

Lema de Yoneda. Significado e conexão com o Teorema de Cayley.

Márcio Palmares Pinto de França
Licenciatura e Bacharelado em Matemática - UFPR
marciopalmares@gmail.com

Profa. Dra. Heily Wagner (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
heilywagner@ufpr.br

Palavras-chave: Lema de Yoneda, teoria de categorias, Teorema de Cayley.

Resumo:

O Lema de Yoneda é frequentemente considerado como um dos resultados mais importantes em Teoria de Categorias, não apenas por sua significação teórica, mas por dar origem a uma técnica que nos permite obter informações sobre determinada categoria transportando-a para uma categoria adequada de funtores (Imersão-Yoneda/ *Yoneda Embedding*).

Neste trabalho discutiremos brevemente o significado do Lema de Yoneda (uma dentre outras possibilidades de interpretação) a partir das ideias expostas por Barry Mazur no artigo [1] e de alguns recursos de exposição de autoria de Tai-Danae Bradley, que discute o assunto em uma série de artigos em seu blog *Math3ma* [2]. Estabelecido o significado do lema, ilustraremos o caminho adotado para demonstrá-lo em nosso texto [3]. Em particular, analisaremos a seguinte

Proposição. *Para todo funtor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$, para todo objeto A de \mathcal{C} , e para todo elemento $a \in F(A)$, existe uma única transformação natural*

$$\gamma: \text{Hom}(A, -) \longrightarrow F$$

satisfazendo $\gamma_A(1_A) = a$.

que apresentamos como generalização de resultados observados em uma categoria de funtores bem simples: a categoria das interpretações de um *loop* (grafo orientado) em conjuntos. O Lema de Yoneda aparece, em seguida, como um corolário da proposição anterior:

Corolário. (LEMA DE YONEDA.) *Para todo funtor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$, para todo objeto A de \mathcal{C} , a função:*

$$\psi: \text{Nat}(\text{Hom}(A, -), F) \longrightarrow F(A)$$

definida por

$$\psi(\beta) = \beta_A(1_A)$$

é uma bijeção.

Por fim, veremos um dos sentidos em que o Lema de Yoneda pode ser visto como uma generalização do Teorema de Cayley, mostrando de que modo usar o funtor Yoneda para demonstrar o Teorema de Cayley.

Referências:

[1] MAZUR, B. **When is one thing equal to some other thing?** Disponível em:

<http://www.math.harvard.edu/~mazur/preprints/when_is_one.pdf>. Acesso em: 21 set. 2018.

[2] BLOG MATH3MA. **The Yoneda Perspective.** Não paginado. Disponível em:

<<https://www.math3ma.com/blog/the-yoneda-perspective>>. Acesso em: 21 set. 2018.

[3] FRANÇA, M. P. P. **Lema de Yoneda. Uma introdução à Teoria de Categorias. (Guia auxiliar para iniciantes).** 140 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.