Números: O Império dos Irracionais

XIII Brincando de Matemático

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor:	Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam
Estudantes:	Anna Paula Chiarello Marcon Bianca Elena Wiltuschnig Eduardo Magalhães de Castro Gabriel Felipe Dalla Stella João Antonio Francisconi Lubanco Thomé Letícia Ferreira Gomes Luiz Henrique Lara dos Santos Marcel Thadeu de Abreu e Souza Matheus Daniel Galvão de Melo Otávio Cordeiro Santana Thiago Kenhiti Yoshida Vitor Emanuel Gulisz Vivian de Paula Ribeiro
Site:	www.petmatematica.ufpr.br
Facebook:	www.facebook.com/PetMatUFPR
E-mail:	petmatufpr@gmail.com
Telefone:	(41) 3361-3672
Data do Evento:	18 a 21 de Julho de 2017

Curitiba, julho de 2017.

Apresentação

Prezado Estudante!

É uma grande alegria tê-lo conosco nesta edição do Brincando! Tenho certeza que estes dias serão muito especiais para a sua formação matemática e trarão muitos conhecimentos novos para você!

O Brincando é uma atividade de extensão gratuita da UFPR planejada, organizada e conduzida pelos alunos do PET - Matemática com o intuito de oferecer aos estudantes de Ensino Médio que possuam interesse e potencial em Matemática a oportunidade de estudar e aprender sobre um tema matemático relevante apresentado de forma acessível e lúdica. Além disso, o Brincando oferece ao estudante uma oportunidade de conhecer melhor não somente a infraestrutura física da UFPR, mas também de interagir com docentes e estudantes de Matemática.

O tema desta edição suscita muito interesse, já que convivemos com números durante todas as fases da vida. Serão apresentados muitos resultados e curiosidades em todos os dias, sendo que o tema principal foi dividido em quatro partes, uma para cada dia. A proposta nesta atividade é aprender e ensinar matemática de forma leve e descontraída, sem minimizar o aspecto formal e abstrato do tema.

Gostaria de agradecer, de maneira especial, aos colegas

do Departamento de Matemática que têm apoiado este trabalho, à Direção do Setor de Ciências Exatas e, de forma especial, ao Prof. Eduardo Barra, Pró-Reitor de Graduação da UFPR, pelo apoio ao projeto e também à ajuda com a impressão do material. Agradeço também a cada um dos estudantes do PET, pela dedicação e esmero com que realizam todas as atividades!

Prof. José Carlos Eidam
Tutor do PET-Matemática
Chefe do Departamento de Matemática

Sumário

1 Números e Conjuntos **7**

1.1 Introdução 7
1.2 Operações com Conjuntos 10
1.3 Operações com os elementos 12
1.4 Números Construtíveis 13
1.5 Propriedades dos Números Construtíveis . . . 14
1.6 Enumerabilidade 20
1.7 Cardinalidade 21
1.8 Conjuntos enumeráveis 22
1.9 O produto cartesiano 25
1.10 Conjuntos não-enumeráveis 28
1.11 A Hipótese do Contínuo 30

2 Números Racionais e Irracionais **33**

2.1 Construção dos Números Racionais 33
2.2 Operações nos Racionais 36
2.3 Representação decimal 38
2.4 Números Irracionais 42
2.5 Raízes racionais de polinômios com coeficientes inteiros 45
2.6 Números Trigonométricos 48
2.7 Números Logarítmicos 51
2.8 Números Algébricos e Transcendentes 52

3 Frações Contínuas e Aproximações **59**
3.1 Introdução 59
3.2 Convergentes e aproximações 64
3.3 Aproximação de números irracionais 72
3.4 Aproximações melhores 78
3.5 Aproximações a menos de $1/n^2$ 84
3.6 Retoques finais 89

4 Sequências e Séries **91**
4.1 Bases Numéricas 91
4.2 Sequências 98
4.3 Convergência e Limites 100
4.4 Séries Numéricas 109
4.5 Conjunto de Cantor 121

Exercícios Resolvidos **131**

Referências Bibliográficas **139**

Capítulo 1

Números e Conjuntos

1.1 Introdução

Nesta seção, introduziremos os conceitos que servirão de base para nosso estudo. Começamos então com o conceito de conjunto. Afinal, o que é um conjunto? Esta é um questão matemática bastante delicada cuja solução foge do escopo deste trabalho, mas podemos nos contentar com a ideia intuitiva de conjunto, a saber, um coleção de objetos satisfazendo determinada propriedade.

- A letra grega $\emptyset$ denotará o conjunto vazio, ou seja, o conjunto que não possui nenhum elemento.

- Denotaremos um conjunto não vazio por uma letra maiúscula do nosso alfabeto, com exceção de alguns casos, os quais ficarão claros no contexto.

  Exemplo 1.1.1. $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{\triangle, \square\}$

- Se x é um elemento de um conjunto A escreveremos $x \in A$ (lê-se x pertente a A). Se todos os elementos de um conjunto A pertencem a um conjunto B, escreveremos

$A \subset B$ (lê-se A está contido em B). E se x não é um elemento de um conjunto A escrevemos $x \notin A$ (lê-se x não pertence a A)

Existem alguns conjuntos especiais, os quais usamos frequentemente, que recebem nomes e notações também especiais

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ (o conjunto dos números Naturais)
- $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ (o conjunto dos números Inteiros)
- $\mathbb{Q} = \{m/n \ ; m, n \in \mathbb{Z}\, n \neq 0\}$ (o conjunto dos números Racionais)

Estes três conjuntos acima estão relacionados da seguinte maneira:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

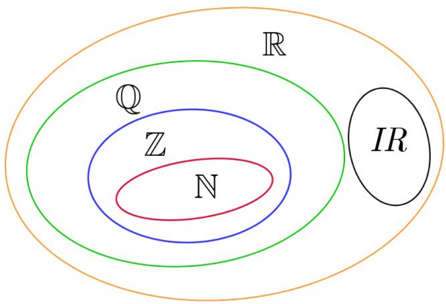
Agora que falamos um pouco sobre conjuntos, vamos introduzir o conceito de número (lembrando que até agora nos referimos aos números apenas como símbolos). Para falar sobre o conceito de número, vamos voltar um pouco no tempo, mais especificamente para a época da Grécia antiga. Para os gregos, o conceito de número estava ligado ao conceito de medida, cada número representava um *tamanho*. Acreditava-se que toda a natureza poderia ser descrita através de números, e para eles a natureza era perfeita, o que os levou a acreditar que todos os números existentes apresentavam a mesma perfeição, sendo mais específico, todos os números podiam ser escritos como frações de números inteiros (todos os números pertenciam ao conjunto dos números racionais). Hoje sabemos que não é bem assim, existem números que não podem ser escritos como fração de dois inteiros, como por exemplo o famoso $\sqrt{2}$. A existência desses números motivou a criação de dois outros conjuntos especiais, o conjunto dos números irracionais (denotado por $\mathbb{IR}$) que é o conjunto de todos os números que não podem ser escritos como fração de dois inteiros e o conjunto dos números reais (denotado por $\mathbb{R}$), que é o conjunto de todos os números que são racionais ou irracionais. Em termos matemáticos, podemos escrever:

- $\mathbb{IR} = \{x;\ x \notin \mathbb{Q}\}$
- $\mathbb{R} = \{x;\ x \in \mathbb{Q}\ ou\ x \in \mathbb{I}\}$

Estes dois últimos conjuntos também se relacionam entre si. E o conjunto dos números reais se relaciona com os outros conjuntos apresentados anteriormente da seguinte forma:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $\mathbb{IR} \subset \mathbb{R}$

Daí surge aquela famosa imagem que ilustra essas relações



Essa imagem é a que vemos por aí toda vez que se toca no assunto conjuntos numéricos. Nesse momento, parece não ter nada mais a dizer sobre estes conjuntos, certo? Pois é, na verdade tem muito mais o que dizer, e é aqui que as coisas se tornam interessantes. Por exemplo, repare que quando escrevemos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ estamos dizendo que todos os elementos de $\mathbb{N}$ pertencem ao conjunto $\mathbb{Z}$, ou seja, $\mathbb{N}$ *cabe* dentro de $\mathbb{Z}$, o que nos passa a ideia de que o conjunto $\mathbb{Z}$ é maior que o conjunto $\mathbb{N}$ em algum sentido. Mas se pararmos pra pensar, estes dois conjuntos possuem uma infinidade de elementos. É natural neste momento a pergunta: Se $\mathbb{Z}$ é maior que $\mathbb{N}$, existem infinitos maiores do que outros? No decorrer desta apostila, formalizaremos e responderemos esta pergunta e traremos muitos outros resultados interessantes sobre relações entre esses conjuntos numéricos.

1.2 Operações com Conjuntos

Quando mexemos com objetos matemáticos, um dos nossos anseios é fazer contas com eles, e isso nos motiva a definir operações entre estes objetos. Então aqui vamos definir operações básicas entre conjuntos, e que vão nos auxiliar posteriormente.

Definição 1.2.1. Dados dois conjuntos A e B, definimos

- A intersecção de A e B como o conjunto de todos os elementos x tais que $x \in A$ **e** $x \in B$, e denotamos este conjunto por $A \cap B$, ou seja:

$$A \cap B = \{x\,;\; x \in A \; e \; x \in B\}$$

- A união de A e B como o conjunto de todos os elementos x tais que $x \in A$ **ou** $x \in B$, e denotaremos este conjunto por $A \cup B$, ou seja:

$$A \cup B = \{x\,;\; x \in A \; ou \; x \in B\}$$

- O produto cartesiano de A e B como sendo o conjunto de **pares ordenados** (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$, e denotamos este conjunto por $A \times B$, ou seja:

$$A \times B = \{(x, y)\,;\, x \in A\ e\ y \in B\}$$

Podemos generalizar estas operações para um número qualquer finito de conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ da seguinte maneira:

- $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ é o conjunto de todos os elementos x tais que $x \in A_i$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.

- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ é o conjunto de todos os elementos x tais que $x \in A_i$ para algum $i = 1, 2, \cdots, n$.

- $A_1 \times A_2 \cdots \times A_n$ é o conjunto de todas as **n-uplas ordenadas** $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ tais que $x_i \in A_i$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.

Em resumo, a intersecção de um certo número n de conjuntos é o conjunto dos elementos comuns à estes. A união de um certo número n de conjuntos é o conjunto de todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos unidos. O produto cartesiano de um certo número n de conjuntos em uma certa ordem é o conjunto das listas da forma $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de elementos de cada conjunto na mesma ordem. Definidas essas operações, podemos fazer algumas contas com conjuntos.

Exemplo 1.2.2. Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{\square, \triangle\}$ e $C = \{2, 5\}$. Calcule $A \cup B$, $A \cap C$ e $B \times C$.
Resolução:

$$A \cup B = \{1, 3, 5, \triangle, \square\}$$

$$A \cap C = \{5\}$$

$$B \times C = \{(\square, 2), (\square, 5), (\triangle, 2), (\triangle, 5)\}$$

Fica como exercício encontrar $A \times B \times C$.

1.3 Operações com os elementos

A partir de agora vamos apenas considerar conjuntos numéricos, uma vez que já sabemos fazer contas com seus elementos (que são números). Também porque a ênfase desta apostila não é estudar operações com elementos de conjuntos abstratos. Considere o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Neste conjunto sabemos somar e multiplicar elementos, que são números. Vamos relembrar algumas propriedades destas operações:

Propriedades da Soma: Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, então:

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x = x + 0$
4. $x + (-x) = 0 = (-x) + x$

Propriedades da Multiplicação: Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, então:

1. $xy = yx$
2. $(xy)z = x(yz)$
3. $1x = x = x1$
4. $x(\frac{1}{x}) = 1$ para $x \neq 0$
5. $x(y + z) = xy + xz$

Relembremos também que essas propriedades valem para os números racionais e que soma e produto de dois números racionais também é um número racional. Por curiosidade, não apenas os reais e os racionais apresentam esta estrutura. Para alguns conjuntos abstratos nos quais conseguimos somar e multiplicar também constatamos essas propriedades, chamamos estes conjuntos especiais de *corpos*. Falaremos agora de um outro conjunto que possui esta estrutura.

1.4 Números Construtíveis

Lembremos dos conjuntos especiais introduzidos na seção anterior, mais especificamente $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ e também lembremos da relação de inclusão entre eles

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}\,.$$

Neste e nos próximos capítulos, apresentaremos outros conjuntos especiais que aparecem *no meio* dessas relações. Nesta seção, apresentaremos o conjunto dos *números construtíveis*. Para a geometria euclidiana, construir um segmento com régua e compasso significa que podemos usar apenas os seguintes procedimentos para construí-lo:

- Traçar uma reta passando por dois pontos.
- Traçar uma circunferência conhecendo seu centro e um de seus pontos.

Definição 1.4.1. Seja x um número real. Dizemos que x é um número construtível se $x = 0$ ou se conseguimos construir um segmento de reta com tamanho $|x|$, à partir de um segmento de reta tomado como unidade.

1.5 Propriedades dos Números Construtíveis

Vamos assumir aqui que podemos construir, usando régua e compasso, perpendiculares, paralelas, mediatrizes e bissetrizes.

Proposição 1.5.1. Se x e y são dois números construtíveis então $x + y$ também é um número construtível.

Demonstração. Considere o segmento AB cujo tamanho é x, construa à partir do ponto B um segmento de reta BC cujo tamanho é y (possível pois y é construtível) e de modo que A, B e C sejam colineares. Desse modo $AC = AB + BC$ e o tamanho de AC é $x + y$. □

Proposição 1.5.2. Se x é um número construtível então $-x$ também é um número construtível.

Demonstração. $|-x| = |x|$, portanto segue da definição que $-x$ é construtível. □

Proposição 1.5.3. Se x e y são dois números construtíveis então $x - y$ também é um número construtível.

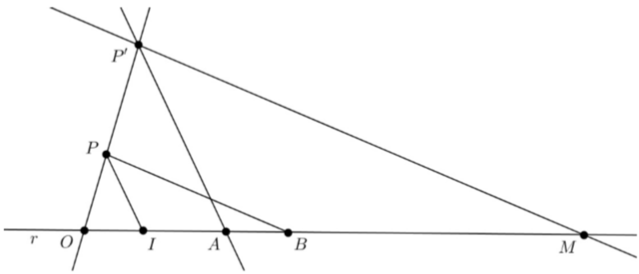
Demonstração. Como temos que a soma de dois números construtíveis também é construtível, e, pela proposição anterior, temos que $(-y)$ é construtível. Logo $x+(-y) = x-y$ é construtível. □

Proposição 1.5.4. Se x e y são dois números construtíveis então xy também é um número construtível.

Demonstração. Considere na reta r os pontos A,B,I e O tais que $OI = 1$, $OA = x$ e $OB = y$, e seja P um ponto fora dela. Construa o trângulo OIP e em seguida um paralela à IP passando por A. Seja P' a intersecção dessa paralela com a reta OP. Repare que os triangulos OIP e OAP' são semelhantes e portanto $\frac{OI}{OA} = \frac{OP}{OP'}$. Agora construa o triângulo OBP e em seguida uma reta paralela à BP passando por P'. Seja M a intersecção dessa paralela com a reta r. Repare que os triangulos OBP e OMP' são semelhantes e portanto $\dfrac{OB}{OM} = \dfrac{OP}{OP'}$. Juntando as informações temos $\frac{OP}{OP'} = \frac{OI}{OA} = \frac{OB}{OM}$, e portanto $\frac{OI}{OA} = \frac{OB}{OM}$, substituindo os valores de OA,OB e OI temos que:

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{OM}$$

e portando $xy = OM$.



$\square$

Proposição 1.5.5. Se $x \neq 0$ é um número construtível então $x^{-1} = 1/x$ também é um número construtível.

Demonstração. Considere na reta r os pontos O, I e A tais que $OI = 1$ e $OA = x$. Construa o ponto médio M de OA. Trace uma circunferência de centro M e que passa por O, repare que esta circunferência intercepta r nos pontos O e A. Em seguida construa uma circunferência de centro O que passa por I, esta nova circunferência intercepta a primeira circunferência em dois pontos, tome P como sendo um deles. Passando por P, trace uma perpendicular à reta r e tome Q como sendo a intersecção entre r e esta perpendicular.Repare que os triângulos OQP e AQP são retângulos de hipotenusas OP e PA, respectivamente, pois PQ é perpendicular à OA. Como OA é diâmetro da circunferência que contém P, o ângulo OPA é reto, e portanto o triangulo OPA é retângulo de hipotenusa OA. Para simplificar, façamos $OQ = a$, $QA = x - a$, $PA = y$ e $PQ = h$. E como P está na circunferência que contém I, temos que $OP = 1$. Pelo Teorema de Pitágoras obtemos as seguintes equações:

$$x^2 = 1 + y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1 \tag{1.1}$$

$$1 = a^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 1 - a^2 \tag{1.2}$$

$$y^2 = (x - a)^2 + h^2 \Rightarrow y^2 = x^2 - 2xa + a^2 + h^2 \tag{1.3}$$

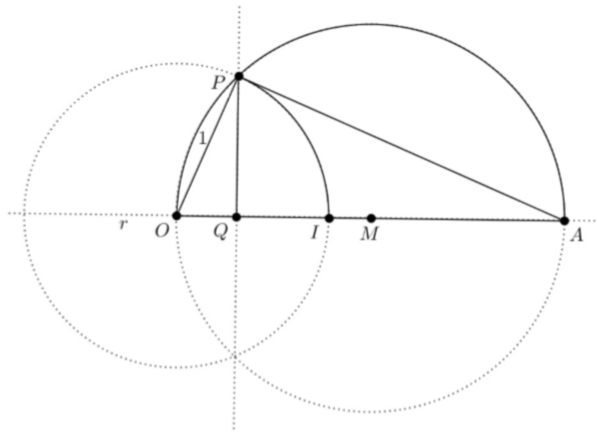
Isolando $2xa$ na equação (1.3) obtemos:

$$2xa = x^2 - y^2 + a^2 + h^2$$

usando as relações (1.1) e (1.2) temos:

$$2xa = 1 + a^2 + (1 - a^2) = 2$$

concluímos que $a = 1/x$.



□

Usando as proposições anteriores, podemos concluir que se x e y são dois números construtíveis, então x/y também é construtível, basta fazer $x/y = x(y^{-1})$. Assim, podemos concluir que todos os números racionais são construtíveis. E como a soma, produto e o inverso de um números construtíveis também é construtível, o conjunto dos números construtíveis possui uma estrutura de corpo, uma vez que as operações de soma e produto nesse conjunto são as mesmas dos números reais e portanto apresentam as mesmas propriedades. Até agora, sabemos que todos os racionais são construtíveis; a pergunta natural é: *existem mais?* A resposta fica por conta da nossa próxima proposição.

Proposição 1.5.6. Se $x > 0$ é um número construtível então $\sqrt{x}$ também é um número construtível.

Demonstração. Considere na reta r os pontos O, I e A tais que $OI = 1$ e $IA = x$. Construa M, o ponto médio de OA. Trace uma circunferência de centro M passando por O, e repare que essa circunferência intercepta r também em A.

Construa uma perpendicular à r passando por I. Esta perpendicular intercepta a circunferência em dois pontos, tome P como sendo um deles. Novamente temos que os triangulos OPA, OIP e PIA são retângulos de hipotenusas OA, OP e PA, respectivamente. Para simplificar, façamos $IP = h$, $PA = y$ e $OP = z$ e como $OI = 1$ e $IA = x$ temos que $OA = x + 1$. Pelo Teorema de Pitágoras obtemos as seguintes equações:

$$(x+1)^2 = z^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = z^2 + y^2 \tag{1.4}$$

$$z^2 = h^2 + 1 \tag{1.5}$$

$$x^2 + h^2 = y^2 \Rightarrow h^2 = y^2 - x^2 \tag{1.6}$$

isolando $2x$ na equação (1.4) temos:

$$2x = z^2 - 1 + y^2 - x^2$$

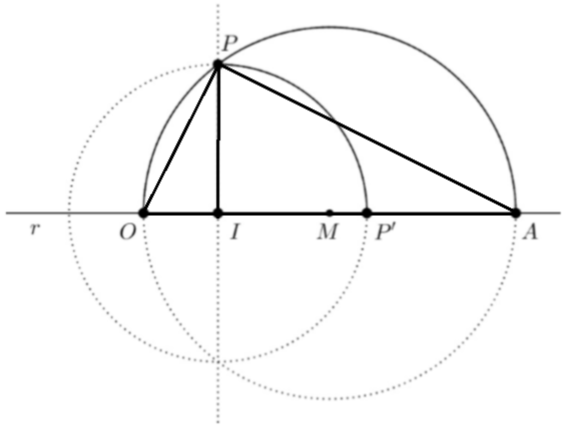
usando a equação (1.6):

$$2x = z^2 - 1 + h^2$$

e finalmente, usando a equação (1.5) obtemos

$$2x = (h^2 + 1) - 1 + h^2 = 2h^2$$

e assim concluímos que $h = \sqrt{x}$.



□

Temos então que o conjunto dos números construtíveis *tem mais gente* do que o conjunto dos números racionais. Mas nem todo número real é construtível, um exemplo famoso é o número $\sqrt[3]{2}$, que não pode ser construído por régua e compasso. Uma justificativa simples é a de que, quando fazemos uma construção usando régua e compasso, representativamente, estamos lidando com equações de retas e circunferências. Retas possuem equacões lineares, ou seja, polinômios de grau 1. Circunferências possuem equações quadráticas, ou seja, polinômios de grau 2. O que significa que, através de manipulações algébricas usando equações de circunferências e retas, obtemos apenas polinômios de grau no máximo 2. Porém, $\sqrt[3]{2}$ é raiz do polinômio $x^3 - 2$ que é um polinômio de grau 3 e não é muito difícil de imaginar que $\sqrt[3]{2}$ não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros de grau menor, por isso, este número não é construtível.

Então temos aqui um conjunto de contém todos os números racionais e possui ainda outros elementos irracionais mas ainda assim, nem todos os reais são elementos deste conjunto. Vamos denotar o conjunto de todos os números construtíveis por $\mathcal{C}$. Pelo que acabamos de ver, podemos relacionar este conjunto aos conjuntos especiais da seção anterior da seguinte forma:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathcal{C} \subset \mathbb{R}$$

Existem mais conjuntos especiais *entre* os naturais e os reais? A resposta é sim. Quais são? Acalme-se, apresentaremos eles no decorrer desta apostila. Se existe essa relação de ordem entre esses conjuntos especiais, podemos medir o *tamanho* deles? A resposta é sim. Como? Esse é o tema do nosso próximo capítulo.

1.6 Enumerabilidade

Agora que já relembramos e aprofundamos alguns conceitos básicos sobre números e conjuntos numéricos e fomos apresentados ao interessante conjunto dos números construtíveis, vamos nessa seção abordar um conceito matemático conhecido por *enumerabilidade*. Veremos como a enumerabilidade tange a ideia de infinitude, algo que intriga os filósofos e matemáticos desde os primórdios do pensamento humano. Entre esses, o alemão *Georg Cantor* foi um grande protagonista no advento dessa nova abordagem na segunda metade do século XIX.

