
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor: Prof. Dr. Cleber de Medeira

Estudantes: Ana Cleo Matias Vieira da Motta
Brenda Dal Puppo Monteiro
Carlos Alberto Lopes Cle Ventura da Silva
Gabriel Luiz de Freitas
Gabrieli Kmiecik
João Gabriel Chiorato
Kaiky Yuji Ishiy
Kevyan Uehara Moraes
Laura Carolina Aymoré Ferrandin
Leonardo Cortez do Nascimento
Lucca Gonçalves de Carvalho
Mariana da Silva Freitas
Natalia Chicora
Otavio Augusto Salomão Recacho
Samuel Adam Trindade de Souza
Thais Spannenberg Machado dos Passos
Thiago Batista dos Santos Martins
Yanko Szuszko Soares

Site: www.petmatematica.ufpr.br

Facebook: www.facebook.com/PetMatUFPR

Instagram: instagram.com/petmatematicaufpr/

E-mail: petmatematica@ufpr.br

Telefone: (41) 3361-3672

Data do Evento: 10, 11 e 12 de julho de 2023

Curitiba, julho de 2023.

Apresentação

Prezado estudante; seja bem-vindo!

É uma grande satisfação para nós do PET Matemática da UFPR sua participação nessa 18^a edição do *Brincando de Matemático*. Esse evento de extensão promovido por nosso grupo tem como principal objetivo apresentar temas matemáticos interessantes de uma maneira lúdica e acessível, porém sem perder a formalidade.

Nessa edição do Brincando de Matemático abordaremos algumas características bem legais dos fractais, que são figuras que além de uma grande beleza visual envolvem propriedades matemáticas bem curiosas. Serão três dias de evento em que desvendaremos alguns mistérios sobre essas figuras tão peculiares e ousaremos pensar sobre a estranheza dessas coisas no infinito.

Gostaria de agradecer cada um dos membros do grupo do PET Matemática pela dedicação que dispensaram para a realização desse evento. Agradeço também a Administração da UFPR por apoiar e fomentar essa iniciativa.

*Prof. Cleber de Medeira
Tutor do PET-Matemática
Departamento de Matemática - UFPR*

Sumário

Sumário	5
1 Sequências	7
1.1 O que é uma sequência?	7
1.2 Progressão aritmética	10
1.2.1 Fórmula Geral de uma P.A.	11
1.2.2 Fórmula da soma de termos de uma P.A.	13
1.3 Progressão geométrica	16
1.3.1 Fórmula Geral de uma P.G.	17
1.3.2 Fórmula da soma de termos de uma P.G.	18
1.4 Sequência de Fibonacci	19
1.5 Retângulo de ouro e o número de Euler	22
1.5.1 Convergência de sequências	22
1.5.2 O retângulo de ouro	25
1.5.3 O número de Euler	30
1.6 Exercícios	32
2 Fractais	35
2.1 O que é um fractal?	35
2.2 O Triângulo de Sierpinski	38
2.3 Fractais são sequências?	41
2.4 Área e perímetro de fractais	42
2.5 Exercícios	48

3	Indo além	53
3.1	O Jogo do Caos	53
3.2	Fractais de Cantor	56
3.2.1	Conjunto de Cantor	56
3.2.2	Poeira de Cantor	57
3.3	Fractais de Koch	60
3.3.1	Curva de Koch	60
3.3.2	Floco de Neve de Koch	61
3.4	Conjuntos de Mandelbrot e Julia	63
3.4.1	O plano cartesiano	63
3.4.2	Uma breve história dos números complexos	64
3.4.3	Um passeio pelos números complexos	65
3.4.4	O plano de Argand-Gauss	67
3.4.5	Conjunto de Mandelbrot	70
3.4.6	Conjunto de Julia	73
3.5	Exercícios	74
	Referências Bibliográficas	77

Capítulo 1

Sequências

1.1 O que é uma sequência?

Muitos problemas matemáticos envolvem estudar padrões repetitivos seguidos por objetos matemáticos, como números, figuras, etc. Esses padrões dão origem à noção intuitiva que temos de sequências: listas (geralmente de números) que seguem alguma regra, isto é, seus termos são dados por um padrão.

Um exemplo simples de uma situação na qual vemos a aplicação dessa ideia de sequência é o problema de descobrir o próximo termo da lista $(2, 4, 6, 8, \dots)$. Para resolvê-lo, note que os números da lista que já conhecemos parecem seguir uma regra simples: para descobrir um determinado termo, devemos somar o termo anterior com 2 (perceba que $4 = 2 + 2$, $6 = 4 + 2$, $8 = 6 + 2$, e assim por diante). Assim, podemos resolver o problema intuitivamente considerando que o próximo termo também seguirá essa regra simples e será, então, igual a $8 + 2 = 10$.

Como o conceito de sequência aparece de forma recorrente no estudo da matemática, vamos estudá-lo de maneira

sistemática. Para isso, vamos considerar a seguinte definição formal:

Definição 1.1.1. Uma sequência numérica é uma sucessão ordenada de números reais estabelecida por uma regra geral. Utilizaremos a notação (a_1, a_2, a_3, \dots) , ou simplesmente (a_n) , para indicar uma sequência que tem como primeiro termo o número a_1 , segundo termo a_2 , terceiro termo a_3 , e assim por diante, e diremos que a_n é o termo geral da sequência. Os índices n que aparecem nos termos a_n são números naturais, ou seja, fazem parte do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Exemplo 1.1.2. A sucessão $(2, 4, 6, 8, \dots)$ vista inicialmente é uma sequência cujo termo geral é $a_n = 2n$.

Exemplo 1.1.3. A sucessão $(1, 4, 9, 16, \dots)$ define uma sequência cujo termo geral é dado por $a_n = n^2$.

Existem sequências cujos termos poderão ser determinados por relações que dependem não somente de suas posições, mas também de termos anteriores. A sequência do Exemplo 1.1.2, apesar de ser dada por uma fórmula geral, também pode ser determinada notando que, para um certo termo da sequência, podemos somar o termo anterior com 2, ou seja, $a_{n+2} = a_n + 2$.

Por conta dessas relações recorrentes, essas sequências são chamadas de *sequências recursivas*.

Exemplo 1.1.4. A sequência $(6, 13, 20, 27, \dots)$ é uma sequência recursiva. Note que cada termo seu é dado pela soma do termo anterior com 7, pois $6 + 7 = 13$, $13 + 7 = 20$, $20 + 7 = 27$, e assim por diante. Logo, de forma geral, os termos dessa sequência são obtidos recursivamente pela fórmula

$$a_{n+1} = a_n + 7,$$

sendo $a_1 = 6$.

A regra que define as sequências dos dois exemplos anteriores é a de que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre constante (no Exemplo 1.1.4, essa constante é 7). Chamamos as sequências que seguem esse padrão de *progressões aritméticas*, e as estudaremos com mais detalhes na próxima seção.

Por outro lado, muitas sequências com as quais lidaremos são dadas por fórmulas gerais que dependerão somente da posição dos termos. Nestes casos, será possível determinar qual número ocupa uma determinada posição de maneira simples e direta, pois ele será estabelecido por uma relação numérica trivial. Diremos que essas são *sequências não recursivas* por seus termos não dependerem de termos anteriores.

Exemplo 1.1.5. A sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$ é dada pela relação não recursiva $a_n = \frac{1}{n}$. Neste caso, podemos calcular qualquer termo a_n mesmo se não soubermos seus termos anteriores. Se, por exemplo, quiséssemos saber qual número ocupa a vigésima posição da sequência, poderíamos obtê-lo apenas pela relação $a_{20} = \frac{1}{20}$, mesmo que não tenhamos calculado os números que ocupam as posições que vêm antes da vigésima.

É importante salientar que há sequências não numéricas, isto é, sequências cujos termos não são números. Nos capítulos futuros estudaremos sequências geométricas, que serão dadas por figuras que apresentam alguma lei de formação e, por isso, diremos que elas formam uma sequência.

Agora, vamos estudar dois tipos especiais de sequências recursivas: progressões aritméticas e progressões geométricas.

1.2 Progressão aritmética

Uma progressão aritmética é uma sequência tal que a diferença entre dois termos consecutivos é uma constante que chamaremos de *razão* e denominaremos por r . Em outras palavras, podemos calcular um termo de determinada posição de uma progressão aritmética somando o termo anterior com a razão da progressão. Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 1.2.1. Uma progressão aritmética é uma sequência, de termo geral a_n , para a qual existe um número real r , denominado razão, tal que

$$a_{n+1} = a_n + r,$$

sempre que $n \geq 1$. Escreveremos apenas P.A. para abreviar a expressão Progressão Aritmética.

Note que uma tal sequência representa, de fato, um exemplo de sequência recursiva, pois a relação que determina um termo a_{n+1} depende do termo anterior da progressão, a_n .

Exemplo 1.2.2. A sequência $(2, 6, 10, 14, \dots)$ é uma P.A., pois a diferença entre dois termos consecutivos é sempre 4 (note que $a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4$, $a_3 - a_2 = 10 - 6 = 4$, $a_4 - a_3 = 14 - 10 = 4$, etc.). Perceba que podemos descobrir qual será o próximo termo da sequência somando 4 ao termo anterior. É possível, assim, obter $a_5 = a_4 + 4 = 14 + 4 = 18$.

Exemplo 1.2.3. A sequência $(2, 3, 5, 7, \dots)$ de números primos não é uma P.A., pois $a_2 - a_1 = 3 - 2 = 1$ e $a_3 - a_2 = 5 - 3 = 2$, ou seja, a diferença entre termos consecutivos dessa sequência não é constantemente igual.

1.2.1 Fórmula Geral de uma P.A.

Como vimos, podemos obter termos de uma P.A. a partir de uma relação recorrente que existe entre seus termos consecutivos. No entanto, podemos nos deparar, na prática, com problemas que exigem que calculemos posições grandes demais para fazê-lo apenas utilizando uma relação assim, pois, por depender de termos anteriores, teríamos que utilizá-la repetidamente muitas vezes, o que não é prático. Assim, podemos nos perguntar se existe alguma fórmula ou padrão útil para que possamos resolver esses problemas de forma mais direta, e a resposta é: Sim! Agora, vamos tentar encontrar o padrão de uma P.A. genérica.

Consideremos uma P.A. que tem como primeiro termo um número a_1 e como razão um número real r . Por definição, temos as seguintes relações:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r$$

$$\vdots$$

Note que os termos dessa sequência seguem um padrão repetitivo e são dados por uma relação simples que depende unicamente do primeiro termo e da razão da sequência. Então, matematicamente, temos a fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r.$$

Dessa forma, podemos determinar os elementos de todas as posições de uma P.A. apenas conhecendo seu primeiro termo e sua razão.

Exemplo 1.2.4. Consideremos a P.A. $(4, 7, 10, 13, \dots)$ e calculemos seu centésimo termo. Inicialmente, note que, de fato, tal sequência é uma P.A., pois a diferença entre termos consecutivos dela é constantemente igual a 3, sua razão. Assim, temos

$$a_{100} = a_1 + (100 - 1)r = 4 + 99 \cdot 3 = 301.$$

Perceba que a relação explícita presente na fórmula que vimos nos dá a_n , mas também podemos utilizá-la para descobrir outras informações a respeito de uma determinada P.A.

Muitos problemas que veremos a seguir envolverão calcular termos posteriores de uma sequência a partir de termos iniciais. Mas e se quiséssemos, por exemplo, conhecer qual é a posição de um termo já dado? A relação citada nos permite realizar tal tarefa quando notamos que podemos interpretá-la como uma equação que depende de a_n , a_1 e r e a utilizamos para descobrir n , quando tais números forem fornecidos.

Exemplo 1.2.5. Considere uma P.A. que se inicia em 5 e tem razão 3. Suponha que nos foi fornecida a informação de que o número 92 ocupa uma certa posição n , isto é, $a_n = 92$, e que, a partir disto, queiramos saber qual é o número n . Vamos calculá-lo.

