Equação do Calor e Séries de Fourier

Vinicius Medeiros Prantl dos Santos *
Licenciatura em Matemática - UFPR
vinicius.medeiros0706@gmail.com

Prof. Dr. Jurandir Ceccon (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
ceccon@ufpr.br

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Equação do Calor, Séries de Fourier.

Resumo:

Iremos considerar o problema da condução do calor em uma barra feita de material homogêneo e com os lados perfeitamente isolados, de comprimento L, com as extremidades mantidas a uma temperatuda de zero grau e supondo que a espessura da barra seja tão pequena que a temperatura u é constante em qualquer seção reta desta barra. Este problema é modelado pela seguinte equação diferencial parcial

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) = 0, & u(L,t) = 0, \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde α^2 é uma constantante chamada de *difusibilidade térmica* que depende somente do material da barra. Devido às características do domínio da função u, o método de separação de variáveis pode ser usado para se obter uma solução deste problema. Este método consiste em supor que a solução $u(x,t)$ pode ser escrita como $u(x,t) = X(x)T(t)$, sendo que x representa a variável espacial e t representa a variável temporal. Com esta hipótese, é possível mostrar que as funções X e T devem satisfazer as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ T'(t) + \alpha^2 \lambda T(t) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Usando as soluções destas EDO's juntamente com as condições de fronteira do problema do calor (1), podemos verificar que uma função candidata a solução do problema (1) será da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} sen \frac{n\pi x}{L}. \tag{3}$$

*Voluntário do Programa PET-Matemática

Por causa da condição inicial de temperatura em (1), a função u será solução do problema da condução do calor somente se a função f puder ser escrita como

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\frac{n\pi x}{L} = f(x). \tag{4}$$

Desta forma, precisamos escolher os coeficientes c_n tais que a série de funções de senos nesta igualdade, de fato convirja para a distribuição inicial de temperatura f dada em (1).

Esta representação acima é chamada de série de Fourier. De modo mais geral, sempre que tivermos a representação de uma função f na forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}),$$

dizemos que estamos escrevendo a função em série de Fourier.

Porém, nem toda função possui representação em série de Fourier. Ou seja, precisamos saber quais são as condições necessárias para que dada uma Série de Fourier ela seja convergente (de preferência convergência uniforme). Além disso, dada uma função f como fazemos pra escolher os coeficientes a_n e b_n de tal forma que a série de Fourier convirja para a função f?

Para responder essas questões, precisamos usar resultados clássicos de Análise Matemática como: critérios de convergência uniforme de séries de funções, fórmulas de integrações, identidade de Parseval, dentre outros. Com isso, conseguimos critérios para sabermos quando vale a igualdade (4) e desta igualdade checamos que (3) realmente é solução de (1).

Referências:

[1] FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.

[2] BOYCE, W. E; DIPRIMA R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8 ed (2005) LTC.

[3]GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. vol 4. Rio de Janeiro, LTC.