Controle ótimo do fluxo de água em uma fôrma de gelo

Xie Jiayu
Engenharia Eletrônica - UTFPR
xie.2014@alunos.utfpr.edu.br

Prof. Dr. João Luis Gonçalves (Orientador)
Departamento Acadêmico de Matemática - UTFPR
jlgoncalves@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Modelagem, Controle Ótimo, Otimização.

Resumo:
Este trabalho trata da modelagem do preenchimento de uma fôrma de gelo com água. Desejamos que esse preenchimento seja eficiente. A eficiência em questão pode significar minimizar o desperdício de água ou minimizar o tempo necessário para encher a fôrma, entre outras possibilidades.

Modelo

O modelo proposto considera funções de estado e de controle. As funções de estado representam o volume de água em cada compartimento da fôrma em cada instante de tempo. As funções de controle estão associadas a variação de posição da fôrma ao longo do tempo.

As funções de estado são soluções de um sistema de equações a diferenças que determina a dinâmica do preenchimento da fôrma. Essa dinâmica é afetada por variações de posição da fôrma, ou seja, pelas funções de controle.

Na Figura 1 apresentamos um protótipo de uma fôrma de gelo 2×3 ou seja com 6 compartimentos de dimensões $1 \times 1 \times 1$.

Vamos considerar que a água entra na fôrma somente pelo compartimento 1. Além disso, a ponta superior esquerda do compartimento 1 foi elevada de forma que a diagonal d, do compartimento 1 ao compartimento 6, tem uma inclinação de α graus com relação ao plano horizontal. Assim, espera-se que a água escorra do compartimento 1 em direção aos demais.

A função de controle será $\theta(t)$, que a cada tempo t associa o ângulo em graus em que a fôrma foi rotacionada em torno da diagonal d.

Supomos que água entra na fôrma a uma taxa constante. Chamamos de volume de suporte o volume máximo de água que um compartimento pode conter para uma

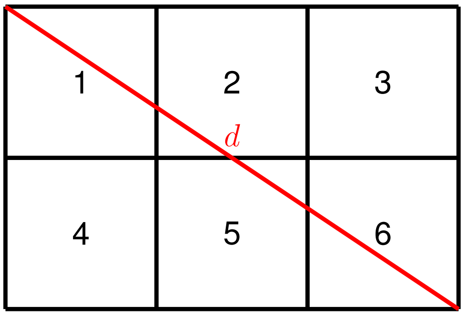

Figura 1: Esboço da fôrma de gelo com seus respectivos cubos enumerados e a diagonal d.

inclinação de α graus e uma rotação de θ graus. Note que como θ pode variar com o tempo, o volume de suporte também pode variar.

Nossa primeira hipótese com relação à dinâmica do fluxo de água na fôrma é que após atingir a capacidade de suporte do compartimento, a água fluirá apenas nas direções paralelas aos lados da fôrma. Por exemplo, após atingir a capacidade de suporte, a água do compartimento 1 escorrerá apenas para os compartimentos 2 e 4, dependendo ainda do θ. Essa hipótese é bastante simplificadora, mas pode ser aprimorada para descrever melhor o fenômeno físico.

A segunda hipótese é que a água que sai do compartimento i para o compartimento j é g_{ij} porcento do total do volume de água que sai de i. Note que apenas alguns poucos g_{ij} são diferentes de zero, pois o excesso de água de um compartimento segue para no máximo 2 compartimentos. Além disso, como a fôrma é rígida, a rotação de θ graus é comum a todos os compartimentos da fôrma e portanto teremos apenas duas possibilidades para g_{ij}. Essas possibilidades são:

$$\begin{cases} g_{01}(\theta) = min[max(\dfrac{\theta}{45} + \dfrac{2}{3}, 0), 1]; \\ \\ g_{10}(\theta) = min[max(\dfrac{-\theta}{45} + \dfrac{1}{3}, 0), 1]; \end{cases}$$

sendo que $g_{ij} = g_{01}$ quando $j = i + 1$ e $g_{ij} = g_{10}$ quando $j = i + 3$. Por exemplo, a função g_{12} é a porcentagem de água que sai do compartimento 1 com destino ao 2. Usamos g_{01} e g_{10} também para determinar o volume de água que sai da fôrma.

O volume do compartimento j no tempo $(k + 1)$ é dado por

$$V_j(k + 1) = V_j(k) + \Delta t \cdot (E_j(k) - S_j(k))$$

onde $E_j(k)$ e $S_j(k)$ são, respectivamente, a quantidade de água que entra e a que sai do compartimento j no instante no tempo k. Observamos que as funções $E_j(t)$ e $S_j(t)$ dependem diretamente do volume de suporte, que por sua vez depende das inclinações α e θ e das funções g_{ij}. Vale ressaltar que já estamos considerando a variável tempo de forma discreta.

Definiremos um funcional que representa a quantidade que desejamos otimizar e consideraremos em uma versão discreta. Fazendo outras considerações como taxa de entrada de água e inclinação α constantes e unindo as equações que dão a dinâmica da água na fôrma (restrições) e nosso funcional de interesse, teremos um problema de otimização não linear, cuja solução serão os valores de $\theta(t)$ e as consequentes

$V_i(t)$. O algoritmo de otimização utilizado será o de pontos interiores, mas também podemos considerar outras alternativas.

Por fim, fazemos a implementação computacional, usando os softwares *Mathematica* e *MatLab*. Em particular implementamos um aplicativo que permite controlar dinamicamente o θ enquanto a água escorre sobre a fôrma.

Referências:

RUGGIERO, M. A. G. e LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais.** 2a ed. São Paulo. Pearson Makron Books, 1996.

BECERRA, V. M. e GALVÃO, R. K. H. **Um tutorial sobre métodos pseudo-espectrais para controle ótimo computacional.** Vol 21. Revista Controle e Automação Nº3, 2010.