Com efeito, pela fórmula do termo geral de uma P.A., temos

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r.$$

Substituindo as informações que já conhecemos, temos

$$a_n = 92 = 5 + 3(n - 1).$$

Resolvendo a equação, encontramos $n = 30$.

Similarmente ao que acabamos de ver, podemos nos deparar com problemas nos quais nos são fornecidos outros dados sobre uma P.A. e onde tenhamos que, a partir deles, encontrar uma outra informação. De modo geral, podemos perceber que a fórmula que encontramos depende de 4 termos (a_n , a_1 , n e r) e que, portanto, podemos descobrir um deles desde que os outros 3 tenham sido fornecidos.

Exemplo 1.2.6. Sabendo que o primeiro e o oitavo termos de uma P.A. são, respectivamente, 1 e 43, queremos saber qual é sua razão.

Neste caso, sabemos que $n = 8$, $a_1 = 1$, e $a_8 = 43$. Novamente, pela fórmula do termo geral de uma P.A., temos

$$\begin{aligned} 43 &= a_8 = a_1 + (n - 1) \cdot r = 1 + 7r \\ 1 + 7r &= 43. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação acima temos $r = 6$.

1.2.2 Fórmula da soma de termos de uma P.A.

Na década de 1780, um professor de uma província alemã deu a seus alunos a tarefa de somar os 100 primeiros números inteiros, com o objetivo de mantê-los ocupados por bastante tempo. Entretanto, fugindo das expectativas do professor, uma das crianças entregou sua resposta imediatamente: $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$. O menino, Carl Friedrich Gauss, mais tarde foi marcado como um dos maiores matemáticos de todos os tempos, e esse episódio foi uma primeira demonstração de sua genialidade.

Diferentemente das outras crianças, que abordaram o problema somando os primeiros 100 inteiros termo a termo, Gauss percebeu um truque que o permitia obter a soma de forma rápida e prática: bastava reagrupar os termos da soma $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$, de forma a somar o primeiro com o último, o segundo com o penúltimo, o terceiro com o antepenúltimo, e assim por diante, formando 50 parcelas de somas ($1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, \dots, 50 + 51$). Gauss notou que todas essas somas resultavam em 101, pois $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, etc. Como há 50 dessas parcelas, e todas são iguais a 101, ele concluiu que a soma deve ser igual a $50 \cdot 101 = 5050$.

Assim como pode não ser tão viável descobrir termos de uma P.A. apenas por uma relação recursiva repetitiva, calcular a soma de seus primeiros termos, até um determinado a_n , somando termo a termo pode ser uma tarefa tediosa e longa, como visto na história de Gauss (no caso da história, a progressão aritmética envolvida tinha como primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = 1$). Por isso, motivados pela intuição de Gauss, vamos deduzir uma fórmula geral prática para resolver estas tarefas.

Sejam (a_n) uma P.A. e S a soma dos n primeiros termos de (a_n) , ou seja,

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} a_n + a_1 &= a_1 + (n - 1) \cdot r + a_1 = 2a_1 + (n - 1) \cdot r \\ a_{n-1} + a_2 &= a_1 + (n - 2) \cdot r + a_1 + r = 2a_1 + (n - 1) \cdot r \\ a_{n-2} + a_3 &= a_1 + (n - 3) \cdot r + a_1 + 2r = 2a_1 + (n - 1) \cdot r \\ &\vdots \end{aligned}$$

De forma geral, $a_n + a_1 = a_{n-1} + a_2 = a_{n-2} + a_3 = \dots = a_1 + a_n$. Ademais, podemos escrever

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1,$$

pois a ordem das parcelas não altera a soma. Somando termo a termo nas expressões acima, temos

$$S + S = 2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_n + a_1).$$

Como $a_n + a_1 = a_{n-1} + a_2 = a_{n-2} + a_3 = \dots = a_1 + a_n$, temos

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n),$$

pois a expressão $a_1 + a_n$ se repete n vezes na igualdade, e portanto

$$S = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}.$$

Exemplo 1.2.7. Considere a sequência de números pares $(2, 4, 6, 8, \dots)$. Vamos determinar a soma dos n primeiros termos dessa P.A. Sabemos que $a_1 = 2$ e $r = 2$, dessa forma

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)r \\ &= 2 + 2(n - 1) \\ &= 2n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\ &= \frac{n(2 + 2n)}{2} \\ &= \frac{2n(1 + n)}{2} \\ &= n(n + 1). \end{aligned}$$

Ou seja, para encontrar a soma dos n primeiros números pares basta usar a fórmula $S = n(n + 1)$. Em particular, a soma dos 50 primeiros números pares é $S = 50 \cdot 51 = 2550$.

Exemplo 1.2.8. Consideremos a P.A. $(18, 22, 26, \dots)$ e calculemos a soma de seus 14 primeiros termos.

Temos $n = 14$, $a_1 = 18$ e $r = a_2 - a_1 = 22 - 18 = 4$. para calcular a soma S a partir da fórmula que obtemos, precisamos conhecer a_{14} . Utilizando, novamente, a fórmula posicional geral para termos de uma P.A., temos $a_{14} = a_1 + 13r = 18 + 13 \cdot 4 = 70$. Assim,

$$S = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = \frac{14 \cdot (18 + 70)}{2} = 616.$$

1.3 Progressão geométrica

Um outro exemplo frequente de sequência recursiva são as *progressões geométricas*. Assim como nas progressões aritméticas, um termo de uma progressão geométrica pode ser obtido a partir do termo imediatamente anterior. Porém, nesse caso, a expressão que relaciona termos em uma progressão geométrica diz que o quociente entre dois termos consecutivos é uma constante, que também chamaremos de razão e, nesse caso, denotaremos por q . Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 1.3.1. Uma progressão geométrica é uma sequência de termo geral a_n para a qual existe um número q , chamado de razão tal que

$$a_{n+1} = q \cdot a_n,$$

sempre que $n \geq 1$. Usaremos a abreviação P.G. para a expressão Progressão Geométrica.

Exemplo 1.3.2. A sequência $(2, 6, 18, 54, \dots)$ é uma progressão geométrica de razão 3, pois a divisão entre dois termos consecutivos é constante:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{54}{18} = 3$$

\vdots

Exemplo 1.3.3. A sequência $(4, 6, 8, 10, \dots)$ não é uma progressão geométrica, pois $\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{4} \neq \frac{8}{6} = \frac{a_3}{a_2}$, ou seja, a razão entre termos consecutivos dela não é igual a uma constante.

1.3.1 Fórmula Geral de uma P.G.

Assim como as progressões aritméticas, as progressões geométricas também podem ser obtidas de forma posicional a partir de um padrão, apesar de serem sequências recursivas. Vamos agora explorar esse padrão.

Seja (a_n) uma progressão geométrica de razão q . Por definição, temos

$$a_2 = q \cdot a_1$$

$$a_3 = q \cdot a_2 = q \cdot q \cdot a_1 = q^2 \cdot a_1$$

$$a_4 = q \cdot a_3 = q \cdot q^2 \cdot a_1 = q^3 \cdot a_1$$

\vdots

Semelhantemente ao que observamos nas progressões aritméticas, podemos perceber que os termos de uma progressão

geométrica também seguem um padrão repetitivo e podemos calculá-los apenas conhecendo o termo inicial a_1 e a razão q . Isto se dá pela seguinte fórmula:

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1,$$

para todo $n \geq 1$. Com tal fórmula, podemos calcular termos de posições arbitrariamente grandes de uma P.G. sem que precisemos realizar muitas operações.

Exemplo 1.3.4. Considerando a P.G. $(3, 6, 12, 24, \dots)$, calculemos seu décimo termo.

Note que $a_1 = 3$ e $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$. Assim,

$$\begin{aligned} a_{10} &= q^9 \cdot a_1 \\ &= 2^9 \cdot 3 \\ &= 1536. \end{aligned}$$

1.3.2 Fórmula da soma de termos de uma P.G.

Muitos problemas que encontramos em matemática envolvem somar os primeiros termos de uma P.G. De forma parecida com o que fizemos ao estudar as progressões geométricas, encontraremos a seguir uma fórmula que nos dará tal soma, em prol da praticidade.

Sejam (a_n) uma progressão geométrica de razão q e S a soma de seus n primeiros termos, isto é,

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Utilizando a fórmula do termo geral de uma P.G., temos

$$\begin{aligned} S &= a_1 + q \cdot a_1 + q^2 \cdot a_1 + \cdots + q^{n-1} \cdot a_1 \\ &= a_1 \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}). \end{aligned}$$

Vamos encontrar agora a soma $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$ separadamente. Com efeito, seja $P = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$. Temos, então, $qP = q + q^2 + \cdots + q^n$. Logo, $P - qP = 1 - q^n$. Assim, $P(1 - q) = 1 - q^n$, donde

$$P = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

para $q \neq 1$. Como $S = a_1 \cdot P$, temos

$$S = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

No caso $q = 1$, temos $a_n = q^{n-1}a_1 = a_1$ para todo n , ou seja, a sequência tem todos os termos iguais e logo $S = na_1$.

Exemplo 1.3.5. Vamos calcular a soma dos 10 primeiros termos de $(1, 2, 4, 8, \dots)$.

Com efeito, note que a sequência é uma P.G., pois o quociente entre dois termos consecutivos dela é constantemente igual à sua razão, 2. Temos então $a_1 = 1$ e $q = 2$. Assim,

$$\begin{aligned} S &= a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ &= 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \\ &= 2^{10} - 1 \\ &= 1023. \end{aligned}$$

1.4 Sequência de Fibonacci

Vamos estudar agora uma sequência dada por uma relação recorrente um pouco mais complexa do que as relações das progressões aritméticas e geométricas.

No livro *Liber Abbaci*, o matemático italiano Leonardo de Pisa (ou Leonardo Fibonacci) propôs uma sequência muito famosa na matemática: a sequência de Fibonacci. Ele a estudou após ter considerado o seguinte problema:

Problema 1.4.1. Um proprietário adquire um lugar fechado, inicialmente vazio. Um mês depois, ele coloca um par de coelhos recém-nascidos no lugar. Levando em consideração que um coelho fica fértil um mês após seu nascimento e que todo par de coelhos, quando fértil, reproduzirá um novo par a cada mês, haverá quantos pares de coelhos no cerco após um ano?

Podemos resolver o problema observando um padrão na maneira como a população de coelhos cresce. Como dito, no primeiro mês, o cenário se inicia com apenas um par de coelhos. Depois de um mês, esse par se torna fértil. No terceiro mês, esse par se reproduz, gerando um novo par, ou seja, teremos 2 pares. No quarto mês, um dos pares ainda não será fértil, de forma que apenas o outro par reproduzirá um novo e teremos, assim, 3 pares. No quinto mês, teremos apenas dois pares férteis que reproduzirão pois, novamente, um par terá apenas um mês de idade, então a nova quantidade de duplas será $3 + 2 = 5$. No sexto mês, apenas 3 reproduzirão e, logo, teremos $5 + 3 = 8$ pares. Continuando com este raciocínio, Leonardo Fibonacci percebeu que a quantidade de pares segue um padrão curioso: iniciamos com 1 e, após a passagem de um mês, vamos para 2 pares; um mês depois, a nova quantidade será dada por $1 + 2 = 3$; mais um mês, e a quantidade será $2 + 3 = 5$; mais um mês e teremos $3 + 5 = 8$ pares. Em suma, a quantidade de coelhos é dada pela sequência $(1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ onde, para descobrir o número que ocupa uma determinada posição, calculamos a

soma dos dois últimos termos. Como queremos saber quantos pares haverá após 1 ano, isto é, 12 meses, repetimos o que fizemos até o décimo segundo mês. Veja na Tabela 1.1.

