial do Estado do Paraná, 1990.

PINTO, N.B. História das disciplinas escolares: reflexão sobre aspectos teóricos-metodológicos de uma prática historiográfica. **Rev. Diálogo Educacional**, Curitiba, 2014.

VALENTE, W. R. **Ciências da Educação, campos disciplinares e profissionalização**: saberes em debate para a formação de professores. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

VIDAL D. G. e SCHWARTZ, C. M. Orgs. **História das Culturas Escolares no Brasil**. Vitória: EDUFES, 2010.

Geometria e Topologia

Banca Avaliadora:

Professores:

Prof. Diego Mano Otero
Prof. Eduardo Outeiral Correa Hoefel
Profa. Gisele Teixeira Paula
Prof. Ricardo Paleari da Silva

Estudantes da pós graduação:

Thiago Paulichen
Rodrigo dos Santos Pacheco

Transformações de Möbius e suas propriedades

Gabrieli Kmiecik *

Bacharelado em Matemática - UFPR

gabi.kmiecik@hotmail.com

Profª. Drª. Gisele Teixeira Paula (Orientadora)

Departamento de Matemática - UFPR

giseleteixeira@ufpr.br

Palavras-chave: Transformações geométricas, Transformações de Möbius, Geometria hiperbólica.

Resumo:

Neste estudo, buscamos definir as transformações de Möbius e suas propriedades. Antes de definir as transformações propriamente ditas, precisamos introduzir a projeção estereográfica, uma bijeção da esfera menos seu polo norte, no plano complexo \mathbb{C} .

Com a projeção estereográfica, conseguimos introduzir o plano complexo estendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, denotado por \mathbb{C}_∞ , no qual temos o infinito sendo representado como a imagem do polo norte pela extensão da projeção estereográfica à esfera. Deste modo, podemos enxergar que retas e círculos são objetos com papéis semelhantes na geometria do plano complexo estendido, vendo as retas como círculos que passam pelo ponto no infinito. Na esfera, imagem do plano complexo estendido pela inversa da projeção estereográfica, as retas são levadas em círculos que passam pelo polo norte. Mais precisamente, usando coordenadas complexas, veremos que retas e círculos podem ser descritas por um único tipo de equação: $Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0$, a qual representará uma reta se o parâmetro A for zero, e um círculo se esse parâmetro for diferente de zero. Com essa descrição será mais simples trabalhar as propriedades das transformações de Möbius no plano complexo estendido.

No plano complexo estendido, podemos definir as transformações de Möbius. Veremos que elas formam um grupo e que sempre podem ser decompostas em transformações de Möbius mais simples: rotações, translações, homotetias e inversões. Essas transformações têm a propriedade de levar círculos em círculos, considerando círculo na forma generalizada, o que inclui retas.

Verificaremos que a quantidade de pontos fixos de uma transformação de Möbius determina como é o comportamento geométrico de sua ação no plano.

Utilizando a escrita matricial e os pontos fixos, classificaremos as transformações de Möbius em parabólicas, hiperbólicas (e loxodônicas) ou elípticas. Também mostraremos como conseguir a classificação apenas analisando o traço da matriz associada.

*Bolsista do PET-Matemática.

Para falar sobre a projeção estereográfica e entender as propriedades das transformações de Möbius utilizamos [1] e para solidificar os conceitos e definições, utilizamos [2].

Referências

- [1] DURAN, F. 2013. 71 f. **Transformações de Möbius e Inversões.** Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2013.
- [2] BEARDON, A. F. **The Geometry of Discrete Groups.** 2nd edition. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1995.

Trigonometria e Ladrilhamentos no Plano Hiperbólico

Izabella Calais Fernandes *

Licenciatura em Matemática - UFPR

izabellacalais00@hotmail.com

Prof^a. Dr^a. Gisele Teixeira Paula (Orientadora)

Departamento de Matemática - UFPR

giseleteixeira@ufpr.br

Palavras-chave: Geometria Hiperbólica, Trigonometria Hiperbólica, Teorema de Gauss-Bonnet, Ladrilhamentos.

Resumo:

A geometria Hiperbólica é uma das ditas geometrias não-euclidianas. Nessa noção de geometria substitui-se o quinto postulado de Euclides:

"Para toda reta r e todo ponto P fora de r, pode-se traçar uma única reta paralela a r que passe por P". - (Postulado Equivalente de John Playfair)

Pelo seguinte:

"Para toda reta r e todo ponto P fora de r, pode-se traçar pelo menos duas retas paralelas a r que passem por P".

Historicamente, esta noção surgiu após inúmeras tentativas sem sucesso de provar o quinto postulado a partir dos outros quatro. Muitas das tentativas baseavam-se na redução ao absurdo, e seus insucessos culminaram em uma nova geometria aparentemente consistente.

Posteriormente, Eugenio Beltrami [1], em 1868, provou a consistência das geometrias não-euclidianas, tanto da geometria hiperbólica, quanto da geometria esférica (que assume a não existência de retas paralelas). Inclusive mostrou que a inconsistência das geometrias não euclidianas implicaria na inconsistência da própria Geometria Euclidiana.

Nesta apresentação iremos mostrar algumas definições básicas da Geometria Hiperbólica, começando por dois modelos interessantes para as construções posteriores, sendo eles o *semi-plano superior* (\mathbb{H}) e o *disco de Poincaré* (\mathbb{D}). Falaremos como é definida a métrica nessa geometria, apresentando então quem são as geodésicas do plano Hiperbólico, ou seja, quem são os caminhos que minimizam o

*Programa de Voluntariado Acadêmico

comprimento entre dois pontos. Abordaremos as isometrias do plano hiperbólico, que seriam as bijeções do plano que preservam a métrica, dando ênfase ao grupo das transformações de Möbius.

Já com essas noções estabelecidas falaremos da trigonometria do plano hiperbólico: ângulos, a construção de triângulos hiperbólicos, o teorema de Pitágoras para geometria hiperbólica, as relações e trigonométricas e as funções trigonométricas hiperbólicas. Faremos então um comparativo com a geometria euclidiana.

Mencionaremos também a noção de áreas para a geometria hiperbólica e como esse conceito se relaciona com a trigonometria hiperbólica através do Teorema de Gauss-Bonnet para polígonos hiperbólicos. Este teorema fornece uma fórmula que descreve a área de um polígono em termos de seus ângulos internos.

Concluiremos apresentando o que seriam ladrilhamentos do plano hiperbólico por meio de polígonos (exemplos em Fig. 1 e 2), a riqueza de exemplos desse tipo de construção em comparação com a geometria euclidiana, e como podemos utilizar o Teorema de Gauss-Bonnet para obter uma condição necessária para a existência de ladrilhamentos.

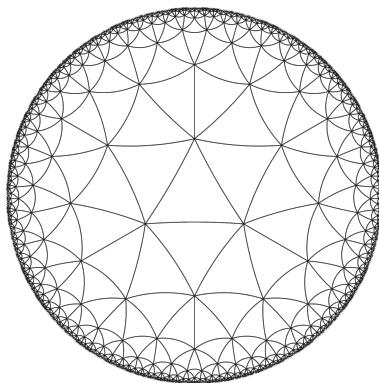


Figura 1: Ladrilhamento por Triângulos

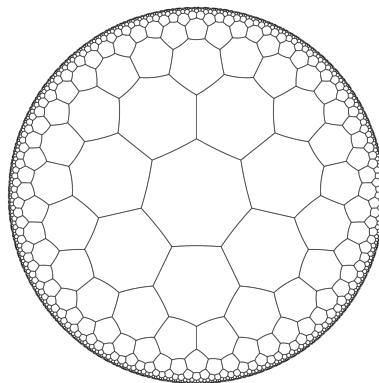


Figura 2: Ladrilhamento por Hexágonos

Os detalhes dos conceitos citados acima podem ser encontrados em [2], [3] e [4].

Referências

- [1] BELTRAMI, E. **Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante**. Napoli, Annali di Matematica 2, 232–255, 1868.
- [2] WALKDEN, C.; **Hyperbolic Geometry**, Lecture Notes. University of Manchester, 2019.
- [3] DORIA, C. M., **Geometrias: Euclidiana, Esférica e Hiperbólica**. Rio de Janeiro: SMB, 2019.
- [4] BEARDON, A. F., **The Geometry of Discrete Groups**. New York: Springer-Verlag, 1983.

Formas Diferenciais e Aplicações

João Gabriel Chiorato *

Bacharelado em Matemática - UFPR

jgchiorato@gmail.com

Prof. Dr. Diego Mano Otero (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

oteroufpr@gmail.com

Palavras-chave: Variedades, Formas Diferenciais, Integrais.

Resumo:

O conceito de Integral é muito utilizado no cálculo diferencial para obter comprimento de curvas, áreas de superfícies ou até mesmo de volume de sólidos. Ao trabalhar com objetos abstratos, como variedades diferenciáveis, queremos generalizar essa ideia.