Georg Cantor foi um matemático alemão nascido em 1845. No ano de 1874, ele publicou um artigo que deu início a toda uma área da matemática chamada Teoria dos Conjuntos. Suas ideias eram tão revolucionárias e disruptivas que muitos dos contemporâneos de Cantor não apenas as rejeitavam, mas criticavam e humilhavam pessoalmente o virtuoso matemático, que depois de tanto trabalhando incansavelmente em sua bizarra e fascinante teoria veio perder a sanidade e passou os últimos anos de sua vida sozinho em um manicômio. Mas seu trabalho não foi em vão e hoje o legado de Cantor é reconhecido como um dos mais importantes na história da matemática moderna.

1.7 Cardinalidade

Para estudar os diferentes *tamanhos* de conjuntos infinitos, vamos precisar estender a ideia de medir conjuntos finitos. Chamamos de *cardinalidade* de um conjunto finito o número de elementos que ele possui. Então é fácil ver que o conjunto $A = \{3, 5, 8\}$ possui cardinalidade 3, pois podemos simplesmente *contar* os elementos de A, e escrevemos $\#A = 3$.

Agora, considerando o conjunto $B = \{2, 7, 16\}$ sabemos que $\#B = 3 = \#A$. Aqui Cantor observou algo curioso: não é possível estender essa ideia para conjuntos infinitos pois não podemos contar seus elementos, mas podemos medir conjuntos não por contagem, mas por **correspondência**.

Bijeção

A ideia é a seguinte: vamos supor que não sabemos contar e alguém nos diz que o conjunto A possui cardinalidade 3. Cantor percebeu que podemos garantir que a cardinalidade de B é 3 mostrando que $\#B = \#A$ através de um processo de correspondência chamado *bijeção*, isto é, uma correspondência de elementos *um a um*.

A	B
3	2
5	7
8	16

Para conjuntos finitos, é evidente que $\#A = \#B$ se, e somente se existe alguma bijeção entre A e B, e portanto, esta é uma maneira confiável de se medir conjuntos finitos. O interessante desse novo método é que ele não apresenta problemas quando tentamos estender ao caso de conjuntos infinitos, o que é justamente a proposta. Poderemos, em breve, falar de **cardinalidade de conjuntos infinitos** e o procedimento de encontrar bijeções é a principal ferramenta que nos trará uma forma de *classificar* esses tamanhos diferentes de conjuntos infinitos.

1.8 Conjuntos enumeráveis

Talvez você já tenha se cansado de ouvir falar dos números naturais, mas o fato é que eles representam um importantíssimo alicerce para o estudo dos conjuntos pois a infinitude de $\mathbb{N}$ é o ponto de partida da nossa investigação. Isso porque Cantor, intuitivamente entendia que a maneira mais clara de discriminar tamanhos para conjuntos infinitos era se eles apresentam ou não uma *enumeração*, isto é, um modo de contar ou listar os elementos de tal conjunto.

Definição 1.8.1. Um conjunto A é *enumerável* se ele admite uma bijeção com o conjunto $\mathbb{N}$.

Os próprios naturais

Teorema 1.8.2. O conjunto $\mathbb{N}$ é enumerável.

Pela nossa definição, devemos achar uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e ele mesmo e isso não deve ser difícil. De fato, usamos aqui a bijeção mais natural possível que chamamos de *identidade*. A identidade é uma bijeção que associa um elemento a ele mesmo,

$$\begin{array}{c|c} \mathbb{N} & \mathbb{N} \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Ou, como função

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & f(n) = n \end{array}$$

Isso, portanto, nos garante que o conjunto dos naturais é enumerável, trivialmente e denotamos $\#\mathbb{N} = \aleph_0$. Mostraremos agora alguns conjuntos que, de maneira menos óbvia, apresentam a mesma cardinalidade que os naturais.

Os pares

Teorema 1.8.3. O conjunto dos números pares é enumerável.

Aqui observaremos algo intrigante, pois é evidente que os pares são apenas uma parte de todos os números naturais; metade deles, na verdade. Como pode ser então que possuem o mesmo número de elementos? Pois é, esse assunto diversas vezes traz resultados contra intuitivos, mas podem ser facilmente demonstrados.

A bijeção que fará isso por nós é relativamente natural, novamente. Ela tomará o número n e associará a ele o número $2n$.

$\mathbb{N}$	$2\mathbb{N}$
0	0
1	2
2	4
3	6
$\vdots$	$\vdots$

Esta associação é realmente um-a-um, o que nos comprova a enumerabilidade dos números pares. De maneira totalmente análoga, é fácil ver se $k\mathbb{N}$ é o conjunto dos múltiplos de qualquer número natural k, então $k\mathbb{N}$ é enumerável.

O conjunto dos inteiros

Teorema 1.8.4. O conjunto dos números inteiros é enumerável.

Novamente temos um resultado curioso, pois poderíamos imaginar que em $\mathbb{Z}$ há o dobro de elementos de $\mathbb{N}$. A associação que nos evidencia a enumerabilidade de $\mathbb{Z}$ é a seguinte: a cada número ímpar associaremos um inteiro positivo e a cada número par associaremos um inteiro negativo:

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$
0	0
1	1
2	-1
3	2
4	-2
$\vdots$	$\vdots$

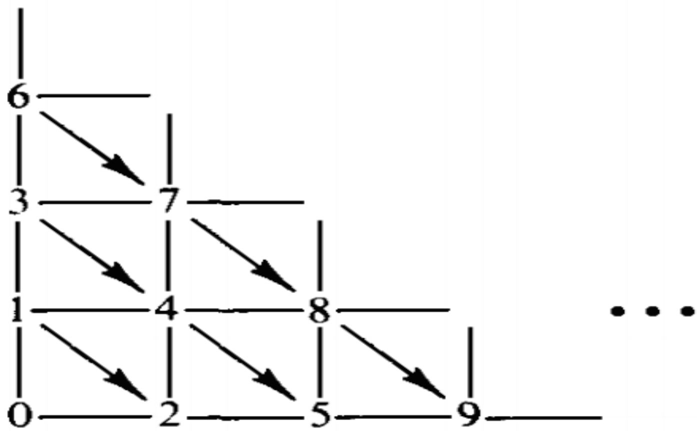
Podemos também escrever a função explicitamente:

$$
\begin{array}{rcll}
f: \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \\
n & \longmapsto & f(n) & = \begin{cases} -\dfrac{n}{2}, \text{ se } n \text{ é par,} \\[2ex] \dfrac{n+1}{2}, \text{ se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}
\end{array}
$$

1.9 O produto cartesiano

Teorema 1.9.1. O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

De fato, é possível achar uma bijeção $f(m,n)$. Na figura abaixo, o valor de $f(m,n)$ está exposto na posição (m,n) no plano cartesiano.



O leitor pode verificar os primeiros casos o comportamento da função explícita:

$$
\begin{array}{rcll}
f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} & \\
(m,n) & \longmapsto & f(m,n) & = \frac{1}{2}[(m+n)^2 + 3m + n]
\end{array}
$$

Os racionais

Teorema 1.9.2. O conjunto dos números racionais é enumerável.

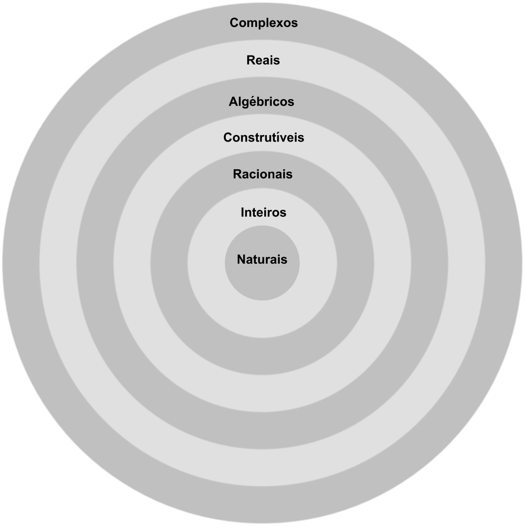
Aqui encontramos a primeira demonstração mais elaborada pois a bijeção a ser encontrada não é tão natural. Uma ideia é que podemos dispor todos os números racionais em uma tabela

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\[2ex]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \cdots \\[2ex]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \cdots \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Na tabela acima, ainda temos vários números repetidos, como 1/2 e 2/4. O que fazemos é retirar da tabela todas as frações redutíveis e em seguida podemos enumerar os números de $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\[2ex]
\frac{2}{1} & \times & \frac{2}{3} & \times & \cdots \\[2ex]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \times & \frac{3}{4} & \cdots \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Números construtíveis e algébricos



Uma das intenções desse curso é mostrar que existem importantes conjuntos numéricos além daqueles com os quais temos contato no Ensino Fundamental, como podemos notar na imagem acima. Conhecemos os *números construtíveis* e conheceremos os *números algébricos* nos capítulos seguintes, mas aqui faremos apenas um breve comentário sobre a cardinalidade desses conjuntos.

Observe que começamos falando dos naturais e depois fomos *crescendo*: adicionamos os negativos para obter o conjunto $\mathbb{Z}$, adicionamos as frações e obtemos $\mathbb{Q}$. Continuando nesse raciocínio, nós vimos que existem elementos construtíveis que não são racionais, como $\sqrt{2}$ por exemplo. Prosseguindo, obtemos o conjunto dos números algébricos com ainda mais elementos, mas o fato é que em cada uma dessas etapas **a cardinalidade se manteve**. Onde estão os diferentes tamanhos de infinitos então?

1.10 Conjuntos não-enumeráveis

Os reais

Vamos mostrar um primeiro conjunto com cardinalidade maior do que a cardinalidade dos naturais.

Teorema 1.10.1. O intervalo aberto $(0,1)$ é não-enumerável.

Para mostrarmos isso, nos basearemos na demonstração feita por Cantor que ficou conhecida como *o método da diagonal de Cantor*. Começaremos supondo que o conjunto $I = (0,1)$ é, de fato, enumerável e encontraremos uma contradição.

Bom, se I é enumerável, então podemos encontrar uma bijeção entre I e $\mathbb{N}$. Em outras palavras, isso significa que é possível, de alguma maneira, **listar** todos os elementos de I. O que fazemos agora é construir essa lista que sabemos que, pela nossa suposição, deve existir e ela será algo desse tipo:

$$\begin{array}{c|c}
1 & 0,384721... \\
2 & 0,587439... \\
3 & 0,759485... \\
4 & 0,284735... \\
5 & 0,048327 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Então **todos** os números entre 0 e 1 devem estar nessa lista, certo? Mas o fato é que sempre podemos achar um elemento que pertence a I, mas não está na suposta lista! Fazemos isso da seguinte maneira. Imagine que a parte dos algarismos depois da vírgula forma uma tabela, uma *matriz infinita* e então construiremos nosso novo elemento olhando para a *diagonal* dessa matriz.

$$\begin{matrix} \mathbf{3} & 8 & 4 & 7 & 2 & 1 & \dots \\ 5 & \mathbf{8} & 7 & 4 & 3 & 9 & \dots \\ 7 & 5 & \mathbf{2} & 4 & 8 & 5 & \dots \\ 2 & 8 & 4 & \mathbf{7} & 3 & 5 & \dots \\ 0 & 4 & 8 & 3 & \mathbf{2} & 7 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

- O primeiro algarismo do nosso número será, obviamente, 0.
- O segundo algarismo será 1 caso o algarismo na posição 1×1 seja 2; será 2 caso contrário
- O terceiro algarismo será 1 caso o algarismo na posição 2×2 seja 2; será 2 caso contrário
- O quarto algarismo...

Nesse caso nosso número ficará algo do tipo

$$0,2212121...$$

e não deve ser difícil ver que não é possível que ele pertença a essa lista. Ela é portanto, incompleta e segue que o conjunto I é não-enumerável.

De fato é possível construir vários elementos fora dessa lista como $0,1131313...$ por exemplo. O importante é que não importa como você construa essa lista, esse procedimento sempre vai gerar um número fora dela.

Isso já nos diz que não é possível que $\mathbb{R}$ seja enumerável pois $I \subset \mathbb{R}$ já não é. A cardinalidade do conjunto dos números reais é representada por $\#\mathbb{R} = \aleph_1$.

1.11 A Hipótese do Contínuo

Para finalizarmos esse capítulo, vamos falar de um dos problemas mais intrigantes da história da matemática, formulado pelo matemático já aqui apresentado Georg Cantor e conhecido pelo nome *Hipótese do Contínuo*.

Durante os anos de desenvolvimento dessa nova Teoria dos Conjuntos, foi-se descobrindo que este era um assunto nem um pouco elementar, recheado de obstáculos e paradoxos. Cantor, o grande precursor do tema, enfrentou várias dessas questões investigando a cardinalidade de todos esses conjuntos apresentados acima e outros e nessa tarefa, veio a ele uma pergunta intrigante.

Ele percebeu que nesse processo de expandir os números naturais para os inteiros e depois racionais e depois construtíveis, etc, a cardinalidade se mantia em $\aleph_0$ e de repente, num salto para os números reais calculava-se uma cardinalidade superior: $\aleph_1$. Cantor então se questionou: será, que entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números reais existe algum conjunto que possua cardinalidade maior do que $\aleph_0$ e menor do que $\aleph_1$? Ele passou anos e anos em busca da resposta desse mistério, mas após tanto trabalho em vão, passou a suspeitar que não deveria existir tal conjunto e assim, por Cantor, foi proposta a Hipótese do Contínuo.

Proposição 1.11.1. Não existe conjunto cuja cardinalidade esteja estritamente entre as cardinalidades de $\mathbb{N}$ e de $\mathbb{R}$.

A hipótese, apesar de ser tão facilmente enunciada, mostrou-se um tremendo desafio para todos os acadêmicos da época, tanto que no ano de 1900, o célebre matemático David Hilbert apresentou-a em sua lista *Os Problemas de Hilbert* que ficou famosa na comunidade matemática durante todo o século XX.

A resolução

Depois de profusos anos de progresso conjunto de diversos matemáticos, apenas na década de 60 que se obteve enfim uma resolução para o famoso problema, entretanto o desfecho dessa história é talvez ainda mais enigmático do que o próprio enunciado ou qualquer outro problema matemático.

Em termos simplificados, descobriu-se que **Hipótese do Contínuo não é falsa e não é verdadeira**. Isso porque em 1940, Kurt Gödel demonstrou que não poderia ser demonstrado que a Hipótese era falsa e em 1963, Paul Cohen por sua vez desmontrou que não poderia ser demonstrado que a Hipótese era verdadeira.

Esse resultado bizarro e nada intuitivo, é extremamente estranho à nossa concepção limitada, mas no contexto complexo e altamente técnico da Teoria de Conjuntos é um fato e significa muita coisa. Ele serve também para indicar que, um assunto aparentemente tão simples que nos é apresentado desde o ensino fundamental, com o conjunto $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e no ensino médio nos é tão familiar, no fundo, não é nada disso. Depois que vamos descascando as camadas e investigamos as entranhas, os fundamentos dos números e a natureza dos conjuntos a que eles pertencem, nos encontramos com o provavelmente mais bizarro dos campos da matemática, mergulhado em uma coleção de enigmas e paradoxos não apenas matemáticos, como lógicos e filosóficos.

Agora, com os argumentos da enumerabilidade, você já pode entender melhor porque os números são de fato um império irracional, uma vez que vimos a gigantesca infinidade de números irracionais que deve existir para haverem tantos reais a mais do que racionais!

Nos próximos capítulos, investigaremos curiosidades sobre outros aspectos dos números reais e conheceremos mais conjuntos interessantes como o **conjunto dos números algébricos** e o fascinante **Conjunto de Cantor**, que surgiu em uma das tentativas de resolver a lendária Hipótese do Contínuo.

Exercícios 1.11.2.

1. Ache uma *injeção* de $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$, provando portanto que A é enumerável. (*Dica: Lembre-se que todo número natural pode ser fatorado de forma única em potência de números primos*).

2. É possível verificar que $A \times B$ é enumerável quando A e B são enumeráveis. Sabendo que $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável, prove, formalmente, que $\mathbb{Q}$ é enumerável, como visto na seção 1.3.3. (*O conjunto $\mathbb{Z}^*$ é o conjunto dos números inteiros excluindo-se o número 0.*)

3. Mostre que, se A é enumerável e $B \subset A$, então B é enumerável.

Capítulo 2

Números Racionais e Irracionais

2.1 Construção dos Números Racionais

O conjunto dos números racionais contem todas as frações, isto é, quocientes da forma $\dfrac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. O ponto crucial aqui reside no fato que uma fração não admite uma única representação, por exemplo $\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{-3}{-6} = \ldots$. Por isso, precisamos encontrar uma maneira de falar de frações sem necessariamente nos prendermos a uma única representação.

Para isso, consideremos os conjuntos $\mathbb{Z}^* = \{a \in \mathbb{Z}; a \neq 0\}$ e

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b); a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$$

Definição 2.1.1. Dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, consideremos a seguinte relação:

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

A ideia que está por trás da relação que definimos é que dois pares são equivalentes se, e somente se, representam a mesma fração. Por exemplo, $(3, 9)$ e $(2, 6)$ são equivalentes pois $3 \cdot 6 = 9 \cdot 2$, ou, o que é a mesma coisa, representam a mesma fração $\left(\frac{3}{9} = \frac{2}{6}\right)$.

Proposição 2.1.2. A relação definida em (2.1.1) caracteriza uma relação de equivalência.

Demonstração. Para termos uma relação de equivalência precisamos verificar três propriedades:

i $(a, b) \equiv (a, b), \forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ (reflexiva)

ii $(a, b) \equiv (c, d) \Rightarrow (c, d) \equiv (a, b)$ (simétrica)

iii $(a, b) \equiv (c, d)$ e $(c, d) \equiv (e, f) \Rightarrow (a, b) \equiv (e, f)$ (transitiva)

As propriedades i e ii decorrem diretamente da definição de $\equiv$.

Para verificar iii, olharemos para a hipótese:

$$a \cdot d = b \cdot d \tag{2.1}$$

$$c \cdot f = d \cdot e \tag{2.2}$$

Multiplicando a equação (2.1) por f e a equação (2.2) por b, temos

$$a \cdot d \cdot f = b \cdot c \cdot f \tag{2.3}$$

$$c \cdot f \cdot b = d \cdot e \cdot b \tag{2.4}$$

Igualando as equações (2.3) e (2.4) temos

$$a \cdot d \cdot f = d \cdot e \cdot b$$

Como $d \neq 0$, podemos cancelá-lo em ambos os lados, obtendo

$$a \cdot f = e \cdot b \Rightarrow a \cdot f = b \cdot e \Rightarrow (a, b) \equiv (e, f)$$

$\square$

De posse da relação $\equiv$, podemos particionar o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ em *classes de equivalência.* Para cada par (a, b), sua classe de equivalência é o conjunto de todos os pares que são equivalentes a (a, b). Esta classe de equivalência é, por definição, a fração $\frac{a}{b}$. Em símbolos,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; (x, y) \equiv (a, b)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; xb = ya\} . \end{aligned}$$

O símbolo $\frac{a}{b}$ é chamado de *fração*, onde a é o *numerador* e b é o *denominador.*

Exemplo 2.1.3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; 2x = y\} \\ &= \{(1, 2), (-1, -2), (2, 4), (-2, -4), ...\} \end{aligned}$$

Além disso, temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4} = \frac{-2}{-4} = ...$$

O conjunto $\mathbb{Q}$, dos números racionais, é, por definição, o conjunto de todas as classes de equivalência da relação $\equiv$,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\} .$$

Uma fração $\frac{a}{b}$ é dita irredutível se a e b não tiverem fatores primos em comum. Caso contrário, a fração é dita redutível.

Exercícios 2.1.4.

1. Mostre que:

$$(a)\frac{1515}{3333} = \frac{15}{33} \quad (b)\frac{131313}{999999} = \frac{13}{99} \quad (c)\frac{2323}{9999} = \frac{23}{99}$$

2. Provar os itens da Proposição (2.1.2) para:

$$(a)\frac{4}{5} \quad (b)\frac{7}{9} \quad (c)\frac{11}{23}$$

2.2 Operações nos Racionais

Agora que definimos explicitamente o conjunto dos números racionais, nosso próximo passo é considerar sobre este as operações elementares de soma e multiplicação.

Comecemos pela adição. Dados racionais $a, b \in \mathbb{Q}$, $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{q}{r}$, a *soma* de a e b, simbolizada por $a + b$, pode ser definida da seguinte maneira:

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{q}{r} = \frac{mr}{nr} + \frac{nq}{nr} = \frac{mr + nq}{nr}$$

As seguintes propriedades são verificadas:

P1 $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ (associativa)

P2 $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{Q}$ (comutativa)

P3 $a + b = a$ se $b = 0 \forall a \in \mathbb{Q}$ (elemento neutro)

P4 $a + (-a) = 0$, onde $a = \frac{m}{n}$ e $-a = \frac{-m}{n}$ (oposto)

Mantendo a notação anterior, a *diferença* de a e b simbolizada por $a - b$, é definida da seguinte maneira:

$$a - b = a + (-b) = \frac{m}{n} + \frac{-q}{r} = \frac{mr}{nr} + \frac{-nq}{nr} = \frac{mr - nq}{nr}$$

Com a propriedade P4 e a definição de subtração podemos concluir as seguintes propriedades para todo $a, b, c \in \mathbb{Q}$

- $-(a + b) = -a - b$
- $(a - b) + b = a$
- $a + c = b \Leftrightarrow c = b - a$
- $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

Mantendo a notação anterior, o *produto* de a e b, simbolizado por ab, é definida da seguinte maneira:

$$ab = a \cdot b = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{r} = \frac{mq}{nr}$$

M1 $(ab)c = a(bc), \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ (associativa)

M2 $ab = ba, \forall a, b \in \mathbb{Q}$ (comutativa)

M3 $a + b = a$ se $b = \dfrac{1}{1} = \dfrac{2}{2} = ..., \forall a \in \mathbb{Q}$ (elemento neutro)

M4 $aa^{-1} = 1$, onde $a = \dfrac{m}{n}$ e $a^{-1} = \dfrac{n}{m}$ (oposto)

A *divisão* de a e b, simbolizada por $\frac{a}{b}$, é definida da seguinte maneira:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{q}{r}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{q} = ab^{-1}$$

Exercícios 2.2.1.

1. Calcule:

$$(a)\frac{4}{7}+\frac{1}{3} \qquad (b)\ \frac{5}{9}-\frac{1}{2}$$
$$(c)\frac{23}{25}\cdot\frac{10}{13} \qquad (d)\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{3}-3\div\frac{3}{5}$$

2. Ache duas frações de denominador 3 e 11 cuja diferença seja igual a $\frac{6}{33}$

2.3 Representação decimal

A representação decimal é uma outra maneira de representarmos um número racional que se encontra na forma $\frac{a}{b}$. Nessa representação o número pode ser um decimal finito ou decimal infinito.

