Classificação de grupos abelianos finitamente gerados

Rogério Otavio Mainardes da Silva *
Bacharelado em Matemática - UFPR
r.otavioms@gmail.com

Prof. Dr. Matheus Batagini Brito (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
mbrito@ufpr.br

Palavras-chave: grupos abelianos finitamente gerados, classificação, grupos abelianos livres.

Resumo:

Em 1824, Niels Henrik Abel provou que para resolver equações polinomiais de grau maior ou igual a 5 não há fórmula geral envolvendo somente os coeficientes da função polinomial e operações elementares. Mas, tendo em vista que algumas poderiam ser revolvidas, a grande questão era como caracterizar estas últimas. O que foi respondido por Evariste Galois apresentando, pela primeira vez, um conceito de Grupo, o qual é conhecido como grupo de permutações atualmente. Nos dias de hoje, o conceito de Grupo é ainda mais geral.

Dentre tantas ramificações possíveis no estudo da Teoria de Grupos, uma de grande importância é a que se refere ao estudo dos grupos abelianos, onde a comutatividade é válida. Nesta, existem particularmente os grupos gerados por uma quantidade finita de elementos, isto é, finitamente gerados. Destes grupos é possível realizar a classificação, a menos de isomorfimos, de maneira a correspondê-los ao produto de cópias de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_n$, onde n é um inteiro positivo e $\mathbb{Z}_n$ é o grupo dos inteiros módulo n.

O teorema para classificação é dado da seguinte maneira: seja G um grupo abeliano finitamente gerado.

(i) Existe um único inteiro s não negativo tal que o número de grupos cíclicos infinitos sendo somados em qualquer decomposição de G como soma direta de grupos cíclicos é precisamente s;

(caso G tenha somente grupos cíclicos infinitos nessa decomposição em soma direta, isto é, caso $G \cong \mathbb{Z}^s$, dizemos que G é um grupo abeliano livre.)

*Bolsista do PET-Matemática

(ii) Ou G é abeliano livre, ou existe uma única lista de inteiros positivos (não necessariamente distintos) $m_1, \ldots, m_t$, $t \in \mathbb{N}$, tais que $m_1 > 1, m_1|m_2, m_2|m_3, \ldots, m_{t-1}|m_t$ e

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_t} \oplus F$$

onde F é abeliano livre;

(iii) Ou G é abeliano livre, ou existe uma lista de inteiros positivos $p_1^{s_1}, \ldots, p_k^{s_k}$, $k \in \mathbb{N}$, dos quais são únicos a menos de ordem e tais que $p_1, \ldots, p_k$ são primos (não necessariamente distintos) e $s_1, \ldots, s_k$ são inteiros positivos (não necessariamente distintos) e

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}} \oplus F$$

onde F é abeliano livre.

Referências:

Hungerford, T. W., Algebra. Nova Iorque: Springer, 1974.