Utilizando o fato que toda variedade é localmente um espaço Euclidiano, naturalmente podemos definir a integral de uma função em um domínio de uma carta da variedade fazendo a integral múltipla usual, que vemos nos cursos de Cálculo, da função dada em coordenadas locais. Em intersecções de cartas, podemos usar a fórmula de mudança de coordenadas em integrais para ver se este conceito está bem definido. A fórmula de mudança de coordenadas em integrais é dada por

$$\int_V f dy = \int_U (f \circ \phi) |\det d\phi| dx$$

onde U e V são subconjuntos abertos e limitados de \mathbb{R}^n , $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, $\phi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo, e $\det d\phi$ é o determinante da matriz Jacobiana de ϕ . Considerando f uma função escrita em carta locais de uma variedade e ϕ a função de transição de cartas, a fórmula acima implica que em geral $\int_V f dy \neq \int_U (f \circ \phi) dx$, já que em geral $|\det d\phi| \neq 1$. Isto é, a **noção de integração de funções dessa maneira natural não está bem definida**. Isso nos motiva a definição de um objeto para corrigir o termo extra (valor absoluto do determinante da Jacobiana) que aparece na fórmula de mudança de coordenadas na integral.

Para corrigir a ideia acima e estender a integração em variedades abstratas, podemos usar do conceito de **formas diferenciáveis de grau n** , onde n é a dimensão da variedade. Para ilustrar, considere $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ uma carta local com domínio

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática UFPR

conexo U e f uma função suave na variedade. Em U podemos definir a forma diferencial $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ e considerar a integral de f em U como sendo $\int_U \omega = \int_{\varphi(U)} (f \circ \varphi) dx_1 \dots dx_n$, em que, à direita da igualdade, a integral é uma integral usual em n variáveis. Sendo $\psi = (y_1, \dots, y_n)$ uma outra carta com mesmo domínio U , podemos fazer a conta da mesma maneira e chegamos ao mesmo resultado, **a menos de um sinal**, devido a seguinte propriedade: $fdx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = (f \circ \phi).(\det d\phi) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$, onde $\phi = \varphi^{-1} \circ \psi$. Isso resolve parte do problema, pois não é sempre que $(\det d\phi) > 0$. Com isso, surge o conceito de **cartas compatíveis**, que está relacionado com a noção de **orientação**, ou de uma maneira de medir conjuntos (forma volume). Assim, este trabalho terá o **objetivo principal de estudar os detalhes dessa conta (local) que corrige parcialmente o problema (a menos de um sinal), e os conceitos necessários para corrigir integralmente (orientabilidade e existência de forma volume na variedade)**.

Formas diferenciais também são usadas para **descrever fenômenos físicos**. Neste trabalho apresentaremos o exemplo das **Equações de Maxwell** [2], que escritas em termos de campos de vetores temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{v}_E) &= q \\ \operatorname{curl}(\mathbf{v}_E) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_M \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}_M) &= 0 \\ c^2 \operatorname{curl}(\mathbf{v}_M) &= w + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_E, \end{aligned}$$

em que \mathbf{v}_E e \mathbf{v}_M são, respectivamente, os campos elétrico e magnético, q é a densidade de carga, w é a densidade de corrente e c é a velocidade da luz.

Sejam $\omega_M = \mu_M - \mathbf{v}_E^* \wedge dt$ e $\omega_E = \mu_E - \mathbf{v}_M^* \wedge dt$ 2-formas, e $\Lambda \doteq q\Omega + \iota_w \Omega \wedge dt$ uma 3-forma. Usando formas diferenciais, podemos escrever essas quatro equações em apenas duas, como [2]:

$$\begin{aligned} d\omega_M &= 0 \\ d\omega_E &= \Lambda, \end{aligned}$$

Referências

- [1] TAO, T. **Differential Forms and Integration**. Los Angeles CA: Department of Mathematics, UCLA, 2020.
- [2] GUILLEMIN, V.; HAINÉ, P. J. **Differential Forms**. 2018
- [3] BRYAN, K. **Differential Forms**: MA 305.
- [4] FRANKEL, T. **The Geometry of Physics: An Introduction**. Cambridge University Press, 3rd edition, 2011.
- [5] TALMAN, R. **Geometric Mechanics: Toward a Unification of Classical Physics**. Wiley-VCH, 2nd edition, 2007.

Teoria Geral da Incidência

Kevyan Uehara de Moraes*

Bacharelado em Matemática - UFPR

kevyan.uehara@ufpr.br

Prof. Dr. Adonai Schlup Sant'Anna (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

adonaisantanna@gmail.com

Palavras-chave: Plano de Incidência, Fundamentos da Matemática, Teoria de Conjuntos.

Resumo:

O estudo contemporâneo da Geometria Euclidiana e Não Euclidiana pode ser definido como o estudo inspirado nos axiomas presentes no trabalho de David Hilbert, Fundamentos da Geometria (*Grundlagen der Geometrie*). Os objetivos de Hilbert foram criar uma coleção de axiomas *independentes* para o estudo dessas áreas [2].

Uma formulação mais recente é apresentada por [1], baseada na axiomática supracitada. Em ambos os trabalhos, o estudo axiomático da geometria se inicia a partir de axiomas básicos, chamados comumente de *Axiomas de Incidência*. Esses axiomas apresentam a base para se fundamentar conceitos mais complexos da área: as noções de congruência, orientação de retas e ângulos, ângulo, “estar entre” (ponto entre pontos), etc. Os Planos de Incidência são as bases para o estudo de, por exemplo, Planos Dasarguesianos e não-Dasarguesianos, Euclidianos e não-euclidianos, Plano Absoluto, etc [1].

No presente trabalho apresentamos uma generalização do plano de incidência. Essa generalização ocorre de duas maneiras: a primeira é que enxergamos esses planos de incidência como apenas um tipo de plano em uma família de (n, k) -planos de incidência. A outra faceta da generalização é que a linguagem empregada independe de uma linguagem de teoria de conjuntos, como ocorre em [1].

Desenvolvemos uma teoria de primeira ordem com igualdade [4] e um predicado binário (\rightarrow), chamado de **incidência**. A ideia intuitiva é a seguinte: dados dois termos dessa teoria a e b , se $a \rightarrow b$ então dizemos que “ a incide sobre b ”. Nessa teoria os principais conceitos são os de pontos, retas e planos. Definimos os (n, k) -planos de incidência nesse novo sistema.

Poderíamos definir os (n, k) -planos de incidência no sistema Zermelo-Fraenkel ou outra teoria de conjuntos. Porém temos como princípio tomar a noção de *incidência* como independente da *pertinência* (\in) entre conjuntos.

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) - Matemática e voluntário no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC)

Posteriormente será feita uma análise à luz da Teoria de Modelos [3]. Queremos verificar se essa generalização proposta é um modelo parcial de alguma teoria de conjuntos. Em caso positivo, teremos argumentos para afirmar que a geometria de Euclides está muito mais próxima dos métodos axiomáticos contemporâneos do que se pensava anteriormente.

Referências

- [1] CASTRUCCI, B. **Fundamentos da geometria: estudo axiomático do plano euclidiano.** 1. ed. [S.I.]: LTC, 1978.
- [2] HILBERT, D. **The foundations of geometry.** [S.I.]: The Open Court Publishing, 1902.
- [3] JECH, T. **Set theory.** 3. ed. Berlim: Springer, 2006. v. 14.
- [4] MENDELSON, E. **Introduction to mathematical logic.** 6. ed. [S.I.]: CRC Press, 2015.

A Conjectura de Toeplitz para polígonos regulares

Luis Fernando Salla de Souza

Licenciatura em Matemática - UTFPR - Pato Branco

luisouza.2018@alunos.utfpr.edu.br

Prof. André Guerino Castoldi (Orientador)

Departamento Acadêmico de Matemática - UTFPR - Pato Branco

andrecastoldi@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Conjectura de Toeplitz, polígono regular, quadrado inscrito, Geometria Euclidiana Plana.

Resumo: A conjectura de Toeplitz propõe o seguinte problema a respeito de curvas planas: "qualquer curva plana simples fechada (Curva de Jordan) contém os quatro vértices de algum quadrado". Conforme [3], este problema surgiu em 1911 em um relatório de uma conferência onde Toeplitz ministrou uma palestra. Uma das partes do relatório tinha como título "sobre alguns problemas em topologia" e neste breve relato ele cita uma conjectura, conhecido atualmente como o problema do quadrado inscrito. Segundo o artigo survey [1], a conjectura de Toeplitz foi resolvida para curvas convexas e curvas com várias condições de regularidade, porém ainda é um problema em aberto em toda sua generalidade.

Em 2017, Othechar [2] abordou a conjectura de Toeplitz com foco na matemática ensinada no ensino básico. A conjectura foi demonstrada para polígonos regulares de 3, 4 e 5 lados, a circunferência e a elipse utilizando a Geometria Euclidiana Plana e a Geometria Analítica. Inspirados no trabalho de Othechar [2], propomos a investigação da conjectura de Toeplitz para polígonos regulares. Assim, o objetivo deste trabalho é demonstrar a conjectura para polígonos regulares utilizando somente a Geometria Euclidiana Plana. O resultado principal é enunciado no teorema a seguir.

