

Passeios Aleatórios sobre Grafos e Circuitos Elétricos

Luna Rhaine Nascimento Oliveira *
Bacharelado em Física - UEPG
lunarhaineoliveira@gmail.com

Prof. Marcos Calçada (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
mcalcada@uepg.br

Palavras-chave: Passeio Aleatório, Difusão, Circuitos Elétricos, Problema de Dirichlet, Cadeias de Markov.

Resumo:

Os passeios aleatórios ou *random walks* formam uma classe de processos estocásticos bastante estudada em virtude de sua simplicidade e do grande número de aplicações, como por exemplo na matemática financeira, no movimento de uma molécula em um gás, em circuitos elétricos, entre outros. Neste trabalho estamos interessados em passeios aleatórios sobre grafos com um número finito de vértices ou nós e em suas relações com circuitos elétricos. Por causa disso, podemos fazer uso da teoria de cadeias de Markov com um número finito de estados.

As cadeias de Markov podem ser vistas como um processo de difusão sobre um grafo. A hipótese markoviana afirma que apenas o último estado ocupado é relevante para a determinação do próximo estado ocupado [1]. De fato, temos definido um laplaciano sobre o grafo e a lei de evolução da cadeia de Markov pode ser entendida como uma espécie de equação do calor (discreta). Dessa forma, também existe uma conexão com circuitos elétricos resistivos.

Um problema importante no estudo de passeios aleatórios é calcular a probabilidade de um caminhante atingir um determinado estado absorvente antes de atingir outro estado absorvente, sendo que ele começou seu passeio em um estado não-absorvente. Essa quantidade é dada pela função probabilidade. Um exemplo de passeio aleatório é dado na Figura 1. Por outro lado, um problema importante na teoria de circuitos elétricos é determinar as voltagens de um circuito elétrico, ou seja, o potencial de voltagem em cada vértice. Temos por objetivo mostrar que esses dois problemas estão relacionados matematicamente. Para isso estudamos a formulação matemática dos dois problemas em termos de grafos, de modo que concluímos que tanto a função probabilidade quanto o potencial elétrico de um nó são funções harmônicas e ainda constatamos que essas quantidades são iguais [2].

*Bolsista PICME.



Figura 1: Exemplo de passeio aleatório linear com $N + 1$ estados.

Outra questão estudada neste trabalho é a relação entre estados estacionários da cadeia de Markov e a topologia do grafo [3]. Procuramos formular nossos problemas em termos da matriz laplaciano, a qual é construída a partir da matriz de incidência, que contém informações sobre a topologia do grafo (que representa o passeio aleatório) ou do circuito, e de uma matriz peso, que carrega informação sobre as condutâncias no caso dos circuitos elétricos e probabilidades de transição no caso de passeios aleatórios. Com efeito, algumas das questões estudadas podem ser formuladas como um problema de Dirichlet (discreto) envolvendo esse laplaciano.

Referências:

- [1] HOWARD, R.A. **Dynamic Probabilistic Systems. Vol. 1 and 2.** New York: John Wiley & Sons, 1971.
- [2] DOYLE, P. G. ; SNELL, J.L. **Random Walks and Electrical Networks.** GNU FDL, 2006. (<https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/walks/walks.pdf>).
- [3] BRUALDI, R.A. ; CVETKOVIC, D. **A Combinatorial Approach to Matrix Theory and its Applications.** CRC Press, 2009.