Teoria das funções representadas por integrais

Luiz Eduardo de Matos[1]
Licenciatura em Matemática – UEPG
dudumattos17@gmail.com

Prof. Marciano Pereira (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística – UEPG
marciano@uepg.br

Palavras-chave: função Gama, método de Laplace, fórmula de Stirling.

Resumo:

Em um primeiro curso de análise, busca-se estudar de forma aprofundada e rigorosa conceitos e aspectos sobre funções já vistas em cálculo. Continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade são alguns deles, contudo, as funções utilizadas são as que podem ser expressas de forma simples, as chamadas funções elementares.

Por outro lado, em muitos problemas de análise aparecem outros tipos de funções, tais que para expressá-las são necessários recursos mais sofisticados, como as séries ou as funções representadas por integrais. Este último é o objeto de estudo no presente trabalho. Um exemplo simples deste tipo de função é a função Logarítmica, a qual pode ser definida por $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0$.

Ao ver este tipo de função é natural se perguntar se elas estão bem definidas e se são: contínuas? Diferenciáveis? Integráveis?

Como um tipo geral do problema acima, suponha que $\Phi(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy$,é convergente para cada valor de x em algum intervalo. Na prática se tal integral é convergente, ela define uma função de um parâmetro e é importante saber seΦé ou não contínua; também, sob que condições é possível trabalhar com diferenciação e integração de Φ, etc. O tratamento dessas questões é bastante análogo ao tratamento das correspondentes questões no caso de funções definidas por séries.O conceito chave para isso é o de convergência uniforme.

Para responder a estas questões, necessita-se de um estudo aprofundado e de certos resultados de convergência (uniforme) de integrais. Além disso, funções importantes da matemática, como são os casos das funções Gama e Beta, são exemplos destes tipos especiais de funções, as quais aparecem em diversas aplicações.

Assim, além dos objetivos já citados, fizemos um estudo detalhado das funções especiais mencionadas no parágrafo anterior e de suas respectivas propriedades.

Também estudamos algumas de suas aplicações, como o método de Laplace. Este método leva este nome em homenagem ao matemático francês

[1] BolsistaIniciação Científica/PIBIC/Fundação Araucária.

Pierre-Simon Laplace, que foi quem o desenvolveu, e serve para estimar o valor assintótico de funções dependendo de um parâmetro sob certas condições.

Aplicamos o método de Laplace para a função Gama, obtendo o seu comportamento assintótico.Este resultado ganha um nome em particular de formula de Stirling, a qual nos dá uma aproximação do "tamanho" de $n!$, quando n é grande.

Referências:

[1] FULKS, W. **Advanced Calculus**. Nova Yorque: John Wiley & Sons, 1969.
[2] TAYLOR, A. E.; MANN, W. R. **Advanced Calculus**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1983.
[3] PROTTER, M. H.; MORREY, C. B. **A First Course in Real Analysis**.NovaIorque: Springer-Verlag, 2000.
[4] ARTIN,E. , **Einffuhrung in die Theorie der Gamma funktion**,1931
[5] DAVIS, P. J. **Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function: In Memoriam: Milton Abramowitz**. The American Mathematical Monthly, Vol. 66, No. 10 ,1959, p. 849-869.
[6] RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. 3 ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1976.
[7] DE FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.** Rio de Janeiro: IMPA, 2012.