Uma relação entre sistema de raízes e álgebra cluster

Yasmim Adara Amorim
Licenciatura e Bacharelado em Matemática - UFPR
yasmim.amorim@ufpr.br

Profa. Dra. Heily Wagner (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
heilywagner@ufpr.br

Palavras-chave: cluster, raízes, mutação.

Resumo:

As álgebras cluster foram introduzidas por Fomin e Zelevinsky no ano de 2002 como uma $\mathbb{Z}$-subálgebra do corpo $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. A partir do conjunto inicial de variáveis $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ construímos novas variáveis, chamadas *variáveis cluster*, utilizando uma regra que é chamada de *mutação* de variáveis. Para defini-la, utilizamos um quiver (grafo orientado) com n vértices, sem 2-ciclo e sem laço e um algoritmo chamado de mutação de quiver. Por exemplo, se o quiver for $1 \leftarrow 2$ e $X = \{x_1, x_2\}$, então todas as variáveis cluster obtidas serão

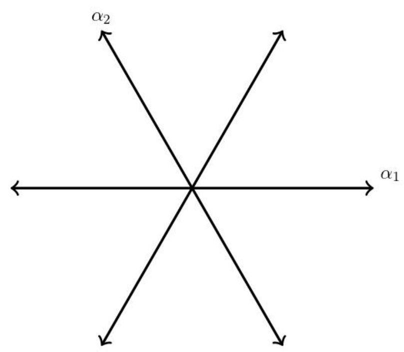
$$\left\{x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right\}$$

E esse conjunto de variáveis gera a álgebra cluster.

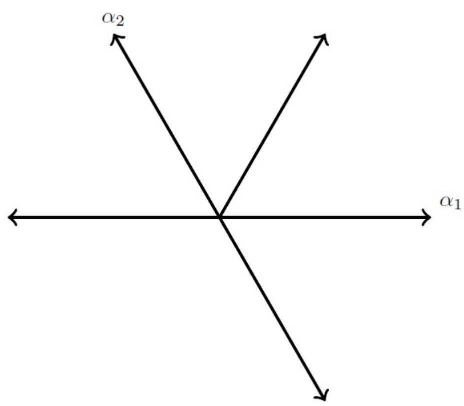
No caso desse quiver ser Dynkin tal processo de mutação é finito e, nessa situação, essa teoria se relaciona com sistema de raízes.

Um sistema de raízes é um subconjunto finito gerador de um espaço euclidiano (espaço vetorial com produto interno real usual) que satisfaz as seguintes propriedades: se α é raiz, o único múltiplo de α no sistema de raízes é $-\alpha$ e a reflexão sobre α deixa tal subconjunto invariante.

Ainda em relação ao exemplo acima dado, as variáveis cluster do exemplo acima estão relacionadas com o seguinte sistema de raízes A_2



O objetivo deste trabalho é mostrar uma relação entre as variáveis cluster e as raízes do sistema de raízes: os denominadores das variáveis cluster correspondem às raízes simples do sistema de raízes. E podemos dispor as variáveis cluster relacionadas às raízes na seguinte figura



Referências

[1] CARTER, R. Cluster Algebras, **Textos de Matemática**, Portugal, 2006.

[2] FOMIN, S., ZELEVINSKY, A. Cluster algebras I: Foundations, **J. Amer. Math. Soc.**, v.15, p 497-529, 2002.

[3] HUMPHREYS, James. **Introduction to Lie Algebras and Representation Theory**. 3^a impressão, 1980.

[4] KELLER, B. Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories. arXiv:0807.1960v11 [math.RT], 19 Mar 2010.

[5] NGUEFACK, B. Introduction aux algèbres amassés: définitions et exemples. Université de Sherbrooke, Canadá, 2006. Notas de seminário.

[6] ZELEVINSKY, A. What is a cluster algebra?, **Notices of the AMS**, v.54, n.11, p.1494-1495, 2007.