Por exemplo, a fração $\frac{1}{8}$, pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} &= \frac{1}{10}\cdot\frac{10}{8}\\
&= \frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{4}\right)\\
&= 1\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}\left(\frac{10}{4}\right)\\
&= 1\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}\left(2+\frac{1}{2}\right)\\
&= 1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}\left(\frac{10}{2}\right)\\
&= \mathbf{1}\cdot\frac{1}{10}+\mathbf{2}\cdot\frac{1}{10^2}+\mathbf{5}\cdot\frac{1}{10^3}
\end{aligned}$$

Convencionalmente, então escrevemos

$$\frac{1}{8} = 0,125$$

Este processo será discutido melhor no capítulo (4).

Exemplo 2.3.1. Dado $A \in \mathbb{Q}$ tal que $A = \frac{1}{2}$, a representação de A na forma decimal é $0,5 = \frac{1}{2} = A$ sendo $0,5$ a representação decimal finita de A.

Exemplo 2.3.2. Considere o número $B = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, temos que a representação decimal de B é $0,33333...$, sendo que está é uma representação decimal infinita.

Como saber se um número tem representação decimal finita?

Para respondermos essa pergunta, vamos olhar para o número 0,135

$$0,135 = \frac{135}{1000}$$

sabemos que qualquer número decimal finito pode ser escrito na forma de fração, sendo o denominador uma potência de 10. Vamos simplificar o número $\frac{135}{1000}$, até sua forma irredutível, assim

$$\frac{135}{1000} = \frac{27}{200}$$

perceba que obtivemos 200 no denominador, sendo que $200 = 2^3 \cdot 5^2$, ou seja, podemos escrever 200 como decomposição de números primos, onde esse primos são 2 e 5.

Exemplo 2.3.3.

1. $0,84 = \frac{84}{100} = \frac{21}{25} = \frac{21}{5^2}$

2. $0,2346 = \dfrac{2346}{10000} = \dfrac{1173}{5000} = \dfrac{1173}{2^3 \cdot 5^4}$

3. $0.672 = \dfrac{672}{1000} = \dfrac{84}{125} = \dfrac{84}{5^3}$

Nos exemplos acima todos os denominadores podem ser escritos com decomposição de 2 e 5, porém isso não é coincidência, todo número decimal finito escrito como fração terá o denominador podendo ser composto somente por 2 e 5.

Proposição 2.3.4. A fração $\dfrac{a}{b}$ terá representação decimal finita se, e só se, $b = 2^m \cdot 5^n$, para $m, n \in \mathbb{N}$.

Quando um número racional é representado da forma decimal infinita, temos que nessa representação terá uma sequência de algarismos que se repete indefinidamente, os números a seguir ilustram a forma decimal infinita,

$$\frac{5}{11} = 0.454545...$$

$$\frac{3097}{9900} = 0,31282828...$$

para facilitar a representação da dizima periódica, usa-se uma barra sobre os algarismos que se repetem,

$$\frac{5}{11} = 0.\overline{45}$$

$$\frac{3097}{9900} = 0,31\overline{28}$$

Exemplos 2.3.5. Escrever os números na forma $\dfrac{a}{b}$

1. $0,32222...$, vamos considerar

$$x = 0,32222...$$

temos,

$$100x = 32,222... \tag{2.5}$$

$$10x = 3,222... \tag{2.6}$$

subtraindo (2.6) de (2.5)

$$100x - 10x = 32,\overline{2} - 3,\overline{2}$$

$$90x = 29$$

$$x = \frac{29}{90}$$

2. $0,333333...$, considerando

$$x = 0,33333...$$

multiplicando por 10 em ambos os lados

$$10x = 3,333...$$

podemos rescrever a equação da seguinte forma

$$10x = 3 + 0,333...$$

$$10x = 3 + x$$

$$9x = 3$$

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Exercícios 2.3.6.

1. Escreva, em notação decimal finita, as seguintes frações:

$$(a)\frac{1}{4} \quad (b)\frac{3}{200} \quad (c)\frac{321}{400} \quad (d)\frac{7}{625} \quad (e)\frac{352}{125} \quad (f)\frac{3149}{2500}$$

2. Escreva os seguintes números na forma $\frac{a}{b}$:

$$(a)0,1111\cdots \quad (b)0,37\overline{43} \quad (c)0,9\overline{987}$$
$$(d)0,00\overline{01} \quad (e)0,\overline{9}$$

2.4 Números Irracionais

Durante a antiguidade os filósofos entendiam que os números racionais eram os mais adequados para descrever a harmonia da natureza. Esse pensamento foi muito difundido pelos pitagóricos e alguns de seus predecessores.

Hippasus de Metapontum

Hippasus de Metapontum, membro da Escola Pitagórica, nasceu em torno do ano 500 a.C. em Metapontum, cidade grega da Magna Grécia situada no Golfo de Tarento, ao sul da atual Itália. Embora as evidências sejam obscuras, Hippasus é tido como o primeiro a provar a existência de números irracionais. Ele observou que a diagonal de um quadrado de lado 1 deveria ser um número d tal que $d^2 = 2$ (ou seja, $d = \sqrt{2}$) e este número não pode ser expresso como quociente de dois inteiros. Este número d é chamado de *constante pitagórica.* A descoberta e a divulgação de uma quantidade que não podia ser expressa como quociente de dois inteiros chocou os membros da Escola Pitagórica, que teriam afogado Hippasus no mar por ter divulgado o fato.

Muito antes disto, os babilônios utilizavam a aproximação

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600} = 1.41421\overline{296}\,.$$

para $\sqrt{2}$, a qual foi encontrada em um fragmento de argila de 1600 a.C.! Outra aproximação interessante é dada no texto indiano *Sulbasutras (800 a.C.)* da seguinte forma: *aumente o lado pela sua terça parte e esta terça parte pela sua quarta parte menos a trigésima quarta parte deste quarto.* Em linguagem moderna, isto quer dizer

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} = 1.414\overline{2156862745098039}\,.$$

O Teorema de Pitágoras diz que a soma dos quadrados dos catetos de um triângulo retângulo é igual a hipotenusa ao quadrado.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Vamos considerar um triângulo retângulo cujos catetos b e c são iguais a 1; então pelo Teorema de Pitágoras temos,

$$a^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}\,.$$

Sabemos que os catetos são racionais, mas $\sqrt{2}$ é racional?

Se tivermos $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, sendo $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível, elevando os dois lados ao quadrado temos,

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2 \tag{2.7}$$

pela equação (2.7) temos que a é um inteiro par, assim podemos escrever a como $a = 2c$, sendo $c \in \mathbb{Z}$, substituindo $2c$ em (2.7) temos,

$$2b^2 = (2c)^2$$

$$2b^2 = 4c^2$$

$$b^2 = 2c^2$$

assim temos que b também é par, logo com a e b são pares e a fração $\frac{a}{b}$ não é irredutível, contradizendo a nossa hipótese que $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível.

Temos então que $\sqrt{2}$ não é racional. Isso mostra que existem números muito simples de se construir que não são racionais. Vamos chamar empiricamente de *irracional* qualquer número que não seja racional.

Exemplo 2.4.1. Vamos verificar se $\sqrt{3}$ é racional ou irracional. Admitindo $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, sendo $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível e elevando os dois membros ao quadrado temos,

$$3 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$3b^2 = a^2\,. \tag{2.8}$$

Pela equação (2.8) temos que a é um inteiro divisível por 3, assim podemos escrever a como $a = 3c$, sendo $c \in \mathbb{Z}$, substituindo $3c$ em (2.8) temos,

$$3b^2 = (3c)^2$$

$$2b^2 = 9c^2$$

$$b^2 = 3c^2$$

assim temos que b também é divisível por 3, logo com a e b são divisíveis por 3 e a fração $\frac{a}{b}$ não é irredutível, contradizendo a nossa hipótese que $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível.

Temos então $\sqrt{3}$ é um número irracional.

Exercício 2.4.2. Prove que os números a seguir são irracionais

$$(a)\sqrt{6} \quad (b)\sqrt{2}+\sqrt{2} \quad (c)\frac{4\sqrt{13}-3}{6}$$

2.5 Raízes racionais de polinômios com coeficientes inteiros

Vamos considerar a seguinte equação

$$4x^2 - 8x + 3 = 0\,.$$

Está é uma equação polinomial do segundo grau e sabemos que as soluções são da forma

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,,$$

onde $a = 4$, $b = -8$ e $c = 3$, assim

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{-(8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 4}{8}$$

logo, $x_1 = \dfrac{3}{2}$ e $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

A equação em questão tem coeficientes inteiros e suas raízes são números racionais. Pondo $n_1 = 3$, $n_2 = 1$ e $d_1 = d_2 = 2$ vemos que n_1 e n_2 dividem o termo independente da equação e d_1 e d_2 dividem o coeficiente do termo líder. Essa propriedade pode ser verificada em geral para quaisquer soluções racionais de uma equação com coeficientes inteiros.

Teorema 2.5.1. Consideremos uma equação polinomial qualquer com coeficientes inteiros:

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$$

Se essa equação tiver uma raiz racional $\dfrac{a}{b}$, com $\dfrac{a}{b}$ uma fração irredutível, então a será divisor de c_0 e b um divisor de c_n.

Demonstração. Vamos considerar

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$$

se a equação acima tiver solução racional, será da forma $x = \dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $mdc(a, b) = 1$, então:

$$c_n\left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \cdots + c_2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_1\left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0$$

multiplicando a equação acima por b^n, temos

$$c_na^n + c_{n-1}a^{n-1}b + \cdots + c_2a^2b^{n-2} + c_1ab^{n-1} + c_0b^n = 0$$

Assim, podemos concluir que c_na^n é divisível por b e c_0b^n é divisível por a. Como $(a, b) = 1$, segue que b divide c_n e a divide c_0, como queríamos.

$\square$

Exemplo 2.5.2. Considerando a equação

$$2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$$

o teorema anterior nos diz que suas raízes racionais, se existirem, devem ser seguinte forma:

$$\frac{+1}{+1}, \frac{+1}{-1}, \frac{+1}{+2}, \frac{+1}{-2}, \frac{-1}{+1}, \frac{-1}{-1}, \frac{-1}{+2}, \frac{-1}{-2},$$
$$\frac{+3}{+1}, \frac{+3}{-1}, \frac{+3}{+2}, \frac{+3}{-2}, \frac{-3}{+1}, \frac{-3}{-1}, \frac{-3}{+2}, \frac{-3}{-2}.$$

Observe que a lista acima tem apenas os seguintes números 1, -1, $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$, 3, -3, $\dfrac{3}{2}$, $-\dfrac{3}{2}$, sendo que desses somente 1, $\dfrac{1}{2}$ e 3 são raízes da equação.

Exemplo 2.5.3. Vamos verificar se $\sqrt{7}$ é racional ou irracional. Para começar, vamos fazer a seguinte consideração: se $x = \sqrt{7}$, então $x^2 - 7 = 0$, portanto x é solução de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Utilizando o Teorema (2.5.1), teremos as seguintes possibilidade para x:

$$\frac{+1}{+1}, \frac{+1}{-1}, \frac{-1}{+1}, \frac{-1}{-1}, \frac{+7}{+1}, \frac{+7}{-1}, \frac{-7}{+1}, \frac{-7}{-1}.$$

Assim 1, -1, 7 e -7 são as possibilidades para x, porém nenhuma dessa satisfaz a equação, logo $\sqrt{7}$ é irracional.

Exemplo 2.5.4. Vamos verificar se $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é racional ou irracional. Para começar, vamos fazer a seguinte consideração: se $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, então $x^4 - 10x + 1 = 0$, portanto x é solução de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Utilizando o Teorema (2.5.1), teremos que ± 1 é uma possível raiz racional para a equação, no entanto ± 1 não satisfaz a equação, logo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

Exemplo 2.5.5. Vamos verificar se $\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$ é racional ou irracional. Para começar, vamos fazer a seguinte consideração: se $x = \sqrt{2}\sqrt[3]{3}$, então $x^6 - 2^3 3^2 = 0$, portanto x é solução de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Utilizando o Teorema (2.5.1), teremos as seguintes possibilidade para x:

$$\begin{aligned}&\pm 2^0 \cdot 3^0, \pm 2^0 \cdot 3^1, \pm 2^0 \cdot 3^2, \pm 2^1 \cdot 3^0, \pm 2^1 \cdot 3^1, \pm 2^1 \cdot 3^2,\\ &\pm 2^2 \cdot 3^0, \pm 2^2 \cdot 3^1, \pm 2^2 \cdot 3^2, \pm 2^3 \cdot 3^0, \pm 2^3 \cdot 3^1, \pm 2^3 \cdot 3^2.\end{aligned}$$

Perceba que nenhuma das possibilidades para x, satisfaz a equação, logo $\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$ é irracional.

Exercício 2.5.6. Demostre que os números a seguir são irracionais

$$(a)\sqrt[3]{15} \quad (b)\sqrt[3]{6} \quad (c)\sqrt{3} - \sqrt{2} \quad (d)\sqrt[3]{3} + \sqrt{2} \quad (e)\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}$$

2.6 Números Trigonométricos

Para muitos ângulos θ os valores correspondentes das funções trigonométricas são irracionais. Antes de começar, vamos relembrar as seguintes fórmulas trigonométricas:

$$\mathrm{sen}(a+b) = \mathrm{sen}(a)\cos(b) + \mathrm{sen}(b)\cos(a)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b)$$

A partir dessas igualdades, obtemos:

$$\mathrm{sen}(2\theta) = 2\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) \qquad \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta)\,,$$

$$\cos(3\theta) = \cos(2\theta)\cos(\theta) - \mathrm{sen}(2\theta)\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\mathrm{sen}^2(\theta) \tag{2.9}$$

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \tag{2.10}$$

$$\mathrm{sen}(3\theta) = 3\mathrm{sen}(\theta) - 4\mathrm{sen}^3(\theta) \tag{2.11}$$

Por exemplo, substituindo $\theta = 20^\circ$ em (2.10), temos:

$$\cos(60^\circ) = 4\cos^3(20^\circ) - 3\cos(20^\circ)$$

Como sabemos que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$, fazendo $x = \cos(20^\circ)$ temos

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \iff 8x^3 - 6x - 1 = 0\,.$$

Podemos verificar que nenhuma das possíveis raízes racionais $\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\right\}$ é de fato raiz da equação, porém sabemos que $\cos(20°)$ é raiz da equação, e que $\cos(20°)$ é diferente de $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$. Assim, concluímos que

$$\cos(20°) \text{ é irracional.}$$

Usando argumentos semelhantes, provemos que

$$\text{sen}(10°) \text{ é irracional.}$$

De fato, fazendo $\theta = 10°$ em (2.11), como $\text{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, temos

$$\frac{1}{2} = 3\text{sen}(10°) - 4\text{sen}^3(10°)$$

Fazendo $x = \text{sen}(10°)$,

$$\frac{1}{2} = 3x - 4x^3 \iff 8x^3 - 6x + 1 = 0$$

Da mesma forma que no exemplo anterior, podemos verificar que a equação não possui raízes racionais, e $\text{sen}(10°)$ é raiz da equação; portanto $\text{sen}(10°)$ é irracional.

Exercício 2.6.1. Mostre que os seguintes números são irracionais:

$$(a)\cos(40°) \quad (b)\text{sen}(20°) \quad (c)\cos(10°) \quad (d)\text{sen}(50°)$$

Os métodos usados podem ser estendidos para demonstrar que, com algumas exceções, as funções trigonométricas de qualquer ângulo igual a um número inteiro de graus, minutos e segundos, são irracionais.

Proposição 2.6.2. Se θ for um ângulo tal que $\cos(2\theta)$ é irracional, então $\cos(\theta), \text{sen}(\theta)$ e $\text{tg}(\theta)$ também serão irracionais.

Demonstração. Supondo $\cos(\theta)$ racional, então, pela equação (2.9) $\cos^2(\theta)$ e $2\cos^2(\theta)-1$ também seriam racionais. Porém $2\cos^2(\theta)-1=\cos(2\theta)$, que é irracional. Da mesma forma, supondo $\operatorname{sen}(\theta)$ racional, então $\operatorname{sen}^2(\theta)$ e $1-2\operatorname{sen}^2(\theta)$ também seriam racionais; mas $1-2\operatorname{sen}^2(\theta)=\cos(2\theta)$, que é irracional. Supondo $\operatorname{tg}(\theta)$ racional, então $\operatorname{tg}^2(\theta)$ seria racional, e utilizando a identidade trigonométrica

$$1+\operatorname{tg}^2(\theta)=\sec^2(\theta)=\frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

$\cos^2(\theta)$ seria racional, e $\cos(\theta)$ também teria que ser racional, o que é uma contradição. □

Aplicando esse mesmo raciocínio, podemos provar que uma enorme quantidade de números trigonométricos são irracionais

Exemplo 2.6.3. Como $\cos(20°)$ é irracional, podemos afirmar que os números

$$\begin{array}{llll}
\cos(10°) & \operatorname{sen}(10°) & \operatorname{tg}(10°) & \cos(5°)\\
\operatorname{sen}(5°) & \operatorname{tg}(5°) & \cos(2°30') & \operatorname{sen}(2°30')\\
\operatorname{tg}(2°30') & \cos(1°15') & \operatorname{sen}(1°15') & \operatorname{tg}(1°15')\\
\cos(37'30'') & \operatorname{sen}(37'30'') & \operatorname{tg}(37'30'') & \quad\ldots
\end{array}$$

são irracionais.

Exercício 2.6.4. Mostre que os seguintes números são irracionais:

(a) $\cos(15°)$, $\operatorname{sen}(15°)$, $\operatorname{tg}(15°)$

(b) $\cos(7°30')$, $\operatorname{sen}(7°30')$, $\operatorname{tg}(7°30')$

(c) $\cos(22°30')$, $\operatorname{sen}(22°30')$, $\operatorname{tg}(22°30')$

(d) $\cos(35^\circ)$, $\text{sen}(35^\circ)$, $\text{tg}(35^\circ)$

(e) $\cos(25^\circ)$, $\text{sen}(25^\circ)$, $\text{tg}(25^\circ)$

2.7 Números Logarítmicos

Nesta seção, faremos uma análise sobre a irracionalidade de alguns valores das funções logarítmicas, de forma análoga ao que foi feito para as funções trigonométricas. Quando mencionarmos logaritmos, estaremos nos referindo a logaritmos na base 10. Lembre que, para $y > 0$:

$$\log y = k \iff 10^k = y$$

Comecemos provando que $\log 2$ é irracional. Se tivéssemos $\log 2 = \dfrac{a}{b}$ e a e b inteiros positivos, então

$$2 = 10^{\frac{a}{b}} \iff 2^b = 10^a = 2^a 5^a$$

Essa igualdade não pode ser verdadeira, porque, qualquer que seja o valor de $b > 0$, 2^b é um inteiro não divisível por 5; por outro lado $2^a 5^a$ é divisível por 5, por ser a um inteiro positivo, o que é absurdo. Logo $\log 2$ é irracional.

Usando argumentos semelhantes, vamos mostrar que $\log 21$ é irracional. Se tivéssemos $\log 21 = \dfrac{c}{d}$ e c e d inteiros positivos, então

$$21 = 10^{\frac{c}{d}} \iff 21^d = 10^c \iff 3^d 7^d = 2^c 5^c$$

Essa igualdade não pode ser verdadeira pois, de um lado temos apenas os fatores primos 3 e 7, e do outro apenas os fatores primos 2 e 5. Chegamos em uma situação impossível; logo $\log 21$ é irracional.

Exercício 2.7.1. Resolva os itens abaixo:

(a) Mostre que, dado c e d dois inteiros não negativos distintos, $\log(2^c5^d)$ é irracional.

(b) Mostre que $\log\left(\dfrac{3}{2}\right)$ é irracional.

(c) Mostre que $\log 15$ é irracional.

(d) Mostre que $\log 5 + \log 3$ é irraconal.

2.8 Números Algébricos e Transcendentes

Dentro do conjunto dos números irracionais, podemos distinguir dois subconjuntos: um deles é formado por números que podem ser obtidos como solução de alguma equação algébrica e o outro formado pelos restantes. O primeiro deles é chamado de conjunto dos *números algébricos* e estes números seriam, via de regra, presumivelmente mais *simples* que os demais, pois poderiam ser obtidos via processos algébricos conhecidos (por exemplo, extração de raízes quadradas).

Definição 2.8.1. Um número real x é dito *algébrico* se satisfizer uma equação da forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

para certos $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Em contrapartida, um número que não é solução de nenhuma equação dessa forma é chamado de *transcendente*.

Alguns fatos simples:

- Todo número inteiro $b \in \mathbb{Z}$ é algébrico pois é solução da equação: $x - b = 0$.

- Todo número racional $c \in \mathbb{Q}$ é algébrico, pois c pode ser escrito como $\dfrac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, que é solução da equação $qx - p = 0$.

- Assim, como todo número racional é algébrico, podemos concluir que todo número não algébrico é irracional, ou seja, todo número transcendente é irracional. Porém nem todo número irracional é transcendente, como veremos nos exemplos.

Exemplo 2.8.2. $\sqrt{2}$ é algébrico: de fato,

$$x = \sqrt{2} \iff x^2 = 2 \iff x^2 - 2 = 0$$

Mais geralmente, todo número da forma $\sqrt[n]{d}$, $d, n \in \mathbb{N}$, é algébrico, pois é solução da equação $x^n - d = 0$.

