Números Transcendentais
e o número π

Emanuela Pinheiro Quirrenbach
Bacharelado em Engenharia Mecânica – UTFPR
emanuelaquirrenbach@alunos.utfpr.edu.br

Prof. Ednei Felix Reis
Departamento de Matemática – UTFPR
edneif@utfpr.edu.br

Palavras-chave: números transcendentais, polinômios, transcendência do número π

Resumo:

O conceito de transcendência na matemática é discutido desde o século XVIII, com Euler e Leibniz **[1]**. Mas o termo número transcendental não era utilizado: Euler referia-se a operações como a soma, multiplicação, subtração e divisão como sendo algébricas, e funções como seno, cosseno e logaritmo como transcendentais. A teoria de números transcendentais foi originada por Liouville em 1844, em que números transcendentes são definidos como aqueles que não satisfazem nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros **[2]**. Liouville também deu o primeiro exemplo de número transcendental, a constante de Liouville:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0{,}110001000000000000000001000\ \ldots$$

Euler já havia provado a irracionalidade de e em 1744, e Liouville mostrou que e e e^2 são irracionais e não podem ser irracionais quadráticos[1], mas apenas em 1873 foi provado por Hermite que e é transcendental. Generalizando os métodos utilizados por Hermite, Lindemann demonstrou então, em 1882, a transcendência do número π, no seu artigo "*Über die Zahl* π" (Sobre o número Pi) **[3]**, e consequentemente resolveu o antigo problema da Quadratura do Círculo[2]. Essas provas clássicas foram posteriormente revisitadas e simplificadas por outros matemáticos, como Hilbert em 1893 **[4]**. Com a introdução do conceito de enumerabilidade[3], introduzido por Cantor em 1874, segue que existem mais números transcendentais que algébricos, visto que os números algébricos são enumeráveis, e os números transcendentais não o são.

Nesse trabalho, será exemplificada a prova da transcendência do número π como mostrada por Niven em 1939, em que se parte da suposição de que π é um número algébrico, e mostra-se que isso leva a uma contradição **[5]**.

---

[1] Números irracionais que são raízes de uma equação quadrática com coeficientes racionais.
[2] Seria possível, apenas com compasso e régua, construir um quadrado com a área igual à de um círculo dado?
[3] Um conjunto infinito é considerado enumerável quando há uma bijeção com o conjunto dos números naturais.

Referências:

[1] MARCUS, S. NICHITA, F.F. On Transcendental Numbers: New Results and a Little History. **Axioms** 2018, *7*, 15.
Disponível em: <http://www.mdpi.com/2075-1680/7/1/15> Acesso em 29/08/18.

[2] BAKER, ALAN. **Transcendental Number Theory.** Cambridge University Press, 1975.

[3] LINDEMANN, Ueber die Zahl Pi, **Mathematische Annalen** 20 (1882): 213-225.
Disponível em: <http://eudml.org/doc/157031>. Acesso em 29/08/18.

[4] FRITSCH, R. Hilberts Beweis der Transzendenz der Ludolphschen Zahl π.
Дифференциальная геометрия многообразий фигур 34 (2003): 144-148.
Disponível em: <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~fritsch/pi.pdf>
Acesso em 29/08/18.

[5] NIVEN, IVAN. The Transcendence of π. **The American Mathematical Monthly**, 46, No.8 (outubro de 1939), 469-471.
Disponível em <https://www.jstor.org/stable/2302515 >. Acesso em 21/08/18