O Operador Shift

Franciane Prestes Ferreira *
Licenciatura em Matemática - UEPG
francianepfr@gmail.com

Prof. Marciano Pereira (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
marciano@uepg.br

Palavras-chave: Operador Shift ou Deslocamento, operador linear limitado, espaços de Hilbert.

Resumo:

O Operador Shift (ou Deslocamento) é conhecido há muitos anos, em primeiro lugar, como um exemplo interessante, mas mais recentemente, como um alicerce fundamental na estrutura da teoria dos operadores lineares limitados em espaços de Hilbert. Além disso, desempenha um importante papel em Análise Funcional, por exemplo, como uma fonte de contraexemplos para algumas situações em espaços de dimensão infinita.

O objetivo do presente trabalho é realizar um estudo detalhado de tal operador, suas propriedades e compreender o importante papel que desempenha nesta teoria.

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial com produto interno sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}\,\mathrm{ou}\,\mathbb{R}$) que é completo com a norma induzida pelo produto interno.

Exemplo 1 *O espaço vetorial, de dimensão infinita,*

$$\ell^2 = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_i \in \mathbb{K} / \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\Big\},$$

é um exemplo de espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$*, no qual o produto interno é definido por*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\eta_j},$$

em que $x = (\xi_n)$ *e* $y = (\eta_n)$*, e assim, a norma induzida é dada por*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2\right)^{1\backslash 2}.$$

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica PIBIC/Fundação Araucária

Definição 1 *Um operador Shift (no caso, à direita) é uma transformação linear limitada T em um espaço de Hilbert complexo e separável H, para o qual existe uma base ortonormal $\{e_0, e_1, \dots\}$ de H tal que $T(e_n) = e_{n+1}, \forall n \geq 0$.*

Exemplo 2 *Quando $H = \ell^2$, o operador shift à direita é dado explicitamente por $S : \ell^2 \to \ell^2$*

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots). \tag{1}$$

A seguir destacamos algumas propriedades do operador Shift S em ℓ^2.

Proposição 1 *Seja S o operador Shift à direita em ℓ^2, então:*

1. *S é uma isometria, ou seja, $\|S(x)\| = \|x\|, \forall x \in \ell^2$;*
2. *S não é invertível e, portanto, não é unitário, ou seja, não verifica a relação $S^{-1} = S^*$, em que S^* denota o operador adjunto de S;*
3. *S não é normal, ou seja, S não comuta com seu adjunto.*
4. *o adjunto de S é o operador shift à esqueda, isto é, $(S)^* = S_e$, em que $S_e : \ell^2 \to \ell^2$ é o operador shift á esquerda, dado por $S_e(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3 \dots)$;*

Observação 1 *Sabe-se que todo operador linear num espaço vetorial complexo de dimensão finita $X \neq \{0\}$ possui autovalor, entretanto o mesmo não ocorre com S, ou seja S não possui autovalores. De fato, suponha que λ é um autovalor de S correspondente a um autovetor $0 \neq x = (x_n)$. Então $Sx = \lambda x$,*

$$(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots).$$

Se $\lambda = 0$, então o lado direito dessa equação é o vetor nulo, isto é, $0 = x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$, que é uma contradição, pois $x \neq 0$. Se $\lambda \neq 0$, então $\lambda x_1 = 0$, temos $x_1 = 0$, $\lambda x_2 = x_1 = 0$, temos $x_2 = 0$. Continuando esse processo, obteremos que $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$ que é contradição.

Aplicação

Agora apresentamos uma breve formalização matemática do operador shift binário na informática, a qual será ilustrada com um pequeno exemplo.

Dado um número inteiro x na base dois, temos $x = x_n \dots x_2 x_1 x_0$, sendo os $x_i \in \{0, 1\}$, o qual podemos fazer corresponder à seguinte sequência $x = (x_i) = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Assim, podemos definir o seguinte espaço

$$\ell^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}_2) = \Big\{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; x_i \in \mathbb{Z}_2 / \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\Big\}.$$

Consideremos o operador shift à direita, definido em (1), em $\ell^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}_2)$ que aqui denotamos por S_d. Por exemplo, dado o número $x = 1010101$ na base dois, temos a sequência $x = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}_2)$. Aplicando S_d em x, temos $S_d(x) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots)$, que corresponde ao número 10101010. Repare que o operador shift à direita S_d corresponde a multiplicação por 2 na base dois.

Analogamente, o operador shift à esquerda, definido na Propriedade 4, em $\ell^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}_2)$, pode ser interpretado como a divisão por 2 na base dois. Por exemplo, dado o número $x = 1010101$ na base dois, temos a sequência $x = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots)$ para a qual tem-se $S_e(x) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots)$, que corresponde ao número 101010.

Referências:

KREYSZIG, E. **Introduction Functional Analysis with Applications**. Nova Iorque: John Wiley Sons, 1989.

DE OLIVEIRA, C. **Introdução à Análise Funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

RYNNE, P. Bryan; YOUNGSON, Martin A.: **Linear Funcional Analysis**. Londres: Springer-Verlag, 2008.

BACHMAN, G; NARICI, L. **Functional Analysis**. Nova Iorque: Dover, 2000.

ZEIDLER, E. **Applied Functional Analysis – Applications to Mathematical Physics**. Nova Iorque: Springer, 1999.

FILLMORE, P. A. The Shift Operator. **Amer. Math**, Monthly, v. 81, n. 7, p. 717-723, 1974.