Meses	Pares
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144

Tabela 1.1: Crescimento dos pares em um ano

Como citado, a ponderação a respeito do problema anterior levou à proposta da sequência de Fibonacci que, similarmente à sequência que utilizamos para resolver o problema anterior, tem como seus dois termos iniciais o número 1 e tem seus próximos termos dados pela soma dos dois termos imediatamente anteriores. Assim, a sequência de Fibonacci é definida por $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$. Note que seus termos também aparecem na sequência anterior. A única diferença entre elas é que a sequência que chamamos de sequência de Fibonacci inicia com 1 em suas duas posições iniciais. Matematicamente, temos a seguinte definição:

Definição 1.4.2. A sequência de Fibonacci (F_n) é dada por

$F_1 = F_2 = 1$ e, dado $n \geq 1$, vale

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Essa sucessão aparece em diversos lugares na matemática e até na natureza. Na próxima seção veremos um exemplo de sua aparição na geometria.

1.5 Retângulo de ouro e o número de Euler

1.5.1 Convergência de sequências

Vamos explorar agora um tipo específico de sequências: as convergentes.

Os termos de algumas sequências crescem indeterminadamente, como no caso de $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$: os números que a compõem ficam maiores e maiores, quão maior for a posição que eles ocupam nela, de forma que eles tendem ao infinito. Por outro lado, relembrando a sequência do Exemplo 1.1.5., dada por $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$, ou seja, $a_n = \frac{1}{n}$, podemos perceber algo curioso sobre seus termos: eles ficam cada vez menores. De fato, $a_1 = 1$; $a_{10} = \frac{1}{10} = 0,1$; $a_{100} = \frac{1}{100} = 0,01$; $a_{1000} = \frac{1}{1000} = 0,001$; $a_{10000} = \frac{1}{10000} = 0,0001$; $a_{100000} = \frac{1}{100000} = 0,00001$. Intuitivamente, percebe-se que estes números se aproximam cada vez mais do 0, pois eles são as divisões entre 1 e números que vão ficando cada vez maiores.

Por isso, dizemos que essa sequência converge para 0, no sentido de seus termos se aproximarem do 0 à medida que n cresce.

De forma mais geral, vamos considerar a seguinte definição:

Definição 1.5.1. Uma sequência (a_n) converge para um número L quando seus termos se tornam tão próximos de L quanto quisermos para valores suficientemente grandes de n . Quando uma sequência não convergir, diremos que ela é divergente.

Exemplo 1.5.2. A sequência (a_n) definida por $a_n = \frac{n}{n+1}$ converge para 1. Note que: $a_9 = \frac{9}{10} = 0,9$; $a_{99} = \frac{99}{100} = 0,99$; $a_{999} = \frac{999}{1000} = 0,999$; $a_{9999} = \frac{9999}{10000} = 0,9999$. Ou seja, a_n é um número que fica cada vez mais próximo de 1 quanto maior for n .

Exemplo 1.5.3. A sequência $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ não converge para nenhum número. Seus termos a_n não se aproximam a nenhum número específico à medida que n cresce, pois ficam apenas alternando entre -1 e 1 .

Exemplo 1.5.4. A sequência $(3, 6, 9, 12, \dots)$ diverge (ou seja, não converge). Seus termos crescem indeterminadamente à medida que n cresce.

Exemplo 1.5.5. Consideremos novamente a sequência de Fibonacci (F_n) e definamos uma nova sequência (a_n) dada por $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Observe na Tabela 1.2 o comportamento de a_n à medida que n fica maior.

n	a_n
1	1
2	2
3	1,5
10	1,61764...
10^2	1,61803...
10^3	1,61803...
10^4	1,61803...
10^5	1,61803...

Tabela 1.2: Comportamento da sequência quando n aumenta

Podemos intuir que (a_n) converge. De fato, pode-se demonstrar que tal ideia está correta e que (a_n) converge para $1,61803\dots = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, um número que, por aparecer diversas vezes na matemática, denominamos por φ e chamamos de *razão de ouro* (ou *razão áurea*).

Agora que conhecemos a noção intuitiva por trás do significado de convergência de uma sequência, estudaremos sequências que convergem para números interessantes: a razão áurea e o número de Euler.

1.5.2 O retângulo de ouro

Nos próximos capítulos, veremos o surgimento de diversas sequências ao estudarmos certas figuras geométricas e padrões que elas obedecem. Mostraremos, agora, a construção do *retângulo de ouro*, uma figura a partir da qual podemos enxergar a sequência de Fibonacci.

Chamamos de retângulo de ouro qualquer retângulo cujos lados estejam na razão áurea, isto é, um retângulo de lados a e b tais que $\frac{a}{b} = \varphi$. Sua construção geométrica é dada pelas seguintes instruções:

1. Construa um quadrado $ABCD$ de lado 2 e marque o ponto médio E de AB ;

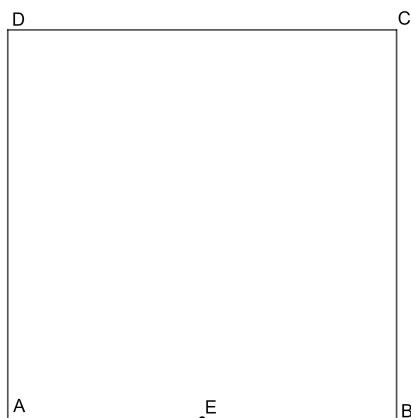


Figura 1.1: Primeiro passo

2. Prolongue o lado AB até um ponto F tal que $EC = EF$;

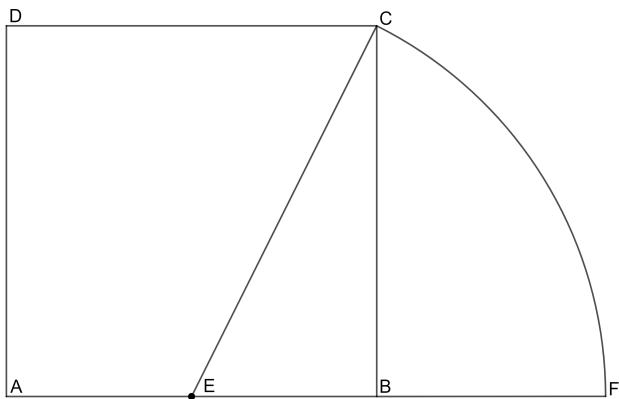


Figura 1.2: Segundo passo

3. Prolongue o lado CD e forme um retângulo $AFGD$.

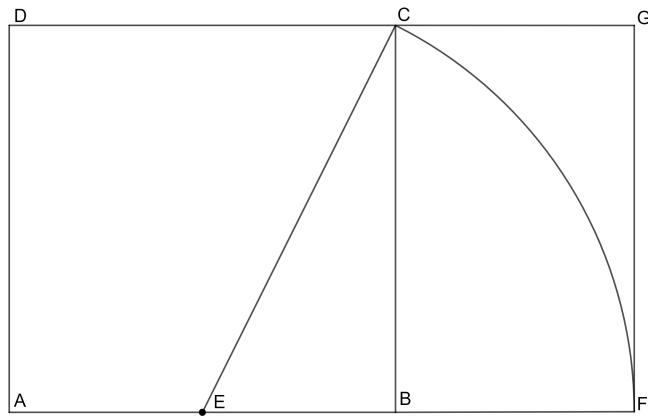


Figura 1.3: Terceiro passo

No último passo da construção do retângulo $AFGD$, formamos um lado AF de comprimento $1 + \sqrt{5}$. Assim, lembrando que $AD = 2$ por ser um lado do quadrado $ABCD$, temos $\frac{AF}{AD} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$, ou seja, acabamos de construir um retângulo áureo.

Para visualizar a relação entre a sequência de Fibonacci e o retângulo áureo, vamos considerar as seguintes construções sucessivas de retângulos:

1. Construa um quadrado de lado 1;

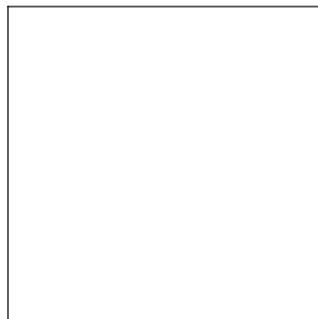


Figura 1.4: Passo 1

2. Acima do quadrado, adicione um outro, de lado igual, de modo a formar um retângulo;



Figura 1.5: Passo 2

3. À esquerda do retângulo, adicione um quadrado com lado igual ao maior lado do retângulo, formando um novo retângulo;

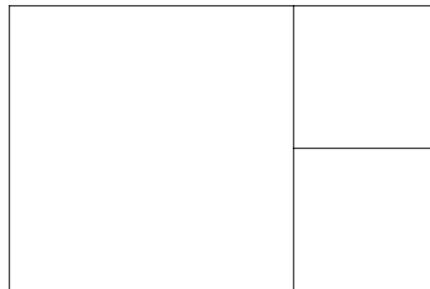


Figura 1.6: Passo 3

4. Abaixo do retângulo, repita um processo análogo aos

feitos nos últimos passos, adicionando um quadrado com lado igual ao maior lado do retângulo na última figura.

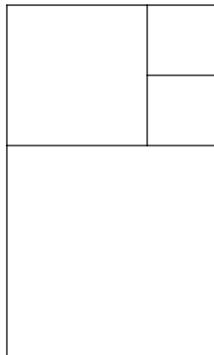


Figura 1.7: Passo 4

Observe a figura que se obtém quando seguimos repetindo os passos descritos 9 vezes e ligamos vértices dos quadrados em um padrão espiral:

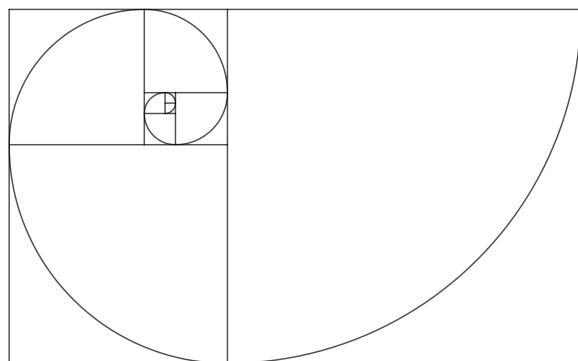


Figura 1.8: Passo 9 e a espiral áurea

Repetindo o processo que fizemos, adicionando quadrados tangentes às figuras, observamos o surgimento de novos retângulos formados por quadrados cujos lados têm comprimentos dados pela sequência $(1, 1, 2, 3, 5, \dots)$, ou seja, a sequência de Fibonacci. À medida que repetimos isso, a razão entre o maior e o menor lado dos retângulos que surgem se aproxima cada vez mais da razão áurea, pois estamos considerando a razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci e, como vimos, a sequência $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$ converge para φ . Dessa forma, as figuras geradas pelo processo descrito se aproximam gradativamente de um retângulo áureo.

Observe que as figuras que construímos formam uma sequência geométrica, onde o primeiro componente é a figura obtida no primeiro passo, o segundo componente é a figura obtida no segundo passo, e assim por diante. Além disso, tal sequência se enquadra na definição de sequência recursiva, pois obtemos a figura de um determinado passo através da anterior, adicionando um quadrado em um de seus lados.

1.5.3 O número de Euler

Além do número de ouro, outro exemplo de um número muito recorrente na matemática que surge quando estudamos um tipo específico de sequência é o número de Euler, que denotamos por e . Ele aparece quando consideramos um problema clássico da matemática financeira que consiste em calcular o montante de dinheiro que se obteria ao investir um capital inicial de 1 real a uma taxa de juros anual de 100%, dividindo a quantidade de capitalizações em n vezes e aumentando o valor de n de forma ilimitada.

Dado n , podemos mostrar que o montante total M do problema será dado por

$$M = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Uma pergunta natural que surge é: se aumentarmos o número de parcelas indefinidamente, o que ocorrerá com o montante? Ele crescerá também ou tenderá a um número específico? Em outras palavras, queremos saber se a sequência (a_n) , com $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, converge. Vejamos seu comportamento quando aumentamos o valor de n . Observe a Tabela 1.3.

n	a_n
1	2
2	2,5
3	2,37037...
10	2,59374...
10^2	2,70841...
10^3	2,71692...
10^4	2,71814...
10^5	2,71826...
10^6	2,71828...
10^7	2,71828...

Tabela 1.3: Crescimento do montante quando n aumenta

Podemos perceber que a sequência se aproxima do número 2,718281... De forma resumida, pode-se demonstrar que ela, de fato, converge, e chamamos o número para o qual ela tende de número de Euler. Isto significa que a resposta para o problema que consideramos é que, no final, terminaríamos

com aproximadamente R\$ 2,718281 se pudéssemos dividir nosso investimento em uma quantidade infinita de parcelas.

1.6 Exercícios

Exercício 1.6.1. Determine se as seguintes sequências são progressões aritméticas. Em caso afirmativo, encontre a razão.

- a) $(1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots)$
- b) $(1, 2, 4, 7, 11, 16, \dots)$
- c) $(3, 5, 8, 10, 13, 15, \dots)$
- d) $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots\right)$
- e) $(2, 4, 6, 10, 16, 26, \dots)$

Exercício 1.6.2. Qual é o 21º termo da P.A. $(10, 19, 28, 37, 46, 55, \dots)$?

Exercício 1.6.3. Seja (a_n) uma P.A. que se inicia em 9 e tem razão 4. Determine a posição de (a_n) ocupada pelo número 53.

Exercício 1.6.4. Sabendo que o primeiro e décimo termo de uma P.A. são 2 e 101, respectivamente, calcule sua razão.

Exercício 1.6.5. Determine se as seguintes sequências são progressões geométricas. Em caso afirmativo, encontre a razão.

- a) $(1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$
- b) $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$
- c) $(1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots)$
- d) $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{273}, \dots\right)$
- e) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

Exercício 1.6.6. Qual é o valor de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256}$?

Exercício 1.6.7. Determine o valor de $3+6+9+12+\dots+99$.

Exercício 1.6.8. Em qual posição o número 2048 aparecerá na P.G. $(2, 4, 8, 16, \dots)$? (Dica: note que $2048 = 2^{11}$).

Capítulo 2

Fractais

2.1 O que é um fractal?

Nós podemos dizer que um fractal é uma figura matemática com características muito específicas. Mas o que de fato diferencia um fractal de outras figuras?

Por exemplo, um quadrado é uma figura matemática. Ele tem como características ser um polígono com quatro lados iguais e ter ângulos internos de 90° . Quando desenhamos um quadrado, estamos representando todas suas características. E, mesmo que desenhássemos quadrados de cores diferentes, com outros tipos de lápis ou até mesmo em um *software*, saberíamos identificar essa figura e classificá-la como um quadrado.

Definição 2.1.1. Um *fractal* tem como características ser uma figura muito complexa, com vários detalhes tão pequenos que precisamos muitas vezes da ajuda de um computador para enxergá-los, além de uma autossimilaridade, ou seja, as partes da figura se parecerem com o todo. Um frac-

tal também pode ser descrito como uma sequência de passos repetidos infinitas vezes. Então, quando tentamos ampliar um fractal, vemos mais detalhes, mas nunca observamos o final da figura.

Veja na figura abaixo um fractal criado por nós do grupo PET Matemática UFPR utilizando o aplicativo Mandel Brower. Em seguida, são mostradas algumas figuras com ampliações desse fractal.

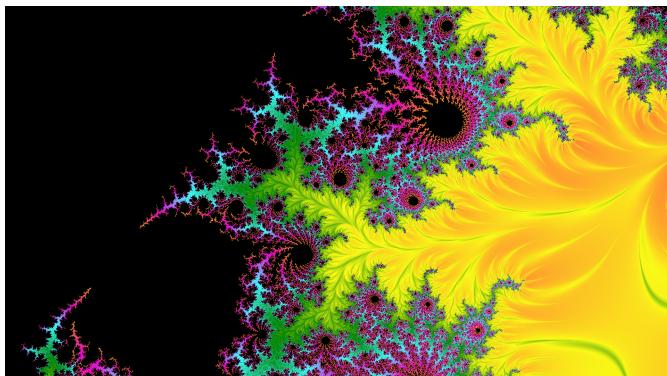


Figura 2.1: Fractal gerado pelo aplicativo Mandel Brower



Figura 2.2: Primeira ampliação da Figura 2.1

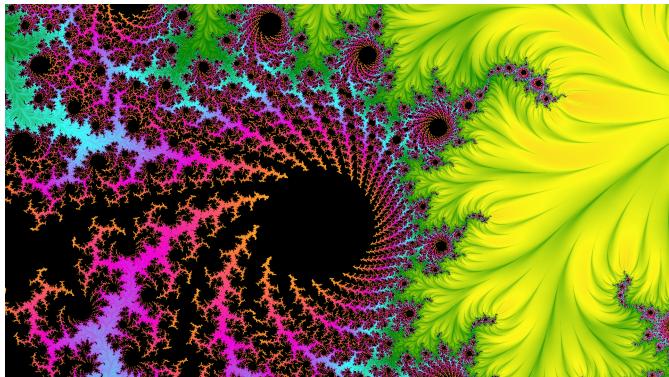


Figura 2.3: Segunda ampliação da Figura 2.1

Um exemplo de representação de um fractal no nosso dia a dia é uma árvore. Sabemos que árvores não são “figuras infinitas”, mas elas nos lembram da característica de autossimilaridade de um fractal. A forma da árvore se repete em seus galhos e em suas folhas.



Figura 2.4: Árvore com a autossimilaridade de fractais

Há outros exemplos de figuras que podem nos lembrar fractais, como a costa de um país ou continente, um floco de neve, um brócolis, uma concha de caracol e até mesmo um repolho cortado ao meio. Isso mostra como a matemática é bela e está presente em nosso cotidiano.

Agora, estudaremos fractais famosos, gerados por processos geométricos infinitos, e vamos desvendar a matemática por trás deles.

2.2 O Triângulo de Sierpinski

Um fractal muito famoso é o Triângulo de Sierpinski. Seu nome é dado em homenagem ao matemático polonês Waclaw Sierpinski, que o descreveu em 1915.

Vamos usá-lo como um primeiro exemplo de fractal construído a partir de um algoritmo (repetição de passos) e observaremos suas características. Para sua construção, podemos seguir os seguintes passos:

1. Construa um triângulo equilátero e demarque sua área;

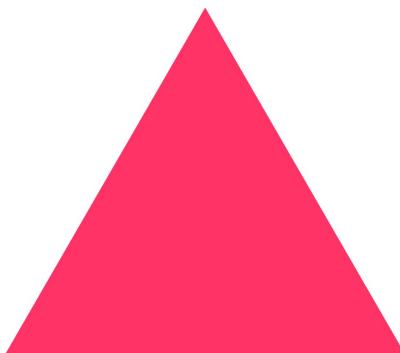


Figura 2.5: Construção do Triângulo de Sierpinski - passo 1

2. Encontre os pontos médios de seus lados;

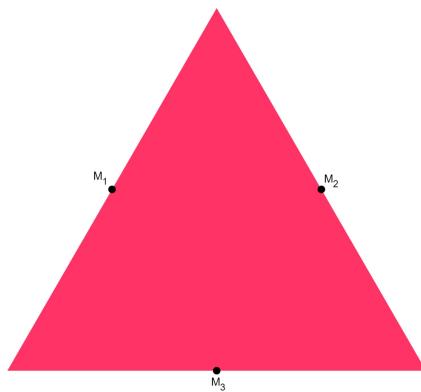


Figura 2.6: Construção do Triângulo de Sierpinski - passo 2

3. Construa um outro triângulo equilátero ligando esses pontos médios e retire a área por ele delimitada.

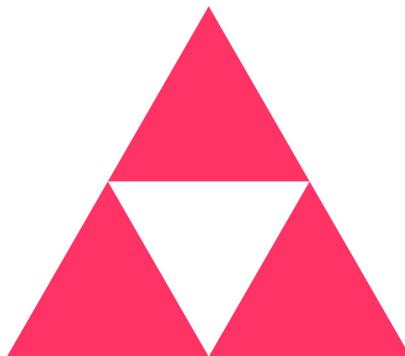


Figura 2.7: Construção do Triângulo de Sierpinski - passo 3

Depois de realizar esses passos, você encontrará outros 3 triângulos equiláteros dentro do original, como mostra a Figura 2.7.

Repita o processo acima em cada um dos 3 triângulos.

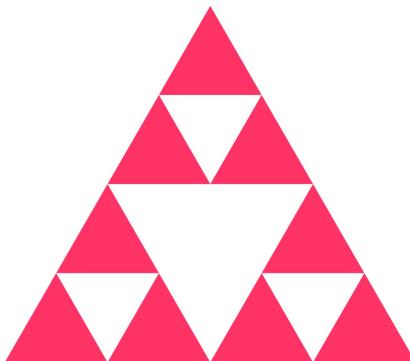


Figura 2.8: Triângulo de Sierpinski na fase 2

Note que podemos realizar esse algoritmo infinitas vezes e observar as características desse fractal como a autossimilaridade, uma vez que os triângulos equiláteros pequenos estão dentro de um triângulo equilátero maior, além de uma estrutura fina cheia de pequenos detalhes.



Figura 2.9: Evolução do Triângulo de Sierpinski

Mais adiante vamos apresentar outro modo de construir o Triângulo de Sierpinski. Por enquanto, apenas pense: será que conseguimos prever quantos triângulos encontramos nas próximas fases desse fractal?

2.3 Fractais são sequências?

Antes de continuarmos nossos estudos, vamos definir o que é uma iteração.

Definição 2.3.1. Uma *iteração* na matemática é o processo de repetição de passos, como um algoritmo. Nesse caso, vamos tratar cada iteração, ou fase, de um fractal pelo número de repetições que fizemos.

Observe a Tabela 2.1. Nela, temos o número de triângulos que o fractal Triângulo de Sierpinski apresenta em cada uma de suas iterações.

Iteração	Número de triângulos equiláteros
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
:	:

Tabela 2.1

Podemos ver que os números acima têm relação com potências de 3:

$$1 = 3^0, \quad 3 = 3^1, \quad 9 = 3^2, \quad 27 = 3^3, \quad 81 = 3^4, \quad \dots$$

Reescrevendo a tabela, temos:

Iteração	Número de triângulos equiláteros
0	3^0
1	3^1
2	3^2
3	3^3
4	3^4
:	:

Tabela 2.2

Assim, podemos ver a relação entre o número de iterações e o número de triângulos que o fractal terá. Generalizando essa ideia, se o fractal estiver em sua iteração de número n , ele terá 3^n triângulos, considerando que a iteração 0 é o triângulo equilátero original.

Você lembra dos tipos de sequências que apresentamos?

Podemos dizer que o fractal Triângulo de Sierpinski é uma sequência *não recursiva*. É uma sequência porque ele apresenta uma “lei de formação” e não recursiva porque não precisamos saber quantos triângulos ele tinha na fase anterior para descobrirmos quantos ele terá na próxima. Para isso, basta usarmos a generalização descrita anteriormente.

Nos fractais que veremos mais adiante, também formados por algoritmos, veremos a presença de generalizações e sequências não recursivas em sua formação.

2.4 Área e perímetro de fractais

Além do número de elementos, também podemos pensar em generalizar a área e o perímetro obtidos de fractais

gerados por figuras geométricas conhecidas, como triângulos equiláteros e quadrados.

Definição 2.4.1. O *perímetro* de uma figura geométrica é a medida de seu contorno. Por exemplo, em um terreno o tanto de arame que precisamos para cercá-lo totalmente será seu perímetro.