Teorema 1 *Todo polígono regular contém os quatro vértices de algum quadrado.*

O desenvolvimento deste trabalho consiste em demonstrar o Teorema 1 para alguns polígonos regulares, como o triângulo equilátero, o quadrado, o pentágono regular e o hexágono regular. Com base nestes casos e nas construções geométricas utilizando o software de geometria dinâmica (GeoGebra) dividimos essa demonstração nos seguintes tópicos:

1. Polígonos regulares com o número de lados múltiplo de 4;

2. Polígonos regulares com $4k + 2$ lados;
3. Polígonos regulares com o número ímpar de lados.

Este trabalho de conclusão de curso ainda está em andamento e já temos uma demonstração para os casos 1 e 2, porém para o caso 3 temos algumas ideias promissoras de como demonstrar este caso.

Referências

- [1] MATSCHKE, Benjamin. “**A survey on the Square Peg Problem**”. Notices of the American Mathematical Society v. 61. 2014. p. 346-352.
- [2] OTHECHAR, Pedro F. S. **A conjectura de Toeplitz no ensino básico**. Revista do Professor de Matemática. UFMS/ Ponta Porã.v.93, p. 36-41. 2017.
- [3] TOEPLITZ, Otto. **Ueber einige Aufgaben der Analysis situs** , Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Solothurn 4 (1911),197.

Teorema de Gauss–Bonnet: Uma abordagem moderna

Monica Maria Funk Drechsler
Bacharelado em Matemática - UFSC
monicadrechsler@gmail.com

Prof. Dr. Francisco Carlos Caramello Junior
Departamento de Matemática - UFSC
francisco.caramello@ufsc.br

Palavras-chave: Teorema de Gauss–Bonnet, Formas diferenciais, Geometria Diferencial

Resumo:

O Teorema de Gauss–Bonnet é um dos mais célebres resultados na geometria diferencial clássica das curvas e superfícies. Além disso, sua generalização moderna para variedades de dimensão maior, devida a Chern, também é tratada com o mesmo apreço. Ao estabelecer que a integral da curvatura Gaussiana de uma superfície se iguala à característica de Euler da mesma multiplicada pela constante circular, estamos relacionando dois invariantes diferentes: uma propriedade geométrica local e uma característica topológica global, o que torna o resultado, no mínimo, contraintuitivo e, por tal motivo, surpreendente.

Sem muitos pormenores, uma superfície pode ser vista como uma capa bidimensional, assim como uma película super maleável ou a fronteira de um sólido tridimensional. Por sua vez, tendo esta superfície, podemos modelá-la como quisermos, puxando-a, sem furar ou rasgar, em um processo que chamamos de difeomorfismo [1]. Ao fim desta deformação obteremos uma nova superfície, ainda com as mesmas noções de conjuntos abertos e fechados, chamado de topologia homeomorfa, mas possivelmente com uma geometria diferente. Outro conceito importante se trata de quando uma superfície é compacta, o que acontece quando, ao recobrirmos ela por abertos, temos um subcobertura finita destes abertos que a cobrem por completo.

Intuitivamente, vamos imaginar que estamos sobre uma superfície. Podemos nos debruçar sobre vários dos seus aspectos. Por exemplo, ao percorrermos um caminho sobre ela, teremos a velocidade com a qual seguimos neste trajeto, dada por um vetor tangente à superfície em cada instante do percurso. Teremos também, ao menos localmente, a noção de “para cima”, de uma forma que possamos nos orientar com um chão e uma noção de perpendicularidade de onde ficaria o céu, que chamamos de “campo normal”, composto dos vetores normais [2]. Além disso, uma vez que a superfície é uma película moldada, temos o conceito de curvatura, que é uma medida

de variação do campo normal. Essa função curvatura captura o quanto a superfície se curva em um ponto, e, portanto, vai sendo alterada conforme andamos, próximo daquele ponto, nessa superfície. Uma outra maneira de descrever a curvatura em um ponto p na superfície consiste em analisar as curvaturas das curvas que passam por esse ponto [3]. Estas curvas podem ser obtidas através da interseção de um plano contendo o vetor normal no ponto com a superfície. Isso nos dá uma função contínua que, a cada direção tangente, retorna o número atribuído a curvatura naquela direção. No entanto, uma vez que essa função é contínua em um conjunto compacto, possui valor mínimo e máximo. O produto destes valores é chamado de curvatura gaussiana em cada ponto p , que denotamos por $K(p)$.

Por outro lado, ao dividirmos uma superfície em "triângulos" e tomarmos o número resultante de vértices menos o número de arestas mais o número de faces, obtemos um número chamado "Característica de Euler", que denotamos por χ . Perceba que esse número é invariante por homeomorfismos, pois, sob sua ação, um triângulo é deformado em outro [4]. Este valor também pode ser visto, para uma superfície compacta e orientável, como $2 - 2g$, onde g é o gênero da superfície, grosso modo, "o número de buracos" que a superfície tem.

Uma terceira forma de se obter χ , disponível em [5], é através das cadeias de homologia e cohomologia singulares, o que conecta esse invariante, e consequentemente também o teorema de Gauss–Bonnet, com a topologia algébrica. A homologia singular $H_*(S)$ é um importante invariante algébrico associado a uma superfície S obtido via o estudo dos simplexos singulares, isto é, funções contínuas $\sigma : \Delta \rightarrow S$, sendo Δ o simplexo canônico em \mathbb{R}^n . As cadeias de tais simplexos cujo bordo zera capturam informações topológicas de S , organizadas em uma sequência de espaços vetoriais $H_i(S)$. É possível demonstrar que $\chi(S)$ aparece como a soma alternada

$$\chi(S) = \sum_{i=0}^{\dim(S)} (-1)^i \dim H_i(S).$$

Outro detalhe importante se trata da própria percepção de integral [6]. Como estamos trabalhando em superfícies, as noções do cálculo, utilizando vetores, podem ficar complicadas. A resposta é utilizar a ferramenta correta para integrar: as formas diferenciais. Uma k-forma diferencial associa cada ponto na superfície a um k-tensor alternado covariante em $T_p S$. Isto nos permite alternar as parametrizações sem precisar corrigi-las com o jacobiano, conforme o Teorema de Mudança de Variáveis, uma vez que a k-forma já carrega consigo tal noção, através do produto tensorial. Com elas, podemos definir a integral utilizando a função "pullback", e assim, para calcularmos a integral sobre uma superfície, basta integrarmos sob a sua parametrização e corrigir as alterações de variável através de sua forma diferencial [7].

Unindo todas estas noções, o que o resultado do teorema de Gauss–Bonnet nos diz é que ao integrarmos a curvatura K de uma superfície compacta, obteremos a característica de Euler χ da mesma multiplicada por 2π , ou seja,

$$\int_S K dS = 2\pi\chi(S).$$

Esse belo resultado decorre de outro, nomônimo, a versão local do teorema de Gauss–Bonnet. A versão que foi descrita pelo próprio Gauss em seu livro *Disquisitiones generales circa superficies curva* [8] se trata apenas do caso em que o bordo do triângulo em questão é determinado por três geodésicas. Neste caso, Gauss enunciou

como segue: “A soma total da curvatura gaussiana de um triângulo é igual ao excesso sobre π da soma de seus ângulos” [1]. Atualmente, podemos reescrever esse teorema em sua versão local de maneira mais geral. Seja $\sigma : \Delta^2 \rightarrow S$ um simplexo não degenerado e ε_i , com $i = \{1, 2, 3\}$ seus ângulos externos, então:

$$\int_{\sigma(\Delta)} K + \int_{\partial\sigma(\Delta)} K + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i = 2\pi.$$

Um fator que chama a atenção e motiva a construção da demonstração de tal teorema se trata de sua interdisciplinaridade. Para chegarmos no resultado final, utilizaremos uma série de resultados e discussões, interligando álgebra linear, topologia, cálculo, álgebra e análise através da geometria diferencial. Desta forma, estaremos costurando grande parte dos temas vistos na graduação mas também acrescentando conceitos vistos fora dela, em materiais da pós-graduação. O intuito por trás da escolha deste formato de apresentação é trazer tal teorema utilizando a linguagem e as ferramentas da matemática moderna, de modo a mostrar um pouco do real trabalho de um geômetra atual. Além disso, o uso desta linguagem moderna é empregada de modo a permitir que o teorema de Gauss–Bonnet possa ser generalizado para dimensões maiores, utilizando o conceito de variedades, em trabalhos futuros.

