Introdução ao Paradoxo de Banach-Tarski

Emanuela Pinheiro Quirrenbach[1]
Bacharelado em Engenharia Mecânica – UTFPR
emanuelaquirrenbach@alunos.utfpr.edu.br

Prof. Sani de Carvalho Rutz da Silva
Departamento de Matemática – UTFPR
sani@utfpr.edu.br

Ednei Felix Reis
Departamento de Matemática – UTFPR
edneif@utfpr.edu.br

Palavras-chave: rotações, conjuntos não-mensuráveis, axioma da escolha, partições.

Resumo:
O trabalho publicado por Banach e Tarski em 1924 sobre decomposição de conjuntos de pontos **[1]** apresentou resultado tão contra intuitivo e estranho que ganhou alcunha de paradoxo. O paradoxo de Banach-Tarski, como ficou conhecido, pode ser enunciado da seguinte maneira: É possível separar uma esfera maciça em um número finito de subconjuntos disjuntos, e então, utilizando apenas movimentos rígidos, rearranjar esses subconjuntos em duas esferas idênticas à inicial. Pode-se também utilizar o seguinte enunciado, mais rebuscado e mais abrangente: É possível cortar uma ervilha em uma quantidade finita de pedaços que podem ser rearranjados para formar uma bola do tamanho do sol! [2] Na verdade, o teorema de Banach-Tarski é ainda mais abrangente, e trata da equivalência de qualquer figura rígida em espaços euclidianos com $n \geq 3$.
Apesar da abrangência e estranheza do teorema, não é muito difícil entendê-lo. Em 1979, Stromberg publicou um passo a passo de como duplicar uma esfera, dividindo-a em 40 subconjuntos[3] **[3]**. Nesse artigo, várias ferramentas engenhosas são aplicadas para provar o teorema, e é interessante discutir algumas delas.

- As rotações utilizadas e as palavras:

Os movimentos rígidos utilizados tratam-se de duas rotações, ϕ e ψ, que possuem as seguintes características:

$$\psi^3 = \phi^2 = \iota, \text{ sendo } \iota = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As palavras são sequências dessas rotações, como instruções que levam um conjunto de pontos a outro.

---

[1] Bolsista de Iniciação Científica do PICME.
[2] *"It is possible to cut up a pea into finitely many pieces that can be rearranged to form a ball the size of the sun!"* **[2]**
[3] Embora Stromberg tenha escolhido dividir a esfera em 40 partes, este número não é o menor possível e foi escolhido por motivos didáticos. Em 1947 **[4]** foi provado que o menor número de subconjuntos disjuntos necessário para duplicar uma esfera unitária são cinco.

É provado então que com estas palavras, é possível mapear toda a superfície da esfera, partindo do conjunto P de pontos de partida, que é enumerável.

- Dividindo a Esfera com o Axioma da Escolha

O Axioma da escolha é um importante princípio da Teoria de Conjuntos, e pode ser enunciado da seguinte forma:
"O produto cartesiano de uma família não-vazia de conjuntos não-vazios é não-vazio. "**[5]**
Uma consequência desse axioma é a possibilidade de "escolher" um elemento de cada conjunto não-vazio de uma família de conjuntos infinitos. Esse ato de escolher elementos infinitas vezes é o que torna possível a prova estudada, e também a deixa distante de ser fisicamente observada. Em uma etapa da prova, é preciso separar a esfera em quatro subconjuntos, e para construir esses subconjuntos, é necessário definir um conjunto C, que pode apenas ser formado por causa do axioma da escolha.

- Representação Visual do Paradoxo

Embora seja impossível representar todo o processo da decomposição da esfera de maneira visual, algumas etapas podem ser reproduzidas (ver **[6]**), devido à sua natureza geométrica.

Referências:

[1] BANACH, STEFAN; TARSKI, ALFRED. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. **Fundamenta Mathematicae** Vol. 6, (1924): 244–277. URL: https://www.impan.pl/en/publishing-house/journals-and-series/fundamenta-Mathematicae/all/6
[2] WAGON, STAN. **The Banach-Tarski Paradox.** Cambridge University Press, 1993. URL: https://books.google.com.br/books/about/The_Banach_Tarski_Paradox.html?id=_HveugDvaQMC&redir_esc=y (Acesso em 10/10/2017).
[3] STROMBERG, KARL. The Banach-Tarski Paradox. **The American Mathematical Monthly**, Vol. 86, No. 3 (Mar., 1979): 151-161. URL: http://www.jstor.org/stable/2321514
[4] ROBINSON, RAPHAEL M. On the decomposition of spheres. **Fundamenta Mathematicae** Vol. 34, Issue 1 (1947): 246-260. URL: http://eudml.org/doc/213130
[5] HALMOS, PAUL R. **Naive Set Theory**. Nova Iorque: Springer, 1974.
[6] VSAUCE, The Banach-Tarski Paradox. URL: https://youtu.be/s86-Z-CbaHA (Acesso em 10/10/2017).