J3M 2017
Caderno de Resumos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor:	Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam
Estudantes:	Bianca Elena Wiltuschnig Eduardo Magalhães de Castro Gabriel Felipe Dalla Stella Gustavo Henrique Silva Sarturi Izadora Muller Moro Rios João Antonio Francisconi Lubanco Thomé Lana Muriel Souza dos Santos Leticia do Rocio Oliveira Leticia Ferreira Gomes Luiz Henrique Lara dos Santos Marcel Thadeu de Abreu e Souza Matheus Daniel Galvão de Melo Nelson Ivo de Souza Ferreira Rafael Correa de Lima Nisgoski Rogério Otávio Mainardes da Silva Vitor Emanuel Gulisz
Site:	www.petmatematica.ufpr.br
Telefone:	(41) 3361-3672
Data do Evento:	07 a 10 de Novembro de 2017
Local de Realização:	EQ - Bloco de Engenharia Química Centro Politécnico - UFPR

Curitiba, novembro de 2017.

Caderno de Resumos - J3M

3° Edição - 2017
PET-Matemática

Sumário

Apresentação **vii**

Minicurso **viii**

1 Álgebra **1**

Classificação das álgebras de Lie semissimples de dimensão finita
Eduardo Magalhães de Castro 2

Álgebras String
Inara Darck Marinho de Abreu 4

Funções geradoras como ferramenta de contagem de estruturas combinatórias
Jedian Marcos Brambilla 6

O Teorema de Gabriel
Luiz Henrique Lara dos Santos 7

A forma quadrática de um quiver e sua relacão com álgebras de caminhos hereditárias
Natalia Rodrigues da Costa 9

Teoremas de decomposicão de Weyl e de Levi
Vitor Emanuel Gulisz 10

2 Análise Matemática e Equações Diferenciais **11**

Geração de malhas bidimensionais estruturadas em torno da asa de uma aeronave
Agatha Penteado de Almeida 12

Transformacão do Gato de Arnold
Bianca Elena Wiltuschnig 15
Números de Bernoulli e Aplicações
Bruno Furquim de Souza 17
Introdução ao Paradoxo de Banach-Tarski
Emanuela Pinheiro Quirrenbach 19
Resoluções de equações diferenciais ordinárias por séries de potências
Felipe de Jesus Kutz 21
Caos Uma Introdução aos sistemas dinâmicos
Guilherme Alexandre Leachenski 24
Teoria de Sturm-Liouville e Problemas de Valores de Contorno
João Antonio Francisconi Lubanco Thomé 26
Aproximações por frações contínuas
Letícia Ferreira Gomes 29
Teoria das funções representadas por integrais
Luiz Eduardo de Matos 31
Aplicação do Teorema do Ponto Fixo na Análise de Convergência de Sequências
Mariana Meyer 33
Dinâmica Estrutural: um estudo do oscilador viscoelástico e das técnicas de controle de vibrações
Raquel Ayumi Aita 34
Modelo matemático para gripe aviária
Thiago Luiz Benevides 36

3 Análise Numérica **39**
Análise do Método de Quasi Interpoladores Otimizados para reconstrucão de imagens aplicado a sinais de áudio
Carlos Eduardo Leal de Castro 40

Pré-condicionadores para o método de Gradientes Conjugados
Egmara Antunes dos Santos 42
Pós-processamento gráfico: Antialiasing recovery no domínio de Fourier *João Paulo Navarro Barbosa* . 44
Método das Diferenc¸as Finitas para a Equacão da Onda Unidimensional
Renan Oclides Domingues 47

4 Educação Matemática 50
Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI) e Olimpíada Paranaense de Matemática (OPRM): contribuindo para a difusão do conhecimento matemático para alunos de ensino fundamental e médio
Atividade do PET matemática 51
Brincando de Matemático e Um Dia na Matemática: a experiência do PET Matemática na divulgacão do conhecimento científico e do ambiente acadêmico para alunos do ensino médio
Atividade do PET matemática 53
Potencialidade da roótica educacional para o ensino de geometria
Adriano Aparecido da Silva e Amanda Ferreira Procek 55
Um Estudo do Processo de Transposição Didática do Conjunto dos Números Inteiros: Do saber sábio ao saber a ser ensinado.
Aline de Fátima Cagorni 58
Matematiza
Amanda da Rocha Ribeiro; Daiane Chitko de Souza; Danielle Maceno da Silva; Isabella Silva Bellantuono; Laiane Crystina Sgoda; Michelly Dela Vedova Costa; Yasmim Adara Amorim. 61

A presença da expressãográfica nas comunicações do XII encontro nacional de educação matemática
Amanda Ferreira Procek 64
Análise dos registros de representação semiótica e suas conversões em aulas de matemática de uma escola de período integral do Estado de São Paulo.
Deivison José Gouvêa 67
O ensino de matemática na escola estadual indígena índia Vanuíre
Douglas Lucindo Pereira Ghiotto 70
Uso do ábaco no ensino-aprendizagem da matemática
Eduarda de Almeida Gomes, Fernando Ney Saboia Gomes, Letícia Menegusso 72
Simulando um mercado - o ensino e aprendizado de números decimais
Eduarda de Almeida Gomes, Amanda Ferreira Procek 75
Uma experiência no ensino e aprendizado de matrizes no laboratório de matemática
Diovana Bzunek, Eduarda de Almeida Gomes . . 78
Fábrica de estrelas
Fernanda Dartora Musha, Marla Rodrigues de Oliveira e Wellington Haas Heins 81
Introdução ao conceito de logaritmo - motivação e aplicação
Denis Gomes Missão e Fernando Ney Saboia Gomes 83
O uso do desenho geométrico no ensino e aprendizado de trigonometria no triângulo retângulo
Ana Cristina Polli e Gessiel Nardini Sperotto . . 86
Explorando a Matemática através da "Matemágica"
Guilherme Vinicius Favoretto e Maristel do Nascimento 89

Utilização de Vídeos na Educação Matemática
João Lucas Espíndola Mahlmann, Jaqueline de Oliveira Hoschele, Klaus Victor Timm1 e Luiz Felipe Vieira Haragushiku1 91
A História de Hipátia: Uma Discussão de Gênero com o Ensino Fundamental
Keith Gabriella Flenik Morais 94
Ensino de Circunferências por meio da utilização de Fotografia e do Software Geogebra
Letícia do Rocio Oliveira 97
O Uso de materiais manipuláveis para o ensino da Geometria
Luana Leal 99
Construção de uma representação do Teorema de Pitágoras
Matheus Willian Duarte Amandio e Aline Ferreira Rodrigues Vaz Licenciatura em Matemática 101
Sequência Didática: Plano Cartesiano.
Darlane Almeida, Marcela Bertoldi, Nathaly Stefanovicz, Vinicius Medeiros Licenciatura em Matemática 104
Matemágicas e Exercícios Lógicos: Um minicurso adaptado a três públicos distintos
Rogério Otávio Mainardes da Silva 107
As contribuições do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- Profmat para a formação de professores no âmbito da Educação Especial
Rogério de Oliveira Souza 110
As dificuldades dos alunos do curso de expressão gráfica com relação aos conteúdos de geometria e possíveis contribuições da geometria dinâmica
Sirley Santos Cezar Siqueira 113
Os pesos de Bachet e as equações de primeiro grau
Thiago Lucas da Silva 115

5 Geometria e Topologia **117**
A Espiral de Euler
Gabriel Cordeiro Chileider 118
Construcão de Códigos Esféricos Usando a Fibracão de Hopf
Henrique Koji Miyamoto 120

6 Otimização **123**
Estudo de bacias de atração em métodos numéricos de resolução de sistemas não lineares
Adriana Maria Guimarães de Souza 124
Condições de Qualificação e Propriedades do Conjunto de Multiplicadores
Everton Jose da Silva 126
Previsão de Resultados de Jogos de Futebol Usando Machine Learning
Fillipe Rafael Bianek Pierin 128
Otimização Irrestrita: Métodos, Análises e MMQ
Gustavo Cordeiro Libel 131
Introdução à Teoria de Grafos e Aplicações
Lucas Matheus Sandeski 133
Método híbrido para minimizar a distância entre um ponto e uma spline
Marcel Thadeu de Abreu e Souza 136
Teoria de Grafos e o Problema de Conexão de Peso Mínimo
Maria Verônica Bartmeyer1 138
Metodos numéricos para resolução de exercícios de zeros de funções reais
Matheus Daniel Galvão de Melo 140

Apresentação

Prezado leitor,

É com muita satisfação que apresentamos o livro de resumos da 3a edição da J3M! Este é um evento idealizado, produzido e coordenado pelos estudantes do Curso de Matemática que integram o grupo PET - Matemática. A J3M nasceu do desejo de criar um ambiente adequado para apresentação dos trabalhos de Iniciação Científica desenvolvidos no âmbito do Departamento de Matemática da UFPR e tem se consolidado como um importante canal de comunicação do PET - Matemática com o Curso de Matemática da UFPR e demais universidades brasileiras.

Nesta edição, temos contempladas as áreas de Álgebra, Análise Matemática, Análise Numérica, Educação Matemática, Geometria e Otimização. As bancas especializadas de avaliação são formadas por docentes e estudantes de pós-graduação. Como nas edições anteriores, serão concedidas distinções aos trabalhos que obtiverem as melhores avaliações por parte das bancas, como forma de incentivo aos estudantes.

Nossos agradecimentos especiais vão para os integrantes do PET pela dedicação com os quais realizam todas as suas tarefas e também aos docentes e estudantes de pós-graduação dos programas ligados ao DMAT pelo trabalho de excelência nas bancas. Registramos também nossa gratidão à Direção do Setor de Ciências Exatas pelo apoio recebido em todas as atividades.

Prof. Dr. José Carlos Eidam
Tutor do PET-Matemática - UFPR
Novembro/2017

Minicurso

Visualizando a seção plana em sólidos geométricos

Karin Amanda Mayer

Resumo

A inspiração desse mini curso vem através de questões do ENEM que cobram conhecimentos de seção plana de sólidos geométricos. Sabendo que o curso de Licenciatura em Matemática tem somente uma optativa que trata esse assunto, logo não são todos os alunos do curso que tem esse conhecimento quando se formam, pois não tiveram uma memória visual para auxiliar na obtenção desse conhecimento.

Para auxiliar na obtenção da memória visual estaremos fazendo uso de materiais didáticos manipuláveis. Esses materiais manipuláveis auxiliam no processo de aprendizagem da geometria, trazem eficácia e facilidade no ensino, faz com que os alunos tenham interação e socialização na sala de aula, autonomia, segurança, criatividade, responsabilidade, motivação, compreensão de entes geométricos e efetiva assimilação do conteúdo.

O mini curso será feito em duas fases. Um pouco sobre a teoria de materiais manipuláveis, visualização, imaginação e intuição em relação aos sólidos. A segunda parte é utilizar essa teoria para que o aluno consiga por si mesmo visualizar, imaginar e intuir o corte da figura. Serão trabalhado os possíveis cortes do dodecaedro. Os possíveis cortes são triângulo, quadrado, pentágono, hexágono e o heptágono. Será necessário que

o aluno venha com material básico de desenho geométrico, compasso, régua conjunto de esquadros, além de cola e tesoura. Será entregue aos alunos uma cartolina com o desenho do dodecaedro.

Álgebra

Banca Avaliadora:

Prof. Willian Valverde
Prof. Edson Minoru Sassaki
Prof. Cristian Schmidt

Classificação das álgebras de Lie semissimples de dimensão finita

Eduardo Magalhães de Castro *
Bacharelado em Matemática - UFPR
eduardomdecastro@gmail.com

Prof. Dr. Matheus Batagini Brito (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
mbrito@ufpr.br

Palavras-chave: álgebras de Lie, diagramas de Dynkin, sistema de raízes, representações

Resumo:

Apesar de inicialmente apresentar um interesse geométrico, a Teoria de Lie se bifurcou diversas vezes até que o interesse em álgebras de Lie - cujo conhecimento era essencialmente visto como ferramenta para o estudo de propriedades de seus grupos de Lie associados - se aprofundou e se tornou independente de suas vinculações com outras áreas e problemas iniciais. Um dos resultados mais célebres dessa área é a classificação de álgebras de Lie semissimples de dimensão finita via diagramas de Dynkin. Cada diagrama está associado a um único sistema de raízes, que por sua vez define estruturalmente uma única álgebra de Lie semissimples a menos de isomorfismo. Neste trabalho, assumiremos alguns conceitos básicos de álgebras de Lie como subálgebras de Lie, ideais, homomorfismos de álgebras de Lie e visaremos como objetivo passar a ideia central da demonstração da classificação em si. Para isso, seguiremos um roteiro cujos itens serão essencialmente os seguintes:

1. **Revisitar e introduzir algumas definições relevantes ao estudo** - forma de Killing, representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathfrak{sl}(2)$.

2. **Introduzir ideias sobre decomposição de espaço de raízes e obter propriedades a partir de sua geometria.** - álgebras de Lie toroidais, decomposição de Cartan, sistema de raízes (associado a uma álgebra de Lie)

3. **Apresentar as matrizes de Cartan e os diagramas de Dynkin, pontuando o método empregado para a obtenção da classificação final.**

*Bolsista do Programa PET-Matemática

Uma **álgebra de Lie** sobre um corpo K é um espaço vetorial L sobre K munido com uma operação $[,]$ bilinear, anti-simétrica e satisfazendo a igualdade de Jacobi: para $x, y, z \in L$, $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$.

Uma **subálgebra** (de Lie) é um subespaço vetorial de uma álgebra de Lie L que é fechada para o colchete $[,]$.

Os endomorfismos de um espaço vetorial V formam uma álgebra de Lie com o comutador $[x,y] = xy - yx$ e é denotada por $\mathfrak{gl}(V)$ ou $\mathfrak{gl}(n)$ onde dim $V = n$.

Referências:

[1] HUMPHREYS, J. Introduction to Lie algebras and representation theory. Springer, 1972.

[2] SAN MARTIN, L. Álgebras de Lie. Second edition, Editora Unicamp, 2010.

[3] TAO, T. (2013, Abril) Notes on the classification of complex Lie algebras. https://terrytao.wordpress.com/2013/04/27/notes-on-the-classification-of -complex-lie -algebras/ Acesso: 30 de Agosto de 2017

Álgebras string

Inara Darck Marinho de Abreu
Licenciatura em Matemática - UFPR
inara_darck@hotmail.com

Prof. Heily Wagner (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
heilywagner@ufpr.br

Palavras-chave: quiver, álgebra de caminhos, representações, álgebra string.

Resumo:

A Teoria de representações estuda estruturas algébricas abstratas representando seus elementos por objetos concretos da álgebra linear, como espaços vetoriais e transformações lineares.

Podemos estudar uma álgebra através do estudo de sua categoria de módulos. Para álgebras de caminhos com relações isso é equivalente ao estudo das representações do quiver associado a esta álgebra.

Um quiver Q é um grafo orientado como por exemplo:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & \\ & 2 \arrow[r, "\delta"] & 3 \\ 4 \arrow[ur, "\beta"] & & \end{tikzcd}$$

A partir de todos os caminhos (concatenação de flechas) de um quiver podemos definir uma k-álgebra kQ, a chamada álgebra de caminhos. Por exemplo, na álgebra associada ao quiver acima, a base como k-espaço vetorial é $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \delta, \beta\delta, \alpha\delta\}$, onde e_i é um caminho estacionário referente ao vértice i.

O Teorema de Gabriel nos garante que se A é uma k-álgebra básica, indecomponível e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k, então existe um quiver finito Q_A e um ideal admissível I de kQ tal que A é isomorfa a álgebra de caminhos $A \cong \frac{kQ}{I}$. Portanto o nosso estudo se restringe a este tipo de álgebra.

Uma álgebra string é um tipo específico de álgebra de caminhos com relações, para a qual podemos construir todos os módulos indecomponíveis. Uma k-álgebra A é chamada de álgebra string se $A \cong \frac{kQ}{I}$ e satisfaz:

(i) Para todo vértice a em Q, existem no máximo duas flechas que começam em a e duas flechas que terminam em a;

(ii) Para cada flecha β em Q, existe no máximo uma flecha α em Q tal que $\alpha\beta \notin I$ e no máximo uma flecha $\gamma \in Q$, tal que $\beta\gamma \notin I$;

(iii) O ideal admissível I é nulo ou gerado apenas por relações monomiais.

Abaixo segue um exemplo de álgebra string.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[loop above, "\beta"] \end{tikzcd}$$

$$I = < \beta^2 >$$

Neste trabalho mostraremos como é feita a contrução dos chamados módulos string de uma álgebra string.

Referências:

i) ASSEM, Ibrahim. **Algèbres et Modules**. Les Presses de l'Universitè d'Ottawa, Ottawa, 2007.

ii) ASSEM, Ibrahim; SIMSON,Daniel; SKOWRÓNSKI,Andrzej.**Elements of the Representation Theory of Associative Algebras**. Vol.1 volume 65 of London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 2006;

iii) COELHO, Flavio Ulhoa. **Uma Introdução à Teoria de Representações de Álgebras**.Apostila (mini-curso Escola de Álgebra) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1992;

iv) COTA, Ana Paula da Silva. **Álgebras Bisserias Espaciais**. Dissertação (M. Sc. em Matemática), Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2012.

v) MONSALVE, Germán Alonso Benitez. **Um Estudo sobre a Categoria Derivada de Álgebras String.** Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

Funções geradoras como ferramenta de contagem de estruturas combinatórias

Jedian Marcos Brambilla *
Bacharelado em Ciência da Computação - UFPR
jedian.gba@gmail.com

Prof. Renato Carmo (Orientador)
Departamento de Informática - UFPR
renato.carmo.rc@gmail.com

Palavras-chave: Combinatória, funções geradoras, contagem

Resumo:

Neste trabalho vamos apresentar a resolução de alguns problemas clássicos de contagem utilizando funções geradoras e classes combinatórias.

Uma função geradora é uma série de potências da forma $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, onde $a_n \in \mathbb{C} \colon n \geq 0$. As operações de soma e produto de funções geradoras são definidas como usualmente e é fácil verificar que o conjunto $\mathcal{C}[[z]]$ das séries formais em z forma um anel onde alguns elementos tem inverso multiplicativo (neste contexto a questão da convergência da série não é relevante).

Uma *classe combinatória* é um conjunto $\mathcal{A}$ munido de uma uma função $|\cdot| \colon \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ que associa a cada elemento de $a \in \mathcal{A}$ um *tamanho* $|a|$. Por exemplo o conjunto das sequências finitas de 0s e 1s onde o tamanho $|s|$ de uma sequência s é dado pelo número de seus elementos (isto é, $|(0, 1, 1)| = 3$) é uma classe combinatória.

A função geradora $A(z)$ *conta* a classe combinatória $\mathcal{A}$ se o coeficiente de z^n em $A(z)$ é exatamente o número de elementos de $\mathcal{A}$ de tamanho n, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por exemplo, a função geradora $A(z) = \sum_{n \geq 0} 2^n z^n$ conta a classe combinatória das sequências finitas de 0s e 1s mencionada acima.

Um exemplo de problema clássico de contagem que pode ser resolvido com esta técnica é descobrir quantas árvores distintas com n vértices existem.

Referências:

FLAJOLET, P.; SEDGEWICK, R. Analytic Combinatorics. Cambridge University Press, 2009.

*Voluntário do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME)

O Teorema de Gabriel

Luiz Henrique Lara dos Santos*
Bacharelado em Matemática - UFPR
luiz.lara1@outlook.com

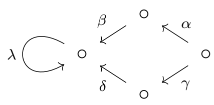
Prof^a^. Dr^a^ Heily Wagner (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
heilywagner@ufpr.br

Palavras-chave: quivers, álgebra de caminhos, representações de álgebras.

Resumo:

A teoria de representações de álgebras visa estudar as propriedades de uma álgebra através do estudo da categoria de módulos sobre ela. Para cada álgebra, seus módulos apresentam propriedades que não necessariamente valem para qualquer módulo sobre qualquer álgebra, o que torna tal estudo algo particular para cada álgebra. Ao longo do século passado foram desenvolvidas técnicas para facilitar este estudo, mais precisamente, técnicas para estudar álgebras de maneira mais geral. Na segunda metade do século XX, P. Gabriel mostrou uma forte relação entre álgebras de dimensão finita sobre corpos algebricamente fechados e as chamadas álgebras de caminhos, que são obtidas a partir de grafos orientados chamados de quivers. Tal relação faz do estudo das álgebras de caminhos algo suficientemente geral do ponto de vista da teoria de representações de álgebras.

Um quiver, como dito acima, é nada mais que um grafo orientado. Como por exemplo:



Dado um quiver Q, definimos como um caminho de comprimento $n \geq 1$ em Q uma concatenação $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ de flechas em Q (no exemplo acima, alguns caminhos possíveis são $\alpha\beta\lambda$, $\gamma\delta$,λ^3). Para cada vértice a de Q, associamos um caminho de comprimento $n = 0$, denotado por ε_a, chamado de caminho estacionário em a. O K-espaço vetorial cuja base é o conjunto de todos os caminhos em Q, munido com a multiplicação induzida pela concatenação de caminhos em Q possui uma estrutura de K-álgebra associativa. Tal K-álgebra é chamada de álgebra de caminhos de Q e é denotada por KQ. E como dito antes, existe uma forte relação entre as álgebras de

*Bolsista do Programa PET-Matemática

caminhos e álgebras de dimensão finita sobre corpos algebricamente fechados.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar as ferramentas necessárias para entender como se dá tal relação, bem como apresentar algumas propriedades das álgebras de caminhos. A relação comentada acima é apresentada como o seguinte teorema:

Teorema de Gabriel: Se A é uma álgebra básica, conexa, associativa e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, então existe um quiver Q e um ideal admissível I da álgebra de caminhos KQ de Q de modo que $A \cong KQ/I$

Referências:

ASSEM, I.; SKOWRONSKI A.; SIMSON D. **Elements of the Representation Theory of Assossiative Algebras**: Techiques of Representation Theory. New York: Cambridge University Press, 2006

ASSEM, I. **Algèbres et Modules**: Cours et exercices. Ottawa: Les Presses de l'Université d'Ottawa, 1997

COELHO, F.U. **Uma Introdução à Teoria de Representações de Álgebras**. Apostila (mini-curso Escola de Álgebra) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1992.

A forma quadrática de um quiver e sua relação com álgebras de caminhos hereditárias

Natalia Rodrigues da Costa *
Química - UFPR
costa.natalia.r@gmail.com

Professora Tanise Carnieri Pierin (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
tanise@ufpr.br

Palavras-chave: forma quadrática, raízes positivas, álgebras de caminhos.

Resumo:

Com o objetivo de classificar álgebras de caminhos hereditárias em tipo de representação finito ou infinito, estudaremos as formas quadráticas de seus *quivers*, tendo em vista a relação que garante que o número de raízes positivas da forma quadrática associada a um *quiver* Q coincide com o número de módulos indecomponíveis (a menos de isomorfismos) definidos sobre a álgebra de caminhos de Q. Assim como as formas quadráticas clássicas, as formas quadráticas associadas a um *quiver* podem ser classificadas em positivas definidas, positivas semidefinidas, fracamente positivas e indefinidas. Neste trabalho, nos dedicaremos a verificar que uma forma quadrática sobre $\mathbb{Z}^n$ terá somente um número finito de raízes positivas se, e somente se, for fracamente positiva. Mais ainda, mostraremos que a forma quadrática associada a um quiver Q será fracamente positiva se, e somente se, ao desconsiderarmos a orientação de Q, o grafo obtido for do tipo Dynkin. Nessa situação em que Q origina um grafo Dynkin será ainda possível listar todas as raízes positivas de sua forma quadrática associada, usando para isso transformações lineares particulares, chamadas de reflexões. Finalmente, buscando entender a relação mencionada entre raízes positivas e módulos indecomponíveis, estabeleceremos alguns resultados para álgebras de caminhos para, em seguida, estudar os módulos definidos sobre elas.

Referências:

ASSEM, I., SIMSON, D., SKOWROŃSKI, A. **Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1**. London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, 2006.

*Bolsista do PICME

Teoremas de decomposição de Weyl e de Levi

Vitor Emanuel Gulisz *
Bacharelado em Matemática - UFPR
vitorgulisz@gmail.com

Professora Tanise Carnieri Pierin (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
tanise@ufpr.br

Palavras-chave: álgebras de Lie, teoremas de Weyl e Levi, cohomologia.

Resumo:

Neste trabalho iremos apresentar os teoremas de decomposição de Weyl e de Levi para álgebras de Lie, e algumas de suas consequências. Com o objetivo de provar tais teoremas, iremos introduzir conceitos preliminares, como a definição destas álgebras, o que são suas representações e o que é uma representação completamente redutível. Apresentaremos ainda o conceito de cohomologia de álgebras de Lie, e em seguida demonstraremos os lemas de Whitehead sobre a cohomologia de álgebras semissimples. Finalmente, os teoremas de Weyl e de Levi serão obtidos como consequências destes lemas.

O teorema de Weyl enuncia que, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita, e ρ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em um espaço vetorial V de dimensão finita, então ρ é completamente redutível, ou seja, V se decompõe como $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, com cada V_i invariante e irredutível.

O teorema de Levi garante que podemos decompor uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ qualquer, de dimensão finita, como soma direta de uma álgebra semissimples e uma álgebra solúvel. Mais precisamente, neste caso teremos que $\mathfrak{g}$ é o produto semidireto do seu radical solúvel $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ com uma subálgebra $\mathfrak{s}$ semissimples de $\mathfrak{g}$.

Referências:

SAN MARTIN, L. **Álgebras de Lie**. Campinas: Editora Unicamp, 2010.

*Bolsista do Programa PET-Matemática

Análise Matemática e Equações Diferenciais

Banca Avaliadora:

Prof. Jurandir Ceccon
Prof. Bruno de Lessa Victor
Prof. Rodrigo Alexandre Siqueira

Geração de malhas bidimensionais estruturadas em torno da asa de uma aeronave

Agatha Penteado de Almeida
Licenciatura em Matemática - UTFPR, Câmpus Curitiba
agatha.8d@gmail.com

Prof. Rudimar Luiz Nós
Departamento Acadêmico de Matemática - UTFPR, Câmpus Curitiba
rudimarnos@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Equações de Thompson, malhas estruturadas, perfis de asa de uma aeronave, Método SOR.

Resumo: Apresentamos neste trabalho as equações de Thompson, com fatores de espaçamento P e Q, e as empregamos para gerar computacionalmente malhas bidimensionais estruturadas para regiões duplamente conexas. Nessas regiões, a fronteira interna é dada pelo perfil da asa de uma aeronave. Discretizamos as equações usando diferenças finitas centradas de segunda ordem e utilizamos o Método SOR para solucionar numericamente o sistema de equações lineares proveniente da discretização. Neste método, testamos valores ótimos para o parâmetro de relaxação ω.

1 Introdução

Equações Diferenciais Parciais (EDPs) são extremamente importantes em Matemática Aplicada. Diversos modelos matemáticos para simular fenômenos físicos são baseados nessas equações, como modelos em dinâmica dos fluidos e aerodinâmica. Para simular numericamente os modelos matemáticos que descrevem esses fenômemos físicos, devemos inicialmente discretizar o domínio espacial. Para tanto, podemos empregar malhas estruturadas ou malhas não estruturadas.

2 Modelo matemático

As equações de Thompson

$$\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2} - 2\beta\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta} + \gamma\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2} + J^2\left(P\frac{\partial x}{\partial\xi} + Q\frac{\partial x}{\partial\eta}\right) = 0, \tag{1}$$

$$\alpha\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2} - 2\beta\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta} + \gamma\frac{\partial^2 y}{\partial\eta^2} + J^2\left(P\frac{\partial y}{\partial\xi} + Q\frac{\partial y}{\partial\eta}\right) = 0, \tag{2}$$

com

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2, \tag{3}$$

$$\beta = \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}, \tag{4}$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2, \tag{5}$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}, \tag{6}$$

são obtidas a partir de transformações conformes sobre a equação de Laplace [3]. Essas equações constituem um sistema de EDPs não-lineares, de segunda ordem, homogêneas. Nas equações (1)-(6), (x, y) são coordenadas cartesianas, (ξ, η) são coordenadas generalizadas (nestas, linhas de uma mesma família não se intersectam, enquanto linhas de famílias distintas se intersectam uma única vez) e o controle do espaçamento da malha é feito através das funções $P(x, y)$ e $Q(x, y)$, as quais possibilitam a concentração das linhas coordenadas nas regiões desejadas [2].

3 Método numérico

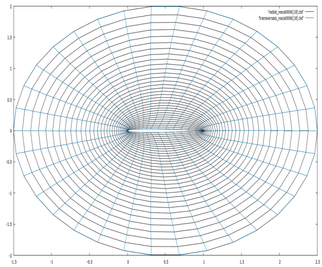
As equações (1)-(6) são discretizadas através de diferenças finitas centradas de segunda ordem. As condições iniciais são definidas por interpolação transfinita, uma forma de interpolação linear bidimensional, e o sistema linear proveniente da discretização é solucionado numericamente com o emprego do Método SOR (Successive Over-Relaxation).

4 Resultados computacionais

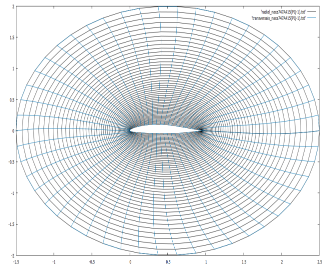
Os códigos computacionais foram desenvolvidos em linguagem C, compilados e executados no programa Dev-C++ para o sistema operacional Windows 10 e as malhas foram plotadas no gnuplot 5.0 patchlevel 3. No Método SOR, foram adotados dois critérios de parada: um número máximo de iterações e uma precisão prefixada. A Figura 4 mostra alguns resultados para quatro perfis de asa de uma aeronave [4].

5 Conclusões

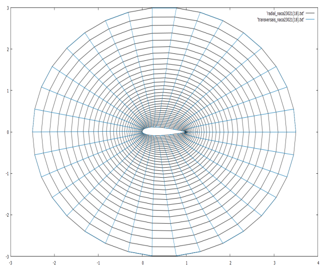
Nas simulações computacionais, verificamos que, no Método SOR, $1,5 \leq w \leq 1,8$ estabelece convergência dependendo dos valores utilizados para P e Q e também para o raio R da circunferência que define a fronteira radial.



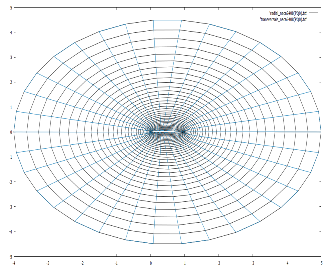
(a) Malha para região duplamente conexa com fronteira interna dada pela NACA0006 (35 pontos), gerada a partir das equações de Thompson com $P = Q = 0$ empregando SOR com $w = 1,6$, $R = 2$, em 121 iterações



(b) Malha para região duplamente conexa com fronteira interna dada pela NACA747A415 (51 pontos), gerada a partir das equações de Thompson com $P = Q = -1$ empregando SOR com $w = 1,5$, $R = 2$, em 250 iterações



(c) Malha para região duplamente conexa com fronteira interna dada pela NACA23021 (35 pontos), gerada a partir das equações de Thompson com $P = Q = 0$ empregando SOR com $w = 1,8$, $R = 3$, em 98 iterações



(d) Malha para região duplamente conexa com fronteira interna dada pela NACA2408 (35 pontos), gerada a partir das equações de Thompson com $P = Q = 0$ empregando SOR com $w = 1,7$, $R = 4,5$, em 157 iterações

Figura 1: Malhas geradas pela discretização das equações de Thompson (1)-(6)

Referências

[1] ALMEIDA, A. P. de. Geração computacional de malhas bidimensionais estruturadas em torno da asa de uma aeronave. Trabalho de Conclusão de Curso, UTFPR, Curitiba, 2017.

[2] POLINA, S. et al. Geração de malhas para domínios bidimensionais simples e multiplamente conexos. In: *XII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*. São José do Rio Preto: SBMAC, 1989.

[3] THOMPSON, J. F. *Numerical grid generation - Foundations and applications*. New York: Elsevier Science Publishing Co., 1985.

[4] TOOLS, A. Airfoil Tools. 2017. URL: *http://airfoiltools.com/* (acesso em 20 de maio de 2017).

Transformação do Gato de Arnold

Bianca Elena Wiltuschnig [*]
Bachareleado em Matemática - UFPR
bianca.elena.w@gmail.com

Prof.ª Dr.ª Paula Rogéria Lima Couto (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
paulacouto@ufpr.br

Prof.ª Dr.ª Ailin Ruiz de Zarate Fabregas (Coorientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
ailin@ufpr.br

Palavras-chave: Transformação do Gato de Arnold, Sequência de Fibonacci, Operação módulo N, Período da transformação.

Resumo:

O objetivo desse trabalho é estudar a Transformação do Gato de Arnold e a sua periodicidade em relação a um conjunto de pontos (x, y) que formam uma imagem. A Transformação do Gato de Arnold propriamente dita é dada por:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{(mod N)},$$

onde $(\tilde{x}, \tilde{y})$ será a nova posição do ponto (x, y) sobre o qual é aplicada a tranformação. Restringimos x e y aos inteiros $0, 1, ..., N-1$ e efetuamos as operações de adição e multiplicação módulo N. Com essa definição, a transformação atua em pontos, e queremos aplicá-la em uma imagem. Para isso, começamos com uma imagem em preto e branco dividida em $N \times N$ quadrados discretos chamados pixels, e, posicionando-a no plano xy, podemos analisá-la como sendo uma associação de cores aos pontos do plano.

Aplicando a Transformação do Gato de Arnold repetidas vezes a todos os pontos (x, y) que formam a imagem, a tendência à desordem é iminente. Porém a configuração inicial retornará em algum momento, porque a transformação é bijetora e há $2^{N\times N}$ possíveis configurações dos $N \times N$ pixels, nas quais cada pixel é preto ou branco. Se um pixel retorna à sua posição inicial depois de m aplicações da transformação do

[*] Bolsista do Programa PET-Matemática.

gato de Arnold, mas não retorna com menos do que m aplicaões, dizemos que o pixel tem período m. Para a imagem formada por $N \times N$ pontos de pixel, denotamos por $\prod(N)$ o menor número inteiro que é um múltiplo comum de todos os períodos de todos os pontos de pixel do mapa. Segue que o mapa de pixels retorna à sua posição inicial em $\prod(N)$ iterações da transformação do gato de Arnold (mas não antes). Por esse motivo, $\prod(N)$ é chamado de período do mapa de pixels, e está fortemente relacionado ao número de pixels N.