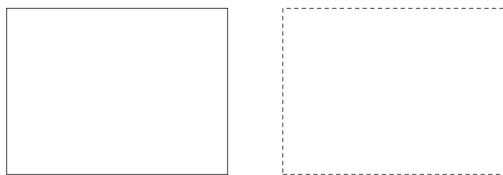


Figura 2.10: Noção intuitiva de perímetro

Definição 2.4.2. A *área* de uma figura geométrica pode ser definida como a quantidade de espaço, ou superfície, que ela ocupa. Por exemplo, em um terreno a quantidade de metros quadrados de grama que precisamos para cobri-lo totalmente é sua área.

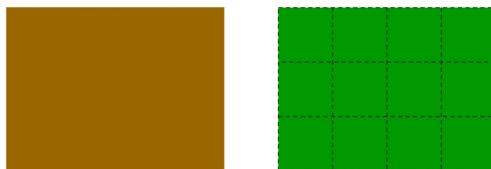


Figura 2.11: Noção intuitiva de área

Para as figuras mais familiares como o triângulo, quadrado, trapézio, círculo, etc, temos fórmulas que nos ajudam a calcular suas áreas e perímetros.

Vamos pensar novamente no Triângulo de Sierpinski e em seus triângulos equiláteros.

Se um triângulo equilátero tem lado n , podemos descrever seu perímetro e sua área em função desse lado:

$$\text{Perímetro: } 3 \cdot n,$$

$$\text{Área: } \frac{n^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Suponhamos que nosso triângulo de iteração 0 do Triângulo de Sierpinski tenha lado ℓ como mostra a Figura 2.12.

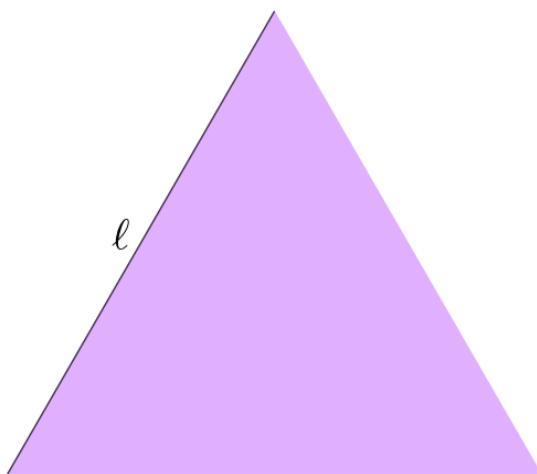


Figura 2.12

Na primeira iteração, teremos 3 triângulos de lado $\frac{\ell}{2}$ como mostra a Figura 2.13.

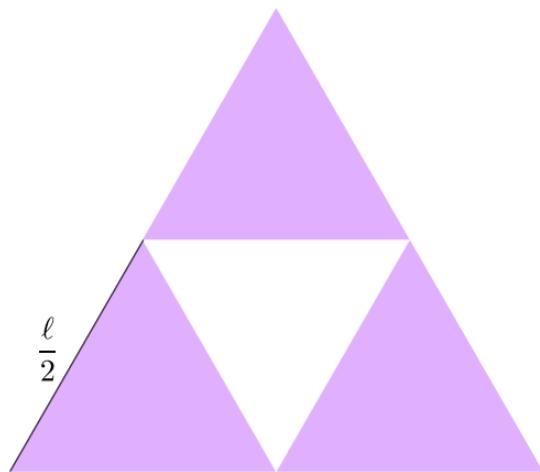


Figura 2.13

Na segunda iteração teremos 9 triângulos de lado $\frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{4}$ como mostra a Figura 2.14.

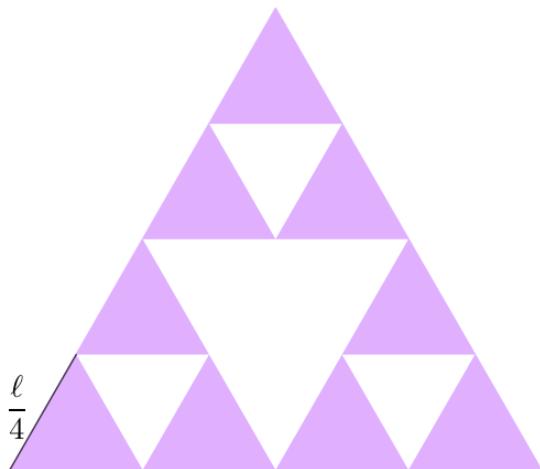


Figura 2.14

Na terceira iteração teremos 27 triângulos de lado $\frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{8}$ como mostra a Figura 2.15.

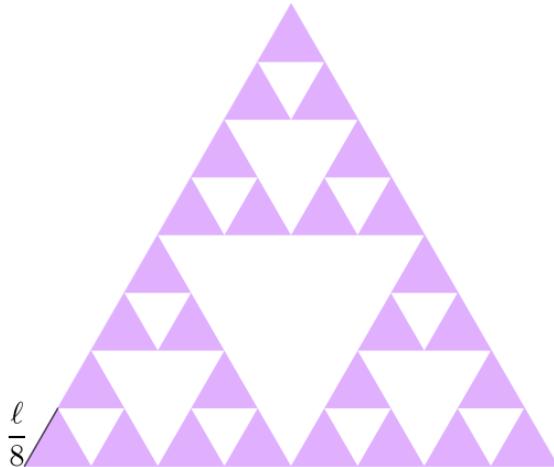


Figura 2.15

Repetindo esse processo, podemos encontrar um padrão no tamanho dos lados dos triângulos equiláteros em cada fase do Triângulo de Sierpinski.

Veja que temos uma relação entre potências de 2, o número da iteração do fractal e o tamanho dos lados de nossos triângulos equiláteros:

$$\ell = \frac{\ell}{2^0}, \quad \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2^1}, \quad \frac{\ell}{4} = \frac{\ell}{2^2}, \quad \frac{\ell}{8} = \frac{\ell}{2^3}, \quad \dots$$

Agora, basta substituirmos esses valores nas fórmulas de perímetro e área, lembrando sempre de multiplicar pelo número de triângulos em cada fase.

Iteração	Quantidade de triângulos	Tamanho do lado dos triângulos	Perímetro	Área
0	1	ℓ	3ℓ	$\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$
1	3	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{9}{2}\ell$	$\frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{16}$
2	9	$\frac{\ell}{4}$	$\frac{27}{4}\ell$	$\frac{9\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{64}$
3	27	$\frac{\ell}{8}$	$\frac{81}{8}\ell$	$\frac{27\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{256}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k	3^k	$\frac{\ell}{2^k}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot 3\ell$	$\frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k$

Tabela 2.3: Área e perímetro do fractal Triângulo de Sierpinski

Assim, descobrimos que o perímetro e a área do Triângulo de Sierpinski em sua n -ésima iteração serão dadas respectivamente por

$$P_n = 3\ell \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

$$A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Agora vamos pensar na seguinte questão: o que acontece com a área e o perímetro do fractal quando o número de iterações cresce infinitamente?

Para respondermos a pergunta da área, vamos observar a construção do Triângulo de Sierpinski. A cada iteração, devemos retirar triângulos formados por pontos médios. Isso quer dizer que a cada fase do fractal teremos cada vez menos a área do triângulo equilátero original, pois estaremos sempre tirando triângulos da figura.

Intuitivamente, a área do fractal tende a zero quando temos infinitas iterações. Podemos confirmar isso através da generalização de área encontrada. De fato, veja que temos o termo $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ multiplicando a área do triângulo original e que $0 < \frac{3}{4} < 1$. Como esse termo se torna cada vez menor quando o número n de iterações, chegamos a conclusão de que a área do fractal também será cada vez menor, ou seja, tenderá a ser nula após infinitas iterações. Faça o teste em uma calculadora: $\left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^3, \dots$.

Para o problema do perímetro, também podemos recorrer à generalização encontrada dessa medida. Nela, temos o termo $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ multiplicando o perímetro do triângulo original e que $\frac{3}{2} > 1$. Veja que esse termo se torna cada vez maior conforme aumentamos o número iterações n . Assim, chegamos a conclusão de que o perímetro do fractal será cada vez maior a cada iteração, ou seja, tenderá para o infinito após infinitas iterações. Faça o teste em uma calculadora: $\left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{2}\right)^3, \dots$.

Mais adiante falaremos de outros fractais, também formados por figuras geométricas conhecidas, como retângulos e quadrados.

2.5 Exercícios

Exercício 2.5.1. Vamos criar um fractal usando quadrados ao invés de triângulos equiláteros seguindo um processo parecido com o do Triângulo de Sierpinski. Leia atentamente os passos e desenhe como serão as primeiras iterações desse fractal. Sugerimos você usar uma folha quadriculada para facilitar o processo de construção.

Passos para a construção do fractal:

1. Desenhe um quadrado e demarque sua área.

OBS.: Se você estiver usando uma folha quadriculada, desenhe um quadrado com lados múltiplos de 9 (assim conseguiremos desenhar até a segunda iteração do fractal com facilidade). Demarque a área do quadrado com lápis grafite para que consiga apagá-la tranquilamente depois.

2. Divida cada um dos lados em três partes iguais e marque esses pontos de divisão.
3. Ligue esses pontos formando retas paralelas aos lados do quadrado.

OBS.: Assim você obterá o quadrado original com 9 quadrados desenhados dentro dele.

4. Retire a área dos quadrados que não têm vértice comum com o quadrado original e que têm, ao mesmo tempo, lado comum ao quadrado original.
5. Repita esse processo nos quadrados obtidos.

Agora que você aprendeu o processo de construção do fractal, vamos completar tabelas parecidas com as do Triângulo de Sierpinski feitas nesse capítulo.

A primeira será sobre o número de quadrados que o fractal terá após realizarmos n iterações. Tente encontrar um padrão como foi feito anteriormente.

(Lembre-se que a iteração 0 é o quadrado original!)

Iteração	Número de quadrados
0	
1	
2	
3	
4	
:	:
n	

Exercício 2.5.2. Agora que criou uma generalização para o número de quadrados, como ficariam o tamanho dos lados desses quadradinhos a cada iteração?

(Você pode completar essa tabela como se o lado do quadrado fosse 1 centímetro, por exemplo. Depois pense em como ela ficaria para um lado ℓ qualquer.)

Iteração	Tamanho do lado dos quadrados
0	
1	
2	
3	
4	
:	:
n	

Exercício 2.5.3. Faça como a Tabela 4.1 do Triângulo de Sierpinski e veja como ficaria a área e o perímetro desse fractal formado por quadrados.

(Novamente, complete a tabela como se o lado do quadrado fosse 1 centímetro. Depois pense em como ela ficaria para um lado ℓ qualquer.)

Iteração	Nº de quadrados	Lado	Perímetro	Área
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n				

Exercício 2.5.4. O que acontece com a área e o perímetro do fractal quando realizamos infinitas iterações? Os valores seguem o mesmo padrão do Triângulo de Sierpinski?

Exercício 2.5.5. Pense em realizar o mesmo algoritmo do Triângulo de Sierpinski com uma outra figura geométrica qualquer, que não seja um quadrado. Quando realizarmos infinitas iterações, o que acontecerá com a área e o perímetro desse fractal?

Exercício 2.5.6. Esse padrão da área e do perímetro acontece para qualquer tipo de fractal?

Exercício 2.5.7. Existem outros processos para a criação de fractais?

Capítulo 3

Indo além

3.1 O Jogo do Caos

O *Chaos Game* (ou Jogo do Caos) é uma técnica utilizada para criar fractais. Essa técnica foi desenvolvida pelo matemático Michael Barnsley na década de 1980.

