A Equação de Duffing:
Uma Introdução às Vibrações Não Lineares

Raquel Ayumi Aita *
Graduanda em Engenharia Civil - UFPR
rq.aita@gmail.com

Profa. Dra. Ana Gabriela Martínez (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
ag.anagabriela@gmail.com

Palavras-chave: equações diferenciais, vibrações não lineares, métodos de perturbação.

Resumo:

Existe uma grande quantidade de fenômenos físicos e problemas na Engenharia que podem ser modelados matematicamente através de equações diferenciais não lineares. A não linearidade presente nas equações pode ser causada pela geometria do problema ou pelas características dos materiais do sistema estudado. É de grande importância prever a resposta dinâmica de um sistema pois neste caso a introdução de técnicas de controle permite evitar possíveis desgastes nos mecanismos e até danos severos nas estruturas envolvidas.

Poder contar com métodos que forneçam soluções analíticas exatas para este tipo de equações é sempre desejável. Porém, a não linearidade do problema dificulta esta tarefa. Nestas situações em que a solução exata para o problema pode não estar disponível, é fundamental dispor de ferramentas que permitam compreender o comportamento qualitativo do sistema. A obtenção de *soluções aproximadas*, tanto analíticas quanto numéricas também é de grande interesse.

Uma questão central nas aplicações é a dependência das soluções em função das condições iniciais do problema, devido principalmente ao fato de que essas informações, em geral, não são suficientemente precisas. Em sistemas não lineares pequenas perturbações nos dados de entrada podem produzir diferenças substanciais no comportamento futuro. A noção de estabilidade surge para dar respostas a esse tipo de problemas.

Neste trabalho consideramos o estudo das vibrações mecânicas não lineares na rigidez, especificamente com rigidez cúbica e sujeitas a uma excitação periódica. O modelo matemático resultante é dado por uma equação diferencial de segunda ordem não linear,

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_{NL}x^3 = F\cos(\omega t),$$

*Bolsista do PICME.

onde as constantes c, k e k_{NL} correspondem aos coeficientes de amortecimento, rigidez linear e rigidez não linear, respectivamente. Já F e ω denotam a amplitude e a frequência da força de excitação externa do sistema. Esta equação é um problema clássico da dinâmica não linear e é chamada de *equação de Duffing*.

Para o caso de vibrações *livres de ações externas*, é analisado o comportamento qualitativo das soluções de equilíbrio. Para isto, a equação diferencial de segunda ordem é reescrita como um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -cy - kx - k_{NL}x^3. \end{aligned}$$

A estabilidade local dos sistemas de equações não lineares pode ser estudada, sob certas hipóteses, através da análise da estabilidade na origem de uma linearização do sistema não linear. A não linearidade pode gerar a presença de múltiplos pontos de equilíbrio isolados. Neste caso a matriz Jacobiana do sistema é avaliada em cada um destes pontos. O estudo da estabilidade da origem no novo sistema linearizado, cuja matriz é a matriz jacobiana do sistema não linear, permite determinar a estabilidade do sistema original no equilíbrio.

Um outro aspecto a ser abordado é o estudo das propriedades das soluções analíticas aproximadas da equação de Duffing. Estas soluções aproximadas são obtidas através dos chamados métodos de Perturbação. Entre os métodos de perturbação mais usados encontram-se o método dos Balanços Harmônicos e o método da Média (*Averaging Method*). No método da média, a equação diferencial exata não linear $\dot{x} = \epsilon f(t, x, \epsilon),$ com $\epsilon << 1,$ f periódica no tempo e de período T, é substituída por uma nova equação aproximada, $\dot{y} = \epsilon \overline{f}(y)$ onde $\overline{f} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(y, t, 0)\, dt$. Uma teoria robusta do método garante que, sob certas hipóteses, é possível inferir a dinâmica do sistema original a partir da dinâmica do sistema promediado.

No presente trabalho foi aplicado o método da Média na equação de Duffing. Procuraram-se soluções periódicas para este problema. O método fornece uma relação funcional entre a amplitude e a frequência da resposta. Esta dependência, ausente quando a rigidez é apenas uma função linear do deslocamento, põe em evidência a complexidade do problema. Estas características da resposta do problema das vibrações mecânicas com rigidez cúbica foram contrastadas com as respostas das vibrações lineares.

Referências:

BRENNAN, M. J.; KOVACIC, I. **The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour**. Wiley, 2011.

HIRSCH, M. W.; SMALE S.; DEVANEY R. L. **Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos**. Academic Press, 3rd Edition, 2012.

NAYFEH, A. H. **Perturbation Methods**. Wiley-VCH; 1st edition, 2000.

NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. **Nonlinear Oscillations**. John Wiley & Sons, 2008.