O Paradoxo do Pintor: uma abordagem para o ensino de integrais impróprias

Jaqueline Valle[1]
Licenciatura em Matemática – UDESC
jaqeline.valle@gmail.com

Prof. Ivanete Zuchi Siple (Orientador)
Departamento de Matemática – UDESC
ivazuchi@gmail.com

Prof. Elisandra Bar de Figueiredo[2] (Orientador)
Departamento de Matemática – UDESC
elis.b.figueiredo@gmail.com

Palavras-chave: Trombeta de Gabriel, Integral de Riemann, Integral de Henstock-Kurzweil.

Resumo:

A noção de integral teve sua origem há mais de dois milênios, Arquimedes (287-212 a.C) calculava áreas e volumes de figuras geométricas por meio de métodos, que de certa forma se assemelham aos métodos do Cálculo Integral contemporâneo, porém os seus procedimentos não envolviam o limite de somas de infinitas parcelas, fato que foi definido por Riemann (1826-1866), no século XIX, por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

A definição de integral proposta por Riemann está associada com o conjunto de funções limitadas. Uma das restrições a essa definição surge em problemas de funções que não são limitadas em um ponto do intervalo de integração ou quando investigamos a integração num intervalo infinito. Por exemplo, indícios desse problema já foram observados, no século XVII, no cálculo do volume de um sólido de revolução.

> Em 1641 Torricelli notou que uma área infinita, se submetida a uma rotação em torno de um eixo de seu plano, pode as vezes fornecer um sólido de revolução de volume finito. Por exemplo, a área limitada pela hipérbole xy = k^2, a ordenada x = b (b > 0) e o eixo x é infinita, mas o volume do sólido de rotação obtido girando-se a área em torno do eixo x é finito (...) (EVES, 2004, p. 397).

Uma das superfícies que apresenta as propriedades observadas por Torricelli é conhecida como a Trombeta de Gabriel ou Torricelli, a qual é obtida através da revolução da região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \geq 1\ e\ 0 < y \leq \frac{1}{x}\}$ em torno do eixo das abscissas. É intuitivo que a área da região R seja calculada pela integral $A_R = \int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ e o volume e a área da superfície da trombeta de Gabriel sejam dadas, respectivamente, por

$$V = \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx \quad \text{e} \quad A_s = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \left(\frac{-1}{x^2}\right)^2}\, dx.$$

[1] Bolsista do Programa de Iniciação Científica PROBIC/UDESC.
[2] Professora participante do projeto de pesquisa

Porém, para encontrar o valor numérico das integrais acima é necessária uma abordagem diferenciada, visto que tanto as somas de Riemann quanto Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) são válidos para a classe de funções limitadas num intervalo fechado. Tal abordagem é tratada no Cálculo como integrais impróprias.

A integral imprópria é apresentada de diversas formas nos livros, alguns autores a tratam como uma extensão da Integral de Riemann, outros como uma junção da teoria de integrais com a teoria de limites e alguns como mais uma técnica de integração (FIGUEIREDO, VALLE, SIPLE, 2015). O que nos interessa nesse momento é que aplicando esse conceito para as integrais acima, teremos:

$$A_R = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x} dx;\ V = \lim_{a\to\infty} \pi \int_1^a \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx \ \text{ e } \ A_s = \lim_{a\to\infty} 2\pi \int_1^a \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(\frac{-1}{x^2}\right)^2}\, dx.$$

Com essa abordagem podemos resolver as integrais de área e volume, concluindo que o volume da trombeta de Gabriel é π u.v. e as áreas são infinitas. Portanto, o volume da Trombeta de Gabriel é finito, mas sua área superficial é infinita, ou seja, para encher a trombeta de tinta são necessárias pouco mais de três unidades cúbicas de tinta, porém nem toda a tinta do universo seria suficiente para um pintor pintar a parte externa dessa trombeta, mostrando que quando se estuda área e volume de uma superfície com dimensões infinitas a intuição pode ser falha, e nem sempre é trivial compreender esse tipo de resultado. Segundo Wijeratne e Zazkis (2015) o paradoxo do pintor baseia-se no fato de que a trombeta de Gabriel tem área de superfície infinita e volume finito e emerge quando interpretações, num contexto finito, de área e volume são atribuídos ao objeto intangível da trombeta de Gabriel. Matematicamente, esse paradoxo é o resultado do da generalização de área e volume, usando cálculo integral, como na trombeta de Gabriel que tem uma série convergente associada com o volume e uma série divergente associada com a área de superfície.

Além desse paradoxo, temos a questão de integração de funções ilimitadas, como, por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, que não é limitada no intervalo $[0,1]$ logo não é Riemann integrável, mas o valor numérico da sua integral imprópria nesse intervalo é igual a dois. Assim, nos questionamos: será que não é possível uma abordagem em que não seja necessário recorrer a integral imprópria? De fato existe, e essa abordagem pode ser vista na Integral de Henstock-Kurzweil (HK) a qual é elaborada a partir de uma alteração na definição de Riemann e a introdução da partição δ-fina do seguinte modo: uma função $\delta: [a, b] \to \mathbb{R}^+$ é dita um *calibre* em $[a, b]$ e uma *partição etiquetada* é uma coleção finita de duplas $(c_k, [x_{k-1}, x_k])$, com $k \in [1,2, \ldots, n]$, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ e $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Dado um calibre δ em $[a, b]$, uma partição etiquetada $(c_k, [x_{k-1}, x_k])$ é dita δ-*fina* se satisfaz para todo k a inequação

$$c_k - \delta(c_k) < x_{k-1} < c_k < x_k < c_k + \delta(c_k).$$

Assim, define-se que uma função f é HK integrável se existe um número A tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um calibre $\delta_\varepsilon(x)$ de modo que

$$\left|\sum f(c_k)\Delta x_k - A\right| < \varepsilon,$$

para toda partição δ-fina de $[a, b]$. Desse modo a Integral HK de f é A, e denotada por $\int_a^b f = A$.

Na teoria de integração de HK os resultados a seguir garantem que não há integrais impróprias.

Teorema 1. (Teorema de Hake): Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ HK integrável, em $[c,b]$, para todo $c \in (a,b)$. Então, fé HK integrável em $[a,b]$ se, e somente se, o limite $\lim_{c\to a^+} \int_c^b f$ existe. Nesse caso, $\int_a^b f = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f$.

Teorema 2: Dada $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ HK integrável em $[a,b]$, para todo $b > a$. Então, f é HK integrável em $[a,+\infty)$ se, e somente se, o limite $\lim_{b\to +\infty} \int_a^b f$ existe. Nesse caso,

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{b\to +\infty} \int_a^b f.$$

A demonstração desses resultados pode ser encontrada em Kurtz e Swartz (2004).

Assim temos que para uma função ser Riemann integrável é necessário que seja limitada em seu intervalo de integração, sendo que para abordar funções ilimitadas no intervalo de integração, ou integrar funções em intervalos ilimitados utilizamos o método da Integral Imprópria, o qual apesar de apresentar algumas lacunas nos faz avançar na quantidade de funções que podemos tratar. Por outro lado, temos a Integral de Henstock-Kurzweil, elaborada a partir de uma alteração na definição de Riemann e a introdução da partição δ-fina, de modo que, a Integral de HK não possui Integral Imprópria, assim as funções que na teoria de Riemann necessitavam da aplicação de tal método, nesse novo contexto são HK integráveis.

Segundo Wijeratne e Zazkis (20015) uma abordagem didática interessante no ensino de cálculo é reforçar a relação entre as integrais definidas e as somas de Riemann de modo que os estudantes possam compreender por que a integral definida pode representar área e volume e não apenas aplicar a técnica do cálculo. Observem que no paradoxo da trombeta de Gabriel a convergência da série $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ é a chave para compreender por que o volume da trombeta de Gabriel é finito.

Referências:

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas, SP: Editora UNICAMP, 2004.

FIGUEIREDO, E.B.; VALLE, J.; SIPLE, I. Z. Integral imprópria: a abordagem nos livros didáticos. In: **4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 2015, Ilhéus. Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015. v.4. p. 2578-2589.

KURTZ, Douglas S.; SWARTZ, Charles K. **Theories of Integration: The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil and McShane**. New York: World Scientific, 2004.

WIJERATNE, C; ZAZKIS, R. On Painter's Paradox: Contextual and Mathematical Approaches to Infinity. **Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed**. Springer International Publishing Switzerland 2015.