Teoria de Sturm-Liouville e Problemas de Valores de Contorno

João Antonio Francisconi Lubanco Thomé *
Bacharelado em Matemática - UFPR
jolubanco@gmail.com

Prof. Dr. Fernando de Ávila Silva (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
fernando.avila@ufpr.br

Palavras-chave: Equação do Calor, Equações Diferenciais Parciais, Teoria de Sturm-Liouville.

Resumo

No estudo das Equações Diferenciais Parciais, em particular na equação do calor, um método usual para se resolver tais equações é o chamado *método de separação de variáveis*. Este método consiste em supor que a solução $u(x,t)$, dependente da variável espacial x e temporal t, possa ser escrita como um produto $u(x,t) = X(x)T(t)$. Neste caso, podemos reduzir o estudo de uma equação diferencial parcial ao estudo de equações diferenciais ordinárias.

O objetivo deste trabalho é aplicar tal método para resolver o problema condução de calor não-homogêneo, descrito por

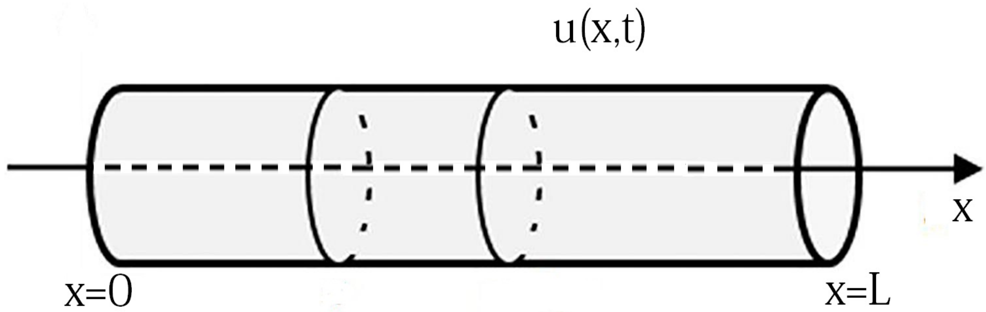
$$\begin{cases} r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x,t) \\ u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0 \quad u_x(1,t) + h_2 u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{1}$$

Para tanto, utilizamos a Teoria de Sturm-Liouville que permite obter a solução do problema (1) através das soluções de uma equação diferencial ordinária associada.

Motivação

Considere inicialmetne o problema de se determinar uma função $u = u(x,t)$ que descreva a condução de calor na barra de seção reta uniforme, como indicado na figura.

*Bolsista do Programa PET-Matemática.



Mostra-se (ver referência [1]) que a equação diferencial que descreve esse processo, junto com suas condições iniciais e de contorno, é dada por

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t \quad 0 \leq x \leq L \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad\quad 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0 \quad\ t \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

sendo α^2 uma constante conhecida como *difusidade térmica* que depende apenas do material da barra. Aplicando o *método de separação de variáveis*, isto é, supondo $u(x,t) = X(x)T(t)$, obtemos as equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda\alpha^2 T(t) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Assim, mostra-se que a solução formal (2) é a justaposição do produto das soluções de (3), isto é,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t} \sin(n\pi x/L),$$

sendo

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

O caso geral

Retornando ao problema de condução de calor não-homogêneo, descrito por (1), considere inicialmente o caso homogêneo $F(x,t) = 0$, ou seja,

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u. \tag{4}$$

Aplicando novamente o *método de separação de variáveis*, buscamos por soluções do tipo $u = u(x,t)$ obtendo a equação

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{[p(x)X'(x)T(t)]_x}{r(x)X(x)T(t)} - \frac{q(x)}{r(x)} = -\lambda, \tag{5}$$

sendo λ uma constante.

Agora, através das condições iniciais dadas em (1) chega-se ao *Problema de Valor de Contorno de Sturm-Liouville*

$$\begin{cases} -[p(x)X']' + q(x)X = \lambda r(x)X \\ X'(0) - h_1X(0) = 0 \\ X'(1) + h_2X(1) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

No processo para se obter as soluções do problema (6) considera-se o operador linear $L : C^2[0,1] \to C^2[0,1]$ da dado por

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y(x),$$

o qual para condições adequadas sobre p, q e r satisfaz as seguintes propriedades:

(i) é auto-adjunto;

(ii) todos os autovalores λ_j são reais e simples;

(iii) autofunções $\phi_j(x)$ associadas a autovalores distintos são ortogonais.

Por fim, mostra-se que a solução do problema (1) pode ser escrita como uma combinação de autofunções normalizadas do Problema de Sturm-Liouville, isto é,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x) \tag{7}$$

para uma escolha adequada dos parâmetros $b_n(t)$.

Referências

[1] BOYCE, W.E. & DIPRIMA R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8 ed. (1998). LT & C.

[2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo*. vol 1. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, c1986.

[3] FIGUEIREDO, D.G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA.