Teorema de Bézout para curvas algébricas

Luiz Henrique Lara dos Santos *

Bacharelado em Matemática - UFPR

luiz.lara@ufpr.com

Prof. Edson Ribeiro Alvares (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

rolo@ufpr.br

Palavras-chave: Curvas Algébricas, Teoria de Interseção, Teorema de Bézout.

Resumo: Em $\mathbb{R}^2$, polinômios do tipo $aX + bY$ (de grau 1) definem retas, assim como polinômios do tipo $aX^2 + bY^2 - c$ (de grau 2) definem circunferências ou elipses enquanto outras equações de grau 2 definem parábolas, hipérboles, etc. Todos esses são exemplos de curvas algébricas. Mais precisamente, uma curva algébrica sobre um corpo k, dada por um polinômio $F \in k[X, Y]$ é o conjunto

$$V(F) = \{(x, y) \in k^2 \mid F(x, y) = 0\}.$$

Estudando curvas algébricas sobre $\mathbb{R}$, notamos que uma reta e uma circunferência possuem no máximo dois pontos de interseção, uma circunferência e uma elipse possuem no máximo quatro pontos de interseção, e duas retas diferentes possuem no máximo um ponto apenas de interseção. É possível procurar uma relação entre o número de pontos de interseção de duas curvas com seus graus (em todos os exemplos o número de pontos era menor ou igual ao produto dos graus). Em geral obtemos uma desigualdade comparando a cardinalidade da interseção com o produto dos graus das curvas. Para uma igualdade, porém, em geral temos algumas dificuldades, como:

- em $\mathbb{R}^2$ nem sempre duas curvas se interceptam;
- alguns pares de curvas podem ter infinitos pontos de interseção. Como por exemplo as curvas definidas pelas equações $X = 0$ e $X(X - Y) = 0$ possuem toda a reta $X = 0$ em comum.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma linguagem adequada para lidar com os problemas acima, enunciando as hipóteses necessárias para que valha a igualdade. Sob tais hipóteses, apresentamos o teorema de Bézout, que garante que a cardinalidade da interseção de duas curvas algébricas é sempre igual ao produto dos graus das curvas, à menos de multiplicidades.

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica - PIBIC

Referências

[1] PERRIN, D. **Géométrie algébrique**: Une introduction. Paris: Université-Paris 11, 2001

[2] HARTSHORNE R. **Algebraic Geometry.** Berkeley: University of California, 1997