Esta técnica é baseada em um processo de iteração, no qual um ponto é movido a cada iteração de acordo com uma regra específica. Inicialmente, escolhe-se um triângulo equilátero e um ponto aleatório dentro dele. Em seguida, escolhe-se aleatoriamente um dos três vértices do triângulo e move-se o ponto até a metade do caminho entre o ponto atual e o vértice escolhido. Esse processo é repetido várias vezes, gerando um padrão que se assemelha ao Triângulo de Sierpinski (Figura 3.1).

No caso do *Chaos Game*, as etapas são feitas por meio de uma função que leva o ponto atual para o próximo ponto, isto é, dado um ponto inicial x_0 , aplicando a técnica chegamos no próximo ponto x_1 , que depende de x_0 , depois no x_2 , que depende de x_1 e assim por diante, até pararmos num ponto x_k , que depende de x_{k-1} , em que k é o número de iterações.

De modo geral, o ponto x_{k+1} dependerá de seu ponto anterior, que é o x_k . Esta relação entre o ponto e seu antecessor é escolhida de forma aleatória, cada uma correspondente a um dos vértices do triângulo. Esta escolha aleatória garante a imprevisibilidade do processo e, por consequência, a complexidade do padrão gerado.

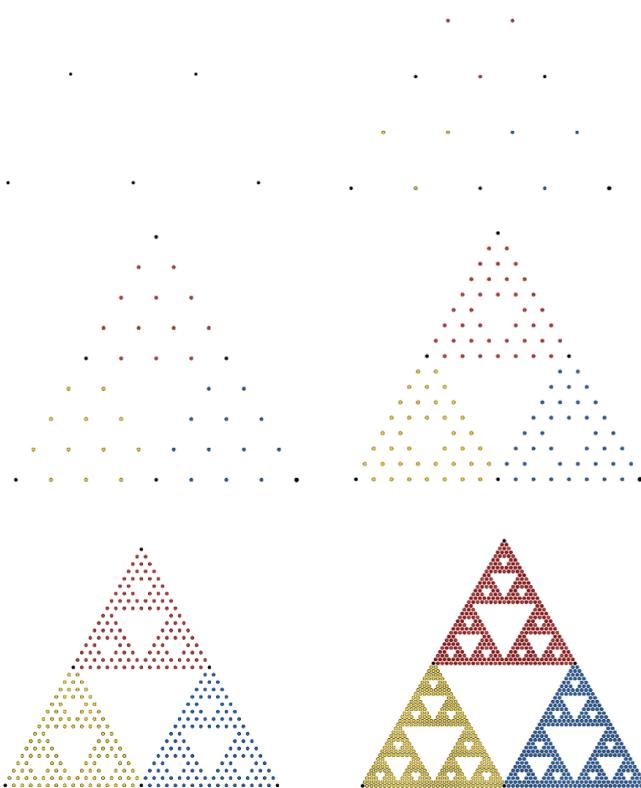


Figura 3.1: Algumas etapas da construção do Triângulo de Sierpinski pelo *Chaos Game*

O *Chaos Game* pode ser utilizado para gerar outros tipos de fractais, como o Tapete de Sierpinski (Figura 3.2). Cada fractal é gerado a partir de um conjunto específico de regras e transformações, mas todos seguem o mesmo princípio de iteração e escolha aleatória de funções.

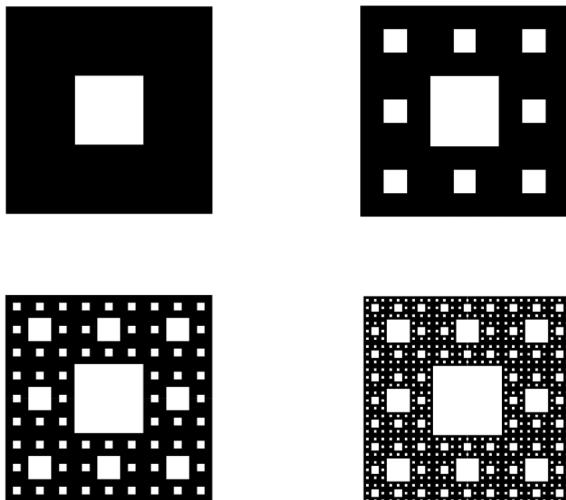


Figura 3.2: Fractal Tapete de Sierpinski

Essa é uma ferramenta interessante para estudar fractais e explorar a relação entre matemática e arte. Além disso, é um exemplo de como conceitos matemáticos abstratos podem ser aplicados em contextos práticos e criativos.

Também é possível utilizar o *Chaos Game* para criar fractais em qualquer polígono. Porém, se o número de vértices do polígono for aumentado, é necessário ajustar ligeiramente o fator utilizado para calcular as novas posições, ao invés de simplesmente dividir a distância ao meio. Caso contrário, o algoritmo pode não criar um fractal corretamente. Por exemplo, dividir a distância ao meio entre a posição atual e

um vértice selecionado aleatoriamente de um quadrado resultará em uma área uniformemente preenchida, ao invés de um fractal.

Para um triângulo, dividir a distância ao meio equivale a multiplicar o comprimento por um fator de 0,5. Essa generalização pode ser aplicada a polígonos com n vértices, permitindo o cálculo de um fator r adequado através da equação $r = \frac{n}{n+3}$ em que n é o número de vértices do polígono.

Os resultados do *Chaos Game* aplicado a polígonos com 3, 4 e 5 vértices são ilustrados em imagens onde cada vértice é associado a uma cor, baseada em sua posição na roda de cores. Durante o cálculo, cada novo ponto é colorido com a cor do vértice para o qual saltou por último.

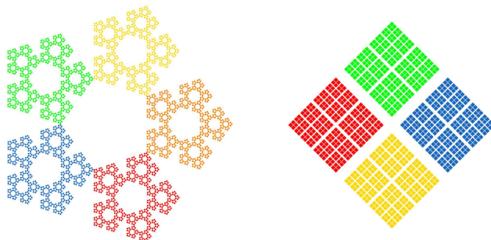


Figura 3.3: Exemplo de figuras geradas pelo *Chaos Game* em outros polígonos, colorindo como citado acima.

3.2 Fractais de Cantor

3.2.1 Conjunto de Cantor

A história do conjunto de Cantor começa com Georg Cantor (1845-1918), um matemático alemão que desenvolveu a teoria dos conjuntos no final do século XIX. Cantor descobriu que existem diferentes tipos de infinitos e que alguns

conjuntos infinitos são maiores do que outros.

O conjunto de Cantor é um exemplo de um conjunto infinito não numerável, o que significa que ele não pode ser contado ou colocado em correspondência com os números naturais. Ele é construído a partir da remoção repetida de um terço de um segmento de linha.

Imagine que temos uma régua de 1 metro de comprimento e queremos construir o conjunto de Cantor a partir dela. Começamos marcando dois pontos nas extremidades da régua e, em seguida, removemos um terço do comprimento no meio da régua. Agora, temos duas réguas de comprimento $1/3$ cada. Repetimos o processo de remover um terço do comprimento no meio de cada uma dessas duas réguas, e assim por diante.

Depois de um número infinito de iterações, obtemos um conjunto infinito de pontos que se aproximam de zero, mas nunca chegam a se tornar zero. Esse conjunto é o conjunto de Cantor, e é um exemplo fascinante de um conjunto infinito não numerável que pode ser estudado na matemática.

3.2.2 Poeira de Cantor

A visualização geométrica da construção dos conjuntos de Cantor dão origem aos fractais chamados “poeira de Cantor”.

Iniciamos com o segmento de reta unitário, que é o intervalo fechado $[0, 1]$, ou seja, todos os números reais que vão de 0 até 1. Agora, dividimos o segmento em 3 partes iguais e retiramos o terço do meio, que é o intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Com isso, obtemos dois intervalos $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$.

Agora, pegamos estes dois novos intervalos e repetimos o processo anterior. Por exemplo, tomamos o intervalo $[0, \frac{1}{3}]$, dividimos em 3 partes iguais, retiramos o intervalo $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ e obtemos dois novos intervalos $[0, \frac{1}{9}]$ e $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ (pois $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$). As-

sim, repetimos o processo quantas vezes quisermos em todos os intervalos que obtivermos.

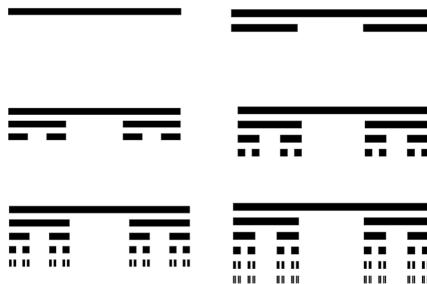


Figura 3.4: Algumas etapas da construção do conjunto de Cantor

Conforme a Tabela 3.1 abaixo, podemos ver as propriedades geométricas da formação do conjunto de Cantor conforme a quantidade de iterações.

Iteração	Quantidade total de pontos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total
0	1	C_0	C_0
1	2	$\frac{C_0}{3}$	$\frac{2}{3}C_0$
2	4	$\frac{C_0}{9}$	$\frac{4}{9}C_0$
3	8	$\frac{C_0}{27}$	$\frac{8}{27}C_0$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k	2^k	$\frac{C_0}{3^k}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^k C_0$

Tabela 3.1: k iterações da construção do conjunto de Cantor

Um fato interessante é que podemos aplicar essa técnica de construção de um conjunto de Cantor em outras figuras além de um simples segmento de reta unitário. Por exemplo, aplicando as mesmas etapas em duas dimensões, ou seja, em um quadrado com medida de lado 1, temos uma imagem que pode ser vista na Figura 3.5:

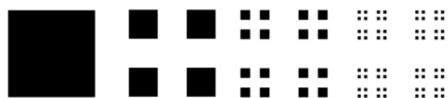


Figura 3.5: Algumas etapas da construção do conjunto de Cantor em 2 dimensões

3.3 Fractais de Koch

3.3.1 Curva de Koch

Para construirmos a “Curva de Koch”, iniciamos com um segmento de reta de qualquer comprimento de tamanho L . Em seguida, dividimos este segmento em 3 partes iguais e transformamos o terço do meio em um triângulo equilátero (sem o lado de baixo), assim como mostrado na Figura 3.6. Ficamos então com 4 novos segmentos de reta de tamanho $\frac{L}{3}$.

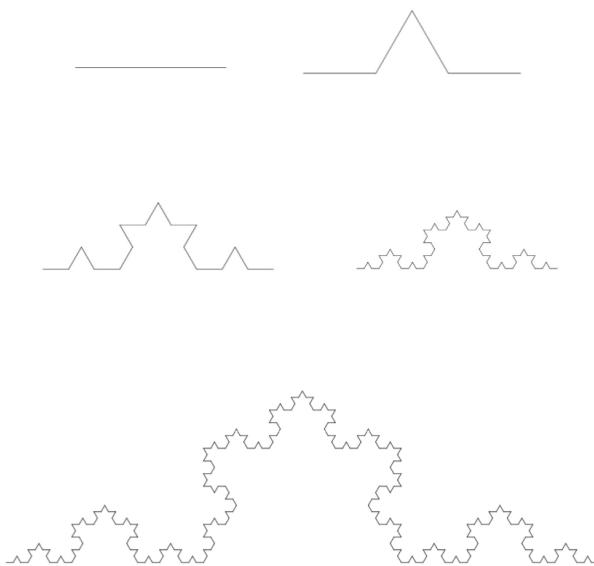


Figura 3.6: Algumas etapas da construção da curva de Koch

Assim, aplicando as mesmas etapas em cada um dos 4 novos segmentos de retas, obteremos 16 novos segmentos.

Repetindo o processo indefinidamente, nos aproximamos da figura que chamamos de Curva de Koch.

Podemos ver pela Tabela 3.2 abaixo as propriedades geométricas que a curva de Koch vai tomado conforme vai aumentando o número de iterações.