Referências

- [1] MONTIEL, S.; ROS, A. **Curves and Surfaces**. v.1 e 2: SBM, 2004.
- [2] WEEKS, J. F. **The shape of space**. United States: Marcel Dekker, Inc, 2002.
- [3] CARMO, Manfredo P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies** Brasil, SBM, 2005.
- [4] UENO, K.; SHIGA, K.; SUNASA, T.; MORITA, S. **A Mathematical Gift, I: The interplay between topology, functions, geometry and Algebra** Americal Mathematical Soc., 2003.
- [5] HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge University Press, 2002.
- [6] LIMA, Elon L. **Curso de Análise vol. 2**. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [7] LEE, J.M. **Introduction to Smooth Manifolds**, Graduate Texts in Mathematics 218, Springer Science+Business Media New York, 2013
- [8] GAUSS, Carl Friedrich. **Disquisitiones generales circa superficies curvas**. v.1: Typis Dieterichianis, 1828.

Geometria Fractal: Uma abordagem computacional

Renan Rabelo Goulart^{*}

Bacharelado em Matemática - UFSC

renanrabelarti@gmail.com

Prof. Daniel Gonçalves (Orientador)

Departamento de Matemática - UFSC

daniel.goncalves@ufsc.br

Palavras-chave: fractais, topologia, computação gráfica

Resumo:

Fractais são formas geométricas que apresentam padrões infinitamente complicados. Em uma primeira análise notamos que os fractais que estamos habituados possuem a característica de serem auto-similares, ou seja, as partes são feitas de versões menores do todo. Visualmente é possível perceber este tipo de padrão, mas fazendo uso de conceitos da Topologia podemos formalizar a definição de um fractal.

Funções contração são transformações em um espaço métrico com a propriedade de aproximar seus pontos quando aplicadas. Tais funções são a base do Teorema do ponto fixo de Banach, que nos permite encontrar conjuntos auto-similares a partir de um sistema de funções iteradas (ou SFI). Para construir contrações com propriedades interessantes, iremos nos restringir à \mathbb{R}^2 e ao estudo das isometrias lineares devido seu forte significado geométrico no plano.

A junção dos resultados topológicos com a forma matricial das funções contração fundamentou a criação de um código de computador capaz de gerar fractais com resolução tão boa quanto for necessário, implementar restrições e configurar parâmetros para uma exibição mais agradável. O código foi escrito na linguagem de alto nível e alta performance "Julia".

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica CNPq

Abaixo dois exemplos de fractais gerado pelo código:

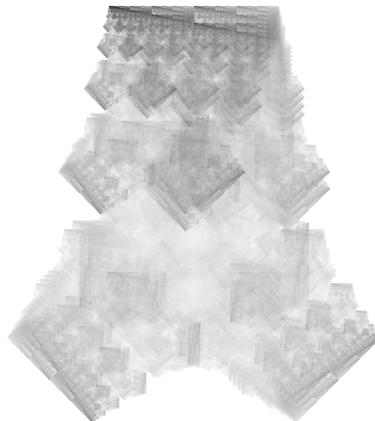


Figura 1: Fractal gerado por um SFI com 6 funções sem restrições

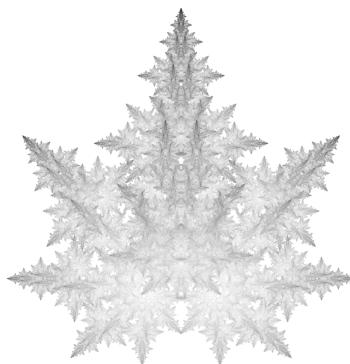


Figura 2: Fractal gerado por um SFI com 3 funções com restrições

Referências

- [1] KURKA, Petr. **Topological and Symbolic Dynamics**. Paris: Société Mathématique de France, 2003.
- [2] McCLURE, Mark. **Fractal geometry**. 2016.
- [3] GOODSON, Geoffrey. **LECTURE NOTES ON DYNAMICAL SYSTEMS, CHAOS AND FRACTAL GEOMETRY**. Towson University Mathematics Department, 2014.

Sombreamento em Espaços Shift

Sofia Meneghel Silva *

Bacharelado em Matemática - UFSC

sofia.meneghel@grad.ufsc.br

Prof. Dr. Daniel Gonçalves (Orientador)

Departamento de Matemática - UFSC

daniel.goncalves@ufsc.br

Palavras-chave: sombreamento, espaços shift, sistemas dinâmicos.

Resumo:

O estudo de Sistemas Dinâmicos e suas propriedades são de suma importância para diversas áreas da ciência. A partir da necessidade de discretizá-los para melhor compreendê-los, surge a área da Dinâmica Simbólica.

O objeto de estudo desta pesquisa foram os **espaços shift**. Podemos visualizá-los como conjuntos de sequências formadas por símbolos, com certas restrições. O conjunto de símbolos recebe o nome de **alfabeto**, e ao conjunto de restrições damos o nome de **blocos proibidos**.

Se \mathcal{A} é um alfabeto finito e \mathcal{F} é um conjunto de blocos com símbolos de \mathcal{A} , definimos $X_{\mathcal{F}}$ como sendo o conjunto das sequências formadas com símbolos de \mathcal{A} que não contém os blocos de \mathcal{F} . Um conjunto \mathcal{X} de sequências com os símbolos de \mathcal{A} que pode ser escrito como $\mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$ para algum conjunto \mathcal{F} de blocos é um espaço shift. Se \mathcal{F} for finito, dizemos que \mathcal{X} é um **espaço shift de tipo finito**.

Em um sistema dinâmico, trabalhamos com um conjunto e uma função. Ao aplicarmos a função iterativamente em um ponto do conjunto, criamos uma sequência, conhecida como a órbita desse ponto. Pensando em como podemos aproximar uma sequência de pontos por meio de órbitas, surge a noção de **sombreamento**.

Dizemos que um sistema dinâmico (X, F) , onde X é um espaço métrico com métrica d e F é uma aplicação contínua, tem a **propriedade do sombreamento** (representada na Figura 1) quando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0, x_1, \dots \forall i, d(F(x_i), x_{i+1}) < \delta \implies \exists x, \forall i, d(F^i(x), x_i) < \varepsilon.$$

*Bolsista de Iniciação Científica CAPES/CNPq

Fonte: Petr Kurka, 2003

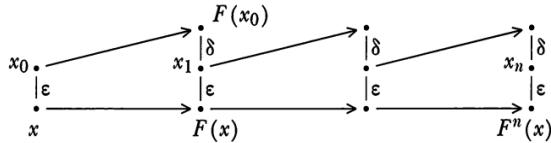


Figura 1: Representação da propriedade de sombreamento

Neste trabalho, demonstramos o seguinte teorema, que relaciona espaços shift de tipo finito com a propriedade do sombreamento, de autoria de Peter Walters em 1978:

Um espaço shift é de tipo finito se, e somente se, possui a propriedade do sombreamento.

Este teorema é notável, dado que associa um conceito discreto a uma propriedade contínua.

Dizemos que um sistema dinâmico (X, F) , onde X é um espaço métrico com métrica d e F é uma aplicação contínua, tem a **propriedade do sombreamento de Lipschitz** quando

$$\exists \delta_0, \delta_1 > 0, \forall x_0, x_1, \dots \forall i, d(F(x_i), x_{i+1}) < \delta \leq \delta_0 \implies \exists x, \forall i, d(x_i, F^i(x)) \leq \delta_1 \cdot \delta.$$

Neste estudo, demonstramos que a propriedade do sombreamento de Lipschitz é equivalente a propriedade do sombreamento em espaços shift de tipo finito. Este resultado é relevante visto que em algumas situações é mais simples provar que a propriedade do sombreamento de Lipschitz ocorre do que a propriedade do sombreamento.

Referências

- [1] LIND, D.; BRIAN, M. **An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [2] KURKA, Petr. **Topological and Symbolic Dynamics**. Paris: Société Mathématique de France, 2003.
- [3] PILYUGIN, S.; SAKAI, K.. **Shadowing and Hyperbolicity**. Cham: Springer, 2010.

Otimização

Banca Avaliadora:

Professores:

Prof. Ademir Alves Ribeiro
Profa. Lucelina Batista dos Santos
Profa. Mael Sachine

Estudantes da pós graduação:

Heber Cristina Teixeira
Pedro Henrique Antunes de Oliveira

Aprendizagem por Reforço com Q-Learning

Dennis Gonçalves Lemes*

Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR

dennis.lemes@gmail.com

Prof. Lucas Garcia Pedroso (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

lucaspedroso@ufpr.br

Palavras-chave: Aprendizado de máquina, Aprendizado de Reforço, Q-Learning, .

Resumo:

Aprendizagem por Reforço (ou Reinforcement Learning) é uma área de Aprendizagem de Máquinas que se baseia em um ambiente onde agentes tomam ações em estados específicos, o que resulta em recompensas (tanto positivas como negativas), com o agente aprendendo a maximizar a recompensa recebida escolhendo as melhores ações possíveis.

