Atualização da Decomposição LU no Método Simplex

Renan Oclides Domingues
Engenharia Química - UFPR
renan.oclides@hotmail.com

Prof. Abel Soares Siqueira (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
abel.s.siqueira@gmail.com

Palavras-chave: Otimização Linear, Simplex, Atualização LU.

Resumo:

A otimização linear é frequentemente usada para resolver problemas, pois muitas aplicações são bem representadas por modelos lineares de otimização. A minimização de custos, por exemplo, permite maior eficiência na administração de recursos. Esse trabalho estuda o método Simplex Revisado para otimização linear, que foi implementado com atualização Suhl e Suhl da decomposição LU da matriz de variáveis básicas, buscando melhor desempenho computacional.

O modelo de otimização simplifica o problema real, sendo o objetivo minimizar ou maximizar uma função objetivo $z(x)$ que representa a qualidade da escolha. As variáveis de decisão x incluem as escolhas possíveis que influenciam a função objetivo. Essas variáveis são, no geral, limitadas por restrições, como limites físicos ou a disponibilidade de recursos.

Na otimização linear tanto a função objetivo quanto as restrições das variáveis são funções lineares. As restrições dadas por desigualdades, bem como variáveis livres, podem ser convertidas em igualdades pela introdução de variáveis de folga que não alteram a função objetivo. Assim, sem perda de generalidade, utiliza-se a Forma Padrão (1) para problemas de otimização linear,

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & c^T x \\ \text{sujeito a } & Ax = b, \quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $c^T x$ a função objetivo e $Ax = b, x \geq 0$ as restrições.

Pode ser demonstrado que se existe uma solução ótima viável (que minimiza z na região viável) então existe uma solução básica ótima viável, isto é aquelas onde no máximo m variáveis são não nulas, e sua interpretação geométrica são os vértices da região viável. Com isso, para resolver o problema basta encontrar o mínimo entre um número finito de soluções básicas viáveis. O Simplex é caracterizado pela busca entre soluções básicas viáveis sempre reduzindo ou mantendo o valor da função objetivo.

Durante a busca do método Simplex Revisado são resolvidos dois sistemas lineares por iteração, de forma $B^T\lambda = b$ e $Bd = A_q$. A matriz $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ é composta pelas colunas de A relativas as variáveis básicas, que são as m variáveis que podem ser não nulas, e o vetor A_q é a q-ésima coluna da matriz A. A solução desses sistemas corresponde a grande parte do custo computacional do método.

Na busca do Simplex é alterada uma variável básica por iteração, o que corresponde a atualizar B por uma única coluna. Para facilitar a solução dos sistemas com B, uma estratégia clássica é calcular B^{-1} somente na primeira iteração e então atualizar a inversa nas demais iterações.

Outra estratégia é calcular a decomposição $B = LU$ e então resolver $Bd = A_q$ pelos sistemas triangulares $Ly = A_q$ e $Ud = y$. A solução desses sistemas triangulares é feita por substituição direta, sendo assim muito mais eficiente que resolver o sistema original. A dificuldade dessa estratégia é o custo computacional para obter a decomposição LU.

Inicialmente temos $B = LU$, mas na iteração seguinte teremos B_+, que diferencia de B numa coluna p substituída por A_q. Essa relação entre B e B_+ pode ser escrita como

$$B_+ = B + (A_q - Be_p)e_p^T,$$

sendo e_p a p-ésima coluna da matriz identidade. Com isso podemos escrever para B_+ a relação

$$L^{-1}B_+ = R = U + (L^{-1}Aq - Ue_p)e_p^T.$$

A matriz R é triangular superior exceto pela coluna p.

Nesse trabalho foi estudada a atualização de LU proposta por Suhl e Suhl [3] na qual primeiramente é aplicada a permutação P^T deslocando a coluna p para o final da matriz e então são anulados os elementos da linha p, exceto o último, por meio de operações elementares com as linhas $p+1$ até m dadas pela matriz M. Após essas operações, basta aplicar P nas linhas da matriz para obter $\tilde{U} = PM^{-1}RP^T$, que é triangular superior. Todas as etapas da atualização estão ilustradas na Figura 1.

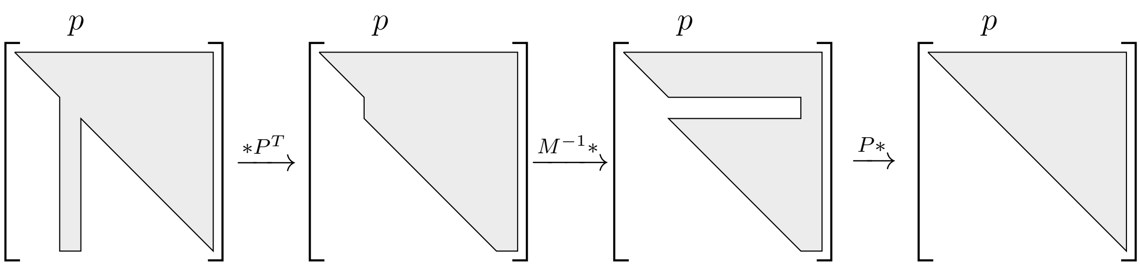

Figura 1: Etapas da atualização da matriz U.

Definindo a matriz $\tilde{L} = PMP^T$, após k atualizações o sistema original $LUd = A_q$ se torna

$$L_kU_kd = LP_1^T\tilde{L}_1 \cdots P_{k-1}^T\tilde{L}_{k-1}P_k^T\tilde{L}_kU_kd = A_q.$$

Dessa forma a matriz U é transformada em outra triangular superior $\tilde{U}$ usando matrizes de permutações P_i's e matrizes triangulares $\tilde{L}_i$'s, conservando a matriz L. Embora várias novas matrizes sejam criadas durante as atualizações o sistema pode ser resolvido de forma recursiva, e todas as matrizes são triangulares. Além disso, uma matriz $\tilde{L}_i$ possui no máximo $(m-1)$ elementos que precisam ser armazenados para sua aplicação, assim como cada permutação P pode ser armazenada em um vetor de m valores inteiros, resultando em baixo custo de memória.

A vantagem de atualizar a decomposição LU em vez de recalcular toda iteração é perdida após muitas atualizações sucessivas, pois as operações de atualização se acumulam. Assim, após certo número de atualizações torna-se mais vantajoso recalcular a decomposição LU e reiniciar as atualizações. Esse número depende muito da eficiência do método utilizado para obter LU e também do tamanho da matriz B.

O método Simplex foi implementado em três variantes: (i) com a atualização da matrix inversa, (ii) com decomposição LU em cada iteração, e (iii) com decomposição LU e atualização da decomposição. Comparamos as três variantes em relação ao tempo e capacidade de resolver problemas, para vários problemas conhecidos da literatura.

Referências:

[1] BERTSIMAS, D. e TSITSIKLIS, J. N. **Introduction to LINEAR OPTIMIZATION.** Athena Scientific, Belmont, Massachussets, 1997.

[2] MAROS, I. **Computational Techniques of the Simplex Method.** Springer Science+Business Media New York, 2003.

[3] Suhl, L. e Suhl, U. **A fast LU update for linear programming.** Annals of Operations Research, 1993.

[4] Netlib Repository. <http://www.netlib.org/lp/>