Iterando a Transformação do Gato de Arnold em um ponto (x, y), conseguimos observar uma relação entre os termos da Sequência de Fibonacci e a matriz da n-ésima iteração da transformação. A partir de propriedades dos termos da sequência de Fibonacci, conseguimos obter alguns resultados para restringir o período da transformação em função de N.

Referências:

DYSON, F. J.; FALK, H. **Period of a Discrete Cat Mapping**. The American Mathematical Monthly, v. 99, n. 7, p. 603-614, ago./set. 1992.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2001.

Números de Bernoulli e Aplicações

Bruno Furquim de Souza
Licenciatura em Matemática - UFPR
brunofurquimsouza@ufpr.br

Prof. Dr. José Carlos Correa Eidam
Departamento de Matemática - UFPR
eidam@ufpr.br

Palavras-chave: Números de Bernoulli, Séries, Integrais.

Resumo: O teste da integral para convergência de séries relaciona a convergência de uma série com termos decrescentes com a convergência de uma integral correspondente. Por exemplo, na figura abaixo, relacionamos uma série $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ com uma integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$, de forma que cada termo a_n da série seja igual a $f(n)$:

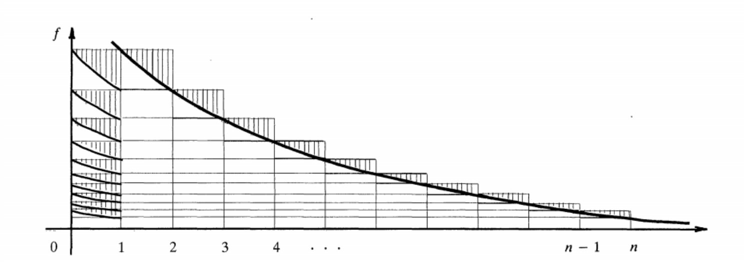


Figura 1: Representação geométrica da diferença entre a soma e a integral de f(x)

Entretanto, este teste não oferece nenhuma estimativa precisa para a diferença entre as somas parciais da série e os valores parciais da integral. Para obter tal estimativa, podemos utilizar a Fórmula da Soma de Euler, desenvolvida para estimar séries através de integrais, ou também para estudar integrais através de séries. Esta fórmula é uma ferramenta matemática muito importante no estudo de várias séries numéricas clássicas e utilizada também em estimativas de números reais. O desenvolvimento desta fórmula introduz de maneira simples e natural os Números e Funções de Bernoulli, as quais permitem a obtenção de aproximações muito apuradas para séries. Neste trabalho apresentaremos o desenvolvimento da Fórmula da Soma de Euler, e em seguida exemplos de aplicações da Fórmula da Soma de Euler e dos Números de Bernoulli em diversas funções clássicas, obtendo estimativas interessantes.

Referências:

- APOSTOL, Tom M. An Elementary View of Euler's Summation Formula. The American Mathematical Monthly, Vol. 106, nº 55, pg. 409-418, maio de 1999.
- KNOPP, Konrad. Theory and Application of Infinite Series. Glasgow: Blackie & Son LTD. 1954.

Introdução ao Paradoxo de Banach-Tarski

Emanuela Pinheiro Quirrenbach[1]
Bacharelado em Engenharia Mecânica – UTFPR
emanuelaquirrenbach@alunos.utfpr.edu.br

Prof. Sani de Carvalho Rutz da Silva
Departamento de Matemática – UTFPR
sani@utfpr.edu.br

Ednei Felix Reis
Departamento de Matemática – UTFPR
edneif@utfpr.edu.br

Palavras-chave: rotações, conjuntos não-mensuráveis, axioma da escolha, partições.

Resumo:
O trabalho publicado por Banach e Tarski em 1924 sobre decomposição de conjuntos de pontos **[1]** apresentou resultado tão contra intuitivo e estranho que ganhou alcunha de paradoxo. O paradoxo de Banach-Tarski, como ficou conhecido, pode ser enunciado da seguinte maneira: É possível separar uma esfera maciça em um número finito de subconjuntos disjuntos, e então, utilizando apenas movimentos rígidos, rearranjar esses subconjuntos em duas esferas idênticas à inicial. Pode-se também utilizar o seguinte enunciado, mais rebuscado e mais abrangente: É possível cortar uma ervilha em uma quantidade finita de pedaços que podem ser rearranjados para formar uma bola do tamanho do sol! [2] Na verdade, o teorema de Banach-Tarski é ainda mais abrangente, e trata da equivalência de qualquer figura rígida em espaços euclidianos com n ≥ 3.
Apesar da abrangência e estranheza do teorema, não é muito difícil entendê-lo. Em 1979, Stromberg publicou um passo a passo de como duplicar uma esfera, dividindo-a em 40 subconjuntos[3] **[3]**. Nesse artigo, várias ferramentas engenhosas são aplicadas para provar o teorema, e é interessante discutir algumas delas.

- As rotações utilizadas e as palavras:

Os movimentos rígidos utilizados tratam-se de duas rotações, ϕ e ψ, que possuem as seguintes características:

$$\psi^3 = \phi^2 = \iota, \text{ sendo } \iota = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As palavras são sequências dessas rotações, como instruções que levam um conjunto de pontos a outro.

---

[1] Bolsista de Iniciação Científica do PICME.
[2] *"It is possible to cut up a pea into finitely many pieces that can be rearranged to form a ball the size of the sun!"* **[2]**
[3] Embora Stromberg tenha escolhido dividir a esfera em 40 partes, este número não é o menor possível e foi escolhido por motivos didáticos. Em 1947 **[4]** foi provado que o menor número de subconjuntos disjuntos necessário para duplicar uma esfera unitária são cinco.

É provado então que com estas palavras, é possível mapear toda a superfície da esfera, partindo do conjunto P de pontos de partida, que é enumerável.

- Dividindo a Esfera com o Axioma da Escolha

O Axioma da escolha é um importante princípio da Teoria de Conjuntos, e pode ser enunciado da seguinte forma:
“O produto cartesiano de uma família não-vazia de conjuntos não-vazios é não-vazio. ”**[5]**
Uma consequência desse axioma é a possibilidade de “escolher” um elemento de cada conjunto não-vazio de uma família de conjuntos infinitos. Esse ato de escolher elementos infinitas vezes é o que torna possível a prova estudada, e também a deixa distante de ser fisicamente observada. Em uma etapa da prova, é preciso separar a esfera em quatro subconjuntos, e para construir esses subconjuntos, é necessário definir um conjunto C, que pode apenas ser formado por causa do axioma da escolha.

- Representação Visual do Paradoxo

Embora seja impossível representar todo o processo da decomposição da esfera de maneira visual, algumas etapas podem ser reproduzidas (ver **[6]**), devido à sua natureza geométrica.

Referências:

[1] BANACH, STEFAN; TARSKI, ALFRED. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. **Fundamenta Mathematicae** Vol. 6, (1924): 244–277. URL: https://www.impan.pl/en/publishing-house/journals-and-series/fundamenta-Mathematicae/all/6
[2] WAGON, STAN. **The Banach-Tarski Paradox.** Cambridge University Press, 1993. URL: https://books.google.com.br/books/about/The_Banach_Tarski_Paradox.html?id=_HveugDvaQMC&redir_esc=y (Acesso em 10/10/2017).
[3] STROMBERG, KARL. The Banach-Tarski Paradox. **The American Mathematical Monthly**, Vol. 86, No. 3 (Mar., 1979): 151-161. URL: http://www.jstor.org/stable/2321514
[4] ROBINSON, RAPHAEL M. On the decomposition of spheres. **Fundamenta Mathematicae** Vol. 34, Issue 1 (1947): 246-260. URL: http://eudml.org/doc/213130
[5] HALMOS, PAUL R. **Naive Set Theory**. Nova Iorque: Springer, 1974.
[6] VSAUCE, The Banach-Tarski Paradox. URL: https://youtu.be/s86-Z-CbaHA (Acesso em 10/10/2017).

Resoluções de equações diferenciais ordinárias por séries de potências.

Felipe de Jesus Kutz
Licenciatura em Matemática - UTFPR
felipekutz@ymail.com

Prof. Dr. Márcio Rostirolla Adames (Orientador)
Departamento de Matemática - UTFPR
marcioadames@utfpr.edu.br

Palavras-chave: EDOs, Séries de Potências, Convergência Forte de Operadores.

Resumo:

Neste trabalho estudamos a solução de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes não constantes. Para resolver problemas deste tipo utilizamos métodos de séries de potências, em particular o método das derivadas sucessivas, de maneira alternativa a usual. Comparamos os resultados obtidos com métodos já conhecidos, obtendo resultados consistentes.

Consideramos o seguinte P.V.I

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x) \tag{1}$$

com $y(x_0) = k_1$ e $y'(x_0) = k_2$, k_1 e $k_2 \in \mathbb{R}$, e onde $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ e $g(x)$ são funções analíticas em $x = x_0$. Derivando a equação (1) sucessivamente e aplicando-a em $x = x_0$ obtemos:

$$\sum_{i=0}^{n} \left(i(i-1)a_{n-i} + ib_{n-1-i} + c_{n-2-i}\right) y_i \ = g_{n-2} \tag{2}$$

Se tivermos $g(x) = 0$, teremos o caso homogêneo, também se $a_0 \neq 0$, então

$$y_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i(i-1)a_{n-i}}{n(n-1)} + i\frac{b_{n-1-i}}{n(n-1)} + \frac{c_{n-2-i}}{n(n-1)} \right) y_i \tag{3}$$

Em seguida fizemos a implementação da equação (3) no Matlab, onde conseguimos comparar as soluções que nossa implementação fornece com outras que são geradas pela rotina ODE45 do Matlab.

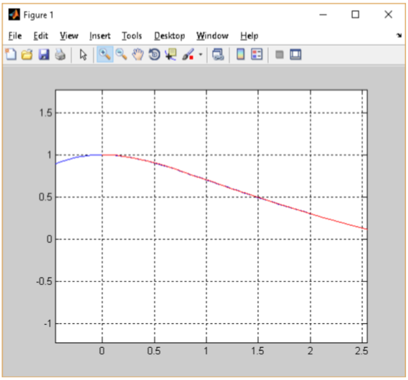


Figura 1: Soluções de $e^x y'' + y' sin(x) + y cos(x) = 0$ com $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

O caso mais interessante do P.V.I. (1) é aquele em que a solução é uma função analítica.

Se $a_0 = 0$ (o problema for singular), pode ser que a relação de recorrência (2) não seja possível de resolver (para o coeficiente de maior ordem, y_n) para alguns valores de n. Assim obtemos algumas restrições para a existência de uma solução analítica e/ou para restrições para a condição inicial.

Para este tipo de problema podem haver soluções múltiplas para o PVI. Por exemplo, encontramos numericamente múltiplas soluções para $x^2 y'' - 2xy' + (2 + x^2)y = 0$, com $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

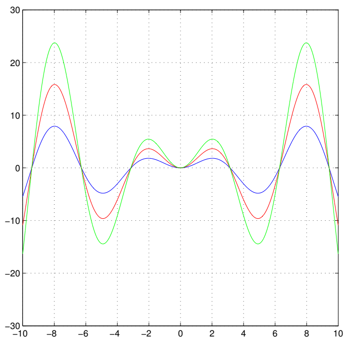


Figura 2: As soluções numéricas concordam com as obtidas analiticamente $y(x) = Cx\text{sen}(x)$.

Se for possível resolver a relação de recorrência podemos resolver a relação de recorrência obtendo

$$y_{n-k} = \frac{g_{n-2}}{(n-k)(n-1-k)a_k + (n-k)b_{k-1} + c_{k-2}} - \sum_{i=1}^{n-k} \frac{((n-k-i)(n-1-k-i)a_{i+k} + (n-k-i)b_{i+k-1} + c_{i+k-2})\, y_{n-k-i}}{(n-k)(n-1-k)a_k + (n-k)b_{k-1} + c_{k-2}}.$$

Os coeficientes assim gerados resolvem o PVI (1), *mesmo que o problema não seja singular regular*. Contudo, nesses casos, o raio de convergência é, necessariamente, pequeno. A Figura ilustra a situação.

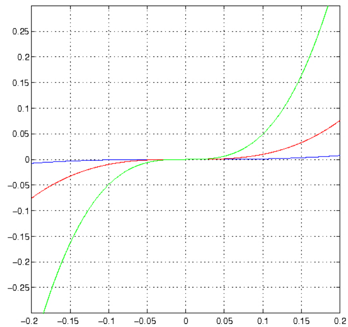


Figura 3: Soluções de $x^5y'' + 2x^2y'6xy = x^6$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Por fim enunciamos e provamos o teorema referente a convergência do método. Para isso escrevemos a relação de recorrência acima utilizando uma sequência de operadores lineares em ℓ^1 e utilizamos o Teorema da Convergência forte de operadores para provar sua convergência.

Referências

[1] ADAMES, Marcio R. **An alternative approach to the power series method**. *Preprint*, 2017.

[2] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno**. (7ª edição). LTC Editora. Rio de Janeiro, 2002.

[3] KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications.** New York: Wiley, 1989.

[4] STEWART, James. **Cálculo**. Vol. II. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

[5] TENENBAUM, Morris; POLLARD, Harry. **Ordinary differential equations: An elementary textbook for students of mathematics, engineering, and the sciences**. Courier Corporation, 1963.

[6] TESCHL, Gerald.**Ordinary Dierential Equations and Dynamical Systems.** Vol. 30. American Mathematical Society, Rhode Island, 2011.

Caos
Uma Introdução aos sistemas dinâmicos

Guilherme Alexandre Leachenski
Engenharia civil – UEPG
guileachenski@gmail.com

Prof. Thiago Gilberto do Prado
Departamento de Matemática – UTFPR
thiagoprado@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Caos, orbita, Lyapunov.

Resumo:

Na tentativa de resolver o problema de interação gravitacional de três corpos Henri Poincaré observou um novo comportamento irregular destas equações. Esse comportamento hoje é conhecido como Caos. A deste momento uma ampla pesquisa sobre o comportamento de equações como: a equação do pêndulo amortecido forçado, o mapa de Hénon, o mapa de Ikeda e de muitas outras foi feita. Começando o estudo em equações unidimensionais como a equação do mapa logístico e partindo para casos mais complexos como a equação de Duffing. Para se começar o estudo nas equações é necessário determinar um ponto de partida, denominado valor inicial. Outro ponto importante no estudo do caos é o estudo de pontos fixos, onde estes podem ser classificados em: fontes (repelem valores na sua vizinhança), atratores (atraem valores na sua vizinhança) e selas (atraem valores em uma direção e repelem em sua outra direção). Outro elemento importante para a quantificação do caos é a determinação de seus períodos, isto é, localizar em qual iteração volta a se repetir seus valores, ou seja, se $f^k(p)=p$ então temos uma orbita periódica de período k. Uma orbita caótica apresenta comportamento instável e sofre com irregularidades a cada nova iteração. Essa irregularidade é quantificada por números e expoentes de Lyapunov. Assim o número de Lyapunov é definido como a taxa média de divergência dos pontos ao longo de sua órbita, e o expoente de Lyapunov é o seu logaritmo natural. Definimos então que o caos ocorre quando o seu expoente de Lyapunov é maior do que zero. O objetivo deste trabalho é o estudo inicial da teoria do Caos. Para

isto estaremos estudando um oscilador de Duffing com objetivo principal de compreender os conceitos básicos da teoria do Caos.

Referências:

ALLIGOOD, K.T; SAUER, T.D; YORKE, J.A. Chaos - an introduction to dynamical systems. New York: 1996.

Teoria de Sturm-Liouville e Problemas de Valores de Contorno

João Antonio Francisconi Lubanco Thomé *
Bacharelado em Matemática - UFPR
jolubanco@gmail.com

Prof. Dr. Fernando de Ávila Silva (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
fernando.avila@ufpr.br

Palavras-chave: Equação do Calor, Equações Diferenciais Parciais, Teoria de Sturm-Liouville.

Resumo

No estudo das Equações Diferenciais Parciais, em particular na equação do calor, um método usual para se resolver tais equações é o chamado *método de separação de variáveis*. Este método consiste em supor que a solução $u(x,t)$, dependente da variável espacial x e temporal t, possa ser escrita como um produto $u(x,t) = X(x)T(t)$. Neste caso, podemos reduzir o estudo de uma equação diferencial parcial ao estudo de equações diferenciais ordinárias.

O objetivo deste trabalho é aplicar tal método para resolver o problema condução de calor não-homogêneo, descrito por

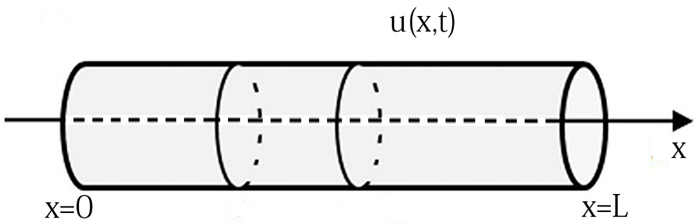
$$\begin{cases} r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x,t) \\ u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0 \quad u_x(1,t) + h_2 u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{1}$$

Para tanto, utilizamos a Teoria de Sturm-Liouville que permite obter a solução do problema (1) através das soluções de uma equação diferencial ordinária associada.

Motivação

Considere inicialmetne o problema de se determinar uma função $u = u(x,t)$ que descreva a condução de calor na barra de seção reta uniforme, como indicado na figura.

*Bolsista do Programa PET-Matemática.



Mostra-se (ver referência [1]) que a equação diferencial que descreve esse processo, junto com suas condições iniciais e de contorno, é dada por

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t \quad 0 \leq x \leq L \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad\quad 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0 \quad\ t \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

sendo α^2 uma constante conhecida como *difusidade térmica* que depende apenas do material da barra. Aplicando o *método de separação de variáveis*, isto é, supondo $u(x,t) = X(x)T(t)$, obtemos as equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda\alpha^2 T(t) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Assim, mostra-se que a solução formal (2) é a justaposição do produto das soluções de (3), isto é,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t} \sin(n\pi x/L),$$

sendo

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

O caso geral

Retornando ao problema de condução de calor não-homogêneo, descrito por (1), considere inicialmente o caso homogêneo $F(x,t) = 0$, ou seja,

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u. \tag{4}$$

Aplicando novamente o *método de separação de variáveis*, buscamos por soluções do tipo $u = u(x,t)$ obtendo a equação

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{[p(x)X'(x)T(t)]_x}{r(x)X(x)T(t)} - \frac{q(x)}{r(x)} = -\lambda, \tag{5}$$

sendo λ uma constante.

Agora, através das condições iniciais dadas em (1) chega-se ao *Problema de Valor de Contorno de Sturm-Liouville*

$$\begin{cases} -[p(x)X']' + q(x)X = \lambda r(x)X \\ X'(0) - h_1 X(0) = 0 \\ X'(1) + h_2 X(1) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

No processo para se obter as soluções do problema (6) considera-se o operador linear $L : C^2[0,1] \to C^2[0,1]$ da dado por

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y(x),$$

o qual para condições adequadas sobre p, q e r satisfaz as seguintes propriedades:

(i) é auto-adjunto;

(ii) todos os autovalores λ_j são reais e simples;

(iii) autofunções $\phi_j(x)$ associadas a autovalores distintos são ortogonais.

Por fim, mostra-se que a solução do problema (1) pode ser escrita como uma combinação de autofunções normalizadas do Problema de Sturm-Liouville, isto é,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x) \tag{7}$$

para uma escolha adequada dos parâmetros $b_n(t)$.

Referências

[1] BOYCE, W.E. & DIPRIMA R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8 ed. (1998). LT & C.

[2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo*. vol 1. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, c1986.

[3] FIGUEIREDO, D.G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA.

Aproximações por frações contínuas

Letícia Ferreira Gomes *
Licenciatura em Matemática - UFPR
letiferreiragomes@gmail.com

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
eidam@ufpr.br

Palavras-chave: Frações Contínuas, Aproximações, Números Irracionais.

Resumo:

Uma maneira bastante útil e prática para aproximar números irracionais é utilizar números racionais. Entretanto, esta aproximação pode ser relativamente complicada, dado que frações com denominadores muito grandes podem ser mais trabalhosas para manipularmos.

Do ponto de vista histórico, as aproximações racionais mais conhecidas são aquelas dadas em termos de frações contínuas. Estas frações são números da forma:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{\ddots + \cfrac{b_{n-1}}{a_n}}}}$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ são números reais. Estas expressões foram estudadas por grandes matemáticos dos séculos XVII e XVIII, tais como Joseph Louis Lagrange e Leonhard Euler. Neste trabalho iremos nos concentrar num caso particular, onde os b_n's são 1, para $n \geq 1$, os a_n 's são inteiros positivos para $n \geq 2$, e a_1 é um inteiro qualquer. Frações contínuas que obedecem tais propriedades são denominadas frações contínuas simples. Isto é, são frações da forma:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Assim, após introduzirmos os conceitos básicos a respeito das frações contínuas, apresentaremos a definição de convergentes e mencionaremos algumas de suas propriedades essenciais. Mostraremos que as frações contínuas fornecem, de certa

*Bolsista do Programa PET-Matemática

forma, as melhores aproximações racionais de um número.

Referências:

[1] OLDS, C.D. **Continued fractions**. New York: Handom House The L. W. Singer Company, 1963. (New Mathematical Library Series).

[2] KARAGUEZIAN, Dikran. **Infinite continued fractions**. PDF disponível em: $<$http://people.math.binghamton.edu/dikran/478/Ch7.pdf$>$. Acesso em: 15 set. 2017.

[3] KHINCHIN, A. Ya. **Continued fractions**. University of Chicago Press. 1964.

Teoria das funções representadas por integrais

Luiz Eduardo de Matos[1]
Licenciatura em Matemática – UEPG
dudumattos17@gmail.com

Prof. Marciano Pereira (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística – UEPG
marciano@uepg.br

Palavras-chave: função Gama, método de Laplace, fórmula de Stirling.

Resumo:

Em um primeiro curso de análise, busca-se estudar de forma aprofundada e rigorosa conceitos e aspectos sobre funções já vistas em cálculo. Continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade são alguns deles, contudo, as funções utilizadas são as que podem ser expressas de forma simples, as chamadas funções elementares.

Por outro lado, em muitos problemas de análise aparecem outros tipos de funções, tais que para expressá-las são necessários recursos mais sofisticados, como as séries ou as funções representadas por integrais. Este último é o objeto de estudo no presente trabalho. Um exemplo simples deste tipo de função é a função Logarítmica, a qual pode ser definida por $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, x > 0$.

Ao ver este tipo de função é natural se perguntar se elas estão bem definidas e se são: contínuas? Diferenciáveis? Integráveis?

Como um tipo geral do problema acima, suponha que $\Phi(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$,é convergente para cada valor de x em algum intervalo. Na prática se tal integral é convergente, ela define uma função de um parâmetro e é importante saber seΦé ou não contínua; também, sob que condições é possível trabalhar com diferenciação e integração de Φ, etc. O tratamento dessas questões é bastante análogo ao tratamento das correspondentes questões no caso de funções definidas por séries.O conceito chave para isso é o de convergência uniforme.

Para responder a estas questões, necessita-se de um estudo aprofundado e de certos resultados de convergência (uniforme) de integrais. Além disso, funções importantes da matemática, como são os casos das funções Gama e Beta, são exemplos destes tipos especiais de funções, as quais aparecem em diversas aplicações.

Assim, além dos objetivos já citados, fizemos um estudo detalhado das funções especiais mencionadas no parágrafo anterior e de suas respectivas propriedades.

Também estudamos algumas de suas aplicações, como o método de Laplace. Este método leva este nome em homenagem ao matemático francês

[1] BolsistaIniciação Científica/PIBIC/Fundação Araucária.

Pierre-Simon Laplace, que foi quem o desenvolveu, e serve para estimar o valor assintótico de funções dependendo de um parâmetro sob certas condições.

Aplicamos o método de Laplace para a função Gama, obtendo o seu comportamento assintótico.Este resultado ganha um nome em particular de formula de Stirling, a qual nos dá uma aproximação do “tamanho” de $n!$, quando n é grande.

Referências:

[1] FULKS, W. **Advanced Calculus**. Nova Yorque: John Wiley & Sons, 1969.

[2] TAYLOR, A. E.; MANN, W. R. **Advanced Calculus**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1983.

[3] PROTTER, M. H.; MORREY, C. B. **A First Course in Real Analysis**.NovaIorque: Springer-Verlag, 2000.

[4] ARTIN,E. , **Einffuhrung in die Theorie der Gamma funktion**,1931

[5] DAVIS, P. J. **Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function: In Memoriam: Milton Abramowitz**. The American Mathematical Monthly, Vol. 66, No. 10 ,1959, p. 849-869.

[6] RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. 3 ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1976.

[7] DE FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.** Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

Aplicação do Teorema do Ponto Fixo na Análise de Convergência de Sequências

Mariana Meyer[1], Denise de Siqueira (Orientadora)[2], and Nara Bobko (Co-Orientadora)[3]

[1] Licenciatura em Matemática - UTFPR, *m.marianameyer@gmail.com*

[2] Departamento de Matemática - UTFPR , *denisesiqueira@utfpr.edu.br*

[3] Departamento de Matemática - UTFPR , *narabobko@utfpr.edu.br*

Palavras-chave: recorrência, convergência de sequências, ponto fixo.

Resumo: Sequências numéricas representam uma parte muito importante de estudo na Matemática, sendo estudadas desde o ensino fundamental até níveis avançados de pesquisas. Uma importante aplicação de sequências pode ser encontrada em modelos biológicos de crescimento populacional, em que é possível fazer previsões do tamanho de uma população a partir de uma população inicial. Neste contexto, existem diversas formas para analisar sua convergência. Quando a sequência está definida em forma de recorrência, ou seja, um termo depende de seus antecessores ($x_{n+1} = f(x_n)$), esta análise pode não ser tão simples. Estratégias, como por exemplo, encontrar o termo geral de uma recorrência podem se tornar altamente ineficiente. Neste sentido, o Teorema do Ponto fixo pode ser uma alternativa para que esta análise seja bem sucedida, além de dar condições para que, em caso de convergência, caracterizar o comportamento do ponto limite. Sendo assim, este trabalho busca aplicar a teoria de ponto fixo no contexto de convergência de sequência definidas em forma de recorrência, e aplicá-la no estudo de alguns modelos de dinâmica populacional tais como Beverton-Holt e Ricker.

Referências

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática no Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NEUHAUSER, C. **Calculus for Biology and Medicine**. Minnesota: Pearson, 1962.

ALLIGOOD, K. T. et al. **Chaos:** an introduction to dynamical systems. New York: Springer-Verlag, 1996

Dinâmica Estrutural: um estudo do oscilador viscoelástico e das técnicas de controle de vibrações

Autor: Raquel Ayumi Aita *
Engenharia Civil - UFPR
rq.aita@gmail.com

Prof. Ana Gabriela Martínez
Departamento de Matemática - UFPR
ag.anagabriela@gmail.com

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias, sistemas de controle, dinâmica das estruturas.

Resumo:

Diferentes tipos de ações dinâmicas sobre uma estrutura produzem mudanças na sua configuração em torno de uma posição de equilíbrio estável. Em algumas situações, estas mudanças podem atingir grandes amplitudes, mesmo quando a força de excitação é pequena, o que pode levar ao colapso da estrutura. É fundamental uma análise das vibrações do sistema, afim de identificar as amplitudes predominantes na vibração, determinar suas causas e proceder à correção do problema quando estas vibrações são indesejadas.

Neste trabalho, foi estudado num primeiro momento o modelo matemático clássico para as vibrações mecânicas: o sistema massa-mola. Quando considerado um grau de liberdade, a equação de movimento para este sistema resulta na e.d.o.

$$m\,x''(t) + c\,x'(t) + k\,x(t) = f(t),$$

onde $m, c,$ e k correspondem à massa, amortecimento e rigidez do sistema e f à força de excitação externa. Para um sistema de n graus de liberdade, as equações de movimento são descritas matricialmente como

$$[M]u''(t) + [C]u'(t) + [K]u(t) = F(t),$$

sendo $u(t)$ o vetor dos deslocamentos e $F(t)$ o vetor das forças externas. As matrizes M, K e C correspondem às matrizes de massa, rigidez e amortecimento, respectivamente.

*Bolsista do PICME

No presente trabalho estudam-se as vibrações livres e forçadas para sistemas de um e n graus de liberdade. O fenômeno da ressonância, para o caso de oscilações forçadas, mostra o papel fundamental que desempenha na resposta a frequência natural do sistema. Qualquer sistema de controle de vibrações, seja ele passivo ou ativo, deve garantir uma faixa de frequências livre dos efeitos indesejáveis da ressonância. Em sistemas oscilatórios de n graus de liberdade, a partir da equação homogênea não amortecida e através da resolução de um problema de autovalor generalizado, é determinada a matriz modal do sistema. As novas coordenadas determinadas pelos autovetores, ou coordenadas modais, desacoplam as n equações e transformam o problema em n sistemas de um grau de liberdade. Esta resposta apresenta máximos locais nos autovalores associados a estes autovetores, que correspondem precisamente às frequências naturais ou modos de vibração destes sistemas de um grau de liberdade:

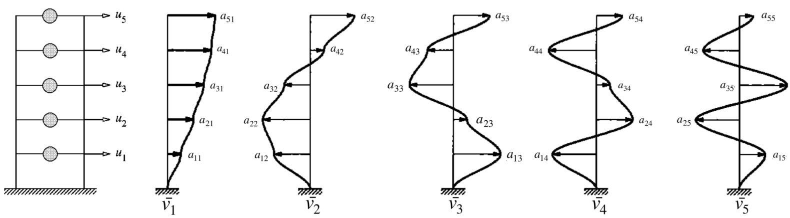


Figura 1: Modos naturais de vibração - Fonte: Modificada de CHOPRA (1995)

Por último, a superposição modal também é aplicada para o caso de amortecimento proporcional à massa e à rigidez.

Referências:

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valor de contorno**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: theory and applications to earthquake engineering**. New Jersey: Prentice-Hall, 1995.

INMAN, D. J. **Engineering Vibrations**. 3rd ed. Prentice hall, 2007.

RICCIARDELI, F.; PIZZIMENTI, D.; MATTEL, M. **Passive and active mass damper control of the response of tall building to wind gustiness**. Engineering Structures, 2003.

THOMSON, W. T. **Theory of Vibration with Applications**. 3rd ed. Prentice Hall, 1988.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais, vol. 1 e 2**. 3. ed. Makron Books, 2001.

Modelo matemático para gripe aviária

Thiago Luiz Benevides
Licenciatura em Matemática - UTFPR
benevides.thiago@live.com

Profa. Dra. Nara Bobko (Orientadora)
Departamento de Matemática - UTFPR
narabobko@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Gripe aviária, modelagem matemática, estabilidade global.

Resumo: A gripe aviária é um patógeno com capacidade de alta contaminação, infectando não somente aves como também suínos e seres humanos. Em 2009, tivemos um grande surto da doença no mundo inteiro, gerando uma elevada taxa de mortalidade da população mundial [1]. Tal fato desencadeou a mobilização de pesquisadores de diversas áreas, com o intuito de melhor compreender a propagação do vírus e criar estratégias capazes de evitar novos surtos da doença.

Nosso interesse é abordar este problema utilizando ferramentas matemáticas. Mais precisamente, estamos estudando a dinâmica da propagação desta doença com base no modelo compartimentado abaixo, proposto por Derouich e Boutayeb: [2]

$$
\begin{aligned}
\frac{ds_h}{d\tau} &= 1 - s_h - i_a s_h + r_h \\
\frac{di_h}{d\tau} &= \frac{\delta_h}{\mu_h} i_a s_h - \left(1 - \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha}{\mu}\right) \\
\frac{dr_h}{d\tau} &= \frac{\gamma_h}{\mu_h} i_h - \left(1 - \frac{\delta_h}{\mu_h}\right) r_h \\
\frac{di_a}{d\tau} &= \frac{\beta_a}{\mu} i_a \left(1 - \frac{\mu_a}{\beta_a} - i_a \frac{\mu_h}{\beta_h}\right)
\end{aligned}
$$

onde $\mathbf{s_h}$, $\mathbf{i_h}$ e $\mathbf{r_h}$ denotam a densidade de humanos **suscetíveis**, **infectados** e **removidos**, respectivamente, enquanto $\mathbf{i_a}$ denota a densidade de aves **infectadas** (o significado das constantes presentes no sistema estão detalhados na Tabela (1)).

Esse sistema possui dois pontos de equilíbrio: um deles livre da doença, $E_1 = (1, 0, 0, 0)$, e outro endêmico, $E_2 = (\overline{s_h}, \overline{r_h}, \overline{i_h}, \overline{i_a})$. Os valores das componentes do ponto de equilíbrio endêmico estão detalhados na Tabela (2). A estabilidade destes pontos dependerá do valor da constante $\frac{\beta_a}{\mu_a}$, isto é, se $\frac{\beta_a}{\mu_a} < 1$ o ponto de equilíbrio E_1, será assintoticamente estável enquanto que se $\frac{\beta_a}{\mu_a} > 1$, E_2 será assintoticamente estável.