Iteração	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total
0	1	C_0	C_0
1	4	$\frac{C_0}{3}$	$\frac{4}{3}C_0$
2	16	$\frac{C_0}{9}$	$\frac{16}{9}C_0$
3	64	$\frac{C_0}{27}$	$\frac{64}{27}C_0$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k	4^k	$\frac{C_0}{3^k}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^k C_0$

Tabela 3.2: k iterações da construção da Curva de Koch

3.3.2 Floco de Neve de Koch

Podemos usar da mesma ideia da construção da Curva de Koch, mas aplicando em outras figuras além de um segmento de reta. Um exemplo disso é quando tomamos um triângulo equilátero e aplicamos as mesmas etapas da Curva de Koch nos 3 lados deste triângulo.

Isto é, pegamos cada lado do triângulo, dividimos cada um em três partes iguais e substituimos o terço médio por um triângulo equilátero, da mesma forma como é feito na curva.

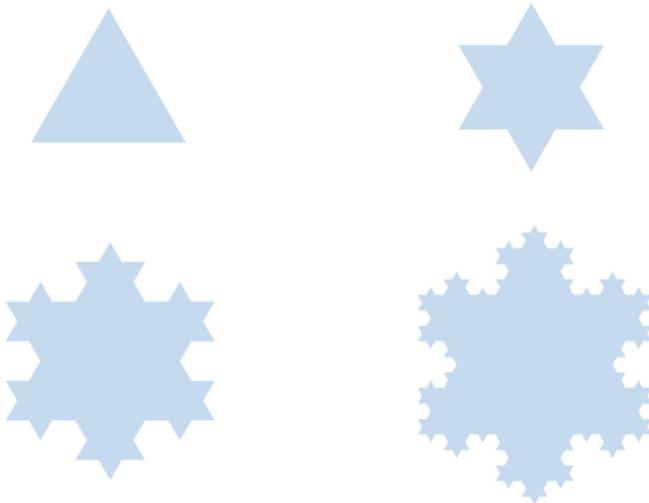


Figura 3.7: Algumas etapas da construção do floco de neve de Koch.

Repetindo o processo infinitas vezes, obtemos essa figura que se assemelha a um floco de neve e é chamada de **Floco de Neve de Koch**.

O interessante é que, ao repetirmos o processo infinitas vezes, temos um número infinito de lados, onde o perímetro da figura é infinito, ou seja, a soma dos lados dessa figura é infinita. Porém, a área da figura segue como sendo um valor finito, que obtemos pela fórmula

$$\frac{2l^2\sqrt{3}}{5},$$

em que l é o lado do triângulo original.

3.4 Conjuntos de Mandelbrot e Julia

Para termos uma boa noção introdutória do que são os conjuntos de Mandelbrot e Julia, precisamos apresentar uma breve noção sobre números complexos, pois eles são a base da construção desses dois conjuntos.

3.4.1 O plano cartesiano

O plano cartesiano é uma ferramenta matemática utilizada para representar e visualizar pontos no plano. Ele foi criado pelo matemático René Descartes no século XVII e é amplamente utilizado até os dias atuais.

O plano cartesiano é composto por duas retas de números reais perpendiculares entre si, denominadas eixos. O eixo horizontal é chamado de *eixo das abscissas* ou eixo x , e o eixo vertical é chamado de *eixo das ordenadas* ou eixo y . O ponto onde os dois eixos se encontram é chamado de *origem*, representado pelo ponto $(0, 0)$.

No plano cartesiano, cada ponto pode ser identificado por um par ordenado (x, y) , onde o valor x representa a posição do ponto no eixo x e o valor y representa a posição do ponto no eixo y .

Exemplo 3.4.1. O ponto $A = (3, 2)$ está localizado a três unidades à direita da origem e duas unidades acima dela. Veja a Figura 3.8.

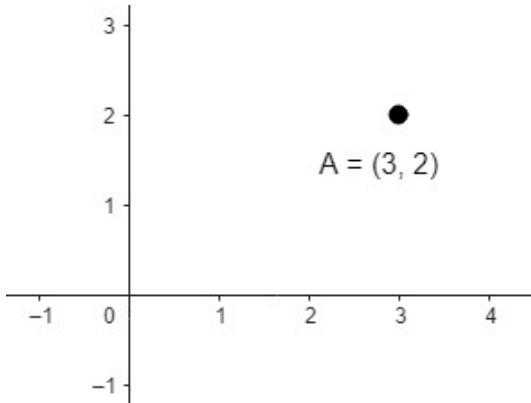


Figura 3.8: Representação do ponto $A = (3, 2)$ no plano cartesiano.

3.4.2 Uma breve história dos números complexos

Desde os séculos antes de Cristo, a equação

$$x^2 + 1 = 0$$

já era alvo de curiosidade e muito estudo por parte dos matemáticos. Foi a partir desta equação que a história dos números complexos começou. No século XVI, os matemáticos notaram que as equações quadráticas nem sempre tinham raízes reais. Na mesma época, os matemáticos italianos Girolamo Cardano (1501-1576) e Rafael Bombelli (1526-1572) começaram a explorar o conceito de números imaginários, representando as raízes quadradas de números negativos, principalmente na resolução de equações cúbicas que tinham uma raiz real e duas raízes complexas.

Então, somente a partir século XVII, foi introduzida por Albert Girard (1595-1632), René Descartes (1596,1650) e Jean-Robert Argand (1768-1822), a interpretação geométrica

dos números complexos, sendo vistos como vetores no plano cartesiano.

3.4.3 Um passeio pelos números complexos

Definição 3.4.2. O conjunto dos números complexos é formado por pares ordenados de números reais $z = (x, y)$, em que a soma e o produto desses pares satisfazem as seguintes regras:

- $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Exemplo 3.4.3. Considere os números complexos $z_1 = (4, 3)$ e $z_2 = (1, 2)$. A soma desses números é

$$z_1 + z_2 = (4, 3) + (1, 2) = (4 + 1, 3 + 2) = (5, 5).$$

Já a multiplicação é

$$z_1 \cdot z_2 = (4 \cdot 1 - 3 \cdot 2, 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1) = (-2, 11).$$

Teorema 3.4.4. Considere os números complexos $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ e $z_3 = (x_3, y_3)$. As operações de soma e produto dos números complexos satisfazem as seguintes propriedades:

1. (Comutatividade) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
2. (Associatividade) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ e $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;
3. (Elemento neutro da soma) $z + (0, 0) = z$ para todo número complexo z ;

4. (Simétrico aditivo) $z + (-z) = (0, 0) = 0$;
5. (Elemento neutro do produto) $z \cdot (1, 0) = z$ para todo número complexo z ;
6. (Inverso multiplicativo) $(x, y) \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0)$;
7. (Distributividade do produto com relação à soma) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

Definição 3.4.5. Dado um número complexo $z = (x, y)$, dizemos que x é a **parte real** do número complexo e é denotada por $x = Re(z)$, e y é a sua **parte imaginária** e é denotada por $y = Im(z)$.

Definição 3.4.6. Seja $i = (0, 1)$. Dizemos que i é a unidade imaginária dos números complexos.

Também, podemos considerar os números reais como sendo números complexos, fazendo a identificação $x = (x, 0)$, para cada número real x .

Note que, se fizermos i^2 , temos, pelas regras de multiplicação, $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ pelas, ou seja, $i^2 = (-1, 0)$. Com isso, com a identificação que fizemos acima, temos que

$$i^2 = -1$$

Observação 3.4.7. Considere o número complexo $z = (x, y)$. Note que $z = (x, 0) + (0, y)$, isto é, separamos na parte real e na parte imaginária. Agora, $(x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi$. Com isso, em vez de denotarmos um

número complexo pelo par ordenado (x, y) , podemos denotar por $z = x + iy$, em que x é sua parte real, y é sua parte imaginária e i é a unidade imaginária que definimos acima.

Os números complexos têm muitas aplicações em matemática e física. Eles são usados para representar quantidades que possuem magnitude e direção, como no caso de vetores e ondas. Além disso, eles também são usados em equações que não possuem solução real, como é o caso da equação $x^2 = -1$.

Note que se $x = i$, então $x^2 = i^2 = -1$. Portanto, é solução desta equação.

3.4.4 O plano de Argand-Gauss

Podemos representar geometricamente um número complexo. Porém, por conta de sua parte imaginária, não podemos representar o par ordenado $z = (x, y)$ em um plano cartesiano. Por isso, precisamos de um plano especial para os números complexos.

O **plano de Argand-Gauss**, ou **plano complexo**, é uma adaptação do plano cartesiano para a representação geométrica desses números complexos.

No plano complexo, o eixo horizontal é o eixo dos números reais, ou seja, onde ficam os valores $Re(z)$, e o eixo vertical é o eixo das partes imaginárias $Im(z)$.

Dessa maneira, podemos representar os números complexos no plano complexo assim como representamos pares ordenados no plano cartesiano. Veja a Figura 3.9.

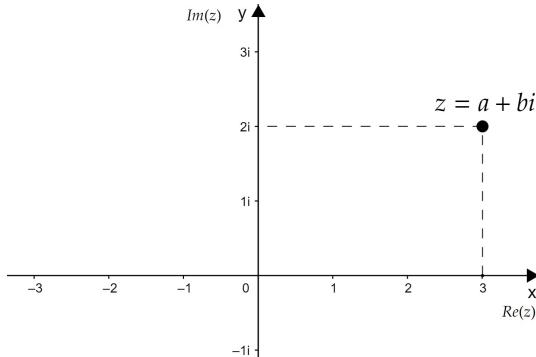


Figura 3.9: Representação de um número complexo z no plano complexo. Imagem retirada de <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/plano-argandgauss.htm>

Exemplo 3.4.8. O número complexo $3 + 2i$ representa uma quantidade que possui uma parte real de 3 e uma parte imaginária de 2. Podemos representar esse número no plano cartesiano, onde o eixo x representa a parte real e o eixo y representa a parte imaginária. Nesse caso, o número $3 + 2i$ estaria localizado no ponto $(3, 2)$ no plano. Veja a Figura 3.10

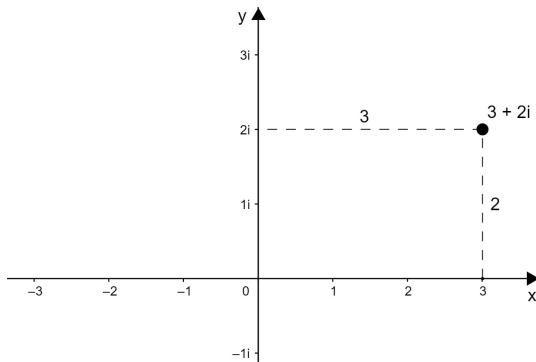


Figura 3.10: Ponto $3 + 2i$ no plano complexo

Podemos ver a distância de um ponto até a origem no plano complexo como o comprimento do vetor representado por aquele ponto.

Definição 3.4.9. Seja o número complexo $z = (a, b) = a + bi$. Então, seu comprimento, denotado por $|z|$, é calculado pela fórmula

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Exemplo 3.4.10. Considere o número complexo $z_1 = (4, 3) = 4 + 3i$ (Figura 3.11).

Para calcular o comprimento deste número complexo, vamos aplicar a fórmula dada na **Definição 3.4.8**. Assim, $|z_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. Portanto, z_1 tem 5 unidades de comprimento.

Note que podemos enxergar esse número complexo da seguinte maneira:

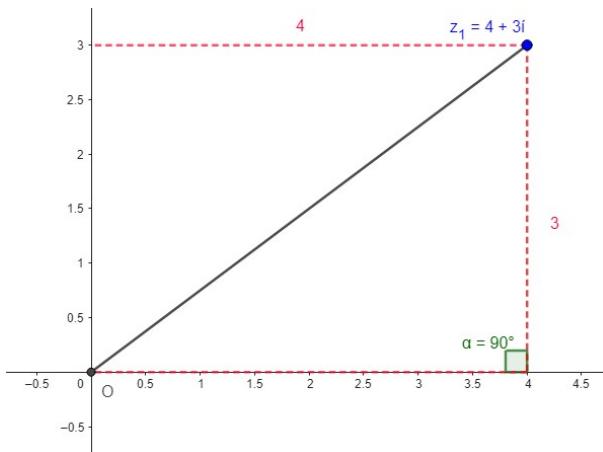


Figura 3.11: Número complexo $z_1 = 4 + 3i$ no plano complexo.

