

Simetrias e grupoides

Douglas Alves Gonzaga *

Bacharelado em Matemática Aplicada - UEPG

douglasagonzaga@hotmail.com

Prof. Marcos Calçada (Orientador)

Departamento de Matemática e Estatística - UEPG

mcalcada@uepg.br

Palavras-chave: simetrias, grupos, grupoides.

Resumo:

A noção de simetria é fundamental em Matemática e em várias ciências, notadamente em Física e Química. Várias leis físicas e químicas são consequências da presença de uma simetria no sistema estudado. Por exemplo, a lei de conservação de momento linear ocorre se o sistema físico possuir uma simetria por translações. De maneira mais geral, o celebrado teorema de Noether estabelece de forma precisa uma conexão entre leis de conservação e simetrias.

Simetrias são descritas matematicamente utilizando a noção de grupo, pelo menos assim pensa a maioria dos cientistas e mesmo matemáticos. Entretanto, mesmo que grupos sejam suficientes para entender e caracterizar estruturas homogêneas (usando um grupo de automorfismos), há vários objetos que exibem o que claramente reconheceríamos como simetria, mas que admitem nenhum ou poucos automorfismos não triviais. Ocorre então que a simetria desses objetos pode ser descrita algebricamente em termos da noção de grupoide e não de grupos.

O objetivo deste trabalho é mostrar através de exemplos a relevância do conceito de grupoides no estudo de simetrias. Estudamos, em particular, um exemplo bastante elementar e instrutivo: o ladrilhamento de uma porção finita do plano utilizando ladrilhos retangulares. Neste exemplo, a noção de grupo mostra-se inadequada e a noção de grupoide natural.

Verificamos que grupoides podem ser entendidos como uma generalização de grupos em que a operação binária de composição não está definida para todo par de elementos, ou seja, é parcial. Outra forma de definir grupoides é como sendo uma categoria em que todo morfismo possui inverso. Por fim, podemos entender grupoides como uma generalização de relações de equivalência: um grupoide nos diz não apenas quais elementos são equivalentes (ou isomorfos), mas também parametriza as diferentes formas (isomorfismos) em que dois elementos podem ser equivalentes.

*Bolsista PICME.

Referências:

- [1] WEINSTEIN, A. **Groupoids: Unifying Internal and External Symmetry**. Notices of AMS, vol. 43, Number 7, 1996.
- [2] HIGGINS, P. J. **Notes on Categories and Groupoids**. London: Van Nostrand Reinhold, 1971.
- [3] PINTER, C. C. **A Book of Abstract Algebra**. New York: 2nd ed., Dover, 2010.