Os gráficos abaixo mostram o que ocorre nos dois casos

δ_h	taxa de morte humana relatada pela doença
μ_h	taxa de morte natural humana constante
γ_h	taxa de recuperação humana
β_a	contato efetivo entre aves
μ_a	taxa de morte natural das aves constantes
β_h	contato efetivo entre humano e ave

Tabela 1: Tabela de parâmetros

$\overline{s_h}$	$\left[1 + \frac{\beta_h}{\mu_h}\left(1 - \overline{A}\right)\right]^{-1}$
$\overline{r_h}$	$\overline{A}\frac{\beta_h}{\mu_h}\left(1 - \frac{\mu_a}{\beta_a}\right)\overline{s_h}$
$\overline{i_h}$	$\frac{\delta_h \mu_a}{\mu_h \mu_a + \gamma_h + \alpha}\frac{\beta_h}{\mu_h}\left(1 - \frac{\mu_a}{\beta_a}\right)$
$\overline{i_a}$	$\frac{\beta_h}{\mu_h}\left(1 - \frac{\mu_a}{\beta_a}\right)$
$\overline{A}$	$\frac{\gamma_h}{\mu_h + \delta_h}\frac{\delta_h}{\mu_h + \gamma_h + \alpha_h}$

Tabela 2: Parâmetros do ponto de equilíbrio endêmico

Direções Futuras

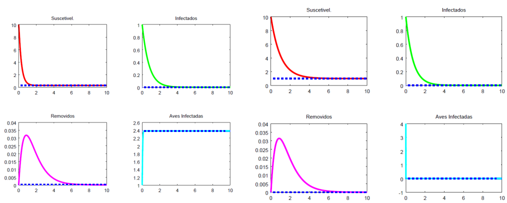
Nosso intuito é prosseguir estudando este modelo, bem como outro semelhante proposto por Sanhong Lui, Shigui Ruan, Xinan Zhang no artigo [3].

Referências

[1] Meirelles, Gustavo de Souza Portes. Influenza: o velho inimigo está de volta-e renovado. *Radiologia Brasileira*,42(6):V–VI,2009.

[2] Mohamed Derouich and Abdesslam Boutayeb. An avian influenza mathematical model. *Applied mathematical sciences*, 2(36):1749–1760, 2008.

[3] Sanhong Liu, Shigui Ruan, and Xinan Zhang. Nonlinear dynamics of avian influenza epidemic models. *Mathematical biosciences*, 283:118–135, 2017.



(a) $\dfrac{\beta_a}{\mu_a} > 1$ (b) $\dfrac{\beta_a}{\mu_a} < 1$

Figura 1: Comportamento das soluções do Sistema de Equações.

Análise Numérica

Banca Avaliadora:

Profa. Ailin Ruiz Zarate de Fábregas
Prof. Saulo Pomponet Oliveira
Prof. André Luiz Corrêa Vianna Filho

Análise do Método de Quasi Interpoladores Otimizados para reconstrução de imagens aplicado a sinais de áudio

Carlos Eduardo Leal de Castro*
Licenciatura em Matemática - UFSC
lealdecastro@gmail.com

Prof. Dr. Leonardo Koller Sacht (Orientador)
Departamento de Matemática - UFSC
leonardo.sacht@ufsc.br

Palavras-chave: recuperação musical, reconstrução de áudio, quasi-interpoladores.

Resumo:

A música está presente na vida de milhões de pessoas mundo afora. Seus conceitos e formas oferecem um conjunto infinito de possibilidades de análises complexas, como em pesquisas sobre a forma de uma canção orquestrada, em estudos sobre simples vibrações de cordas em um violão ou na análise de um discurso proferido por um orador.

De acordo com Giannakopoulos e Pikrakis (2014), a manipulação de áudio digital é uma área que vem crescendo muito ao longo dos anos. Isso se dá por conta do desenvolvimento tecnológico na área e, principalmente, pelo crescimento do mercado digital e das pesquisas em torno desse assunto. Nesse sentido, tem-se trabalhado, especialmente, nas áreas de reconhecimento de discurso, identificação e visualização do orador, recuperação de informações musicais, detecção de eventos em áudio, reconhecimento de emoção do discurso, diversos métodos de análise de conteúdo em filmes, além de criação de novos instrumentos musicais eletrônicos, desenvolvimento de software de música e robótica ligada a execução de instrumentos.

Dentro da área de recuperação e reconstrução de informações musicais, iremos derivar os caminhos que de fato tiveram resultados significativos na área de processamento e reconstrução de imagens, área essa que mantém relações próximas com o processamento de áudio.

Em sua tese de doutorado, Sacht (2014) desenvolveu o método de Quasi Interpoladores Otimizados para reconstrução de imagens, com resultado superior aos apresentados anteriormente nesta área de pesquisa, apontando critérios para se obter filtros digitais e funções geradoras para reconstrução.

*Membro do Programa de Ensino e Tutoria (PET – Matemática) / Iniciação Científica

Na presente pesquisa, trabalhamos sobre a hipótese de que o método desenvolvido por Sacht (2014) é aplicável a sinais de áudio. A fim de comprovar tal hipótese, analisaremos a funcionalidade do Método de Quasi-Interpoladores Otimizados para reconstrução de imagens aplicado a sinais de áudio, construindo uma base em manipulação de áudio no MATLAB e determinando ajustes necessários de tal método para uma melhor aplicabilidade em áudio, além de apresentar resultados e continuidades para pesquisas futuras.

Referências:

BLU, T.; UNSER, M. **Approximation error for quasi-interpolators and (multi-) wavelet expansions**. Applied and Computational Harmonic Analysis, Elsevier, v. 6, n. 2, p. 219–251, 1999.

BRUCKNER, A. M.; BRUCKNER, J. B.; THOMSON, B. S.. **Real analysis**. Classical Real Analysis. com, 1997.

FIGUEIREDO, D. G.. **Análise I**. : Rio de Janeiro: LTC, 1996.

FIGUEIREDO, D. G.. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000.

GASQUET, C.; WITOMSKI, P. **Analyse de Fourier et application: Filtrage, calcul numérique, ondelettes**. Paris: Masson, 1990.

GIANNAKOPOULOS, T.; PIKRAKIS, A.. **Introduction to Audio Analysis: A MATLAB® Approach**. Academic Press, 2014.

OLIVEIRA, J. C. **Cálculo IV**. mar. 2017 a jun. 2017, 162 f. Notas de Aula, 2017.

OSGOOD, B. **The Fourier transform and its applications**. Lecture notes for EE, v. 261, p. 20, 2009.

SACHT, L. K. **Optimized Quasi-interpolators for Image Reconstruction and Consistent Volumetric Discretizations Inside Self-Intersecting Surfaces**. Tese (Doutorado) — IMPA, Rio de Janeiro, 2014.

SHANNON, C. E. **Communication theory of secrecy systems**. Bell Labs Technical Journal, Wiley Online Library, v. 28, n. 4, p. 656–715, 1949.

Pré-condicionadores para o método de Gradientes Conjugados

Egmara Antunes dos Santos
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
egmara.antunes@gmail.com

Prof. Abel Soares Siqueira
Departamento de Matemática - UFPR
abel.s.siqueira@gmail.com

Palavras-chave: Método de Gradientes Conjugados, Pré-condicionadores, fatoração Cholesky.

Resumo: Pré-condicionar um sistema linear tem como objetivo torná-lo mais favorável a métodos iterativos, tais como o método de gradientes conjugados, diminuindo o número de iterações necessário para se obter convergência. Neste trabalho é realizado um estudo sobre pré-condicionadores para sistemas lineares na forma

$$Ax = b,$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica positiva definida. Para matrizes com essas características, o método de gradientes conjugados encontra a solução x do sistema linear acima em no máximo n passos. Porém, computacionalmente, em problemas de dimensões muito grandes e mal condicionados, o número de iterações para se encontrar um resíduo pequeno pode ser alto, podendo ser muito maior do que n.

O objetivo deste trabalho é apresentar o uso de pré-condicionadores para sistemas lineares que buscam melhorar o desempenho do método de gradientes conjugados. A ideia principal é transformar o sistema linear anterior em um sistema equivalente da forma

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b,$$

e adaptar o método de gradientes conjugados para este novo sistema linear. A matriz M acima atua como um pré-condicionador para o sistema linear original.

Alguns conceitos sobre sistemas lineares pré-condicionados são abordados primeiramente. Em seguida, apresentamos um algoritmo do método de gradientes conjugados pré-condicionado utilizando a fatoração de Cholesky incompleta como um pré-condicionador. As implementações dos algoritmos foram realizadas na linguagem de programação Julia e baseiam-se nos métodos propostos por Moré e Lin em [3]. Por fim, discutiremos os testes que foram realizados para matrizes esparsas simétricas positivas definidas, obtidas das bibliotecas de matrizes [4] e [5], e as comparações com o algoritmo clássico de Hestenes e Stiefel descrito em [1].

Referências

[1] LOAN, C. F. GOLUB, G. H. *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 2013.

[2] SAAD, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, SIAM, 2003.

[3] LIN, C. J. MORÉ, J. J. *Incomplete Cholesky Factorizations with Limited Memory*, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 21, n.º 1, pp. 24-25, ago. de 1999, ISSN:1064-8275.

[4] HU, Y. A Gallery of Large Graphs, URL: `http://yifanhu.net/GALLERY/GRAPHS/`.

[5] National Institute of Standards e Technology, Matrix Market, URL: `http://math.nist.gov/MatrixMarket/`.

Pós-processamento gráfico: Antialiasing recovery no domínio de Fourier

João Paulo Navarro Barbosa
Bacharelado em Matemática e Computação Científica - UFSC
jp_nb95@hotmail.com

Prof. Dr. Leonardo Koller Sacht
Departamento de Matemática - UFSC
leonardo.sacht@ufsc.br

Palavras-chave: Transformada de Fourier, antialiasing, computação gráfica.

Resumo:

Operações não lineares em imagens geram artefatos indesejáveis, principalmente arestas serrilhadas. Mesmo se a imagem de entrada não possuir tais artefatos, o processamento em domínio discreto introduz este problema. Aspectos físicos de uma cena são facilmente danificados por processamentos não lineares, arestas serrilhadas(aliasing), que são um subproduto do processamento digital de imagens, podem ser geradas, por exemplo, pelo processo de binarização de uma imagem, conhecido como processo de threshold - limiar - ou uma simples rotação aplicada em uma cena.

Reconstruções de arestas no âmbito da Computação gráfica possuem duas vertentes de processamento, definidas no domínio espacial [1] ou no domínio da frequência. Estudos e softwares atuais priorizam a filtragem no domínio espacial [1] [2] [3] [4].

Apresenta-se um processo de reconstrução e processamento realizado em todo no domínio da frequência utilizando filtros tradicionais para a acentuação de arestas e reconstrução.

Seja $f(x, y)$ a imagem de entrada discretizada e $h(x, y)$ um operador linear responsável pela filtragem. Tem-se que a filtragem é dada pela convolução de f e h:

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$$

Pelo teorema da convolução [7], g no domínio da frequência pode ser descrita como:

$$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v)$$

onde $F(u, v)$ é a transformada de Fourier de $f(x, y)$, isto é, $F(u, v) = \mathcal{F}\{f(x, y)\}$ e $H(u, v)$ o filtro no domínio da frequência. Note que a transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}\{G(u, v)\}$ define a imagem filtrada no domínio espacial $g(x, y)$.

O método proposto de *Antialiasing* no domínio da frequência está relacionado com a análise das frequências altas de uma imagem - acentuação de arestas. No entanto, detecção de arestas já possui um grande estudo no domínio espacial, possuindo métodos conhecidos por seus resultados satisfatórios como, por exemplo, Sobel, Roberts, Prewitt e Canny [5].

Por outro lado, na frequência, arestas são dadas por transições muito rápidas realizadas em pequenas regiões da cena. Sabendo disso, torna-se intuitivo que arestas encontram-se na região das frequências altas, pois são representadas por transições abruptas do sinal, que por sua vez estão associados aos componentes de alta frequência do espectro de Fourier. É importante ressaltar que não são apenas as arestas que estão contidas nas frequências altas, mas também regiões com textura predominante. Portanto, aplica-se um filtro *passa alta* para atenuar as frequências baixas, deixando apenas as frequências altas passarem, obtendo-se acentuação das arestas.

Inicialmente esta acentuação das frequências altas será realizada por alguns dos filtros *passa alta* tradicionais, isto é, funções de transferência, dados por [6] [7]:

Ideal(IHPF)	Gaussiano(GHPF)	Butterworth(BHPF)
$H(u,v) = \begin{cases} 0 & D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & D(u,v) > D_0 \end{cases}$	$H(u,v) = 1 - e^{(-D^2/2D_0^2)}$	$H(u,v) = \frac{1}{1+[D_0/D(u,v)]^{2n}}$

Com os seguintes parâmetros de entrada dos filtros: $D_0 \in (0,1]$ é a frequência de corte medida a partir da origem, $D(u,v)$ é a distância do ponto (u,v) até a origem no plano da frequência, e $n \in \mathbb{N}$ é a ordem do filtro Butterworth, onde é necessária uma discussão mais detalhada sobre a qualidade de filtragem de ambos, mas de antemão IHPF realiza uma filtragem muito agressiva gerando artefatos no processamento.

Consequentemente filtros *passa baixa*(H_{LP}) na frequência podem ser escritos em função dos filtros *passa alta*(H_{HP}), com funcionamento inverso, isto é, atenua frequências altas e permite a passagem das frequências baixas tem-se então [6] [7]: $H_{LP} = 1 - H_{HP}$.

Seja $f(x,y)$ a imagem original e $g(x,y)$ a imagem processada com aliasing ambas discretizadas. Considere suas respectivas versões no domínio da frequência dadas pelas transformadas de Fourier: $F(u,v) = \mathcal{F}\{f(x,y)\}$ e $G(u,v) = \mathcal{F}\{g(x,y)\}$ e $H(u,v)$ algum filtro *passa alta* citado.

Procura-se determinar uma maneira de copiar as arestas da imagem original(f) sobrepondo sobre a imagem processada(g), priorizando manter as características originais de g através do processamento no domínio da frequência.

Portanto, através do estudo dos componentes de alta e baixa frequência de F e G respectivamente criaremos uma função de reconstrução $R(u,v)$ dada por:

$$R(u,v) = H(u,v)F(u,v) + [(1+k) - H(u,v)]G(u,v)$$

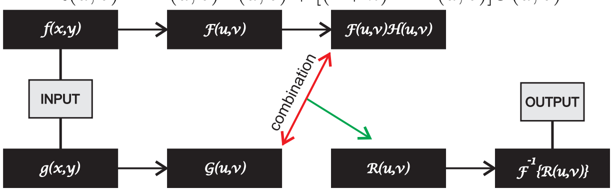


Figura 1: Esquematização teórica do método

A partir das figuras 2 e 3 podemos ver alguns resultados gerados através da função de reconstrução aplicada a uma cena que já sofreu algum tipo de filtragem. Na qual, cada conjunto de imagens representa a imagem original, processada e restaurada respectivamente, com alguns dos filtros e parâmetros citados.

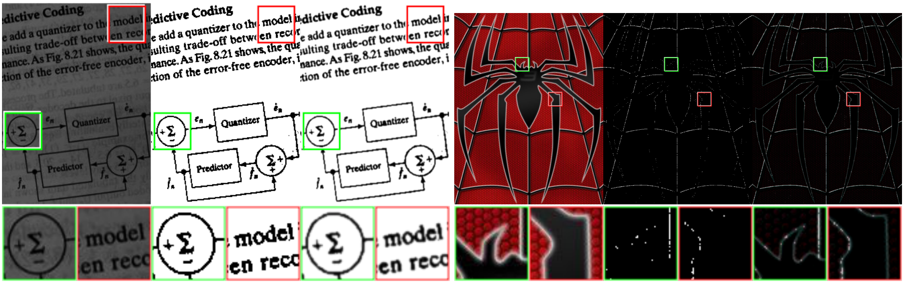


Figura 2: Texto: 1 - Imagem Original; 2 - Processou a imagem original com uma transformação de threshold automática; 3 - Aplicou-se $R(u, v)$ com Gaussiano com $D0 = 0,4$ e $k = 0,1$. Aranha: 1 - Imagem Original; 2 - Processou a imagem original com uma transformação de threshold; 3 - Aplicou-se $R(u, v)$ com Butterworth com $D0 = 0,2$, $n = 1$ e $k = 0,1$

Figura 3: Tucanos: 1 - Imagem Original; 2 - Processou a imagem original com um ajuste de tons de cinza; 3 - Aplicou-se $R(u, v)$ com Gaussiano com $D0 = 0,3$ e $k = 0$. Motoqueiros: 1 - Imagem Original; 2 - Processou a imagem original com o filtro laplaciano normalizado; 3 - Aplicou-se $R(u, v)$ com Gaussiano com $D0 = 0,4$ e $k = 0,013245$

Mais detalhes e resultados sobre o método e implementação no Matlab®(R2016b) estão disponíveis na página do projeto [9].

Referências

[1] YANG, L.; SANDER, P.V.; LAWRENCE, J.; HOPPE, H. Antialiasing recovery. ACM Transactions on Graphics, 30(3):22, 2011.

[2] RESHETOV, A. Morphological antialiasing (MLAA). Intel Labs, 2009.

[3] LOTTES, T. Fast approximation antialiasing (FXAA). NVIDIA whitepaper, 2011.

[4] NATTERER, M; NEUMANN, S. et al. GIMP - GNU IMAGE MANIPULATION PROGRAM (EUA, Org.). User Support: Manual. Disponível em: `https://docs.gimp.org/en/`.

[5] GARAGE, W. et al. OPENCV - OPEN SOURCE COMPUTER VISION LIBRARY(Intel Corporation, EUA, Org.). User Support. Disponível em: `http://docs.opencv.org/3.0-beta/opencv2refman.pdf/`.

[6] GONZALEZ, R.C.; WOODS, R.E. Processamento de Imagens Digitais. 1. ed: Blucher, 2000, v. 1.

[7] PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W.R. Análise de imagens digitais. 1. ed. [S.l.]: Thomson, 2008, v.1.

[8] BRIGGS, W.L.; HENSON, V.E. The DFT: An Owners' Manual for the Discrete Fourier Transform. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.

[9] BARBOSA, J.P.N.; SACHT, L.K. Fourier domain antialiasing recovery: `http://http://mtm.ufsc.br/~leo/aarFourier`

Método das Diferenças Finitas para a Equação da Onda Unidimensional

Renan Oclides Domingues *
Bacharelado em Engenharia Química - UFPR
renan.oclides@hotmail.com

Prof. Abel Soares Siqueira (Orientador)
abel.s.siqueira@gmail.com
Departamento de Matemática - UFPR

Prof. Roberto Ribeiro Santos Junior (Coorientador)
robertoufs@gmail.com
Departamento de Matemática - UFPR

Setembro de 2017

Palavras-chave: Equação da Onda, Método das Diferenças Finitas, Equações Diferenciais Parciais.

Resumo:

As Equações Diferenciais Parciais (EDP's) relacionam derivadas de funções de duas ou mais variáveis. Uma de suas principais aplicações é na descrição de fenômenos ou comportamentos em função de diferentes taxas de variações físicas, como a posição e o tempo [1].

O fenômeno de estudo nesse trabalho é a propagação de uma onda unidimensional, que pode ser descrita pela mais simples equação da onda

$$\begin{aligned} &u_t + \alpha u_x = 0, \qquad t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x). \end{aligned}$$

Essa equação é uma EDP hiperbólica linear de primeira ordem, com velocidade $\alpha \in \mathbb{R}$ constante. Se conhecida a forma inicial $u(x,0)$ da onda [2], a solução do problema é

$$u(x,t) = u_0(x - \alpha t).$$

A solução indica que a onda mantém a forma da condição inicial enquanto viaja com velocidade α em uma única direção, conforme ilustrado na Figura 1.

*Bolsista do PICME

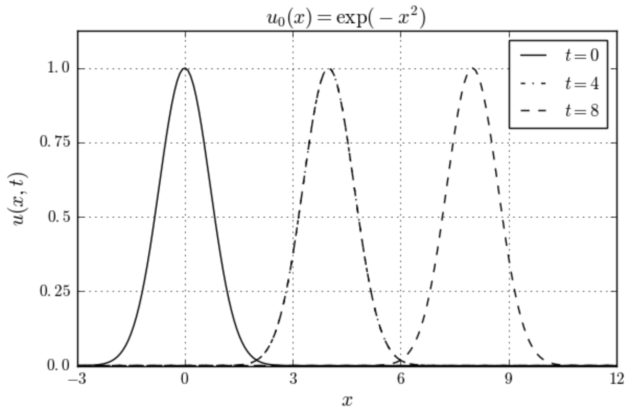


Figura 1: Solução de um exemplo de equação da onda unidimensional.

Uma forma de resolver EDP's numericamente é substituir as derivadas das funções por esquemas de diferenças, deduzidos a partir de expansões de Taylor da função [3]. Essa estratégia caracteriza o *Método das Diferenças Finitas* (MDF), que foi a técnica estudada nesse trabalho.

Foram demonstrados e implementados alguns dos mais conhecidos esquemas de diferenças finitas para a equação da onda unidimensional, incluindo o Up-wind, o Lax-Friedrichs, o Lax-Wendroff e o Leap-frog de quarta ordem. A implementação dos problemas foi feita na linguagem Julia [4] em pacote de código aberto [5], com exemplos gráficos para melhor visualização da propagação das ondas.

Nos exemplos gráficos para os esquemas Up-wind e Lax-Wendroff foi observada (Figuras 2 e 3) perda de energia característica de fenômenos difusivos e dispersivos, o que não se verifica na solução exata. Isso é explicado analisando o resto de Taylor dos esquemas de diferenças finitas, que revela operadores difusivos e dispersivos numéricos resultantes do truncamento da série de Taylor da função. Foram estudadas também a consistência e a estabilidade das fórmulas de diferenças usadas, que definem as condições de convergência do método [6].

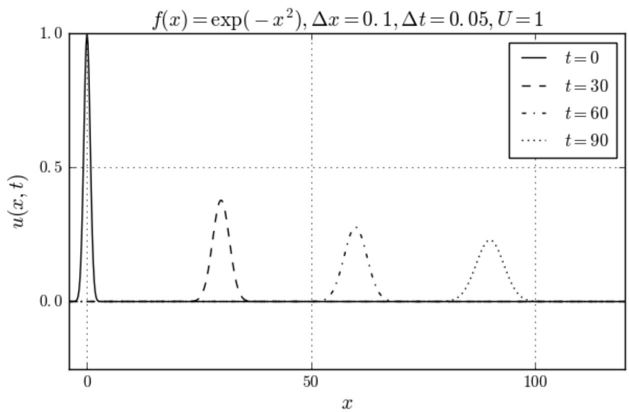


Figura 2: Difusão numérica no esquema Up-wind.

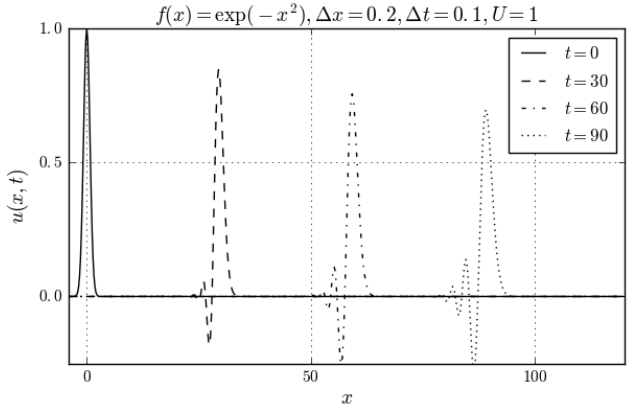


Figura 3: Dispersão numérica no esquema Lax-Wendroff.

Referências:

[1] PULINO, P. **Método das Diferenças Finitas - Aspéctos Teóricos, Computacionais e Aplicações**. Jul. 2008. URL:http://www.ime.unicamp.br/~pulino/MDF_AsTeCA/Textos2008/. Acesso em: 14 set. 2017.

[2] NACHBIN, A.; TABAK, E. **Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais**. URL:w3.impa.br/~nachbin/AndreNachbin/Courses_files/IMPA_EDPNum.pdf. Acesso em: 14 set. 2017.

[3] STRIKWERDA, J. C. **Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations**. 2a ed. SIAM, 2004.

[4] **The Julia Language.** URL:http://julialang.org/.

[5] URL:https://github.com/RenanOD/mdf.jl.

[6] TREFETHEN, L. N. **Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations.** 1996. URL:people.maths.ox.ac.uk/trefethen/pdetext.html. Acesso em: 14 set. 2017.

Educação Matemática

Banca Avaliadora:

Prof. Elenilton Vieira Godoy
Profa.Elisângela de Campos
Prof. Willian Valverde
Profa. Fernanda Hillman Furlan
Prof. Enderson Lopes Guimarães
Prof. Leônia Gabardo Negrelli
Prof. Bruno Augusto Teilor
Profa. Flávia Dias Ribeiro
Profa. Larissa Kovalski
Profa. Camille Botke

Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI) e Olimpíada Paranaense de Matemática (OPRM): contribuindo para a difusão do conhecimento matemático para alunos de ensino fundamental e médio

Bianca Elena Wiltuschnig*, Eduardo Magalhães de Castro*, Gabriel Felipe Dalla Stella*, João Antonio Francisconi Lubanco Thomé*,Letícia Ferreira Gomes*, Luiz Henrique Lara dos Santos*, Marcel Thadeu de Abreu e Souza*, Matheus Daniel Galvão de Melo*, Vitor Emanuel Gulisz *

Matemática - UFPR

petmatufpr@gmail.com

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

zeca77@gmail.com

Palavras-chave: Matemática; Olimpíadas de Matemática.

Resumo

Com o intuito de oferecer um treinamento de qualidade para os estudantes de Curitiba e Região Metropolitana que desejam participar de Olimpíadas Matemáticas em geral, alguns professores do Departamento de Matemática da UFPR iniciaram em 2016 um polo de treinamento olímpico nos mesmos moldes de outros polos que já funcionam em outras localidades brasileiras. Esta iniciativa é apoiada pela SBM – Sociedade Brasileira de Matemática e pelo IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada. As aulas ocorrem aos sábados pela manhã e os alunos são divididos em 3 níveis Nível 1: 6o e 7o anos, Nível 2: 8o e 9o anos e Nível 3: Ensino Médio. O material didático é fornecido pelo IMPA e pela OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática e pode ser acessado via internet livremente por qualquer aluno. Qualquer aluno da rede pública ou privada pode participar do POTI, sendo que as inscrições são online. O material a ser trabalhado é dividido em disciplinas adequadas em cada nível e o polo conta com a participação de 20 professores voluntários, entre eles, alunos

*Bolsistas do Programa PET-Matemática.

do PET-Matemática, alunos e ex-alunos do Curso de Matemática (atuais professores de Ensino Fundamental). Esta atividade é registrada no SIGEU como curso de extensão e conta horas formativas para todos os estudantes de graduação envolvidos. Os alunos que recebem o treinamento participam periodicamente de simulados a fim de verificar seus conhecimentos e mensurar de maneira mais efetiva o conhecimento matemático que estão retendo. A OPRM é uma competição matemática organizada e concebida por docentes do Departamento de Matemática e visa incentivar e estimular os estudantes paranaenses ao estudo da Matemática através de problemas desafiadores e instigantes, promovendo uma integração bastante saudável da UFPR (através do Departamento de Matemática) com a Escola Básica. O POTI impacta de maneira muito profunda a dinâmica da participação dos estudantes na OPRM, uma vez que permite que o conteúdo explorado neste tipo de competição fique mais próximo do cotidiano do estudante. A OPRM teve sua 1a edição em 2016 e está este ano em sua 2a edição, com inscrições de quase 4000 alunos de todo o Estado do Paraná. Estes projetos são coordenados pelos Professores Diego Otero e José Carlos Eidam, do DMAT-UFPR.

Brincando de Matemático e Um Dia na Matemática: a experiência do PET Matemática na divulgação do conhecimento científico e do ambiente acadêmico para alunos do ensino médio

Bianca Elena Wiltuschnig*, Eduardo Magalhães de Castro*, Gabriel Felipe Dalla Stella*, João Antonio Francisconi Lubanco Thomé*,Letícia Ferreira Gomes*, Luiz Henrique Lara dos Santos*, Marcel Thadeu de Abreu e Souza*, Matheus Daniel Galvão de Melo*, Vitor Emanuel Gulisz *
Matemática - UFPR
petmatufpr@gmail.com

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
zeca77@gmail.com

Palavras-chave: Brincando de matemático, Extensão universitária, Divulgação científica.

Resumo

O "Brincando de matemático"é uma das atividades de extensão desenvolvidas pelo PET-Matemática desde 2005. O objetivo da atividade é desenvolver junto aos alunos um tema matemático que possa enriquecer sua formação matemática e ao mesmo tempo propiciar-lhe um contato direto com o ambiente acadêmico. A atividade consiste em um conjunto de aulas oferecidas durante quatro dias no mês de julho, no período de férias dos estudantes. As aulas são elaboradas pelos petianos bem como o material didático utilizado na atividade, o qual consiste de apostila e outros materiais necessários para o desenvolvimento do tema. O material passa por uma cuidadosa revisão de uma equipe formada por alunos e pelo tutor do grupo. Também é oferecido um lanche aos alunos participantes, visando proporcionar aos participantes uma maior convivência dentro do espaço da Universidade. O "Brincando de matemático"constitui-se em uma experiência especial tanto para o PET quanto para os alunos atendidos, já

*Bolsistas do Programa PET-Matemática.

que proporciona um ambiente adequado para o desenvolvimento daqueles que apresentam um interesse maior ao mesmo tempo em que divulga ideias matemáticas sofisticadas em uma linguagem mais acessível. Esta atividade aumentou a visibilidade do curso de Matemática entre os alunos dos estabelecimentos do Ensino Médio de Curitiba e Região Metropolitana. A experiência do grupo nessa atividade nos inspirou a buscar alunos do ensino médio para um novo projeto de divulgação do curso de Matemática, intitulado “Um dia na Matemática”. Este evento de extensão, cuja primeira edição ocorreu em 2016 - uma semana antes do início das inscrições para o vestibular da UFPR - consiste em um ciclo de palestras e visitas guiadas oferecidas por professores do Departamento de Matemática e petianos, com o intuito de oferecer aos estudantes do 3º ano do Ensino Médio uma oportunidade de ”imersão universitária”. Nosso intuito é que o aluno que tenha interesse em Matemática possa conhecer melhor o ambiente acadêmico da UFPR, especialmente o âmbito do curso de Matemática. Após a realização deste evento, pudemos perceber um sensível aumento na procura pelo Curso de Matemática no vestibular da UFPR. Sendo assim, percebemos que estas são atividades que incentivam o estudante secundarista a conhecer melhor o que a UFPR tem a oferecer e, portanto, ajudam a Universidade a cumprir melhor seu papel de difusora de conhecimento.

POTENCIALIDADE DA ROBÓTICA EDUCACIONAL PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

Adriano Aparecido da Silva[1] e Amanda Ferreira Procek[2]
Licenciatura em Matemática – UFPR
(1)adriano.silva@ufpr.br e (2)amandaferreiraprocek@hotmail.com

Thadeu Angelo Miqueletto
Colégio Estadual Padre Claudio Morelli
thadeumiqueletto@gmail.com

Prof. Dr. Anderson Roges Teixeira Góes
Departamento de Expressão Gráfica – UFPR
artgoes@ufpr.br

Palavras-chave: Construcionismo; *Flipped Classroom*; Robótica Educacional.

Resumo:

Este texto apresenta um projeto piloto no de desenvolvimento de metodologias e atividades que visam à implantação da robótica educacional, como disciplina curricular em turmas regulares do ensino fundamental e ensino médio, proporcionando a construção de conhecimentos das diversas áreas de maneira lúdica e com a rigorosidade acadêmico-científica.

Para isto foram selecionados oito estudantes do 9º ano do ensino fundamental e do 1º ano do ensino médio do Colégio Estadual Padre Cláudio Morelli para abordar conceitos escolares e científicos por meio da utilização e/ou manuseio (construção e programação) de robô. Tal projeto é desenvolvido no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação á Docência (PIBID) – subprojeto Matemática 3, ano letivo de 2017, e a metodologia utilizada tem sua fundamentação nos estudos do Construcionismo, que segundo Seymour Papert, criador da linguagem de programação LOGO, é fundamental para que o estudante consiga resolver problemas.

De fato,

> “A experiência com a programação faz com que as crianças aprendam a solucionar seus problemas analisando a programação de forma seccionada. A cada etapa da programação é possível avaliar o que está correto e, também, os erros, e a partir disso encontrar a solução. Assim o estudante compreende que um problema complexo pode se tornar em vários problemas simples, subdividindo-o”. (PAPERT, 1985.)

Também é utilizada a *Flipped Classroom* (do inglês, Sala de Aula Invertida), de modo experimental. Segundo Jonathan Bergman (2012), esta metodologia tem o objetivo de tornar as aulas mais dinâmicas e com menos tempo dispensados a narração do professor. Para isto são propostos estudos anteriores às aulas, ou seja, materiais disponibilizados pelos docentes em ambiente virtuais em que os estudantes fazem parte. Por meio dos grupos de e-mails os estudantes visualizam os materiais disponíveis fazendo as anotações necessárias para serem apresentadas na sala da aula durante a prática, onde o professor dispensa maior tempo para experimentação e compreensão dos conceitos, do que explicando um

Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência – PIBID/UFPR – Apoio: CAPES.
[1]Acadêmico de Licenciatura em Matemática – UFPR.
[2]Academica de Licenciatura em Matemática – UFPR.

conteúdo. Desta forma a proposta de inserir a robótica educacional neste viés, proporciona estudos que tornam o professor o mediador do conhecimento, estabelecendo relações interdisciplinares por meio da experimentação do computador.

Os estudantes selecionados para este projeto piloto fazem parte da primeira turma de “Robótica Educacional Curricular” da rede estadual de ensino do Estado do Paraná, formada por 25 estudantes, no qual oito desses estudantes fazem parte das práticas educacionais com robótica. Os demais estudantes estão inseridos no projeto de competição formando equipe de robótica separada para campeonatos e torneios de robótica. Essa separação se deu através de um torneio interno na turma, a fim de que ambas aprendam conceitos diferenciados por metodologias e compartilhem as experiências entre si. Na sequência é apresentada a prática que tem sido desenvolvida, no qual se refere, as suas etapas e objetivos.

O objetivo principal é abordar e aplicar conceitos de Matemática e compreender sua relação com as demais áreas do conhecimento. Para isto, desenvolvemos um trabalho de conceitos formais de Geometria, inicialmente, propriedades dos Triângulos, sem ignorar o exercício do trabalho em equipe e o desenvolvimento de valores humanos. O essencial é desenvolver nos estudantes a aspiração pelo aprendizado da Ciência, em especial a nutrição da vontade de aprender Matemática.

