

Flexágonos no Ensino de Teoria de Grupos

Eduardo Henrique da Costa Muller
Licenciatura em Matemática – UFPR
edu_muller_1@hotmail.com

Prof. Elenilton Vieira Godoy (Orientador)
Departamento de Matemática – UFPR
elenilton@ufpr.br

Palavras-chave: flexágonos, teoria de grupos, ensino.

Resumo:

Flexágonos são fascinantes polígonos feitos de papel que quando dobrados de determinada maneira revelam faces ocultas. Segundo Gardner (1988), os flexágonos foram inventados em Princeton em 1939 pelo topologista Arthur H. Stone. Ele tinha folhas de anotações do padrão americano, cuja largura era maior que o padrão inglês (cerca de 3cm). Então, para fazer as folhas caberem em seu fichário inglês, o estudante recortava as folhas deixando de lado tiras de papel.

Em seu tempo ocioso, Stone dobrava de diferentes formas estas tiras de papel, e uma de suas dobraduras foi vincar diagonalmente a tira formando dez triângulos equiláteros. Ele girou esta tira em torno de si mesma em três meias-voltas e colocou os dois triângulos nos extremos, achatando o papel e formando a figura de um hexágono regular.

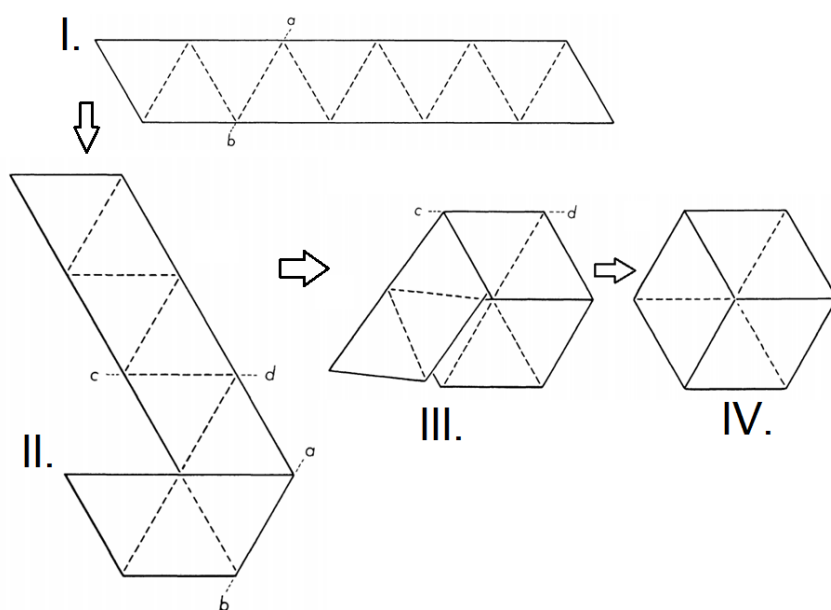


Figura 01: Montagem de um flexágono, com seus passos numerados. Dobra-se para trás nas linhas destacadas e cola-se o primeiro e último triângulos.

Fonte: Gardner (1988) (adaptado).

Quando Stone pinçou dois triângulos adjacentes ao mesmo tempo e puxou os vértices do hexágono em direção ao seu centro, o hexágono se abriu novamente, como o desabrochar de uma flor, e mostrara uma nova face totalmente nova. Ou seja, se as faces de cima e de baixo forem pintadas de cores diferentes, ao se realizar esta dobra, o hexágono mostraria uma face totalmente em branco e uma das faces pintadas “desapareceria”, como mostra a imagem abaixo:

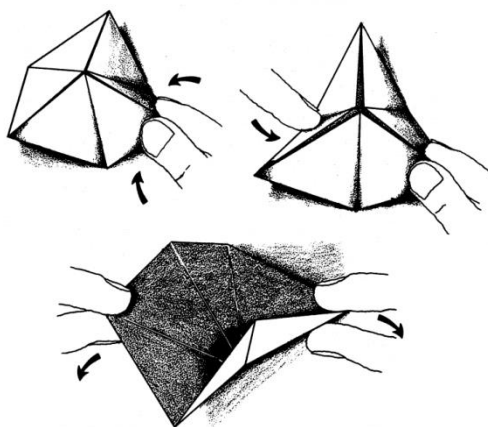


Figura 02: Movimento de “flexionar” o objeto, comumente chamado “pinch flex” (dobra de pinça).
Fonte: Gardner, 1998

Esta estrutura de três faces foi denominada por Stone por “flexágono”. Após uma noite de reflexão, o matemático deduziu que poderia dobrar uma estrutura semelhante com seis faces ao invés de três, e com isto conseguiu construir um flexágono de seis faces. A partir daí, o estudante organizou um “comitê do flexágono” com seus amigos de faculdade - o matemático Bryant Tuckerman, o físico Richard P. Feynman e o professor John W. Tukey para descobrir mais sobre os mistérios destas estruturas.