Exemplo 2.8.3. $\dfrac{\sqrt[7]{85}}{46}$ é algébrico:

$$x = \frac{\sqrt[7]{85}}{46} \iff x^7 = \frac{85}{46^7} \iff 46^7 x^7 - 85 = 0$$

Exemplo 2.8.4. $\sqrt{7} + \sqrt{13}$ é algébrico:

$$x = \sqrt{7} + \sqrt{13} \iff x^2 = (\sqrt{7} + \sqrt{13})^2 \iff$$

$$x^2 = 7 + 2\sqrt{7}\sqrt{13} + 13 \iff x^2 - 20 = 2\sqrt{91}$$

$$\iff (x^2 - 20)^2 = 4(91) \iff x^4 - 40x^2 + 400 = 364$$

$$\iff x^4 - 40x^2 + 36 = 0$$

Exemplo 2.8.5. $\sqrt[4]{\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}}$ é algébrico:

$$\sqrt[4]{\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}} = x \iff \sqrt{3} - \sqrt[3]{2} = x^4 \iff \sqrt{3} - x^4 = \sqrt[3]{2}$$

$$\iff (\sqrt{3} - x^4)^3 = 2 \iff 3\sqrt{3} - 9x^4 + 3\sqrt{3}x^8 - x^{12} = 2$$

$$\iff 3\sqrt{3}+3\sqrt{3}x^8 = x^{12}+9x^4+2 \iff$$

$$(3\sqrt{3}+3\sqrt{3}x^8)^2 = (x^{12}+9x^4+2)^2 \iff$$

$$27+54x^8+27x^{16} = x^{24}+18x^{16}+4x^{12}+81x^8+36x^4+4 \iff$$

$$x^{24}-9x^{16}+4x^{12}+27x^8+36x^4-23=0$$

Exemplo 2.8.6. $\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4}\sqrt[5]{5}$ é algébrico:

$$x=\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4}\sqrt[5]{5} \iff x = 2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}4^{\frac{1}{4}}5^{\frac{1}{5}} \iff$$

$$x^{60} = (2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}4^{\frac{1}{4}}5^{\frac{1}{5}})^{60} \iff x^{60}-2^{30}3^{20}4^{15}5^{12}=0$$

Exercício 2.8.7. Mostre que os seguintes números são algébricos:

$(a)\sqrt{3}$	$(c)\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$(e)\sqrt[9]{2}\sqrt[3]{11}\sqrt[7]{3}\ \sqrt[13]{5}$
$(b)\sqrt[3]{5}$	$(d)\sqrt[7]{4+\sqrt[3]{11}}$	$(f)\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{5+\sqrt{7}}$

Em 1874, George Cantor (1845-1918) provou que o conjunto dos números algébricos é enumerável com o argumento que descreveremos a seguir. Imagine uma tabela infinita onde dispomos todas as equações do primeiro grau com coeficientes inteiros:

$$\begin{array}{cccccc}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\ldots & x-2=0 & 2x-2=0 & 3x-2=0 & 4x-2=0 & \ldots \\
\ldots & x-1=0 & 2x-1=0 & 3x-1=0 & 4x-1=0 & \ldots \\
\ldots & x+0=0 & 2x+0=0 & 3x+0=0 & 4x+0=0 & \ldots \\
\ldots & x+1=0 & 2x+1=0 & 3x+1=0 & 4x+1=0 & \ldots \\
\ldots & x+2=0 & 2x+2=0 & 3x+2=0 & 4x+2=0 & \ldots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

A esta tabela, que chamaremos de T_1, associamos o conjunto A_1 formado por todas as soluções destas equações. Este conjunto é enumerável pois cada equação tem exatamente uma solução. Vamos montar agora uma tabela, que chamaremos de T_2, formada por todas as equações de segundo grau com coeficientes inteiros:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\dots & x^2-1x-1=0 & x^2-1x+0=0 & x^2-1x+1=0 & \dots \\
\dots & x^2+0x-1=0 & x^2+0x+0=0 & x^2+0x+1=0 & \dots \\
\dots & x^2+x-1=0 & x^2+x+0=0 & x^2+x+1=0 & \dots \\
\dots & x^2+2x-1=0 & x^2+2x+0=0 & x^2+2x+1=0 & \dots \\
\dots & x^2+3x-1=0 & x^2+3x+0=0 & x^2+3x+1=0 & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\dots & 2x^2-1x-1=0 & 2x^2-1x+0=0 & 2x^2-1x+1=0 & \dots \\
\dots & 2x^2+0x-1=0 & 2x^2+0x+0=0 & 2x^2+0x+1=0 & \dots \\
\dots & 2x^2+x-1=0 & 2x^2+x+0=0 & 2x^2+x+1=0 & \dots \\
\dots & 2x^2+2x-1=0 & 2x^2+2x+0=0 & 2x^2+2x+1=0 & \dots \\
\dots & 2x^2+3x-1=0 & 2x^2+3x+0=0 & 2x^2+3x+1=0 & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

A esta tabela associamos, como antes, um conjunto, denotado por A_2 formado por todas as soluções reais das equações de T_2. Este último conjunto é enumerável, pois cada equação tem, no máximo, duas raízes. Prosseguindo dessa forma, obteremos para cada $n \in \mathbb{N}$ uma tabela T_n formada por todas as equações de grau n com coeficientes inteiros e, associado a T_n, o conjunto A_n formado pelas soluções das equações de T_n. Como cada equação tem, no máximo, n

raízes reais, o conjunto A_n é enumerável. Percebemos que um número real qualquer é algébrico se, e só se, pertence a algum A_n, o que implica que o conjunto dos números algébricos é a reunião de todos os A_n. Em particular, o conjunto dos números algébricos é enumerável.

Como o conjunto dos números reais é não enumerável, concluímos um fato surpreendente: *existe uma "quantidade" infinitamente maior de números transcendentes do que de números algébricos.* Porém mostrar a transcendência de um número é uma tarefa bem mais complicada, que envolve métodos mais avançados. Aqui temos uma lista com alguns exemplos de números transcendentes:

1. $\pi = 3,14159265358979323846264338327 9...$: É obtido pela razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência. Atualmente são conhecidas oito quatrilhões (8.000.000.000.000.000) de casas decimais de π. Carl Louis Ferdinand von Lindemann foi um matemático alemão, conhecido por sua prova, publicada em 1882, que π é um número transcendente.

2. Número de Euler/Número de Napier:

   $$e = 2,718281828459045235360287\ldots$$

   O matemático francês Charles Hermite provou, em 1873, a transcendência do número e.

3. Constante de Champernowne:

   $$0,12345678910111213141516171819 20\ldots$$

   É formado por inteiros sucessivos, e contém em sua expansão decimal qualquer número que imaginarmos. O matemático alemão Kurt Mahler provou que esse número é transcendente.

4. Constante de Liouville:

$$0.110001000000000000000001\ldots$$

Este número possui o algarismo 1 nas casas decimais $1!, 2!, 3!, 4!, 5!, \ldots$ e zero nas demais. A sua transcendência foi provada em 1851 pelo matemático francês Joseph Liouville.

5. Constante de Gelfand:

$$e^{\pi} = 23.140692632779269005729\ldots$$

O matemático soviético Aleksandr Gelfand foi o responsável pela determinação desse número transcendente.

6. Constante de Gelfond–Schneider:

$$2^{\sqrt{2}} = 2.665144142690225188\ldots$$

O matemático russo Rodion Kuzmin provou, em 1930, que esse número é transcendente.

7. O Teorema de Gelfond-Schneider prova que os números $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{5}^{\sqrt{7}}$, dentre outros, são transcendentes. O teorema diz que dado α, β números algébricos (os casos $\alpha = 0, \alpha = 1$ e β racional foram excluídos, pois seria fácil provar que α^{β} é algébrico), α^{β} é transcendente.

8. O Teorema de Lindemann–Weierstrass prova que $e^{\sqrt{2}}$, $\ln 2, \operatorname{sen}(a), \cos(a), \operatorname{tg}(a)$ (com a um número algébrico diferente de zero), entre outros, são números transcendentes.

9. Existem mais números transcendentes! Você conhece algum?

Problemas em aberto:

- Constante de Catalan:

$$G = 0,915965594177219015054\ldots$$

Não se sabe se este número é irracional, muito menos se é transcendente...

- Constante de Euler:

$$\gamma = 0,5772156649015328606065120\ldots$$

Acredita-se ser transcendente, também não se sabe se é irracional.

- $\pi + e, \pi - e, \pi e, \dfrac{\pi}{e}, \pi^\pi, e^e, \pi^e, \pi^{\sqrt{2}}, e^{\pi^2}$

Capítulo 3

Frações Contínuas e Aproximações

3.1 Introdução

Uma maneira interessante de escrever o número $\dfrac{85}{32}$ é a seguinte:

$$\frac{85}{32} = 2 + \frac{21}{32} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{32}{21}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{11}{21}} =$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{10}{11}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10}}}}$$

Dizemos que esta última expressão é a *fração contínua* que representa o número racional $\dfrac{85}{32}$. Como obtivemos esse resultado? Utilizando o Algoritmo da Divisão.

Primeiro dividimos 85 por 32, para obter o quociente 2 e o resto 21.

$$85 = 2 \cdot 32 + 21$$

Assim:

$$\frac{85}{32} = 2 + \frac{21}{32} = 2 + \frac{1}{\frac{32}{21}}$$

Em seguida continuamos o processo sucessivamente:

$$32 = 1 \cdot 21 + 11$$

$$21 = 1 \cdot 11 + 10$$

$$11 = 1 \cdot 10 + 1$$

$$10 = 10 \cdot 1 + 0$$

Mas afinal, o que é uma *fração contínua*?

Conceitos Básicos

Uma *fração contínua finita* é uma expressão da forma

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{\ddots + \cfrac{b_{n-2}}{a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_n}}}}$$

onde $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ são números reais. Na próxima seção, mostraremos que é possível aproximar qualquer número real por uma fração do tipo acima. Se $b_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a fração contínua é chamada de *simples*. Neste caso, para facilitar a escrita, denotamos

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Voltando ao primeiro exemplo temos, então, que

$$\frac{85}{32} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10}}}} = [2; 1, 1, 1, 10]$$

Exercício 3.1.1. Seja $\frac{p}{q}$ um número racional, onde p e q são inteiros. Veja o que acontece com a fração contínua se:

1. $0 < p < q$
2. $p < 0 < q$

Por exemplo, pense como seria a fração contínua de $\frac{32}{85}$ e $\frac{-85}{32}$.

Uma pergunta natural que pode surgir é: *Qualquer número racional possui uma expansão em fração contínua simples finita?* E, caso a resposta seja afirmativa, tal expansão é única?

A resposta para questão acima é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 3.1.2. Qualquer fração contínua simples finita representa um número racional. Reciprocamente, qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita.

Demonstração. A demonstração da primeira parte é imediata, pois se temos uma fração contínua simples finita, basta realizar as operações de divisão de fração e, assim, conseguimos retornar a uma única fração representando um número racional.

Para provar a recíproca consideremos um número racional $\frac{p}{q}$ qualquer. Do algoritmo da divisão obtemos $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q}$, onde $0 \leq r_1 < q$, e a_0 é o maior inteiro menor que $\frac{p}{q}$. Se $r_1 = 0$, $\frac{p}{q}$ é um número inteiro, e, então, o processo termina. Caso contrário escrevemos $\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{\frac{q}{r_1}}$, tal que $0 < r_1 < q$, e repetimos o processo anterior com $\frac{q}{r_1}$.

Observamos que o processo termina quando $r_n = 0$, para algum n, e, portanto,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}]$$

Ou seja, basta aplicarmos o algoritmo da divisão no número racional que obtemos uma fração contínua simples finita.

Como

$$\frac{1}{a_{n-1}} = \cfrac{1}{(a_{n-1} - 1) + \cfrac{1}{1}},$$

segue que $[a_0; a_1, ..., a_{n-1} - 1, 1]$ é também uma expansão do número $\frac{p}{q}$.

Então, se descartarmos a possibilidade de que a última etapa termine com $\frac{1}{1}$, podemos garantir que a cada número racional corresponde uma única fração contínua simples, já que todos os seus coeficientes foram determinados de forma única pelo Algoritmo da Divisão. $\square$

As frações contínuas também surgem naturalmente ao tentar resolver equações quadráticas.

Consideremos a função quadrática $x^2 - bx - 1 = 0$, com b um número inteiro. Se $x \neq 0$, podemos isolar x da seguinte forma:

$$x^2 = bx + 1 \Rightarrow x = b + \frac{1}{x}$$

Agora, por repetição, podemos substituir x. Assim temos

$$x = b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{x}}$$

Se estendermos este processo finito inúmeras vezes, podemos escrever a seguinte *"relação"*:

$$x = b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \ldots}}}$$

Na próxima seção, mostraremos como o processo infinito descrito pela última igualdade pode ser matematicamente formalizado. Um bom exemplo é o famoso *Número de Ouro* ou *Razão Áurea*, que é representado pela seguinte fração contínua simples

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

A solução desta equação determina o número de ouro $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180340\ldots$. Perceba que o número de ouro é *irracional*.

3.2 Convergentes e aproximações

Dados $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ positivos, a fim de estudar frações contínuas da forma

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

consideremos os *convergentes* c_n, definidos por

$$c_n = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]\,, n \in \mathbb{N}\,.$$

Fazendo os cálculos, percebemos que $c_0 = \dfrac{a_0}{1}$, $c_1 = \dfrac{a_0a_1 + 1}{a_1}$, $c_2 = \dfrac{a_0(a_1a_2 + 1) + a_2}{a_1a_2 + 1}$,

$$c_3 = \frac{a_0(a_1(a_2a_3 + 1) + a_3) + (a_2a_3 + 1)}{a_1(a_2a_3 + 1) + a_3}\,.$$

Com um pouco de esperteza, podemos perceber que cada convergente pode ser escrito na forma $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, onde

$$p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}\,,\ \ q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}\,,$$

e definimos $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $n \geq 1$. Estas relações são chamadas de *relações de recorrência de Wallis-Euler* e são fundamentais para compreendermos a evolução dos convergentes à medida que n cresce. A proposição a seguir contém informações importantes sobre os convergentes. Mais informações podem ser encontradas na referência [10].

Proposição 3.2.1. Mantendo a notação anterior, temos as seguintes relações:

1. $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x] = \dfrac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}}$

2. $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ e $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$ para $n \geq 2$

3. $c_n - c_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ e $c_n - c_{n-2} = \dfrac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}$ para $n \geq 2$

Demonstração. Vamos provar a primeira afirmação por indução em $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$: se $n = 1$, então

$$[a_0, a_1, x] = \frac{x(a_0 a_1 + 1) + a_0}{x a_1 + 1} = \frac{xp_1 + p_0}{xq_1 + q_0}\,.$$

Assumindo a fórmula verdadeira para um certo $n \geq 2$, vemos que

$$\begin{aligned}
[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, x] &= \left[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \frac{x a_{n+1} + 1}{x}\right] \\
&= \frac{\dfrac{x a_{n+1} + 1}{x} p_n + p_{n-1}}{\dfrac{x a_{n+1} + 1}{x} q_n + q_{n-1}} \\
&= \frac{x(a_{n+1} p_n + p_{n-1}) + p_n}{x(a_{n+1} q_n + q_{n-1}) + q_n} \\
&= \frac{xp_{n+1} + p_n}{xq_{n+1} + q_n}\,.
\end{aligned}$$

Logo, a primeira igualdade está provada. A primeira identidade do ítem (2) é imediata para $n = 2$ e assumindo que a mesma seja verificada para um certo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}
p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} &= (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - p_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) \\
&= (-1)^n\,.
\end{aligned}$$

logo, a referida igualdade é verdadeira para todo $n \geq 2$. A prova da segunda identidade em (2) é análoga. As identidades do ítem (3) são consequências imediatas do ítem (2). $\square$

Uma consequência interessante do ítem (2) do teorema anterior é que, se cada a_n é inteiro, então os números p_n e q_n são sempre inteiros relativamente primos, pois, se $a \in \mathbb{Z}$ é um divisor comum de ambos, então a é um divisor de $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$, ou seja, $a = \pm 1$. Este argumento prova o corolário a seguir.

Corolário 3.2.2. Se cada a_n é um inteiro positivo então os convergentes $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ são frações irredutíveis, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como consequência do ítem (3) da proposição (3.2.1), observamos que $c_0 < c_2 < c_4 < c_6 < \ldots < c_{2n}$ e $c_1 > c_3 > c_5 > \ldots > c_{2n+1}$. Além disso, $c_{2n+2} < c_{2n+1}$ e $c_{2n+1} > c_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Logo, se n é par e m é ímpar, concluímos que $c_n < c_m$. Portanto, existem números reais $\alpha \leq \beta$ tais que $\alpha = \lim_{n\to\infty} c_{2n}$ e $\beta = \lim_{n\to\infty} c_{2n+1}$ (veja o Capítulo 4). Assumindo que cada a_n seja inteiro, segue que os números $q_0, q_1, q_2, \ldots$ formam uma sequência crescente de números inteiros. Consequentemente, a diferença $c_{2n+1} - c_{2n} = 1/q_{2n+1}q_{2n}$ fica arbitrariamente pequena. Em particular, $\alpha = \beta$. Isto mostra que os números $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$, embora sejam todos distintos entre si, ficam, à medida que n cresce, cada vez mais próximos de um número real α. Em linguagem matemática, dizemos que a *sequência* (c_n) *converge para o número real* α. O teorema a seguir está provado.

Teorema 3.2.3. Dados inteiros positivos $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$

para todo $n \in \mathbb{N}$, a fração contínua

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} \tag{3.1}$$

converge, isto é, a sequência dos convergentes (c_n) definidos como $c_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ converge para um número real α. Além disso, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$c_0 < c_2 < c_4 < \ldots < c_{2n} < \ldots < \alpha < \ldots < c_{2n+1} < \ldots < c_3 < c_1 .$$

Agora que já sabemos que uma fração contínua infinita como (3.1) representa um número real, podemos nos perguntar sobre o *processo inverso*: dado um número real α, como obter uma fração contínua que o represente? Esta pergunta já foi respondida na seção anterior para o caso de um número α racional. Vamos estender o processo para um número α irracional qualquer.

Considere $\alpha > 0$ um número irracional, tal que $\alpha = \beta_0$. Temos que $\lfloor \beta_0 \rfloor = a_0$, onde a_0 é o maior inteiro menor do que ou igual a β_0. Podemos escrever $\beta_0 = a_0 + \dfrac{1}{\beta_1}$, onde a_0 representa a parte inteira e $\dfrac{1}{\beta_1}$ representa a parte fracionária, assim $0 < \dfrac{1}{\beta_1} < 1$. Então $\beta_1 = \dfrac{1}{\beta_0 - a_0} > 1$ é um número irracional. Assim, $\alpha = \beta_0 = a_0 + \frac{1}{\beta_1}$. Da mesma forma podemos escrever $\beta_1 = a_1 + \dfrac{1}{\beta_2}$, onde $a_1 = \lfloor \beta_1 \rfloor$ e $0 < \dfrac{1}{\beta_2} < 1$, e obtemos $\beta_2 = \dfrac{1}{\beta_1 - a_1}$, que é, também, um número irracional.

$$\beta_n = a_n + \frac{1}{\beta_{n+1}}\,, \;\; a_n = [\beta_n]\,, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Em particular,

$$\alpha = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\beta_{n+1}}}}}, \ n \in \mathbb{N}\,.$$

Este procedimento determina, de maneira unívoca, os inteiros não-negativos $a_1, a_2, \ldots$. Seja (c_n) a sequência dos convergentes relativos à sequência $a_1, a_2, \ldots$, ou seja, $c_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Pela própria construção dos números $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Podemos concluir que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$c_0 < c_2 < \ldots < c_{2n} < \ldots < \alpha < \ldots < c_{2n+1} < \ldots < c_3 < c_1\,.$$

Já sabemos pelo teorema (3.2.3) que a sequência dos convergentes $c_n = [a_1, \ldots, a_n]$ converge para um número real, que, pelas desigualdades acima, deve ser igual ao próprio número α. Isto prova o teorema a seguir.[1]

Teorema 3.2.4. Dado um número real $\alpha > 0$ irracional, construindo a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{N}$ como no parágrafo anterior, temos que a sequência dos convergentes

$$c_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

converge para α.

[1]No capítulo 4 será apresentado de maneira mais extensiva o conceito de *convergência* de uma sequência numérica; por hora podemos nos contentar com a ideia intuitiva de convergência, a saber, *uma sequência* (c_n) *converge para* α *se os valores* $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *ficam arbitrariamente próximos de* α *à medida que* n *cresce.*

Observamos que, se durante o processo de construção dos números $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ houver alguma repetição, digamos $\beta_n = \beta_{n+k}$ para certos $n, k \in \mathbb{N}$, então o bloco

$$a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}$$

repete-se periodicamente na expansão de α como fração contínua, isto é,

$$\begin{aligned} \alpha &= [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots, a_{n+k-1}, a_n, \ldots, a_{n+k-1}, \ldots] \\ &= [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \overline{a_n, \ldots, a_{n+k-1}}]\,. \end{aligned}$$

Nos próximos exemplos, esta propriedade será verificada.

Exemplo 3.2.5. Consideremos o número $\alpha = \sqrt{2}$. Vamos fazer o procedimento descrito no teorema (3.2.4) para este α. Temos $\beta_0 = \sqrt{2}$, $a_0 = 1$; $\beta_1 = 1/(\beta_0 - a_0) = 1/(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}+1 \approx 2.4142$. Logo, $a_1 = 2$ e $\beta_2 = 1/(\beta_1 - a_1) = 1/(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}+1 = \beta_1$, portanto, $a_2 = a_1 = 2$. Assim, $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}]$.

Exemplo 3.2.6. Consideremos o número $\alpha = \sqrt{3} \approx 1.73205$. Temos $a_0 = 1$, $\beta_0 = \sqrt{3}$ e $\beta_1 = 1/(\beta_0 - a_0) = 1/(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3}+1)/2 \approx 1.36602$; logo, $a_1 = 1$ e $\beta_2 = 1/(\beta_1 - a_1) = \sqrt{3}+1 \approx 2.73205$. Portanto, $a_2 = 2$ e $\beta_3 = 1/(\beta_2 - a_2) = 1/(\sqrt{3}-1) = \beta_1 \approx 1.36602$, ou seja, $a_3 = 1$. Logo, a expressão para $\sqrt{3}$ é $\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1, \overline{1, 2}]$.

Exemplo 3.2.7. Consideremos $\alpha = \sqrt{8} \approx 2.82842\ldots$. Temos $a_0 = 2$, $\beta_0 = \sqrt{8}$ e $\beta_1 = 1/(\beta_0 - a_0) = 1/(\sqrt{8}-2) = (\sqrt{8}+2)/4 \approx 1.2071\ldots$; logo, $a_1 = 1$ e $\beta_2 = 1/(\beta_1 - a_1) = \sqrt{8}+2 \approx 4.82842$. Portanto, $a_2 = 4$ e $\beta_3 = 1/(\beta_2 - a_2) = 1/(\sqrt{8}-2) = \beta_1$, logo, $a_3 = 1$ e a expressão para $\sqrt{8}$ é $\sqrt{8} = [2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \ldots] = [2, \overline{1, 4}]$.

Exemplo 3.2.8. Da mesma forma, vamos representar π como uma fração contínua. Sabemos que $\pi \approx 3,14159265\ldots$, então $a_0 = \pi = 3$, $\beta_1 = \dfrac{1}{\pi - 3} \approx 7.0625$, logo $a_1 = 7$. Prosseguindo, temos $\beta_1 = 1/(\beta_0 - a_0) \approx 15,989$, logo $a_2 = 15$. Prosseguindo com os cálculos, podemos verificar que $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, \ldots]$. Diferentemente dos casos anteriores, não há nenhum padrão definindo os a_n's.

Exercícios 3.2.9.

1. Represente os seguintes números como frações contínuas:

$$(a)\frac{7}{11} \qquad (b)\frac{-11}{7} \qquad (c)\frac{-3}{13}$$
$$(d)\sqrt{5}+1 \qquad (e)\sqrt{2} \qquad (f)8-\sqrt{\frac{3}{5}}$$

2. Verifique se cada um dos números abaixo é inteiro, racional ou irracional, justificando convenientemente sua resposta, e escreva os números que correspondem às frações contínuas:

$$(a)[7] \qquad (b)[2;1,\overline{3,4}] \qquad (c)[1;4,2,1]$$
$$(d)[1;\overline{1}] \qquad (e)[2;7,8,7,8,2]$$

3. Já vimos que podemos escrever o número de ouro da seguinte maneira:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}$$

   Calcule seus convergentes comparando-os com a sequência de Fibonacci, que é a seguinte (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...). Dica: Observe atentamente a razão de dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci.

