# Brincando de Matemático Júnior

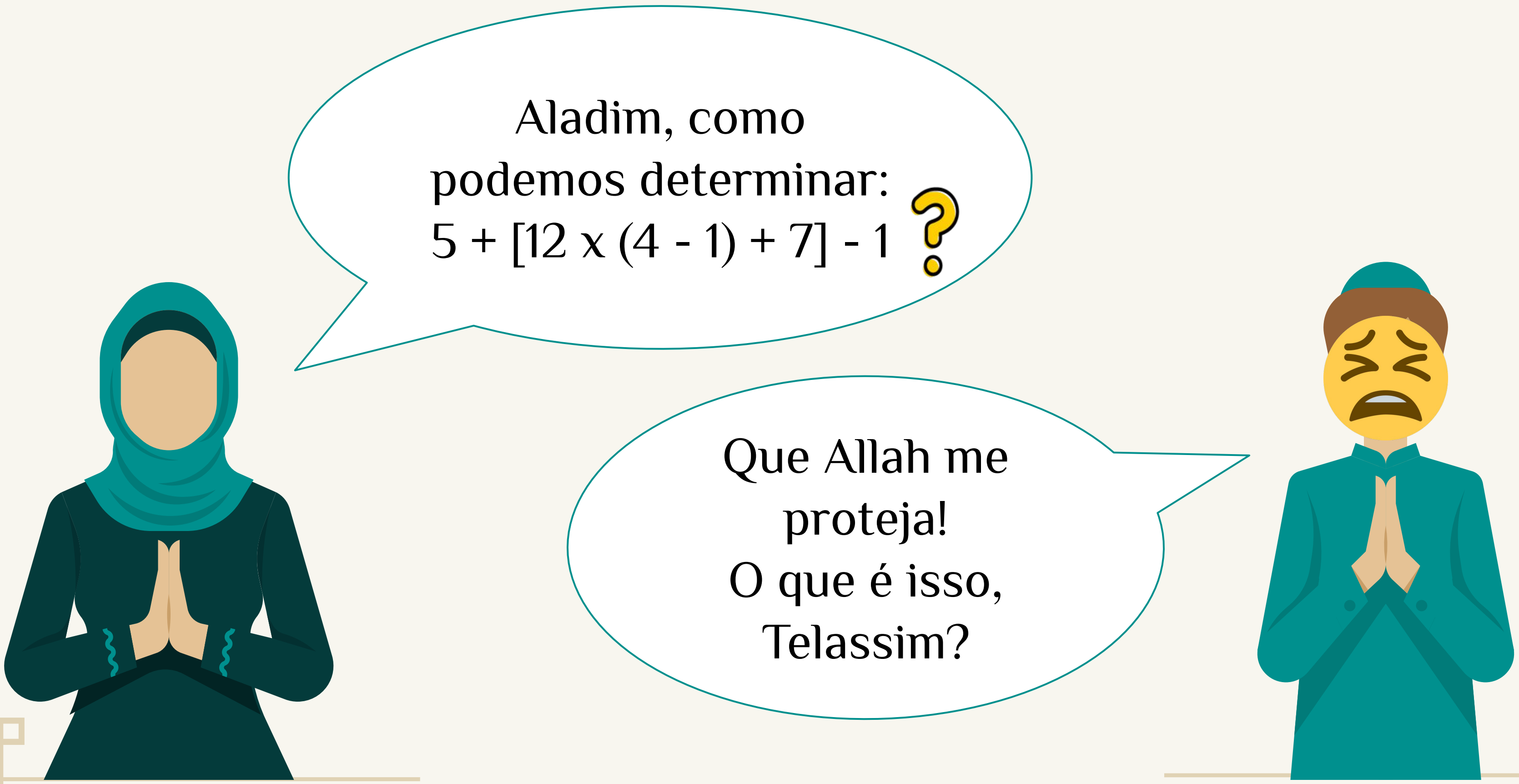
Explorando o primeiro andar do Museu

Dia 1

AVISO!!

É necessária uma super revisão antes de se visitar esta atração!

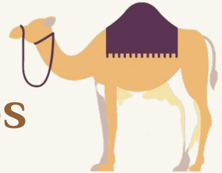
# Expressões Numéricas


Aladim, como podemos determinar:
5 + [12 x (4 - 1) + 7] - 1 ?
Que Allah me proteja!
O que é isso, Telassim?


Não se desespere!
Trata-se de uma
expressão
numérica!
Vamos aprender!

Expressões numéricas são conjuntos de números que estão sujeitos à operações matemáticas em uma determinada ordem!

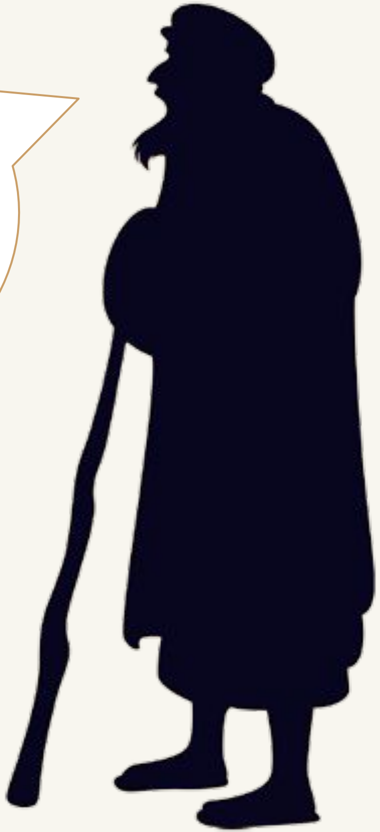
# Expressões Numéricas

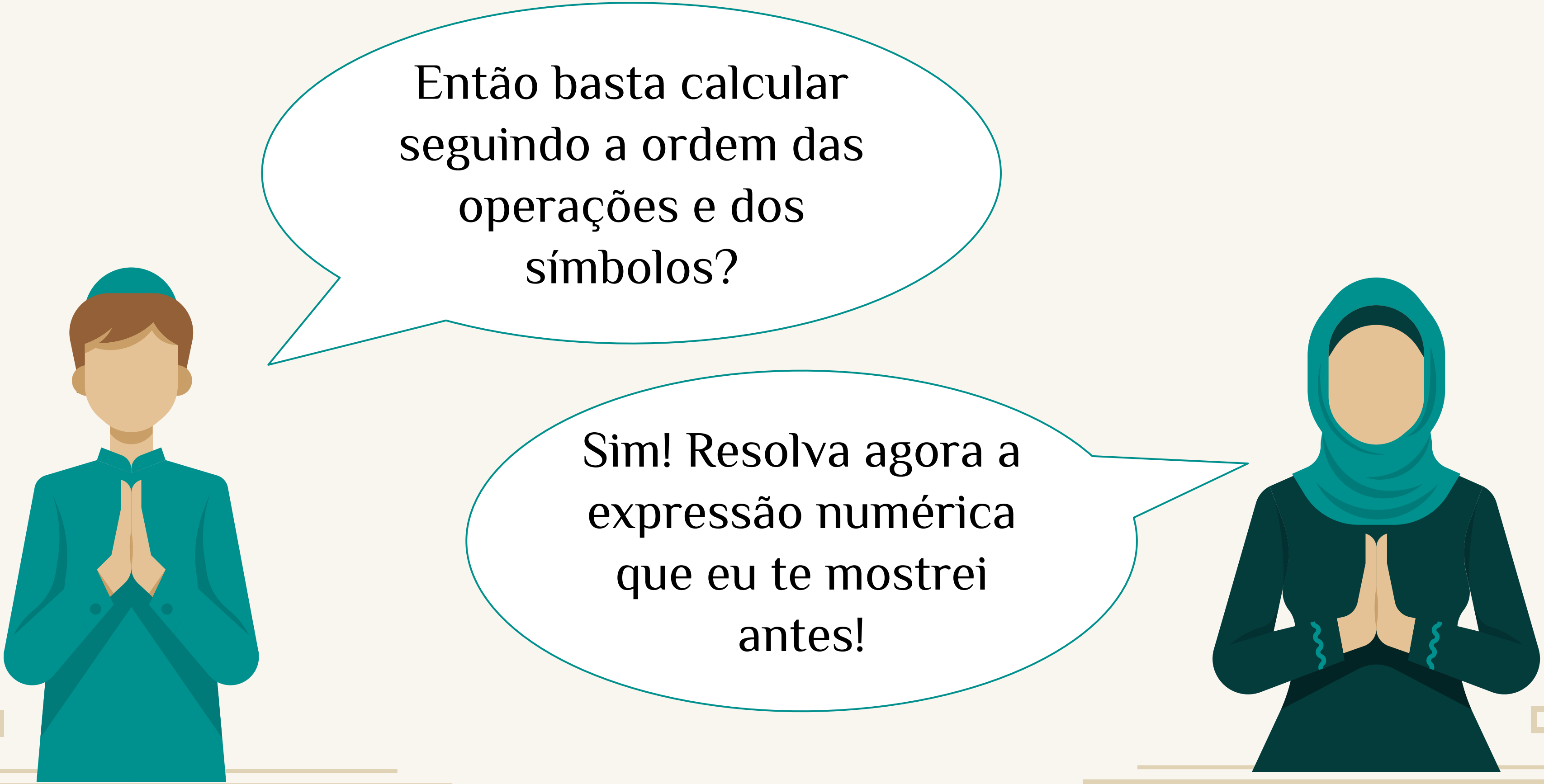


| Ordem dos Símbolos | Ordem das Operações |
|---|---|
| Parênteses ( ) | Potenciação e Radiciação |
| Colchetes [ ] | Multiplicação e Divisão |
| Chaves { } | Adição e Subtração |

**IMPORTANTE!**

Se as duas operações do mesmo grau de prioridade estiverem juntas, fazemos a resolução na ordem em que elas aparecem!