Num primeiro momento foi apresentado aos estudantes o circuito proposto por (Correa et al., 2015) (FIGURA 01), e o problema a ser resolvido é percorrer o percurso sem a utilização de sensores na programação. Inicialmente, os estudantes separaram-se em duas equipes, de modo que, cada equipe deveria concluir o circuito, utilizando seus conhecimentos prévios de Geometria, e até mesmo erro e tentativa. Com isso, verificamos as dificuldades dos estudantes com alguns conceitos e propriedades da Matemática.

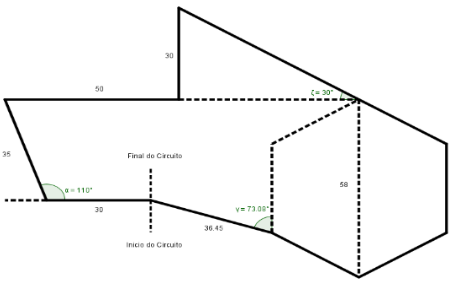


Figura 01 – Pista antes da adaptação
Fonte: Correa et al., 2015.

A utilização do “erro e tentativa” foi fundamental para mostrar em qual parte do circuito o estudante não consegue se desenvolver pela falta de compreensão de conceitos matemáticos.

Com essa atividade, diante das dificuldades dos estudantes elaboramos subproblemas compostos de circuitos fechados e alguns elementos que dão suporte para percorrer este circuito, sem utilizar o circuito para testar se a programação está correta, sem “tentativa e erros”, ou seja, os estudantes deveriam construir um plano de conclusão do circuito, com os dados da figura para que não houvesse erros no percurso. Toda a programação foi realizada pelos estudantes, utilizando-se de regra de três para determinar as medidas e movimentações.

Como forma de ilustração, a Figura 02a, apresenta os elementos ângulo reto e ângulo de 30º. Com a finalidade de desafiar os estudantes a pensar em possibilidades de programação, o teste realizado tanto no ângulo reto como no ângulo de 30º possuem pontuação ou penalidade. Analisando a Figura 02b, que consiste em circuito fechado (triângulo equilátero), é evidente que testar a programação e os movimentos do robô em um ângulo de 30º agiliza o processo de resolução da atividade.

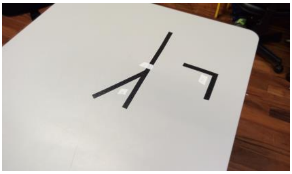
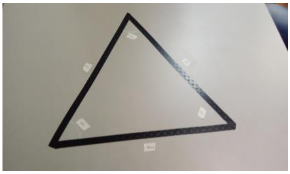
(a)  (b) 

Figura 02 – (a) Elementos teste; (b) Circuito Triângulo Equilátero.**Fonte:** Os autores.

No entanto, procurando verificar se os estudantes possuem conhecimentos matemáticos como proporcionalidade, testar a programação diretamente na opção que dará a resposta imediata produz uma penalidade na execução da atividade. Com isso, os estudantes deveriam realizar a atividade com o ângulo de 90º e, na sequência, por meio de proporcionalidade, determinar os cálculos matemáticos e de programação para realizar a atividade no circuito que possui apenas ângulos de 60º.

As demais etapas estão sendo desenvolvidas e aplicadas, no entanto, é possível verificar uma postura mais confiante por parte dos estudantes quanto aos conteúdos dessas disciplinas e, portanto, melhores resultados nas atividades. Além disto, já visualizamos a expansão do projeto para as matérias curriculares de diversas turmas do colégio.

Para os acadêmicos, esse trabalho esta sendo muito importante, pois esta ajudando os mesmos a aprenderem a trabalhar com novas metodologias e com novas formas de abordagem de um conteúdo ou conceito, e ainda esta incentivando os acadêmicos a pesquisarem mais a fim de possibilitar a criação de um material para abordar essa ferramenta, envolvendo conceitos matemáticos e robótica no ensino e aprendizagem da Matemática, no ensino regular.

Referências:

BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aaron. **Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day**. Washington, DC: International Society for Technology in Education. 2012.

CORRÊA, Renata Naoko; MACHADO, Jonathan Corrêa; GÓES, Anderson Roges Teixeira; LUZ, Adriana Benigno dos Santos. **O Ensino-aprendizado da Matemática por meio da robótica educacional**. EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2015.

PAPERT, Seymour. **LOGO: computadores e Educação.** 2ªEdição. São Paulo: Brasiliense, 1985.

Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência – PIBID/UFPR – Apoio: CAPES.
[1]Acadêmico de Licenciatura em Matemática – UFPR.
[2]Academica de Licenciatura em Matemática – UFPR.

Um Estudo do Processo de Transposição Didática do Conjunto dos Números Inteiros: Do saber sábio ao saber a ser ensinado.

Aline de Fátima Cagorni
Licenciatura em Matemática – UFPR
aline_cagorni@yahoo.com.br

Prof.ª Drª Elisângela de Campos (Orientadora)
Departamento de Matemática – UFPR
eliscamposmat@gmail.com

Palavras-chave: Transposição Didática, Números Inteiros.

Resumo:

Durante minha vivência nas disciplinas de estágios obrigatórios e participação no Projeto Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência (PIBID), por várias vezes me deparei com alunos que sentiam grandes dificuldades em realizar operações elementares com Números Inteiros. Uma das justificativas para a execução desse Trabalho de Conclusão de Curso decorre das minhas necessidades de encontrar propostas didáticas que tratem o ensino dos Números Inteiros e suas operações, com uma linguagem adequada, sem perca de significados matemáticos e que estabeleçam conexões com a Álgebra ensinada no Curso de Licenciatura em Matemática.

Pode-se ainda justificar esse estudo, o fato de que as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE) de Matemática do Estado do Paraná menciona conceitos que devem ser ensinados no Ensino Fundamental em relação ao Conjunto dos Inteiros, como por exemplo: *(...) os conceitos da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números pertencentes aos conjuntos dos naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais e suas propriedades.* (Paraná, 2008).

Ao fazer uso das concepções da Transposição Didática do ponto de vista de Yves Chevallard podemos perceber que o mesmo considera que o saber sofre transformações e ainda não pode ser estático. Segundo Chevallard, o processo de transformação do saber passa por três etapas fundamentais para que a transposição do conteúdo ocorra. As etapas são denominadas por: *saber sábio*, *saber a ser ensinado* e *saber ensinado.* Cada uma dessas etapas do saber possui grupos sociais específicos com objetivos diferentes, mas todos com o intuito de divulgar o conhecimento.

O *saber sábio* é original da comunidade científica e está vinculado ao seu criador ou ao seu grupo de estudo, este não é o mesmo saber que é estudado no ambiente escolar, pois para Chevallard o nível de abstração e complexidade é muito alto e possui características próprias dos seus criadores. O *saber a ser ensinado* é notado em propostas curriculares e pedagógicas, na produção de materiais didáticos e de apoio aos professores, é representado por integrantes do sistema de ensino. Para que o *saber a ser ensinado* seja divulgado, antes é necessário que o saber passe

por uma transformação ainda no ambiente acadêmico, tais transformações implicam em adaptação de vocabulário e linguagem de acordo com a necessidade da comunidade escolar. Essas transformações não podem fazer com que o saber perca sua originalidade e sentido, este é o processo onde se torna visível à Transposição Didática, pois nesta etapa ocorre a transformação do *saber sábio* para o *saber a ser ensinado. O saber ensinado* tem sua representação pela comunidade escolar e é o resultado da Transposição Didática interna que os professores fazem por meio de suas práticas pedagógicas, este saber sofre por adaptações cabíveis aos estudantes. Este processo que transforma o objeto a ser ensinado em um objeto de ensino é denominado como Transposição Didática, e nesse processo existem três elementos essenciais e atuantes, professores, estudantes e *saber ensinado*, cada um com sua relevância no processo de articulação da transformação do saber.

Assim, para tentar encontrar a transposição da estrutura algébrica do Conjunto dos Inteiros, decidi juntamente com minha orientadora analisar livros didáticos, com a intenção de averiguar as possibilidades de uma linguagem adequada, aplicações do conteúdo em situações-problemas que tragam significados aos alunos além comparar e estabelecer conexões entre as propriedades do Conjunto dos Inteiros presentes no livro acadêmico e nos livros didáticos utilizados em salas de aula do Ensino Fundamental.

Nesse processo de análise, trataremos a transposição do conteúdo escolhido até o *saber a ser ensinado.* O *saber sábio* será representado neste trabalho pelo livro de Introdução à Álgebra de Adilson Gonçalves que é o mais utilizado por professores que lecionam a disciplina de Teoria de Anéis no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná, já o *saber a ser ensinado*, será caracterizado por livros didáticos de diferentes coleções, tais livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2016.

Com esta análise, busco averiguar as possibilidades de uma linguagem adequada, aplicações do conteúdo em situações-problemas que tragam significados aos alunos, comparar e estabelecer conexões entre as propriedades do Conjunto dos Inteiros presentes no livro acadêmico utilizado pelos professores de Álgebra e os livros didáticos utilizados em salas de aula do Ensino Fundamental.

Como o trabalho ainda está em andamento, até o momento foi feita a análise de uma coleção de livros didáticos, “A conquista da Matemática” de Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci, onde os autores começam a falar de Números Inteiros como um conjunto, no livro do 7º ano do Ensino Fundamental, nesta primeira coleção, já foi possível reconhecer várias propriedades de $\mathbb{Z}$ com uma linguagem adequada, exemplos numéricos, mas que preservam toda a estrutura algébrica do conjunto. Há também exercícios e exemplos onde é possível identificar a transposição do conteúdo se comparado com o livro de Álgebra. As demais conclusões serão descritas e categorizadas posteriormente após o encerramento das analises e finalização da escrita do trabalho.

Referências:

CAMARGO, Sérgio; JARDIM, Luciana de Moraes; ZIMER, Tania Teresinha Bruns. Transposição Didática no Ensino de Ciências: Diferentes olhares.

GIOVANNI,José Ruy.GIOVANNI JR,José Ruy. CASTRUCCI,Benedicto. **A conquista da Matemática.** São Paulo: FTD (2015).

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 2003.

MATOS FILHO, Maurício A. Saraiva; MENEZES, Josinalva Estácio; SILVA, Ronald de Santana da; QUEIROZ, Simone Moura. A Transposição Didática em Chevallard: As deformações/transformações sofridas pelo conceito de função em sala de aula.

PARANÁ, 2008. Diretrizes Curriculares da Educação (DCE) Matemática, p.51.

Matematiza

Amanda da Rocha Ribeiro; Daiane Chitko de Souza; Danielle Maceno da Silva; Isabella Silva Bellantuono; Laiane Crystina Sgoda; Michelly Dela Vedova Costa; Yasmim Adara Amorim.
Licenciatura em Matemática – UFPR
amandarribeiro@yahoo.com.br; daianechitko@gmail.com; daniellemaceno11@hotmail.com; isabellantuono@gmail.com; laianesgoda@gmail.com; michelly.vedova@gmail.com; yasmim.amorim@ufpr.br

Prof. Elisangela Campos
Departamento de matemática – UFPR
eliscamposmat@gmail.com

Palavras-chaves: formação de professores; produto notável; números figurados.

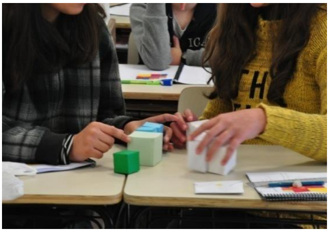
Resumo:

O subprojeto 1 do PIBID Matemática desenvolve várias atividades ligadas à rotina da escola e ao fazer docente. Não tínhamos ainda realizado uma atividade para alunos fora do ambiente escolar. Surgiu então a ideia de um evento que levasse os alunos da escola para a universidade, em que eles pudessem conhecer a UFPR e estudar Matemática além dos conteúdos apresentados na escola. Desta forma foi organizado o I Matematiza, um minicurso para alunos do 8º e 9º anos que foi realizada nos dias 20 e 21 de julho de 2017. Como o objetivo do minicurso era trabalhar com a matemática escolar, mas de uma forma que usasse conceitos que poderiam parecer desvinculados à primeira vista e ao mesmo tempo pudessem ir além dos conteúdos vistos na escola, optamos por um conteúdo que interligasse várias áreas da Matemática. Depois de muitas sugestões e discussões de como tirar os conteúdos das “caixinhas”, decidimos abordar os números figurados e os produtos notáveis relacionando-os com o triângulo de Pascal.

Considerando que queríamos prender a atenção dos alunos e que estávamos em plenas férias escolares, não poderíamos trabalhar de forma que, em geral, os conteúdos são apresentados na escola. Precisávamos também de uma metodologia de ensino diversificada. Desta forma optamos por trabalhar com a resolução de problemas, investigação matemática e utilização de material concreto. Elaboramos um material didático contendo definições, demonstrações, exemplos e propostas de problemas para que os alunos utilizassem como referência durante e após o evento. No primeiro capítulo fizemos uma breve revisão de polinômios e produtos notáveis, com exercícios que utilizavam materiais concretos, confeccionados pelos pibidianos[1]. Depois relacionamos os coeficientes dos polinômios, obtidos pelos produtos notáveis, com o Triângulo de Pascal. O segundo capítulo, sobre Números

[1] Alunos bolsistas do PIBID.

Figurados, começou com uma introdução histórica e foram tratados os números triangulares, quadrados e mencionados os números pentagonais, hexagonais e heptagonais. E por fim, o capítulo sobre o Triângulo de Pascal, que contém curiosidades sobre sua história, construção, propriedades e aplicações. Este capítulo não foi apresentado durante o Matematiza. Decidimos colocá-lo no material didático apenas como estudo complementar.



Participantes do Matematiza trabalhando com os materiais concretos. Fonte: Os autores.

As inscrições foram feitas pelo site do PIBID e pela página do PIBID Matemática 1 no Facebook. Disponibilizamos 70 vagas para o I Matematiza, das quais foram preenchidas 50. Devido ao número de inscritos dividimos os estudantes em duas turmas, pois entendemos que dessa forma conseguiríamos conhecer melhor a turma e atender suas dificuldades, resultando em um melhor entendimento dos conteúdos abordados. Com objetivo de todos os integrantes do PIBID lecionarem, nos dividimos em dois grupos. Cada um ficou responsável por desenvolver um conteúdo, ou seja, cada um lecionou em um dia da oficina, quem não estava em sala ficou encarregado da organização geral do evento, inclusive em preparar o lanche servido no intervalo.

Ao iniciarmos o evento percebemos que os participantes estavam acanhados no ambiente em que se encontravam. Nesse momento, os pibidianos se sentiram inseguros quanto à compreensão geral da turma, pois estavam preocupados em explicar tudo corretamente e se os alunos teriam os conhecimentos prévios que julgávamos necessários para a compreensão das atividades. No decorrer das atividades planejadas, passávamos entre as carteiras para observar o desenvolvimento dos alunos, e estes começaram a solicitar auxílio individual. Após uma atividade em grupo os estudantes começaram a participar mais da aula e interagir entre si e essa integração permaneceu no segundo dia.

Ao final do I Matematiza os participantes responderam um questionário de opinião sobre diversos aspectos da oficina como a organização e os conteúdos abordados. A devolutiva por parte dos participantes foi, em grande maioria, positiva de modo que alguns lamentaram por estarem no 9º ano e no próximo ano não poderem participar novamente.

De maneira geral tivemos dificuldades em organizar a oficina, devido à falta de experiência em realizar eventos. A maior delas foi definir o tema, com assuntos que se conectassem, e como abordá-lo a fim de atender às expectativas dos alunos. Por outro lado, o processo de planejar a oficina aumentou a interação do grupo

PIBID. Um outro ponto que avaliamos foi quanto a divulgação do evento. Deveremos na próxima edição começar a divulgação com mais antecedência e repetir os meios utilizados para esta, ou seja, rádio, TV e *Facebook*, além de convidarmos pessoalmente algumas escolas. Devido à nossa inexperiência ficamos incertos quanto ao desenvolvimento e resultado do minicurso. Entretanto, o *feedback* dos alunos, coletados no questionário, foi positivo e a maioria afirmou que participaria novamente em outra edição. Nossa principal aprendizagem foi a necessidade de planejar, organizar e estudar com antecedência a fim de evitar a insegurança quanto ao domínio dos conteúdos e aos imprevistos.

Momentos do 1º e 2º dias de evento. Fonte: Os autores

Referências:

CHICONELLO, Luis Alexandre. **Números Figurados e as Sequências Recursivas: uma atividade didática envolvendo números triangulares e quadrados.** 2013. 86f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) - Universidade Federal de São Carlos, Araras, 2013.

MENDES, I. A**. Matemática e investigação em sala de aula - tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. São Paulo: Livraria da física, 2009.

JESUS, P. C. F; SANTOS, T. O. **Produtos Notáveis**. Programa de Iniciação a Docência em Matemática (PIBID - MAT). Universidade Estadual de Maringá. 2010.

SILVA, Salatiel Dias da. **Estudo do Binômio de Newton**. João Pessoa, 2013.

A PRESENÇA DA EXPRESSÃO GRÁFICA NAS COMUNICAÇÕES DO XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Amanda Ferreira Procek
Licenciatura em Matemática – UFPR
amandaferreiraprocek@hotmail.com

Prof. Dr. Anderson Roges Teixeira Góes
Departamento de Expressão Gráfica – UFPR
artgoes@ufpr.br

Palavras-chave: Expressão Gráfica; ENEM; Análise de comunicações.

Resumo:

Este trabalho apresenta a análise desenvolvida no âmbito Programa de Iniciação Científica (PIBIC) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) com a finalidade de verificar como os elementos da Expressão Gráfica e o termo "Expressão Gráfica" aparecem nas comunicações do XII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM).

O entendimento, do presente trabalho, sobre Expressão Gráfica está fundamentando no trabalho de Góes (2013) que propôs um esboço de conceituação deste campo quanto aos elementos que o compõe

> Expressão Gráfica é um campo de estudos que utiliza elementos de desenho, imagens, modelos, materiais manipuláveis e recursos computacionais aplicados às diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de apresentar, representar, exemplificar, aplicar, analisar, formalizar e visualizar conceitos. Dessa forma, a expressão gráfica pode auxiliar na solução de problemas, na transmissão de ideias, de concepções e de pontos de vista relacionados a tais conceitos. (GÓES, 2013, p. 20).

A autora apresenta uma metodologia baseada na Análise de Conteúdo de Laurence Bardin (1977), que fornece técnicas precisas para analisar textos e documentos em busca de informações que são difíceis de serem encontradas analisando apenas uma de suas características.

Para isto Góes (2013) criou 10 grupos com elementos em que os autores das 436 comunicações dos eventos Graphica (edições 2007, 2009 e 2011) entendem ser do campo Expressão Gráfica. Na Tabela 01, apresenta cada um dos grupos e a descrição conforme a análise de Góes (2013), bem como a quantidade de trabalhos em cada grupo.

Esses grupos foram criados de tal forma que cada comunicação analisada fosse categorizada em apenas um deles, para que assim pudessem ser descritas de forma sintética, a fim de apresentar as características do grupo.

Tendo essas considerações, procuramos identificar nas comunicações do XII Encontro Nacional de Educação Matemática, ocorrido no ano de 2016 na cidade de São Paulo/SP, elementos da Expressão Gráfica utilizados pelos autores. Assim, foram analisadas 90 comunicações, do eixo das comunicações científicas que continham 1020 comunicações. Tais artigos foram escolhidos de forma aleatória para análise.

TABELA 01: Grupos definidos por Góes (2013)

Grupo	Descrição	Quantidade
GRUPO I - Expressão Gráfica como disciplina curricular	Comunicações que retratam pesquisas teóricas relacionadas a disciplinas de Expressão Gráfica (Geometria, Desenho Geométrico, Geometria Descritiva e outros) como elas aparecem ou desaparecem do currículo tanto na Educação Básica como no Ensino Superior, bem como vem acontecendo o ensino dessas disciplinas.	16
GRUPO II - Concepções e metodologias de Expressão Gráfica	Comunicações que discorrem sobre concepções e metodologias relacionadas às disciplinas de Desenhos e correlatas.	38
GRUPO III - Tecnologias como apoio ao ensino de Expressão Gráfica	Comunicações que abordam a utilização de tecnologia como apoio no ensino de Desenho, Geometria Descritiva, Desenho Técnico, Desenho de Observação, Geometria, entre outras disciplinas. Dentre as tecnologias utilizadas tem-se, por exemplo: softwares CAD (ComputerAided Design, ou seja, Desenho Assistido por Computador), recursos audiovisuais, Impressoras 3D, ambientes virtuais, maquetes eletrônicas, internet, entre outras.	69
GRUPO IV - Expressão Gráfica na formação profissional	Comunicações que utilizam desenhos bidimensionais, maquetes e softwares na formação profissional, exceto na formação docente.	16
GRUPO V - Expressão Gráfica na formação docente	Comunicações que abordam o uso de, por exemplo, geometria plana, geometria espacial, software, desenho (gestual, geométrico) e modelos físicos na formação do professor por meio de atividades que podem ser realizadas também em sala de aula. Essas comunicações exploram atividades em curso de extensão ou disciplinas de licenciatura em Matemática, Artes e Expressão Gráfica.	5
GRUPO VI - Expressão Gráfica como recurso no processo de ensino e aprendizagem	Comunicações que abordam o uso de, por exemplo, modelos físicos, desenhos bidimensionais, softwares (modelagem, geometria dinâmica, e outros), imagens, dobraduras e outros recursos, para o ensino de conteúdos de diferentes áreas do conhecimento.	73
GRUPO VII - Aplicações Gráficas	Comunicações que aplicam a Expressão Gráfica para melhor compreensão e socialização de conhecimentos, tendências, artes, desenhos que fazem parte da constituição da identidade étnica de um povo e de marcas visuais.	54
GRUPO VIII - Análise Gráfica	Comunicações que analisam a Expressão Gráfica inserida em objetos de estudo como na comunicação, figuras/imagens bi e tridimensionais e suportes gráficos digitais.	91
GRUPO IX - Computação Gráfica como auxílio à Expressão Gráfica	Comunicações em que a computação gráfica é utilizada para auxiliar a compreensão e aplicações de técnicas da Expressão Gráfica.	50
GRUPO X - Pesquisa histórica de elementos da Expressão Gráfica	Comunicações que abordam a história antiga e/ou atual de elementos de Expressão Gráfica (geometria, desenhos, debuxo, croquis, perspectivas...), não relacionadas ao ensino.	23

FONTE: Os autores, adaptado de Góes (2013).

Na primeira etapa da pesquisa procuramos realizar o mesmo trabalho de Góes (2013): leitura do resumo, verificando indícios de elementos da Expressão Gráfica definidos pela autora; identificação de recortes que evidenciam a relação da comunicação com a Expressão Gráfica; e a atribuição do trabalho a um dos grupos definidos por Góes (2013).

Como forma de ilustração do trabalho realizado, Castro (2016) apresenta trabalhos que utilizam software de geometria dinâmica na formação docente. Essa comunicação pode ser categorizada no *Grupo V - Expressão Gráfica na formação docente,* definido por Góes (2013). Para verificação da categorização de tal comunicação é apresentada abaixo um recorte do mesmo,

> Assim, buscou-se conceber uma formação que extrapolasse o 'ensinar ao professor como o software GeoGebra funciona', focalizando também o desenvolvimento de esquemas de ação instrumentada, subsidiando o professor na realização de tarefas com o software. De modo geral, esperava-se que o professor fosse capaz de explorar situações em que o GeoGebra pudesse ser utilizado como mediador do processo de aprendizagem" (CASTRO, 2016, p. 06)

Das 90 comunicações analisadas, 20 utilizam de elementos da Expressão Gráfica em suas pesquisas e foram categorizadas nos grupos conforme Tabela 02.

TABELA 02: Categorização das comunicações o XII ENEM nos grupos definidos por Góes (2013)

Grupo	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Quantidade	0	1	4	2	3	9	0	0	0	1

FONTE: Os autores.

Em uma segunda etapa foi verificada se há a presença do termo "Expressão Gráfica" nas comunicações analisadas que continham elementos deste campo de estudos. No entanto, nenhuma dessas pesquisas fez menção a tal termo.

Com isso, há duas considerações a serem realizadas. A primeira refere-se que não são todos os grupos definidos por Góes (2013) que são abordados no campo de Educação Matemática, uma vez que os trabalhos se evidenciam no processo de ensino-aprendizagem e formação docente. Quanto à segunda observação, está relacionada ao fato do não conhecimento do campo de estudos Expressão Gráfica, apesar de ser inato ao ser humano, visto que a criança utiliza do desenho como primeira forma de registro de suas ideias (VYGOTSKY, 1984), ou seja, pode ser considerado como algo internalizado pelos pesquisadores ou utilizado sem conhecimento de fundamentações e nomenclaturas que remetem a tal campo de estudos.

Referências:

CASTRO, Anna Luisa de. A Formação de Professores de Matemática para uso das Tecnologias Digitais e o Currículo da Era Digital *In: XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática.* São Paulo, 2016.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo.** Edições 70, LDA. Lisboa/Portugal, 1977.

GÓES, Heliza Colaço. **Um esboço de conceituação sobre Expressão Gráfica.** Revista Educação Gráfica. ISSN 2179-7374 - Ano 2013 - V.17 – N0. 01.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **A formação social da mente.** São Paulo, Martins Fontes, 1984.

Análise dos registros de representação semiótica e suas conversões em aulas de matemática de uma escola de período integral do Estado de São Paulo.

Deivison José Gouvêa[1]
Licenciatura em Matemática – UNIMEP
deivison-gouvea@outlook.com

Prof. Josemeri Aparecida Jamielniak (Orientador)
Faculdade de Engenharia Arquitetura e Urbanismo – UNIMEP
jajamiel@unimep.br

Palavras-chave: Estatística, números complexos, praticas pedagógicas, ensino-aprendizado, representação semiótica.

Resumo:

A situação do ensino-aprendizagem de Matemática no Brasil não é nada agradável. Em 2016, encontramos nos principais jornais eletrônicos, manchetes como "Desempenho do ensino médio em matemática é o pior desde 2005", "Brasil é um dos dez piores em rendimento escolar, aponta ranking internacional", o péssimo desempenho dos alunos nas áreas de exatas está fortemente relacionado à linguagem matemática que, diferente das outras disciplinas, não possui objetos físicos manipuláveis, só há acesso a objetos matemáticos por meio de suas representações e, muitas vezes, há uma grande variedade possível para serem utilizadas (língua natural, gráficos, linguagem algébrica, figuras geométricas, entre outras) (DUVAL, 2003), fazendo com que a linguagem científica utilizada tenha características próprias e sua aprendizagem pode até ser comparada à de uma língua diferente da materna (SUTTON, 1997; LEMKE, 1997 apud NUÑEZ et al, 2009; LEMKE, 1998).

O uso dessas representações nos remete a representações semióticas de Peirce, que estuda os processos de formação do significado na mente. A semiótica de Peirce se denomina triádica, uma vez que o signo é formado, segundo ele, a partir de três elementos: *interpretante, objecto* e *representamem* (PEIRCE, 1995).

Duval destaca que o conhecimento dos signos matemáticos é necessário para a aprendizagem. As representações semióticas são representações que permitem uma "visão do objeto" através da percepção de estímulo (pontos, traços, caracteres, sons...), tendo valor de "significante" (DUVAL, 2009).

Martínez (2015) relatou que, de acordo com a análise dos processos de pensamento que ocorrem quando os alunos vão realizar uma atividade matemática, as principais dificuldades estão nos tipos de transformações: os tratamentos e as conversões.

Duval (2003) enuncia que para ser congruente, uma conversão deve satisfazer três condições: 1) correspondência semântica, ou correspondência uma a uma entre os elementos significantes: para cada elemento simples no registro de saída tem um

[1] Discente do curso de licenciatura em matemática.

elemento simples correspondente no registro de chegada. 2) unicidade semântica terminal: cada unidade significante no registro de saída tem uma única unidade significante no registro de chegada. 3) ordem que compõe cada uma das representações: diz respeito à forma de apresentação de cada uma das representações. Para o autor, quando uma destas três condições descritas acima não está satisfeita a conversão é não-congruente.

Com base nisso acompanhamos as aulas de Estatística e de Números Complexos de um docente em uma escola de período integral para verificar os tipos de representações semióticas utilizadas por ele durante as aulas, nas perguntas formuladas, nos exercícios e quais tipos de conversões entre essas representações são exigidas na solução, as dificuldades dos alunos frente a essas conversões e verificar a eficiência de uma atividade de intervenção, com alto nível de congruência semântica, que exigisse a realização da conversão de registro semiótico para outro.

Por fim verificamos que, durante as aulas o professor forneceu diferentes representações a um mesmo objeto, como por exemplo, amplitude que ele definiu como: 1) variação e 2) espaço que tem entre a menor da maior variação, números reais que ele definiu com 1) linguagem natural, 2) diagrama de Venn e 3) uma representação gráfica (reta real). Ao introduzir um novo símbolo o docente fez uso da representação triádica de Peirce, mostrando aos alunos o *objeto (⇔)*, o *representamem* (se e somente se) e o *interpretant* ao fazer uma relação com vitória/derrota em um jogo de futebol. Por fim verificamos que, na atividade de intervenção, embora ela tivesse um alto nível de congruência os alunos encontraram dificuldade na conversão de números complexos do registo algébrico para o registo gráfico, somente uma das 5 duplas que realizaram a atividade conseguiu converter corretamente mais de 50% dos números propostos, o que sinaliza a não compreensão do objeto matemático pois, para Duval (2003) a compreensão do objeto matemático está relacionada com a mobilização de ao menos dois registros de representação simultaneamente, ou com a possibilidade de trocar de registro a todo o momento e este fato não observado na realização da atividade.

Referências:

BRASIL É um dos dez piores em rendimento escolar, aponta ranking internacional. **Folha on-line**, São Paulo, 2016. Disponível em : <http://www1.folha.uol.com.br/educacao/2016/09/1811210-desempenho-do-ensino-medio-em-matematica-e-o-pior-desde-2005.shtml>. Acesso em 18/12/2016.

DESEMPENHO DE estudantes do ensino médio é menor que o de 20 anos atrás. **nominuto.com on-line**, 2016. Disponível em: <http://www.nominuto.com/noticias/educacao/desempenho-de-estudantes-do-ensino-medio-e-menor-que-o-de-20-anos-atras/146118/>. Acesso em 18/02/2017.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Machado, S. D. A. (org.). pp. 11-33. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, R. Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. **Coleção contextos da ciência** – fasículo1. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira . São Paulo: Livraria da física, 2009.

MARTÍNEZ, Z. E. M, Transformando las representaciones semióticas: un enfoque cognitivo en el estudio del álgebra. In: Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. **Anais.** Peru, 2015.

NÚÑEZ, I. B. , USHARA, F. M. G. ; PEREIRA, J.E. As representações semióticas nas provas de química no vestibular da UFRN: uma aproximação à linguagem científica no ensino das ciências naturais. In: Encontro nacional de pesquisa em educação em ciências VII ENPEC, 2009. **Anais**. ABRAPEC, Florianópolis, 2009.

PEIRCE, C. S. , **Semiótica**, 2ª ed. São Paulo: Perspectiva, 1995.

O ENSINO DE MATEMÁTICA NA ESCOLA ESTADUAL INDÍGENA ÍNDIA VANUÍRE

Douglas Lucindo Pereira Ghiotto
Licenciatura em Matemática – UniFAI
ghiotto.douglas@gmail.com

Prof. Dr. Vanessa Avansini Botta Pirani (Orientador)
Departamento de Matemática – FCT-UNESP
botta@fct.unesp.br

Palavras-chave: Escola indígena. Ensino de Matemática. Educação indígena.

Resumo:

O presente trabalho teve como intuito investigar as metodologias desenvolvidas para o ensino e aprendizagem de matemática na escola indígena, particularmente na Escola Estadual Indígena Índia Vanuíre. Visa investigar a existência ou a negação de uma proposta política nacional ou estadual, que norteia a escola pública indígena, dando base nos direitos educacionais e sua concordância com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 9394/96 (LDBEN). Tenta-se responder as seguintes questões: Existe uma concepção político-pedagógica nacional e ou estadual voltada à educação pública indígena? Qual a metodologia utilizada pelos professores de Matemática da escola indígena? Qual a sintonia utilizada na metodologia do ensino de Matemática com a política educacional indígena? Em um primeiro momento, foi realizado levantamentos bibliográficos em fontes impressas e virtuais sobre o referido tema, acesso a informações sistematizadas pelo museu histórico e pedagógico Índia Vanuíre, seguida de observações nas salas de aula da escola indígena. Logo depois aplicaram-se entrevistas aos professores, diretora, alunos e supervisora de ensino, com posterior análise de dados coletados e redação final do trabalho. Verificou-se que, apesar da escola indígena ser regida por um currículo diferenciado, o ensino de Matemática é realizado de uma forma comum, ou seja, da mesma forma que é aplicada na escola tradicional.

Referências:

ANDRADE, Leila, **Etnomatemática a matemática na cultura indígena**. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de ciências físicas e matemáticas, 2008. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96632/Leila_de_Andrade.pdf?sequence=1. Acessado em: 27/05/2016

GRUPIONI, Luís Donizete Benzi; SECCHI, Darci; GUARANI, Vilmar. **Legislação Escolar Indígena.** 2001. Do nacional ao local, do federal ao estadual: as leis e a Educação Escolar Indígena. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/vol4c.pdf. Acessado em: 27/08/2016.

HUBNER, Luciana. **Etnomatemática.** 2003. Disponível em: http://etnomatematica.org/articulos/boletin.pdf. Acessado em: 28/082016.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. Fundamentos de metodologia científica. 6. ed. 3. reimpr. São Paulo: Atlas, 2006.

