Estudo de Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicação Prática

Alexei Greboge[1]
Engenharia Civil – UFPR
alexeigreboge@gmail.com

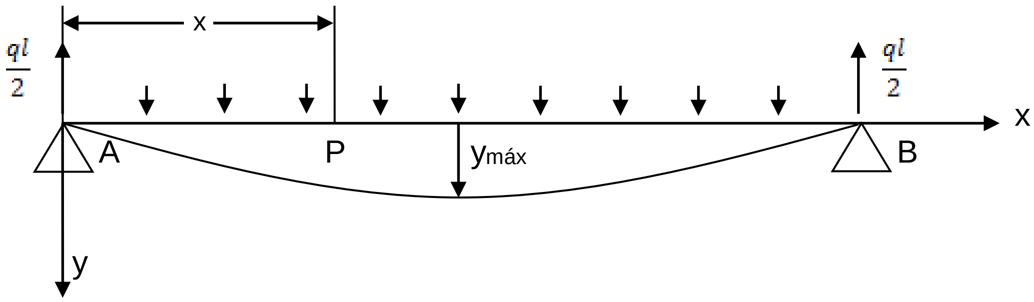
Profª. Dra. Liliana Madalena Gramani(Orientadora)
Departamento de Matemática – UFPR
l.gramani@gmail.com

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias, Métodos de Solução, Aplicação.

Resumo:
Neste trabalho serão apresentados de forma breve alguns dos tópicos estudados durante este ano de projeto e também uma aplicação prática.
Dentre as Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem estudadas temos: Equações de Variáveis Separáveis , Equações Homogêneas, Equações Exatas e Equações Lineares.
Com relação às Equações de Ordem Superior temos: Método dos Coeficientes a Determinar e Equações Não-homogêneas.
Também foi estudada a Transformada de Laplace : definição, construção da tabela e resolução de equações diferenciais.

Aplicação do Método das Variáveis separáveis no Cálculo da Flexão nas vigas:

A viga a seguir é biapoiada. Sua carga Q é distribuída uniformemente ao longo do comprimento L da viga, segundo *q* unidades de peso/ unidade de comprimento.



[1] Bolsista do PICME.

Seja uma seção transversal situada a uma distância x da origem *A* (x=*AP*). O momento em relação a *P,* devido à força do apoio *A*, é $\frac{qLx}{2}$. O momento em relação a *P* devido ao peso do segmento *AP* , é $\frac{qx^2}{2}$. A soma dos momentos é M(P)=$\frac{qx^2-qLx}{2}$.

A linha elástica é uma linha imaginária que passa pelo centro de gravidade de cada seção da viga, e que se curva quando a viga é submetida a uma carga.

A Equação da Linha Elástica é $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$, onde M é o momento fletor na seção, I é o momento de inércia da seção em relação ao eixo de simetria e E é o módulo de elasticidade do material da viga. Assim temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{EI}\left[\frac{Lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right] \Longrightarrow \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{q}{EI}\left[\frac{Lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right]$$

Integrando de ambos os lados da igualdade:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{EI}\int\left[\frac{Lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right]dx \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{q}{EI}\left[\frac{Lx^2}{4} - \frac{x^3}{6} + C_1\right] \qquad (1)$$

A tangente à linha elástica no meio da viga é paralela ao eixo x , ou seja, $\frac{dy}{dx}$ é nulo para $x = \frac{L}{2}$ .Dessa forma temos $C_1 = \frac{-L^3}{24}$.

Substituindo o valor de C_1 em (1) temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{EI}\left[\frac{Lx^2}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{L^3}{24}\right] .$$

Separando as variáveis temos:

$$dy = \frac{q}{EI}\left[\frac{Lx^2}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{L^3}{24}\right]dx$$

Integrando de ambos os lados da igualdade:

$$y(x) = \frac{q}{EI}\int\left[\frac{Lx^2}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{L^3}{24}\right]dx \Longrightarrow y(x) = \frac{q}{EI}\left[\frac{Lx^3}{12} - \frac{x^4}{24} - \frac{L^3x}{24} + C_2\right] \qquad (2)$$

A deformação vertical nos apoios da viga é nula, ou seja, $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$. Dessa forma temos $C_2 = 0$. Ou seja:

$$y(x) = \frac{q}{EI}\left[\frac{Lx^3}{12} - \frac{x^4}{24} - \frac{L^3x}{24}\right]$$

Como a deflexão máxima da viga ocorre no meio da viga, ou seja, em $x = \frac{L}{2}$, temos:

$$y_{máx}(x) = \frac{q}{EI}\left[\frac{Lx^3}{12} - \frac{x^4}{24} - \frac{L^3x}{24}\right] \text{ para } x = \frac{L}{2}$$

Dessa forma obtemos a fórmula para calcular a deflexão máxima da viga, que é:

$$y_{máx}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384EI}$$

Referências:

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 7ª. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

ZILL, D.; CULLEN, M., **Equações Diferenciais** 3ª. ed. MAKRON Books, 2001.

ROBINSON, J. C. **An Introduction to Ordinary Differential Equations.** [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.

PEREIRA, C. G. A., **Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem,** Monografia de Especialização, Campo Mourão, UTFPR, 2011.

MURPHY, G. M. **Ordinary Differential Equations anTheir Solutions.** New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1960.

NAGLE, R.; SAFF, E.; SNIDER, A., **Equações Diferenciais** 8ª. ed. Pearson, 2012.

ABUNAHMAN, S. A. , **Equações Diferenciais** 1ª . ed. LTC,1979.