Com isso, Q-Learning, ou Quality Learning é um algoritmo de Aprendizagem por Reforço livre de modelos, ou seja, se baseia estritamente em experiências passadas para criar sua política de escolhas. Q-learning faz o uso da definida “Q-Function”, que representa a recompensa acumulativa descontada de uma ação específica em um estado específico (que não é conhecida no início do treinamento) para descobrir qual é a melhor ação para ser tomada no momento, com a própria função sendo estimada durante todo o processo usando aprendizado de diferenças temporais. Usando a definida “Q-Table”, as estimativas dos Q-valores de cada ação em cada estado de um ambiente são salvas para futura comparação e atualização de quantias, com múltiplas revisões de valores. Eventualmente a nossa tabela pode representar a verdadeira função Q com confiança, o que representa o nosso agente obtendo um bom conhecimento do ambiente.

Referências

- [1] HABIB, N. **Hands-On Q-Learning with Python:** Practical Q-learning with OpenAI Gym, Keras, and TensorFlow. Birmingham: Packt Publishing, 2019.
- [2] Géron, A. **Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow:** Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems. Sebastopol: O'Reilly Media, 2019.

*Aluno Pesquisador do grupo CiDAMO..

Um estudo sobre métodos de máxima descida e acelerações

Gearlisson dos Santos Mendonça
Bacharelado em Matemática - UFSC
gearlissonmendonca@gmail.com

Prof. Dr. Douglas Soares Gonçalves (Orientador)
Departamento de Matemática - UFSC
douglas.goncalves@ufsc.br

Palavras-chave: Máxima Descida, Aceleração de Nesterov, Gradiente Espectral.

Resumo:

Os **métodos de direções de descida** são métodos iterativos para resolução de problemas de otimização irrestrita:

$$\begin{aligned} \min & \quad f(x) \\ \text{sujeito a } & \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável e com gradiente Lipschitz. Tais métodos, a partir de um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dado, geram uma sequência $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ dada por:

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k, \tag{1}$$

em que $d_k \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\nabla f(x_k)^T d_k < 0$ e $t_k > 0$ é o tamanho de passo, em geral escolhido de modo a garantir $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. A direção d_k e o tamanho passo t_k são obtidos mediante determinadas regras que variam conforme cada método.

Neste trabalho discutimos sobre métodos nos quais a direção d_k é um múltiplo de $-\nabla f(x_k)$ e damos ênfase ao método de Cauchy [4], e variações recentes, como o método de Nesterov [3] e o método do gradiente espectral [1]. Para estes métodos estudamos tanto a complexidade de pior caso quanto o desempenho prático.

No **método de Cauchy**, também conhecido como método de máxima descida, em (1) temos $d_k = -\nabla f(x_k)$ e o tamanho de passo $t_k > 0$ pode ser calculado de diferentes maneiras. Se a constante de Lipschitz $L > 0$ para $\nabla f(x)$ é conhecida, podemos usar $t_k = 1/L$. Outra escolha possível é dada pela **busca linear exata**:

$$t_k = \arg \min_{t \geq 0} f(x_k - t \nabla f(x_k)).$$

Para este método, é possível mostrar (veja [4, Teorema 5.2]) que quando f é também convexa, com minimizador global $x^* \in \mathbb{R}^n$, vale

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{L \|x_0 - x^*\|^2}{2k}. \tag{2}$$

Assim, dizemos que este método tem taxa de convergência $\mathcal{O}(1/k)$.

O **método de Nesterov** (ou gradiente acelerado de Nesterov), descrito a seguir, é um método que garante a taxa de convergência ótima $\mathcal{O}(1/k^2)$ para métodos de primeira ordem [3].

Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\theta_0 = 1$, $v_0 = x_0$, o processo iterativo é definido por:

$$\begin{cases} \text{Se } k \geq 1 : \text{ escolha } \theta_k \in (0, 1) \text{ tal que } \frac{(1 - \theta_k) t_k}{\theta_k^2} \leq \frac{t_k - 1}{\theta_{k-1}^2} \\ y = (1 - \theta_k) x_k + \theta_k v_k \\ x_{k+1} = y - t_k \nabla f(y) \\ v_{k+1} = x_k + \frac{1}{\theta_k} (x_{k+1} - x_k) \end{cases} \quad (3)$$

Neste método, ao invés de x_k , o gradiente é avaliado em um ponto y que é definido como uma extrapolação de x_{k-1} ao longo da direção $x_k - x_{k-1}$.

Além das escolhas de tamanho de passo já discutidas para o método de Cauchy, para este método podemos considerar também $t_k > 0$ tal que

$$f(x_{k+1}) \leq f(y) - \frac{t_k}{2} \|\nabla f(x_k)\|^2.$$

A esta escolha de tamanho de passo, que pode ser determinando com um procedimento de *backtracking*, damos o nome de busca linear inexata.

Em comparação com (2), para f convexa e com gradiente Lipschitz, o método de Nesterov (3) com tamanho de passo constante $t_k = t \in (0, 1/L]$ e com $\theta_k = 2/(k+2)$ satisfaz (veja [3, Teorema 5.1]):

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{2}{(k+1)^2 t} \|x_0 - x^*\|^2. \quad (4)$$

Outro método de primeira ordem, bastante conhecido na literatura de otimização contínua é o **método do gradiente espectral**. Introduzido em [1], este método usa a direção de busca $d_k = \lambda_k^{-1} \nabla f(x_k)$, em que o escalar

$$\lambda_k = \max \left\{ \delta_{\min}, \min \left\{ \delta_{\max}, \frac{(x_k - x_{k-1})^T (\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}))}{(x_k - x_{k-1})^T (x_k - x_{k-1})} \right\} \right\}$$

é conhecido como parâmetro espectral e $0 < \delta_{\min} < \delta_{\max} < \infty$ são salva-guardas para evitar que este fique muito grande ou muito próximo de zero.

Neste método, o tamanho de passo t_k foi determinado usando busca linear não-monótona: dados $\gamma \in (0, 1)$, $0 < \delta_{\min} < \delta_{\max}$, $M \in \mathbb{Z}_+^*$, escolha $t_k > 0$ que satisfaça a condição:

$$f(x_k + t_k d_k) < \max_{0 \leq j \leq m_k} f(x_{k-j}) + t_k \gamma \nabla f(x_k)^T d_k$$

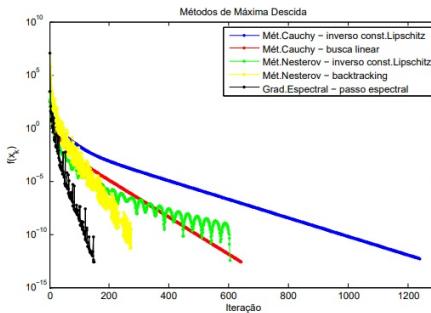
em que m_k é uma sequência de inteiros não-decrescente e limitada por um inteiro conhecido M , $m_0 = 0$ e para $k > 0$, $0 \leq m_k \leq \min\{m_{k-1} + 1, M\}$.

Para este método é possível provar que para $\epsilon \in (0, 1]$, se f convexa e com gradiente Lipschitz, temos que $f(x_k) - f(x^*) \leq \epsilon$, em no máximo $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon})$ iterações. Para maiores detalhes, consulte [2].

Para avaliar o desempenho prático dos métodos, estes foram implementados em Matlab e consideramos experimentos numéricos envolvendo funções quadráticas com

Hessiana simétrica definida positiva com dimensão variando de 2 a 5000, em que $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax$. Na implementação utilizamos como critério de parada $\|\nabla f(x_k)\| < 10^{-6}$ ou um número máximo de iterações $k = 2000$. No gradiente espectral usamos os parâmetros $\delta_{min} = 10^{-6}$, $\delta_{max} = 10^6$, $M = 5$ e no método de Cauchy consideramos busca linear exata.

Os resultados numéricos indicam que o método de gradiente espectral, em média, alcança o primeiro critério de parada em menos iterações que os demais, como ilustra o gráfico abaixo para uma quadrática de dimensão $n = 100$.



Neste gráfico observamos também que todos os métodos foram capazes de reduzir o valor funcional até próximo do valor ótimo $f(x^*) = 0$. Ainda, observa-se que os métodos de Cauchy garantem um decrescimento monótono da função, em oposição aos métodos de Nesterov e gradiente espectral. É curioso notar que, apesar de possuir taxa de convergência óptima $\mathcal{O}(1/k^2)$, o método de Nesterov foi superado pelo gradiente espectral nos testes que realizamos.

Em trabalhos futuros, faremos testes computacionais com a “pior função do mundo” [3, Página 2.1.6] a fim de evidenciar a performance de pior caso dos métodos estudados.