Então basta calcular seguindo a ordem das operações e dos símbolos?
Sim! Resolva agora a expressão numérica que eu te mostrei antes!

Passo 1:

5 + [12 x (4 - 1) + 7] - 1

5 + [12 x 3 + 7] - 1

Passo 2:

5 + [12 x 3 + 7] - 1

5 + [36 + 7] - 1

Passo 3:

5 + [36 + 7] - 1

5 + 43 - 1

Passo 4:

5 + 43 - 1

48 - 1

A resposta é 47


Muito bem!
Agora você está pronto
para a próxima etapa
da nossa aventura!

# Dúvidas?

Expressões Numéricas

# Potenciação

$$10 \times 10 = 10^2$$

Mas é só uma multiplicação? Pra que existe potenciação então?

$$10 \times 10 = 10^2$$

$10 \times 10 = 100$, logo $10^2 = 100$.

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^{10}$$

Fazendo a multiplicação, obtemos que $10^{10} = 10000000000$.

Sejam **a** e **b** números quaisquer, definimos a operação potenciação como:

$$\mathbf{a}^{\mathbf{b}} = \underbrace{\mathbf{a} \times \mathbf{a} \times \mathbf{a} \times \ldots \times \mathbf{a}.}_{\mathbf{b}\text{ vezes.}}$$

Hmm, certo, então se eu quisesse calcular $2^5$, por exemplo...

Bastaria fazer a multiplicação $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$. Acho que nossos visitantes conseguem nos ajudar com isso!

Expoente

Potência

$$a^b = c$$

Base

# Propriedades da potenciação

Sejam a e b números maiores que 0:

$$a^1 = a$$

Exemplo: $5^1 = 5$

$$a^0 = 1$$

Exemplo: $90^0 = 1$

$$(-a)^{2b} = a^{2b}$$

Exemplo: $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = -(-9) = 9 = 3^2$

$$(-a)^{2b+1} = -(a^{2b+1}$$
$$)$$

Exemplo: $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -(-16) \times (-4) = 16 \times (-4) = -64 = -(4^3)$

# Propriedade

Quando temos um número negativo elevado a um expoente **par** (2b), o resultado será **positivo**.

**Exemplo:** $(-5)^4 = -(-25) \times -(-25) = 25 \times 25 =$ **625**.

# Propriedade

Quando temos um número negativo elevado a um expoente **ímpar** (2b + 1), o resultado será **negativo**.

**Exemplo:** $(-5)^5 = -(-25) \times -(-25) \times (-5) = 25 \times 25 \times (-5) = 625 \times (-5) =$ **-3125**.

Vamos fazer um teste rápido para ver se você entendeu as propriedades!! Calcule $30^0$ e $200^1$.

Eita... Preciso de ajuda. Será que alguém sabe a resposta...?

# Mais propriedades

Sendo a, b, c, m e n números maiores que 0:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Exemplo:
$2^1 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8 = 2^3 = 2^{1+2}$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Exemplo:
$(5^2)^2 = (25)^2 = 625 = 5^4 = 5^{2\times 2}$

$$a^n \div b^n = (a \div b)^n$$

Exemplo:
$6^2 \div 2^2 = 36 \div 4 = 9 = 32 = (6 \div 2)^2$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

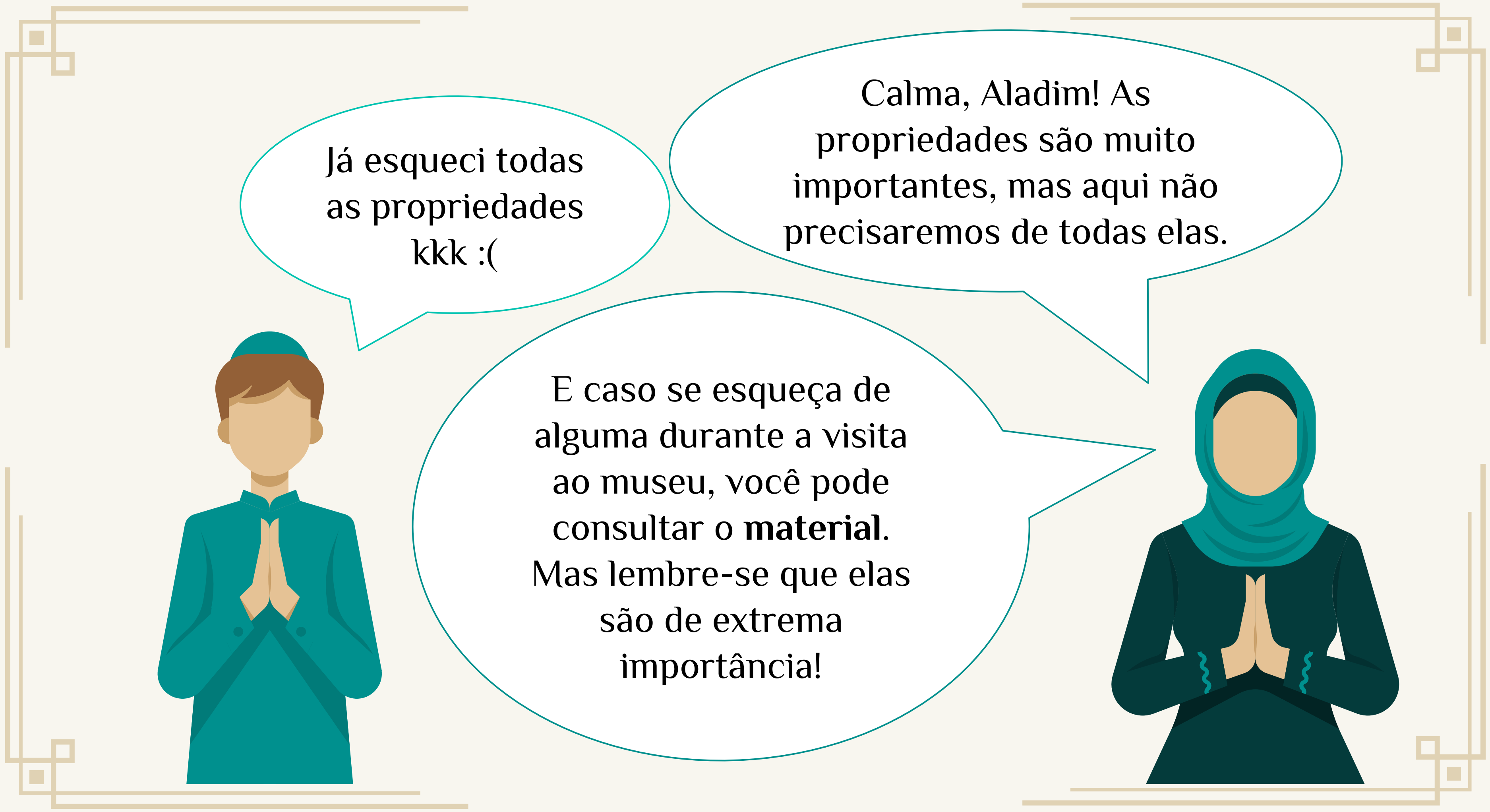
Exemplo:
$10^5 \div 10^3 = 100000 \div 1000 = 100 = 10^2 = 10^{5-3}$

$$a^n \times b^n \times c^n = (a \times b \times c)^n$$

Exemplo:
$2^2 \times 5^2 \times 10^2 = 4 \times 25 \times 100 = 10000 = (100)^2 = (2 \times 5 \times 10)^2$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

Exemplo:
$3^{-1} = \frac{1}{3}$


Já esqueci todas as propriedades kkk :(
Calma, Aladim! As propriedades são muito importantes, mas aqui não precisaremos de todas elas.
E caso se esqueça de alguma durante a visita ao museu, você pode consultar o **material**. Mas lembre-se que elas são de extrema importância!