4. Mostre que se $\alpha = [a_1, \ldots, a_n]$ então $\dfrac{1}{\alpha} = [1, a_1, \ldots, a_n]$. Conclua que $[1, 1, a_1, \ldots, a_n] = [a_1, \ldots, a_n]$.

5. Dados $b, c \in \mathbb{R}$, mostre que se $b^2 + 4c > 0$ então uma das raízes da equação quadrática $x^2 - bx - c = 0$ pode ser escrita como

$$x = b + \cfrac{c}{b + \cfrac{c}{b + \ldots}} \ .$$

Use este fato para expressar os números abaixo como frações contínuas:

(a) $\alpha = 3 + \sqrt{13}$ (b) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(c) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ (d) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

6. Encontre uma expansão em fração contínua para cada um dos números a seguir:

(a) $\alpha = \sqrt{7}$ (b) $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

(c) $\alpha = \sqrt[3]{2}$ (d) $\alpha = \sqrt{7}$

7. Mostre que o n-ésimo convergente c_n de uma fração contínua pode ser escrito como

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = \frac{1}{q_1 q_2} - \frac{1}{q_2 q_3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}$$

para qualquer $n \geq 1$.

8. Mostre que se os convergentes c_n convergem para α então:

   (a) $0 < c_{2n+1} - \alpha < \dfrac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$;

   (b) $0 < \alpha - c_{2n} < \dfrac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$;

   (c) $\dfrac{1}{k(k-1)} < |c_k - \alpha| \leq \dfrac{1}{(k-1)^2}$, $k \in \mathbb{N}$.

   Como consequência das desigualdades acima, podemos concluir que, dado $n \in \mathbb{N}$, dentre todas as frações com denominador $\leq q_n$, a fração $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ é a que melhor aproxima o número α.

3.3 Aproximação de números irracionais

Já vimos que as frações contínuas conseguem aproximar um número irracional tão bem quanto queremos, mas convenhamos que a expansão de uma fração contínua não é nem um pouco simples, certo?

Bom... Daí pode surgir uma questão: *Será que conseguimos aproximar um número irracional de uma forma que pareça mais simples?* Sim! É o que falaremos nesta seção.

Aproximação por inteiros

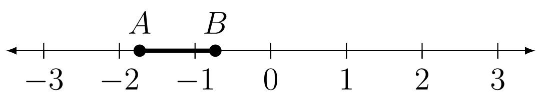
Será que existem números racionais $\dfrac{p}{q}$ que diferem de um dado número irracional por menos de 10^{-20}? Veremos que é possível obter números racionais tão próximos de um número irracional dado quanto se deseje.

Podemos arrendondar qualquer número real para o inteiro mais próximo, tendo erro menor que $\dfrac{1}{2}$. Por exemplo, se substituirmos $3,2$ por 3, ou $13,8$ por 14, o erro não será, em cada caso, maior do que $\dfrac{1}{2}$. Começaremos a teoria das aproximações com esse caso simples.

Teorema 3.3.1. Para qualquer número irracional α, existe um único inteiro m tal que

$$-\frac{1}{2} < \alpha - m < \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Qualquer segmento AB, de comprimento unitário, marcado na reta real conterá exatamente um inteiro, a menos que A e B sejam pontos inteiros.



Seja A o ponto correspondente a $\alpha - \frac{1}{2}$ e B, o ponto correspondente a $\alpha + \frac{1}{2}$. Como $\alpha - \frac{1}{2}$ e $\alpha + \frac{1}{2}$ não são inteiros, sabemos que A e B não podem ser pontos inteiros. Chamando de m o único inteiro no segmento AB, vemos que

$$\alpha - \frac{1}{2} < m < \alpha + \frac{1}{2}.$$

Subtraindo α, obtemos

$$-\frac{1}{2} < m - \alpha < \frac{1}{2}.$$

Já que $m - \alpha$ está entre $-\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{2}$, temos que $\alpha - m$ também estará, implicando que

$$-\frac{1}{2} < \alpha - m < \frac{1}{2}.$$

Perceba que o inteiro m é único, pois se existisse outro inteiro n, satisfazendo
$$-\frac{1}{2} < \alpha - n < \frac{1}{2},$$
então n satisfaria
$$\alpha - \frac{1}{2} < n < \alpha + \frac{1}{2}.$$
Mas o segmento AB contém apenas um inteiro, o que implica que $n = m$. $\square$

Aproximação por números racionais

Comecemos por um exemplo. Vamos procurar números racionais que aproximem

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420969807...$$

Note que podemos utilizar qualquer uma das expansões decimais

$$1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...$$

Isso ocorre, pois todos esses números são racionais e se aproximam de $\sqrt{2}$ pela esquerda. Perceba que a diferença entre $\sqrt{2}$ e sua n-ésima aproximação racional é menor que 10^{1-n}, ou seja, quanto maior for o valor de n, melhor será a aproximação. Uma possível aproximação para $\sqrt{2}$ é

$$\sqrt{2} \approx \frac{14142}{10000}.$$

Pergunta: Será que é possível encontrar uma boa aproximação de $\sqrt{2}$ que não tenha um denominador tão grande?

Sim. De todos as frações racionais com denominador 12, temos que a que seja mais próxima do valor de $\sqrt{2}$ é $\frac{17}{12}$.

Observe que:

$$\sqrt{2} - \frac{17}{12} \approx -0.0245$$

$$\sqrt{2} - \frac{141}{100} \approx 0.0421$$

$$\left|\sqrt{2} - \frac{17}{12}\right| < \left|\sqrt{2} - \frac{141}{100}\right|$$

Perceba que $\frac{17}{12}$ está mais próximo de $\sqrt{2}$ do que $\frac{141}{100}$.

Para não dependermos mais dos denominadores que são potências de 10, mostraremos a seguir como obter aproximações por números racionais de denominador arbitrário.

Teorema 3.3.2. Sejam λ um número irracional qualquer e n um número inteiro positivo qualquer. Então existe um número racional de denominador n, digamos $\frac{m}{n}$, tal que

$$-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}.$$

Demonstração. Dado qualquer irracional λ e qualquer inteiro positivo n, sabemos que, de fato, $n\lambda$ é irracional. Definiremos, então, m como sendo o inteiro mais próximo de $n\lambda$ e, assim,

$$-\frac{1}{2} < n\lambda - m < \frac{1}{2}.$$

Dividindo as desigualdades pelo inteiro positivo n, temos

$$-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n},$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 3.3.3. Vimos no início da discussão que

$$\sqrt{2} \approx \frac{17}{12}.$$

Vamos aplicar o Teorema (3.3.2) e mostrar que, de fato, $\frac{17}{12}$ aproxima $\lambda = \sqrt{2}$ para $n = 12$. Consideremos o número irracional $12\sqrt{2}$ que tem valor aproximado

$$12\sqrt{2} = 16,97056275...$$

Portanto, o inteiro mais próximo de $12\sqrt{2}$ é 17. Pelo Teorema (3.3.1), temos que

$$-\frac{1}{2} < 12\sqrt{2} - 17 < \frac{1}{2}.$$

Se dividirmos essas desigualdades por $n = 12$, obteremos

$$-\frac{1}{24} < \sqrt{2} - \frac{17}{12} < \frac{1}{24},$$

o que queríamos mostrar.

Exemplo 3.3.4. Queremos agora encontrar uma aproximação para

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288...$$

Podemos aproximá-lo utilizando uma de suas expansões decimais, como por exemplo

$$\pi \approx \frac{314}{100}.$$

Mas ao invés disto, vamos aplicar a ideia apresentada no Teorema (3.3.2), sendo $\lambda = \pi$ e $n = 1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Note que os inteiros mais próximos de

$$\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi, 9\pi, 10\pi$$

são, respectivamente,

$$3, 6, 9, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31.$$

Portanto os números racionais que procuramos são

$$\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{25}{8}, \frac{28}{9}, \frac{31}{10}.$$

onde o erro em cada uma dessas aproximações é menor do que $\dfrac{1}{2n}$. Perceba que as frações não são necessariamente irredutíveis.

Exercícios 3.3.5.

1. Ache os inteiros mais próximos de

$$(a)\sqrt{3} \qquad (b)4\sqrt{3} \qquad (c)\sqrt{13} \qquad (d)e \qquad (e)-\frac{3\pi}{2}$$

2. Ache números racionais $\dfrac{m}{n}$ que satisfaçam o Teorema (3.3.2), onde $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ e

$$(a)\lambda = \sqrt{5} \quad (b)\lambda = \sqrt{17} \quad (c)\lambda = 4\pi$$

$$(d)\lambda = 7e \quad (e)\lambda = \frac{2e}{5}$$

3. Qual dos números racionais encontrados no Exemplo (3.3.4) melhor aproxima π? Justifique sua resposta.

3.4 Aproximações melhores

Como vimos, qualquer número irracional λ pode ser aproximado por um número racional m/n "a menos de $1/2n$", isto é, com um erro menor do que $1/2n$. Será que essa aproximação pode ser feita a menos de $1/3n$ ou $1/4n$, ou, talvez, com um erro menor ainda? A resposta é sim. No próximo teorema veremos que λ pode ser aproximado por m/n, a menos de $1/kn$, para qualquer k que desejamos especificar: $k = 3$, $k = 4$, $k = 999999999$. etc. Mas, enquanto a aproximação a menos de $1/2n$ pode ser conseguida para qualquer inteiro positivo n, a aproximação que construiremos no teorema a seguir, com erro menor do que $1/kn$, com dado k, não poderá ser obtida para todos os inteiros n.

Será que podemos aproximar qualquer número irracional λ por m/n, a menos de $1/n^2$ ou $1/n^3$ ou com um erro ainda menor? A menos de $1/n^2$, sim, a menos de $1/n^3$, não. Mas esses serão tópicos de seções posteriores. Comecemos, então, com aproximações de λ por m/n, a menos de $1/kn$.

Teorema 3.4.1. Quaisquer que sejam o número irracional λ e o inteiro positivo k, existe um número racional m/n, cujo denominador não excede k, tal que

$$-\frac{1}{nk} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{nk}.$$

Antes de apresentarmos a demonstração do teorema acima, válida para quaisquer λ e k, demonstraremos o teorema numa situação particular, a saber, para $\lambda = \sqrt{3}$ e $k = 8$. Inicialmente, enumeraremos os múltiplos na forma $\lambda\,, 2\lambda\,, 3\lambda\,, \ldots$ $k\lambda$. Façamos uma lista dos múltiplos de $\sqrt{3}$, escrevendo cada múltiplo como soma de dois números positivos, um inteiro e um número menor do que 1:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{3} = 1 + 0,732\ldots & \sqrt{3} - 1 = 0,732\ldots \\
2\sqrt{3} = 3 + 0,464\ldots & 2\sqrt{3} - 3 = 0,464\ldots \\
3\sqrt{3} = 5 + 0,196\ldots & 3\sqrt{3} - 5 = 0,196\ldots \\
4\sqrt{3} = 6 + 0,928\ldots & 4\sqrt{3} - 6 = 0,928\ldots \\
5\sqrt{3} = 8 + 0,660\ldots & 5\sqrt{3} - 8 = 0,660\ldots \\
6\sqrt{3} = 10 + 0,392\ldots & 6\sqrt{3} - 10 = 0,392\ldots \\
7\sqrt{3} = 12 + 0,124\ldots & 7\sqrt{3} - 12 = 0,124\ldots \\
8\sqrt{3} = 13 + 0,856\ldots & 3\sqrt{3} - 13 = 0,856\ldots
\end{array}$$

Dividindo todos os números compreendidos entre 0 e 1 em 8 intervalos iguais, teremos então 8 intervalos, $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8$. Pensando em I_1 como o intervalo que vai de 0 até 1/8, I_2 o intervalo que vai de 1/8 até 2/8, e assim por diante. Classificaremos, agora, as oito partes decimais dos múltiplos de $\sqrt{3}$ nas categorias I_1,I_2,...I_8, da seguinte maneira:

(a) 0,732... está em I_6(pois 0,732...está entre 5/8 e 6/8)

(b) 0,464... está em I_4

(c) 0,196... está em I_2

(d) 0,928... está em I_8

(e) 0,660... está em I_6

(f) 0,392... está em I_4

(g) 0,124... está em I_1

(h) 0,856... está em I_7

Usaremos o número que está em I_1, na lista acima. Mas os números em I_1 estão entre 0 e 1/8, de modo que

$$0 < 7\sqrt{3} - 12 < \frac{1}{8}.$$

Como o número $7\sqrt{3} - 12$ está entre 0 e 1/8, ele certamente estará entre $-1/8$ e 1/8. Portanto,

$$-\frac{1}{8} < 7\sqrt{3} - 12 < \frac{1}{8}.$$

Dividindo esta desigualdade por 7, obtemos

$$-\frac{1}{7 \cdot 8} < \sqrt{3} - \frac{12}{7} < \frac{1}{7 \cdot 8}.$$

Esse é um resultado na forma do enunciado do Teorema (3.4.1), com $k = 8$, $n = 7$ e $m = 12$.

Baseamos nosso argumento no fato de $7\sqrt{3} - 12$ estar em I_1. O que teriamos feito se não existisse nenhum número no intervalo I_1? A resposta é que, se no intervalo I_1 não existisse nenhum número, então em um dos intervalos I_2,I_3,...,I_8

existiriam dois ou mais números. No exemplo acima, tão somente existe um número em I_1, mas também existem dois números em I_4 e dois em I_6, consideremos o par em I_6:

(a) 0,732... está em I_6; isto é, $\sqrt{3} - 1$ está em I_6;

(b) 0,660... está em I_6; isto é, $5\sqrt{3} - 8$ está em I_6.

Sempre que dois números estiverem em I_6 (ou, em qualquer outro dos demais intervalos), eles estarão a menos de 1/8 um do outro, de modo que a sua diferença estará entre -1/8 e 1/8. Em particular, para os dois números em I_6,temos:

$$-\frac{1}{8} < (5\sqrt{3} - 8) - (\sqrt{3} - 1) < \frac{1}{8}$$

$$-\frac{1}{8} < 4\sqrt{3} - 7 < \frac{1}{8}.$$

Dividindo por 4, obtemos

$$-\frac{1}{4.8} < \sqrt{3} - \frac{7}{4} < \frac{1}{4.8}.$$

Esse é outro resultado na forma do enunciado do Teorema (3.4.1) para $\lambda = \sqrt{3}$ e $k = 8$, dessa vez com $n = 4$ e $m = 7$. Vamos agora apresentar a prova do Teorema (3.4.1).

Demonstração. Dado um número irracional λ e um inteiro positivo k, consideremos os k números $\lambda\,, 2\lambda\,, \ldots\,, k\lambda$ e escrevamos cada um desses números como um inteiro mais uma parte fracionária ou decimal

$$\begin{array}{ll} \lambda = \alpha_1 + \beta_1 & 4\lambda = \alpha_4 + \beta_4 \\ 2\lambda = \alpha_2 + \beta_2 & \quad\vdots \\ 3\lambda = \alpha_3 + \beta_3 & k\lambda = \alpha_k + \beta_k \end{array}$$

Em seguida, dividimos o intervalo de 0 a 1 em k partes I_1,I_2,I_3,...,I_k, cada uma de comprimento $1/k$. Assim, o intervalo I_1 conterá os números entre 0 e $1/k$; I_2, os números entre $1/k$ e $2/k$, I_3 os números entre $2/k$ e $3/k$, etc. A palavra "entre"está sendo usada aqui, no sentido estrito, de modo que, por exemplo, os números $2/k$ e $3/k$ não são elementos do intervalo I_3. Observe que, cada um dos β_1, β_2, β_3,...,β_k é irracional, portanto, nenhum dos β's pode ser igual a um dos números racionais

$$0\,,\frac{1}{k}\,,\frac{2}{k}\,,\frac{3}{k}\,,\ldots\,,\frac{k-1}{k}\,,\frac{k}{k}.$$

Portanto, cada β_j está exatamente em um dos intervalos I_1,I_2,I_3,...,I_k. Existem duas possibilidades quanto à I_1: ou I_1 contém um ou mais β's, ou I_1 não contém nenhum dos β's. Trataremos essas duas possibilidades separadamente.

Caso 1. O intervalo I_1 contém um ou mais β's. Portanto existe um β, digamos β_n, no intervalo I_1. O símbolo n representa um dos inteiros $1, 2, 3, \ldots, k$. O número β_n é igual a $n\lambda$-α_n e, portanto, sabemos que

$$-\frac{1}{k} < 0 < n\lambda - \alpha_n < \frac{1}{k}\,.$$

Dividindo por n, obtemos

$$-\frac{1}{kn} < \lambda - \frac{\alpha_n}{n} < \frac{1}{kn}.$$

Assim, o Teorema (3.4.1) fica provado nesse caso, pois podemos definir m como sendo o inteiro α_n.

Caso 2. O intervalo I_1 não contém nenhum dos β's. Nesse caso, os k números β_1, β_2, β_3,...,β_k estão nos $k-1$ intervalos restantes $I_2\,, I_3\,, \ldots\,, I_k$.

Neste ponto vamos aplicar o *princípio da casa dos pombos de Dirichlet* que afirma: Se k pombos estiverem em $k-1$

casas, existirá pelo menos uma casa com dois ou mais pombos. Portanto, existe pelo menos um intervalo contendo dois ou mais β's. Suponhamos que β_r e β_j estejam no mesmo intervalo, com r e j dois números distintos entre $1, 2, 3, ..., k$. Suponhamos, ainda, que j seja maior que r, de modo que $j - r$ será um inteiro positivo, menor que k.

Por estarem β_r e β_j no interior do mesmo intervalo de comprimento $1/k$, sua diferença estará entre $-1/k$ e $1/k$. Assim,

$$-\frac{1}{k} < \beta_j - \beta_r < \frac{1}{k}.$$

Mas $\beta_j = j\lambda - \alpha_j$ e $\beta_r = r\lambda - \alpha_r$, de modo que

$$-\frac{1}{k} < (j\lambda - \alpha_j) - (r\lambda - \alpha_r) < \frac{1}{k}$$

ou

$$-\frac{1}{k} < (j - r)\lambda - (\alpha_j - \alpha_r) < \frac{1}{k}$$

Chamando $j - r$ de n e $\alpha_j - \alpha_r$ de m, temos

$$-\frac{1}{k} < n\lambda - m < \frac{1}{k}$$

Por definição, n é um inteiro positivo, e portanto, podemos dividir a desigualdade por n e obter:

$$-\frac{1}{kn} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{kn}.$$

Além do mais, sabemos que n, por ser igual a $j-r$ é menor do que k e assim completamos a demonstração do Teorema (3.4.1). Observe que a fração m/n não é, necessariamente, irredutível. $\square$

Exercícios 3.4.2.

1. Após o enunciado do Teorema (3.4.1), há um exemplo para o caso $\lambda = \sqrt{3}$ e $k = 8$. que valores de m e n teríamos obtido se tivéssemos escolhido os números $0,464\cdots$ e $0,392$ do intervalo I_4, em vez dos dois números do intervalo I_6?

2. Aplique o método dado na demonstração do Teorema (3.4.1) em cada um dos seguintes casos e obtenha, assim, valores de m e n satisfazendo as desigualdades do Teorema (3.4.1):

(a) $\lambda = \sqrt{3}$ e $k = 2$	(e) $\lambda = \sqrt{2}$ e $k = 8$
(b) $\lambda = \sqrt{3}$ e $k = 10$	(f) $\lambda = \sqrt{5}$ e $k = 8$
(c) $\lambda = \sqrt{2}$ e $k = 4$	(g) $\lambda = \sqrt{7}$ e $k = 10$
(d) $\lambda = \pi$ e $k = 2$	(h) $\lambda = \pi$ e $k = 8$

3.5 Aproximações a menos de $1/n^2$

No começo da seção (3.4), indicamos a direção dos nossos estudos, a saber, buscar aproximações racionais para qualquer número irracional λ. Iniciamos com aproximações de λ, por m/n, com erro inferior a $1/2n$, $n \in \mathbb{N}$ qualquer, e depois passamos a aproximações com erro inferior a $1/kn$, para algum $n \leq k$, conforme o Teorema (3.4.1). Vamos obter agora aproximações com erros menores do que $1/n^2$.

Teorema 3.5.1. Para todo número irracional λ, existem infinitos números racionais m/n, em forma irredutível, tais que

$$-\frac{1}{n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}.$$

Demonstração. Observemos, inicialmente, que, qualquer número racional m/n, satisfazendo a desigualdade do Teorema (3.4.1), automaticamente satisfará a desigualdade do Teorema (3.5.1). A razão é a seguinte: como n não excede k, e $k \geq n$, podemos deduzir que $1/kn \leq 1/n^2$. Portanto, qualquer número que esteja entre $-1/kn$ e $1/kn$ deverá, certamente, estar entre $-1/n^2$ e $1/n^2$.

A seguir, mostraremos que, se um número racional m/n, não em forma irredutível, satisfizer as desigualdades do teorema, então o mesmo número racional, em forma irredutível, satisfará as desigualdades apropriadas. Denotemos por M/N a forma irredutível de m/n. Podemos supor que ambos, n e N, sejam positivos, deixando qualquer sinal negativo ser absorvido pelo numerador. Temos, então que $m/n = M/N$, $0 < N \leq n$, porque simplificar uma fração até torná-la irredutível não altera o valor da fração, mas reduz o tamanho do denominador. Portanto, se λ satisfizer

$$-\frac{1}{n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2},$$

automaticamente satisfará

$$-\frac{1}{N^2} < \lambda - \frac{M}{N} < \frac{1}{N^2}.$$

Para completar a demonstração do teorema, precisamos demonstrar que existe uma *infinidade* de números racionais, em forma irredutível, satisfazendo as desigualdades requeridas. Suponhamos, ao contrário, que exista apenas um número finito dessas frações, digamos

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \ldots, \frac{m_i}{n_i}.$$

Consideremos então, os i números

$$\lambda - \frac{m_1}{n_1}, \lambda - \frac{m_2}{n_2}, ..., \lambda - \frac{m_i}{n_i}\,.$$

Podemos ver claramente que todos são irracionais, pois λ é irracional, portanto, nenhum deles é zero. Alguns podem ser positivos, outros negativos; vamos escolher um inteiro k, tão grande, que $1/k$ esteja entre 0 e todos os números positivos e $-1/k$ esteja entre 0 e todos os números negativos. Isso pode ser feito pois, quanto maior escolhermos k, mais próximos de 0 estarão os números $-1/k$ e $1/k$. Escolhamos, então, k tão grande que as seguintes desigualdades sejam todas falsas.

$$\begin{array}{ccccc} -\dfrac{1}{k} & < & \lambda - \dfrac{m_1}{n_1} & < & \dfrac{1}{k} \\ -\dfrac{1}{k} & < & \lambda - \dfrac{m_2}{n_2} & < & \dfrac{1}{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\dfrac{1}{k} & < & \lambda - \dfrac{m_i}{n_i} & < & \dfrac{1}{kn} \end{array}$$

Para esse valor de k, vamos aplicar o Teorema (3.4.1) e obter um número racional m/n tal que

$$-\frac{1}{kn} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{kn}.$$

Isso nos diz que $\lambda - m/n$ está entre $-1/kn$ e $1/kn$ e, portanto, $\lambda - m/n$ terá que estar entre $-1/k$ e $1/k$; em símbolos:

$$-\frac{1}{k} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{k}\,.$$

Mas como todas as desigualdades são falsas, concluímos que m/n é diferente de cada um dos i números m_1/n_1, m_2/n_2,...,

m_i/n_i. Portanto, obtivemos mais um número racional satisfazendo as desigualdades do Teorema (3.5.1), contradizendo nossa hipótese. $\square$

Exemplo 3.5.2. Vamos determinar quatro aproximações racionais (em forma irredutível) do número π, suficientemente próximas de π para satisfazer as desigualdades do Teorema (3.4.1).

