Introdução à Teoria de Grafos e Aplicações

Lucas Matheus Sandeski *
Licenciatura em matemática - UEPG
lucassan1509@gmail.com

Prof. Marciano Pereira (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística -UEPG
marciano@uepg.br

Palavras-chave: Otimização, Menor caminho, Grafos.

Resumo:

Muitas situações podem ser convenientemente descritas através de diagramas que consistem de um conjunto de pontos, juntamente com linhas que ligam alguns desses pares de pontos. Por exemplo, os pontos podem representar pessoas, as linhas ligam pares de amigos; os pontos podem representar centros de comunicações, as linhas ligações entre os centros. A abstração matemática de situações desse tipo é feita via o conceito de grafo.

A teoria de grafos se originou a partir do problema das Pontes de Königsberg, resolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler, na primeira metade do século XVIII. Este foi o primeiro a escrever um artigo relacionado a grafos.

Atualmente a teoria de grafos tem diversas aplicações nas mais variadas áreas, como, por exemplo, na Química, na Informática, na Modelagem e na Otimização.

O presente trabalho teve por objetivo realizar um estudo detalhado da teoria de grafos, abordando seus principais conceitos, propriedades e resultados, bem como suas diversas aplicações, além de apresentar alguns algoritmos. Finalizamos o trabalho com um estudo introdutório de algo bastante recente em Teoria de Grafos, a Teoria Espectral de Grafos.

Um grafo é um conjunto $G = (V, E)$, em que V é um conjunto finito não-vazio de elementos e E é um conjunto de pares de elementos de V. Os elementos de V são chamados de vértices, e os elementos de E são conhecidos como arestas.

Os vértices v e w são ditos adjacentes se $(v, w) \in E$. E um caminho é definido na teoria dos grafos como uma lista de vértices adjacentes.

Em determinados grafos associamos às arestas um número não negativo $P(e)$, chamado de peso da aresta e.

A matriz de adjacência do grafo G com vértices $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$ é a matriz $A_{n\times m} = (a_{ij})$, em que

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME).

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ é adjacente a } v_j \text{ em G} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Entre as diversas aplicações ou problemas estudados destacamos como mais notáveis os seguintes: as Pontes de Königsberg, conexão de 3 serviços a 3 casas, a coloração de mapas, o Caixeiro Viajante, a menor distância (peso) entre dois vértices, a conexão de todos os vértices com um menor peso, a planaridade de grafos. O processo de resolução de todos esses problemas pode ser adaptado para resolver problemas similares.

Problemas em que se quer conectar todos os vértices, com um peso mínimo, sendo que o peso pode ser tempo, custo, quantidade de material, distância, etc, podem ser resolvidos pelos algoritmos de Kruskal ou de Prim, de forma ótima. Entretanto, problemas de menor caminho, que consistem em achar o caminho de peso mínimo entre dois vértices, podem ser resolvidos com o auxílio do algoritmo de Dykstra, de forma ótima. Um exemplo deste último problema é como segue: Suponha que um caminhoneiro deseja fazer uma entrega, na cidade de Cascavel, saindo de Curitiba, de modo que leve o menor tempo possível. Porém, as estradas possuem limites de velocidade, inclinação, qualidade do asfalto e quantidade de curvas diferentes, de modo que a distância não é o único fator a ser considerado. O tempo estimado em minutos de viajem entre as cidades está simplificado pelo grafo abaixo.