# Dúvidas?

Potenciação

# Radiciação

# Operações Inversas

- **Soma - Subtração.**

$10 + 2 = 12 \Rightarrow 12 - 2 = \mathbf{10}.$

- **Multiplicação - Divisão.**

$10 \times 2 = 20 \Rightarrow 20 / 2 = \mathbf{10}.$

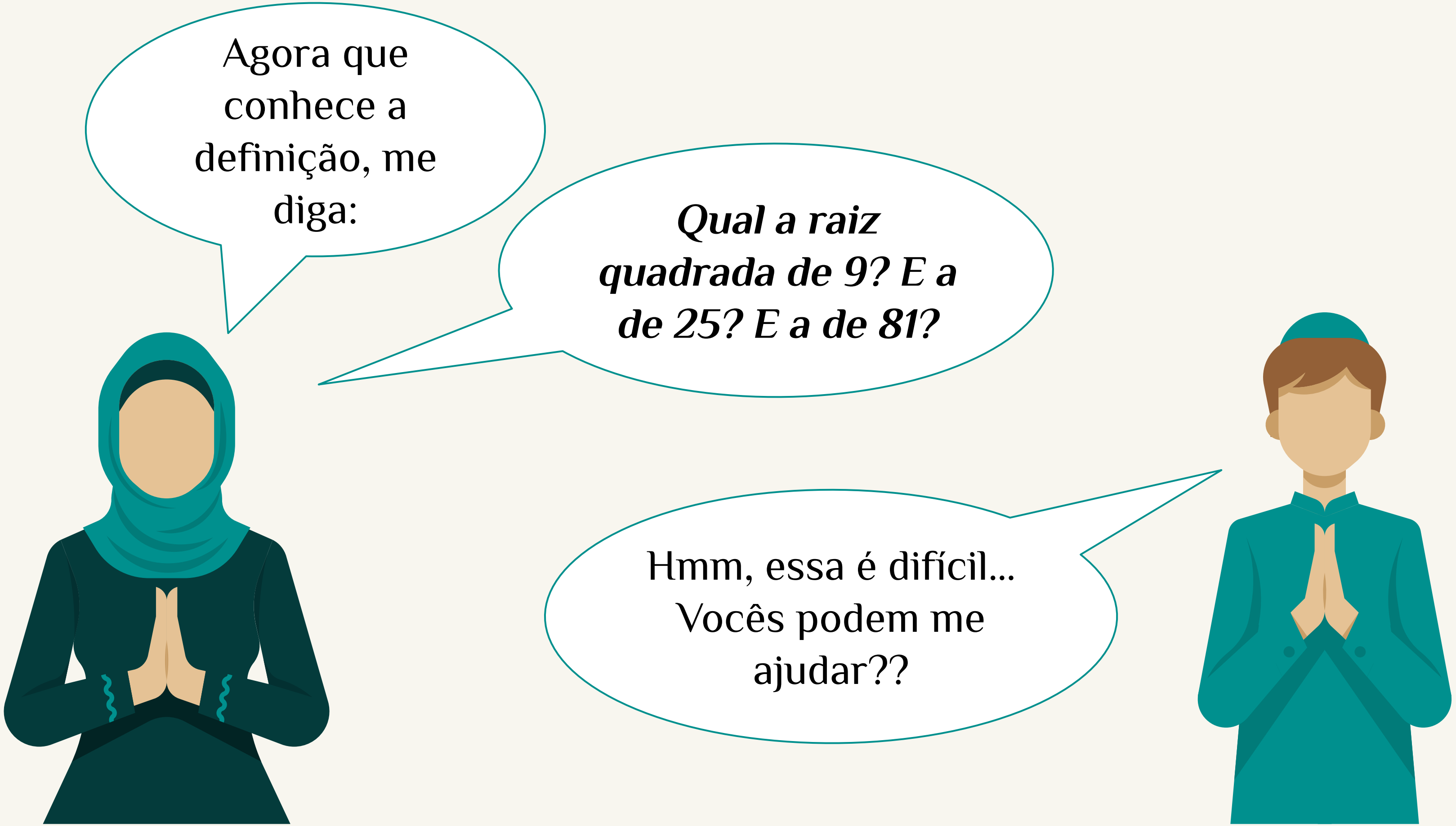
- **Potenciação - Radiciação.**

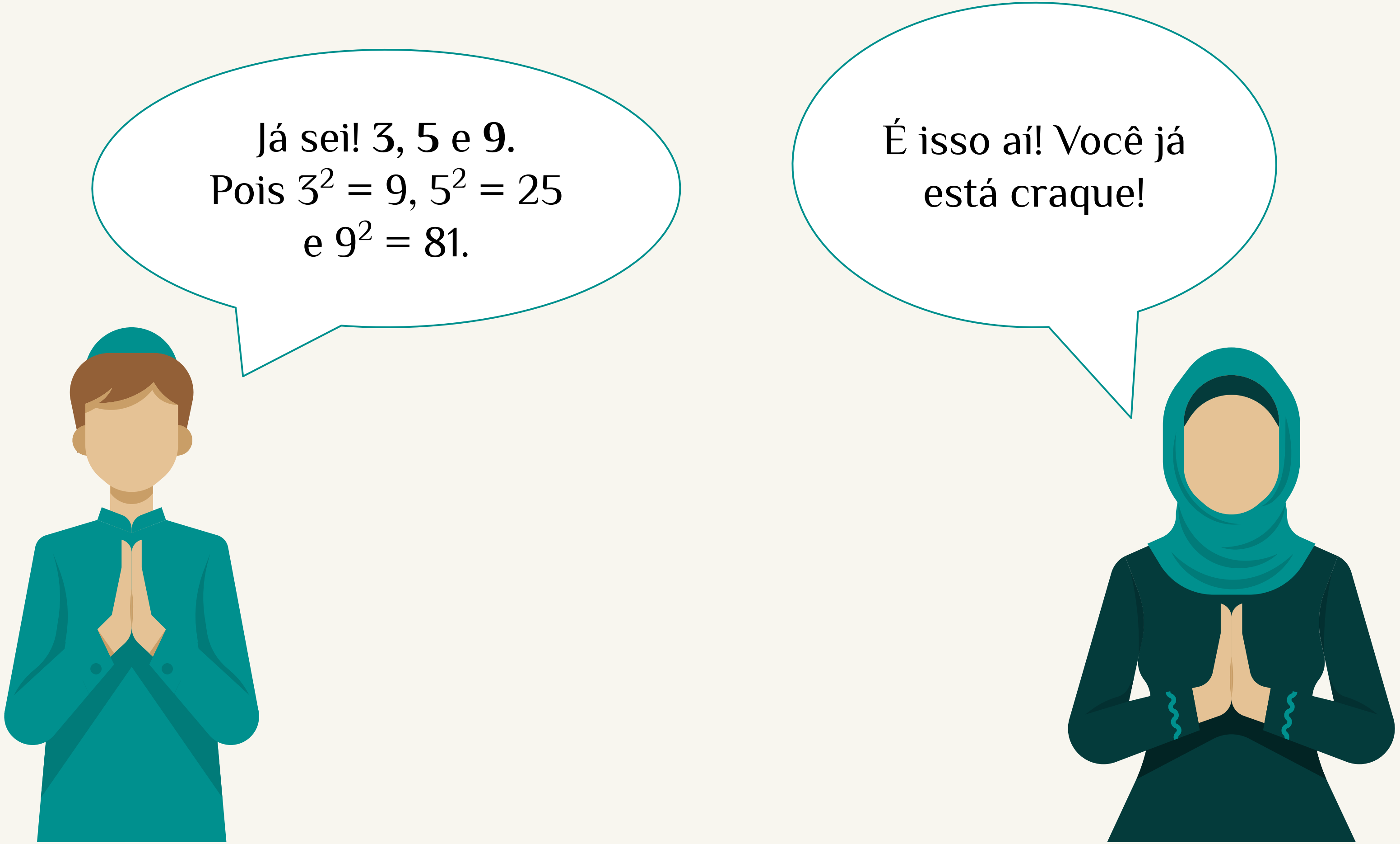
$10^2 = 100 \Rightarrow \sqrt{100} = \mathbf{10}.$

Sejam **a** e **b** números quaisquer, definimos a operação radiciação como:

$$\sqrt[b]{a} = c,$$

onde $c^b = a$.


Agora que conhece a definição, me diga:
***Qual a raiz quadrada de 9? E a de 25? E a de 81?***
Hmm, essa é difícil... Vocês podem me ajudar??


Já sei! **3, 5** e **9.** Pois $3^2 = 9$, $5^2 = 25$ e $9^2 = 81$.
É isso aí! Você já está craque!

# Exemplos:

- $\sqrt[3]{8} = 2$, já que $2 \times 2 \times 2 = 8$;

- $\sqrt[4]{81} = 3$, já que $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$;

- $\sqrt[10]{1} = 1$, já que $\underbrace{1 \times 1 \times 1 \times \ldots \times 1}_{\text{10 vezes}} = 1$.

Raiz

Índice

$$\sqrt[b]{a} = c$$

Radicando

Você pode ter qualquer índice, mas o mais utilizado é o 2, que nos dá a **raiz quadrada**!

Por isso, quando encontramos uma expressão de radiciação onde **não existe o índice escrito explicitamente**, consideramos que o índice é 2.

