Relação entre frisos integrais fechados e triangulação de polígonos

Egon N. B. Araujo *
Bacharelado em Ciências da Computação - UFPR
dev.egon.araujo@gmail.com

Professora Heily Wagner (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
heilywagner@ufpr.br

Palavras-chave: Frisos, triangulação de polígonos, álgebra cluster.

Resumo:
O objeto de nossos estudos é o friso. Como este é um assunto incomum, segue uma explicação do mesmo para que o objetivo deste trabalho fique mais claro.

Podemos definir um friso como uma sequência de linhas de números inteiros com as seguintes propriedades:

- As linhas são infinitas em ambos os sentidos.
- A primeira linha é constituída somente de 0's e a segunda linha somente de 1's.
- Os números são dispostos de forma alternada, seguindo o exemplo a seguir.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
... & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & ... \\
& ... & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & ... & \\
... & & \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & \alpha_4 & & \alpha_5 & & \alpha_6 & & \alpha_7 & & \alpha_8 & & \alpha_9 & & ... \\
& ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... &
\end{array}$$

- É satisfeita a regra do friso que, para cada "diamante" do friso

$$\begin{array}{ccc}
& b & \\
a & & d \\
& c &
\end{array}$$

temos a relação $ad - bc = 1$, a qual implica que $c = \frac{ad-1}{b}$, sempre que $b \neq 0$.

*Bolsista do Programa PICME.

Um friso é definido como **integral** quando todas as suas entradas são inteiros positivos.

Um friso integral é definido como **fechado** quando este é limitado inferiormente por uma linha de 1's seguida por uma linha de 0's, obtidas seguindo a regra do friso.

Exemplo:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\ldots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \ldots \\
& \ldots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \ldots & \\
\ldots & & 2 & & 1 & & 3 & & 1 & & 2 & & 2 & & 1 & & 3 & & \ldots \\
& \ldots & & 1 & & 2 & & 2 & & 1 & & 3 & & 1 & & 2 & & \ldots & \\
\ldots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \ldots \\
& \ldots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0. &
\end{array}$$

Com essas definições, é possível mostrar que a terceira linha de um friso determina se este será fechado e integral. Neste caso, essa terceira linha é sempre periódica.

Na década de 70, o geômetra H. S. M. Coxeter estudou os padrões de frisos e, juntamente com John Conway, relacionaram frisos fechados e integrais com triangulações de polígonos. Uma triangulação de um polígono convexo, não necessariamente regular, de n lados, consiste em particioná-lo em $n-2$ triângulos, usando $n-3$ diagonais. Conway e Coxeter mostraram que tais triangulações estão em bijeção com a terceira linha dos frisos fechados e integrais, seguindo o seguinte algoritmo:

1. Etiquetar os vértices da triangulação de acordo com o número de triângulos incidentes. Considerando o ciclo correspondente de comprimento n, seguindo o sentido horário;

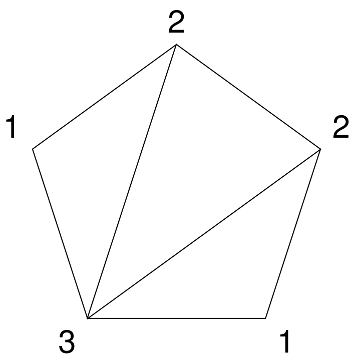
2. Escrever uma linha de 0's, seguida por uma linha de 1's;

3. Escrever a terceira linha seguindo o ciclo encontrado em *1*;

4. Completar o friso seguindo a regra do diamante. Isso incluirá a n–ésima linha composta somente de 1's e a $(n+1)$–ésima linha composta somente de 0's.

Exemplo:

A triangulação que aparece abaixo, do lado esquerdo, corresponde ao friso que aparece do lado direito.



$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\ldots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \ldots \\
& \ldots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \ldots & \\
\ldots & & \mathit{2} & & \mathit{1} & & \mathit{3} & & \mathit{1} & & \mathit{2} & & \mathit{2} & & \mathit{1} & & \mathit{3} & & \ldots \\
& \ldots & & 1 & & 2 & & 2 & & 1 & & 3 & & 1 & & 2 & & \ldots & \\
\ldots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \ldots \\
& \ldots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0. &
\end{array}$$

Neste trabalho, pretendemos exemplificar tal relação, bem como mostrar quais técnicas os autores usaram para prová-la. Tais conceitos também foram usados, mais recentemente, no estudo das álgebras cluster, que foram introduzidas por Fomin e Zelevinsky em 2002.

Referências:

CONWAY, J.; COXETER, H. S. M. Triangulated Polygons and Frieze Patterns.**The Mathematical Gazette**, v. 57, n. 400, p. 87-94, 1973.

CONWAY, J.; COXETER, H. S. M. Triangulated Polygons and Frieze Patterns (Continued).**The Mathematical Gazette**, v. 57, n. 401 , p. 175-183, 1973.

COXETER, H. S. M. Frieze Patterns. **Acta Arithmetica**, v. 18, p. 297-310, 1971.

MARTINS, M. J. B. **Os Frisos de Coxeter**. 90 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores)-Departamento de matemática, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto, 2013.