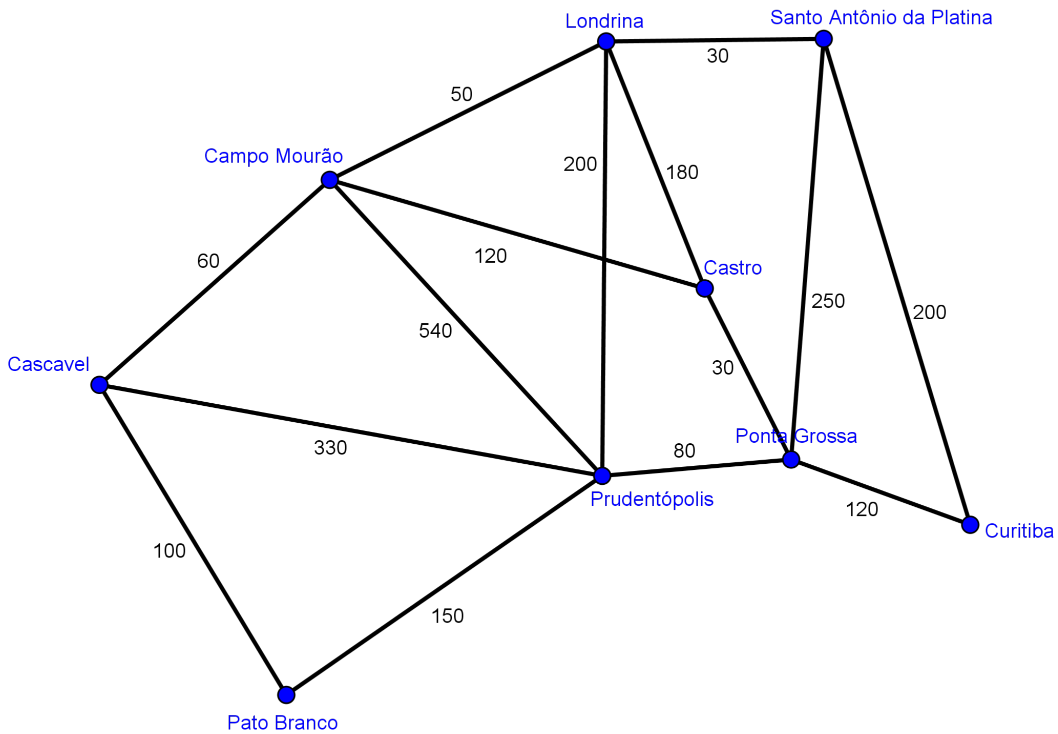

Figura 1: Grafo que simplifica o tempo para percorrer as rotas possíveis do exemplo.

Este problema pode ser resolvido com o algoritmo de Dijkstra, porém não o resolverei aqui, devido a falta de espaço.

Finalizando, a Teoria Espectral de Grafos vem sendo estudada com o intuito de descrever propriedades estruturais do grafo, a partir de seu espectro. Essa área surgiu pelas necessidades da quimica, e tem tido muito interesse ultimamente, evidenciado pela grande quantidade de publicações na área nos últimos anos.

O polinômio característico da matriz de adjacência $A(G)$, ou seja, *det*$(\lambda I - A(G))$, é denominado polinômio característico de G; λ é dito um autovalor do grafo G quando λ é uma raiz do polinômio característico de G. Se $A(G)$ possui autovalores distintos $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_s$, tal que a multiplicidade de λ_i seja dada por $m(\lambda_i)$. O espectro do grafo G, denotado $spect(G)$, é definido como a matriz $2 \times s$, onde a primeira linha é constituída pelos autovalores distintos de $A(G)$ dispostos em ordem decrescente e a segunda, pelas suas respectivas multiplicidades algébricas. Ou seja, escrevemos

$$spect(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_s) \end{bmatrix}.$$

O maior autovalor de G é denominado índice de G.

Nos estudos realizados calculamos o espectro de um grafo completo, e de um ciclo. E por fim, a energia de um grafo é definida como a soma dos valores absolutos dos autovalores do grafo. Então se $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ são os autovalores do grafo G de ordem n, a energia $\varepsilon(G)$ de G é dada por:

$$\epsilon(G) = \sum_{i=1}^{s} |\lambda_i|.$$

Toda molécula pode ser representada por um grafo, tal que todo átomo representa um vértice, e se dois átomos da molécula estão ligados, então há uma aresta conectando os vértices correspondentes a esses átomos. Sendo o conceito da energia de um grafo, decorrente desse modo de ver átomos. De forma que a energia de um grafo possui diversas aplicações em química.

Referências:

[1] ABREU, N.; DEL-VECCHIO, R.; TREVISAN, V.; VINAGRE, C. **Teoria Espectral de Grafos – Uma Introdução.** 3º Colóquio de Matemática da Região Sul. Florianópolis, 2014.

[2] BALAKRISHNAN, R.; RANGANATHAN, K. **A textbook of Graph Theory**. Nova Iorque: Springer-Universitex, 2012.

[3] JURKIEWICZ, S. **Grafos - Uma Introdução**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[4] SCHEINERMAN, E. R. **Matemática Discreta - Uma introdução**. Rio de Janeiro: Cengage Learning, 2011.