Ponto Fixo de Banach e aplicações

Bianca Elena Wiltuschnig *
Bacharelado em Matemática - UFPR
bianca.elena.w@gmail.com

Prof. Dr. Hudson do Nascimento Lima (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
hudsonlima@ufpr.br

Palavras-chave: Espaços Métricos Completos, Teorema do Ponto Fixo de Banach, Método de Newton, Teorema de Picard.

Resumo:

O objetivo deste trabalho é estudar teoremas de ponto fixo e suas aplicações. Comecemos com o seguinte algoritmo:
1. Escolha um número arbitrário em radianos (pode ser tão grande quanto você queira).
2. Coloque-o em uma calculadora e calcule o seu cosseno.
3. Com a resposta obtida, refaça **2** sucessivamente.

Após um certo número de iterações, você perceberá que o resultado mostrado pela calculadora será aproximadamente 0,7390851332, dependendo do número de vezes que você teve a paciência de calcular. Como exemplo, vamos ver o que acontece se o valor inicial for 1234567890 rad. Na tabela a seguir, podemos ver o número de vezes que se calculou o cosseno do valor inicial e o respectivo valor obtido:

Iteração	Valor obtido	Iteração	Valor obtido
0	1234567890	11	0,731783706198571
1	-0,162831212199022	12	0,743983718047997
2	0,986772263641054	13	0,735776533167648
3	0,551385469143801	14	0,741309796623155
4	0,851799537042811	15	0,737584745506303
5	0,658630121073576	16	0,740094980144586
6	0,790831385852569	17	0,738404511435399
7	0,703254494809473	18	0,739543437008823
8	0,762741537366445	19	0,738776336657943
9	0,722944585280658	20	0,739293107049521
10	0,749860858252901	21	0,738945023555723

*Bolsista do Programa PET-Matemática.

Achou coincidência? Tente de novo com outro número, garanto que a resposta se aproximará do mesmo valor mencionado. Por que isso acontece? A resposta está no Teorema do Ponto Fixo de Banach, que é o objeto de estudo deste trabalho.

Após compreender conceitos como métrica, espaços métricos, sequências, convergência e funções, seremos capazes de demonstrar o teorema principal:

Teorema do Ponto Fixo de Banach: Considere (M, d) um espaço métrico completo e uma contração $f : M \longrightarrow M$. Então f possui um único ponto fixo.

Ao provar o teorema, obtemos um método iterativo para determinar o ponto fixo de uma aplicação que se encaixa nos moldes do teorema. Com isso, além de determinar o ponto fixo de funções, conseguimos algumas aplicações bem interessantes.

Podemos utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para determinar zeros de funções, estudando o Método de Newton sob a visão do teorema; demonstrar o Teorema de Picard, compressão de imagens e entender um pouco sobre o buscador do Google.

Referências:

BARROS, C. D. V. **O Teorema do Ponto fixo de Banach e algumas Aplicações**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1977.