CERVO, Amado; BERVIAN, Pedro. A. Metodologia científica. 4. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

USO DO ÁBACO NO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Eduarda de Almeida Gomes[1], Fernando Ney Saboia Gomes[2], Letícia Menegusso[3]
Licenciatura em Matemática – UFPR
(1)*eduarda09_almeida@hotmail.com,* (2)*fernandosaboia7@gmail.com,* (3)*leticiamenegusso@gmail.com*

Prof. Dr. Anderson Roges Teixeira Góes
Departamento de Expressão Gráfica – UFPR
artgoes@ufpr.br

Thadeu Angelo Miqueletto
Colégio Estadual Padre Claudio Morelli
thadeumiqueletto@gmail.com

Palavras-chave: Ábaco. Ensino-aprendizagem. Matemática. Expressão Gráfica.

RESUMO

Este resumo apresenta uma prática desenvolvida no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação á Docência (PIBID) – subprojeto Matemática 3, aplicada no ano letivo de 2016 aos alunos do 6° ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Padre Claudio Morelli. Nessa atividade utilizamos elementos da Expressão Gráfica, principalmente, os materiais manipuláveis.

> "um campo de estudo que utiliza elementos de desenho, imagens, modelos, materiais manipuláveis e recursos computacionais aplicados às diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de apresentar, representar, exemplificar, aplicar, analisar, formalizar e visualizar conceitos. Dessa forma, a expressão gráfica pode auxiliar na solução de problemas, na transmissão de ideias, de concepções e de pontos de vista relacionados a tais conceitos". (GÓES, 2013, p. 20).

Nesta atividade foram abordadas, essencialmente, as operações básicas dos números naturais através do uso do ábaco. Ainda que o principal objetivo foi fazer, por meio uso do ábaco, que os alunos pudessem visualizar os algoritmos envolvidos nas operações de soma, subtração, divisão e multiplicação. Esses conceitos foram selecionados, após observar que os alunos da Educação Básica possuíam dificuldades nos conceitos básicos, que além de necessário para o sexto ano, serão utilizados em todo Ensino Fundamental, Médio e em algumas áreas do Ensino Superior, fora a utilização no cotidiano. Mendes (2010) descreve o que o ábaco é capaz de proporcionar sala de aula:

> "Com seu uso diário em sala de aula e com a intervenção do professor; com os questionamentos aos estudantes será possível a consolidação do conhecimento do Sistema de Numeração Decimal. O estudante ao usar esse material buscará soluções para representar um número, uma quantidade e

fazer uma operação. Assim irá compreender as “regularidades do sistema". As regularidades aparecem como justificação das respostas e dos procedimentos utilizados pelas crianças ou como descobertas que tornam possível a generalização". (Lerner e Sadovsky, 1996)

Pelo descrito acima, percebe-se que o uso do ábaco deve ser diário, para que os alunos possam desenvolver seus conhecimentos com continuidade, sendo um material essencial para o processo de ensino-aprendizagem de operações com números naturais.

A atividade consiste em uma discussão da origem do sistema decimal, onde os próprios alunos foram instigados a criar um novo sistema numérico na sua turma: um sistema de base cinco e outro de base dez. Na sequência foi mostrado o porquê de usar o ábaco e explicado o manuseio do mesmo.

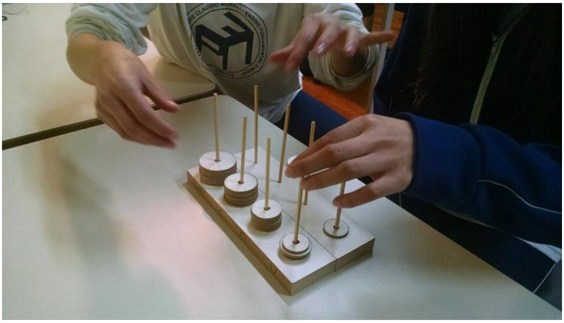


Figura 01: Alunos na execução da atividade
Fonte: Os Autores

Feito isto, os alunos foram colocados diante a uma lista de exercícios, um dos instrumentos de avaliação (o instrumento em forma de registro) da compreensão dos conceitos desenvolvidos.

Atividade com o auxilio do Ábaco

1) Represente os seguintes números:

a) 5 b) 10 c) 17 d) 80
e) 100 f) 129 g) 700 h) 888
i) 1000 j) 1010 k) 8526 l) 9009

2) Efetue os cálculos:

a) 237 + 98 =
b) 648 + 2334 =
c) 4040 + 404 =
d) 4620 + 1398 + 27 =
e) 3712 + 8109 + 105 + 79 =
f) 256 – 84 =
g) 2711 – 348 =
h) 1768 – 999 =
i) 5043 – 2584 =
j) 8724 – 6193 =

3) Resolva as operações abaixo:

a) 19x6=
b) 46x12=
c) 321x11=
d) 329x25=
e) 10x999=
f) 48000 : 100
g) 770 : 5
h) 5373 : 9
i) 7686 : 427
j) 707 : 7

4) Desafio: **I)** Um garoto completou 1.960 bolinhas de gude em sua coleção. Esse número é composto de

(A) 1 unidade de milhar, 9 dezenas e 6 unidades.
(B) 1 unidade de milhar, 9 centenas e 6 dezenas.
(C) 1 unidade de milhar, 60 unidades.
(D) 1 unidade de milhar, 90 unidades.

II) No ábaco abaixo, Cristina representou um número: Qual foi o número representado por Cristina?

(A) 1.314 (B) 4.131 (C) 10.314 (D) 1.301

III) A professora de João pediu para ele decompor um número e ele fez da seguinte forma:
4 x 1000 + 3 x 10 + 5 x 1
Qual foi o número pedido?

(A) 4035 (B) 4305 (C) 5034 (D) 5304

IV) Num pacote de balas contendo 10 unidades, o peso líquido é de 49 gramas. Em 5 pacotes teremos quantos gramas?

(A) 59 (B) 64 (C) 245 (D) 295

V) Uma merendeira preparou 558 pães que foram distribuídos igualmente em 18 cestas. Quantos pães foram colocados em cada cesta?

(A) 31 (B) 310 (C) 554 (D) 783

Figura 02: Questões
Fonte: Os Autores

O que se pode concluir com a aplicação da atividade é que os alunos possuíam mesmo déficit na aprendizagem das operações básicas, mas com o auxilio do ábaco foi possível que eles compreendessem os conceitos matemáticos envolvidos na atividade, uma vez que os materiais manipuláveis proporcionam aos alunos a prática com os conceitos abordados.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília/DF, 1997.

GÓES, H. C. **Um esboço de conceituação sobre Expressão Gráfica.** Revista Educação Gráfica, vol. 17, no. 1, Bauru/SP, 2013.

MENDES, Juliana. **O uso do ábaco para o desenvolvimento lógico.** Disponível em:<http://www.webartigos.com/artigos/o-uso-do-abaco-para-o-desenvolvimento-logico/53190/>. Acessado em : 11/07/2016 às 22:06:05.

Simulando um mercado – o ensino e aprendizado de números decimais

Eduarda de Almeida Gomes[1]; Amanda Ferreira Procek[2];
Licenciatura em Matemática – UFPR
eduarda09_almeida@hotmail.com; *amandaferreiraprocek@hotmail.com*

Thadeu Ângelo Miqueletto
Colégio Estadual Padre Claudio Morelli
thadeumiqueletto@gmail.com

Prof. Dr. Anderson Roges Teixeira Góes
Departamento de Expressão Gráfica – UFPR
artgoes@ufpr.br

Palavras-chave: Mercado. Ensino-aprendizagem. Matemática. Expressão Gráfica.

Resumo

Este trabalho apresenta uma prática realizada pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) – subprojeto Matemática 3 – aplicada no ano letivo de 2016 a duas turmas de 6° ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Padre Claudio Morelli. Tal prática foi desenvolvida em seis aulas de 45 minutos com aproximadamente 56 estudante, com o conteúdo de números decimais e foi organizada em três etapas, sendo duas teóricas e uma prática, com o objetivo de resolver cálculos com números decimais de forma contextualizada, trazendo aplicação a situações do cotidiano.

A fundamentação desta prática está embasada nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (BRASIL, 2013) que informa que as políticas pedagógicas devem estar ajustadas à realidade do estudante para uma melhor valorização cultural. As três etapas realizadas na atividade são descritas, sendo que a primeira consistiu na aplicação de um questionário com seis questões abordando cálculos com números decimais, frações, frações equivalentes, operações com frações, transformação de frações em números decimais e transformação de números decimais em frações. Essa etapa teve como objetivo avaliar o nível de conhecimento apropriado pelos estudantes nos anos anteriores, ou seja, estava sendo procurado um diagnóstico. Na segunda etapa foi proposta uma prática contextualizada utilizando mercado. Para isto foram coletadas pelo professor algumas embalagens de produtos vazias de bebidas, alimentos, produtos de higiene, limpeza, cosméticos, entre outros. Todas as embalagens foram etiquetadas com preços e separadas de acordo com sua categoria, constituindo o mercado em uma sala disponível no colégio.

Para melhor observar os estudantes na situação prática, metade dos alunos da sala de aula se dirigiu a sala onde estava o constituído o mercado, enquanto os demais estudantes permaneceram em sala de aula realizando outras atividades com o professor regente da turma. No segundo momento dessa atividade houve a inversão dos estudantes. (FIGURA 01)

(a)  (b) 

(c) 

FIGURA 01: (a) organização da sala; (b) caixa; (c) dinheiro.
FONTE: Os autores.

Ao entrar no mercado, cada estudante recebeu uma tabela fiscal composta nas colunas com os descritivos: quantidade; descrição; valor unitário; e total da compra.

Esse material serviu de apoio para o registro dos itens a serem comprados, limitados ao valor total de R$ 75,00 (setenta e cinco reais). Quanto aos cálculos para verificar o valor total, os estudantes poderiam fazer os registros, realizar cálculos mentais ou, ainda, discutir com os colegas presentes neste momento da atividade. (FIGURA 02)

FIGURA 02: Registro dos itens para cálculo do valor da compra.
FONTE: Os autores.

Dois dos estudantes foram designados como os caixas do mercado, e possuíam a finalidade de conferir os cálculos realizados pelos colegas durante a compra, utilizando calculadoras. Ao detectar possíveis erros de cálculos, os caixas cobravam o valor a ser pago e realizavam o troco. Cabe ressaltar que os estudantes que tiveram a função de caixa também realizaram a compra, sendo substituídos por outros estudantes. (FIGURA 03)

FIGURA 03: Conferência dos cálculos no caixa.
FONTE: Os autores.

Essa etapa teve o propósito de fazer com que os alunos tivessem a percepção de quais produtos são necessários para viver em um mês, quais produtos são mais caros e baratos da mesma categoria, trazendo assim noção de economia e consumismo.

Na terceira etapa da atividade foi aplicado um questionário com as situações vividas em mercado em situações do cotidiano e, ainda, procurando mostrar a aplicação dos conteúdos abordados na primeira fase. Optou-se por esta sequência da atividade devido ao objetivo de analisar se, a partir de uma prática lúdica, os estudantes seriam capazes de realizar os cálculos com maior expertise neste segundo questionário que no primeiro questionário aplicado.

Ao analisar esta prática, aplicamos a Análise de Erros, que segundo Cury (2007) é um processo de avaliação realizado pelos docentes para verificar a aprendizagem e as dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de ensino. Verificamos que houve uma considerável melhora na resolução do segundo questionário, visto que 65% dos estudantes obtiveram melhor êxito.

Também, foi observado durante o processo que os estudantes não possuíam a noção necessária para realizar uma compra em um mercado: não entendem o porquê de um produto ser mais barato que o outro (diferença que poderia ser pela quantidade de produto em cada embalagem ou, ainda, devido a marcas mais conhecidas); realizavam compras sem saber se poderiam pagar todos os produtos selecionados; não sabiam operar calculadoras; e possuíam pouca familiaridade em relação às operações com números decimais.

Por fim, a aplicação dessa atividade relacionando o mercado com o conteúdo dos números decimais foi importante, uma vez que trabalha o cálculo mental de maneira rápida e mostra a importância da matemática de ser aplicada a realidade do estudante. Ainda a aplicação se mostrou gratificante uma vez que os estudantes puderam aprender a matemática de forma lúdica, isto é, aprender a teoria brincando e o professor pode ensinar um pouco sobre a matemática que utilizamos no cotidiano, fazendo o estudante perceber que deve saber usar a matemática a seu favor nas diversas situações do dia a dia.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **As Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.** Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

CURY, Helena Noronha (2007). A**nálise de Erros -** O que podemos aprender com os erros dos alunos.

Uma experiência no ensino e aprendizado de matrizes no laboratório de matemática

Diovana Bzunek[1], Eduarda de Almeida Gomes[2]
Licenciatura em Matemática – UFPR
diovanna25@hotmail.com, eduarda09.almeida@yahoo.com.br

Prof. Dr. Anderson Roges Teixeira Góes
Departamento de Expressão Gráfica – UFPR
artgoes@ufpr.br

Thadeu Angelo Miqueletto
Colégio Estadual Padre Claudio Morelli
thadeumiqueletto@gmail.com

Palavras-chave: Expressão Gráfica; Matrizes; Operações com matrizes; Tecnologias digitais; Ensino-aprendizado.

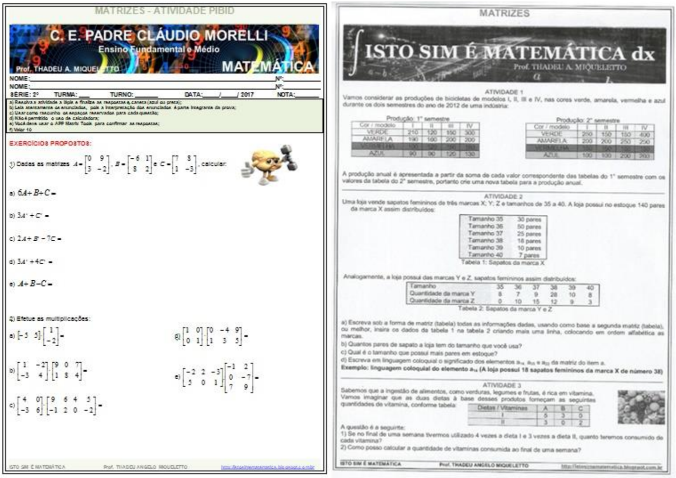
Resumo

Este trabalho apresenta uma prática realizada pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) – subprojeto Matemática 3, aplicada no ano letivo de 2017 em duas turmas de 2° ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Padre Claudio Morelli, com aproximadamente 56 alunos.

Nessa atividade utilizamos tecnologias do lápis ao computador e telefone móvel para visualizar conceitos relacionados ao conteúdo de Matrizes (operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, transposta e multiplicação por escalar).

A prática aqui relatada foi composta por três etapas sendo: a primeira e a segunda desenvolvidas em sala de aula com a integração de recursos tecnológicos e a terceira etapa no laboratório de Informática do Colégio. O objetivo das atividades desenvolvidas é fazer com que os estudantes identifiquem nas matrizes, onde são as linhas e colunas. Com isso, estarem aptos a resolver situações que envolvem matrizes de maneira natural, observando o uso deste conteúdo no cotidiano, assim como brincar aprendendo e ainda fazer o uso de tecnologia em sala de aula.

Na primeira etapa os estudantes, em duplas, resolveram atividades compostas por duas questões: a primeira continha três matrizes envolvendo operações de adição, subtração e multiplicação por um escalar; e a segunda solicitava o cálculo da multiplicação das matrizes dadas. (Figura 01)


MATRIZES - ATIVIDADE PIBID

C. E. PADRE CLÁUDIO MORELLI
Ensino Fundamental e Médio
Prof. THADEU A. MIQUELETTO
MATEMÁTICA

NOME:______________________ Nº:____
NOME:______________________ Nº:____
SÉRIE: 2º TURMA: ___ TURNO: ______ DATA: ___/___/ 2017 NOTA: ______

a) Resolva a atividade a lápis e finalize as respostas a caneta (azul ou preta);
b) Leia atentamente os enunciados, pois a interpretação dos enunciados é parte integrante da prova;
c) Usar como rascunho os espaços reservados para cada questão;
d) Não é permitido o uso de calculadora;
e) Você deve usar o APP Matrix Tools para confirmar as respostas;
f) Valor 10

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

1) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}0 & 9\\3 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-6 & 1\\8 & 2\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}7 & 8\\1 & -3\end{bmatrix}$, calcular:

a) $6A+B+C=$

b) $3A^t+C^t=$

c) $2A+B^t-7C=$

d) $3A^t+4C^t=$

e) $A+B-C=$

2) Efetue as multiplicações:

a) $\begin{bmatrix}-5 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=$

b) $\begin{bmatrix}1 & -2\\-3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}9 & 0 & 7\\1 & 8 & 4\end{bmatrix}=$

c) $\begin{bmatrix}4 & 0\\-3 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}9 & 6 & 4 & 5\\-1 & 2 & 0 & -2\end{bmatrix}=$

d) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -4 & 9\\1 & 3 & 5\end{bmatrix}=$

e) $\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\5 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & -7\\7 & 9\end{bmatrix}=$

ISTO SIM É MATEMÁTICA Prof. THADEU ANGELO MIQUELETTO

MATRIZES

ISTO SIM É MATEMÁTICA dx
Prof. THADEU A. MIQUELETTO

ATIVIDADE 1
Vamos considerar as produções de bicicletas de modelos I, II, III e IV, nas cores verde, amarela, vermelha e azul durante os dois semestres do ano de 2012 de uma indústria:

Produção: 1º semestre

Cor / modelo	I	II	III	IV
VERDE	210	120	150	300
AMARELA	190	160	200	200
VERMELHA	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
AZUL	90	90	120	130

Produção: 2º semestre

Cor / modelo	I	II	III	IV
VERDE	250	150	150	400
AMARELA	200	200	250	250
VERMELHA	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
AZUL	100	100	200	200

A produção anual é apresentada a partir da soma de cada valor correspondente das tabelas do 1º semestre com os valores da tabela do 2º semestre, portanto crie uma nova tabela para a produção anual.

ATIVIDADE 2
Uma loja vende sapatos femininos de três marcas X; Y; Z e tamanhos de 35 a 40. A loja possui no estoque 140 pares da marca X assim distribuídos:

Tamanho 35	30 pares
Tamanho 36	50 pares
Tamanho 37	25 pares
Tamanho 38	18 pares
Tamanho 39	10 pares
Tamanho 40	7 pares

Tabela 1: Sapatos da marca X

Analogamente, a loja possui das marcas Y e Z, sapatos femininos assim distribuídos:

Tamanho	35	36	37	38	39	40
Quantidade da marca Y	8	7	9	28	10	8
Quantidade da marca Z	0	10	15	12	9	3

Tabela 2: Sapatos da marca Y e Z

a) Escreva sob a forma de matriz (tabela) todas as informações dadas, usando como base a segunda matriz (tabela), ou melhor, insira os dados da tabela 1 na tabela 2 criando mais uma linha, colocando em ordem alfabética as marcas.
b) Quantos pares de sapato a loja tem do tamanho que você usa?
c) Qual é o tamanho que possui mais pares em estoque?
d) Escreva em linguagem coloquial o significado dos elementos a_{14}, a_{23} e a_{32} da matriz do item a.
Exemplo: linguagem coloquial do elemento a_{14} (A loja possui 18 sapatos femininos da marca X de número 38)

ATIVIDADE 3
Sabemos que a ingestão de alimentos, como verduras, legumes e frutas, é rica em vitamina. Vamos imaginar que as duas dietas à base desses produtos forneçam as seguintes quantidades de vitamina, conforme tabela:

Dietas / Vitaminas	A	B	C
I	5	3	0
II	3	0	2

A questão é a seguinte:
1) Se no final de uma semana tivermos utilizado 4 vezes a dieta I e 3 vezes a dieta II, quanto teremos consumido de cada vitamina?
2) Como posso calcular a quantidade de vitaminas consumida ao final de uma semana?

ISTO SIM É MATEMÁTICA Prof. THADEU ANGELO MIQUELETTO

Figura 01: Atividade proposta pelas bolsistas. A direita para o *software* Matrix e a esquerda para o *software* Excel.
Fonte: Os Autores.

Já na segunda etapa ocorreu a correção da atividade utilizando o aplicativo de celular sobre operações de matrizes. Havia sido solicitado aos estudantes que instalassem os aplicativos previamente, em casa; com isso houve diversos aplicativos utilizados. (Figura 02)


Figura 02: Atividade com o aplicativo Matrix.
Fonte: Os Autores.

A utilização de recursos tecnológicos no ambiente escolar é necessária na educação contemporânea, visto que os estudantes utilizam estes recursos em seu cotidiano, mas não possuem a ciência que estes aparatos também servem para aprender. Assim, integramos o aparelho celular na sala de aula, vindo ao encontro das afirmações de Kenski (2012) de que as novas tecnologias devem ser integradas no ambiente escolar.

Na terceira etapa foram propostas situações-problemas envolvendo os conteúdos abordados, sendo realizada no laboratório de Matemática com a utilização de *software* de planilha eletrônica. Nessa ocasião os alunos criaram fórmulas matemáticas para realizar as operações e propomos atividades para construção de tabelas, inserir bordas, colorir linhas e colunas. Essas atividades possuíam o objetivo de identificar linhas e colunas das matrizes e da planilha eletrônica, bem como contribuir para os alunos estarem aptos a resolver situações com matrizes de uma maneira natural, observando o uso deste conteúdo no cotidiano, por exemplo, com problemas que relacionam produção de bicicletas em dois semestres, estoque com quantidade e cores de sapatos de uma loja e ainda, dieta e vitaminas. (Figura 03)

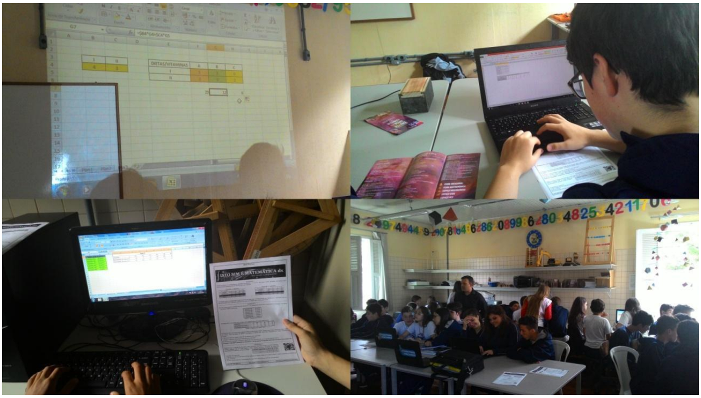


Figura 03: Atividade com o software Excel no laboratório de matemática.
Fonte: Os Autores.

Deste modo, escolhemos trazer a realidade para sala de aula com o objetivo de ensinar conceitos e conteúdos, pois as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (BRASIL, 2013) informa que as políticas pedagógicas devem estar ajustadas à realidade do aluno para uma melhor valorização cultural.

Referências Bibliográficas

BRASIL, 2013: **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Despacho do Ministro, publicado no D.O.U. de 9/7/2010, Seção 1, Pág.10. Conselho Nacional de Educação/Câmara de Educação Básica- DF. PROCESSO Nº 23001.000196/2005-41 PARECER CNE/CEB Nº 7/2010 COLEGIADO CEB APROVADO EM 7/4/2010 Acesso em 22 de maio de 2017.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação**. 8ª ed. – Campinas/SP: Papirus, 2012.

FÁBRICA DE ESTRELAS

Fernanda Dartora Musha , Marla Rodrigues de Oliveira² e Wellington Haas Hein
Licenciatura em Matemática – UFPR
fernanda.musha@gmail.com, ma34237970@gmail.com e
welington_hein@yahoo.com.br

Prof. Simone da Silva Soria Medina (Orientadora)
Departamento de expressão gráfica – UFPR
simone.silva.medina@gmail.com

Palavras-chave: Polígonos Estrelados; Ensino de Geometria; Educação Matemática.

Resumo:
Este trabalho é um relato da atividade "Construção de Polígonos Estrelados", aplicada em 3 horas/aulas com o 3º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Prof. Altair da Silva Leme localizado em Colombo, na região metropolitana de Curitiba - PR, no segundo semestre de 2016. A atividade em questão teve como objetivo propor uma abordagem diferenciada da geometria para o ensino médio, utilizando-se de polígonos estrelados, e foi desenvolvida por bolsistas do PIBID - Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência.
O material utilizado para a construção manual foi uma placa de mdf, barbante colorido, martelo, alfinetes, compasso, esquadros e transferidores.
Essa atividade foi dividida em 3 etapas; A divisão da circunferência pelo método de Rinaldini, definição e construção do polígono estrelado e o questionário para a realização em casa. Para essa atividade foram utilizadas 3 aulas de 50 minutos, onde na 1° aula os autores introduziram aos alunos conhecimentos acerca do Método de Rinaldini para divisão de uma circunferência e, em duplas, os alunos escolheram entre polígonos de 7 a 11 vértices para a realização da atividade. Em folhas de rascunho os alunos deveriam, com o método de Rinaldini, construir uma circunferência de raio 9cm e dividi-la de 7 a 11 partes iguais.
Na 2° e 3° aula foi definido o polígono estrelado e houve a construção desse polígono passando o polígono feito pelo método de Rinaldini para as placas de mdf, então, os alunos deveriam cravar os pregos nas divisões feitas (que seriam os vértices do polígono) e, com o barbante colorido, construir um polígono estrelado.
Após placa de MDF a proposta era levar os alunos ao laboratório de informática, no campus da UFPR Centro Politécnico, onde deveriam repetir o processo feito manualmente no software GeoGebra. O alunos deveriam responder então a um questionário, formulado pelos autores, com questões de geometria para testar os conhecimentos acerca das próprias construções e de polígonos em geral. Porém, por conta da greve dos professores da rede Estadual, os autores não puderam realizar o processo manualmente no software Geogebra mas o questionário foi repassado para os alunos como atividade proposta para realizar em casa.
Os alunos responderam ao questionário em casa e o devolveram na aula seguinte para a supervisora, esta informou aos autores que eles resolveram os exercícios em

grupos e que o questionário após ser corrigido colaborou com a nota dos alunos no 4º bimestre.

Durante a atividade diversos alunos se mostraram interessados e fizeram perguntas a respeito do curso de Matemática da UFPR. Para o questionário foram abordados conhecimentos prévios de áreas e volumes de figuras, já para a construção dos polígonos estrelados foram necessários conhecimentos a respeito de máximo divisor comum e divisão de um segmento por Tales.

Graças a experiência obtida, pudemos reavaliar alguns dos materiais e procedimentos abordados de forma que foi possível aplicar a atividade com turmas de 8º ano do Ensino Fundamental. Tais adaptações tornaram possível a diminuição de uma hora/aula durante a segunda etapa.

Referências:

[1] Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática, Paraná, 2008.

[2] <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/teorema-tales.htm> Acessado em 20 de outubro de 2016

[3] <http://www.vidinfo.org/video/16124674/divisao-de-circunferencia-rinaldini> Acessado em 20 de outubro de 2016

Introdução ao conceito de logaritmo – motivação e aplicação

Denis Gomes Missão e Fernando Ney Saboia Gomes
Licenciatura em Matemática – UFPR
denis.soma@gmail.com e fernandosaboia7@gmail.com

Prof. Dr. Anderson Roges Teixeira Góes
Departamento de Expressão Gráfica – UFPR
artgoes@ufpr.br

Thadeu Angelo Miqueletto
Colégio Estadual Padre Claudio Morelli
thadeumiqueletto@gmail.com

Palavras-chave: matemática financeira, logaritmo, equação exponencial.

Resumo

Este trabalho apresenta uma prática pedagógica realizada com estudantes de uma turma do 1° ano do Ensino Médio, desenvolvida no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) - subprojeto Matemática 3 aplicado no Colégio Estadual Padre Cláudio Morelli.

Essa aplicação surgiu da dificuldade, visualizada em anos anteriores, de como introduzir o conceito de logaritmo aos estudantes do 1º ano do ensino médio. Pensando em um conteúdo que trouxesse motivação e utilidade, a matemática financeira foi escolhida para compor essa forma de introdução ao conceito de logaritmo, por proporcionar interesse sobre como trabalhar com dinheiro, investimentos, juros e aumento do capital.

Segundo Da Silva(2013) essa realidade financeira faz parte do dia a dia de muitos cidadãos e realizar esse tipo de operação é útil para compreender como ocorrem investimentos proporcionados por uma agência bancária, por exemplo.

Assim, o objetivo desta prática é fazer com que os estudantes compreendessem que uma função exponencial pode resolver o problema proposto. Com isso, partimos com a seguinte situação problema constante na Figura 1.

1) Considere um capital inicial de 4000 reais aplicado a uma taxa de juros compostos de 12.25% ao mês. Complete a tabela abaixo:

Prazo em meses	Saldo(no início de cada mês)	Juros	Montante (no final de cada mês)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

Figura 1

Após a resolução da atividade constante na figura acima, foram realizados questionamos aos estudantes sobre a dificuldade em saber o montante passada uma quantidade muito grande de meses, surgindo assim a problemática em determinar uma fórmula para o processo questionado.

Com o auxílio do professor alguns estudantes conseguiram encontrar a seguinte fórmula: $M=C(1+i)^t$ e, assim, o próximo passo foi fazer com que continuassem a preencher a tabela, agora utilizando a fórmula, facilitando assim os cálculos.

Questionamos os estudantes em quanto tempo seu capital dobraria de valor nessas condições. E eles apontaram o mês sexto mês que apresentava os, aproximados, R$ 8.000,00.

Nova problemática foi utilizada: se a tabela não tivesse sido construída, como fariam para descobrir em qual mês isso aconteceria?.

A partir dos dados iniciais, modelamos com os estudantes a seguinte equação $8000=4000(1+0{,}1225)^t \Leftrightarrow 2=(1{,}225)^t$, onde puderam perceber que não possuíam ferramentas matemáticas para resolver uma equação em que a incógnita é um expoente, sendo este ponto a motivação para o estudo de logaritmos.

Iniciamos com a definição de logaritmo e propomos alguns exercícios. Em seguida, conferimos os cálculos usando uma calculadora científica. Após a assimilação do conceito, introduzimos a seguinte propriedade: $\log_b(a^t)=t.\log_b(a) \quad com \quad a,b>0 \quad e \quad a\neq 1$.

Usamos mais uma vez a calculadora para verificar a propriedade com alguns exemplos e voltamos a última problemática, onde os estudantes verificaram a equivalência: $2=(1{,}225)^t \Leftrightarrow t=\dfrac{\log(2)}{\log(1{,}225)}$. Ao realizarem os cálculos verificaram que o valor obtido para o tempo (t) é de seis meses para que o montante dobre de valor.

Normalmente, muitos conceitos matemáticos têm origem a partir de problemas, sejam eles abstratos ou parte de nossa realidade. Assim, desenvolvemos o conceito de logaritmo a partir de uma problemática, aplicando o conceito e o formalizando para que assim os estudantes pudessem perceber os caminhos dos conhecimentos matemáticos e a aplicabilidade fora do ambiente escolar.

Referências:

Da SILVA, Josiel Pereira. **Logaritmos e Aplicações**. Programa de Pós-graduação em matemática. PROFMAT/UFCG. 2013

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. Editora Ática. 2008

O uso do desenho geométrico no ensino e aprendizado de trigonometria no triângulo retângulo

Ana Cristina Polli[1] e Gessiel Nardini Sperotto [2]

Licenciatura em Matemática – UFPR

anacpolli@gmail.com e gessielnardini@gmail.com

Prof. Dr. Anderson Roges Teixeira Góes

Departamento de Expressão Gráfica – UFPR

artgoes@ufpr.br

Thadeu Angelo Miqueletto

Colégio Estadual Padre Claudio Morelli

thadeumiqueletto@gmail.com

Palavras-chave: Desenho Geométrico, Trigonometria, Triângulo retângulo.

Resumo:

Este resumo apresenta uma prática pedagógica que fará parte de análise de dissertação do Programa de Pós Graduação em Educação: Teoria e Prática de Ensino da Universidade Federal do Paraná (UFPR), tendo como auxiliares na aplicação da mesma os bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) - subprojeto Matemática 3.

A prática pedagógica em questão ocorrerá em outubro de 2017 com estudantes do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Padre Cláudio Morelli e consiste na utilização de procedimentos do desenho geométrico para a apropriação de conhecimentos sobre as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Observada a dificuldade dos estudantes na compreensão dos conteúdos de trigonometria no 2° ano do Ensino Médio esta metodologia que utiliza o desenho geométrico pode servir como um método facilitador, prazeroso e de incentivo para os estudantes para ser trabalhada em sala de aula pelos professores da educação básica.

Dentre as justificativas para o uso do desenho geométrico para o ensino de trigonometria podemos destacar o relato de professores e estudantes sobre a dificuldade que eles têm na compreensão da trigonometria. No entanto, com o desenho geométrico é possível a abordagem de propriedades geométricas, bem como, elaboração de representações gráfica com maior precisão.

O desenho geométrico é um elemento da Expressão Gráfica, pois segundo Góes (2013):

> Este campo de estudos utiliza elementos de desenho, imagens, modelos, materiais manipuláveis e recursos computacionais aplicados às diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de apresentar, representar, exemplificar, aplicar, analisar, formalizar e visualizar conceitos. Dessa

[1] Bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID.
[2] Bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID.

> forma, a expressão gráfica pode auxiliar na solução de problemas, na transmissão de ideias, de concepções e de pontos de vista relacionados a tais conceitos. (GÓES, 2013, p. 20).

O desenho geométrico auxilia na resolução de problemas e na transmissão de ideias, conceitos e conteúdos matemáticos. Além disso, com a utilização correta dos instrumentos de desenho geométrico é possível obter precisão na construção de triângulos retângulos e, com isso, obter dados que fornecem as razões trigonométricas para calcular algo desejado e posteriormente conferir os resultados com as medidas de seu desenho.

O uso dos instrumentos de desenho geométrico pode ser facilmente empregado em sala em sala de aula, em contraposição aos *softwares* de geometria dinâmica - que possuem ferramentas do desenho geométrico, mas que são necessários computadores, que não fazem parte do contexto da sala de aula. Isto pelo fato que as escolas, quando possuem computadores suficientes para o desenvolvimento de atividades pedagógicas, os possuem em um ambiente diferente da sala de aula, não ocorrendo a integração desta tecnologia ao cotidiano escolar.