Observemos, inicialmente, que sendo $\pi = 3,14159\ldots$,

$$-\frac{1}{1^2} < \pi - \frac{3}{1} < \frac{1}{1^2} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{1^2} < \pi - \frac{4}{1} < \frac{1}{1^2}\,.$$

Para achar duas outras aproximações, podemos usar outros métodos para obter os números racionais mais próximos de π, com denominadores 2,3,4 :

$$\frac{6}{2}, \ \frac{9}{3}, \ \frac{13}{4}, \ \frac{16}{5}, \ \frac{19}{6}, \ \frac{22}{7}, \ldots$$

Rejeitamos $6/2$ e $9/3$ por não serem frações irredutíveis e testamos as demais para ver se satisfazem as desigualdades do Teorema (3.5.1); por exemplo,

$$-\frac{1}{36} < \pi - \frac{19}{6} < \frac{1}{36} \qquad \text{(Verdade!)}$$

Somos, assim, levados a rejeitar $13/4$ e $16/5$, mas aceitar $19/6$ e $22/7$. Portanto, um conjunto de respostas ao problema seria $3/1\,, 4/1\,, 19/6$ e $22/7$.

O número racional $22/7$ é uma aproximação muito boa e prática de π. Não existe número racional com denominador entre 1 e 56 que esteja mais próximo de π. O número $179/57$ está um pouquinho mais próximo de π do que $22/7$, mas não satisfaz as desigualdades do Teorema (3.4.1). O número racional $355/113$ satisfaz as desigualdades do Teorema (3.4.1) e está bem mais próximo de π do que $22/7$. De fato, suas seis primeiras casas decimais coincidem com as de π.

Pode-se demonstrar a seguinte versão, mais forte, do Teorema (3.4.1) : *Para todo número irracional λ, existem infinitos números racionais m/n, em forma irredutível, tais que*:

$$\frac{1}{n(n+1)} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n(n+1)}.$$

Com ajuda desse teorema, no exemplo acima, o número $4/1$ (que é uma aproximação horrível para π) pode ser eliminado.

Para demonstrar a versão mais forte do Teorema (3.5.1), vamos precisar de uma versão mais forte do Teorema (3.4.1). A ideia da demonstração é similar àquela utilizada na demonstração do Teorema (3.4.1), onde usamos o princípio da casa de pombo de Dirichlet para concluir que, dados k números, distribuídos em k intervalos, ou existe um número no primeiro intervalo, ou existe um intervalo contendo pelo menos dois desses números. Para obter a versão mais forte, basta dividir o nosso intervalo unitário em $k+1$ subintervalos e observar que dados k números, distribuídos em $k+1$ intervalos, ou existe um número no primeiro intervalo, ou existe um número no último intervalo, ou existe um intervalo contendo pelo menos dois números. Esse uso do princípio da casa do pombo, nos permite escrever a seguinte desigualdade mais forte

$$-\frac{1}{n(k+1)} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n(k+1)}.$$

Usando esta expressão, a demonstração da versão mais forte do Teorema (3.4.1) é imediata.

Exercícios 3.5.3.

1. Para um dado número irracional λ, demonstre que

dois dos *infinitos números racionais* m/n do Teorema (3.4.1), tem $n = 1$, isto é, são inteiros.

2. Ache dois números racionais, não inteiros, que satisfaçam as desigualdades do Teorema (3.4.1) para

$$(a)\ \lambda = \sqrt{2} \qquad (b)\ \lambda = \sqrt{3}$$
$$(c)\ \lambda = \sqrt{5} \qquad (d)\ \lambda = \sqrt{7}$$

3. Complete a demonstração mais forte do Teorema (3.4.1) baseando-se na ideia que demos antes dos exercícios, e mostre que $\pi - 4/1$ e $\pi - 19/6$ não satisfazem a desigualdade mais forte, no entanto $\pi - 22/7$ a satisfaz.

4. Ache uma boa aproximação racional para os seguintes números irracionais:

   (a) $\lambda = e$, $(e = 2,7182...)$

   (b) $\lambda = \Phi$, $(\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803...)$

   (c) $\lambda = \text{sen}1$, $(\text{sen}1 = 0.8414...)$

   (d) $\lambda = \ln 2$, $(\ln 2 = 0.693147...)$

3.6 Retoques finais

Até agora, vimos que, para qualquer número irracional λ, existem infinitos racionais, m/n tais que

$$-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}\,.$$

Depois, vimos que dá para melhorar ainda mais:

$$-\frac{1}{kn} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{kn}\,,$$

e fomos ainda mais longe, provando a existência de uma aproximação do tipo

$$-\frac{1}{n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}\,.$$

Conseguimos torná-la ainda mais forte, chegando à

$$-\frac{1}{n(n+1)} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n(n+1)}\,.$$

Fazendo um paralelo com os resultados anteriores, será que daria para melhorar ainda mais? Aproximar por

$$-\frac{1}{2n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n^2}?$$

A resposta é *sim*! Não demonstraremos aqui, mas a relação acima é verdadeira; a questão é, *quão boa é a aproximação de um número usando esse tipo de relação?* Existe um teorema famoso, afirmando que, para qualquer λ irracional, existem m/n tais que

$$-\frac{1}{\sqrt{5}n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{\sqrt{5}n^2}\,.$$

E mais, que $\sqrt{5}$ é a constante que fornece a melhor aproximação possível desse tipo. Isso significa que, se substituirmos $\sqrt{5}$ por qualquer número maior, a afirmação, torna-se falsa. Portanto, para aproximações desse tipo e nível, a relação

$$-\frac{1}{\sqrt{5}n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{\sqrt{5}n^2}$$

é a melhor de todas.

Capítulo 4

Sequências e Séries

4.1 Bases Numéricas

A necessidade de contar surgiu com o desenvolvimento das atividades humanas. Assim, foram criados vários sistemas de numeração, como o egípcio, romano, e o sistema posicional.

O sistema universalmente utilizado atualmente para representar números é o *sistema decimal posicional*, desenvolvido a partir so sistema Hindu. Após várias modificações feitas, principalmente, pelos árabes, temos o Sistema como ele é hoje. Esse sistema chegou no Ocidente no no século IX, graças à Abu Jafas Musal-Khwarizmi.

Para entender melhor como funciona o Sistema Posicional, tomemos um número escrito no sistema decimal usual. Nesse sistema, todo número positivo pode ser representado como uma soma de unidade, dezena, centena, e assim por diante; de tal forma que teremos uma soma de potências de 10 com coeficientes variando de 0 a 9.

Exemplo 4.1.1. O número 4325 pode ser visto como a soma de 5 unidades, com 2 dezenas, 3 centenas e 4 milhares, ou seja, 4325 é uma abreviação da expressão

$$4.10^3 + 3.10^2 + 2.10^1 + 5.10^0$$

ou ainda

$$4.10^3 + 3.10^2 + 2.10 + 5.$$

O Sistema Posicional de representação consiste em escrever, de forma única, um número N natural utilizando uma base b. No exemplo que acabamos de ver, tínhamos $N = 4325$ e $b = 10$.

De uma forma mais geral, *dados* $a, b \in \mathbb{N}$*, com* $b > 1$*, existem números naturais* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ *menores que* b*, univocadamente determinados, tais que* $a = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + \ldots + c_n b^n$*.* Esse resultado segue da aplicação da divisão euclidiana e pode ser verificado que é válido usando o Princípio de Indução. Se $a = 0$ ou se $a = 1$, basta tomar $n = 0$ e $c_0 = a$. Supondo o resultado válido para todo natural menor que a, vamos prová-lo para a. Pela divisão euclidiana, temos que existem q e r únicos tais que

$$a = bq + r, \text{ com } r < b.$$

Como $q < a$, pela hipótese de indução, segue que existem números naturais n' e $d_0, d_1, \ldots, d'_n$ com $d_j < b$, para todo j tais que

$$q = d_0 + d_1 b + \ldots + d_{n'} b^{n'}.$$

Juntando as igualdades acima, teremos

$$a = bq + r = b(d_0 + d_1 b + \ldots + d_{n'} b^{n'}) + r,$$

que nos dará o resultado colocando $c_0 = r$, $n = n' + 1$ e $c_j = d_j - 1$ para $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo 4.1.2. Representação de um número na base 7:

$$(6241)_7 = 6.7^3 + 2.7^2 + 4.7 + 1$$

Essa demonstração nos fornece, também, um algorítimo para determinar a expansão de um número qualquer relativamente à base b. Trata-se de aplicar sucessivamente a divisão euclidiana.

Exemplo 4.1.3. Consideremos, o número $(13)_{10}$. Ao dividirmos por 2, temos quociente 6 e resto 1. Assim, temos que 1 é o último algarismo de $(13)_{10}$ na base 2. Para obter o próximo algarismo, dividimos 6 por 2, obtendo quociente 3 e resto 0, onde 0 é algarismo esperado. Por fim, dividimos 3 por 2 e obtemos quociente 1 e resto 1, que serão os dois últimos algarismos restantes. Portanto, $(13)_{10} = (1101)_2$.

As mesmas regras práticas para efetuar cálculos no sistema decimal são também válidas em qualquer outra base. Na adição, primeiro somamos as unidades, depois passamos à ordem seguinte e assim por diante. Lembrando que deve ser feita uma transferência à ordem seguinte toda vez que em uma ordem se obtém uma soma maior ou igual à base do sistema. A mesma ideia vale para a subtração.

Exemplo 4.1.4. Vamos ver como efetuar a soma entre $(23651)_8$ e $(17043)_8$:

$$\begin{array}{r} (23651)_8 \\ +\,(17043)_8 \\ \hline (42714)_8 \end{array}$$

Já a multiplicação, é baseada na tábua de multiplicar, que oferece o produto dos números menores que a base do sistema. Para multiplicar um número x por um número y, localizamos x na 1^a coluna e y na 1^a linha. Assim, temos o produto xy na interseção da linha de x com a coluna de y.

Exemplo 4.1.5. Vejamos a tabela de multiplicar da base 5:

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Temos, pela tabela

$$(3)_5 \cdot (4)_5 = (22)_5.$$

A tabela também pode ser utilizada para multiplicar números maiores

E na divisão, aplicamos o mesmo método que usamos no sistema decimal (”em chaves”) em qualquer outro sistema, com o auxílio da tabela de multiplicação e tomando cuidado com as subtrações.

Exemplo 4.1.6. Vamos ver como calcular $(231)_5 \div (21)_5$:

$$\begin{array}{r|l}
(231)_5 & (21)_5 \\ \cline{2-2}
\underline{(21)_5} & (11)_5 \\
(21)_5 & \\
\underline{(21)_5} & \\
0 &
\end{array}.$$

Até agora falamos apenas de números inteiros, mas representação decimal dos inteiros é naturalmente estendida às frações decimais. Nesse caso, consideramos não apenas as potências não negativas do número, mas também as negativas $(10^{-1}, 10^{-2}, \ldots)$.

Exemplo 4.1.7. O número $45,532$ é abreviação da expressão

$$4.10^1 + 5.10^0 + 5.10^{-1} + 3.10^{-2} + 2.10^{-3}.$$

Mais que isso, frações podem também ser representadas em qualquer outra base. Dado $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e uma base $b > 1$ qualquer, existem $a_0, a_1, ..., a_r, c_1, c_2, ..., c_s, \ldots \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, tais que

$$\alpha = (a_r b^r + ... + a_1 b + a_0) + (c_1 b^{-1} + c_2 b^{-2} + \ldots + c_s b^{-s} + \ldots).$$

As duas parcelas entre parênteses da soma acima são, respectivamente, a *parte inteira de* α e a *parte não-inteira de* α.

Denotamos $\alpha = (a_r \ldots a_1 a_0, c_1 c_2 \ldots c_s \ldots)_b$.

Exemplo 4.1.8. O número $(102,1201)_3$ é uma abreviação da expressão

$$1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + 1 \cdot 3^{-4}.$$

A conversão da parte inteira de um número já sabemos como fazer. A parte fracionária é um pouco diferente.

Exemplo 4.1.9. Seja o número $42,75$ escrito na base 10 e vamos escrevê-lo na base 3. Sabemos que sua parte inteira $(42)_{10} = (1120)_3$. Agora, para converter a parte fracionária $0,75$, usamos a seguinte ideia:

$$0,75 \cdot 3 = 2,25$$

Guardamos a parte inteira 2 e na próxima etapa, multiplicamos apenas a parte fracionária:

$$0,25 \cdot 3 = 0,75$$

Guardamos, novamente, a parte inteira 0 e multiplicamos apenas a parte fracionária:

$$\begin{gathered} 0,75 \cdot 3 = 2,25 \Rightarrow 2 \\ 0,25 \cdot 3 = 0,75 \Rightarrow 0 \\ \dots \end{gathered}$$

Fazendo isso continuamente, obtemos a escrita da parte fracionária na base 3 usando as partes inteiras que obtemos nas multiplicações acima:

$$(0,75)_{10} = (0,20202...)_3$$

Portanto,

$$(42,75)_{10} = (1120,20202...)_3.$$

Vamos encerrar esta seção falando um pouco sobre o número de dígitos da representação de um número em uma determinada base.

Exemplo 4.1.10. Dados $n, b \in \mathbb{N}$, $b > 1$, já observamos que a representação de n na base b é composta por uma sequência de dígitos $(c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0)$ determinados unicamente pela igualdade

$$n = c_k b^k + \dots + c_1 b + c_0\,,$$

sendo que $c_0, c_1, \dots, c_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$. Como a representação acima é única, é imediato verificar que $k = k(n)$ é o maior inteiro tal que $b^k \leq n$; em particular, temos $b^{k(n)} \leq n < b^{k(n)+1}$. Usando a função $\log_b(x)$, logaritmo na base b, temos $k(n) \leq \log_b n < k(n) + 1$. Logo, $k(n) = \lfloor \log_b n \rfloor + 1$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x. Portanto, *o número de dígitos necessários para representar n na base b é igual a*

$$k(n) = \lfloor \log_b n \rfloor + 1\,.$$

A fórmula acima é interessante especialmente porque permite determinar o número de dígitos da representação de um número em uma determinada base sem necessariamente escrevê-lo explicitamente. Por exemplo, no sistema decimal, $k(2^{1000}) + 1 = \lfloor \log_{10}(2^{1000}) \rfloor + 1 = \lfloor 1000 \cdot \log_{10} 2 \rfloor + 1 = 302$, ou seja, o número 2^{1000} possui 302 dígitos no sistema decimal!

Exercícios 4.1.11.

1. Dados os números 4783 e 54,321 na base 10, escreva-os nas bases 2, 3, 6 e 8 com aproximação de quatro casas decimais.

2. **(Critério de divisibilidade por 2)** Seja dado um número a, representado na base 10 por $a = a_n \dots a_1 a_0$. Usando o fato de que 2^k divide 10^k, mostre que 2^k divide a se, e somente se, o número $a_{k-1} \dots a_1 a_0$ é divisível por 2^k. Em particular, a é divisível por 2 se, e somente se, a_0 é 0, 2, 4, 6 ou 8.

3. Utilize a tabuada da base 5 para calcular $132 + 413$ e $23 \cdot 342$, sendo que estes números estão na base 5.

4. No quadro negro está escrito um exercício de matemática parcialmente apagado: $23?5? + 1?642 = 42423$. Descubra em qual sistema numérico foram efetuadas as contas e quais são as parcelas desconhecidas.

5. **(Unicidade da representação decimal)** Sejam $a = 0.a_1a_2\ a_3 \dots$ e $b = 0.b_1b_2b_3 \dots$ duas dízimas quaisquer representadas na base 10, com $a_j, b_j \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$, $j \in \mathbb{N}$. Neste exercício, vamos provar que, a menos de uma única ambiguidade, estas dízimas representam o mesmo número se e só se $a_k = b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que $\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots \leq 1$, sendo que a igualdade só ocorre se $a_j = 9$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

(b) Mais geralmente, mostre que

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_k}{10^k}+\ldots \leq \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_k}{10^k}+\frac{1}{10^k}$$

sendo que a igualdade ocorre se e só se $a_j = 9$ para todo $j > k$.

(c) Conclua que se $a = b$ então, ou $a_j = b_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ ou existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = b_j$ para $j < k$, $b_k = a_k + 1$, $b_j = 0$ e $a_j = 9$ para todo $j > k$. Ou seja, as únicas ambiguidades de representação possíveis são do tipo $0.235 = 0.23499999\ldots$ ou $0.19778 = 0.1977799999\ldots$, etc. Em particular, a representação decimal de um número irracional é única.

4.2 Sequências

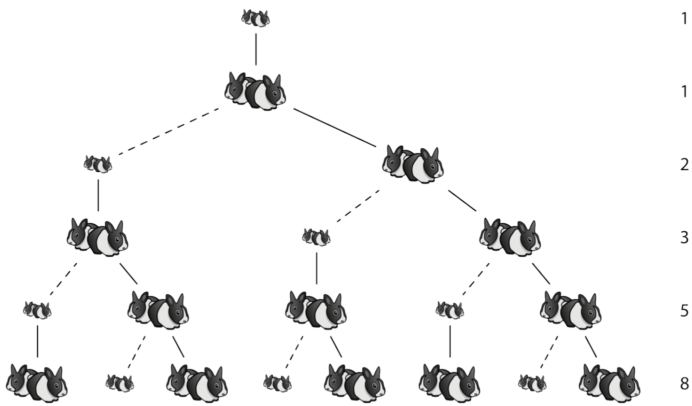
O que é uma sequência? Intuitivamente uma sequência numérica é uma sucessão de números dada por uma regra ou relação de recorrência. A definição matemática precisa de sequência é mais abstrata e não iremos abordá-la. Para nós, a noção intuitiva será suficiente.

Exemplo 4.2.1 (Sequência de Fibonacci). Uma sequência que aparece em alguns fenômenos é a sequência de Fibonacci (sendo o n-ésimo termo dessa sequência denotado por F_n) que é dada pela seguinte relação de recorrência:

$$F_1 = 1, F_2 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,.$$

Ou seja, a sequência de Fibonacci é $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$. A primeira menção desta sequência no Ocidente foi no livro *Liber Abbaci*, em 1202, por Leonardo Pisaro, também conhecido como Fibonacci. Neste livro, ele propõe o seguinte problema:

"Um certo homem coloca um casal de coelhos recém nascidos num local isolado. Sabendo que um coelho demora um mês para se tornar fértil, que depois de um mês cada casal produz um novo casal e nenhum coelho morre, quantos coelhos haverão no final de um ano?"



Exemplo 4.2.2. Consideremos a sequência $x_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Os valores da sequência são $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$. Observamos que

$$x_{4m+1} = \operatorname{sen}\left((4m+1)\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1\,,$$

$$x_{4m+3} = \operatorname{sen}\left((4m+3)\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(2m\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

e $x_{2m} = \operatorname{sen}\left((2m)\dfrac{\pi}{2}\right) = sen\,(m\pi) = 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Isso mostra que a cada quatro termos os valores se repetem, razão pela qual chamamos a sequência de *periódica*, neste caso, de período 4. Temos também que, à medida que n cresce, os valores da sequência não se aproximam de nenhum valor específico.

Exemplo 4.2.3. Dado um número real $\alpha > 0$, os números β_n,a_n e c_n, $n \in \mathbb{N}$, construídos na seção (3.2) também fornecem exemplos de sequências.

4.3 Convergência e Limites

Empiricamente falando, dizemos que uma sequência *converge* quando os valores da sequência se aproximam de um valor fixado, à medida que n cresce. Neste caso, chamamos de *limite* ao valor do qual a sequência se aproxima arbitrariamente e este valor é denotado por $\lim_{n\to+\infty} x_n$, ou simplesmente, $\lim x_n$. Dizemos que uma sequência *diverge* quando não há nenhum valor real do qual a sequência se aproxima à medida que n cresce.

Quando a sequência divergente cresce ou decresce indefinidamente dizemos que, apesar de não ser convergente, o limite é $+\infty$ ou $-\infty$, respectivamente.

Um bom exemplo de sequência convergente é dado por $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. É fácil perceber que quando n cresce x_n se aproxima de 0, pois $x_1 = 1$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 1/3 = 0,333\ldots$, $x_{10} = 1/10 = 0,1\,, \ldots\,, x_{100} = 1/100 = 0,01\,, \ldots$.

Para facilitar o cálculo de limites, apresentaremos algumas regras aritméticas simples que são muito úteis para o cálculo de limites. Sejam $(x_n), (y_n), (z_n), (w_n)$ sequências de números reais tais que $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$. Então é verdade que:

(i) $\lim\,(x_n \pm y_n) = a \pm b$;

(ii) $\lim\,(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

(iii) $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}$, se $b \neq 0$;

(iv) Se $x_n \leq z_n \leq y_n$ para $n \geq N$, onde $N \in \mathbb{N}$ é fixado, e $\lim x_n = \lim y_n = c$ então $\lim z_n = c$;

(v) Se $z_n \leq w_n$ para $n \geq N$, onde $N \in \mathbb{N}$ é fixado, e $\lim z_n = +\infty$ então $\lim w_n = +\infty$. De maneira análoga, se $\lim w_n = -\infty$ então $\lim z_n = -\infty$.

Exemplo 4.3.1 (Aproximações Sucessivas). Considere a sequência que aproxima π a partir de suas casas decimais

$$a_1 = 3;\ a_2 = 3,1;\ a_3 = 3,14;\ a_4 = 3,141;\ a_5 = 3,1415; \ldots$$

Essa sequência tem limite e $\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$.

Existe uma categoria de sequências que apresentam um comportamento bastante simples, sobre as quais pode-se inferir um resultado de convergência muito importante. São as chamadas *sequências monótonas* que passamos a descrever. Uma sequência (x_n) é dita *crescente* se $x_n < x_{n+1}$ e *decrescente* se $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência (x_n) é dita *monótona* se for crescente ou decrescente.

Por exemplo, as sequências

$$x_n = \frac{1}{n}\,,\ x_n = -n\,,\ x_n = \frac{1}{n^2+n+1}$$

são decrescentes e as sequências

$$x_n = \frac{n-1}{n}\,,\ x_n = 2n + \operatorname{sen}^2 n\,,\ x_n = n^3 + 3n$$

são crescentes. Evidentemente, uma sequência pode não ser nem crescente nem decrescente, como a do exemplo (4.2.2). O próximo resultado é de grande importância histórica e sua demonstração pode ser encontrada em [12].