# Propriedades da radiciação.

Sendo a, b números inteiros, e m, n números racionais:

1 - $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Exemplo: $\sqrt{7} = 7^{1/2}$

2 - $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \times p]{a^{m \times p}}$

Exemplo: $\sqrt{4} = 2 = \sqrt[4]{16} = \sqrt[2\times 2]{4^{1\times 2}}$

1' - $\sqrt[n]{a^n} = a$

Exemplo: $\sqrt{2^{10}} = 2$

3 - $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$

Exemplo: $\sqrt{100} \times \sqrt{4} = 10 \times 2 = 20 = \sqrt{400} = \sqrt{100 \times 4}$

# Mais propriedades:

4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

(b diferente de 0)

Exemplo:

$$\sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$$

$$= \frac{6}{3} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}$$

5. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Exemplo:

$$(\sqrt{16})^2 = 4^2 = 16$$

$$= 16^{2/2} = \sqrt{16^2}$$

6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$

Exemplo:

$$\sqrt{\sqrt{1000000}} = \sqrt{1000} = 10 =$$
$$\sqrt{1000000} = \sqrt{1000000}.$$

# Dúvidas?

Radiciação

# Fatorial

Seja **n** um número natural,
definimos a operação fatorial como:

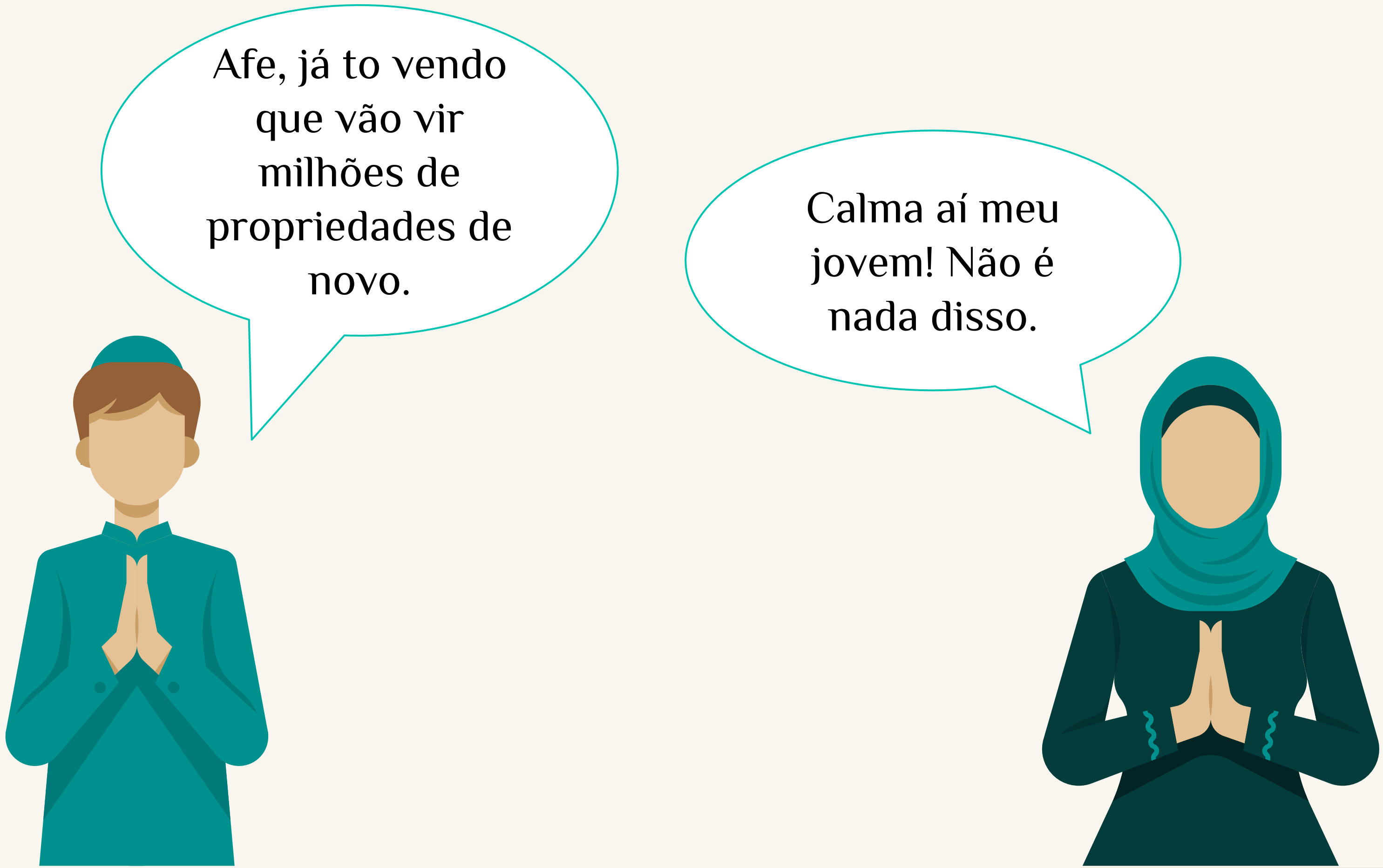
$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Não sei se entendi... Para calcular o fatorial de um número basta multiplicá-lo por todos os seus antecessores, até chegar em 1?

Exatamente! Aposto que você já sabe me dizer o **fatorial de 4** com a ajuda dos nossos convidados!

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$

Multipliquei 4 por todos os seus antecessores até o 1. Acho que consegui!


Afe, já to vendo que vão vir milhões de propriedades de novo.
Calma aí meu jovem! Não é nada disso.

# Propriedade do fatorial:

- $n! = n \times (n - 1)!$

  **Exemplo:**

  $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

  $= 6 \times (\underline{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1})$

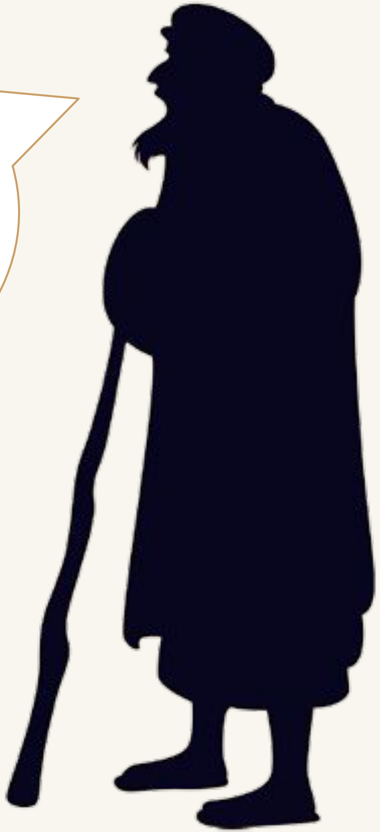
  $= 6 \times \underline{5!}$

Viu só?! Temos somente uma propriedade. Fácil, não?

LEMBRE-SE!

$0! = 1$,

por convenção



É preciso tomar cuidado ao fazer operações com fatorial! Veja a seguir como realizar as operações corretamente.

# Operações com fatorial:

## Soma

**Incorreto:** $2! + 3! = 5!$
**Correto:** $2! + 3! = 2 \times 1 + 3 \times 2 \times 1 = 2 + 6 = 8$

## Multiplicação

**Incorreto:** $5! \times 2! = 10!$
**Correto:** $5! \times 2! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (2 \times 1) = 120 \times 2 = 240$

## Subtração

**Incorreto:** $4! - 3! = 1!$
**Correto:** $4! - 3! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 3 \times 2 \times 1 = 24 - 6 = 18$

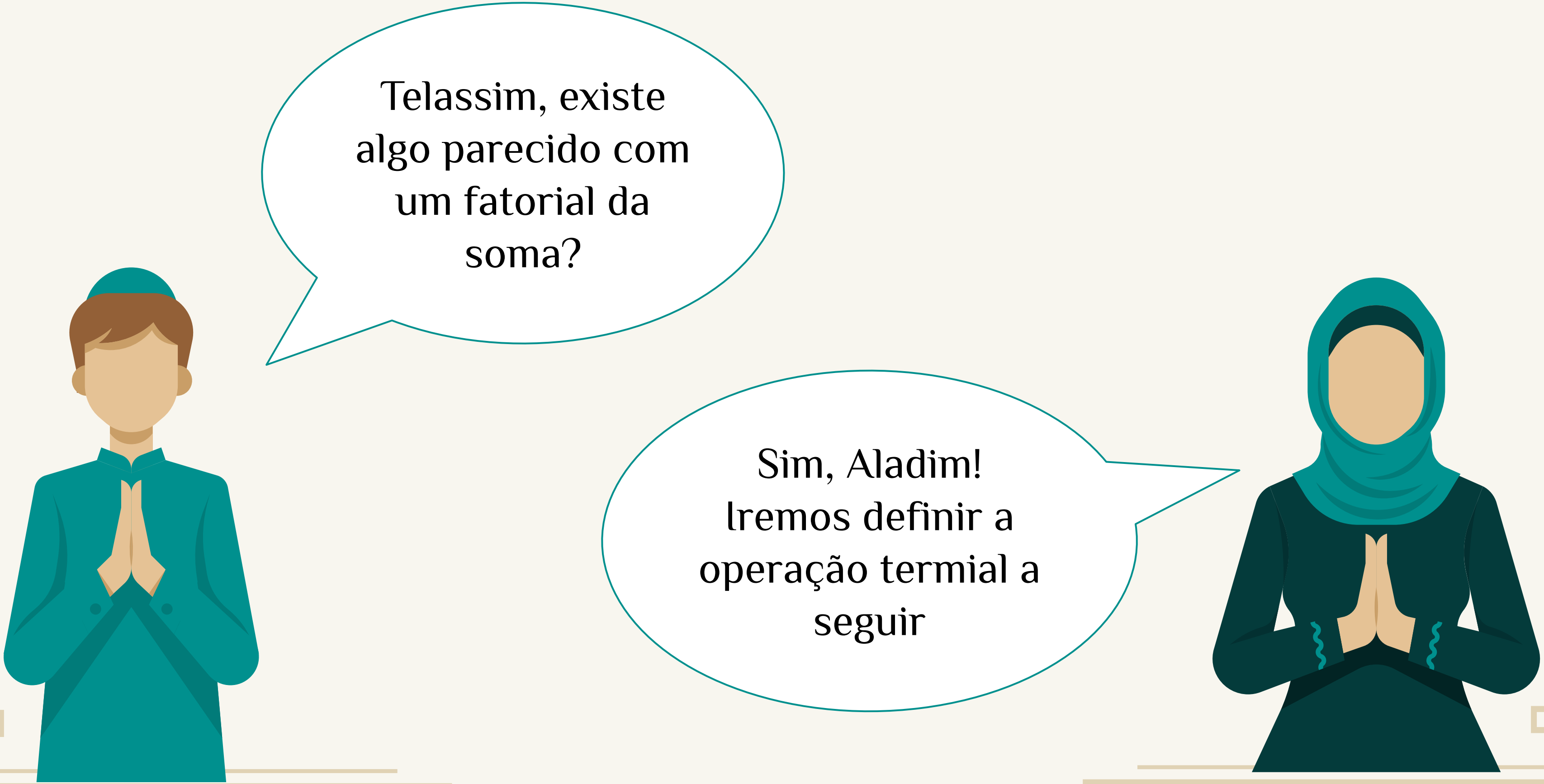
## Divisão

**Incorreto:** $4! / 2! = 2!$
**Correto:** $4! / 2! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 / 2 \times 1 = 4 \times 3$

# Dúvidas?

Fatorial

# Termial


Telassim, existe algo parecido com um fatorial da soma?
Sim, Aladim! Iremos definir a operação termial a seguir

Seja **n** um número natural,
definimos a operação termial como:

$$n? = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

Isso mesmo, Telassim!