Referências

- [1] BARZILAI, J.; BORWEIN, J.M. Two-point step size gradient methods. **IMA Journal of Numerical Analysis**, Oxford University Press, 8(1), 141–148, 1988.
- [2] GRAPIGLIA, G.N.; SACHS, E.W. On the worst-case evalution complexity of non-monotone line search algorithms. **Computacional Optimization and Applications**, 68(3), 555–577, 2017.
- [3] NESTEROV, Y. **Introductory lectures on convex optimization: A basic course.** [S.I.]: Springer Science & Business Media, 2003. v. 87.
- [4] RIBEIRO, A.; KARAS, E.W. **Otimização Contínua:** aspectos teóricos e computacionais. [S.I.]: Cengage Learning Editora, 2014.

Precificação de Imóveis com Aprendizagem de Máquina e Engenharia de Atributos com Dados do Censo

Gustavo Rodrigues da Silva *

Bacharelado em Matemática - UFPR

gustavor10silva@gmail.com

Prof. Lucas Garcia Pedroso (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

lucaspedroso@ufpr.br

Palavras-chave: Precificação de Imóveis, Aprendizagem de Máquina, Engenharia de Atributos, Dados do Censo.

Resumo:

Este trabalho aborda a precificação de imóveis com o uso de modelos de Aprendizagem de Máquina. Para tal, foram usadas bases de dados com características dos imóveis e bases do Censo de 2010 que, por meio de diferentes técnicas de geolocalização, fornecem informações sobre a região dos imóveis.

Precificar um imóvel é um desafio enfrentado por muitas empresas e isso é usado para diversas finalidades. As imobiliárias necessitam disso, pois são focadas na compra e venda de imóveis. Os bancos, que retomam os imóveis de financiadores inadimplentes ou que precisam precificar o imóvel de garantia do cliente para gerar um score de crédito e, até mesmo, as empresas focadas exclusivamente nessa precificação.

A precificação de um imóvel depende de diversos fatores, como metragem quadrada, preço do metro quadrado na região, número de quartos, banheiros, vagas de garagem, geolocalização, características internas e externas do imóvel etc.

Com base em tantos fatores, é um desafio para as empresas fazer uma precificação assertiva. E o erro na estimativa de preço de um imóvel é um problema por vários motivos. Por exemplo, para quem está vendendo, sobreestimar o preço pode causar uma demora demasiada na venda do imóvel, ao passo que subestimá-lo causará a venda abaixo do preço ideal, gerando uma diminuição da receita.

O projeto é composto por 4 etapas principais:

*Pesquisador de Iniciação Científica no CIDAMO e Integrante do PICME

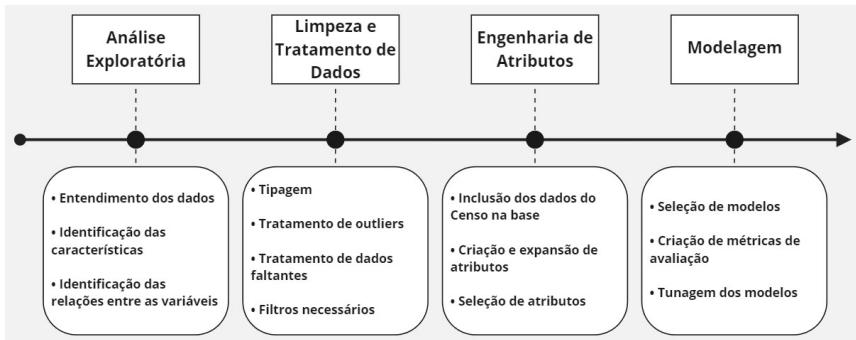


Figura 1: Etapas do projeto.

Todas as etapas contribuíram para o bom desempenho do modelo final, mas vale um destaque para engenharia de atributos. Depois da inclusão dos dados do Censo, da criação e da expansão de atributos, o percentual de acerto da precificação aumentou significativamente.

Durante a etapa de modelagem, foram testados, essencialmente, três modelos:

- **Regressão Linear:** método de regressão baseado na minimização da soma dos quadrados dos erros ao aproximar um conjunto de pontos usando uma reta;
- **Random Forest (Floresta Aleatória):** um *ensemble* de Árvores de Decisão (agrupamento de diferentes Árvores de Decisão). Uma Árvore de Decisão é um algoritmo de Aprendizagem de Máquina baseado em probabilidade condicional;
- **XG Boost (Extreme Gradient Boosting):** é um algoritmo de aprendizado de máquina baseado em Árvores de Decisão e que utiliza uma estrutura de *Gradient boosting*. Esse tipo de estrutura utiliza o gradiente descendente como técnica para minimizar o erro em um ensemble de modelos sequenciais.

O tipo de avaliação dos modelos depende do contexto da precificação. Então, supondo que estamos do lado dos vendedores de imóveis, é menos prejudicial sobreestimar o preço pois, tendo esse tipo de erro, basta implementar um desconto no preço do imóvel a cada período de tempo ou a cada número de tentativas frustradas de venda. Portanto, para avaliar os modelos, foi criada seguinte métrica de avaliação:

Cenário	Acerto
$y_{pred} < y_{true}$	$ y_{pred} - y_{true} \leq 0.05 \cdot y_{true}$
$y_{pred} \geq y_{true}$	$ y_{pred} - y_{true} \leq 0.15 \cdot y_{true}$

Com isso, os modelos tiveram uma tolerância maior ao erro de sobreestimar o preço (15%) do que ao erro de subestimar (5%). Os resultados obtidos foram os seguintes:

Descrição	Valor m2 * Área Imóvel	Régressão Linear	Random Forest	XG Boost
Caract. Imob.	17%	12%	36%	23%
Caract. Imob. + Censo	17%	13%	34%	21%
Caract. Imob. + Var. Externas	17%	17%	38%	26%
Caract. Imob. + Censo + Var. Externas	17%	15%	39%	28%
Caract. Imob. + Censo + Var. Externas + Tunagem	17%	15%	56%	46%

Figura 2: Percentuais de acerto dos modelos.

No gráfico abaixo, ficam evidentes os incrementos no percentual de acerto à medida que a base de dados foi enriquecida e os modelos foram tunados:

Acerto por etapa da modelagem

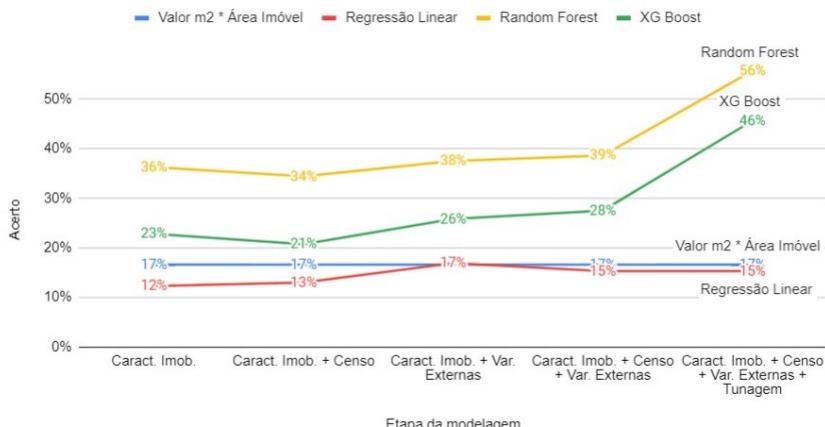


Figura 3: Acerto por etapa da modelagem.

Por fim, o melhor resultado obtido foi 56% de acerto, com um modelo de Random Forest.

Referências

- [1] HARRISON, Matt. **Machine Learning**: Guia de Referência Rápida. São Paulo - SP, Brasil: novatec, 2020.
- [2] Izbicki, R. e Santos, T. M. dos. **Aprendizado de máquina**: uma abordagem estatística. 1 edição. 2020. 272 páginas. ISBN: 978-65-00-02410-4.

Grupo CiDAMO - Ciéncia de Dados, Aprendizagem de Máquinas e Otimizaçáo

João Victor da Silva* e Talia Correia Schulz*

Bacharelado em Matemática - UFPR

josilva602@gmail.com e taliacschulz@gmail.com

Prof. Lucas Pedroso† e Prof. Roberto Ribeiro† (Orientadores)

Departamento de Matemática - UFPR

lucaspedroso@ufpr.br e robertoribeiro@ufpr.br

Palavras-chave: Aprendizagem de Máquina, Otimização, Extensão Universitária.

Resumo:

Não há dúvidas de que a Aprendizagem de Máquina vem ganhando cada vez mais espaço em nossas vidas. Muitas vezes longe das expectativas de ficção científica, a área proporciona uma gama de ferramentas sem as quais muitas das facilidades e recursos cotidianos não seriam possíveis. Em uma outra face desse complexo polítopo que é o conhecimento humano, encontra-se a Otimização, segmento da Matemática Aplicada bastante em voga que fornece elementos para a resolução tanto de problemas práticos e imediatos como de oriundos de outras áreas, por exemplo, a própria Aprendizagem de Máquina. Tendo em vista saberes de tamanha importância, cabe à Universidade formar seus discentes para que estejam preparados para atuar nesses setores, seja em carreiras acadêmicas ou no setor privado. Nesse contexto, surgiu em 2019 na UFPR o grupo CiDAMO (Ciéncia de Dados, Aprendizagem de Máquina e Otimizaçáo), que congrega alunos de diversos cursos, em especial Matemática e Matemática Industrial, em um ambiente colaborativo de estudo, pesquisa, desenvolvimento de habilidades interpessoais e divulgaçáo de conhecimento. Nesta apresentação, abordaremos o funcionamento do grupo, as responsabilidades dos integrantes, os métodos de ingresso e os benefícios de fazer parte de uma equipe que tem enriquecido os currículos, as carreiras e as vidas de seus participantes.