Antes das atividades de trigonometria serem aplicadas, os estudantes terão instruções sobre o material necessário e também para a utilização dos mesmos nas aulas de desenho geométrico. Nestas atividades, serão realizadas construções básicas como encontrar o ponto médio de um segmento de reta dado, retas perpendiculares e paralelas (por meio de régua e compasso e dos esquadros), entre outras construções. Este capítulo do caderno pedagógico foi dividido em cinco partes:

A primeira parte da atividade consiste na utilização do transferidor e conceitos como a soma dos ângulos internos de um triângulo. Para a compreensão destes conceitos será proposta uma atividade em que estudantes desenharão um triângulo qualquer e, assim, obter os ângulos internos com a utilização do transferidor e terminar somando estes ângulos internos comprovando a teoria da soma dos ângulos internos. Também serão disponibilizados links de vídeos na internet que explicam como utilizar o transferidor e sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Esses vídeos possuem a finalidade de apresentar outra narrativa dos elementos abordados pelo professor, assim o estudante que não conseguiu entender tudo em sala de aula pode retomar a explicação assistindo o vídeo indicado.

A segunda parte tem a finalidade de definir as nomenclaturas dos elementos de um triangulo retângulo, no caso o ângulo reto, os ângulos agudos, a hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente.

A terceira parte caracteriza-se por uma atividade investigativa sobre razões, sem mencionar o termo trigonometria. Os estudantes deverão construir triângulos retângulos com ângulos agudos de 30°, 45° e 60°, utilizando os procedimentos de desenho geométrico. Na sequência serão realizados cálculos das razões propostas e coletados os resultados de alguns colegas em uma tabela (figura 1) para depois comparar os resultados obtidos. Os estudantes devem concluir que os resultados devem ser aproximados devido à imprecisão dos instrumentos.

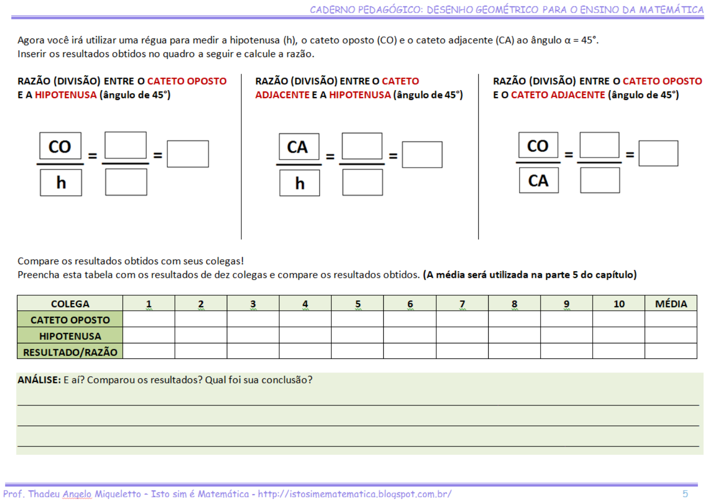


Figura 1: Tabela de distribuição das razões
Fonte: Os autores

Na quarta parte tem-se a formalização dos conceitos de trigonometria no triangulo retângulo a partir das atividades da terceira parte. Caso o estudante queira saber mais sobre a história da trigonometria, no caderno pedagógico será indicado um link para o acesso de vídeo sobre o tema.

Na parte cinco os estudantes desenvolverão atividades sobre os conceitos de ângulos notáveis utilizando as médias da turma encontrada nas atividades da terceira parte, a fim de preencher uma tabela e comparar com a tabela original encontrada em livros didáticos.

Após o estudante internalizar os conceitos e a formalização dos mesmos, as atividades consistem na construção de triângulos retângulos utilizando os procedimentos do desenho geométrico, com algumas medidas pré-estabelecidas, e outras medidas que os estudantes deverão calcular utilizando os conceitos aprendidos nas atividades anteriores. Por fim são propostos problemas para os estudantes resolverem que consistem em situações em que o estudante pode utilizar (ou não) os conceitos de trigonometria para resolver.

Com esta atividade, esperamos que os estudantes se apropriem dos conceitos abordados sem o temor pelo assunto “razões trigonométricas”, visto que primeiro compreenderam os conceitos para depois nomeá-los com termos matemáticos. Esperamos também que os estudantes demonstrem prazer em realizar a atividade e que não se sintam entediados ao se trabalhar com esse conteúdo.

Referência:

GÓES, H. C. **Um esboço de conceituação sobre Expressão Gráfica.** Revista Educação Gráfica. vol. 17, no. 1, Bauru/SP, 2013.

Explorando a Matemática através da “Matemágica”

Guilherme Vinicius Favoretto[1] e Maristel do Nascimento[2]
Licenciatura em Matemática – UEPG e Matemática - SEED
guiga_favoretto@hotmail.com e mnasci202@hotmail.com

Prof. Ms. Rita de Cássia Amaral Vieira
Departamento de Matemática e Estatística – UEPG
rcamaral@hotmail.com

Palavras-chave: Tenda, Matemágica, Interatividade.

Resumo:

Com uma proposta diferenciada de apresentar a matemática de maneira interativa, a professora supervisora do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID/UEPG) propôs a seus acadêmicos bolsistas para desenvolverem uma atividade no colégio, atividade esta que consistia em mostrar aos alunos a matemática de uma forma divertida e interativa. Assim, a partir deste convite foram pesquisados e elaborados diferentes materiais que hoje compõem a “Tenta interativa: a Magia da Matemática”. A prática na escola foi escolhida para ser aplicada no dia em que comemoramos o dia nacional da matemática, dia 6 de maio, instituído pela Lei 12.835/2013, selecionada por ser a data de nascimento do grande matemático, educador e escritor Malba Tahan. Teve como principal objetivo aproximar a matemática das pessoas, romper com o paradigma que a matemática é difícil e poucos aprendem. Montada em um lugar público, pátio da escola ou em uma praça, a nossa ideia foi inicialmente realizada na quadra da escola. Nela os visitantes, alunos do colégio, puderam manusear, construir, explorar e interagir com objetos matemáticos, despertando o interesse e estimulando a criatividade. A proposta foi apresentar por meio de um objeto educacional, uma prática desenvolvida em um colégio da rede pública estadual da cidade de Ponta Grossa, Paraná. Comandando a tenda um mágico e sua partner, acadêmicos do PIBID, convidavam o público a participar dos jogos interativos, com tabuleiros gigantes no qual o participante é uma peça do jogo, representações de problemas históricos, (problema dos 35 camelos de Malba Tahan), twister geométrico, quebras cabeças, planos e espaciais, tetraminós, pentaminós, tangrans, desafios com espelhos, e com palitos de fósforos, cubos e quadrados mágicos, dobraduras, origami e ilusões de ótica. Outro objetivo do trabalho foi apresentar alternativas para despertar o

[1] Bolsista do Programa Institucional de bolsa de iniciação à Docência (PIBID/UEPG).

[2] Supervisora do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência(PIBID/UEPG).

interesse, buscando o envolvimento do aluno, sua participação ativa no processo de ensino aprendizagem, explorando manipulando, refletindo e argumentando o objeto de ensino. Neste sentido, esperamos que os participantes do evento possam desfrutar aprender, trocar ideias sobre a aplicação desta prática na escola.

.

Referência:

BRASIL, Lei nº 12.835/2013 de 26 de junho de 2013, institui o Dia nacional da Matemática. Diário Oficial da União, Brasília, DF, p..

Utilização de Vídeos na Educação Matemática

João Lucas Espíndola Mahlmann[1], Jaqueline de Oliveira Hoschele[1], Klaus Victor Timm[1] e Luiz Felipe Vieira Haragushiku[1]
Bolsistas do PIBID
Licenciatura em Matemática – UFPR
jlmahlmann@gmail.com, luizfelipevh@gmail.com, ja_ck17@hotmail.com, klaustimm@hotmail.com

Profª. Drª. Elisângela de Campos
Departamento de Matemática – UFPR
elismat@ufpr.br

Palavras-chave: Geometria Espacial, Vídeo na sala de aula, Educação Matemática

Resumo:

Um dos objetivos do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)[2] Matemática 1 é proporcionar aos bolsistas conhecimento sobre as diversas metodologias de ensino da Matemática para possibilitar ao futuro docente familiarização com as tendências metodológicas da Educação Matemática.

Com o intuito de conhecer, desenvolver e aplicar atividades por meio da utilização de Tecnologias de Informática e Comunicação, o projeto, inicialmente, consistiu em buscar artigos e outros trabalhos correlatos. Após a pesquisa, foi organizado, entre os estudantes participantes do PIBID, como isto seria aplicado em sala de aula, nos segundos anos, do Ensino Médio, do período matutino do Colégio Estadual Professora Maria Aguiar Teixeira. A proposta envolveu uma série de aulas expositivas sobre o assunto Geometria Espacial, ministradas por grupos dos bolsistas do projeto. Posteriormente, foi proposta aos alunos da escola a criação em grupo de um vídeo, o qual compôs um percentual da nota do bimestre e onde deveria ser explicado um tema relacionado à Geometria Espacial por meio de alguma prática de produção audiovisual.

Imagens das aulas ministradas. De autoria própria

Além das aulas, foram disponibilizadas publicamente, via *Facebook* na página do PIBID, notas com *links* e conceitos tratando sobre as pesquisas relacionadas aos conteúdos que os licenciandos haviam feito, separando vídeos e informações interessantes para os alunos. Logo, os estudantes poderiam ver diversos tipos de vídeos, conhecer e escolher um estilo de prática audiovisual para expor seu tema. Quanto aos temas, foram selecionados sete pelos graduandos, os quais não foram explicados a fundo durante as aulas expositivas. Portanto, depois que os alunos se separaram em grupos e escolheram um tema, tinham a liberdade de pesquisar o conteúdo e meios para a elaboração do vídeo que explicaria seu tema. Os vídeos foram disponibilizados na página do PIBID, de modo que todos os alunos e qualquer interessado pudessem assisti-los.

Vídeo publicado na página do PIBID

Na sequência, os membros do PIBID que ministraram aulas em cada turma avaliaram os trabalhos nos quesitos: **conteúdo**, onde foi avaliado o grau de informação trazida no vídeo sobre o tema escolhido; **criatividade**, onde foi avaliado o modo como o vídeo foi feito, uso de imagens, som, gravações etc.; **qualidade**, onde foi avaliado se o vídeo foi bem gravado, bem editado, se o som estava bem regulado, se mídias externas, como músicas e imagens, estavam bem utilizadas no vídeo, entre outros; **pontualidade na entrega**, onde foi avaliado se o aluno fez o trabalho no tempo estipulado. Após a finalização da atividade, foi aplicada uma pesquisa com os alunos, um questionário que buscava opiniões em relação às aulas dos licenciandos, sobre como foi fazer o trabalho e se eles consideravam que o trabalho havia ajudado na compreensão do conteúdo em comparação com uma aula padrão e avaliação por provas. O *feedback* foi, em sua maioria, positivo, com os alunos mencionando que haviam gostado de fazer o trabalho, e que a atividade diferenciada realmente influenciou de maneira positiva no aprendizado.

Por fim, notou-se que, em meio à sociedade digital do século XXI, o uso de tecnologias no ensino básico pôde, de fato, agregar para o conhecimento e interesse dos alunos no conteúdo, principalmente quando o estudante se coloca como protagonista da atividade, apresentando certa conexão com a tecnologia e sentindo-se mais à vontade com uma atividade que envolva vídeos, por exemplo, do que comparado com alguns métodos tradicionais. Observa-se, porém, que este uso deve ser bem dosado e planejado, de modo que não se torne excessivo ou maçante para o aluno, e também não seja usado somente para fechar lacunas durante alguma aula, sem intuito de trazer mais riqueza e profundidade na abordagem.

Referências:

ALENCAR, Vagner - Uso de tecnologia no ensino melhora em 32% rendimento em Matemática e Física, aponta estudo (2013). Disponível em: http://educacao.uol.com.br/noticias/mobile/2013/02/04/uso-de-tecnologia-no-ensino-melhora-em-32-rendimento-em-matematica-e-fisica-aponta-estudo.htm. Acessado em: 1 de julho de 2017.

DOMINGUES, NILTON SILVEIRA. O Papel do Vídeo nas Aulas Multimodais de Matemática Aplicada: Uma Análise do Ponto de Vista dos Alunos' 23/01/2014 125 f. Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE EST.PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO/RIO CLARO, Rio Claro Biblioteca Depositária: IGCE/UNESP/Rio Claro (SP).

GONÇALVES, Amanda - Produção de Vídeos na Aula de Matemática. Disponível em: http://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/producao-videos-na-aula-matematica.htm. Acessado: em 1 de julho de 2017.

[1]Bolsistas do Programa PIBID

[2]Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - Financiado pela CAPES/MEC

A História de Hipátia: Uma Discussão de Gênero com o Ensino Fundamental

Keith Gabriella Flenik Morais[1]
Licenciatura em Matemática – UTFPR-CT
keithgabriella@hotmail.com

Luciana Schreiner de Oliveira
Departamento Acadêmico de Matemática – UTFPR-CT
lu_zan@hotmail.com

Palavras-chave: História da Matemática, Matemática Crítica; Discussão de Gênero.

Resumo:

No curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba, oferece-se a disciplina de "Estágio Obrigatório A", realizado na Escola Madre Úrsula Benincasa, localizada no bairro Campo Comprido, no município de Curitiba, Paraná, onde realizam-se observações participativas e monitorias não obrigatórias no contra-turno para os alunos.

Em junho de 2017, durante as monitorias dos 6º e 7º anos, as monitoras que trabalhavam com esta turmas apresentaram uma atividade diferenciada sobre o conteúdo de equações. O objetivo era desafiá-los a construir equações a partir de um texto previamente elaborado, isto é, transformar a linguagem escrita textual em linguagem matemática, bem como promover, com os estudantes, uma discussão de gênero no contexto da história da matemática.

Deste modo, as monitoras basearam-se o livro de Guelli (2002) para elaborar a atividade. Um dos textos base tratava brevemente sobre a história de Hipátia e outro sobre "O Enigma de Diofante", cujo conteúdo proporcionava a discussão de gênero na antiguidade em relação à atualidade.

> A nós, (...) pesquisadores (...) e educadores, caberá desconfiar de todas as essências, homogeneidades e universalidades: "a mulher", "o homem" (...) entre tantas outras noções tomadas como naturais e fixas. (...) A naturalização de nossas concepções acaba por produzir e legitimar situações de desigualdade entre homens e mulheres e marcam pessoas e grupos em suas relações essas consideradas como "inferiores" ou "superiores" (...) e que cabe aos nossos trabalhos de pesquisa e de ensino expor e desconstruir. (SOUZA, 2010, p. 30)

A metodologia de pesquisa utilizada para a elaboração da atividade foi a pesquisa-ação, de acordo com Moreira (2009), pois as dificuldades dos estudantes incitaram o desenvolvimento da atividade proposta.

Aos estudantes, foram entregues uma "Lista de Exercícios"[2] que continham questões de interpretação e de solução de um enigma, e outras duas que não foram abordadas neste dia.

As metodologias de ensino utilizadas foram a História da Matemática (MIGUEL; MIORIM, 2011) e Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2011). Conforme Miguel e Miorim (2011), os argumentos a favor da metodologia de história dividem-se em duas categorias:

---

[1] Bolsista PIBID Matemática da UTFPR-CT

[2] Disponível em: < https://drive.google.com/open?id=0B3s6z2dZyI-Aa091UnhLRG9rOU0>

> Argumentos de natureza epistemológica: (...) fonte de seleção de (...) episódios considerados motivadores da aprendizagem da Matemática escolar; fonte de identificação de obstáculos epistemológicos de origem epistemológica para se enfrentar certas dificuldades que se manifestam entre os estudantes (...). Argumentos de natureza ética: (...) possibilita o desenvolvimento de um pensamento crítico (...); (...) possibilita a promoção da inclusão social, via resgate da identidade cultural de grupos sociais discriminados no (ou excluídos do) contexto escolar. (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 61-62)

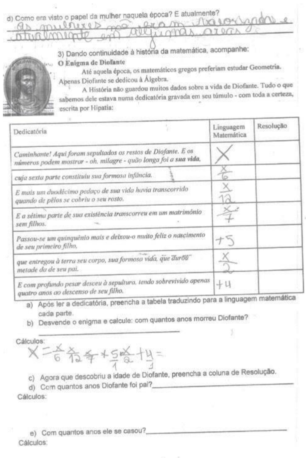
Em outras palavras, a história da matemática pode atuar de forma similar a Matemática Crítica:

> (...) para que a educação (...) seja crítica, ela deve discutir condições básicas para obtenção do conhecimento, deve estar a par de problemas sociais, das desigualdades, da supressão etc., e deve tentar fazer da educação uma força social progressivamente ativa. (...) Para ser crítica, a educação deve reagir às contradições sociais. (SKOVSMOSE, 2011, p. 101)

Foi possível perceber na execução da atividade que os estudantes não haviam tido uma experiência parecida como esta, isto é, tanto uma aula com uma metodologia diferente quanto discutir um assunto social. Em outras palavras, estavam vivenciando um momento extraordinário.

Dos nove alunos presentes, uma era do 6º ano. Apesar ter se mostrado tímida na discussão, destacou-se pelas suas respostas nas questões sobre a importância de Hipátia e o papel da mulher na sociedade (Figuras 2 e 3). Os demais alunos, de 7º ano, conseguiram apenas começar a equação do Enigma de Diofante (questão 3.b) (Figura 1), pois a lista era muito longa para o período de aula. Além disso, puderam levantar observações sobre como as mulheres estão conquistando espaço e respeito na sociedade atual bem como a importância de debater sobre isto (Figuras 4 e 5).

Portanto, foi possível observar que a abordagem do tema transversal com o conteúdo matemático foi eficaz, pois existia uma boa relação aluno-professor e um alto grau de interesse dos estudantes acerca do tema.



d) Como era visto o papel da mulher naquela época? E atualmente?

As mulheres não eram valorizadas e atualmente em algumas areas é

3) Dando continuidade à história da matemática, acompanhe:

O Enigma de Diofante

Até aquela época, os matemáticos gregos preferiam estudar Geometria. Apenas Diofante se dedicou à Álgebra.

A História não guardou muitos dados sobre a vida de Diofante. Tudo o que sabemos dele estava numa dedicatória gravada em seu túmulo - com toda a certeza, escrita por Hipatia:

Dedicatória	Linguagem Matemática	Resolução
*Caminhante! Aqui foram sepultados os restos de Diofante. E os números podem mostrar - oh, milagre - quão longa foi a **sua vida**,*	X	
cuja sexta parte constituiu sua formosa infância.	$\frac{x}{6}$	
E mais um duodécimo pedaço de sua vida havia transcorrido quando de pêlos se cobriu o seu rosto.	$\frac{x}{12}$	
E a sétima parte de sua existência transcorreu em um matrimônio sem filhos.	$\frac{x}{7}$	
Passou-se um quinquênio mais e deixou-o muito feliz o nascimento de seu primeiro filho,	$+5$	
que entregou à terra seu corpo, sua formosa vida, que durou metade da de seu pai.	$\frac{x}{2}$	
E com profundo pesar desceu à sepultura, tendo sobrevivido apenas quatro anos ao descenso de seu filho.	$+4$	

a) Após ler a dedicatória, preencha a tabela traduzindo para a linguagem matemática cada parte.

b) Desvende o enigma e calcule: com quantos anos morreu Diofante?

Cálculos:

$X = \frac{x}{6} \frac{x}{12} \frac{x}{7} + \frac{5}{1} \frac{x}{2} + \frac{4}{1} =$

c) Agora que descobriu a idade de Diofante, preencha a coluna de Resolução.

d) Com quantos anos Diofante foi pai?

Cálculos:

e) Com quantos anos ele se casou?

Cálculos:

Figura 1 - Exemplo de uma atividade resolvida incompleta (7º ano)

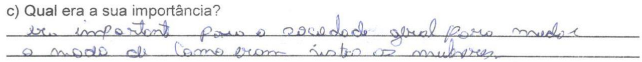


Figura 2 - Respostas da questão 2.*a, b* e *c* da aluna de 6º ano: *"era importante para a sociedade geral para mudar o modo de como eram vistas as mulheres."* (Fonte: acervo próprio)

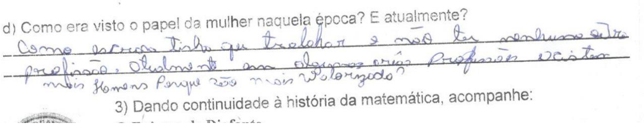


Figura 3 - Respostas da questão 2.*d* da aluna de 6º ano: *"Como escrava, tinha que trabalhar e não ter nenhuma outra profissão. Atualmente em algumas áreas, profissões existem mais homens, pois são mais valorizados.".* (Fonte: acervo próprio)

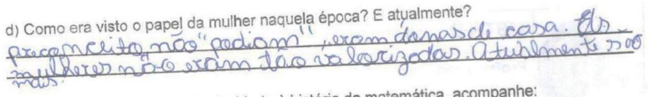


Figura 4 - Resposta de uma aluna na questão 2.d: *"preconceito, não 'podiam', eram donas de casa. As mulheres não eram tão valorizadas. Atualmente são mais.".* (Fonte: acervo próprio)

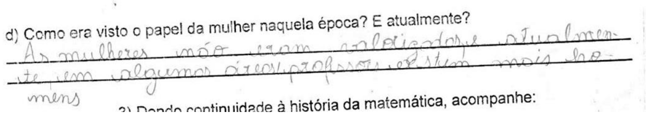


Figura 5 - Resposta de uma aluna na questão 2.d. *"As mulheres não eram valorizadas, e atualmente em algumas áreas/profissões existem mais homens."* (Fonte: acervo próprio)

Referências

MOREIRA, Herivelto.; CALEFFE, Luiz Gonzaga. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador.** 2 ed., Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica: A questão da Democracia**. 6. ed. Campinas: Papirus, 2001.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria. Ângela. **História na Educação Matemática: propostas e desafios.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

GUELLI, Oscar. **Contando a história da Matemática- Equação: O idioma da álgebra.** Editora Ática: 2002.

SOUZA, Maria Celeste Reis Fernandes de; FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis. **Relações de gênero, Educação Matemática e discurso: enunciados sobre mulheres, homens e matemática.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

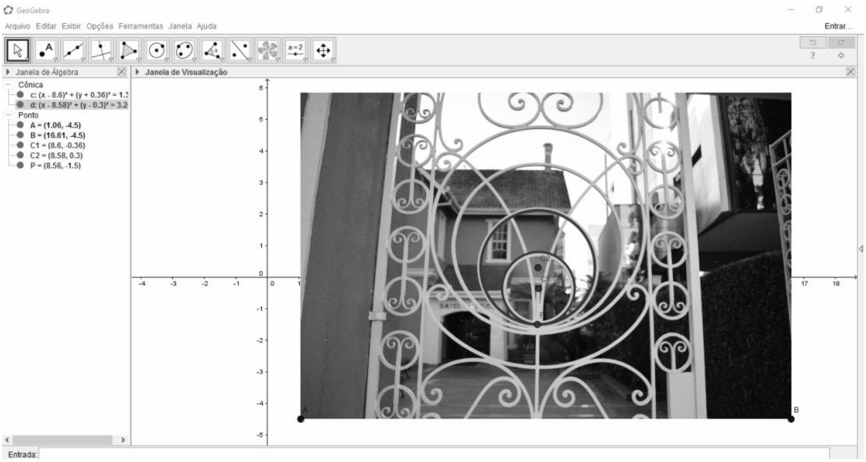
Ensino de Circunferências por meio da utilização de Fotografia e do Software Geogebra

Letícia do Rocio Oliveira
Bacharelado em Matemática Industrial – UFPR
le_oliv@live.com

Prof. Gilmar Bornatto (Orientador)
PUCPR
gilmar.bornatto@gmail.com

Palavras-chave: Geogebra. Fotografia. Circunferências. Geometria Analítica.

Resumo:
Uma das grandes dificuldades dos professores de matemática é contextualizar os conteúdos ensinados em sala de aula dentro do cotidiano dos estudantes e dar sentido prático para que eles se interessem por aquele determinado assunto.
Pensando nesta perspectiva e buscando aproveitar os recursos tecnológicos que estão cada vez mais presentes no dia-a-dia da população, uma metodologia foi elaborada para ensinar o conteúdo de Circunferências com enfoque em Geometria Analítica para estudantes do terceiro ano do Ensino Médio.
A metodologia consiste em, após apresentar alguns conceitos teóricos sobre Geometria Analítica como Plano Cartesiano, Distância entre Pontos e Circunferências, estimular os estudantes a registrar através da fotografia, respeitando conceitos básicos de registro fotográfico, objetos de seu cotidiano que representam circunferências ou círculos.
Após a realização desta etapa, o software Geogebra passa a ser utilizado. As fotografias tiradas pelos estudantes são inseridas no software, e utilizando seus recursos e ferramentas, circunferências são traçadas sobre as fotografias, determinando as equações para os objetos de cada fotografia.
A partir das equações já obtidas pelas construções no software Geogebra, os estudantes podem estabelecer relações entre as diferentes fotografias, formular conceitos teóricos sobre o conteúdo, mas principalmente, desenvolver a capacidade de observar a realidade à sua volta e perceber nela a presença da matemática, o que muitas vezes passa despercebido aos olhos de muitos.
Foram criados roteiros de aulas envolvendo assuntos como Equação Reduzida da Circunferência, Circunferências Secantes, Circunferências Tangentes, Circunferências e Retas. Nestes roteiros, as atividades dentro do Geogebra devem realizadas a partir de fotos feitas pelos próprios estudantes. E após realizarem todas as construções, sugere-se que sejam realizadas comparações entre as atividades realizadas por cada estudante e que o professor realize questionamentos com base nos dados obtidos por cada um até que se obtenham propriedades e equações genéricas para as circunferências.
A seguir, um exemplo de construção realizada no Geogebra a partir de uma fotografia.
Figura 1 – Exemplo de atividade com Circunferências Tangentes Interiores



Fonte: o autor, 2017.

O trabalho desenvolvido nestes roteiros de aulas leva em consideração a utilização dos recursos tecnológicos apenas como ferramentas que completem a aquisição de conhecimento do estudante e, também, a importância do professor como moderador da atividade e instigador de questionamentos dos estudantes em relação ao conteúdo teórico.

Esta metodologia tem enfoque em circunferências dentro de Geometria Analítica, mas pode também ser utilizada com outras formas geométricas, buscando melhorar o trabalho em sala de aula e fora dela trazendo novos recursos para que o estudante desenvolva uma melhor aprendizagem do conteúdo, relacionando-o com situações observadas em seu cotidiano.

A metodologia não foi aplicada em sala de aula, sendo então, inviável afirmar que resultados que cumprissem os objetivos foram alcançados.

Referências:

GEOGEBRA. Disponível em: < https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 16 set. 2017.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar:** Volume 7 - Geometria Analítica. 5ª Edição. São Paulo: Atual, 2005. 282 p.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 3ª Edição. Belo Horizonte: Autêntica, ano. 2005. 99 p.

HACKING, Juliet. **Tudo sobre Fotografia.** 1ª Edição. Rio de Janeiro: Sextante, 2012. 576 p.

O uso de materiais manipuláveis para o ensino da Geometria

Luana Leal[1]
Licenciatura em Matemática – UFPR
luavrileal@yahoo.com.br

Prof. Ettiène Guérios (Orientador)
Departamento de Teoria e Prática de Ensino – UFPR
ettiene@avalon.sul.com.br

Palavras-chave: Desenho Geométrico, Geometria, Material Manipulável.

Resumo:

O Desenho Geométrico foi um componente curricular importante, até a década de 1950, permanecendo oficialmente nas matrizes curriculares das escolas brasileiras. Nas primeiras décadas do século XIX, houve uma necessidade de um contingente de engenheiros civis e outros profissionais, essencial para a promoção de um avanço técnico-científico e mesmo econômico-social. Nesse período o desenho geométrico era destaque no currículo dos cursos de engenharias.

Entretanto, na década de 1960, emergia o Movimento da Matemática Moderna (MMM) que objetivava a renovação do ensino da matemática e, no intuito de promover o desenvolvimento científico e tecnológico no Brasil, foram inseridos no currículo conteúdos matemáticos que até aquela época não faziam parte do programa escolar. Essa inserção, por um lado, buscava aproximar os conteúdos matemáticos trabalhados na educação básica com o conhecimento matemático produzido pelos pesquisadores dessa mesma área, resultando em alunos aptos a prosseguir na área da pesquisa; por outro lado essa inserção de conteúdos acabou facilitando, num primeiro momento, a redução do ensino do desenho geométrico.

No final dessa década, o Desenho Geométrico deixou de ser disciplina obrigatória, passando a ser disciplina complementar.

A matemática desde então passou a ser estudada mais abstratamente, dando pouca ênfase as aplicações ou ao estudo de padrões.

Com esse olhar, nesse trabalho apresentam-se práticas de ensino desenvolvidas através do Programa Institucional de Bolsas à Iniciação a Docência (PIBID) a estudantes de ensino fundamental e estudantes de graduação.

Acredita-se que para o ensino ser mais eficaz cabe ao professor tentar facilitar e trazer elementos do próprio dia a dia do aluno sendo assim possível ao aluno fazer suas experimentações e conexões com o seu mundo. Em particular o estudo da Geometria, através do material manipulável, permite tornar a aula de matemática enriquecedora e atrativa. Desta forma, contribui para o desenvolvimento da autonomia do aluno, tornando-o ativo, estimulando o seu raciocínio e suas habilidades de observação e associação. O Sonobe e o Caleidociclo são exemplos de materiais manipuláveis que agregam tanto o aprendizado quanto a motivação do

[1] Voluntário do Programa PIBID.

aluno, mesmo que seja para ter apenas o produto final, mas o processo para a obtenção do produto está nas construções e assimilação de conceitos muitas vezes já estudados, mas não absorvidos.

Referências:

BRITTO, N. C. de. Didática especial. São Paulo: Editora do Brasil, 1984. p. 151.

COSTA, E. Rosa M. Fragmentos Históricos do Desenho Geométrico no Currículo Matemático Brasileiro. Disponível em < http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/FRAGMENTOS-HIST%C3%93RICOS-DO-DESENHO-GEOM%C3%89TRICO-NO-CURR%C3%8DCULO.pdf>

DIENES, Zoltan Paul. Lógicas e jogos lógicos (por) Z. P. Dienes (e) E. W. Golding (tradução de Euclides José Dotto, ver. E adapt. De Ormil Alves Pillati) 3. ed. rev. São Paulo, EPU, 1976. p. ilust. (Os primeiros passos em matemática, 1).

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

Construção de uma representação do Teorema de Pitágoras

Matheus Willian Duarte Amandio[1] e Aline Ferreira Rodrigues Vaz[2]
Licenciatura em Matemática – UFPR
mwmatheus7@gmail.com e lini-rodrigues@hotmail.com

Thadeu Angelo Miqueletto
Colégio Estadual Padre Claudio Morelli
thadeumiqueletto@gmail.com

Prof. Dr. Anderson Roges Teixeira Góes
Departamento de Expressão Gráfica – UFPR
artgoes@ufpr.br

Palavras-chave: Construção de uma representação; Teorema de Pitágoras

Resumo:

Este trabalho apresenta proposta de construção de uma representação “física” do Teorema de Pitágoras aplicada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio, realizada a partir do vínculo como bolsistas do Subprojeto Matemática 3 do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) - Universidade Federal do Paraná (UFPR). Este trabalho teve como instituição parceira da Educação Básica o Colégio Estadual Padre Cláudio Morelli, situado no bairro Umbará, na cidade de Curitiba/PR.

Umas das motivações para este trabalho provém de uma série de vídeos no youtube com representações físicas do Teorema de Pitágoras, exemplo na Figura 1.

Figura 1
Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=bS-D0XeFMPQ

Para está construção utilizamos imagens, materiais manipuláveis e recursos computacionais da Expressão Gráfica para para facilitar o entendimento do Teorema de Pitágoras, assim

> “A Expressão Gráfica é um campo de estudo que utiliza elementos de desenho, imagens, modelos, materiais manipuláveis e recursos computacionais aplicados às diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de apresentar, representar, exemplificar, aplicar, analisar, formalizar e visualizar conceitos. Dessa forma, a Expressão Gráfica pode auxiliar na solução de problemas, na transmissão de ideias, de concepções e de pontos de vista relacionados a tais conceitos”. (GÓES, 2013, p. 20)

A atividade iniciou com a discussão da proposta de construção de uma representação do Teorema de Pitágoras que pudesse ser manipulada. Diante disto os estudantes começaram a pensar na forma de elaboração. Como registro destas possibilidades, sugerimos que desenhassem a representação do Teorema.

Neste momento houveram dificuldades, pois os estudantes não dominavam as técnicas de desenho geométrico e a maioria não conseguiu construir um ângulo reto. Dos participantes, apenas um realizou a construção do solicitado e para isto, utilizou as margens da folha como lados do ângulo de 90º.

Na discussão realizada, questionando como construir ângulos retos os estudantes indicaram que necessitariam do uso de um transferidor, não recordando que pode ser construídos com outros instrumentos como esquadros, régua e compasso.

Com o objetivo de (re)inserir o desenho geométrico na educação básica, uma vez que, apesar de estar nos documentos oficiais como Brasil (1997), verifica-se que muitos professores de matemática não a construção com régua e compasso em sala de aula. Desta forma, apresentamos algumas construções básicas de desenho geométrico, como a construção do ângulo de 60º (Figura 2) e a construção da mediatriz (Figura 3), em aulas realizadas de uma maneira investigativa. Todas as construções foram pensadas em grupo e foram discutidas de diferentes formas para realizar cada construção.