Aqui, o segmento de reta que mede a distância entre z_1 e a origem, como sendo a hipotenusa de um triângulo retângulo.

Também, podemos ver a distância vertical de z_1 até o eixo x como um dos catetos do triângulo, e a distância horizontal de z_1 até o eixo y como o outro cateto.

Ou seja, a fórmula para obtermos o comprimento de um número complexo é uma aplicação direta do teorema de Pitágoras, que nos diz que, em um triângulo retângulo, o tamanho da hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos tamanhos dos catetos, isto é,

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

onde c é o tamanho da hipotenusa, a é o tamanho de um cateto e b o tamanho do outro cateto.

3.4.5 Conjunto de Mandelbrot

O conjunto de Mandelbrot é uma coleção de pontos que possuem uma propriedade específica. Para cada ponto c na região do plano complexo, podemos calcular uma sequência de números complexos $z_0, z_1, z_2, z_3, \dots$, onde z_0 é o próprio ponto c e, para qualquer $n > 0$, o número z_n é calculado pela equação

$$z_n = z_{n-1}^2 + c. \quad (3.1)$$

A propriedade interessante é que, se essa sequência de números complexos fica “presa” em uma área finita, então o ponto c está no conjunto de Mandelbrot. Ou seja, o conjunto de Mandelbrot é formado pelos pontos c tais que a sequência dos números z_n é limitada.

Assim, no plano complexo, a representação de todos os pontos que estão no conjunto de Mandelbrot formam um fractal. Veja a Figura 3.12

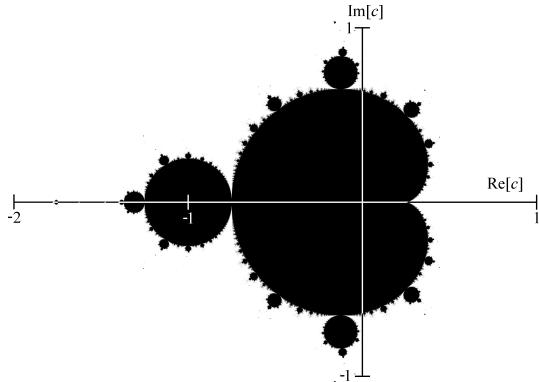


Figura 3.12: Visualização do Conjunto de Mandelbrot no plano complexo. Imagem retirada de https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/56/Mandelset_hires.png/300px-Mandelset_hires.png

Exemplo 3.4.11. Considere o valor $c = -1$ e $z_0 = 0$. Então, temos:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0^2 - 1 = -1 \\ z_2 &= (-1)^2 - 1 = 0 \\ z_3 &= 0^2 - 1 = -1 \\ z_4 &= (-1)^2 - 1 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que esta sequência será da forma $(-1, 0, -1, 0, -1, \dots)$, que é limitada. Portanto, o ponto $c = -1$ está no conjunto de Mandelbrot.

Exemplo 3.4.12. Considere o valor $c = i$ e $z_0 = 0$. Então,

temos:

$$\begin{aligned}z_1 &= 0^2 + i = i \\z_2 &= i^2 + i = i - 1 \\z_3 &= (i - 1)^2 + i = -i \\z_4 &= (-i)^2 + i = i - 1 \\\vdots\end{aligned}$$

Aqui, temos uma sequência da forma $(i, i - 1, -i, i - 1, -i, \dots)$, que também está limitada. Portanto, $c = i$ também está no conjunto de Mandelbrot.

Exemplo 3.4.13. Considere agora o valor $c = 2i$ e $z_0 = 0$. Então, temos:

$$\begin{aligned}z_1 &= 0^2 + 2i = 2i \\z_2 &= 2i^2 + 2i = -4 + 2i \\z_3 &= (-4 + 2i)^2 + 2i = 12 - 14i \\z_4 &= (12 - 14i)^2 + 2i = -52 - 334i \\\vdots\end{aligned}$$

Perceba que agora a sequência está decrescendo rapidamente para o infinito. Com isso, temos que $c = 2i$ não está no conjunto de Mandelbrot, pois a sequência não é limitada.

Para visualizar esses conjuntos, podemos colorir os pontos que pertencem a cada conjunto de uma forma específica. Por exemplo, podemos colorir os pontos dentro do conjunto de Mandelbrot em preto e os pontos fora em diferentes tons de cinza, dependendo da rapidez com que a sequência diverge. Veja a Figura 3.13.

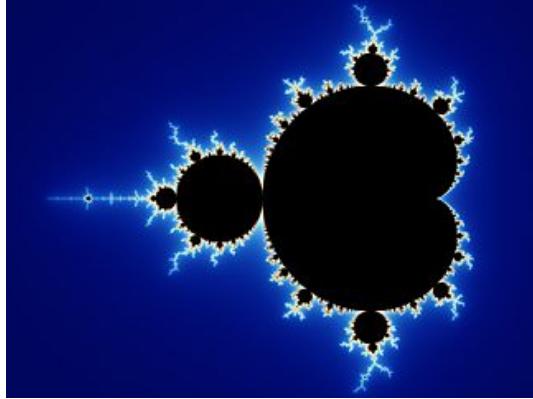


Figura 3.13: Visualização do Conjunto de Mandelbrot. Imagem retirada de https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/21/Mandel_zoom_00_mandelbrot_set.jpg/322px-Mandel_zoom_00_mandelbrot_set.jpg

3.4.6 Conjunto de Julia

O conjunto de Julia é um pouco mais complexo. Para cada ponto c na região do plano complexo que estamos interessados, podemos calcular uma sequência de números complexos $z_0, z_1, z_2, z_3, \dots$, onde z_0 é o próprio ponto c e, para qualquer $n > 0$, o número z_n é calculado pela equação

$$z_n = z_{n-1}^2 + c. \quad (3.2)$$

O conjunto de Julia é então o conjunto dos números complexos z_n que não vão para o infinito. Veja a Figura 3.14.

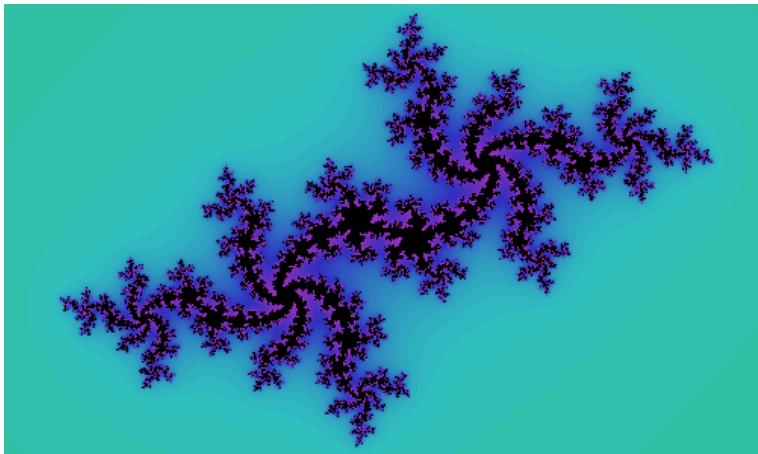


Figura 3.14: Visualização do Conjunto de Julia. Imagem retirada de <https://mathspp.com/blog/julia-set>

Observação 3.4.14. Embora a definição desses conjuntos pareça praticamente a mesma, temos uma sutil diferença entre eles. A diferença, é que o conjunto de Mandelbrot é o conjunto dos pontos c associados a cada iteração da Equação 3.1. Já o conjunto de Julia é o conjunto dos números complexos z que obtemos a cada iteração da Equação 3.2, com um c fixo. Vemos que a diferença dos dois conjuntos é bem pequena, mas esse pequeno detalhe muda completamente a forma de cada um dos fractais.

3.5 Exercícios

Exercício 3.5.1. O que podemos dizer a respeito do comprimento total do conjunto de Cantor conforme o número de iterações vai crescendo?

Exercício 3.5.2. Utilizando uma calculadora, veja quanto vale o comprimento total do conjunto de Cantor na 15^a iteração.

Obs.: apresente o resultado de forma geral, assim como está apresentado na tabela.

Exercício 3.5.3. Utilizando uma régua milimetrada, faça a construção do conjunto de Cantor, passo a passo, a partir de um segmento de 10 cm.

Exercício 3.5.4. Existem outros tipos de construções do conjunto de Cantor utilizando outras figuras? Se sim, quais figuras?

Exercício 3.5.5. Faça uma pesquisa sobre quais outros lugares onde aparecem o conjunto de Cantor para ver quantas aplicações desse objeto podem ter, além de ser um tipo de fractal.

Exercício 3.5.6. Utilizando uma calculadora, veja qual o comprimento total de uma curva de Koch em sua 15^a iteração.

Obs.: apresente o resultado da forma geral, assim como está na tabela.

Exercício 3.5.7. É possível termos uma curva de Koch que tenha 10 segmentos? Por que?

Exercício 3.5.8. O que é possível dizer sobre o comprimento total da curva de Koch conforme o número de iterações vai aumentando?

Exercício 3.5.9. Utilizando uma régua milimetrada, faça a construção da curva de Koch, passo a passo, com um seg-

mento de 10 cm.

Exercício 3.5.10. Calcule o comprimento do vetor representado pelo ponto da Figura 3.10.

Exercício 3.5.11. Calcule o comprimento dos seguintes números complexos:

- $z_1 = \sqrt{4}i + 4;$
- $z_2 = 8.2 + 7.5i;$
- $z_3 = 4(3 + 4i).$

Exercício 3.5.12. Simplifique o número i^{82} .

Dica: eleve i à potências menores e tente observar o padrão que se forma.

Exercício 3.5.13. Utilizando o padrão encontrado no exercício anterior, escreva as relações de potências que temos para o número i .

Exemplo: sabemos que quando a potência é um múltiplo de 4, ou seja, $4n$, para $n \geq 0$, temos que $i^{4n} = 1$.

Exercício 3.5.14. Existe alguma relação entre o conjunto de Julia e o conjunto de Mandelbrot? Se sim, qual? Pesquise na *internet*, em livros, revistas etc., sobre essa relação entre os dois conjuntos.

Referências Bibliográficas

AZEVEDO, N. d. C. d. O número de ouro e construções geométricas. Universidade Federal de Goiás, 2013.

FERRER, J. V. O número de ouro na arte, arquitetura e natureza: beleza e harmonia. *Trabalho Apresentado à Universidade Católica de Brasília-UCB. Distrito Federal*, 2005.

FIGUEIRA, R. F. et al. O número de euler. Universidade Federal da Paraíba, 2017.

KLEBANOFF, A. π in the mandelbrot set. *Fractals*, World Scientific, v. 9, n. 04, p. 393–402, 2001.

MENDES, M. Polos olímpicos de treinamento. *Agora*, v. 10, n. 2, p. 2.

PAIXÃO, F. d. C. et al. Aprendendo matemática com o triângulo de sierpinski. XII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), 2016.

PEITGEN, H.-O. et al. *Chaos and fractals: new frontiers of science*. [S.l.]: Springer, 2004. v. 106.

SALLUM, É. M. Fractais no ensino médio. *Revista do professor de Matemática*, v. 59, p. 1–8, 2005.

SERRA, C. P.; KARAS, E. W. *Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos*. [S.l.]: Universitaria Champagnat, 1997.

SIGLER, L. *Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's book of calculation*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003.

SOUZA, C. H. S. de; CLEMENTE, G. L. Fractais: figuras de outra dimensão-parte i.