Método das Diferenças Finitas para a Equação da Onda Unidimensional

Renan Oclides Domingues *
Bacharelado em Engenharia Química - UFPR
renan.oclides@hotmail.com

Prof. Abel Soares Siqueira (Orientador)
abel.s.siqueira@gmail.com
Departamento de Matemática - UFPR

Prof. Roberto Ribeiro Santos Junior (Coorientador)
robertoufs@gmail.com
Departamento de Matemática - UFPR

Setembro de 2017

Palavras-chave: Equação da Onda, Método das Diferenças Finitas, Equações Diferenciais Parciais.

Resumo:

As Equações Diferenciais Parciais (EDP's) relacionam derivadas de funções de duas ou mais variáveis. Uma de suas principais aplicações é na descrição de fenômenos ou comportamentos em função de diferentes taxas de variações físicas, como a posição e o tempo [1].

O fenômeno de estudo nesse trabalho é a propagação de uma onda unidimensional, que pode ser descrita pela mais simples equação da onda

$$\begin{aligned} &u_t + \alpha u_x = 0, \qquad t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x). \end{aligned}$$

Essa equação é uma EDP hiperbólica linear de primeira ordem, com velocidade $\alpha \in \mathbb{R}$ constante. Se conhecida a forma inicial $u(x,0)$ da onda [2], a solução do problema é

$$u(x,t) = u_0(x - \alpha t).$$

A solução indica que a onda mantém a forma da condição inicial enquanto viaja com velocidade α em uma única direção, conforme ilustrado na Figura 1.

*Bolsista do PICME

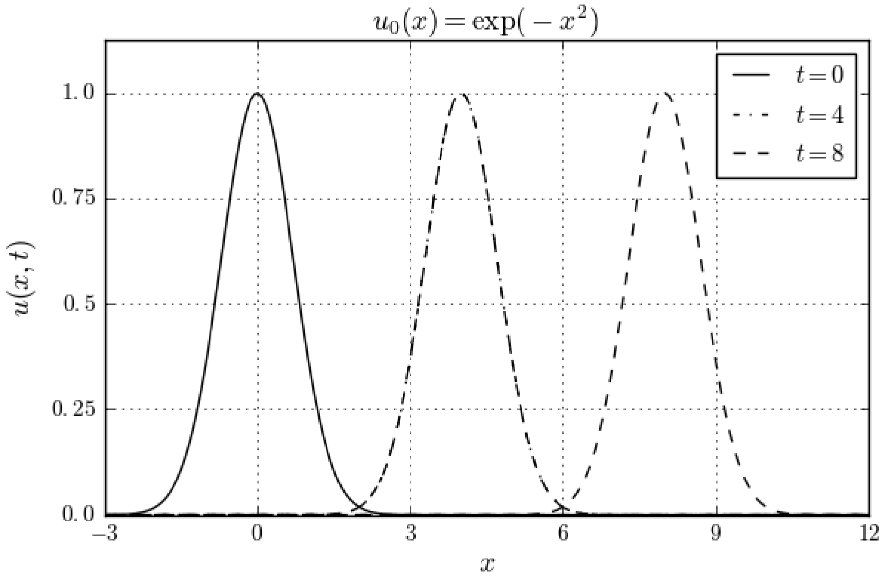

Figura 1: Solução de um exemplo de equação da onda unidimensional.

Uma forma de resolver EDP's numericamente é substituir as derivadas das funções por esquemas de diferenças, deduzidos a partir de expansões de Taylor da função [3]. Essa estratégia caracteriza o *Método das Diferenças Finitas* (MDF), que foi a técnica estudada nesse trabalho.

Foram demonstrados e implementados alguns dos mais conhecidos esquemas de diferenças finitas para a equação da onda unidimensional, incluindo o Up-wind, o Lax-Friedrichs, o Lax-Wendroff e o Leap-frog de quarta ordem. A implementação dos problemas foi feita na linguagem Julia [4] em pacote de código aberto [5], com exemplos gráficos para melhor visualização da propagação das ondas.

Nos exemplos gráficos para os esquemas Up-wind e Lax-Wendroff foi observada (Figuras 2 e 3) perda de energia característica de fenômenos difusivos e dispersivos, o que não se verifica na solução exata. Isso é explicado analisando o resto de Taylor dos esquemas de diferenças finitas, que revela operadores difusivos e dispersivos numéricos resultantes do truncamento da série de Taylor da função. Foram estudadas também a consistência e a estabilidade das fórmulas de diferenças usadas, que definem as condições de convergência do método [6].