Se quisermos determinar 4?, por exemplo, basta calcular a seguinte expressão:

$$4? = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

Então basta calcular
a soma do número
com seus
antecessores!

Quero determinar
o termial de 7,
vocês podem me
ajudar?

$7? = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$

Somei 7 com todos os seus antecessores até 1 e obtive o valor 28. Fiz certo, Telassim?

Sim, Aladim! Você e os nossos convidados já estão craques no assunto!

Estamos quase no fim da nossa revisão! Mas antes de seguirmos para o problema dos quatro quatros, precisamos conhecer a propriedade do termial!

# Propriedade do termial:

Note que a propriedade do termial é muito semelhante à do fatorial!

- $n? = n + (n - 1)?$

**Exemplo:**

$6? = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

$= 6 + (\underline{5 + 4 + 3 + 2 + 1})$

$= 6 + \underline{5?}$

Assim como no caso do fatorial, temos alguns comentários sobre as operações com termial!

# Operações com termial:

## Soma

**Incorreto:** 2? + 3? = 5?
**Correto:** 2? + 3? = (2 + 1) + (3 + 2 + 1) =  3 + 6 = 9

## Multiplicação

**Incorreto:** 5? × 2? = 10?
**Correto:** 5? × 2? = (5 + 4 + 3 + 2 + 1) × (2 + 1) = 15 × 3 = 45

## Subtração

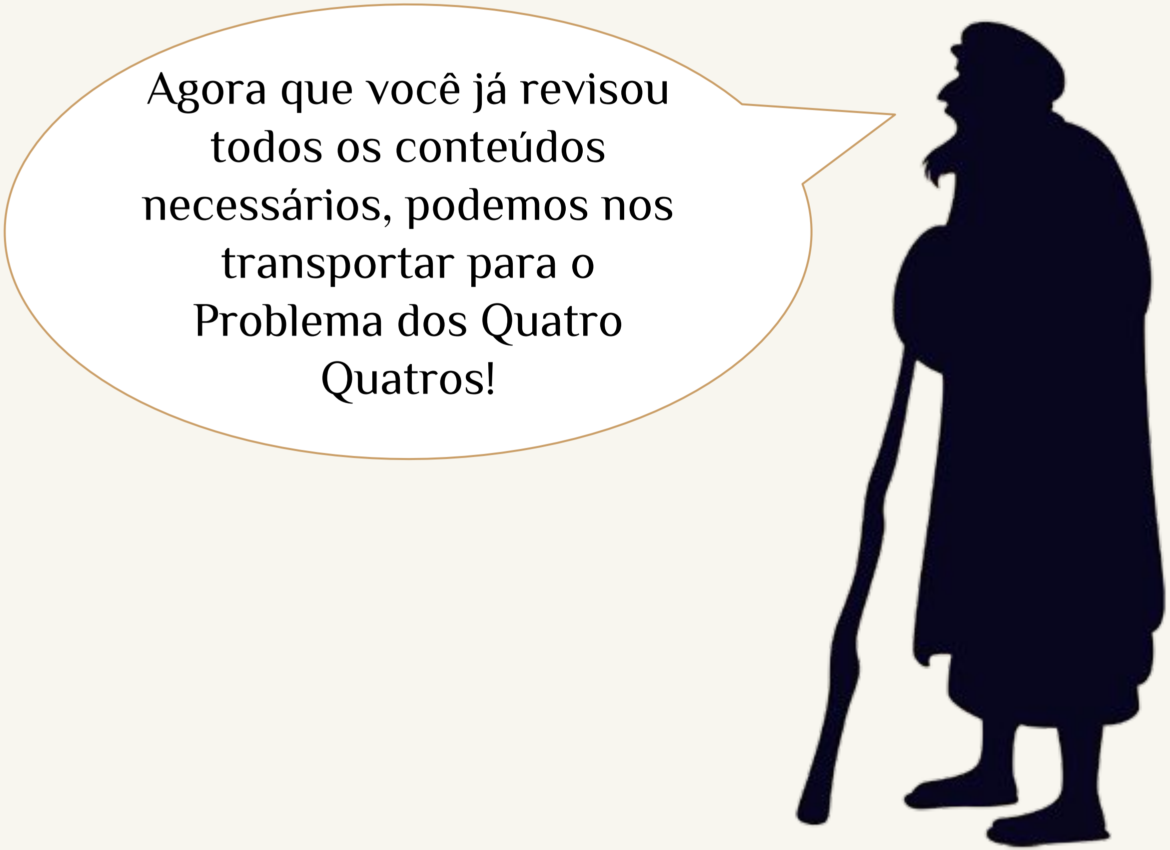
**Incorreto:** 4? - 3? = 1?
**Correto:** 4? - 3? = (4 + 3 + 2 + 1) - (3 + 2 + 1) = 10 - 6 = 4

## Divisão

**Incorreto:** 4? / 2? = 2?
**Correto:** 4?/ 2? = (4 + 3 + 2 + 1) / (2 + 1) =  10 / 3

# Dúvidas?

Termial

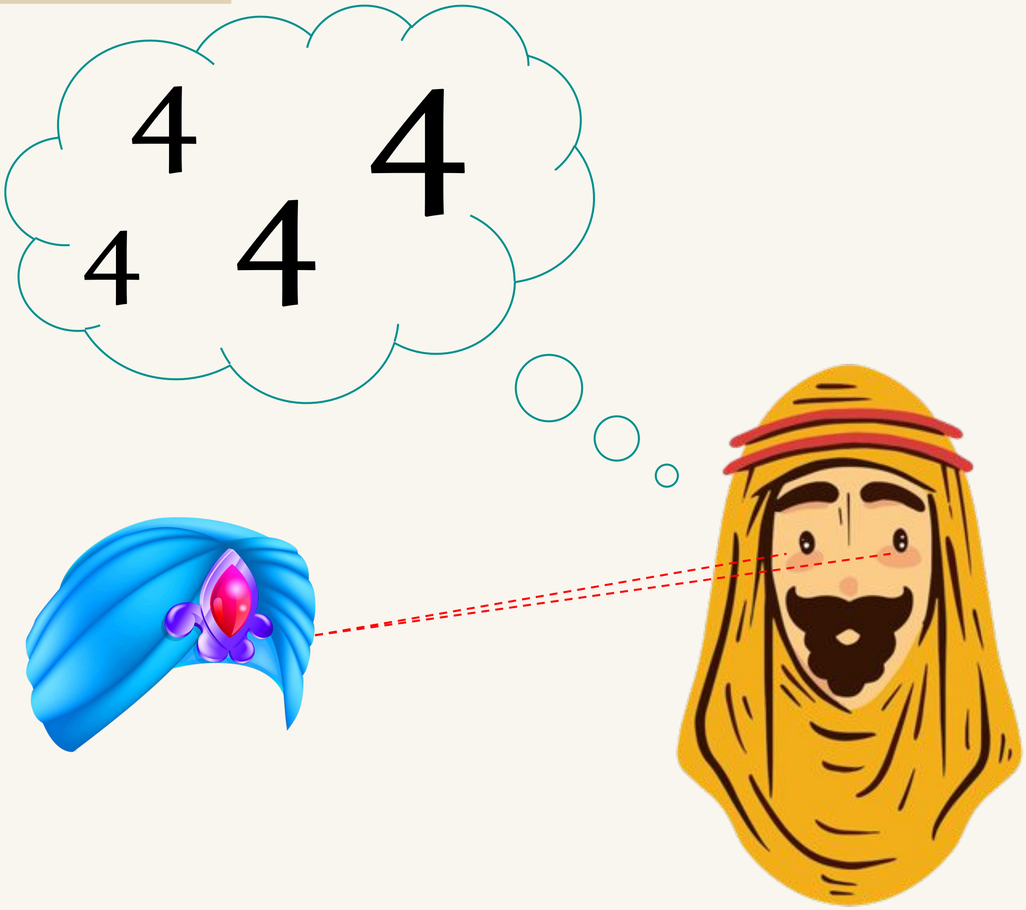

Agora que você já revisou todos os conteúdos necessários, podemos nos transportar para o Problema dos Quatro Quatros!

