O Teorema da Função Implícita

Bruno Pilatti Oleiro
Licenciatura em Matemática - PUCPR
brunopilattioleiro@yahoo.com.br

Prof. Jorge Luis Torrejón Matos
Licenciatura em Matemática - PUCPR
jorgetorrejonm@gmail.com

Palavras-chave: Teorema da Função Implícita. Teorema do Ponto Fixo para Contrações. Método de Newton. Raiz simples de um polinômio.

Resumo:

Esse trabalho é parte do Trabalho de Conclusão de Curso no curso de Licenciatura em Matemática da PUCPR onde foi estudado o Teorema da Função Implícita (T.F.I.), cujo objetivo é demonstrar o T.F.I. de maneira simples e compreensível, com enfoque nos alunos do ensino superior. Em tal trabalho foi realizada a demonstração do teorema para o caso específico das funções $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e feita uma generalização para o caso especial $f : \mathbb{R}^{\mathrm{n}+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, para então seguir a uma aplicação do caso especial, que diz respeito às raízes simples de um polinômio real.

Na demonstração foram utilizados alguns resultados acerca de normas e sequências em $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, continuidade de aplicações de $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ em $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, Contrações, o Teorema do Ponto Fixo para Contrações, o Método de Newton, conceitos sobre derivadas e diferenciais e o Teorema do Valor Médio.

As demonstrações dos teoremas utilizados foram bem detalhadas, e todas as hipóteses foram ressaltadas, para facilitar a compreensão da validade dos mesmos. O Método de Newton é utilizado com dois objetivos, sendo o primeiro como aplicação do Teorema do Ponto Fixo para Contrações, e o segundo devido a semelhança da expressão do método com a função utilizada para demonstrar o T.F.I.

Será agora enunciado o T.F.I. e após, seguirá uma breve ideia da demonstração:

Teorema 1 (Teorema da Função Implícita) *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real com $X \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $f \in C^1(X)$. Se $f(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ para algum ponto (x_0, y_0) em X, então existem I e J intervalos abertos com $x_0 \in \mathrm{I}$ e $y_0 \in \mathrm{J}$ tal que existe uma função $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ com $\varphi(x) = y$ e $f(x, \varphi(x)) = 0$.*

A demonstração do T.F.I. foi dividida em seis passos, onde:

1. em $f(x, y)$ foi utilizado a definição de função diferenciável, ou seja:
   $f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + r(x - x_0, y - y_0)$;

2. foi definida uma função $T_x(y) = y - \frac{f(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$ e analisado a qual classe pertence essa função. A partir dessa função $T_x(y)$ e (1.), foi definida a função $\Psi(x,y) = -\frac{r(x-x_0,y-y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$ e foi feita uma análise análoga a $T_x(y)$ para Ψ;

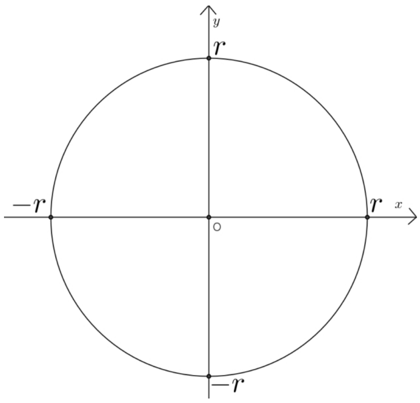
3. foi calculado os valores de $\Psi(x_0,y_0)$, $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x_0,y_0)$;

4. aplicação do Teorema do Valor Médio em Ψ;

5. pela continuidade de $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, foram encontradas condições para simplificar o quarto passo;

6. finalização da demonstração com estudos finais sobre $T_x(y)$ e aplicação do Teorema do Ponto Fixo.

Como exemplo de aplicação do T.F.I, considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$ com $r > 0$. Desta forma, tomando os pontos (x,y) tais que $f(x,y) = 0$, tem-se $x^2 + y^2 = r^2$, ou seja, uma circunferência de raio r e centro na origem.



Sabe-se que $x^2 + y^2 = r^2$ não define funções com $y = g(x)$ ou $x = g(y)$, mas, restringindo os intervalos de x e y torna-se possível definir tais funções. Sejam então, por exemplo, os domínios D_1 e D_2 dados da seguinte forma:

- $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -r \leq x \leq r \;\; e \;\; y \geq 0\}$;
- $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; x \geq 0 \;\; e \;\; -r \leq y \leq r\}$.

Logo, sob o domínio D_1 é possível ter $y = g(x)$ com $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, e sob o domínio D_2 é possível ter $x = g(y)$ com $x = \sqrt{r^2 - y^2}$.

A existência de tais funções poderia ser comprovada a partir do T.F.I. Tomando $(x_0,y_0) = (0,r)$, tem-se $f(0,r) = 0^2 + r^2 - r^2 = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,r) = 2r \neq 0$. Como $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ (em particular $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$), então existem I e J intervalos abertos com $0 \in \mathrm{I}$ e $r \in \mathrm{J}$ e existe uma função $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ com $y = \varphi(x)$, em particular, $\varphi(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Analogamente, tomando $(x_0,y_0) = (r,0)$ e como $\frac{\partial f}{\partial x}(r,0) \neq 0$, tem-se $x = \varphi(y) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Além do enfoque na "parte matemática" do teorema, foi também relatado brevemente sobre a parte histórica do mesmo, tendo início com René Descartes e o método de traçar retas tangentes à curvas, até Ulisse Dini, matemático italiano que demonstrou o teorema.

Referências:
BOYER, C.B. **História da matemática**. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.
CALLIOLI, C.A; DOMINGUES, H.H.; COSTA, R.C.F. **Álgebra linear e aplicações**. 6.ed. São Paulo: Atual, 1990.
DOMINGUES, H. H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. 4.ed. São Paulo: Atual, 2003.
EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.
FRANCO, N.B. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
IEZZI, Gelson. **Fundamentos da matemática elementar 6**: complexos, polinômios, equações. 2.ed. São Paulo: Atual, 1977.
LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol.2**. 11.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F.. **Ulisse Dini**. MacTutor History of Mathematics archive. Disponível em:
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/Dini.html>. Acesso em 18 de junho de 2016.
OLIVEIRA, César R. de. **Introdução à análise funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
SCARPELLO, G.M.; RITELLI, Daniele. **A Historical Outline of the Theorem of Implicit Functions**, 2002. Disponível em: <https://www.emis.de>. Acesso em: 18 de junho de 2016.
SPEZIALI, Pierre. **Dini, Ulisse**, Complete Dictionary of Scientific Biography. Disponível em: <http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830901176.html>. Acesso em 18 de junho de 2016.
STEWART, James. **Cálculo:** volume 2. 7.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.