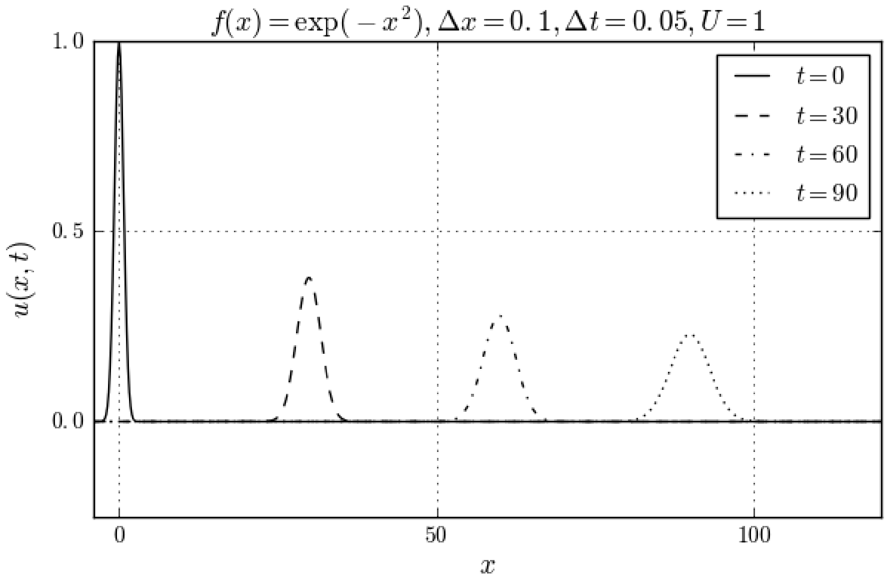

Figura 2: Difusão numérica no esquema Up-wind.

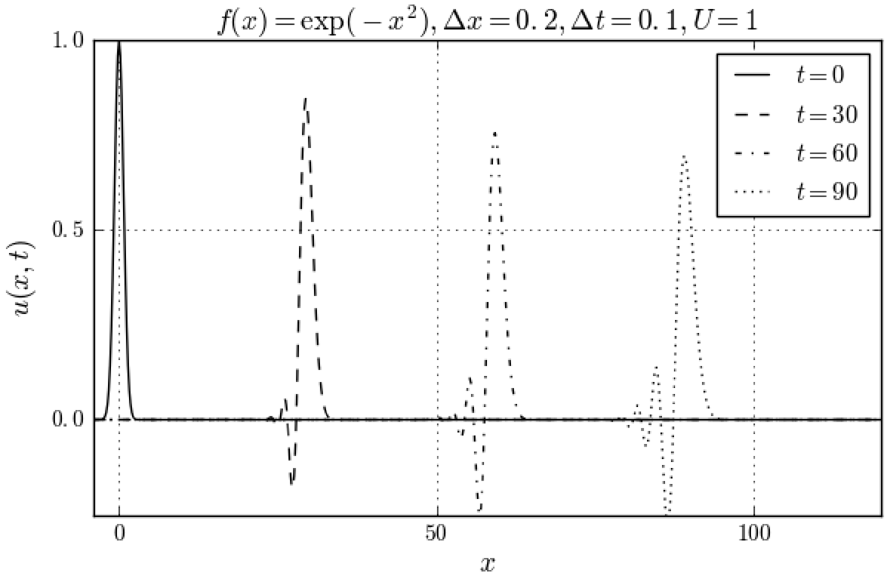

Figura 3: Dispersão numérica no esquema Lax-Wendroff.

Referências:

[1] PULINO, P. **Método das Diferenças Finitas - Aspéctos Teóricos, Computacionais e Aplicações**. Jul. 2008. URL:http://www.ime.unicamp.br/~pulino/MDF_AsTeCA/Textos2008/. Acesso em: 14 set. 2017.

[2] NACHBIN, A.; TABAK, E. **Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais**. URL:w3.impa.br/~nachbin/AndreNachbin/Courses_files/IMPA_EDPNum.pdf. Acesso em: 14 set. 2017.

[3] STRIKWERDA, J. C. **Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations**. 2a ed. SIAM, 2004.

[4] **The Julia Language.** URL:http://julialang.org/.

[5] URL:https://github.com/RenanOD/mdf.jl.

[6] TREFETHEN, L. N. **Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations.** 1996. URL:people.maths.ox.ac.uk/trefethen/pdetext.html. Acesso em: 14 set. 2017.