Posteriormente, os modelos foram renomeados por hexaflexágonos (“hexa” por sua forma hexagonal e “flexágono” pela sua habilidade de revelar sua propriedade apenas quando flexionado). O primeiro modelo inventado foi o TriHexaFlexágono (pois tinha 3 faces no total), depois foi criado o HexaHexaFlexágono (devido ao total de 6 faces). Conforme a popularidade, novos modelos surgiram com diferentes formas poligonais e números de faces, respeitando-se a nomenclatura imposta. Aumentando-se a cadeia e a disposição dos triângulos, o comitê descobriu que poderiam ser feitos hexaflexágonos de um número qualquer de faces.

Nosso estudo se concentrará no TriHexaFlexágono. Através de definições de posições que nos permitam estudar cada face do flexágono que repousa num plano, vamos definir um conjunto de ações (movimentos) realizados neste objeto que o trazem em coincidência consigo mesmo, e mostrar que este conjunto com a operação de composição se constitui no grupo diedral D_3 (que é isomorfo ao grupo de permutações S_3 , conforme o Teorema de Cayley).

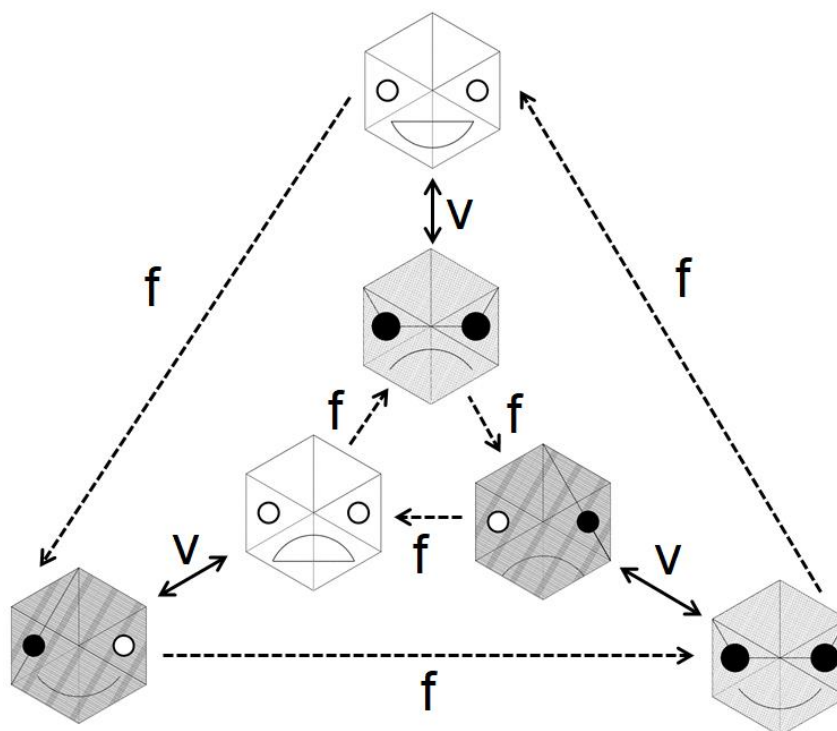


Figura 03: Diagrama do grupo diedral D_3 gerado pelos movimentos definidos por “f” (flexionar) e “v” (virar) o flexágono.

Fonte: Autor, adaptado de Hilton & Pedersen (2010)

Referências:

BEIER, J.; YACKEL, C. Groups Associated to TetraFlexagons. In: BEINEKE, J.; ROSENHOUSE, J. (Ed.). **The Mathematics of Various Entertaining Subjects: Research in Recreational Math**. Princeton and Oxford. Princeton University Press, 2016. p. 81-93.

GARDNER, M. Hexaflexagons. In: _____. **Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions: The First Scientific American Book of Puzzles and Games**. Chicago and London. University of Chicago Press, 1988. p. 1-14.

HILTON, P.; PEDERSEN, J. Group Theory: The Faces of Trihexaflexagon. In: _____. **A Mathematical Tapestry: Demonstrating the Beautiful Unity of Mathematics**. Cambridge. Cambridge University Press, 2010. p.195-205.

MADACHY, J. Fun With Paper. In: _____. **Mathematics on Vacation**. New York. Charles Scribner's Sons, 1966. p.55-83.

POOK, L. **Serious Fun With Flexagons: A Compendium and Guide**. London. Springer, 2009.

_____. **Flexagons Inside Out**. Cambridge. Cambridge University Press, 2003.