Teorema 4.3.2. Se (x_n) é uma sequência monótona, então existe $\lim_{n\to\infty} x_n$ (podendo ser inclusive $\pm\infty$).

Em situações práticas, ocorre às vezes de não ser necessário estudar a totalidade dos termos de uma sequência para obter alguma informação útil. Pode ser que estudando apenas algumas *porções* da sequência, já possamos obter algumas informações relevantes. Estas *porções* são chamadas de *subsequências*, as quais passamos a descrever.

Uma *subsequência* de uma sequência (x_n) é obtida a partir de uma escolha crescente de naturais $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$, aos quais correspondem os termos $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ da sequência original. Esta nova sequência é chamada de *subsequência* da sequência dada. Evidentemente, qualquer subsequência de uma sequência convergente também converge para o mesmo limite que a sequência original.

Exemplo 4.3.3. Dado um número real $a > 0$, consideremos a sequência dada por $x_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$. Para estudar esta sequência, vamos considerar três situações possíveis:

1. Se $a = 1$, temos que $x_n = a^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, logo $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

2. Se $a > 1$, podemos escrever que $a = 1 + h$ para $h > 0$. Então, pela expansão binomial,

   $$a^n = (1+h)^n = 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+...+h^n \geq 1+nh\,,$$

   para todo $n \geq 1$. Como sempre se consegue n de forma que $1 + nh$ seja tão grande quanto se queira temos que $\lim_{n\to\infty}(1 + nh) = +\infty$. Pela regra de limite (v), como $a^n \geq 1 + nh$ então $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$.

3. Se $0 < a < 1$ então $1 > a > a^2 > ... > a^n$, ou seja, a sequência é decrescente, portanto existe $\ell =$

$\lim_{n\to\infty} a^n$. Olhando para a subsequência $x_{2n} = a^{2n}$ temos que

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} a^{2n} = \left(\lim_{n\to\infty} a^n\right)^2 = \ell^2 .$$

Logo $\ell^2 = \ell \Rightarrow\ \ell = 0$ ou $\ell = 1$. Como $x_n < 1$ para $n \geq 1$, e x_n decresce temos que $\ell = 0$.

Exemplo 4.3.4 (Juros Compostos). Considere um capital inicial C_0, o qual aplicaremos a uma taxa de juros compostos α, $\alpha > 0$, capitalizado uma vez ao ano. O capital C_1 após um ano será $C_1 = C_0 + \alpha C_0 = (1+\alpha)C_0$. Ao final do segundo ano, o capital será $C_2 = C_1 + \alpha C_1 = (1+\alpha)^2 C_0$. Ao final de k anos, o capital será

$$C_k = (1+\alpha)^k C_0 .$$

Vamos agora capitalizar os valores de outra forma: ao invés de aplicarmos a taxa de juros em um só momento, vamos dividí-la em duas partes iguais, cada uma das quais será aplicada a cada seis meses. Sendo assim, o capital após seis meses será $C_{1/2} = C_0 + \dfrac{\alpha}{2} C_0 = \left(1 + \dfrac{\alpha}{2}\right) C_0$. Após um ano, o capital será $C_1 = C_{1/2} + \dfrac{\alpha}{2} C_{1/2} = \left(1 + \dfrac{\alpha}{2}\right)^2 C_0$. De maneira geral, após k períodos de seis meses, o capital será

$$C_{k/2} = \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^k C_0 .$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, podemos dividir o ano em n períodos iguais e, de maneira mais geral, capitalizar a taxa de juros α/n ao final de cada período. Capitalizando desta forma, o capital após

k períodos será $C_{k/n} = \left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^k C_0$. Escrevendo $t = k/n$ temos

$$C_t = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{nt} C_0 = \left(\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n}\right)^t C_0\,.$$

Podemos pensar o que acontece com o capital se capitalizarmos os juros em períodos cada vez menores. Em termos matemáticos, basta verificar o que acontece com a expressão acima quando $n \to \infty$. Para simplificar um pouco as contas, vamos considerar $\alpha = 1$; temos então a seguinte sequência

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Vamos mostrar que é uma sequência convergente. Temos pelo Binômio de Newton que:

$$a_n = 1+n\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} \leq 1+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

Na próxima seção mostraremos que para $a \neq 1$ temos

$$1+a+a^2+a^3+\ldots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}\,,$$

logo

$$a_n \leq 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3\,.$$

Consideremos os primeiros termos da sequência:

$$a_1 = (1+1)^1 = 1+1 = 2$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 1 + 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 2,370370\ldots$$

Observe que a cada termo da sequência é adicionada uma parcela à soma e cada uma dessas parcelas aumenta. Este padrão se repetirá para o restante da sequência, que portanto, é crescente. Em particular, (a_n) é convergente.

Dessa maneira podemos definir $e \doteq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828$. Pode-se mostrar que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right] = e$$

e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$e^\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$$

Voltando ao problema da capitalização, vemos que se o número de capitalizações $n \to \infty$, temos

$$C(t) = \lim_{n\to\infty} C_0\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{nt} = C_0 e^{\alpha t}\,.$$

Assim como o π o número e aparece naturalmente em vários problemas na Matemática.

Exemplo 4.3.5 (**Método babilônico para extração de raízes quadradas).** Dado $b > 0$, consideremos a seguinte sequência

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right)\,.$$

Se essa sequência for convergente, $\ell = \lim a_n$ e $\ell > 0$, então

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{b}{\ell}\right) \Rightarrow \ell = \frac{b}{\ell} \Rightarrow \ell^2 = b \Rightarrow \ell = \sqrt{b}$$

Note que se $x > 0$, então $\left(x + \frac{b}{x}\right) \geq \sqrt{b}$ e vale a igualdade somente para $x = \sqrt{b}$, então se $0 < a_0 \neq \sqrt{b}$ temos que $a_{n+1} > \sqrt{b}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos que se $a_1 \geq \sqrt{b}$ então (a_n) converge para $\sqrt{b}$.

$$a_{n+1} - \sqrt{b} = \frac{a_n}{2} - \sqrt{b} + \frac{b}{2a_n} = \frac{a_n}{2} - \frac{\sqrt{b}}{2} - \frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{b}{2a_n}$$

$$a_{n+1} - \sqrt{b} = \frac{a_n - \sqrt{b}}{2} - \frac{a_n\sqrt{b} - b}{2a_n} = \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{b})\left(1 - \frac{\sqrt{b}}{a_n}\right)$$

$$a_{n+1} - \sqrt{b} = \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{b})\left(1 - \frac{\sqrt{b}}{a_n}\right) \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{b})$$

$$(*)\ a_n > \sqrt{b} > 0 \Rightarrow -1 < -\frac{\sqrt{b}}{a_n} < 0$$

Logo:

$$a_{n+1} - \sqrt{b} \leq \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{b}) \leq ... \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_1 - \sqrt{b})$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - \sqrt{b}) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n (a_1 - \sqrt{b}) = 0$$

Segue que a sequência converge e $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{b}$. Suponha $b = 2$ e $a_0 = 1$:

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12} = 1,416666...$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{577}{408} = 1,414215...$$

$$\sqrt{2} = 1,414213...$$

Exemplo 4.3.6. Seja x_n a sequência dada por

$$x_n = \sqrt[n]{n}$$

Observe que

$$x_1 = 1 < \sqrt{2} = x_2$$

$$(x_2)^6 = (\sqrt{2})^6 = 8 < 9 = (\sqrt[3]{3})^6 = (x_3)^6 \Rightarrow x_2 < x_3$$

$$x_3 = \sqrt[3]{3} > \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} = x_4$$

Vemos que

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{n})^{n(n+1)} > (\sqrt[n+1]{n+1})^{n(n+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n \Leftrightarrow n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Assim, se $n \geq 3$ temos que $x_n > x_{n+1}$. Como para qualquer $n > 1$ tem-se que $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1$, então a sequência converge, digamos para ℓ. Antes de mostrar qual é o limite ℓ, mostremos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. A convergência é fácil, visto que se $n > 2$, então $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{2} > 1$, e para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos que $\sqrt[n]{2} > \sqrt[n+1]{2}$. Seja então $b = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$, deste modo $\sqrt{b} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2} = b \Rightarrow b = 1$. Consequentemente,

$$\ell^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \ell$$

$$\ell^2 = \ell \Rightarrow \ell = 1\,.$$

Exercícios 4.3.7.

1. Seja (b_n) a seguinte sequência:

$$b_0 = \sqrt{2},\ b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$$

   Mostre por indução em n que (b_n) é crescente para $n \geq 0$, seguindo os seguintes passos:

   (a) Mostre que a afirmação é válida para $n = 0$, ou seja, $b_0 \leq b_1$.

   (b) Mostre que se a afirmação vale para $n \geq 0$, então vale para $n + 1$, isto é, se $b_n \leq b_{n+1}$ então $b_{n+1} \leq b_{n+2}$.

   (c) Mostre que (b_n) é limitada, utilizando os passos anteriores.

   (d) Calcule o limite.

2. Considere a sequência $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$, $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Mostre que a sequência converge. (Sugestão: Utilize o fato que $\sqrt{n^2 + 1} > n$, que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, e a diferença $a_{n+1} - a_n$ para detectar o crescimento ou decrescimento).

   (b) Calcule o limite.

3. Seja (x_n) a sequência

$$x_n = \left(\frac{3n + 1}{2n + 1}\right)^n$$

   Calcule o limite da sequência. (Sugestão: Tente recorrer às sequências já trabalhadas usando fatoração)

4.4 Séries Numéricas

Agora que você já sabe o que é uma sequência numérica, nós podemos tratar sobre o estudo das séries. Mas o que seria isso? Pra começarmos, uma *série* é uma *"soma $s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ com infinitos termos"*. Só que desde que começamos a estudar matemática, nós fazemos somas finitas, e é justamente isto que faremos para séries. Nós iremos somar n termos e ver como esta soma se comporta quando o número de somandos cresce, ou em linguagem matemática

$$s = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

Portanto, reduzimos o problema de somar infinitos termos para o cálculo de um limite, e como você ja estudou, este limite pode ou não existir. Estudar a existência deste limite será a tarefa desta seção.

Convergência e Divergência

Seja (a_n) uma sequência de números reais. A partir dela, podemos formar uma nova sequência (s_n), onde os termos são as somas

$$s_1 = a_1 \ , \ s_2 = a_1 + a_2 \ , \ \cdots \ , \ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

que chamaremos de *reduzidas* da série $\sum a_n$. O termo a_n será chamado de *termo geral* da série. Desta forma, se existir o limite

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

diremos que a série $\sum a_n$ é *convergente* e o limite s será chamado a *soma* da série. Daí, escreveremos

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Se $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existir, diremos que a série $\sum a_n$ é *divergente*.

Série Geométrica

Um exemplo de série que você provavelmente já viu no Ensino Médio, é a *progressão geométrica (P.G.)*, que consiste em uma soma em que cada somando é obtido multiplicando o anterior por uma constante, conhecida como razão da progressão. Conseguiu visualizar? Veja esse exemplo

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots$$

Neste caso, o primeiro termo da P.G. é 1 e sua razão $a = 2$. Vamos agora, considerar um caso especial, onde a razão $-1 < a < 1$ e ver como calcular sua soma finita e infinita. Para isso, considere a soma $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$ de razão a, com $|a| < 1$. Assim, temos que

$$S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n \tag{4.1}$$

Se multiplicarmos (4.1) por a, obtemos

$$aS_n = a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^{n+1} \tag{4.2}$$

Agora, se subtrairmos (4.2) de (4.1), os termos do meio se cancelam e obtemos $S_n - aS_n = 1 - a^{n+1}$, ou seja

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Veja que obtemos uma fórmula para calcular a soma da P.G. para n termos, que é dada por S_n. Agora, estamos interessados em analisar o comportamento da sequência S_n quando n ficar cada vez maior, assim

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \overset{(*)}{=} \frac{1}{1-a}$$

Não entendeu o que ocorreu na passagem $(*)$? Calma, vamos lá. Lembre-se que escolhemos a razão $|a| < 1$ e já vimos no Exemplo (4.3.3) que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-a}$. Portanto, a série geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$ é convergente, e converge para $\dfrac{1}{1-a}$.

Critério da Comparação

Como acabamos de ver, a progressão geométrica se comporta bem, e até sabemos o valor exato para o qual ela converge, porém nem tudo são rosas. Muitas vezes encontraremos séries mais complexas que não serão uma progressão geométrica, porém vamos querer pelo menos saber se ela converge ou diverge. Para resolver esse problema, vamos utilizar um critério muito útil que nos ajudará a concluir se uma série é convergente ou divergente, conhecido como *Critério da Comparação*, que nos diz:

Teorema 4.4.1 (Critério da Comparação). Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries com termos não negativos. Se conseguirmos mostrar que $a_n \leq b_n$, e que a série $\sum b_n$ converge então a série $\sum a_n$ também vai convergir. Por outro lado, se $\sum a_n$ diverge, devemos ter que $\sum b_n$ diverge.

Para ilustrar esse teste, vamos verificar que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$$

converge.

Para isso, considere as sequências $a_n = \dfrac{4}{3^n + 1}$ e $b_n = \dfrac{4}{3^n}$. Então se você olhar com atenção, vai perceber que $\sum b_n$ é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{3}$, como já vimos. Ou seja

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{q} \frac{4}{3^n} &= 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \cdots + \frac{4}{3^q} \\ &= 4\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^q}\right) \end{aligned}$$

Então, se você aprendeu bem, vai saber que a soma é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{3^n} = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 4\underbrace{\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right)}_{\texttt{Soma da P.G.}} = 6 \qquad \text{(Verifique as contas!)}$$

Portanto, $\sum b_n$ é convergente. Agora vamos tentar usar o critério da comparação para obter $a_n \leq b_n$. Para isso, vamos fazer a seguinte conta

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\dfrac{4}{3^n}}{\dfrac{4}{3^n + 1}} = \frac{3^n + 1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3^n} \geq 1 \qquad \text{(Verifique!)}$$

Então, como o quociente acima é maior que 1, temos que $a_n \leq b_n$ (Por que?), e como todos os termos das séries são positivos, podemos usar o Critério da Comparação para concluir que $\sum a_n$ é convergente.

Teste do Termo Geral

Quando pensamos em uma série convergente, estamos afirmando que a *"soma de infinitos termos"* resulta em um número. Assim, é natural que à medida que seguimos com a soma, os somandos devem diminuir, senão sempre estaríamos somando parcelas que não diminuem e a série iria divergir. Por exemplo, a seguinte série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots$$

converge, como já vimos, para 2 (Verifique!). Além disso, seus termos vão diminuindo, pois

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{2^3} > \cdots$$

Esse raciocínio nos garante o seguinte resultado:

Teorema 4.4.2 (Teste do Termo Geral). O termo geral de uma série convergente tem limite zero. Em particular, se o termo geral de uma série não converge para zero, então a série é divergente.

Porém, precisamos tomar muito cuidado com este resultado, pois ele nos diz que se, a série convergir então os seus termos diminuem de modo que quando n é muito grande eles se aproximam de zero. Mas, se por acaso só sabemos que o termo geral da série tem limite zero, não podemos afirmar sobre a convergência dela. Essa ideia vai ficar mais clara quando falarmos sobre a série harmônica.

Vamos ver um exemplo de como podemos utilizar esse teste, considerando a série $\sum 2^n$. Veja que $2^1 < 2^2 < 2^3 < \ldots$, ou seja, o termo geral não converge para zero quando n aumenta, e pelo teste do termo geral a série é divergente.

A Série Harmônica

Se você ainda não ouviu falar da série harmônica, pode ter certeza que irá ouvir. Mas por que ela é ”famosa”? Antes de tentar responder essa dúvida, vamos conhecê-la. A série harmônica é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Como qualquer outra série, estamos interessados em saber se ela converge ou diverge, e caso convirja, para qual valor. Mas primeiro vamos tentar utilizar os resultados que vimos, para falar algo desta série. Assim, se analisarmos o comportamento da sequência $a_n = \dfrac{1}{n}$ para valores muito grandes de n, teremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Entretanto, saber que o termo geral da série harmônica tende para zero com o aumento de n, não nos diz nada sobre sua convergência, certo? Vamos tentar uma abordagem diferente, considerando a sequência de reduzidas de ordem 2^n, isto é,

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\,.$$

Vemos que $s_2 = 1 + \dfrac{1}{2}$ e

$$\begin{aligned} s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Mais geralmente pode-se mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}\,. \tag{4.3}$$

Como a sequência (s_n) é crescente e a subsequência (s_{2^n}) verifica a relação (4.3), segue que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, ou seja, a série harmônica diverge. Podemos analisar os termos s_{2^n-1} de maneira semelhante àquela utilizada anteriormente, por exemplo:

$$\begin{aligned} s_3 &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ &\leq 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_7 &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \\ &\leq 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 3\,. \end{aligned}$$

Uma análise inteiramente análoga mostra que $s_{2^n-1} < n$ e, como $s_{2^n} = s_{2^n-1} + 1/2^n$, concluímos que

$$1 + \frac{n}{2} < s_{2^n} < n + \frac{1}{2^n}\,,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso mostra que a série harmônica diverge, mas as reduzidas crescem de forma *branda*. Para tornar isto um pouco mais explícito, dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, consideremos $N \in \mathbb{N}$ o menor inteiro tal que $2^{N-1} < n \leq 2^N$, ou seja, N é o menor inteiro com a propriedade $N - 1 < \log_2 n \leq N$. Assim, por um lado, temos

$$s_n \leq s_{2^N} < N + \frac{1}{2^N} < (1 + \log_2 n) + 1 = 2 + \log_2 n$$

e, por outro,

$$s_n > s_{2^N - 1} > 1 + \frac{N-1}{2} > \frac{1 + \log_2 n}{2}\,.$$

Portanto,

$$\frac{1 + \log_2 n}{2} < s_n < 2 + \log_2 n\,,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Esta última desigualdade expressa matematicamente o lento crescimento das reduzidas da série harmônica. Por exemplo, $s_{100.000} < 2 + \log_2(100.000) < 2 + 16.7 < 19$ e $s_{1.000.000} < 2 + \log_2(1.000.000) < 2 + 19.94 < 22$, etc.

Mas a pergunta que fica é: por que parece que ela converge? Ou ainda, se você for corajoso e se aventurar a fazer as contas manualmente, vai perceber que quanto mais você aumenta o n, parece que a soma $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots 1/n$ fica próxima de um número! Para entender um pouco melhor esse fenômeno, vamos supor que fôssemos capazes, de a cada segundo, somar um termo da série harmônica. Como o ano possui aproximadamente 365 dias e 6 horas, vamos transformar essa quantidade de dias em segundos, assim, um ano possui

$$365,25 \times 24 \times 60 \times 60 = 31.557.600 \text{ segundos.}$$

Portanto, no período de 31.557.600 segundos conseguiríamos somar $n = 31.557.600$ termos da séria harmônica. Incrivelmente, o valor que resultaria desta soma seria menor que $2 + \log_2(31.557.600) < 27$. Em dez anos, teríamos que a soma seria menor que $2 + \log_2(10 \cdot 31.557.600) < 31$, já em 100 anos a soma não excederia $2+\log_2(100\cdot 31.557.600) < 34$. Ao aumentarmos a quantidade de termos, estamos somando fatores muito pequenos, e novamente isso parece ir contra nossa intuição, pois visualmente a série harmônica parece convergir, porém como já vimos isso não ocorre.

Vamos ir um pouco mais longe na imaginação, considerando que temos à nossa disposição o computador mais potente que existe atualmente. Sabemos da física, que nada pode superar a velocidade da luz, assim esse computador imaginário não pode efetuar uma soma em tempo inferior a 10^{-23} segundos, que é o tempo gasto pela luz para percorrer a distância igual ao diâmetro de um elétron. Digamos, então, que nosso computador realize uma soma a cada 10^{-23} segundos. Usando estimativas um pouco melhores, podemos concluir que em:

(i) Um ano teríamos 315.576×10^{25} termos da série, cuja soma seria aproximadamente 70,804.

(ii) Mil anos teríamos 315.576×10^{28} termos da série, cuja soma seria aproximadamente 77,718.

(iii) Um bilhão de anos teríamos 315.576×10^{34} termos da série, cuja soma seria aproximadamente 91,5273.

Por fim, se desde o início do universo há 16 bilhões de anos, esse computador estivesse ligado e realizando a soma dos termos da séria harmônica, ele estaria obtendo hoje um valor de aproximadamente 94,2999, um número muito pequeno comparado com a quantidade de termos somados. Ou seja, conseguimos provar que a série harmônica é divergente, isto é, a soma de seus termos fica arbitrariamente grade, porém isso se dá em uma velocidade extremamente baixa, quase parando.

Um fato muito curioso é que, se retirarmos da série harmônica todos os termos $1/n$ onde n possui o algarismo 9 em sua expressão na base decimal, então a série assim obtida (chamada de *série de Kempner*) é *convergente* e sua soma não excede 23 ....

O Número e é Irracional

Como já vimos, $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Então iremos utilizar fortemente a determinação de e por uma série para mostrar sua irracionalidade. Lembrando, que um número é irracional quando ele não pode ser representado por uma fração do tipo $\frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Para isso, considere:

$$0 < e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{4.4}$$

Por outro lado, se expandirmos a série do e obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{(q+1)q!} + \frac{1}{(q+2)(q+1)q!} + \cdots \\
&= \frac{1}{q!} \left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \cdots \right) \\
&< \frac{1}{q!} \underbrace{\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots \right)}_{\texttt{Soma da P.G.}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}}\right) \\
&= \frac{1}{q!}\frac{1}{q}
\end{aligned}
$$

Unindo as informações que nós temos e substituindo na desigualdade (4.4)

$$0 < e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}$$

Agora suponha, por absurdo, que $e \in \mathbb{Q}$, ou seja, ele pode ser escrito na forma de fração do tipo $e = \dfrac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Assim

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}$$

$$0 < q!\frac{p}{q} - q!\sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} < \frac{1}{q} < 1$$

$$0 < \underbrace{(q-1)!p}_{\in\mathbb{Z}} - \underbrace{q!\sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}}_{\in\mathbb{Z}} < 1$$

Verifique que $(q-1)!p \in \mathbb{Z}$ e $q!\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!} \in \mathbb{Z}$. Assim, se você perceber chegamos em um absurdo. Por que? Veja bem, a última desigualdade nos diz que temos um inteiro $q!\dfrac{p}{q} - q!\displaystyle\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}$ no intervalo $(0,1)$ o que não pode ocorrer. Assim, como nós supomos que e era racional e chegamos em um absurdo, devemos ter que e é irracional.

Série de Leibniz

Como vimos para o número e, podemos escrever um número como uma série infinita, e assim utilizar propriedades das séries para provar resultados, como por exemplo a irracionalidade. Desta forma, o número π também pode ser determinado por uma série, obtida usando Séries de Fourier, conhecida como Série de Leibniz e dada por:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

Exercícios 4.4.3.