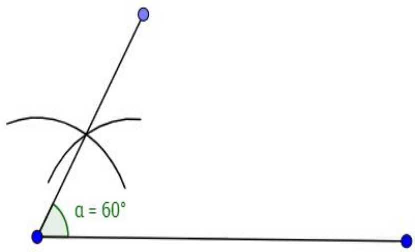


Figura 2
Fonte: os autores

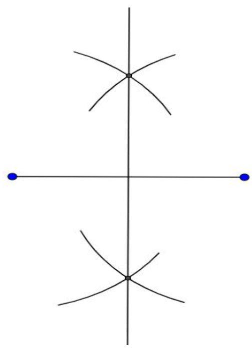


Figura 3
Fonte: os autores

Após essa etapa os estudantes retornaram a atividade inicial, ou seja, uma representação para o Teorema de Pitágoras. Para isto escolheram o triângulo pitagórico de lados 3, 4 e 5 cm para o primeiro desenho e, para o objeto real a ser construído, um múltiplo desse triângulo: o triângulo de lados 12, 16 e 20 cm.

Surgiram outras questões acerca da área e do volume necessário para preencher o modelo. Os cálculos sobre área foram realizados sem dificuldades, visto que eram os conteúdos que estavam sendo abordados pelo professor regente. Já os cálculos de volume, os estudantes tiveram que realizar pesquisa, uma vez que era o próximo tópico a ser abordado no planejamento do docente.

Os materiais selecionados para a construção foram papel cartão, cola quente, plástico e areia (essa determinada pelos cálculos anteriores). Para essa construção foram necessários dois encontro semanais, essa etapa foi bastante explorada pelos alunos, nos quesitos de escolha de material e melhor forma de construção, a Figura 4 representa um momento dessa construção e a Figura 5 o resultado dessa etapa.

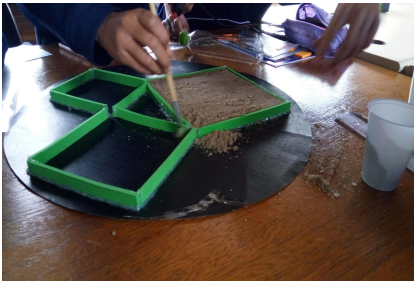


Figura 4 - Construção da representação.
Fonte: os autores

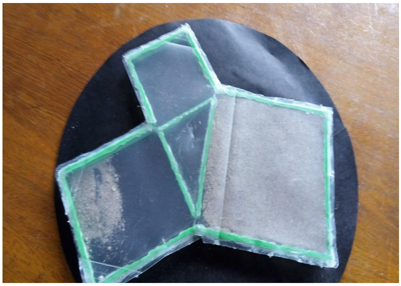


Figura 5 - Representação do Teorema
Fonte: os autores

Quanto às considerações da atividade pode-se destacar que os estudantes demonstraram interesse na realização, pensando nos materiais que poderiam ser utilizados e qual seria o melhor material para o preenchimento. Foi decidido utilizar areia, porém a areia utilizada era de construção e, consequentemente, muito grossa, dificultando a passagem de um quadrado para outro. No entanto, objetivo do projeto foi concluído: estudar alguns tópicos com os estudantes e realizar a construção da representação.

Referências:

OLIVEIRA, Clézio Lemes de. **Importância do desenho geométrico.** 2005. 8 f. Monografia (Graduação) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2005.

Sequência Didática:
Plano Cartesiano.

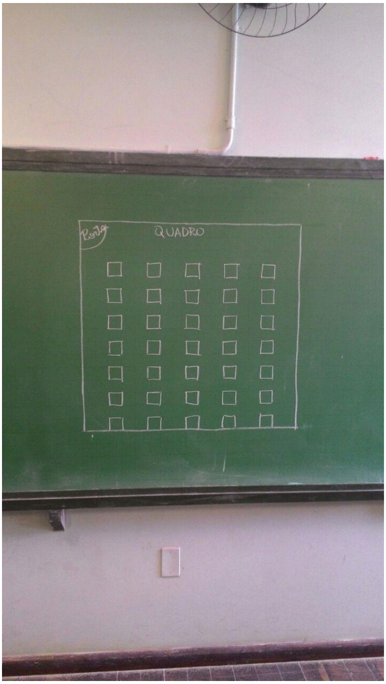
Darlane Almeida, Marcela Bertoldi, Nathaly Stefanovicz, Vinicius Medeiros
Licenciatura em Matemática - UFPR
darlanejusto1998@gmail.com, marcela.bertoldi@yahoo.com.br, stefanovicz1998@gmail.com, vinicius.medeiros0706@gmail.com

Palavras-chave: Plano Cartesiano, Sequência a-didática. Matemática.

Resumo:

Uma das atividades que nós bolsistas de Iniciação à Docência (ID) do PIBID Matemática 1 fazemos é o desenvolvimento e aplicação de sequências didáticas. Este trabalho tem como objetivo apresentar como foi o desenvolvimento de uma sequência didática sobre o Plano Cartesiano. Este conceito relaciona diversas áreas da Matemática e é fundamental para o entendimento do conceito de função. A sequência didática foi desenvolvida mesclando diversas tendências metodológicas, como resolução de problemas e jogos, baseada na teoria de Situação a-didática, na qual a intenção de ensinar não é revelada ao discente, mas foi planejada e construída pelo professor, que nesse caso são os bolsistas envolvidos no trabalho. A elaboração da sequência didática foi realizada durante as reuniões do PIBID, por todos os bolsistas ID. Foram feitas discussões e alterações de forma aberta e coletiva, sob a orientação da coordenadora e da supervisora da escola. A proposta desta sequência foi planejada para seis aulas, composta de quatro atividades, com o objetivo de apresentar o plano cartesiano para os alunos, ensiná-los a marcar os pontos, a fazer a leitura correta desses pontos e fazer com que eles observem a possibilidade de que uma coordenada depende da outra (o que é importante para o conceito de função), além da formalização do conceito. A primeira atividade foi um mapeamento da sala de aula utilizando apenas a localização das mesas de cada aluno e a lousa. A segunda atividade foi o Jogo Batalha Naval, no qual um discente é o navio e o outro tenta adivinhar sua posição no tabuleiro usando as orientações básicas. A terceira consistiu em uma gincana composta de desafios que foram realizados apenas com papel quadriculado e lápis e a última consistiu na introdução de função do primeiro grau relacionando o preço com a compra de camisetas. A sequência foi aplicada em turmas do 1º ano do Ensino Médio e assim observou-se as dificuldades encontradas por um professor em sala de aula.

Durante o desenvolvimento desta sequência didática, observamos que é necessário que o professor pense nas dificuldades que os alunos possam ter com a linguagem que está sendo utilizada, por exemplo, ponto simétrico, e nas dificuldades que ele possa ter na aplicação das atividades. Na realização da sequência tivemos alguns pequenos imprevistos que foram contornados e não afetaram o desenvolvimento desta. Entendemos que a preparação de uma sequência requer conhecimentos e cuidados por parte do professor, e isso é importante para nossa formação profissional.



(Mapa da atividade 1)

(Jogo Batalha Naval – Atividade 2)

(Jogo Batalha Naval – Atividade 2)

(Atividade 4)

Referências:

ALMOULOUD, S. A. Fundamentos da Didática da Matemática. Edição atualizada. Editora UFPR, 2007.

Matemágicas e Exercícios Lógicos: Um minicurso adaptado a três públicos distintos

Rogério Otávio Mainardes da Silva[1]
Matemática – UFPR
rogerio.mainardes@ufpr.br

Keith Gabriella Flenik Morais[2]
Licenciatura em Matemática – UTFPR-CT
keithgabriella@hotmail.com

Luciana Schreiner de Oliveira
Departamento Acadêmico de Matemática – UTFPR-CT
lu_zan@hotmail.com

Resumo:

O ensino da matemática, por vezes, pode se tornar algo repetitivo e fugir da atenção de muitos estudantes. Diante disso, a busca por meios de incentivar alunos a iniciar ou mesmo permanecer no campo da lógica matemática faz-se de extrema necessidade. A utilização de jogos educativos é uma estratégia interessante, pois estes promovem a construção do conhecimento através de atividades lúdicas e estimulantes que melhoram a concretização do raciocínio matemático.

Baseando-se em pesquisas bibliográficas conforme as definições de Marconi e Lakatos (2013) e a abordagem metodológica de ensino fundamentada nas concepções de Ponte (2013) de Investigação Matemática e Muniz (2010) de Jogos Matemáticos, os desenvolvimentos dos minicursos deram-se sob a apresentação e a discussão de algumas atividades que englobam desafios de lógica e truques matemáticos “que consistem, basicamente, em adivinhações e predições aritméticas, todos fundamentados em propriedades aritméticas elementares” (Sampaio, 2008, p.11), visando estimular a criatividade e o raciocínio matemático.

> Ao observarmos o comportamento de uma criança em situações de brincadeira e/ou jogo, percebe-se o quanto ela desenvolve sua capacidade de fazer perguntas, buscar diferentes soluções, repensar situações, avaliar suas atitudes, encontrar e reestruturar novas relações, ou seja, resolver problemas. (GRANDO, 2000. p.19).

A partir da premissa de incentivo pedagógico matemático, surgiu-se a possibilidade da apresentação de minicursos realizados a partir de ementas similares para três diferentes públicos: graduados e professores atuantes em matemática, estagiários e licenciandos em matemática; com seus respectivos focos.

1. “Matemágicas: Um Incentivo Pedagógico Matemático”: Este minicurso[3] foi apresentado no XXIII Encontro Regional de Estudantes de Matemática do Sul (EREMATSUL XXIII), no Instituto Federal Catarinense, Campus Concórdia (IFC – Concórdia), ofertado tanto para graduandos quanto para professores atuantes (Figura 1), teve em sua grande maioria professores já atuantes e graduados.

---

[1] Bolsista PET Matemática da UFPR
[2] Bolsista PIBID Matemática da UTFPR-CT
[3] Disponível em: <https://drive.google.com/open?id=0B3s6z2dZyI-AT09wYzNmQTBYeTg>

Figura 1- Aplicado no XXIII EREMATSUL
Fonte: Acervo próprio

Figura 2- Aplicado na Semana dos Estagiários
Fonte: Acervo próprio

O objetivo era apresentar e discutir oito atividades, chamadas de "matemágicas" (Sampaio, 2008), que visam estimular a criatividade e o raciocínio matemático, e ainda, fortalecer os conteúdos matemáticos já vistos em sala de aula.

2. "Matemágica": Após adaptação, o minicurso[4] foi apresentado na Semana dos Estagiários (Figura 2) na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba, (UTFPR-CT), em agosto de 2017, ofertado para os estagiários da universidade que são alunos de ensino médio e graduandos em letras, matemática, administração, engenharia e comunicação organizacional. O propósito era aproximar os participantes de uma matemática lúdica e descontraída, incentivando-os a desenvolver seu raciocínio lógico para resoluções de situações-problemas.

3. "Expandindo Limites com Matemágicas e Outros Desafios Lógicos Aplicados ao Ensino Fundamental": Por fim, foi apresentado[5] na Semana Acadêmica das Licenciaturas da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba (UTFPR-CT), ofertado para todos os alunos graduandos de qualquer curso da universidade e dando enfoque aos licenciandos, porém tendo como público apenas graduandos do curso de matemática da UTFPR e UFPR. O enfoque era ensina-los "mágicas" de cunho matemático e desafios lógicos simples como ferramentas para incentivo de iniciação, permanência e reintegração do aluno do ensino fundamental na lógica matemática.

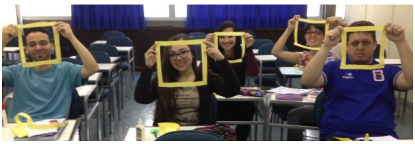


Figura 3 – Minicurso aplicado na Semana Acadêmica das Licenciaturas, UTFPR-CT
Fonte: Acervo próprio

Todos os minicursos receberam materiais em comum: um almanaque criado pelos autores, um protótipo de baralho com apenas 20 cartas, folhas sulfite e tesouras. Cada atividade executada em cada minicurso foi apresentada aos participantes da seguinte forma: exibição, interação, resolução e explicação. A exibição e a interação da atividade ou truque matemático (Sampaio, 2008) foram aplicadas pela metodologia de Jogos Matemáticos nas concepções de Muniz (2010), como um instrumento facilitador no processo de aprendizagem. Os jogos possuíam base simbólica, regras, jogadores, situações-problemas, mas não eram competitivos como Muniz (2010, p. 42) propõe.

---

[4] Disponível em: < https://drive.google.com/open?id=0B3s6z2dZyI-ATTZUczhHZE5NZDg>
[5] Disponível em: < https://drive.google.com/open?id=0B3s6z2dZyI-ASXBIMlpfbGZtdU0>

> Os elementos do jogo representam entes concretos, mas a situação de jogo, vivenciada pelo aluno e que o leva à ação, é baseada numa situação irreal e metafórica, criada pelo homem. (...) pode-se dizer que o jogo, determinado por suas regras, poderia estabelecer um caminho natural que vai da imaginação à abstração de um conceito matemático. (GRANDO, 2000, p.21).

A resolução e a explicação aconteceram pela metodologia de investigação matemática, pois o processo foi dado por etapas conforme Ponte (2013): (i) apresentação da atividade pelo apresentador; (ii) momento de reflexão e exercício individual ou em grupo para desvendar as propriedades e fundamentos matemáticos das atividades e, por fim, (iii) após o fim da dinâmica, uma reflexão sobre a sua relevância e a possibilidade de se abordá-la em sala de aula.

Foi possível perceber a diferença da recepção das atividades em cada público: os professores e graduados apreciavam mais as justificativas e demonstrações, tinham mais facilidade com atividades algébricas; os estagiários tinham mais pressa para saber os resultados, consultavam as respostas do almanaque; já os licenciandos, que também tinham o raciocínio algébrico e lógico rápidos, conseguiram apresentar demonstrações diferentes dos ministrantes. Em todos os minicursos foram possíveis apresentar todas as atividades planejadas e pelo menos mais um extra, em especial com os estagiários devido a rapidez.

Pode-se dizer que os participantes se sentiram atraídos e entretidos pelas tarefas, pois jogavam entre eles e trabalhavam em grupos. A turma de estagiários, sendo o público de maior variedade de áreas de atuação e a mais jovem, se esforçava para entender o raciocínio matemático apesar de muitos terem iniciado o minicurso anunciando o seu mal desempenho na disciplina. Ademais, como todos os participantes eram convidados para serem voluntários dos truques matemáticos ou apresentarem suas respostas no quadro, se sentiam valorizados e orgulhosos de si mesmos deixando de lado o receio com a Matemática.

Referências:

GOMES, Walter Helvécio. **Oficina da Matemática: Conserta, Acerta, Soluciona - Cálculos e Problemas.** Sabará: Gráfica e Editora Mafali Ltda, 2014.

GRANDO, Regina Célia. **O Conhecimento Matemático E O Uso De Jogos Na Sala De Aula.** 2000. 239 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de Pesquisa: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisa, elaboração, análise e interpretação de dados.** 7. ed. 7. reimpr. São Paulo: Atlas, 2013.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

SAMPAIO, João Carlos Vieira; MALAGUTTI, Pedro Luiz Aparecido. **Mágicas, Matemática e Outros Mistérios.** São Carlos: EdUFSCar, 2008.

As contribuições do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat- para a formação de professores no âmbito da Educação Especial

Rogério de Oliveira Souza
Bacharelado em Engenharia Mecânica – UTFPR-PG
rogerio98@outlook.com

Renata da Silva Desbessel
Doutoranda PPGECT-UTFPR
renatadessbesel@utfpr.edu.br

Sani de Carvalho Rutz da Silva
Departamento de Matemática – UTFPR
sani@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Educação especial, Inclusão, PROFMAT.

Resumo:

A Educação Especial está presente na sala de aula, em específico, na sala de aula de matemática e muitos são os desafios para os professores da Educação Básica nos diferentes aspectos, como as metodologias, as adaptações, o conhecimento das necessidades dos alunos, enfim muitas são as dúvidas. A lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional assegura aos alunos com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades ou superdotação: “professores com especialização adequada em nível médio ou superior, para atendimento especializado, bem como professores do ensino regular capacitados para a integração desses educandos nas classes comuns” (BRASIL, 1996).

Nesse sentido nosso interesse neste trabalho foi investigar as contribuições do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – para a formação de professores no âmbito da Educação Especial. Vale salientar que este não é um dos objetivos do Programa, mas encontramos diversos trabalhos na área o que nos aponta um caminho em relação ao nosso propósito. O PROFMAT é um programa de mestrado semipresencial ofertado em rede nacional e tem como objetivo “proporcionar formação matemática aprofundada e relevante para a docência na Educação Básica, visando dar ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática” (SBM, 2016, p.1) contribuindo para a melhoria da qualidade de ensino no país e para a formação de bons profissionais.

Para o desenvolvimento optamos por uma pesquisa de análise qualitativa e bibliográfica, definido por GIL (2002) como aquela que é desenvolvida com base em material já elaborado. Com a intenção de analisar aquelas dissertações do PROFMAT que são voltadas para a área da educação especial, ampliando a discussão sobre o tema e contribuindo para futuras pesquisas na área, assim os

trabalhos foram selecionados através de uma busca na base de dados do PROFMAT utilizando-se as palavras “educação especial”, "libras", "surdos", "surdez", "cegos", "deficientes visuais", "deficiência", "inclusão", "autismo", "altas habilidades", “inclusiva", “braille” e "transtorno”. Esta busca retornou 22 resultados que foram analisados, buscando informações sobre os objetivos e metodologia utilizada.

Os primeiros trabalhos de conclusão de curso do PROFMAT, foram apresentados em 2013, em relação a Educação Especial até o momento presente 22 trabalhos foram defendidos com esta temática, sendo que 18% foram publicados em 2013, 18% em 2014, 37% em 2015, 22% em 2016 e apenas 5% no ano de 2017, o que nos mostra que é crescente o interesse por esta temática.

Quanto aos objetivos, podemos ver que 50% dos trabalhos tem como objetivo desenvolver ou aplicar atividades com materiais concretos ou recursos visuais, 27% buscaram realizar uma revisão teórica ou apresentar dados e relatos sobre a educação especial, 14% buscaram compreender o processo de aprendizagem de um aluno especial, 5% tinham como objetivo analisar as contribuições da sala de recursos multifuncional e 5% buscavam verificar o domínio por parte dos professores e a importância de recursos para o ensino de cegos. Ou seja, a maioria dos trabalhos estão voltados para a sala de aula e como tornar a matemática inclusiva.

Analisando as metodologias utilizadas nos trabalhos percebemos que 14 não descrevem a metodologia utilizada, três definem sua pesquisa como um estudo de caso, 2 como uma pesquisa descritiva e exploratória e os 3 restantes definem cada um como uma análise documental, ainda outro como uma pesquisa qualitativa e quantitativa com entrevistas e questionários e o último como uma pesquisa qualitativa e aplicada, através de atividades.

Como podemos ver a maioria dos trabalhos analisados na pesquisa não definem ou apresentam a metodologia utilizada, isso pode ser relacionado ao fato do programa não ter um padrão para os trabalhos de conclusão, que podem atender diferentes formatos, tais como:

> Dissertação, revisão sistemática e aprofundada da literatura, artigo, patente, registros de propriedade intelectual, projetos técnicos, publicações tecnológicas; desenvolvimento de aplicativos, de materiais didáticos e instrucionais e de produtos, processos e técnicas; produção de programas de mídia, editoria, relatórios finais de pesquisa, softwares, projeto de aplicação ou adequação tecnológica, protótipos para desenvolvimento ou produção de instrumentos, equipamentos e kits, projetos de inovação tecnológica, sem prejuízo de outros formatos, de acordo com temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica e impacto na prática didática em sala de aula.(SBM, 2016, p.5)

Diante do exposto percebemos que o tema da educação especial vem ganhando espaço no meio acadêmico e embora, ainda, com pequenos números, podemos notar um crescimento na busca por estudos nessa área em um Programa cujo foco não está no público em questão. Os estudos analisados nos mostraram uma preocupação com o desenvolvimento e aplicação de atividades utilizando materiais concretos como jogos lúdicos e uso de recursos tecnológicos. As autoras Fernandes e Healy (2007) nos trazem que a inclusão exige um processo de formação contínua, e para a construção de: " [...] uma sociedade para todos implica na conscientização coletiva da diversidade humana e na estruturação para atender às necessidades de cada cidadão e certamente a escola tem um papel fundamental nessa construção" (p.75).

Assim podemos ter um panorama de como a educação especial está sendo abordada no PROFMAT, dos objetivos buscados pelos professores e como esse assunto está sendo abordado pelos professores no nível de pós-graduação. Constatamos que ainda são poucos os estudos com temáticas da educação especial, porém estes nos trazem uma perspectiva de evolução no ensino de matemática, além de possibilitar conhecimento de alguns estudos de caso, que por sua vez, poderão ser iguais ao da nossa sala de aula.
Espera-se que este trabalho contribua para futuras pesquisas na área e para a divulgação da temática da inclusão, que vem sendo cada vez mais discutida na sociedade.

Referências:

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação 9394/96. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário oficial da União**, Brasília, 20 dez. 1996.

BRASIL. Lei 13146. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). **Diário Oficial da União**, Brasília, 06 jul.2015.

FERNANDES, S.H.A.A; HEALY, L. Ensaio sobre a inclusão na Educaçâo Matemática. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n.10, p. 59-76, Jun/2007

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. - São Paulo : Atlas, 2002

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (SBM). **Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT.** 2017. 21/11/16 Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/files/Regimento_2017.pdf>. Acesso em: 10/04/17.

AS DIFICULDADES DOS ALUNOS DO CURSO DE EXPRESSÃO GRÁFICA COM RELAÇÃO AOS CONTEÚDOS DE GEOMETRIA E POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DA GEOMETRIA DINÂMICA

Sirley Santos Cezar Siqueira
Licenciatura em Matemática – UFPR
sirlook@yahoo.com.br

Prof.ª Dr.ª Deise Maria Bertholdi Costa (Orientadora)
Departamento de Expressão Gráfica – UFPR
deise@ufpr.br

Palavras-chave: Geometria, Expressão Gráfica, Aprendizagem.

Resumo:

Neste trabalho procura-se investigar os motivos das dificuldades de interpretação dos conceitos de Geometria e/ou defasagem nos conteúdos desta área, apresentadas pelos calouros do curso de Graduação em Expressão Gráfica da Universidade Federal do Paraná (UFPR), dos anos 2013, 2015 e 2016. Pretende-se ainda analisar como a utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica como, por exemplo, o *Geogebra* e o *CaRMetal*, podem auxiliar os alunos a supri-las. Aborda-se o aspecto histórico do ensino da Geometria nos diversos níveis escolares e a preocupação de que, apesar de sua visível importância, pois está presente em nosso cotidiano e a compreensão de seus conceitos auxilia na leitura do mundo, vem sendo deixado em segundo plano. Relatam-se as atividades desenvolvidas, que foram aprimoradas no decorrer da pesquisa, e realizadas com o uso de régua e compasso e também com o uso dos *softwares* anteriormente citados. A análise desses dados indica que as dificuldades apresentadas podem ser decorrentes do fato de os alunos não alcançarem o conhecimento de Geometria esperado ao terminar o ensino médio, segundo os PCNs e outros documentos, ou da falta de maturidade do raciocínio matemático para usar propriedades, definições e teoremas nas justificativas de suas conjecturas. Essa análise ainda indica que a Geometria Dinâmica auxilia na compreensão de conceitos de Geometria, pois facilita a manipulação de figuras, permitindo que o aluno teste suas hipóteses de maneira mais simples do que na Geometria estática (no papel). Dando continuidade a esse

trabalho, é possível realizar o acompanhamento desses alunos para verificar seu amadurecimento a respeito dos conceitos de Geometria ou ainda realizar uma pesquisa que compare o desempenho de alunos de dois ou mais cursos numa disciplina que tenham em comum, por exemplo, Geometria Dinâmica, com alunos dos cursos de Expressão Gráfica e Matemática.

Referências:

ALVES, G. S.; SAMPAIO, F. F. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. **Sistemas de Informação da FSMA**, Rio de Janeiro, n. 5, p. 69-76, 2010. PDF.

BORBA, M. D.; PENTEADO, M. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte, Autêntica, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : matemática**. Brasília, 1997.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7, 1996, Belo Horizonte. **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, Belo Horizonte, 1996, p.1-13. PDF.

PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 02/11/2015.

PEREIRA, F. J. **O ensino da geometria na sala de aula do ensino médio e uma experiência com o PIBID – UEPB**. Monografia (Licenciatura Plena em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba, 2014. PDF.

POI, T. M.; LUZ, A. A. B. S; GÓES, A. R. T. Análise do ensino da Expressão Gráfica no currículo do curso de matemática da UFPR. In: GRAPHICA, 2011, Rio de Janeiro. **Anais do Graphica 2011**. Rio de Janeiro. 2011. PDF.

OS PESOS DE BACHET E AS EQUAÇÕES DE PRIMEIRO GRAU

Thiago Lucas da Silva (Bolsista de Iniciação à Docência)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
thiagotuig@gmail.com
Patrícia Olibratoski Fernandes (Professora supervisora do PIBID)
Colégio Estadual José Busnardo
patyof@terra.com.br

Resumo: Nessa atividade, em duas aulas, os estudantes do 7º ano regular vivenciaram uma contextualização diferenciada, com o objetivo de aprimorar o aprendizado das equações no sentido de equilíbrio. A aula teve início com a contextualização: "antes das balanças eletrônicas, mecânicas, o costume era utlizar 6 pesos (de 1, 2, 4, 8, 16 e 32 quilos) e uma balança de equilíbrio, para pesar qualquer peso inteiro de 1 a 40 quilos, colocando o produto a ser pesado em um prato e a combinação de pesos no outro. Porém, Claude-Gaspard 'Bachet' de Méziriac, apresentou a utilização de 4 pesos somente (de 1, 3, 9 e 27 quilos), com exatos 40 quilos no total, e não 63, como é a soma dos 6 pesos antes utilizados, e obtendo o mesmo efeito, porém utlizando o princípio de contra-peso." Utilizando peças de blocos lógicos, retângulos e triângulos, representando esses pesos, 6 quadrangulares e 4 triangulares, 10 peças, no total, um plano (em cartolina, representando uma balança) contendo dois círculos para representar os pratos da balança, quadro e giz, foram realizadas diversas perguntas aos alunos do sétimo ano, para obterem opções de quilos inteiros, utilizando somente os seis pesos quadrangulares, e, em seguida, utilizando somente os quatro pesos triangulares, com os estudantes ao redor de uma mesa com o material de simulação da balança. Dando prosseguimento, e enfatizando a importância dos conceitos de equilíbrio e contra peso executados, foi realizado um exemplo de equação no quadro, com desenhos de balança e latinhas. No fim, foi aplicada uma pequena lista de exercícios, onde os resultados foram visíveis, com estudantes exclamando que estavam conseguindo resolver as equações, ao lembrarem do pricípio do equilíbrio da contextualização inicial em conjunto com o aprendizado anteriormente aplicado, como os princípios aditivos e multiplicativos da igualdade.

Palavras-Chave: Contextualização; Equação; Equilíbrio; Igualdade; Matemática.

Referências

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática - 7º Ano**. São Paulo: Editora Ática. 2011.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: Record. 1998**.**

Geometria e Topologia

Banca Avaliadora:

Prof. Olivier Brahic
Prof. Diego Mano Otero
Prof. Ricardo Paleari da Silva

A Espiral de Euler

Gabriel Cordeiro Chileider *
Licenciatura em Matemática - UFPR
gabriel.chileider@ufpr.br

Prof. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
eidam@ufpr.br

Palavras-chave: Espiral de Euler, Clotoide, Radioide aos arcos.

Resumo:

A Espiral de Euler, também conhecida como Clotoide, é uma notória curva plana que foi estudada por grandes matemáticos, como James Bernoulli e Augustin-Jean Fresnel por estar associada a Teoria da difração e elástica. Outro matemático que a estudou foi Ernesto Cesàro, este que, descobriu algumas propriedades relacionadas a geometria. Neste trabalho apresentaremos algumas dessas propriedades e uma aplicação relacionada a rodovias.

A Clotoide é definida como uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cuja curvatura k(s) é proporcional ao seu comprimento de arco s (e inversamente proporcional ao seu raio de curvatura ρ). Em outras palavras, a Clotoide pode ser definida pela equação:

$$\rho.s = a^2,$$

onde a é uma constante positiva.

Utilizando essa Equação e o Teorema fundamental das Curvas Planas é possível mostrar que, a menos de rotações e translações, a Espiral de Euler é a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s cos\left(\frac{t^2}{2a^2}\right) dt, \int_0^s sen\left(\frac{t^2}{2a^2}\right) dt \right)$$

As integrais acima são denominadas Integrais de Fresnel e a curva γ leva o nome de Leonhard Euler pois foi ele o responsável por descobrir que quando $s \to\infty$, $\gamma(s)$ converge para o ponto $\left(a\frac{\sqrt{\pi}}{2}, a\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$. Esta informação juntamente com o vetor tangente permitiu a Euler esboçar o traço da clotoide.

*Bolsista do Programa de Iniciação Cientifica Matematicativa

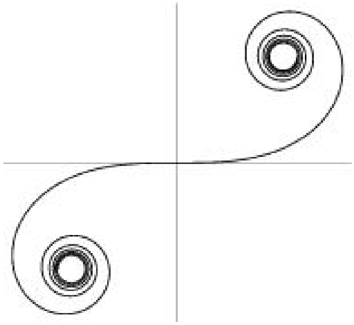


Figura 1: Traço - Espiral de Euler

Com o Auxilio do Teste de Dirichlet mostraremos que as integrais de Fresnel convergem. O cálculo destas integrais é um problema interessante e desafiador que utiliza integrais compléxas e o critério da comparação.

Algo interessante a se considerar na Clotoide é o centro de Gravidade de um arco arbitrário, ele está contido na reta que une os centros dos círculos osculadores das extremidades deste arco. Embora o centro de gravidade esteja situado na reta que une os centros dos círculos osculadores, esta propriedade não o caracteriza. Outra propriedade que será abordada é que o centro de gravidade de um arco da espiral é o centro de homotetia dos círculos osculadores das extremidades do arco. Dessa forma, podemos determinar o seu centro de gravidade.

Para finalizar, mostraremos uma aplicação em rodovias, concluindo que a velocidade máxima sem derrapar de um veículo em uma estrada que possui o formato da Espiral de Euler, é inversamente proporcional a raiz quadrada de sua curvatura. Logo, conforme varia o comprimento de arco e quanto maior a curvatura em um ponto da estrada, menor terá de ser a velocidade do veículo.

Referências:

[1]LEVIEN, Raphael Linus. From Spiral to Spline: Optimal Techniques in Interactive Curve Design. 2009. 191f. Dissertação (Phd Thesis in techniques for interactive curve design) - University of California, Berkley - USA. PDF.

[2]CASTRO, R.L. A Espiral de Euler e suas principais propriedades. Monografia Pós-Graduação - Instituto de Ciências Exatas - ICEx, Departamento de Matemática, da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

[3]SOARES, M.G. Calculo em uma varíavel complexa:5.ed.Rio de Janeiro:IMPA.

Construção de Códigos Esféricos Usando a Fibração de Hopf

Henrique Koji Miyamoto *
Graduação em Engenharia Elétrica - Unicamp
miyamotohk@gmail.com

Prof. Henrique Sá Earp e prof.ª Sueli Costa (Orientadores)
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - Unicamp
henrique.saearp@ime.unicamp.br e sueli@ime.unicamp.br

Palavras-chave: códigos esféricos, fibração de Hopf, álgebras de divisão.

Resumo:

Um código esférico $C(M, n)$ é um conjunto de M pontos na superfície da esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Apresentamos uma nova construção de códigos esféricos, baseada nas propriedades topológicas da fibração de Hopf e inspirados por uma construção anterior em camadas de toros planares [1][2]. O problema tratado é o do *empacotamento esférico*, na seguinte versão: dada uma distância mínima d, buscamos o maior número de pontos M em S^{n-1} de forma que a distância euclidiana entre dois deles seja no mínimo d. Uma das principais aplicações desse problema está na transmissão de sinais por canais gaussianos [1].

Para isso, usamos as propriedades da fibração de Hopf [3]:

$$\begin{aligned} h : S^{2n-1} &\to S^n \\ (z_0, z_1) &\mapsto (2z_0\overline{z_1}, |z_0|^2 - |z_1|^2) \end{aligned}$$

em que z_0, z_1 são elementos de uma das álgebras de divisão normadas: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$ ($n = 1, 2, 4, 8$). Para a construção em $\mathbb{R}^4$ ($n = 2$), exploramos a folheação da esfera S^3 por toros T^2 através de uma parametrização natural dada pela fibração de Hopf:

$$(\eta, \xi_1, \xi_2) \mapsto (e^{i\xi_1} \sin \eta, e^{i\xi_2} \cos \eta)$$

em que $\eta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $\xi_i \in [0, 2\pi[,\ i = 1, 2$.

O procedimento de distribuição de pontos ocorre em duas etapas:

1. Variando η, escolhemos toros $T_\eta \cong S^1_{\sin\eta} \times S^1_{\cos\eta}$ mutuamente distantes (na métrica euclidiana em $\mathbb{R}^4$) de no mínimo d. Para isso, usamos o fato de que a distância mínima entre T_η e $T_{\eta'}$ em S^3 coincide com a distância entre os pontos $e^{i\eta}$ e $e^{i\eta'}$ no primeiro quadrante de S^1.

*Bolsista de Iniciação Científica FAPESP 16/05126-0.

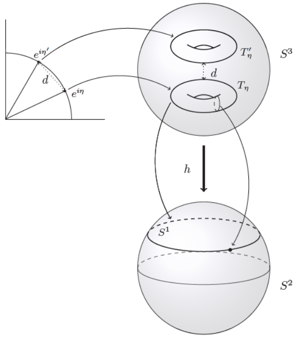


Figura 1: Fibração de Hopf e distância entre toros.

2. Para cada toro, escolhemos n círculos internos, cada um com m pontos equidistantemente distribuídos, de forma que círculos subsequentes tenham uma defasagem de ângulo $\psi_m = \frac{\pi}{m}$ na distribuição dos pontos.

A distribuição em $\mathbb{R}^4$, baseada na fibração de Hopf $h : S^3 \to S^2$, é usada como caso base para a distribuição nas dimensões $\mathbb{R}^8$ e $\mathbb{R}^{16}$. Nestas, usamos um procedimento iterativo em que a esfera S^{2n-1} é folheada por variedades $S^{n-1}_{\sin\eta} \times S^{n-1}_{\cos\eta}$ ($n = 4, 8$). Em cada esfera S^{n-1}, é feita a distribuição da dimensão anterior, a menos de escala.

