

O Anel de Grothendieck de Categorias Finitas

Andrey Modtkoski Friedlaender
Licenciatura em Matemática - UFPR
andreymod@gmail.com

Prof. Dr. Eduardo Outeiral Correa Hoefel (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
hoefel@ufpr.br

Palavras-chave: categorias, R -álgebras, anéis de Grothendieck.

Resumo:

Dados um anel comutativo R e uma categoria \mathcal{C} podemos construir um R -módulo livre $R\langle\mathcal{C}\rangle$ sobre \mathcal{C} , considerando seus elementos como morfismos de \mathcal{C} em R , isto é, $R\langle\mathcal{C}\rangle = \{f \mid f : \mathcal{C} \rightarrow R\}$. Neste R -módulo podemos definir uma multiplicação (que garantirá uma estrutura de R -álgebra a $R\langle\mathcal{C}\rangle$) através de convoluções. Se f e g são dois morfismos em $R\langle\mathcal{C}\rangle$, definimos a convolução $f * g$ da seguinte maneira:

$$(f * g)(h) := \sum_{i \circ j = h} f(i)g(j)$$

onde h é uma flecha em \mathcal{C} . A R -álgebra $R\langle\mathcal{C}\rangle$ recebe o nome de anel de Grothendieck sobre a categoria \mathcal{C} .

Veremos que esta construção apresenta propriedades interessantes, dentre as quais destacaremos:

- $R\langle\mathcal{C}_1\rangle \oplus R\langle\mathcal{C}_2\rangle \cong R\langle\mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2\rangle$, isto é, a soma direta da R -álgebra sobre a categoria \mathcal{C}_1 e a R -álgebra sobre \mathcal{C}_2 será isomorfa à R -álgebra sobre o coproduto $\mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2$;
- $R\langle\mathcal{C}_1\rangle \otimes R\langle\mathcal{C}_2\rangle \cong R\langle\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2\rangle$, isto é, o produto tensorial da R -álgebra sobre \mathcal{C}_1 com a R -álgebra sobre \mathcal{C}_2 será isomorfo à R -álgebra sobre o produto $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$.

A partir da definição dada, podemos tentar “classificar” os diferentes casos de anéis de Grothendieck que podem ser obtidos a partir de categorias finitas. Ou seja, dada uma categoria finita específica, buscaremos saber quais serão as características de seu anel de Grothendieck resultante. Com a coleta dessas informações, esperamos poder gerar mais exemplos de anéis de Grothendieck, a fim de responder à seguinte questão: dada uma R -álgebra A , é possível dizer que existe uma categoria finita \mathcal{C} tal que A seja o anel de Grothendieck de \mathcal{C} ?

Como exemplos serão vistos os anéis de Grothendieck para os casos de categorias finitas triviais, posets finitos, posets lineares finitos, árvores finitas e grupoides finitos, dentre outros.

Referências:

ROTMAN, J. J. **Advanced modern algebra**. 2 ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.

ROTMAN, J. J. **An introduction to homological algebra**. 2 ed. New York: Springer, 2008.