1. Calcule as somas abaixo:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{3^n}$

2. Verifique se as seguintes séries convergem ou divergem.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{299}{n^2+6n+9}$

   (*Dica: use o fato que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p > 1$ é convergente)

3. Usando o critério da comparação, prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, usando o fato que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ é convergente.

4.5 Conjunto de Cantor

Nesta seção, aplicaremos alguns conceitos já estudados sobre bases numéricas para estudar o *Conjunto de Cantor*. Este conjunto foi introduzido pelo matemático Georg Cantor (sobre o qual já falamos no primeiro capítulo) em 1874 e possui propriedades muito interessantes, algumas das quais estudaremos nesta seção.

Escrevendo os elementos do conjunto de Cantor na base 3

Como vimos na sessão 4.1, podemos representar os números em muitas bases, e dependendo da situação, uma determinada base escolhida pode ser muito útil. Vamos ver que, no presente caso é de grande utilidade representar os números na base 3, pois com isso ganhamos uma nova caracterização dos elementos do conjunto de Cantor. Sendo assim, vamos fazer isso e ver o que acontece. Primeiramente, vamos mostrar que $(1)_3 = (0,222\ldots)_3$, pois iremos utilizar este resultado no decorrer desta sessão.

Provavelmente o leitor já se deparou com a expressão

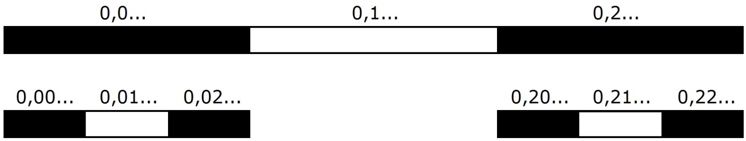
$1 = 0,999\ldots$, que pode ser deduzida do seguinte modo,

$$\begin{aligned}
0,999\ldots &= x \\
9,999\ldots &= 10x \\
9,999\ldots &= 9x + x \\
9,999\ldots &= 9x + 0,999\ldots \\
9 &= 9x \\
1 &= x \\
1 &= 0,999\ldots
\end{aligned}$$

De modo parecido podemos mostrar que $(1)_3 = (0,222\ldots)_3$,

$$\begin{aligned}
2 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + \ldots &= (0,222\ldots)_3 \\
2 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + \ldots &= x \\
2 \cdot 3^{0} + 2 \cdot 3^{-1} + \ldots &= 3x \\
2 \cdot 3^{0} + 2 \cdot 3^{-1} + \ldots &= 2x + x \\
2 \cdot 3^{0} + 2 \cdot 3^{-1} + \ldots &= 2x + 2 \cdot 3^{-1} + \ldots \\
2 \cdot 3^{0} &= 2x \\
3^{0} &= x \\
3^{0} &= 2 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + \ldots \\
(1)_3 &= (0,222\ldots)_3
\end{aligned}$$

Sabendo disso, agora vamos ver o que acontece quando representamos um número $x \in [0,1]$ na base 3. Note que para escrevermos x na base 3 primeiro precisamos obter uma expressão $x = a_1 \cdot 3^{-1} + a_2 \cdot 3^{-2} + a_3 \cdot 3^{-3} + \ldots$, e portanto teremos que $x = (0, a_1 a_2 a_3 \ldots)_3$, onde os números a_n são 0, 1 ou 2. Tendo x na base 3, vamos ver o que os algarismos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ significam geometricamente, na figura abaixo.



Se dividirmos o intervalo $[0,1]$ em 3 partes iguais, então o algarismo a_1 nos diz em qual destas partes x está (figura acima). Vamos dizer que a parte da esquerda corresponde ao intervalo $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$, a parte do meio corresponde ao intervalo $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ e a parte da direita corresponde ao intervalo $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$. Escrevendo estas frações, que delimitam os intervalos, na base 3, temos que a parte da esquerda corresponde aos números de $(0)_3$ até $(0,1)_3 = (0,0222\ldots)_3$, a parte do meio corresponde aos números entre $(0,1)_3$ e $(0,2)_3$, e a parte da direita corresponde aos números de $(0,2)_3$ até $(1)_3$.

Sendo assim, se $a_1 = 0$ então x está na parte da esquerda, se $a_1 = 1$ então x está na parte do meio e se $a_1 = 2$ então x está na parte da direita. Veja que se $a_1 = 1$ e todos os outros algarismos a_n forem 0, então vamos escrever $x = (0,0222\ldots)_3$, e portanto neste caso x estará na parte da esquerda, mas não da do meio.

Note que quando estamos construindo o conjunto de Cantor, nós dividimos o intervalo $[0,1]$ exatamente como acabamos de fazer, e depois eliminamos a parte do meio, cujo intervalo é $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$. Sendo assim, estamos eliminando todos os números do intervalo $[0,1]$ que, na base 3, são escritos exatamente da forma $(0,1\ldots)_3$, isto é, estamos eliminando os números x tais que $a_1 = 1$. Novamente, perceba que não eliminamos o número $(0,1)_3$ pois este é igual a $(0,0222\ldots)_3$.

Deste modo, após eliminarmos estes números, restam apenas os que são da forma $(0,0\ldots)_3$ ou $(0,2\ldots)_3$.

Para o próximo passo da construção do conjunto de Cantor, dividimos os intervalos $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ e $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$ em três partes cada, uma parte da esquerda, do meio e da direita. Sendo assim, similarmente ao que foi mostrado anteriormente, o algarismo a_2 indica se x está na parte da esquerda ($a_2 = 0$), na parte do meio ($a_2 = 1$) ou na parte da direita ($a_2 = 2$) de cada intervalo $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ ou $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$. Este próximo passo da construção do conjunto de Cantor consiste em eliminar a parte do meio de cada intervalo $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ e $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$. Ou seja, consiste em eliminar os números da forma $(0,01\ldots)_3$, com exceção de $(0,01)_3 = (0,00222\ldots)_3$, e os números da forma $(0,21\ldots)_3$, com exceção de $(0,21)_3 = (0,20222\ldots)_3$. Deste modo eliminamos os números x tais que $a_2 = 1$, fazendo restar apenas os números da forma $(0,00\ldots)_3$, $(0,02\ldots)_3$, $(0,20\ldots)_3$ ou $(0,22\ldots)_3$.

Como o leitor deve ter percebido, no próximo passo da construção do conjunto de Cantor eliminamos os números x tais que $a_3 = 1$, em seguida no próximo passo eliminamos os números x tais que $a_4 = 1$, depois eliminamos aqueles em que $a_5 = 1$, e continuamos sempre deste modo. Isso quer dizer que para construir o conjunto de Cantor basta eliminarmos todos os números do intervalo $[0,1]$ cuja expansão na base 3 possui algum dígito 1. Porém, note que sempre quando tivermos um número que, na base 3, termina com o dígito 1, podemos substituir este último algarismo por um 0 seguido de uma sequência infinita de algarismos 2, e assim não eliminamos estes números. Deste modo, *o conjunto de Cantor K consiste de todos os números do intervalo* $[0,1]$

cuja expansão na base 3 possui apenas os algarismos 0 *ou* 2.

O conjunto de Cantor é não-enumerável

Para esta demonstração, vamos supor que K é enumerável e deste modo chegar a uma contradição. O leitor deve lembrar que um conjunto A é dito enumerável se este pode ser escrito como uma lista $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, com todo elemento de A aparecendo em algum lugar da lista. Ou seja, A é enumerável se para qualquer elemento de $x \in A$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = x_n$.

Vamos então à demonstração de que o conjunto de Cantor K é não-enumerável. Vamos supor que K é enumerável, ou seja, vamos supor que existe uma lista $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ com todos os números de K. Para chegarmos em uma contradição, vamos mostrar que existe um número $x \in K$ tal que x não está nesta lista.

Suponha que cada número x_n da lista, representado na base 3, é dado por $x_n = (0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots)_3$, ou seja, os dígitos (após a vírgula) de x_n na base 3 são $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots$. Agora defina o número $\overline{x} = (0, \overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\overline{a}_{33}\ldots)_3$, onde a barra em cima de cada algarismo a_{nn} significa que estamos trocando o dígito 0 com o 2 e vice-versa, ou seja, $\overline{a}_{nn} = 2$ se $a_{nn} = 0$ e $\overline{a}_{nn} = 0$ se $a_{nn} = 2$. Note que $\overline{x} \in K$, pois os algarismos de $\overline{x}$, na base 3, possuem apenas os dígitos 0 ou 2. Contudo, $\overline{x}$ não está na lista $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, pois qualquer que seja o número x_n da lista, teremos que $\overline{x} \neq x_n$, pois sabemos que $\overline{x}$ e x_n diferem em relação ao algarismo a_{nn} de x_n. Portanto, $\overline{x}$ é um elemento de K que não está na lista, o que é uma contradição, pois a lista $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ deveria ter todos os elementos de K. Sendo assim, K não pode ser enumerável, ou seja, o conjunto de Cantor é não-enumerável. $\square$

A função de Cantor

Nesta sessão vamos definir a função de Cantor e analisar a sua curiosa representação gráfica.

Vamos chamar a função de Cantor de função f. Para definirmos uma função precisamos dizer qual é o seu domínio, contradomínio, e qual é a sua "regra", ou seja, se x pertence ao domínio de f então precisamos dizer o que $f(x)$ significa.

A função f possui o intervalo $[0, 1]$ como domínio e contradomínio e se $x \in [0, 1]$, então definimos $f(x)$ através dos seguintes passos:

1. Escreva x na base 3.

2. Verifique se x possui algum dígito 1 em sua expansão na base 3. Se possuir, troque todos os dígitos após o primeiro 1 que aparecer por zeros. Caso x não possua o algarismo 1 em sua expansão na base 3, não faça nada. Vamos chamar de x' o número obtido nesta etapa (escrito na base 3).

3. Troque todos os algarismos 2's de x' por 1's. Vamos chamar de x'' o número obtido nesta etapa (escrito na base 3).

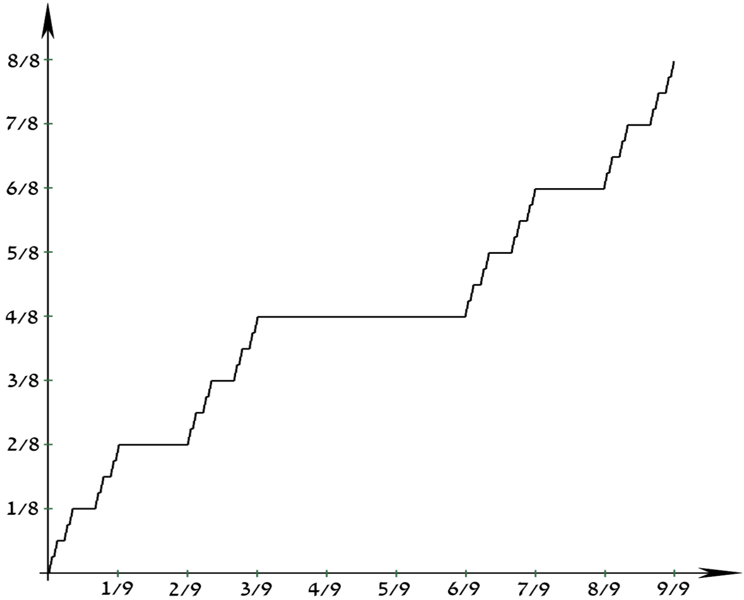
4. Agora o número x'' terá apenas os algarismos 0 ou 1. Sendo assim, interprete x'' como se estivesse escrito na base 2. O número obtido será $f(x)$.

Encorajamos o leitor a desenhar o gráfico desta função. Para isso, primeiro obtenha $f(x)$ para os pontos do intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Como vimos anteriormente, os números deste intervalo escritos na base , são da forma $(0,1\ldots)_3$. Logo,

$f(x) = (0,1)_2 = \dfrac{1}{2}$ para $x \in \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$. Agora estude os intervalos $\left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{2}{9}\right)$ e $\left(\dfrac{7}{9}, \dfrac{8}{9}\right)$. O leitor chegará a conclusão de que se $x \in \left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{2}{9}\right)$ então $f(x) = \dfrac{1}{4}$ e se $x \in \left(\dfrac{7}{9}, \dfrac{8}{9}\right)$ então $f(x) = \dfrac{3}{4}$. Prossiga deste modo, estabelecendo os valores que a função f assume para os números dos intervalos que retiramos quando estamos construindo o conjunto de Cantor, e aos poucos vá esboçando o gráfico de f.

Note que utilizamos a estratégia acima para obter a representação gráfica de f, estudando sempre os intervalos que não estão no conjunto de Cantor, pois sabemos que os números destes intervalos possuem algum algarismo 1 quando representados na base 3. Deste modo, conseguimos obter o valor de f nestes intervalos.

Após alguns passos esboçando o gráfico de f, o leitor irá verificar que há um padrão para realizar esta tarefa. Sendo assim, é possível imaginar como seria este este gráfico se continuássemos esboçando-o infinitamente. Teríamos então, a seguinte representação gráfica de f:



É curioso observar que f é constante em cada intervalo retirado de $[0, 1]$ para obtermos o conjunto de cantor.

A função f possui a seguinte propriedade curiosa: Seja x um número fixado tal que $0 \leq x \leq 1$ e tomemos um número aleatório do conjunto de Cantor. Então, qual é a probabilidade deste número estar à esquerda de x? A resposta é dada por $f(x)$, onde f é a função de Cantor.

Exercícios 4.5.1.

1. Verifique quais dos números abaixo pertencem ao conjunto de Cantor.

   (a) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{3}{5}$ (e) $\frac{7}{10}$ (g) $\frac{13}{20}$

   (b) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{7}{8}$ (f) $\frac{9}{10}$ (h) $\frac{1}{40}$

2. Se escolhermos um número aleatório do conjunto de

Cantor, então qual é a probabilidade deste número estar à esquerda de

(a) $\dfrac{3}{8}$ (b) $\dfrac{4}{5}$ (c) $\dfrac{19}{20}$ (d) $\dfrac{7}{40}$

Resposta dos Exercícios

Capítulo 2

Exercícios 2.2.1

1. (a) $\dfrac{19}{21}$

   (b) $\dfrac{1}{18}$

   (c) $\dfrac{46}{65}$

   (d) $-\dfrac{89}{21}$

2. O par de fração $\dfrac{-6-3t}{3}, \dfrac{-24-11t}{11}$ com $t \in \mathbb{Z}$ é solução.

Exercícios 2.3.6

1. (a) $0,25$

   (b) $0,01$

   (c) $0,8025$

   (d) $0,0112$

   (e) $2,816$

   (f) $1,2596$

2. (a) $\dfrac{1}{9}$
   (b) $\dfrac{1853}{4950}$
   (c) $\dfrac{1663}{1665}$
   (d) $\dfrac{1}{9900}$
   (e) 1

Exercício 2.6.1

(a) $8x^3 - 6x + 1 = 0$

(b) Se $sen(20°)$ fosse racional, então $sen^2(20°)$ e $1-2sen^2(20°)$ seriam racionais. Porém mostramos em (i) que $cos(40°)$ é irracional. Temos, então, uma contradição. E portanto, $sen(10°)$ é irracional.

(c) Análogo a (ii).

(d) $cos(\theta) = sen(90° - \theta)$

Exercício 2.6.4

(a) $\cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ é irracional.

(b) Usar (a).

(c) $\cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ é irracional.

(d) $\cos(40°)$ é irracional e $\cos(2\times 35°) = \cos(70°) = \cos(90° - 20°) = \text{sen}(20°)$

(e) $\text{sen}(40°) = \text{sen}(90° - 50°) = \cos(50°)$

Exercício 2.7.1

(a) Supondo $\log(2^c 5^d)$ racional, chegaremos que $bc = a = db \Rightarrow bc = db$, mas como c e d são inteiros distintos, logo bc e db são distintos. Então, o número em questão é irracional.

(b) e (c) Proceder como nos exemplos.

(c) Lembre que $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$.

Exercício 2.8.7

(a) $x^2 - 3 = 0$

(b) $x^3 - 5 = 0$

(c) $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

(d) $x^{21} - 12x^{14} + 48x^7 - 75 = 0$

(e) $x^{819} - 2^{91}11^{273}3^{117}5^{63} = 0$

(f) $x^{24} - 7360x^{12} + (2^{10}5^2 23^2 - 2^{10}41^2 7)$

Capítulo 3

Exercício 3.2.9

1. (a) $[0; 1, 1, 1, 3]$
   (b) $[-2; 2; 3]$
   (c) $[-1; 1, 3, 3]$
   (d) $[3; \overline{4}]$
   (e) $[1; \overline{2}]$
   (f) $[7; 4, 2, 3, ...]$

3. Após calcular os convergentes da fração contínua $[1; 1, 1, 1, ...]$ se pode observar que os valores dos convergentes são iguais às razões de dois termos consecutivos da Sequência de Fibonacci.

Exercício 3.3.5

1. (a) 2
   (b) 7
   (c) 4
   (d) 3
   (e) -5

2. (a) $\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}, \frac{16}{7}, \frac{18}{8}, \frac{20}{9}, \frac{22}{10}$
   (b) $\frac{4}{1}, \frac{8}{2}, \frac{12}{3}, \frac{16}{4}, \frac{21}{5}, \frac{25}{6}, \frac{29}{7}, \frac{33}{8}, \frac{37}{9}, \frac{41}{10}$
   (c) $\frac{13}{1}, \frac{25}{2}, \frac{38}{3}, \frac{50}{4}, \frac{63}{5}, \frac{75}{6}, \frac{88}{7}, \frac{101}{8}, \frac{113}{9}, \frac{126}{10}$
   (d) $\frac{19}{1}, \frac{38}{2}, \frac{57}{3}, \frac{76}{4}, \frac{95}{5}, \frac{114}{6}, \frac{133}{7}, \frac{152}{8}, \frac{171}{9}, \frac{190}{10}$
   (e) $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{11}{10}$

3. $\frac{22}{7}$

Exercício 3.4.2

1. Os mesmos m e n. $m = 7$ e $n = 4$.

2. (a) $m = 3$ e $n = 2$.
   (b) $m = 12$ e $n = 7$.
   (c) $m = 4$ e $n = 3$.

(d) $m = 3$ e $n = 1$.

(e) $m = 7$ e $n = 5$.

(f) $m = 9$ e $n = 4$.

(g) $m = 8$ e $n = 3$.

(h) $m = 22$ e$n = 7$.

Exercício 3.5.3

2. (a) $4/3$ e $7/5$.

   (b) $7/4$ e $12/7$.

   (c) $7/3$ e $9/4$.

   (d) $5/2$ e $8/3$.

4. (a) $8/3$.

   (b) $8/5$.

   (c) $5/6$.

   (d) $2/3$.

Capítulo 4

Exercício 4.1.11

1. (a) Base 2: 100101010111 e 110110,0101 ; Base 3: 20120011 e 2000,0222 ; Base 6: 34051 e 130,1532; Base 8: 11257 e 66,2442.

3. $(132)_5 + (413)_5 = (1100)_5$ e $(23)_5 \times (342)_5 = (20021)_5$.

4. Base 7. As parcelas que faltam são 4, 1 e 5, respectivamente.

Exercício 4.3.7

1. (d) Seja l o limite da sequência, então:

$$\begin{aligned} l = \sqrt{2+l} &\Rightarrow l^2 = 2 + l \Rightarrow l^2 - l - 2 = 0 \\ &\Rightarrow l = 2 \text{ ou } l = -1 \end{aligned}$$

   Sabemos que $l \geq 0$, pois $b_n > 0$, logo $l = 2$

2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

3.

$$\begin{aligned} x_n = \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n &= \left(\frac{3n}{2n}\right)^n \frac{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n} \\ &> \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)}{e^{1/2}} \end{aligned}$$

   Temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)}{e^{1/2}} = +\infty$$

   Logo $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

Exercício 4.4.3

1. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{3^n} = 9.$

2. (a) Converge.
   (b) Diverge.
   (c) Converge.

Exercício 4.5.1

1. (a) Pertence
   (b) Pertence
   (c) Não pertence
   (d) Não pertence
   (e) Pertence
   (f) Pertence
   (g) Não pertence
   (h) Pertence

2. (a) $\frac{1}{2}$ ou 50%
   (b) $\frac{3}{4}$ ou 75%
   (c) $\frac{7}{8}$ ou $87,5\%$
   (d) $\frac{1}{4}$ ou 25%

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, G. **A Série Harmônica e a Fórmula de Euler-Maclaurin**. Matemática Universitária, n.19, p 55-93, dezembro de 1995.

[2] DOMINGUES, H. H.; **Fundamentos da Aritmética**. São Paulo: Editora Atual, 1991.

[3] FERRAREZI Vilela de Souza, Guilherme **Frações Contínuas e suas Aplicações** Trabalho de Conclusão de Curso, Pró-Reitoria de Graduação, Curso de Licenciatura em Matemática, UCB. Brasília, 2012.

[4] FIBONACCI, Leonardo. **Fibonacci's Liber abaci**: a translation into modern English of Leonardo Pisano's. Book of calculation. Springer, 2002.

[5] FOMIN, S. **Sistemas de Numeração**. São Paulo: Atual Editora, 1994.

[6] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**, v.1, 5 Ed. IME-USP, 2001.

[7] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**, v.4, 5 Ed. IME-USP, 2002.

[8] HEFEZ, A. **Elementos da Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

[9] HERBERT B. ENDERTON ; **Elements Of Set Theory**.1997. Academic Press Inc.

[10] KHINCHIN, A. Ya. **Continued Fractions**. University of Chicago Press. 1964.

[11] LIMA, E. **Análise Real.** Volume 1. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA (Coleção Matemática Universitária), 2004.

[12] LIMA, E. **Curso de Análise.** Volume 1. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA (Projeto Euclides), 2014.

[13] MARCHIORI, R.M.; **Números Transcendentes e de Liouville**. Tese (Mestrado Prossional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2013.

[14] MARQUES, D. **Teoria dos Números Transcendentes.** 1. ed. Rio de Janeiro: SBM (Textos Universitários), 2013. p.29-36.

[15] NIVEN, I.; **Números:** Racionais e Irracionais. Cidade: SBM, 2012.

[16] OLDS, C. D. **Continued Fractions**, Series Anneli Lax New Mathematical Library. Sun Jose State: Random House , 1963.

[17] RAMALHO, A.F.A.; DIAS, M.L. **Uma Conversa Sobre Números Transcendentes**. Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciência e Tecnologia, Unidade Acadêmica

de Matemática, Programa de Educação Tutorial.*¡http://www.dme.ufcg.edu.br/pet/arquivos/Uma _Conversa_Sobre_os_Numeros_Transcendentes.pdf¿*. Acesso:20mai.2017.

[18] RUDIN, Walter. **Principles of Mathematical Analysis**. McGraw-Hill, 1964.

[19] STEWART, James. **Cálculo**, v. 2, 5 Ed. Thomson Learning - São Paulo, 2007.

[20] STROGATZ, Steven Henry **Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering**, 1994.