AVISO!!

É necessária uma super revisão antes de se visitar esta atração!

# O Problema dos Quatro Quatros

# Os quatro quatros



4
4
4
4

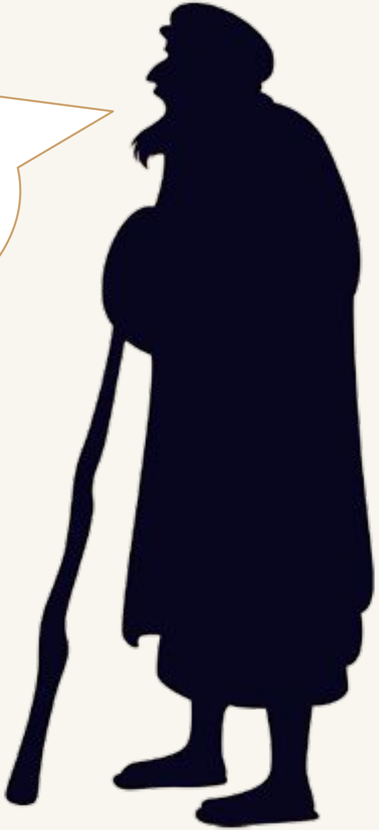
Escreva todos os números inteiros de 0 a 100 utilizando apenas quatro algarismos 4 e operações matemáticas

# Exemplos

- $0 = 44 - 44$
- $1 = \frac{44}{44}$
- $4 = 4 + \frac{4 - 4}{4}$
- 14 = 4? + 4 + 4 - 4
- 74 = 4 x 4 x 4 + 4?

**ATENÇÃO!**

Um mesmo número pode ser escrito de diversas maneiras utilizando o sistema dos quatro quatros!



Podemos escrever o número zero como sendo

**0 = 4 + 4 - 4 - 4**

Mas ele também pode ser escrito como

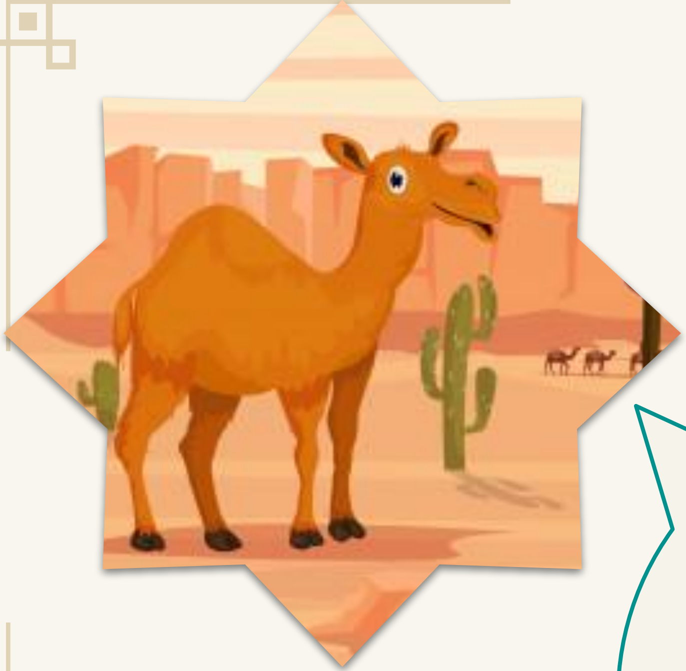
**0 = 4! + 4! - 4! - 4!**

Isso mesmo!
E além das 3 formas apresentadas, nós podemos representar o número zero de várias outras formas!

E isso se repete para todos os números inteiros de 0 a 100.

# Hora do Desafio!

Escreva no chat como determinar os números a seguir utilizando o sistema de quatro quatros!



Lembre-se:

$\sqrt{4} = 2$

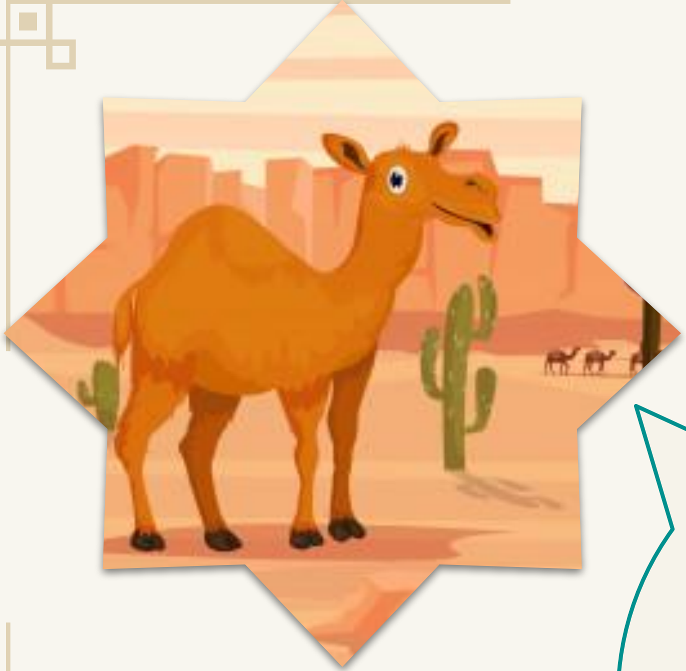
4? = 10

$4 \times 4 = 16$

$4! = 24$

$4^4 = 256$

2



Lembre-se:

$\sqrt{4} = 2$

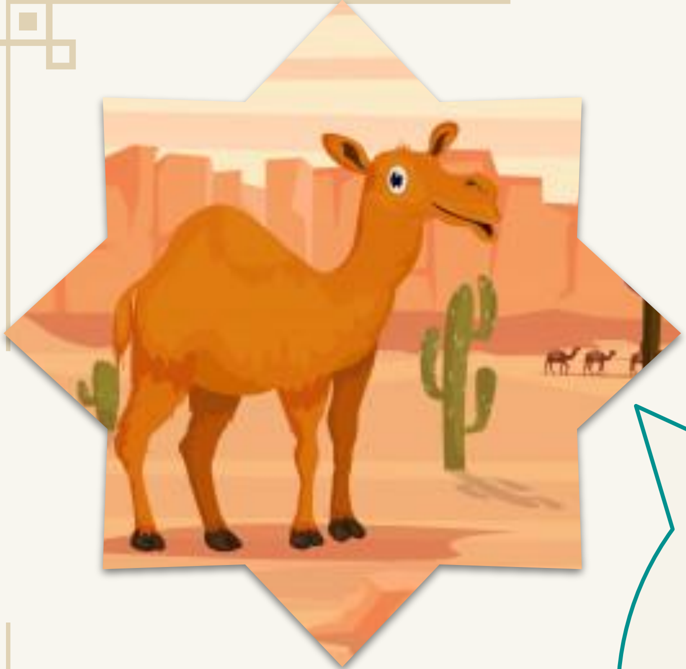
$4? = 10$

$4 \times 4 = 16$

$4! = 24$

$4^4 = 256$

7



Lembre-se:

$\sqrt{4} = 2$

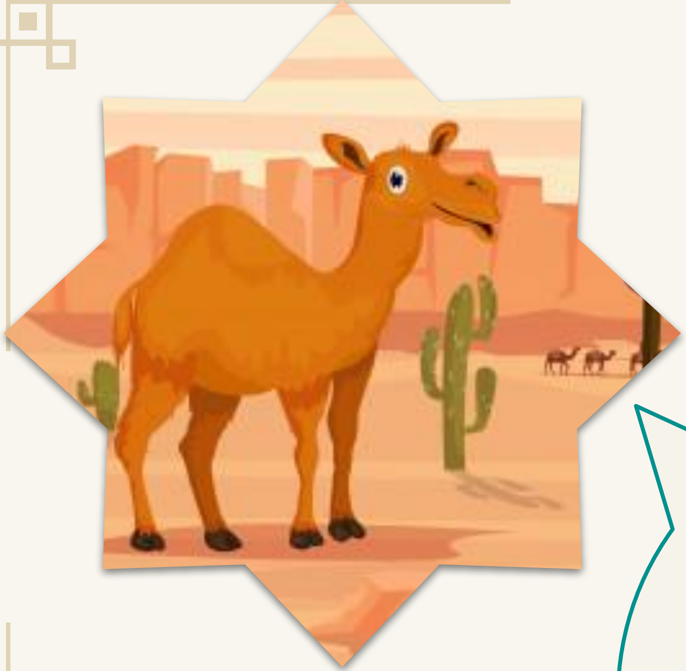
$4? = 10$

$4 \times 4 = 16$

$4! = 24$

$4^4 = 256$

10



24

Lembre-se:

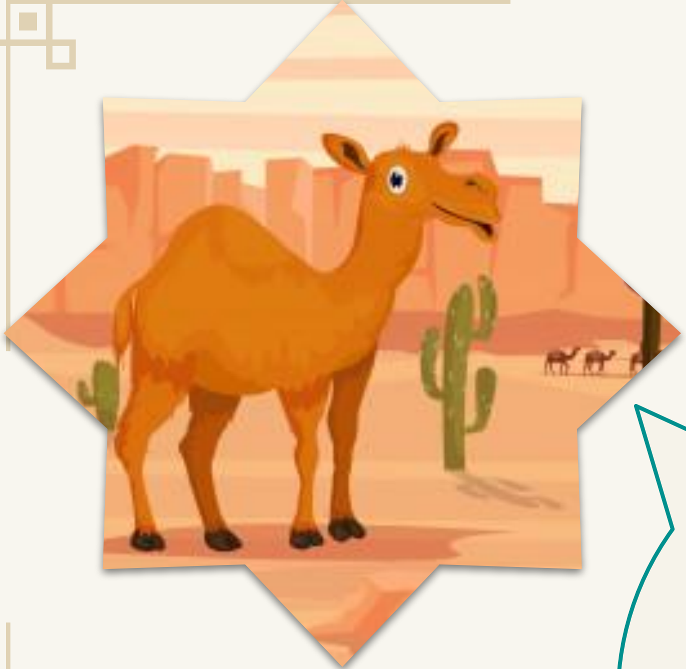
$\sqrt{4} = 2$

4? = 10

$4 \times 4 = 16$

$4! = 24$

$4^4 = 256$



Lembre-se:

$\sqrt{4} = 2$

4? = 10

$4 \times 4 = 16$

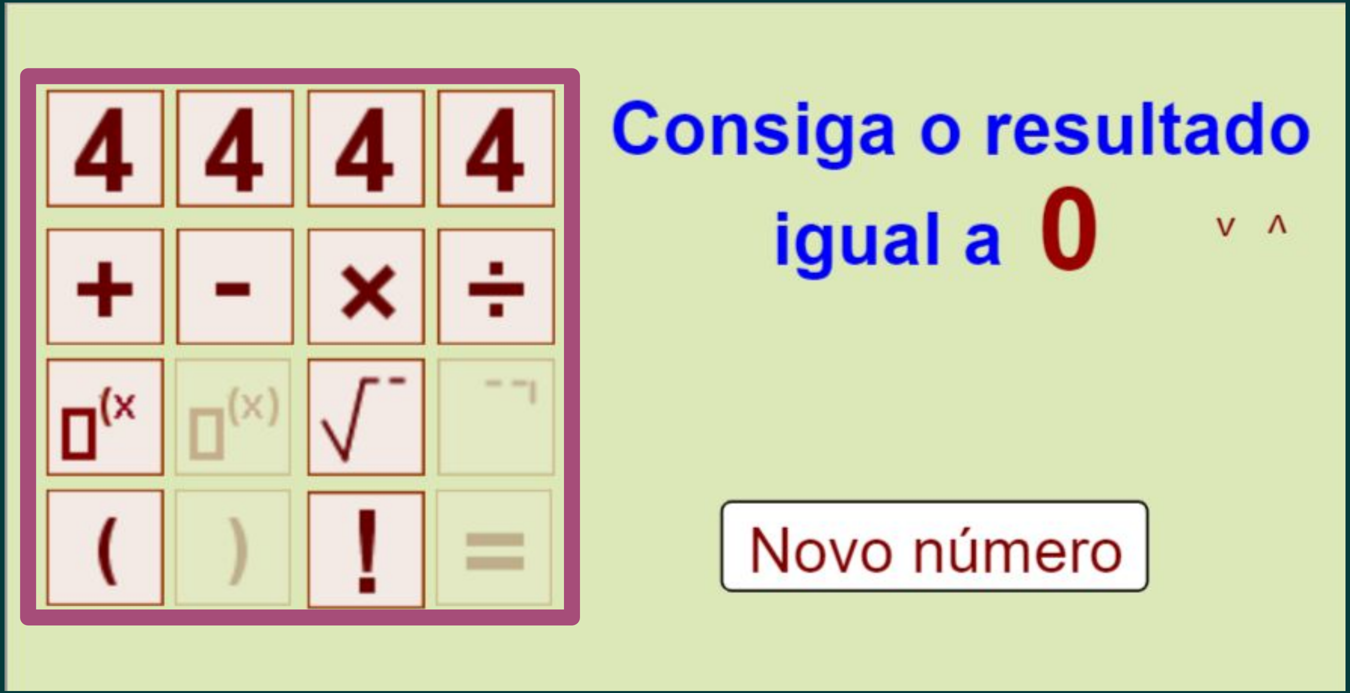
$4! = 24$

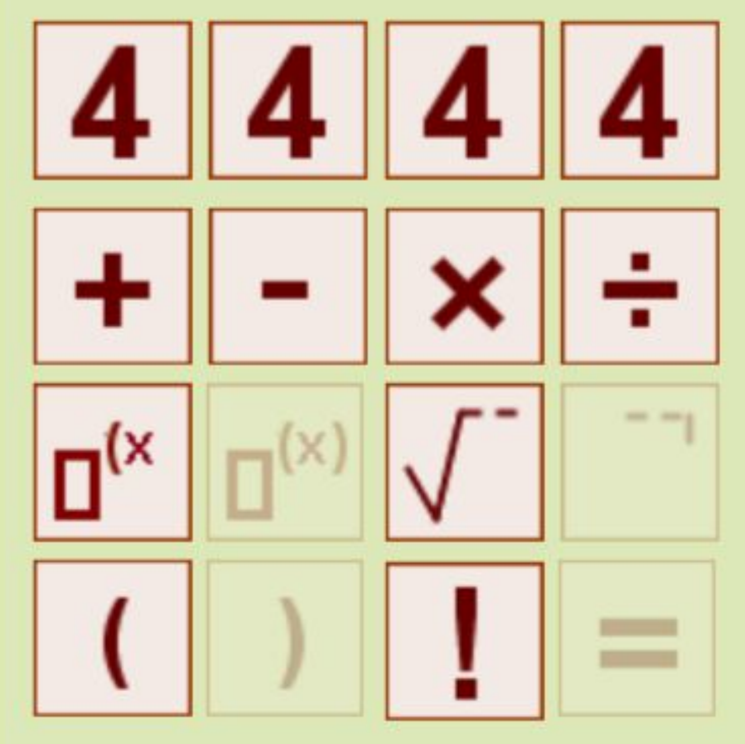
$4^4 = 256$

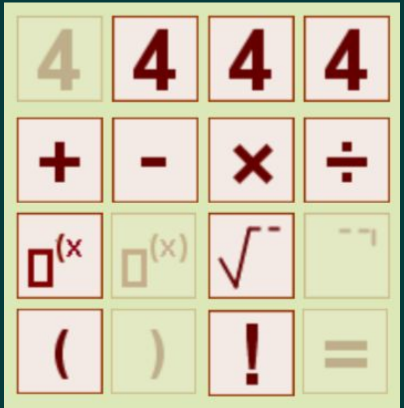
100

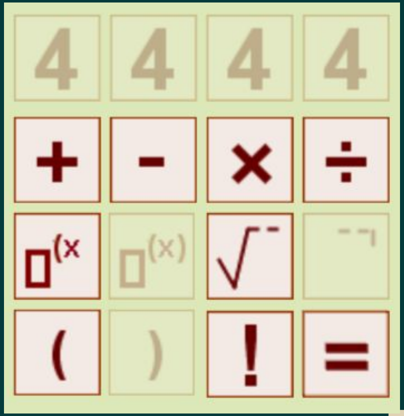
# O Jogo dos Quatro Quatros

# O Jogo dos Quatro Quatros

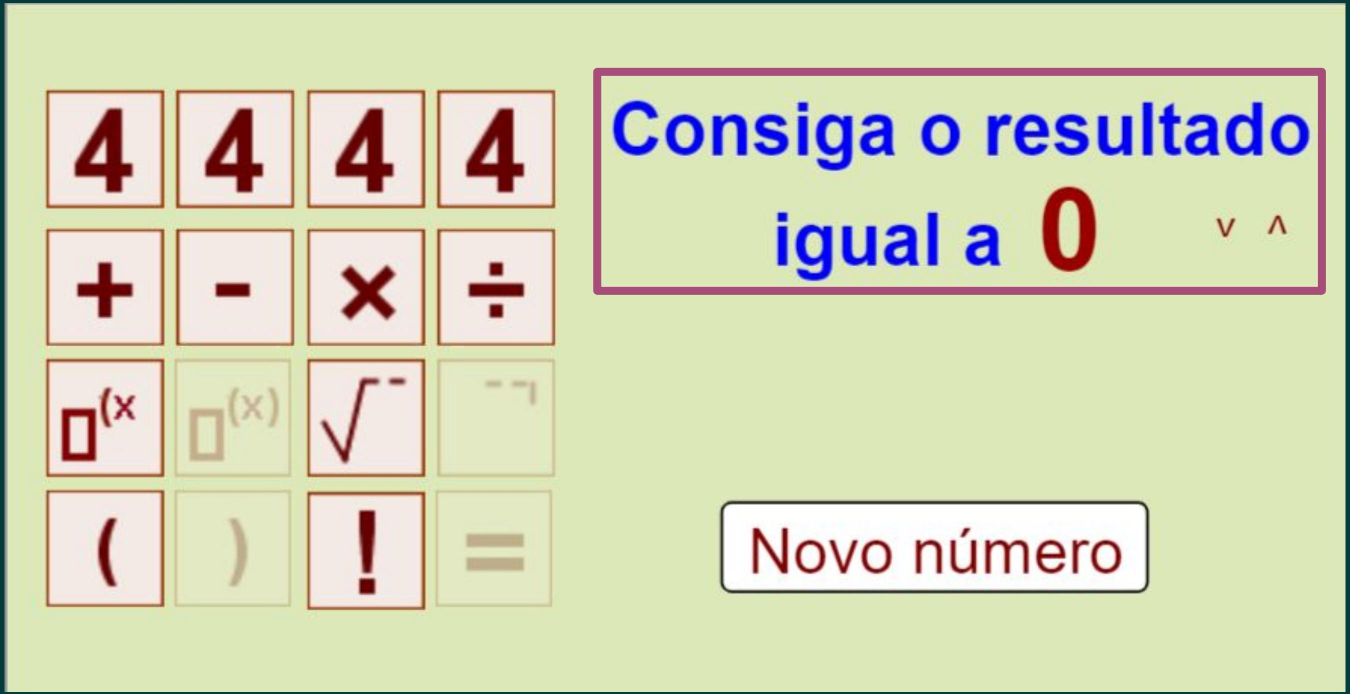



4 4 4 4
+ - × ÷
( ) ! =


4 4 4 4
+ - × ÷
( ) ! =


4 4 4 4
+ - × ÷
( ) ! =

# O Jogo dos Quatro Quatros



**Consiga o resultado igual a 0** v ^

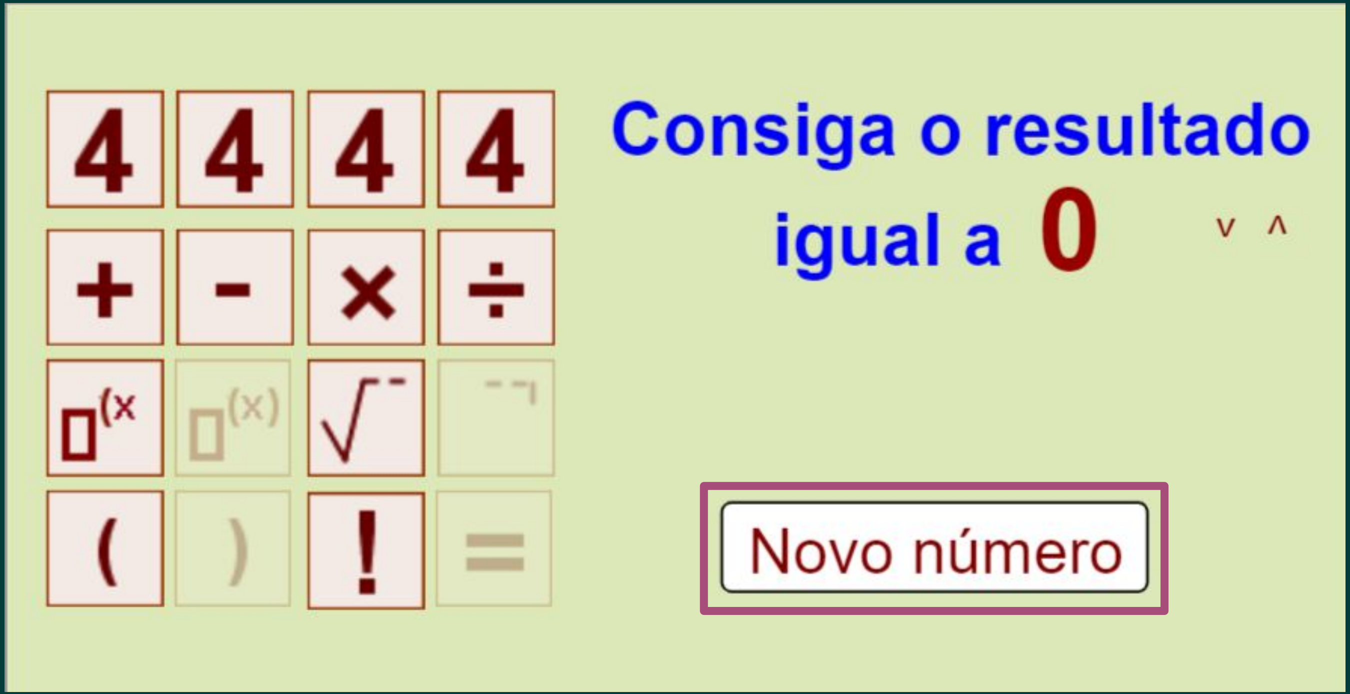
Número que queremos determinar usando o sistema dos quatro quatros

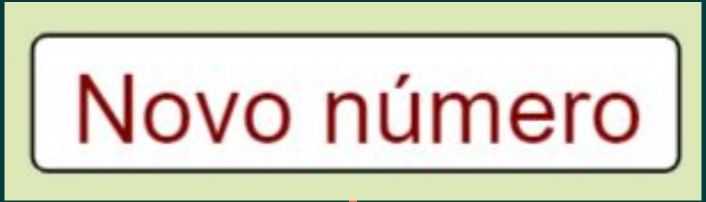
Setas para alterar os números a serem determinados

1 v ^

10 v ^

# O Jogo dos Quatro Quatros

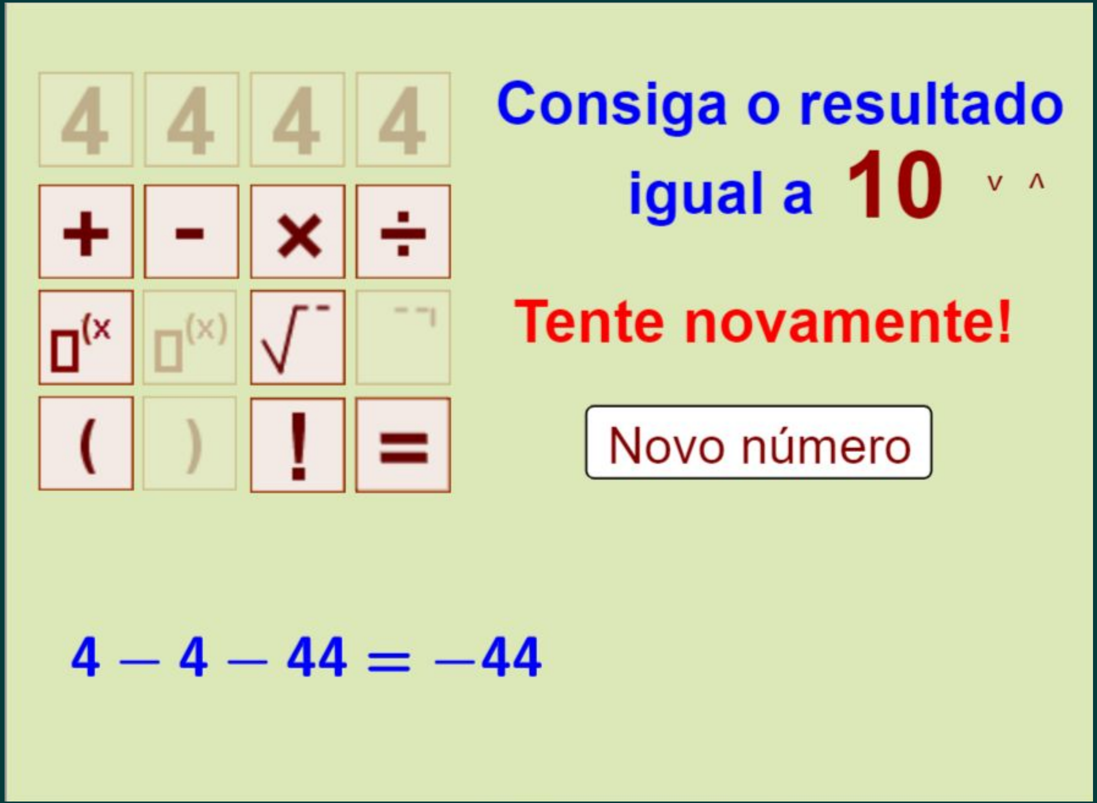





Reinicia sua tentativa para o número selecionado em caso de erro e passa para o próximo número em caso de acerto

Tela de acerto

Tela de erro



# Para os jovens matemáticos de plantão...

**Teste seus conhecimentos sobre o conteúdo apresentado nas questões a seguir!**

1 - Escreva números inteiros utilizando apenas três algarismos 3 e operações.

2 - Escreva números inteiros utilizando apenas cinco algarismos 5 e operações.

3 - Utilizando cada operação apenas uma vez, tente escrever o maior número possível usando o sistema dos 4 quatros.

# Bônus: o Problema dos 50 dinares

*"Dar-lhe-ei de presente o belo turbante azul se souber explicar certo mistério encontrado numa soma, que há dois anos me tortura o espírito."*


$ 50
$ 50

Pagou 20 ficou devendo 30
Pagou 15 ficou devendo 15
Pagou 10 ficou devendo 5
Pagou 5 ficou devendo 0

Soma 50 Soma 50

Pagou 20 ficou devendo 30
Pagou 18 ficou devendo 12
Pagou 3 ficou devendo 9
Pagou 9 ficou devendo 0

| | |
|---|---|
| Soma 50 | Soma 51 |

*“Nas contas de pagamento, os saldos devedores não têm relação alguma com o total da dívida.”*

Admitamos uma nova dívida de 50 dinares, paga em 3 prestações:

Pagou 10 ficou devendo 40
Pagou 5 ficou devendo 35
Pagou 35 ficou devendo 0

Soma 50 Soma 75


Agradeço muito por sanar minhas dúvidas, ilustre calculista!
E como prometido...

# Obrigada!

Alguma dúvida?

petmatufpr@gmail.com
petmatematica.ufpr.br