*Aluno pesquisador e aluna pesquisadora do Grupo CiDAMO.

†Coordenadores do Grupo CiDAMO.

Estratégias baseadas em Gradient Boosting para problemas de Regressão

João Victor da Silva * e Talia Correia Schulz †

Bacharelado em Matemática Industrial e Matemática - UFPR

josilva602@gmail.com e taliacschulz@gmail.com

Prof. Dr. Lucas Garcia Pedroso (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

lucaspedroso@ufpr.br

Palavras-chave: *gradient boosting, aceleração de Nesterov, Momentum.*

Resumo:

Neste trabalho abordamos o *Gradient Boosting* e algumas modificações. Este método consiste em uma técnica de aprendizagem de máquinas supervisionado para problemas tanto de classificação como de regressão que produz um modelo de previsão na forma de um *ensemble* de modelos de previsão fracos, geralmente árvores de decisão. Ele constrói o modelo em etapas, como outros métodos de *boosting*, e os generaliza. Tal estratégia utiliza ideias provenientes do método do gradiente descendente com o intuito de minimizar uma função de perda associada ao problema.

Tendo em vista a possível lentidão na convergência do método do gradiente descendente, estudamos artigos que propõem modificações do gradient boosting baseadas em dois algoritmos conhecidos da área de Otimização: o Momentum e o método de aceleração de Nesterov. O intuito de tais modificações é tentar acelerar a convergência, ou seja, utilizar menos árvores, porém mantendo o bom desempenho do *gradient boosting* e sem aumentar a variância.

Uma implementação computacional dessas propostas foi feita e os resultados obtidos serão apresentados.

Referências

- [1] FENG, Z.; XU, C.; TAO, D. **Historical Gradient Boosting Machine.** EPiC Series Incomputing. 2018. p(68-80).
- [2] FRIEDMAN, J.; HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R. **The Elements of Statistical Learning:** Data Mining, Inference, and Prediction. 2. ed. New York: Springer, 2009.

*Aluno Pesquisador do grupo CiDAMO.

†Aluna Pesquisadora do grupo CiDAMO.

[3] JAMES, G.; WITTEN, D.; HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R. **An Introduction to Statistical Learning**: With Application in R. 1. ed. New York: Springer, 2013.

Planejamento da Operação a Curtíssimo Prazo para Duas Usinas em Cascata

João Victor da Silva e Talia Correia Schulz *

josilva602@gmail.com e taliacschulz@gmail.com

Dra. Ana Paula Oening e Dra. Débora Cintia Marcilio †

ana.oening@lactec.org.br e debora@lactec.org.br

Prof. Dr. Lucas Garcia Pedroso e Prof. Dr. Luiz Carlos Matioli ‡

lucaspedroso@ufpr.br e lcmatioli@gmail.com

Palavras-chave: Unit Commitment. Otimização. Programação não linear inteira mista.

Resumo

Nesta apresentação será evidenciada uma formulação para resolver o problema da alocação de unidades hidrelétricas, comumente chamado de *Unit Commitment* (UC).

Este problema consiste de minimizar a quantidade de água utilizada para atender as restrições do sistema, sendo aqui aplicadas para um horizonte diário com discretização horária. A modelagem deste problema é baseada em uma pesquisa que determina o status (ligado/desligado) e o nível de geração de cada unidade geradora (UG) para atender às restrições da usina e UGs, expandindo sua formulação para uma cascata.

O modelo proposto foi implementado em Julia, sendo executados os experimentos numéricos com dados de operações de duas usinas e comparados com a operação real. O modelo se comportou adequadamente para aquilo que se propôs a fazer, sendo que os resultados se mostraram promissores com relação à economia da água nos reservatórios.

Uma implementação computacional dessas propostas foi feita e os resultados obtidos serão apresentados.

*Alunos Pesquisadores do grupo CiDAMO - Bacharelado em Matemática Industrial e Matemática - UFPR

†Pesquisadoras no Instituto LACTEC

‡Orientador e Coorientador - Departamento de Matemática - UFPR

Referências

- [1] A. Encina, S. S. Filho, M. A. Cicogna e T. Ohishi, "Unit Commitment of Hydro Dominated Systems," International Journal of Emerging, vol. 9, nº 4, pp. 20, 2008.
- [2] B. H. Brito, E. C. Finardi e F. Y. K. Takigawa, "Mixed-integer nonseparable piecewise linear models for the hydropower production function in the Unit Commitment problem," Electric Power Systems Research, pp. 13, 2020.
- [3] A. Encina, Despacho Ótimo de Unidades Geradoras em Sistemas Hidrelétricos Vía Heurística Baseada em Relaxação Lagrangeana e Programação Dinâmica, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2006, pp. 184.
- [4] L. A. Nacif, Modelagem Econômica Para a Tomada de Decisões na Programação Diária da Operação de Usinas Hidrelétricas, Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Paraná (UFPR), 2013, pp. 157.
- [5] B. H. Brito, H. G. Souza, J. C. Silva e V. A. Faria, "Despacho Ótimo Das Unidades Geradoras Da Usina Hidrelétrica Luis Eduardo Magalhães," I Simpósio de Estudos em Engenharia Elétrica do Tocantins, pp. 34 - 41, 2017.
- [6] B. Colonetti e E. C. Finardi, "Combining Lagrangian Relaxation, Benders Decomposition, and the Level Bundle Method in the Stochastic Hydrothermal Unit-Commitment Problem," International Transactions on Electrical Energy Systems, vol. 30, nº 9, pp. 22, 2020.
- [7] F. Y. K. Takigawa, E. L. Silva, E. C. Finardi e R. N. Rodrigues, "Solving The Hydrothermal Scheduling Problem Considering Network Constraints," Electric Power Systems Research, vol. 88, pp. 89-97, 2012.
- [8] T. D. Santo e A. S. Costa, "Hydroelectric Unit Commitment For Power Plants Composed Of Distinct Groups Of Generating Units," Electric Power Systems Research, vol. 137, pp. 16-25, 2016.
- [9] E. C. Finardi, F. Y. K. Takigawa e B. H. Brito, "Assessing Solution Quality And Computational Performance In The Hydro Unit Commitment Problem Considering Different Mathematical Programming Approaches," Electric Power Systems Research, vol. 136, pp. 212-222, 2016.
- [10] E. C. Finardi, E. L. Silva e C. SAGASTIZABAL, "Solving the unit commitment problem of hydropower plants via Lagrangian Relaxation and Sequential Quadratic Programming," Comput. Appl. Math., vol. 24, nº 3, pp. 317-342, 2005.
- [11] C. Unsihuay-Vila, T. Luz e E. C. Finardi, "Day-Ahead Optimal Operation Planning Of Wind And Hydrothermal Generation With Optimal Spinning Reserve Allocation," International Journal of Power and Energy Systems, vol. 35, nº 1, pp. 8, 2015.
- [12] E. L. Silva, E. C. Finardi e R. N. Rodrigues, "Alocação de unidades hidrelétricas no

problema da programação da operação energética utilizando relaxação lagrangeana e lagrangeano aumentado," Revista Controle & Automação, vol. 17, nº 2, pp. 155-166, 2006.

[13] W. Ackooij, E. C. Finardi e G. M. Ramalho, "An Exact Solution Method For The Hydrothermal Unit Commitment Under Wind Power Uncertainty With Joint Probability Constraints," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 33, nº 6, pp. 6487-6500, 2018.

[14] OPERADOR NACIONAL DO SISTEMA ELÉTRICO, "Histórico da Operação," 2020. [Online]. Available: <http://www.ons.org.br/paginas/resultados-da-operacao/historico-da-operacao>. [Acesso em 01/11/2018].

[15] Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), "CEDOC - Centro de Documentação," [Online]. Available: <http://biblioteca.aneel.gov.br/index.html>. [Acesso em 31/10/2018].

Introdução ao Aprendizado por Reforço

Mateus Balotin *

Bacharelado em Matemática - UFPR

mateusbalotin1@gmail.com

Prof. Lucas Garcia Pedroso (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

lucaspedroso@ufpr.br

Palavras-chave: Aprendizado por Reforço, Machine Learning, Otimização.

Resumo:

O Aprendizado por Reforço é uma área de Machine Learning que estuda como um agente consegue maximizar uma recompensa em um ambiente para que consiga tomar as melhores ações em cada situação.

