O Teorema da Função Inversa e Aplicações

Maria Verônica Bartmeyer *
Licenciatura em Matemática - UEPG
veronicabartmeyer@gmail.com

Prof. Marciano Pereira (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
marciano@uepg.br

Palavras-chave: Teorema da Função Inversa, Método das Características.

Resumo:

O Teorema da Função Inversa é um dos principais resultados da Análise. Entre suas aplicações, citamos o Teorema da Função Implícita, o Teorema Fundamental da Álgebra, a Forma Local de Submersões, a continuidade C^k da inversão de aplicações lineares e o Método das Características para resolução de EDPs de primeira ordem, o qual será tratado neste trabalho. A demonstração deste teorema é feita com a utilização dos métodos da Análise Matemática em $\mathbb{R}^n$ e, para sua extensão aos espaços vetoriais normados, utiliza-se também métodos da Análise Funcional.

O enunciado do Teorema da Função Inversa em $\mathbb{R}^n$ é como segue:

Teorema 1 (Teorema da Função Inversa) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ função de classe C^1 tal que $J_f(x_0) \neq 0$. Então existe $\delta_0 > 0$ tal que*

a) f *é injetora em* $U = B_{\delta_0}(x_0)$*;*

b) $V = f(U)$ *é aberto;*

c) $f^{-1} : V \to U$ *é de classe* C^1 *e* $[(f^{-1})'(f(x_0))] = [f'(x_0)]^{-1}$.

Para demonstrá-lo, são necessárias quatro etapas, as quais estão descritas abaixo:
Etapa 1: Para mostrar que existe $\delta_0 > 0$ tal que f é injetora em $B_{\delta_1}(x_0)$, demonstrar que $f(x+h) \neq f(x)$ se δ é suficientemente pequeno.
Etapa 2: Em seguida, mostrar que existe $\delta_2 > 0$ tal que $f(B_{\delta_2}(x_0))$ é aberto.
Etapa 3: Tomando $U = B_{\delta_2}(x_0)$ e $V = f(U)$, provar então que $f^{-1} : V \to U$ é diferenciável.
Etapa 4: Verificar por fim, que $f^{-1} : V \to U$ é de classe C^1.

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado PICME.

Como um exemplo de aplicação, o teorema da função inversa garante a validade da mudança de coordenadas no Método das Características. Ele consiste no ponto-chave desse método, pois com uma mudança apropriada de coordenadas, podemos trocar o problema de resolver uma equação diferencial parcial de primeira ordem pela resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias. O método das características é utilizado para a solução do seguinte

Problema: Seja γ uma curva de $\mathbb{R}^2$ parametrizada por $\gamma : I \to \Omega$, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$ e Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$. Sejam a, b, c: $\Omega \to \mathbb{R}$ funções dadas. Determinar uma função $\varphi(x, y)$ solução da equação

$$a(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = c(x,y),$$

cujos valores sobre a curva γ são prescritos, isto é, $\varphi(\gamma(\xi)) = \varphi_0(\xi)$ onde $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ é uma função dada.

Por outro lado, pode-se estender o teorema da Função Inversa a espaços de Banach de dimensão infinita. Para isso substituimos a condição "$J_f(x_0) \neq 0$" por "$f'(x_0)$ invertível", mas antes vejamos a definição de derivada num contexto mais geral.

Definição (Derivada) Para X, W espaços vetoriais normados e $U \subset X$ aberto, dizemos que uma aplicação $f : U \to W$ é diferenciável em $x_0 \in U$ se existe uma aplicação linear e contínua, denotada por $f'(x_0) : X \to W$ que será chamada a derivada de f em x_0, tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)||_W}{||x - x_0||_X} = 0.$$

Nesta definição, $f'(x_0)(x - x_0)$ denota o valor da aplicação linear $f'(x_0)$ aplicada no vetor $(x - x_0)$ partencente a X e assim $f'(x_0)(x - x_0)$ pertence a W.

Exemplo Consideremos $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Então, se x_0 pertence ao intervalo $(0, 1)$, sabemos do Cálculo 1 que $f'(x_0) = 3x_0^2$ é uma aplicação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Vamos verificar se a definição de derivada é satisteita para $x_0 = \frac{1}{2}$, donde $f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$, ou seja, a transformação linear e contínua $f'(x_0) = T$ em que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{3}{4}x$. De fato,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{||f(x) - f(\frac{1}{2}) - f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})||_W}{||x - \frac{1}{2}||_X} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{|x^3 - (\frac{1}{2})^3 - \frac{3}{4}(x - \frac{1}{2})|}{|x - \frac{1}{2}|} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{|x^3 - \frac{1}{8} - \frac{3x}{4} + \frac{3}{8}|}{|x - \frac{1}{2}|} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{|x^3 - \frac{3x}{4} + \frac{1}{4}|}{|x - \frac{1}{2}|} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{|(x - \frac{1}{2})(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2})|}{|x - \frac{1}{2}|} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{|x - \frac{1}{2}||x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}|}{|x - \frac{1}{2}|} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} |x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}| = 0.$$

Teorema 2 *(Extensão do Teorema da Função Inversa para Espaços de Banach) Seja W um espaço de Banach, $\Omega \subset W$ aberto e $f : \Omega \to W$ função de classe C^1 tal que $f'(x_0)$ é invertível. Então existe $U \subset \Omega$ uma vizinhança aberta de x_0 tal que*

a) $V = f(U)$ é aberto em W;

b) $f : U \to V$ *é difeomorfismo de classe* C^1*.*

Referências:

[1] ANDRADE, Doherty. **O Teorema da Função Inversa e da Função Implícita**. Publicação Eletrônica. Disponível em: http://www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos-pdf/inversa.pdf. Acesso em: 31 agosto 2018.

[2] CIPOLATTI, Rolci. **Cálculo Avançado I**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2002.

[3] DOMINGUES, Hygino H. **Espacos Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

[4] KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. Normed Spaces. Banach Spaces. 1ª ed. John Wiley Sons, 1978.

[5] LEWIS, David W. **Matrix Theory**. Singapore: World Cientific, 1991.

[6] LIMA, Elon L. **Análise no Espaço** $\mathbb{R}^n$. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

[7] MORIYA, Alex Issamu. **Os Teoremas de Funções Inversa e Implícita e suas Aplicações**. 2011. 60 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2011.

[8] NETO, Antônio C. M. **Tópicos de Matemática Elementar - Volume 3 Introdução à Análise**. **A Concavidade de uma Função** 2ª ed. SBM, 2013.

[9] TEZOTO, Leandro. **Sobre o Teorema da Função Inversa**. 37f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Geociências e Ciência Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.