Método de Milewski para a integração numérica de funções singulares

Lorayne Veri
Matemática Industrial - UFPR
lorayneveri@gmail.com

Prof. Roberto Ribeiro Santos Junior
Departamento de Matemática - UFPR
robertoribeiro@ufpr.br

Palavras-chave: Integração Numérica. Integral de Funções Singulares. Método do Trapézio. Método de Simpson.

Resumo:

Neste trabalho, estudamos o método numérico proposto por Milewski [2] para o cálculo da integral de funções com singularidades, isto é, dizemos que um ponto x_0 é uma singularidade da função f se esta estiver definida para todos os pontos de uma vizinhança de x_0 exceto x_0.

Por exemplo, consideremos o simples problema de calcular numericamente a integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

É fácil ver que o valor exato dessa integral é

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2.$$

Observemos que a função $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ não está definida em $x = 0$. Deste modo, a integração numérica será efetuada no intervalo $[\epsilon, 1]$, $\epsilon > 0$ e denotaremos por

$$I_\epsilon = \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Na tabela a seguir apresentamos o erro do cálculo de I_ϵ quando utilizamos o Método do Trapézio e o Método de Simpson [1]:

ϵ	n	E^T	$Tempo\ T(s)$	E^S	$Tempo\ S(s)$
10^{-4}	10	$2,3$	$0,000452$	8	$0,000532$
	100	$1,7 \times 10^{-1}$	$0,000422$	$7,4 \times 10^{-1}$	$0,000327$
	1000	$8,2 \times 10^{-5}$	$0,000413$	$5,4 \times 10^{-2}$	$0,000364$
10^{-6}	10	24	$0,000434$	83	$0,000355$
	100	$2,4$	$0,000379$	$8,2$	$0,000310$
	1000	$2,2 \times 10^{-1}$	$0,000442$	8×10^{-1}	$0,000385$

Na tabela acima, temos que n é o número de pontos a serem considerados na interpolação; $Tempo\ T$ e $Tempo\ S$ é o tempo de execução dos algoritmos do Método do Trapézio e do Método de Simpson e E^T e E^S são os erros relativos do Método do Trapézio e do Método de Simpson, respectivamente, calculados por:

$$E^T = \frac{|I_\epsilon^T - I|}{I} \quad \text{e} \quad E^S = \frac{|I_\epsilon^S - I|}{I}.$$

Observando os resultados obtidos temos que os Métodos do Trapézio e de Simpson não geraram uma boa aproximação para I, pois a função f possui uma singularidade em $x = 0$.

Para tratarmos de integrais do tipo

$$I = \int_a^b f(x)\, dx,$$

com f possuindo singularidades em $[a, b]$, apresentaremos o método proposto por Milewski. Sem perda de generalidade, podemos supor que f é singular em um dos extremos do intervalo, digamos que em $x = a$. A integral será calculada numericamente pela função recQuad definida por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Entrada: } a, b, tol = \text{tolerância do critério de parada.} \\ \underline{\text{Executa o algoritmo de Milewski.}} \\ \text{Saída: } Q = \text{integral numérica de } I. \end{array} \right.$$

O algoritmo de Milewski é apresentado abaixo:

Algoritmo 1 Algoritmo de Milewski

Entrada: a, b, tol.
Considere a partição $\mathcal{P} = \{a = x_1 < x_2 = b\}$, do intervalo $[a, b]$.
Denote por n o número de pontos de $\mathcal{P}$ e considere $l = 1$.
ENQUANTO $l \leq (n - 1)$
    Calcule: $m = (x_l + x_{l+1})/2$, ponto médio de x_l e x_{l+1}.
    Calcule: T e S as aproximações via regra do Trapézio e Simpson, respectivamente, da integral $\int_{x_l}^{x_{l+1}} f(x)\, dx$.
    Se $|S - T| \geq tol$ então
        Refine a partição $\mathcal{P}$ do seguinte modo: $\mathcal{P} = \{a = x_1 < x_2 < \ldots < x_l < m < x_{l+1} < \ldots < x_n = b\}$
    senão
        $Q = Q + S$ e $l = l + 1$;
    Fim
FIM
Saída: Q.
Fim

Observe que o Método de Milewski escolhe a malha automaticamente, refinando mais quando estamos próximos da singularidade. A fim de testarmos a eficiência do método acima calculamos

$$I_\epsilon = \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx,$$

através dessa nova proposta. Os resultados obtidos estão na tabela abaixo:

ϵ	n	E^M	$Tempo\ M(s)$
10^{-4}	259	10^{-2}	$0,035269$
10^{-6}	281	$9,9 \times 10^{-4}$	$0,050346$

Tabela 1: Temos que $tol = 10^{-4}$.

Se compararmos o Método de Milewski com os Métodos do Trapézio e de Simpson podemos observar que, com poucos pontos, o erro obtido no Método de Milewski é extremamente pequeno, o que só conseguimos obter nos outros dois métodos quando consideramos uma grande quantidade de pontos.

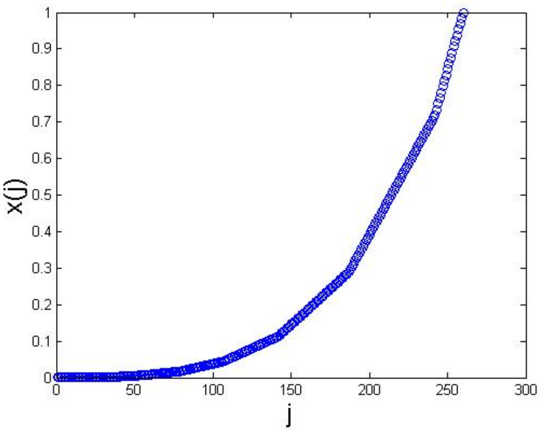

Figura 1: $x(j),\ j = 0, \cdots, n$ são os elementos da partição do intervalo $[\epsilon, 1]$, onde $x(0) = \epsilon$ e $x(n) = 1$, realizada automaticamente pelo Método de Milewski para $\epsilon = 10^{-6}$ e $n = 281$.

Observe na figura acima que os pontos da partição são acumulados próximos à singularidade $(x = 0)$.

Pela simplicidade e robustez o Método de Milewski é uma boa ferramenta no cálculo da integral de funções com singularidades.

Referências

[1] CUNHA, Maria. *Métodos Numéricos.* 2 ed. UNICAMP, 2000.

[2] MILEWSKI, P. *Applied Numerical Computations: Course Notes.* Homepage. <http://people.bath.ac.uk/pam28/Paul_Milewski,_Professor_of_Mathematics,_University_of_Bath/Milewski.html>. Acesso em: 07 Out. 2016.