Sistemas Dinâmicos em Superfícies: Classificação, Implementação e Aplicações

Fillipe Rafael Bianek Pierin *
Bacharelado em Matemática - UFPR
bianekpierin@gmail.com

Prof. Eduardo Outeiral Correa Hoefel (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
eduardo.hoefel@gmail.com

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Órbitas, Superfície.

Resumo:

A teoria de sistemas dinâmicos moderno, que tem como criador o matemático francês Henri Poincaré, apresenta aplicações em muitas áreas como biologia, física, e matemática. No ponto de vista deste trabalho, os sistemas dinâmicos são estudados através da evolução das iterações de uma função $f : X \to X$. Mais precisamente, entendemos um sistema dinâmico como uma função e a dinâmica como o estudo da evolução do sistema no tempo, ou seja, das iterações da função x, $f(x)$, $f^2(x)$, $\ldots$, $f^n(x)$, $\ldots$.

Nesse trabalho consideramos somente os sistemas dinâmicos em espaços discretos, isto é, sem levar em consideração as relações de vizinhança entre os pontos. Analisaremos em especial o caso de sistemas dinâmicos sobre $\mathbb{N}$, pois $\mathbb{N}$ é discreto e infinito. Estudamos o comportamento de sistemas dinâmicos em espaços discretos com o objetivo de verificar algumas de suas características, as quais envolvem os conceitos de órbita periódica, órbita densa, convergência de órbita, bacia de atração, e conjunto atrator e repulsor. No caso em que X for um conjunto de retângulos sobre uma superfície, estudamos a influência da "forma da superfície" sobre o comportamento do sistema dinâmico.

Uma órbita $O(x)$ pode ser periódica, quando ela se repete por um tempo indeterminado, por exemplo, $f(x) = x$. Mais abaixo daremos um exemplo mais elaborado. Uma órbita será densa quando $O(x)$ passa por todos os números naturais, como por exemplo, na dinâmica $f(x) = x + 1$, e existem ainda casos em que uma órbita não é nem densa nem periódica. Outro conceito importante é o de bacia de atração, que é o conjunto de todos os pontos que convergem para um determinado conjunto A. Quando a bacia de A for todo X, dizemos que A é um conjunto atrator. Ainda, na teoria de sistemas dinâmicos estudamos os casos em que uma órbita $O(x)$ pode ser atraída para um conjunto ou repelida de um conjunto.

*Iniciação Científica.

Um exemplo de sistema dinâmico é dado pela função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se x é par} \\ 2x, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Nesse caso, temos que a órbita de 0 é constante e todos os demais números convergem para órbita periódica de período 2, por exemplo, $O(2) = \{2, 1, 2, 1, ...\}$, $O(3) = \{3, 6, 3, ...\}$. Neste exemplo, todo ponto converge para uma órbita periódica. Outro exemplo de sistema dinâmico é a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $g(x) = 2x + 3$. Nesse sistema dinâmico, obtemos que $O(0) = \{0, 3, 6, ...\}$, $O(3) = \{3, 9, 21, ...\}$, onde essas órbitas não são periódicas e nem densas, pois não ocorre um período em que que essas duas órbitas se repetem, e nem em que essas órbitas incluam todos os naturais.

Nosso estudo sobre sistemas dinâmicos está em fase inicial. E será conduzido inicialmente de forma teórica e posteriormente com o uso de programação, com um programa simples para verificar e comprovar a teoria na prática. Esse programa será parecido com o jogo da vida de John Conway, o qual será explicado na apresentação, e que verifica se uma dinâmica sobrevive ou não em cima de uma superfície topológica, por meio de uma matriz que define um sistema dinâmico sobre a superfície topológica. O objetivo deste trabalho é analisar o comportamento que ocorre nos sistemas dinâmicos, com isso verificar os conceitos e características envolvidas e posteriormente usá-los em superfícies topológicas, no conjunto X de retângulos sobre a superície. Os conceitos e o programa serão elaborados para que futuros usuários possam usar e auxiliar nos estudos de topologia e principalmente de sistemas dinâmicos.

Referências:

BARAVIERA, A.; BRANCO, F. M. *Sistemas dinâmicos: uma primeira visão*. Diponível em: <www.smb.org.br/docs/coloquios/SU-2.02.pdf>. Acessado em: 13.08.2014