Em $\mathbb{R}^4$, verificamos que a constução desenvolvida coincide com a de camadas de toros planares (TLSC) e que as duas têm desempenho semelhante e superior ao de outros métodos conhecidos [1][2]. Em $\mathbb{R}^8$ e $\mathbb{R}^{16}$, foi feito um comparativo com a implementação do método TLSC apresentada em [4]. Nosso desempenho é superior para um certo intervalo de d, notadamente para distâncias muito pequenas. Um aspecto importante é a construtibilidade dos códigos apresentados para uma distância mínima fixada. A etapa atual do trabalho consiste em melhorar o procedimento, de forma a ultrapassar o desempenho comparativo em todas as distâncias avaliadas.

Tabela 1: Códigos esféricos em $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^8, \mathbb{R}^{16}$ para algumas distâncias mínimas [1][4]

Dimensão	d	Hopf	TLSC
$\mathbb{R}^4$	$0,4$	280	308
	$0,2$	2.656	2.718
	$0,1$	22.016	22.406
$\mathbb{R}^8$	$0,4$	8.608	14.336
	$0,2$	$2,28 \times 10^6$	$4,16 \times 10^5$
	$0,1$	$3,76 \times 10^8$	$7,11 \times 10^6$
$\mathbb{R}^{16}$	$0,4$	$1,25 \times 10^6$	$1,23 \times 10^7$
	$0,2$	$6,95 \times 10^{10}$	$8,43 \times 10^9$
	$0,1$	$4,17 \times 10^{15}$	$3,14 \times 10^{12}$

Referências:

[1] TOREZZAN, C.; COSTA, S. I. R.; VAISHAMPAYAN, V. Constructive spherical codes on layers of flat tori. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 59, n. 10, p. 6655-6663, out. 2013.

[2] TOREZZAN, C. **Códigos esféricos em toros planares**. 115 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

[3] LYONS, D. W. An elementary introduction to Hopf fibration. **Mathematics Magazine**, v. 76, n. 2, p. 87-98, abr. 2003.

[4] NAVES, L. R. B. **Códigos esféricos em canais grampeados**. 147 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.

Otimização

Banca Avaliadora:

Profa. Natalha Benatti
Prof. Kleber Benattii
Profa. Camila Isoton

ESTUDO DE BACIAS DE ATRAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES.

Adriana Maria Guimarães de Souza
Bacharelado em Matemática - UFPR
adrigs023@gmail.com

Prof. Elizabeth Wegner Karas (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
ewkaras@gmail.com

Palavras-chave: Bacias de atração, Sistemas não lineares, Newton.

Resumo: Uma bacia de atração ou uma convergência de uma raiz x de f é o conjunto de pontos iniciais x_0 para os quais a sequência de pontos x_k gerada pelo método de Newton converge para x, ou seja, converge para a solução de uma função da forma $F(x) = 0$ onde o método de Newton é a ferramenta computacional utilizada para a resolução de sistemas não-lineares. Basicamente, estudar bacias de atração é equivalente a analisar o comportamento do método ao ser aplicado em uma função f de acordo com pontos iniciais, onde a escolha do ponto inicial é de extrema importancia para obter-se uma resposta satisfatória com a aplicação do método. O conjuntos dos pontos iniciais a partir dos quais a sequência gerada pelo método em estudo converge para uma solução do problema é a bacia de atração desta solução para aquele método. As bacias de atração podem diferir de um método para o outro. Estas bacias podem gerar imagens fractais. Fractais são formas geométricas abstratas de grande beleza, com padrões complexos que se repetem infinitamente que, mesmo limitados a uma área finita, possuem propriedades que os diferenciam de figuras geométricas convencionais tais como estrutura fina, ou seja, o grau de detalhamento não diminui quando examina-se uma porção arbitrariamente pequena do fractal e também são autossimilares, isto é, uma porção pequena do fractal reproduz a forma de uma porção maior. Estas figuras estão diretamente relacionadas às bacias de atração. Para uma melhor compreensão, buscamos uma maneira de visualizar tais bacias geradas pela resolução de sistemas não lineares de equações do plano pelo método de Newton. Graficamente cria-se uma malha de pontos e aplica-se o método de Newton tomando cada ponto da malha como inicial, gerando assim uma sequência para cada ponto. Se esta sequência converge para uma solução do sistema, o ponto da malha é pintado de uma determinada cor. Para cada solução é escolhida uma cor diferente.Caso a sequência não convirja, o ponto inicial também será pintado de preto, mostrando assim que o método falhou. Com isso temos uma visualização das bacias de atração das soluções do sistema. A fronteira das bacias de atração das soluções está relacionada com os pontos iniciais a partir dos o método falha.

References

[1] SERRA, C.P., KARAS,E. W. Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos. Curitiba: Champagnat, 1997.

[2] FALCONER, Kenneth. Fractal geometry. Tiptree Essex : John Wiley & Sons, 1990

[3] JULIA, Gaston. Mémoirie sur l'iteration des fonctions rationelles. J. Math Pures et Appl., v. 8.

[4] MANDELBROT, Benoit. The fractal geometry of the nature. San Francisco : Freeman, 1982.

[5] CHURCHILL, V. Ruel. Variáveis complexas e suas aplicações. Mcgraw Hill do Brasil, 1975.

[6] RUGGIERO,M. A. R.;LOPES,V. L. R. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. Pearson Makron Books, v. 2.

Condições de Qualificação e Propriedades do Conjunto de Multiplicadores

Everton Jose da Silva
Licenciatura em Matemática - UFPR
evertonsilva@ufpr.br

Profª. Lucelina Batista dos Santos (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
lucelina@ufpr.br

Palavras-chave: Programação não linear, Condições de qualificação, Conjunto de multiplicadores.

Resumo:
Neste trabalho estudaremos um problema de programação não linear, que consiste de minimizar uma certa função objetivo f em um conjunto com restrições de igualdade e desigualdade. Consideraremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{Sujeito a: } h(x) = 0, \\ &\qquad\qquad\quad g(x) \leq 0. \end{aligned} \tag{P}$$

onde $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, são funções de classe $\mathcal{C}^2$.

Este tipo de problema tem sido extensivamente estudado na literatura especializada, tanto do ponto de vista teórico quanto aplicado. Veja [1] e [5], por exemplo. É sabido que sob certas condições impostas às restrições do problema - denominadas "condições de qualificação" ou "qualificação de restrição" - as condições de Karush-Kuhn-Tucker (abreviadamente, KKT) são necessárias para otimalidade. Estas condições, são expressas em termos de uma regra de multiplicadores. Talvez, as mais conhecidas sejam as condições de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ), de Independência Linear (LICQ), de Guignard (GCQ) e de Abadie (ACQ). Um dos objetivos deste estudo é estabelecer as relações existentes entre estas condições de qualificação, as quais foram amplamente discutidas em [3]. Além disso, também desejamos estudar a estrutura do conjunto dos multiplicadores. Veremos que, sob condições de qualificação adequadas, se pode garantir que o conjunto dos multiplicadores é limitado, fechado, ou ainda compacto. Veja [4] e [6]. Veremos ainda que (LICQ) é uma condição necessária e suficiente para que o conjunto de multiplicadores seja um conjunto unitário (*singleton*, em inglês). Exemplos e contraexemplos também foram estudados.

Referências:

[1] BAZARAA, M. S.; SHETTY, C.M. *Nonlinear programming - Teory and Algorithms.* 2ª ed, New York: 1943.

[2] BECKER, L. C. *Introducción a la Optimización con Restricciones.* Universidad de Chile. Santiago, 1984.

[3] EUSTÁQUIO, R. G. *Condições de otimalidade e de qualificação para problemas de programação não linear.* 136 f. Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

[4] GAUVIN, J. *A necessary and suficient regularity condition to have bounded multipliers in nonconvex programming.* Mathematical Programming, 12(1):136-138, 1977.

[5] RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W.*Otimização Contínua: aspectos teóricos e computacionais.* São Paulo: Cengage Larning, 2013.

[6] WACHSMUTH, G. *On LICQ and the uniqueness of Lagrange multipliers.* Operations Research Letters, 41(1):78 80, 2013.

Previsão de Resultados de Jogos de Futebol usando Machine Learning

Fillipe Rafael Bianek Pierin *
Bacharelado em Matemática - UFPR
bianekpierin@gmail.com

Prof. Geovani Nunes Grapiglia (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
geovani_mat@outlook.com

Palavras-chave: Machine Learning, Regressão Logística, regularização, Otimização, Futebol, Previsão.

Resumo:

Machine Learning ou Aprendizagem de Máquinas é um método para análise de dados que evoluiu do estudo de reconhecimento de padrões e da teoria do aprendizado computacional em inteligência artificial. O objetivo da inteligência artificial é o desenvolvimento de "máquinas" com "inteligência" similiar à inteligência humana.

Exite dois tipos de aprendizagem de máquina: o aprendizado supervisionado e o aprendizado não supervisionado. Em mais de 70% do aprendizado de máquina ocorre o uso com aprendizado supervisionado.

No aprendizado supervisionado, o algoritmo do modelo recebe um conjunto de entradas e suas respectivas saídas, onde tais informações serão utilizadas na construção de um modelo de previsão de novas entradas. Por meio de métodos como de classificação, regressão e boosting do gradiente, o modelo utiliza padrões para prever os valores do rótulo em dados adicionais não rotulados. Matematicamente, dados $(x^{(1)}$, $y^{(1)})$, $(x^{(2)}$, $y^{(2)})$, $\ldots$, $(x^{(m)}, y^{(m)})$, onde $y^{(i)}$ representa o rótulo associado a $x^{(i)}$, o objetivo é encontrar uma função m_θ tal que $m_\theta(x^{(i)}) \approxeq y^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$. Assim, $m_\theta(x)$ é a previsão para o rótulo de um novo dado x.

No aprendizado não supervisionado não são atribuídas classes aos dados, de maneira que o modelo deve encontrar padrões relativos a tais. Ou seja, dados $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $\ldots$, $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, o objetivo é encontrar um padrão a partir desse conjunto de dados.

Neste trabalho será apresentado o método de aprendizagem de máquinas com o uso do aprendizado supervisionado, nomeado regressão logística, sem e com o uso de alguns tipos de regularização. Emprega-se este método para implementação e treinamento de modelos, com o intuito de prever resultados dos jogos de futebol e comparar modelos com alguns critérios de regularização e sem regularização, verificando-se

*Iniciação Científica.

qual obtém melhor desempenho na previsão dos resultados. Esse tipo de análise pode ser visto como um problema de classificação, porque se procura classificar os resultados dos próximos jogos em vitória do time mandante (1), empate (2) ou vitória do time visitante (3).

A regularização, que é amplamente utilizada na aprendizagem de máquinas, é necessária para evitar overfitting ou underfitting, principalmente quando há um pequeno número de exemplos (rótulos) ou quando há um grande número de parâmetros a serem aprendidos. Sendo underfitting quando λ é muito grande, e todos os parâmetros acabam sendo penalizandos, deixando-os próximos de zero; e overfitting quando o erro do modelo aplicado ao conjunto de treinamento é excelente, mas quando aplicado ao conjunto de teste fica alto. Para tal, acrescentamos um termo de regularização para a função objetivo

$$f(\theta) = \frac{1}{2m}\left[\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)} - y^{(i)})^2 + \lambda\sum_{i=1}^{n}\theta_j^2\right]$$

onde λ é o parâmetro de regularização.

Dado o exemplo usando o objetivo regularizado, obtêm-se uma curva muito mais suave que se adapta aos dados e dá uma hipótese muito melhor.

A probabilidade $m_\theta^{(i)}(x)$ do jogo de futebol pertencer a um dos resultados $i \in \{1, 2, 3\}$ é dada pelo modelo logístico

$$m_\theta^{(i)}(x) = \frac{1}{1 + e^{-\theta^T x}}$$

onde $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ é o vetor de parâmetros do modelo e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Usa-se o método One-vs-All para classificar os resultados dos jogos futuros, em vitória do time mandante ($m_\theta^{(1)}(x)$), empate ($m_\theta^{(2)}(x)$) ou vitória do time visitante ($m_\theta^{(3)}(x)$), usando dados das rodadas anteriores. Ou seja, o método One-vs-all treina o classificador da regresão logistica $m_\theta^{(i)}(x)$, para cada classe (i), para predizer a probabilidade de $y = j$. Desta forma, pelo método One-vs-All, se

$$j = argmax_{i\in\{1,2,3\}}\left\{m_\theta^{(i)}(x)\right\}$$

prevemos que o jogo x terá como resultado j.

Os parâmetros (θ) de cada modelo são calibrados a partir de dados do campeonato brasileiro de 2017, retirados do site da Confederação Brasileira de Futebol (CBF) e do site SoccerWay. Esta calibração dos parâmetros faz-se de modo a minimizar o erro entre as previsões de cada modelo e os dados reais. Para analisar os dados utiliza-se o programa Octave.

Alguns resultados de classificação obtidos do campeonato brasileiro de 2017, com o uso do modelo regressão logística sem regularização, cuja taxas de acerto dos modelos $m_\theta^{(1)}(x)$, $m_\theta^{(2)}(x)$, e $m_\theta^{(3)}(x)$, que são respectivamente, vitória do time madante, empate e vitória do time visitante, e do One-vs-All são os seguintes:

Tabela 1: Taxa de acerto dos modelos e One-vs-All usando regressão logística.

Rodada	$m_\theta^{(1)}(x)$	$m_\theta^{(2)}(x)$	$m_\theta^{(3)}(x)$	Taxa de Acerto (One-vs-All)
6º	50.00%	70.00%	70.00%	60.00%
7º	50.00%	75.00%	75.00%	58.62%
8º	50.00%	85.71%	64.29%	57.58%
9º	56.25%	25.00%	62.50%	60.81%
10º	55.56%	50.00%	38.89%	63.41%
11º	55.00%	50.00%	35.00%	62.22%
12º	59.09%	50.00%	18.18%	62.24%
13º	50.00%	54.17%	29.17%	58.49%
14º	69.23%	34.62%	46.15%	60.53%
15º	67.86%	32.14%	50.00%	58.20%
16º	70.00%	63.33%	43.33%	60.00%
17º	71.88%	65.63%	40.63%	58.70%
18º	64.71%	73.53%	55.88%	54.11%
19º	63.16%	68.42%	52.63%	52.63%
20º	68.40%	73.70%	60.50%	52.47%

Por fim, compara-se os modelos treinados com modelos usados em sites da internet, para desta forma verificar se o modelo apresenta resultados confiáveis e que predizem o mais corretamente os resultados dos jogos de futebol.

Referências:

[1] FIGUEIRA, C. V. **Modelos de regressão logística**. 2006.

[2] PAULA, G. A. **Modelos de regressão: com apoio computacional**. [S.l.]: IME-USP São Paulo, 2004.

[3] PIERIN, F. R. B. **Previsão de resultados de jogos de futebol por meio de regressão logística multinomial**. 2016.

Otimização Irrestrita: Métodos, Análises e MMQ

Gustavo Cordeiro Libel*
Engenharia de Computação - UTFPR
gustavolibel@alunos.utfpr.edu.br

Profa. Dra. Diane Rizzotto Rossetto (Orientadora)
Departamento Acadêmico de Matemática - UTFPR
dianerossetto@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Otimização, Método dos Mínimos Quadrados, Métodos Otimização.

Resumo:

A otimização se refere aos problemas matemáticos relacionados a encontrar os valores que maximizam ou minimizam funções satisfazendo determinadas restrições.

Abordaremos os problemas de otimização definidos como

$$\begin{array}{ll} minimizar & f(x) \\ sujeito\ a & x \in \Omega \end{array}$$

onde a função objetivo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis de decisão e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto de restrições. Para $\Omega = \mathbb{R}^n$, temos um problema irrestrito.

Diferentes métodos iterativos podem ser utilizados para encontrar um x^* que minimize a função f. Estes métodos iterativos têm por objetivo criar uma sequência de pontos $\{x^k\}$ que converge para solução x^*. Entre os métodos estudados podemos citar:

- Método de Cauchy ou do Gradiente;
- Método de Newton;
- Método do Gradiente Conjugado;
- Método Quase-Newton (BFGS e DFG).

*Bolsista do Programa PICME.

A Figura 1 ilustra 4 iterações do Método de Cauchy em uma função quadrática.

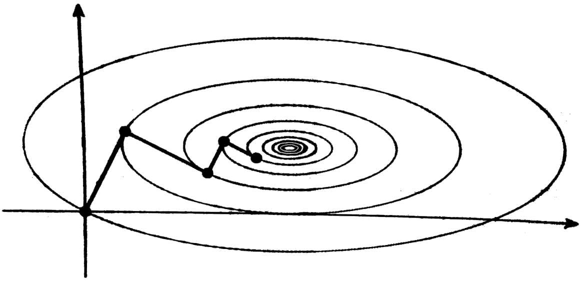


Figura 1: Método de Cauchy em uma Função Quadrática [1]

Neste trabalho discutiremos a convergência dos métodos e alguns fatores que devem ser considerados na análise de um método para resolver um problema. Queremos encontrar algoritmos que resolvam o máximo possível de problemas com o mínimo de recursos utilizados, ou seja, métodos robustos e eficientes.

O problema de estimação de parâmetros consiste em encontrar os parâmetros x de uma função objetivo ϕ não-linear que melhor se ajuste a um conjunto de dados (t, y). Esse problema pode ser modelado via otimização irrestrita usando a técnica de Mínimos Quadrados Não Linear (MMQ). Para isso, definimos uma função f a ser minimizada como a somatória do erro ao quadrado da nossa aproximação.

$$\begin{aligned} \min_x f(x) &= \sum_{j=1}^{m} (r_j(x))^2 \\ r_j(x) &= \phi(x, t_j) - y_j \end{aligned}$$

Também abordaremos em nosso trabalho o Método de Gauss-Newton, algoritmo muito utilizado na resolução de problemas MMQ, sendo tal uma adaptação do Método de Newton.

Referências:

1. RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. **Otimização Contínua - Aspectos Teóricos e Computacionais**. Cengage Learning, 2013.

2. CROEZE, A.; PITTMAN, L.; REYNOLDS, W. **Solving Nonlinear Least-Squares Problems With the Gauss-Newton and Levenberg-Marquardt Methods**. Baton Rouge and Oxford, 2012.

3. FRIEDLANDER, A. **Elementos de Programação Não-Linear**. Unicamp, 1994.

Introdução à Teoria de Grafos e Aplicações

Lucas Matheus Sandeski *
Licenciatura em matemática - UEPG
lucassan1509@gmail.com

Prof. Marciano Pereira (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística -UEPG
marciano@uepg.br

Palavras-chave: Otimização, Menor caminho, Grafos.

Resumo:

Muitas situações podem ser convenientemente descritas através de diagramas que consistem de um conjunto de pontos, juntamente com linhas que ligam alguns desses pares de pontos. Por exemplo, os pontos podem representar pessoas, as linhas ligam pares de amigos; os pontos podem representar centros de comunicações, as linhas ligações entre os centros. A abstração matemática de situações desse tipo é feita via o conceito de grafo.

A teoria de grafos se originou a partir do problema das Pontes de Königsberg, resolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler, na primeira metade do século XVIII. Este foi o primeiro a escrever um artigo relacionado a grafos.

Atualmente a teoria de grafos tem diversas aplicações nas mais variadas áreas, como, por exemplo, na Química, na Informática, na Modelagem e na Otimização.

O presente trabalho teve por objetivo realizar um estudo detalhado da teoria de grafos, abordando seus principais conceitos, propriedades e resultados, bem como suas diversas aplicações, além de apresentar alguns algoritmos. Finalizamos o trabalho com um estudo introdutório de algo bastante recente em Teoria de Grafos, a Teoria Espectral de Grafos.

Um grafo é um conjunto $G = (V, E)$, em que V é um conjunto finito não-vazio de elementos e E é um conjunto de pares de elementos de V. Os elementos de V são chamados de vértices, e os elementos de E são conhecidos como arestas.

Os vértices v e w são ditos adjacentes se $(v, w) \in E$. E um caminho é definido na teoria dos grafos como uma lista de vértices adjacentes.

Em determinados grafos associamos às arestas um número não negativo $P(e)$, chamado de peso da aresta e.

A matriz de adjacência do grafo G com vértices $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$ é a matriz $A_{n\times m} = (a_{ij})$, em que

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME).

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ é adjacente a } v_j \text{ em G} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Entre as diversas aplicações ou problemas estudados destacamos como mais notáveis os seguintes: as Pontes de Königsberg, conexão de 3 serviços a 3 casas, a coloração de mapas, o Caixeiro Viajante, a menor distância (peso) entre dois vértices, a conexão de todos os vértices com um menor peso, a planaridade de grafos. O processo de resolução de todos esses problemas pode ser adaptado para resolver problemas similares.

Problemas em que se quer conectar todos os vértices, com um peso mínimo, sendo que o peso pode ser tempo, custo, quantidade de material, distância, etc, podem ser resolvidos pelos algoritmos de Kruskal ou de Prim, de forma ótima. Entretanto, problemas de menor caminho, que consistem em achar o caminho de peso mínimo entre dois vértices, podem ser resolvidos com o auxílio do algoritmo de Dykstra, de forma ótima. Um exemplo deste último problema é como segue: Suponha que um caminhoneiro deseja fazer uma entrega, na cidade de Cascavel, saindo de Curitiba, de modo que leve o menor tempo possível. Porém, as estradas possuem limites de velocidade, inclinação, qualidade do asfalto e quantidade de curvas diferentes, de modo que a distância não é o único fator a ser considerado. O tempo estimado em minutos de viajem entre as cidades está simplificado pelo grafo abaixo.

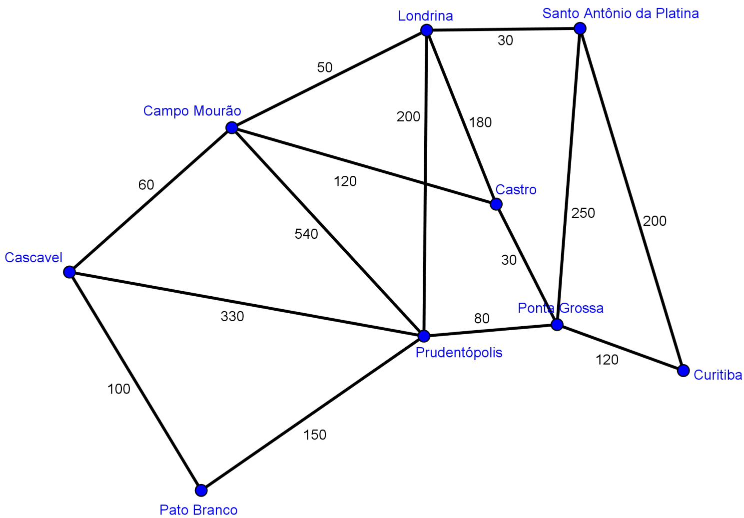


Figura 1: Grafo que simplifica o tempo para percorrer as rotas possíveis do exemplo.

Este problema pode ser resolvido com o algoritmo de Dijkstra, porém não o resolverei aqui, devido a falta de espaço.

Finalizando, a Teoria Espectral de Grafos vem sendo estudada com o intuito de descrever propriedades estruturais do grafo, a partir de seu espectro. Essa área surgiu pelas necessidades da quimica, e tem tido muito interesse ultimamente, evidenciado pela grande quantidade de publicações na área nos últimos anos.

O polinômio característico da matriz de adjacência $A(G)$, ou seja, *det*$(\lambda I - A(G))$, é denominado polinômio característico de G; λ é dito um autovalor do grafo G quando λ é uma raiz do polinômio característico de G. Se $A(G)$ possui autovalores distintos $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_s$, tal que a multiplicidade de λ_i seja dada por $m(\lambda_i)$. O espectro do grafo G, denotado $spect(G)$, é definido como a matriz $2 \times s$, onde a primeira linha é constituída pelos autovalores distintos de $A(G)$ dispostos em ordem decrescente e a segunda, pelas suas respectivas multiplicidades algébricas. Ou seja, escrevemos

$$spect(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_s) \end{bmatrix}.$$

O maior autovalor de G é denominado índice de G.

Nos estudos realizados calculamos o espectro de um grafo completo, e de um ciclo. E por fim, a energia de um grafo é definida como a soma dos valores absolutos dos autovalores do grafo. Então se $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ são os autovalores do grafo G de ordem n, a energia $\varepsilon(G)$ de G é dada por:

$$\epsilon(G) = \sum_{i=1}^{s} |\lambda_i|.$$

Toda molécula pode ser representada por um grafo, tal que todo átomo representa um vértice, e se dois átomos da molécula estão ligados, então há uma aresta conectando os vértices correspondentes a esses átomos. Sendo o conceito da energia de um grafo, decorrente desse modo de ver átomos. De forma que a energia de um grafo possui diversas aplicações em química.

Referências:

[1] ABREU, N.; DEL-VECCHIO, R.; TREVISAN, V.; VINAGRE, C. **Teoria Espectral de Grafos – Uma Introdução.** 3º Colóquio de Matemática da Região Sul. Florianópolis, 2014.

[2] BALAKRISHNAN, R.; RANGANATHAN, K. **A textbook of Graph Theory**. Nova Iorque: Springer-Universitex, 2012.

[3] JURKIEWICZ, S. **Grafos - Uma Introdução**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[4] SCHEINERMAN, E. R. **Matemática Discreta - Uma introdução**. Rio de Janeiro: Cengage Learning, 2011.

Método híbrido para minimizar a distância entre um ponto e uma spline

Marcel Thadeu de Abreu e Souza *
Bacharelado em Matemática - UFPR
marcel.abreu@ufpr.br

Profa. Dra. Mael Sachine (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
mael@ufpr.br

Palavras-chave: Otimização, Spline cúbica, Método de Newton.

Resumo:

Obter a distância mínima entre objetos é uma das mais importantes operações geométricas em simuladores e na robótica. Neste trabalho analisaremos um método que combina os métodos de Newton e de minimização quadrática [3] de forma a minimizar a distância entre um ponto qualquer e uma spline.

Consideremos uma curva na forma

$$(x(s), y(s), z(s)), 0 \leq s \leq L,$$

onde s é o comprimento do arco, L é o comprimento total do arco e $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ são splines cúbicas onde os nós $\{s_0, s_1, ..., s_n\}$ com $s_0 = 0$ e $s_n = L$ estão igualmente espaçados.

O quadrado da distância entre um ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e a posição $(x(s), y(s), z(s))$ em uma curva é

$$D(s) = (x(s) - x_0)^2 + (y(s) - y_0)^2 + (z(s) - z_0)^2.$$

O valor s^* que minimiza $D(s)$ determina $p_1 = (x(s^*), y(s^*), z(s^*))$, o ponto que está na spline cúbica mais próximo de p_0.

A partir destes dados, implementamos no software MatLab, um método híbrido que consiste em obter uma boa estimativa inicial pelo método da minimização quadrática para posteriormente ser utilizada no Método de Newton.

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET-Matemática)

Referências:

[1] ATKINSON K. Modeling a Road Using Spline Interpolation. **Reports on Computational Mathematics 145**, Department of Mathematics, The University of Iowa, 2002.

[2] GOMES RUGGIERO, M. A.; ROCHA LOPES, V. L. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.** 2a ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

[3] WANG H.; KEARNEY J.; ATKINSON K. Robust and Efficient Computation of the Closest Point on a Spline Curve. **Curve and Surface Design: Saint-Malo 2002**, T. Lyche, M.-L. Mazure, L.L Schumaker; Nashboro Press, Brentwood, p. 397–405, 2003.

Teoria de Grafos e o Problema de Conexão de Peso Mínimo

Maria Verônica Bartmeyer[1]
Licenciatura em Matemática – UEPG
veronicabartmeyer@gmail.com

Prof. Marciano Pereira (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística – UEPG
marciano@uepg.br

Palavras-chave: Caminhos, Árvores geradoras, Espectro do grafo.

Resumo:

A Teoria de Grafos teve sua origem no século XVIII, quando o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) resolveu o famoso problema das pontes de Köenigsberg, concluindo que o mesmo não possui solução. Desde então, a teoria desenvolveu-se amplamente, possuindo aplicações em diversas áreas, como, por exemplo, na Química, Economia, Biologia, Física e em áreas específicas da Matemática, como na Álgebra Linear e na Teoria dos Jogos.

Neste trabalho, realizamos um estudo detalhado da teoria de grafos, partindo de problemas históricos, bem conhecidos e famosos, como o citado acima, passando pelo estudo de seus principais conceitos, propriedades e resultados [7], bem como de diversas aplicações desta teoria [2, 3, 5, 6], e de alguns algoritmos. Finalizamos o trabalho com um estudo introdutório de algo bastante recente em Teoria de Grafos, que é a Teoria Espectral de Grafos [1, 2, 4, 8].

Dentre as aplicações estudadas, selecionamos a resolução de problemas relacionados ao conceito de árvore (grafo conexo e acíclico) e sua aplicação para resolução do problema de conexão de peso mínimo.

O problema analisado foi “Dado um grafo valorado, qual a árvore geradora de menor valor?”. Por exemplo, se queremos realizar a ligação de computadores em rede a custo mínimo, que ligações deveremos fazer? A resposta é uma árvore geradora, dada pelo algoritmo de Prim [2]. Este algoritmo é vantajoso em relação a outros, pois nos fornece a cada iteração uma subárvore geradora de peso mínimo.

Para exemplificar uma aplicação da teoria espectral de grafos, observamos que é possível encontrar a energia de um grafo circulante, por meio do cálculo de autovalores do grafo, obtido a partir do polinômio característico da matriz de adjacência.

Referências:

[1] Bolsista do Programa PICME.

[1] ABREU, N.; Del-Vecchio, R.; Trevisan, V.; Vinagre, C. **Teoria Espectral de Grafos** – Uma Introdução. Florianópolis: 3º Colóquio de Matemática da Região Sul (Minicurso), 2014.
[2] BALAKRISHNAN, R. E RANGANATHAN, K. **A Textbook of Graph Theory**. 2ª Ed. Nova Iorque: Springer, 2012.
[3] BONDY, J. A. E MURTY, U. S. R. **Ghaph Theory with Applications**. Nova Iorque: North-Holland, 1982.
[4] CAVALCANTI, A. S. **Matrizes Circulantes**: Aplicação na Resolução de Equações Polinomiais. 2016. 84 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. 2016.
[5] HOWARD, A. E RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 8ª Ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.
[6] JURKIEWICZ, S. **Grafos** – Uma Introdução. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2009.
[7] SCHEINERMAN, E. R. **Matemática Discreta** - Uma introdução. Rio de Janeiro: Cengage Learning, 2011.
[8] ZHANG, F. **Matrix Theory** - Basic Results and Techniques. 2ª Ed. Nova Iorque: Springer, 2011. 399 p.

Métodos numéricos para encontrar zeros de funções reais e suas aplicações

Matheus Daniel Galvão de Melo
Bacharelado em Matemática - UFPR
matheusdgm@hotmail.com

Profa. Mael Sachine
Departamento de Matemática - UFPR
mael@ufpr.br

Palavras-chave: Métodos numéricos, aproximação de zeros de funções, processos iterativos.

Resumo:

Em muitas circunstâncias, é preciso encontrar zeros de funções que possuem um alto grau de dificuldade para serem estudadas. Para este fim, é comum serem utilizados métodos numéricos para aproximar, através de passos iterativos, zeros destas funções. Alguns destes métodos são:

Método da Bissecção: Consiste em encontrar um zero de uma determinada função contínua desde que, dado um intervalo $[a, b]$, os valores da função nos pontos a e b possuam sinais diferentes. Com estas condições satisfeitas, o método aproxima um zero da função iterativamente através de:

$$x_k = \frac{a+b}{2}.$$

Se o valor de $f(x_k)$ possui sinal equivalente ao de $f(a)$, então para a próxima iteração teremos $a = x_k$. Caso contrário, $b = x_k$.

Curiosidade: Existe um método similar ao da bissecção, chamado Método da Posição Falsa, que usa uma média ponderada ao invés de uma média aritmética.

Método do Ponto Fixo: Consiste em transformar a equação $f(x) = 0$ em outra equação equivalente $\varphi(x) = x$, e a partir de uma aproximação inicial x_0, gera uma sequência iterativa de aproximações para um zero da função da forma $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. A forma geral da função de iteração é $\varphi(x) = x + A(x)f(x)$, onde $A(x)$ é uma função não nula se calculada no zero de $f(x)$. Para que o processo seja convergente, é preciso satisfazer as seguintes condições: $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ contínuas num intervalo I centrado em ξ, $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$ e $x_0 \in I$.

Método de Newton: É um método do ponto fixo em que $A(x) = \dfrac{-1}{f'(x)}$ e cuja sequência iterativa é determinada por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Dos métodos numéricos aqui estudados, este é o método com a maior velocidade de convergência.

Graficamente ele consiste em, dado x_0, traçamos a reta tangente ao gráfico da função f em $(x_0, f(x_0))$, e o próximo iterando x_1 será o ponto de interseção desta reta tangente com o eixo das abscissas.

Método da Secante: Para certas funções o cálculo da derivada pode ter alto custo computacional, inviabilizando a aplicação do método de Newton. Nesse caso uma alternativa é utilizarmos o método da secante.

Note que $f'(x_k)$ é aproximadamente $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$. Geometricamente, x_{k+1} é obtido a partir da interseção do eixo das abscissas com a reta secante que passa pelos pontos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$.

A taxa de convergência do método da secante é menor que a do método de Newton, no entanto é maior do que os demais métodos estudados.

Com bases nestes métodos aqui apresentados, pretendemos pretendemos discorrer sobre alguns exercícios em particular que nos permitem perceber peculiaridades sobre os métodos aqui estudados.

Referências:

[1] RUGGIERO, M. A. G; LOPES, V. L. R. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais, 2ª edição. São Paulo: Pearson Makron Books, 2014.

[2] CAMPELLO, R. Lista de exercícios. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~campello/pm004/lista1comments.pdf>. Acesso em: 06 set. 2017