O processo de decisão de Markov, MDP, é uma parte essencial do Aprendizado por Reforço. Ele é definido por uma tupla $= (s_0, t, A, S, R)$. O agente inicia em um estado s_0 do ambiente, onde os estados possíveis são $S = (s_0, s_1, \dots, s_n)$, em um tempo $t = 0, 1, \dots, n$, toma uma ação $A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ disponível no estado atual, recebe uma recompensa $R : S \rightarrow \mathbb{R}$ e de forma iterativa vai para um estado novo s' até o episódio terminar.

Com a MDP queremos achar uma política $\pi : S \rightarrow A$ que define a forma que o agente se comporta, ou seja, tem como objetivo maximizar as recompensas descontadas para cada par estado-ação (s, a) .

A qualidade da política é definida pela função valor, V_π , que indica a recompensa esperada descontada de começar no estado s_0 e seguir a política π nos próximos estados.

Em uma MDP a função valor é denotada como

$$V_\pi = E_\pi \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} | S_t = s \right).$$

Note que foi adicionado uma constante γ na recompensa esperada, $\gamma \in (0, 1]$, para limitar as recompensas infinitas. A mesma também define a importância das recompensas futuras.

Como queremos maximizar as recompensas esperadas descontadas, podemos achar a função valor ótima, V_* , iterativamente atualizando a equação ótima de Bellman, denotada por

*Aluno Pesquisador do grupo Cidamo

$$Q_*(s) = E \left[R_{t+1} + \gamma \max_{a'} V_*(s', a') \right] \forall s \in S.$$

Essa função retorna os valores ótimos para os estados e permite, em particular, avaliar quão bom é a política. Porém, não nos retorna uma política ótima para o agente.

Para isso introduzimos uma nova função, $Q_*(s, a)$, que estima os valores ótimos dos pares de estados-ação (s,a), denotados como Q-Valores. Essa função é tal que

$$Q_*(s, a) = E \left[R_{t+1} + \gamma \max_{a'} Q_*(s', a') \right] \forall s \in S, \forall a \in A,$$

qual mostra que se o agente estiver em um estado s , tomar uma ação a , e seguir a política ótima π , o resultado será a média da recompensa ao tomar a ação a no estado s mais o retorno esperado descontado de todos os possíveis pares de estado-ação (s', a') seguindo a política ótima.

Com os Q-Valores ótimos definir a política ótima, $\pi_*(s)$, é trivial. Para cada estado s basta o agente escolher a ação que retorna o maior Q-Valor, ou seja,

$$\pi_*(s) = \operatorname{argmax}_{a'} Q_*(s, a).$$

Com a política ótima, sabemos quais são as melhores ações para cada estado no nosso ambiente e assim podemos escolher o caminho que maximiza a recompensa esperada descontada.

<<https://deeplizard.com/course/rlcpailzrd>>

Referências

- [1] **Reinforcement Learning - Developing Intelligent Agents.** <https://deeplizard.com/>. Disponível em: <deeplizard.com/course/rlcpailzrd>. Acesso em: 30 agosto 2022.
- [2] GÉRON, A. **Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow:** Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems. Canada: O'Reilly, 2019.

Máquinas de Vetores Suporte no contexto de aprendizagem semi-supervisionada

Maxim Dmitri Lobkov

Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR

maximodmitri@gmail.com maxim.lobkov@ufpr.br

Prof. Lucas Garcia Pedroso (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

lucaspedroso@ufpr.br

Palavras-chave: Máquinas de Vetores Suporte, SVM Transdutivo, Aprendizagem semi-supervisionada, Aprendizagem de Máquina.

Resumo:

Em Aprendizagem de Máquina, existem diversos métodos para modelar um problema de classificação. Em particular, neste trabalho estudamos as Máquinas de Vetores Suporte (SVM do inglês), que utilizam uma base de dados supervisionados, isto é, para cada dado x conhecemos o respectivo rótulo y . As ideias deste modelo podem ser estendidas para um novo tipo de problema de classificação chamado de SVM Transdutivo que, diferentemente do anterior, não conta com a rotulação de todos os seus dados, tratando-se então de um problema semi-supervisionado.

Com respeito ao SVM clássico, a proposta inicial para se obter um classificador linear que separa um conjunto de dados foi feita por Vapnik e Lerner [7] em 1963. A ideia proposta pelos autores foi usar um classificador linear para separar os dados em duas classes, tentando maximizar a distância entre os dados e o classificador. Este problema foi denominado *Support Vector Machine* (SVM - Máquina de Vetor Suporte) e pode ser formulado da seguinte forma: considere $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ um vetor em \mathbb{R}^n e $y_i \in \{-1, 1\}$ para $i = 1, \dots, m$, o classificador linear $w^T x + b = 0$ é obtido a partir da resolução do problema de otimização,

$$\begin{aligned} & \underset{w,b}{\text{minimizar}} \quad \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ & \text{sujeito a} \quad y_i (w^T x^{(i)} + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{1}$$

em que $w \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$. A obtenção do modelo acima pode ser encontrada em [1] (pp. 19-20). Observe que, conhecido o hiperplano separador $w^T x + b = 0$ e introduzindo uma nova amostra \bar{x} , é possível usar o classificador para rotular este dado como pertencendo à classe positiva se $w^T \bar{x} + b > 0$ ou negativa se $w^T \bar{x} + b < 0$. Na Figura 1 temos um exemplo de um hiperplano ótimo para uma base de dados genérica, sendo que os quadrados representam os dados pertencentes à classe positiva e os losangos à classe negativa:

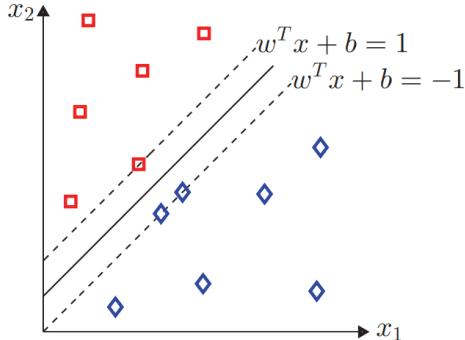


Figura 1: Hiperplano Separador que melhor separa o conjunto de dados. Fonte: [1].

Note que, por se tratar de um classificador linear, o problema (1) é usado apenas para o caso onde os dados estão distribuídos da forma linearmente separável.

No intuito de generalizar as ideias de SVM para o contexto de aprendizagem semi-supervisionada, foi proposto em [6] o Modelo *Transductive SVM* (TSVM), de expressão

$$\begin{aligned}
 & \underset{w, b, y^*, \xi, \xi^*}{\text{minimizar}} \quad \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i + C^* \sum_{j=1}^k \xi_j^* \\
 & \text{sujeito a} \quad y_i(w^T x^{(i)} + b) \geq 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, n \\
 & \quad y_j^*(w^T x^{(i)} + b) \geq 1 - \xi_j^*, \quad j = 1, \dots, k \\
 & \quad \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \\
 & \quad \xi_j^* \geq 0, \quad j = 1, \dots, k,
 \end{aligned}$$

com $w \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}, y^* \in \{-1, 1\}, \xi \in \mathbb{R}^n, \xi^* \in \mathbb{R}^k$. O modelo realizará a classificação levando em conta tanto os dados rotulados, quanto os não rotulados, sendo que estes serão estimados pelo próprio modelo. O problema acima não é convexo, logo difícil de resolver, por isso estudamos dois métodos para abordá-lo: *Concave-Convex Procedure* [3] e *SVM^{light}* [6].

Realizamos a implementação desses algoritmos usando o software *Octave* junto à biblioteca *LIBSVM* [2, 5] para a base de dados de dígitos manuscritos MNIST [4], frequentemente usada em aprendizagem de máquina. Estes dados foram modificados para obtermos um problema semi-supervisionado, e por fim compararmos o desempenho entre os métodos.

Referências

- [1] BENATTI, N. M. **Métodos de Busca Direta para Seleção de Parâmetros em Máquinas de Vetores Suporte**. Curitiba, UFPR: Dissertação, 2017.
- [2] CHANG, C. e LIN, C. **LIBSVM: a library for support vector machines**. ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology, 2011. <https://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm/>.
- [3] COLLOBERT, R. , SINZ, F. , WESTON, J. e BOTTOU, L. **Large Scale Transductive SVMs**. Journal of Machine Learning Research 7, 2006. pp. 1687-1712.
- [4] GÉRON, A. **Hands-on Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems**. O'Reilly, 2^a Edição, 2019.
- [5] HSU, C. , CHANG, C. e LIN, C. **A Practical Guide to Support Vector Classification**. Universidade Nacional de Taiwan, 2016.
- [6] JOACHIMS, T. **Transductive Inference for Text Classification using Support Vector Machines** . International Conference on Machine Learning, ICML, 1999.
- [7] VAPNIK, V. N. e LERNER, A.Y. **Recognition of Patterns with help of Generalized Portraits**. Avtomat. i Telemekh. V 24, Issue 6, 1963. pp. 774–780.