Números de Liouville e Soluções Periódicas de Equações Diferenciais Parciais

Jaqueline Aline Iensen *
Matemática - UFPR
jaquelineiensen@yahoo.com.br

Prof. Dr. Alexandre Kirilov
Departamento de Matemática - UFPR
akirilov@ufpr.br

Palavras-chave: Soluções Periódicas, Hipoeliticidade Global, Números de Liouville.

Resumo:

O objetivo desse trabalho é mostrar uma relação que existe entre a regularidade das soluções periódicas de uma equação diferencial parcial e a teoria de números, mais especificamente, a teoria de aproximações racionais de números reais. Neste contexto, surge naturalmente a necessidade de estudar números de Liouville.

As equações em questão pertencem ao tipo mais simples de equações diferenciais parciais, ou seja, equações de primeira ordem com coeficientes constantes, as quais podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - (a+ib)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = f(x,y),$$

com $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $i = \sqrt{-1}$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

Para estabelecer a relação entre esse tipo de equação e a teoria de números precisamos introduzir o conceito de Hipoeliticidade Global e um teorema de S. Greenfield e N. Wallach.

Dizemos que um operador diferencial P é globalmente hipoelítico quando, para toda função 2π-periódica $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, se $u = u(x,y)$ é solução 2π-periódica da equação $Pu(x,y) = f(x,y)$ então $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Teorema: (Greenfield-Wallach) Um operador diferencial P é Globalmente Hipoelítico se, e somente se, existem números reais positivos L, M e R tais que:

$$|\hat{P}(n,m)| \geq \frac{L}{(n^2+m^2)^M}, \quad \text{para } |n|, |m| \geq R$$

*Bolsista do Programa PET-Matemática.

sendo $\hat{P}(m,n)$ o símbolo do operador P.

Em relação ao operador $P = \dfrac{\partial}{\partial x} - (a+ib)\dfrac{\partial}{\partial y}$ mostramos o seguinte:

1. Se $b \neq 0$ então P é globalmente hipoelítico.
2. Se $b = 0$ e
   (a) $a \in \mathbb{Q}$ então P não é globalmente hipoelítico;
   (b) a irracional então P é globalmente hipoelítico se, e somente se, a é um irracional não Liouville.

Referências:

S. Greenfield and N. R. Wallach. Global hypoellipticity and Liouville numbers. *Proc. Amer. Math. Soc.* 31.1, 112–114, 1972.

S. Greenfield and N. R. Wallach. Hypoelliptic vector fields and cotinued fractions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 31, 115–118, 1973.

I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. An introduction to theory of Numbers, *N. York, John Wiley & Sons*, 1991.