

# Estudo de Problemas de Otimização Linear

Gustavo Henrique Kayser Vargas  
Bacharelado em Engenharia Civil – UTFPR  
*gustavo.2014@alunos.utfpr.edu.br*

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Diane Rizzotto Rossetto  
Departamento de Matemática – UTFPR  
*dianerossetto@utfpr.edu.br*

**Palavras-chave:** otimização, simplex, programação linear.

## Resumo:

Problemas de Programação Linear (PPL) consistem em encontrar um valor máximo ou mínimo de uma função linear sujeita a um conjunto de restrições descritas por equações ou inequações lineares. Neste trabalho expressaremos um PPL usando a forma canônica abaixo:

$$\begin{aligned} \text{Min (ou max)} \quad & f(x) = \langle c, x \rangle \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

no qual,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , posto  $(A) = m$  e o conjunto viável é representado por  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ .

Para a resolução dos Problemas de Programação Linear usamos o algoritmo Simplex que foi implementado no MatLab. Para isso, foram estudados certos conceitos essenciais ao entendimento e à implementação do método. Em Queiroz (2008)<sup>1</sup> foi provado que se o PPL tem solução ela ocorre em um vértice do poliedro  $P$  e que ser vértice é equivalente a ser uma solução básica viável. Através desses conceitos foi criada uma rotina que identificasse se um ponto é vértice ou não.

Sabendo que um ponto é realmente vértice do poliedro  $P$  é preciso descobrir se ele é uma solução ótima, para isso estudamos os conceitos de direção básica e custo reduzido. Assim, foi possível criar uma rotina que identifica se o vértice é ótimo ou não e trouxe a possibilidade de criar uma rotina que é capaz de obter um novo vértice a partir de outro anterior.

A partir das rotinas criada anteriormente é possível estabelecer o método Simplex. Ele inicia com um vértice conhecido. Em seguida, o método verifica se esse vértice é ótimo. Se sim, o método termina, caso contrário, o método procura outro vértice até terminar com um vértice ótimo ou porque encontrou uma direção de ilimitação.

Como pode-se notar, o método Simplex nada mais é do que a junção em uma única Rotina para identificar se o vértice é ótimo com a Rotina para encontrar um novo vértice a partir de um anterior, ou seja, as rotinas estudadas anteriormente. Abaixo encontra-se a rotina implementada do Simplex:

- Entrada:  $(A, b, c)$
- Chamar Rotina para identificar se o vértice é ótimo
- Enquanto não encontrar vértice ótimo ou direção de ilimitação
  - Chamar Rotina para obter novo vértice
  - Se encontrar direção de ilimitação
    - Finaliza
  - Senão
    - Chamar Rotina para identificar se o vértice é ótimo
- Fim da Rotina

No estudo realizado até a implementação o Simplex foi levado em conta que teríamos a disposição um vértice inicial dado do PPL, mas em um caso real dificilmente teremos um. Por isso, foi necessário criar uma rotina que encontrasse um vértice inicial que se baseia na permutação de índices e constantes testes para identificar se é vértice ou não o ponto resultante da permutação.

Outros problemas abordados são a degenerescência e a ciclagem que estão diretamente relacionados. Podemos dizer que uma solução básica  $x$  é degenerada se  $x$  possui mais de  $n - m$  componentes nulas. Quando isso acontece pode haver uma repetição de bases diferentes associadas a um mesmo vértice impedindo o algoritmo de ser finalizado. Esse comportamento é chamado de Ciclagem. Ela também pode ocorrer quando há empates na escolha da variável que sai da base. Para evitar esses transtornos foi usada a Regra de Bland.

Como aplicação prática do estudo realizado foi utilizado um problema prescrito em Munemori J. et al. (2003)<sup>3</sup>, na página 203. O problema pedia para otimizar o lucro com construções de edificações padrões de área 80 m<sup>2</sup>, 100 m<sup>2</sup> e 120 m<sup>2</sup> no mesmo loteamento. Cada uma dessas edificações possuía um lucro fixo e uma quantidade

fixas de homens-hora como mão-de-obra. No problema também era especificado que havia uma quantidade limitada de homens-hora disponíveis para a obra que já haviam sido vendidos 15 unidades de 80 m<sup>2</sup> de um total de 120 lotes. Modelamos o problema como um PPL e usamos o Simplex implementado para encontrar o lucro ótimo e qual a melhor escolha para a construção das edificações.

Como parte final do estudo foram questionadas as incertezas que podem estar presentes em um PPL. Até então foram levados em conta apenas as condições ideais que não afetassem os dados envolvidos na modelagem do problema. Por exemplo, em uma situação de obra real condições climáticas e humanas podem interferir no preço e no tempo de execução. Desta forma estudamos e testamos uma modelagem que englobasse as incertezas.

### **Referências:**

- 1 QUEIROZ, Marcelo. **Notas de aula: MAC 315 - Programação Linear**. São Paulo, 2008.
- 2 GOLDBARG, Marcos Cesar; LUNA, Henrique Pacca L. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. 2ª Edição. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.
- 3 MUNEMORI J.; Miguel et al. **Aplicação da Programação Linear na Engenharia de Sistemas de Construção Civil**. In: Encontro Tecnológico da Engenharia Civil e Arquitetura, IV, 2003. P 198-204.
- 4 BORTOLOSSI, Humberto José; PAGNONCELLI, Bernardo Kulnig. **Uma Introdução à Otimização sob Incerteza**. In: Bienal da Sociedade Brasileira, III, Universidade Federal de Goiás, 2006.