Funções geradoras como ferramenta de contagem de estruturas combinatórias

Jedian Marcos Brambilla *
Bacharelado em Ciência da Computação - UFPR
jedian.gba@gmail.com

Prof. Renato Carmo (Orientador)
Departamento de Informática - UFPR
renato.carmo.rc@gmail.com

Palavras-chave: Combinatória, funções geradoras, contagem

Resumo:

Neste trabalho vamos apresentar a resolução de alguns problemas clássicos de contagem utilizando funções geradoras e classes combinatórias.

Uma função geradora é uma série de potências da forma $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, onde $a_n \in \mathbb{C}\colon n \geq 0$. As operações de soma e produto de funções geradoras são definidas como usualmente e é fácil verificar que o conjunto $\mathcal{C}[[z]]$ das séries formais em z forma um anel onde alguns elementos tem inverso multiplicativo (neste contexto a questão da convergência da série não é relevante).

Uma *classe combinatória* é um conjunto $\mathcal{A}$ munido de uma uma função $|\cdot|\colon \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ que associa a cada elemento de $a \in \mathcal{A}$ um *tamanho* $|a|$. Por exemplo o conjunto das sequências finitas de 0s e 1s onde o tamanho $|s|$ de uma sequência s é dado pelo número de seus elementos (isto é, $|(0,1,1)| = 3$) é uma classe combinatória.

A função geradora $A(z)$ *conta* a classe combinatória $\mathcal{A}$ se o coeficiente de z^n em $A(z)$ é exatamente o número de elementos de $\mathcal{A}$ de tamanho n, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por exemplo, a função geradora $A(z) = \sum_{n\geq 0} 2^n z^n$ conta a classe combinatória das sequências finitas de 0s e 1s mencionada acima.

Um exemplo de problema clássico de contagem que pode ser resolvido com esta técnica é descobrir quantas árvores distintas com n vértices existem.

Referências:

FLAJOLET, P.; SEDGEWICK, R. Analytic Combinatorics. Cambridge University Press, 2009.

*Voluntário do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME)