
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor: Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam

Estudantes: Anna Paula Chiarello Marcon
Arthur Rezende Alves Neto
Carlos Henrique Venturi Ronchi
Eduardo Magalhães de Castro
Felipe Hiroyuki Ogima
Jaqueline Aline Iensen
Luciano Luzzi Junior
Rodrigo Zeni Stocco
Thiago Kenhiti Yoshida
Vivian de Paula Ribeiro

Site: www.petmatematica.ufpr.br

Telefone: (41) 3361-3672

Data do Curso: 19 a 22 de Julho de 2016

Horários: das 8h00 às 11h30 (turma da manhã)
das 13h30 às 17h00 (turma da tarde)

Local de Realização: PC - Bloco de Exatas
Centro Politécnico - UFPR

Curitiba, julho de 2016.

Sumário

1	Geometria Euclidiana	1
1.1	O quinto Postulado	3
1.1.1	As outras Geometrias	4
1.2	Polígonos e Poliedros	6
1.2.1	Polígonos	6
1.2.2	Poliedros	7
1.3	Algumas definições	7
1.3.1	Distância	8
1.3.2	Ângulo	8
1.3.3	Área	8
1.3.4	Volume	9
1.4	Triângulos	10
1.4.1	Congruência	10
1.4.2	Soma dos ângulos internos	12
1.4.3	Teorema de Pitágoras	12
1.5	Geometria Analítica	15
1.5.1	Vetores	15
1.5.2	Base canônica	16
1.5.3	Distância de ponto e reta	16
1.5.4	Distância entre retas	17
1.5.5	Produto Escalar	17
1.5.6	Produto vetorial	18
1.6	Exercícios	19

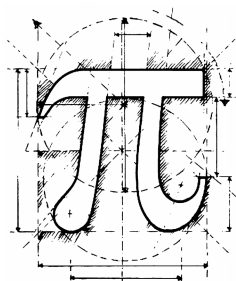
2	Geometria Esférica	20
2.1	A Esfera	21
2.2	Retas	22
2.2.1	Pólo	24
2.2.2	Antípodas	25
2.2.3	Posição relativa de retas	26
2.3	Distâncias em \mathbb{S}^2	28
2.4	Áreas	29
2.4.1	Área de \mathbb{S}^2	29
2.4.2	Área de um fuso	30
2.5	Triângulos em \mathbb{S}^2	31
2.6	Trigonometria Esférica	34
2.7	Exercícios	37
3	Geometria Hiperbólica	40
3.1	Parte histórica	40
3.2	Hiperboloide	40
3.2.1	Exemplo	41
3.3	Geometria Hiperbólica	42
3.4	Disco de Poincaré	44
3.4.1	Construção das retas	45
3.5	Distância entre dois pontos	47
3.5.1	Exemplos	48
3.6	Área	51
3.7	Exercícios	54
4	Geometria Topológica	56
4.1	Introdução	56
4.2	Planolândia	56
4.3	Colagem	58
4.4	Vocabulário	61
4.4.1	Topologia x Geometria	61
4.4.2	Propriedades intrínsecas x extrínsecas	62
4.4.3	Variedades abertas e fechadas	63
4.5	Orientabilidade	63

4.6	Somas conexas	67
4.6.1	Planolândia e o seu desfecho	67
4.7	O Teorema de Classificação	71
4.7.1	Introdução	71
4.7.2	Superfícies e suas Propriedades	72
4.7.3	Superfícies Padrão	75
4.7.4	Superfícies de Tipo Esfera	76
4.7.5	Característica de Euler	76
4.7.6	Teorema de Classificação	78
4.8	Exercícios	83

Capítulo 1

Geometria Euclidiana

Se existem várias geometrias, então o que é, exatamente, a *Geometria Euclidiana*?



O nome *Geometria Euclidiana* foi dado em homenagem ao matemático grego Euclides de Alexandria, que nasceu por volta de 330 a.C. O grande trabalho de Euclides ou, como também é conhecido, o *Pai da Geometria*, foi ter escrito o livro *Os Elementos* que é a base de toda a geometria atual e que também influenciou todas as outras áreas da matemática. Para escrever o livro, Euclides assumiu como verdades, algumas situações imediatas, e isso é o que chamamos de *Axiomas*. São estes:

- Axiomas:

- Axioma 1: Coisas que são iguais a uma mesma coisa, são iguais entre si.
- Axioma 2: Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
- Axioma 3: Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- Axioma 4: Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
- Axioma 5: O todo é maior que qualquer uma de suas partes.

Desenvolvendo os axiomas, chegamos no que é chamado de postulado. Euclides definiu estes 5:

- Postulados:

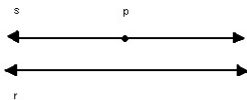
- Postulado 1: Dados dois pontos distintos, há um único segmento de reta que os une.
- Postulado 2: Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para formar uma reta.
- Postulado 3: Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência com centro naquele ponto e raio igual à distância dada.
- Postulado 4: Todos os ângulos retos são congruentes.
- Postulado 5*: Se duas linhas intersectam uma terceira linha de tal forma que a soma dos ângulos internos em um lado é menor que dois ângulos retos, então as duas linhas devem se intersectar neste lado, se forem estendidas indefinidamente.

1.1 O quinto Postulado

O quinto postulado é, de longe, o mais polêmico entre todos. Mas para entender toda a confusão em volta deste postulado, primeiro vamos definir o que é um *Teorema*. A diferença básica entre teorema e postulado é que postulado não é passível de demonstração, ou seja, não pode ser provado, enquanto o teorema pode ser provado. Sabendo disso, então qual é a polêmica por trás do quinto postulado?

O enunciado original do quinto postulado de Euclides (pelo menos a tradução mais fiel ao original), é o enunciado já apresentado no capítulo anterior. Porém, com o passar dos anos, muitos matemáticos dedicavam toda sua vida para prová-lo. Muitos deles chegavam em resultados bem convincentes, mas numa análise mais profunda, esses resultados, em essência, significavam o mesmo que o postulado original, apenas escrito de forma diferente. Uma dessas formas é a seguinte:

- Dados uma reta r e um ponto P fora dessa reta, existe uma única reta s que passa pelo ponto P e é paralela à reta r ;



Mas aí surge uma pergunta: "Quer dizer então que todas essas tentativas foram em vão, já que todas falharam em provar o 5º postulado? "

1.1.1 As outras Geometrias

Incontáveis tentativas de provar o quinto postulado de Euclides foram feitas, mas algumas delas são extremamente importantes. Como a do padre jesuíta G. G. Saccheri, um matemático italiano que dedicou toda sua vida para provar o quinto postulado. Pouco tempo antes de falecer, o padre publicou um livro intitulado *"Euclides sem falhas: um trabalho que estabelece os princípios de uma geometria universal"*. Só pelo título do livro, podemos deduzir que o padre falhou em sua missão, mas o que ele não sabia é que seus resultados abririam as portas para um universo completamente novo.

Não se sabe ao certo como foi o surgimento das outras geometrias além da de Euclides, mas uma história bem famosa sobre o assunto é a seguinte: "Carl Friedrich Gauss, matemático, astrônomo e físico alemão, comentou com seu amigo Farkas Bolyai que achava uma vergonha os matemáticos não conseguirem provar o Quinto Postulado. Ele próprio tentou um bocado e nunca conseguiu, embora achasse que o postulado talvez pudesse ser violado.

Bolyai era natural da Transilvânia, portanto conterrâneo de Drácula e Frankenstein. Contou a seu filho, Janus Bolyai, a suspeita de Gauss. O filho era um rapaz talentoso e começou a trabalhar com o objetivo de comprovar o palpite de Gauss. O jovem, fez pouco caso às advertências do pai que lhe disse: "Pelo amor de Deus, esqueça isso. Essa mania é pior que a luxúria, vai acabar com sua paz de espírito e sua alegria de viver". Mesmo assim Janus Bolyai não parou de trabalhar no assunto e logo começou a descobrir coisas interessantes. Por exemplo, ele constatou que, por um dado ponto, podia traçar um número infinito de retas paralelas a outra reta sem ferir nada que Euclides dissesse em seu livro, a não ser, é claro, o Quinto Postulado. Em outras palavras: ele topou com uma geometria diferente da euclidiana mas tão coerente quanto ela. Entusiasmado, escreveu ao pai: "Criei um universo novo, tirando-o do

nada”.

O velho Farkas logo informou, por carta a seu amigo Gauss, das proezas de seu filho. E a resposta do grande Gauss foi uma ducha gelada: “Os resultados do trabalho de seu filho são excelentes mas, se eu elogiá-los estarei elogiando a mim mesmo, pois já os obtive há anos”.- Texto retirado de [9].

”No início do século 19 ainda não estava claro se o Quinto Postulado tinha validade absoluta ou se podia ser desobedecido em geometrias alternativas. Os trabalhos de Saccheri e Bolyai eram praticamente ignorados e as idéias de Lobatchevski eram tidas como absurdas por muitos matemáticos. Nessa época, o grande matemático alemão Bernhard Riemann chamou a atenção para uma falha cometida por Euclides, Saccheri e os outros pioneiros. É que eles sempre admitiam, sem contestar, que uma reta tem de ser infinita e ilimitada. Isso é dito no Segundo Postulado de Euclides e significa que, se um cidadão comesse a viajar em linha reta, seguindo a trajetória de um raio de luz, nunca chegaria ao fim da linha, mesmo se fosse eterno. Talvez isso valha apenas para o espaço euclideo e não seja necessário em outros espaços, sugeriu Riemann. Deixando de lado essa restrição, Riemann mostrou que podia criar uma geometria na qual a soma dos ângulos de um triângulo era *maior* que 180 graus.

Finalmente, em 1868, outro matemático italiano, Eugênio Beltrami, publicou um livro no qual, para todos os efeitos, fechou o ciclo dessas especulações. Nesse livro, chamado de “Ensaio sobre a interpretação de uma geometria não-euclidiana”, Beltrami descreve detalhadamente uma geometria perfeitamente lógica na qual a soma dos ângulos de um triângulo é *menor* que 180 graus.”¹

¹Texto retirado de [13].

1.2 Polígonos e Poliedros

1.2.1 Polígonos

Polígonos são figuras fechadas formadas por segmentos de reta. Eles possuem:

- Vértice: Pontos que delimitam os segmentos de reta.
- Aresta: Segmentos de reta delimitados pelos vértices.
- Ângulo: Abertura entre dois segmentos de reta.
- Diagonal: Segmento de reta traçado entre dois vértices não consecutivos.

São classificados, primariamente, como:

- Côncavos: Quando pelo menos uma de suas diagonais corta o polígono.
- Convexos: Quando nenhuma diagonal corta o polígono.

Além disso, os polígonos convexos são classificados de acordo com o número de seus vértices:

- | | |
|--------------------|-------------------|
| • 3 → Triângulo | • 9 → Eneágono |
| • 4 → Quadrilátero | • 10 → Decágono |
| • 5 → Pentágono | • 11 → Undecágono |
| • 6 → Hexágono | • 12 → Dodecágono |
| • 7 → Heptágono | • 20 → Icoságono |
| • 8 → Octógono | |

1.2.2 Poliedros

Poliedro é um sólido limitado por polígonos, que tem, dois a dois, um lado comum. Eles possuem:

- Vértice;
- Aresta;
- Face;
- Ângulo;
- Diagonal;

Também são classificados como:

- Côncavos: Quando existe uma reta que corta o poliedro o interceptando em mais de dois pontos.
- Convexos: Quando existe uma reta que corta o poliedro o intercepta em apenas dois pontos.

Característica de Euler

”Em todo poliedro com \mathbf{A} arestas, \mathbf{V} vértices e \mathbf{F} faces, vale a relação $\mathbf{V} - \mathbf{A} + \mathbf{F} = 2$ ”

Em 1758, o matemático suíço Leonhard Euler descobriu essa importante relação, que vale, não só para poliedros, mas de forma análoga, vale para inúmeras outras superfícies como as que serão vistas no capítulo 4 desta apostila.

1.3 Algumas definições

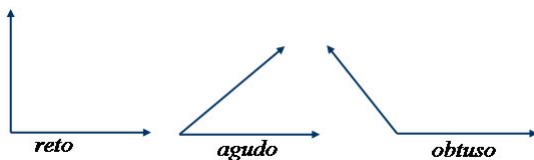
Para avançarmos um pouco mais, vamos entender alguns conceitos e definições básicas.

1.3.1 Distância

Distância é a menor trajetória de um objeto geométrico à outro. Para denotar a distância entre um ponto $A = (a_1, a_2)$ e um ponto $B = (b_1, b_2)$, usamos a seguinte notação $d(A, B)$ e calculamos usando $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

1.3.2 Ângulo

Ângulo é a abertura formada entre duas semirretas.



Denotamos um ângulo de diversas formas e podemos usar o $^{\circ}$ (grau) ou radianos para medi-lo.

Para transformarmos um ângulo medido em graus para radianos usamos a seguinte relação:

- $180^{\circ} = \pi$

1.3.3 Área

Área é a região interna de um polígono. Para calcularmos área, usamos, basicamente:

- Retângulo: $A = b \cdot h$
- Círculo: $A = \pi \cdot r^2$

1.3.4 Volume

Volume é a capacidade de algum sólido em armazenar algum líquido.

- Paralelepípedo: $V = b \cdot h \cdot l$
- Esfera: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

1.4 Triângulos

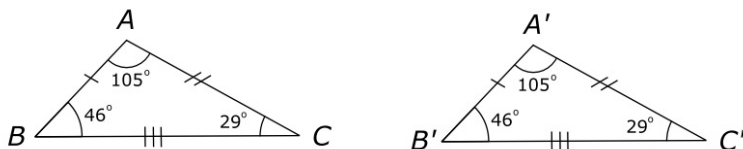
1.4.1 Congruência

A ideia de congruência entre segmentos, ângulos e triângulos formou-se intuitivamente, levando-se em conta que dois segmentos congruentes, dois ângulos congruentes e dois triângulos congruentes podem ser superpostos por meio de um deslocamento conveniente.

O conceito abstrato de congruência entre triângulos é definido da seguinte maneira:

Dois triângulos são denominados congruentes se tem, ordenadamente congruentes, os três lados e os três ângulos.

Exemplo: Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes.



Indicamos: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ se $\left\{ \begin{array}{l} AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \\ BC \equiv B'C' \end{array} \right.$ e $\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array} \right.$

Observação: Em dois triângulos congruentes, são congruentes entre si:

1. os lados opostos a ângulos congruentes;
2. os ângulos opostos a lados congruentes;

Casos de Congruência

A definição de congruência de triângulos dá 5 condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes. Estas condições são denominadas casos ou critérios de congruência.

- Casos:

- 1º Caso (LAL): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre esses dois lados, então eles são congruentes.

Este caso é normalmente dado como postulado e indica que se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre estes dois lados, então o lado restante e os dois ângulos também são ordenadamente congruentes.

- 2º Caso (ALA): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos, então eles são congruentes.
- 3º Caso (LLL): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então eles são congruentes.
- 4º Caso (LAAo): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes.
- 5º Caso (Caso Especial): Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então eles são congruentes.

A semelhança de triângulos é um caso especial de congruência na qual os três lados e os três ângulos dos triângulos sejam

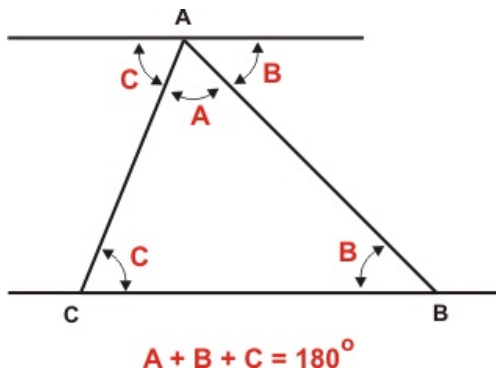
iguais.

Aplicações nos problemas: Se, ao resolver um problema, sabe-se que os elementos de dois triângulos verificam as condições de um dos casos de congruência:

1. Pode se afirmar que os triângulos são congruentes.
2. Conclui-se daí que os outros elementos desses triângulos, que não se conhecem, são dois a dois congruentes.

1.4.2 Soma dos ângulos internos

A soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser calculada com uma reta paralela, que contenha um vértice, ao lado oposto da base. Utilizando ângulos alternos internos com os ângulos da base do triângulo, mostramos que os três ângulos internos do triângulo somam 180° .

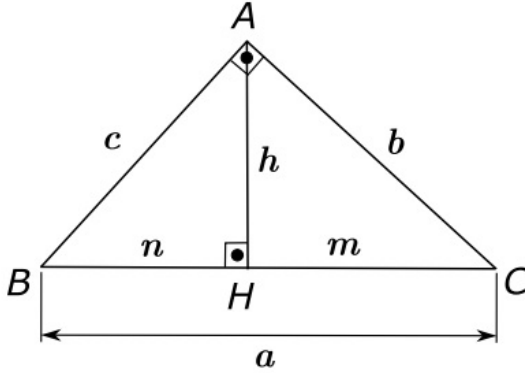


1.4.3 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um dos teoremas importantes a respeito de triângulos retângulos. Segundo ele, a soma dos qua-

drados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Antes de demonstrar este resultado, vejamos algumas relações métricas nos triângulos retângulos.

No triângulo retângulo ABC da figura, temos:



Obtemos as seguintes relações:

$$\overline{BH} + \overline{HC} = \overline{BC} \Rightarrow n + m = a(1)$$

Considerando os triângulos AHC e ABC (congruentes), se obtém:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = a \cdot m(2) \\ b \cdot c = a \cdot h(3) \end{cases}$$

Considerando também os triângulos AHB e ABC (congruentes), obtemos:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} = \frac{b}{h} \Rightarrow c^2 = a \cdot n(4)$$

Somando (2) e (4) obtemos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a(m + n)$$

De (1) vem que:

$$b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 (5)$$

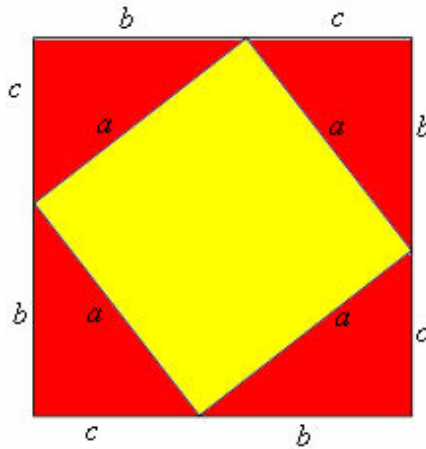
Multiplicando (2) e (4), obtemos:

$$b^2 \cdot c^2 = a \cdot m \cdot a \cdot n = a^2 m \cdot n$$

De (3) vem que:

$$a^2 \cdot h^2 = a^2 m \cdot n, a \neq 0 \Rightarrow h^2 = m \cdot n (6)$$

Um outro método para demonstrar o teorema é calcular a área de um quadrado de lado $b+c$ sendo igual a área do quadrado de lado a mais as áreas dos triângulos de lados a , b e c .



$$(b + c)^2 = a^2 + 4bc/2$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

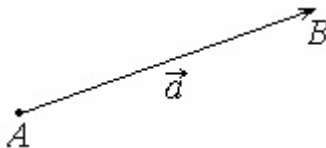
1.5 Geometria Analítica

Em essência, a geometria analítica, é o estudo da geometria por meio de coordenadas cartesianas, ou seja, usando um plano ou um espaço cartesiano.

Para nos auxiliar neste estudo, utilizamos algo chamado *grandeza vetorial*, ou simplesmente, *vetor*. Existem dois tipos de grandezas: *escalares* e *vetoriais*. A grande diferença entre as duas é que uma grandeza escalar precisa apenas de seu valor. Alguns exemplos são o comprimento, área e volume, que já vimos. Se falamos que um quadrado tem 16cm^2 de área, podemos imaginar com clareza como é este quadrado. Porém, se falamos que alguém arremessou uma bola com 12N de força, podemos imaginar com clareza como é a situação? Pois é. Por isso que além de falar a força com que a bola foi arremessada, temos que falar para onde esse arremesso vai. É aí que surgem os vetores. Eles são capazes de nos fornecer todas estas informações de modo simples e prático. Entendido isso, vamos ver como eles são.

1.5.1 Vetores

Denotamos um vetor, essencialmente, com uma seta acima da letra que o identifica: \vec{a} . Eles são representados da seguinte forma:



Para informar com clareza tudo o que já foi dito, eles possuem três componentes: *módulo*, *direção* e *sentido*.

- **Módulo:** O módulo de um vetor é o seu comprimento e podemos calculá-lo graças ao plano cartesiano introduzido

para nos auxiliar. Utilizamos a fórmula

$$||a|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Direção: A direção do vetor pode ser horizontal, vertical ou estar entre estes dois, ou seja, na diagonal. Podemos medir a inclinação do vetor por meio de sua direção em relação à horizontal.
- Sentido: O sentido de um vetor pode ser a favor, ou contra o sentido dos eixos cartesianos.

1.5.2 Base canônica

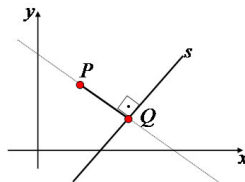
A base canônica do espaço tridimensional é o conjunto

$$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}.$$

Os vetores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} são unitários, perpendiculares entre si e paralelos aos eixos coordenados. Podemos facilmente escrever qualquer vetor \vec{u} no espaço como uma soma da forma $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$.

1.5.3 Distância de ponto e reta

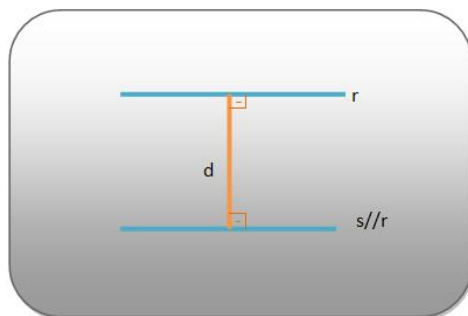
A distância entre um ponto e uma reta é a menor distância entre o ponto e qualquer outro ponto da reta. Podemos ver que esta distância é dada pelo segmento de reta que passa pelo ponto e é perpendicular à reta dada.



No fim, trata-se de um problema de distância de ponto a ponto que já vimos. Basta apenas escolher o ponto correto para termos a menor distância possível.

1.5.4 Distância entre retas

A distância entre duas retas paralelas é também dada pela menor distância entre elas.



A distância entre duas retas concorrentes é zero, pois elas se interceptam em um ponto.

1.5.5 Produto Escalar

O produto escalar (ou produto interno) entre os vetores \vec{A} e \vec{B} , do ponto de vista geométrico, é o resultado do produto do comprimento de B pela projeção escalar de A em B . Entre outras palavras o produto escalar de A e B pode ser escrito como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo formado pelos vetores e $\|\vec{A}\|$ e $\|\vec{B}\|$ são os respectivos comprimentos.

Podemos mostrar ainda que se $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$, temos:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

O produto escalar tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= \vec{B} \cdot \vec{A} \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) &= \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \\ (\alpha \vec{A}) \cdot (\beta \vec{B}) &= (\alpha\beta)(\vec{A} \cdot \vec{B})\end{aligned}$$

1.5.6 Produto vetorial

O produto vetorial (ou produto externo) entre os vetores \vec{A} e \vec{B} , do ponto de vista geométrico, gera um terceiro vetor, perpendicular à \vec{A} e à \vec{B} e que possui módulo igual à

$$||\vec{A} \times \vec{B}|| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$

e a base $\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \times \vec{B}\}$ define uma orientação que satisfaz a regra da mão direita. Se \vec{A} e \vec{B} são paralelos, definimos $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$.

Podemos também calcular o produto vetorial utilizando a base canônica já vista anteriormente, tendo $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$, o produto se dá:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

O produto vetorial tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= -\vec{B} \times \vec{A} \\ \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) &= \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \\ (\alpha \vec{A}) \times \vec{B} &= \vec{A} \times (\alpha \vec{B}) = \alpha(\vec{A} \times \vec{B})\end{aligned}$$

Às vezes, utiliza-se $A \wedge B$ ao invés de $A \times B$, para não causar confusão com a letra X.

1.6 Exercícios

Exercício 1. Dispomos de 1300 cm^2 de um papel adesivo para encapar uma caixa com a forma de um paralelepípedo retângulo com 20 cm de comprimento e 15 cm de largura. Qual deve ser o volume desta caixa considerando que todo o papel adesivo disponível será utilizado, que não haverá sobreposição dele e que toda a superfície da caixa será encapada?

Exercício 2. Dado o triângulo $\triangle ABC$ com vértices nos pontos $A=(-3,0)$, $B=(1,-3)$ e $C=(3,3)$, determine:

- a) Qual é o maior lado do triângulo e qual a sua medida?.
- b) Seja $\hat{A}=63^\circ$ e $\hat{B}'=109^\circ$, sendo \hat{B}' um ângulo externo do vértice B. Determine \hat{C} .

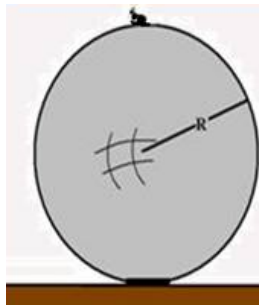
Exercício 3. Dados os vetores $\vec{u}=(2,-1,5)$ e $\vec{v}=(-2,1,2)$, determine:

- a) O produto escalar e o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .
- b) O produto vetorial e o ângulo entre $\overrightarrow{u+v}$ e $\overrightarrow{u-v}$.

Capítulo 2

Geometria Esférica

Vamos agora focar no estudo da *geometria da esfera*, a primeira geometria não-euclidiana. Você já deve ter uma boa ideia intuitiva do que é uma esfera, mas o nosso interesse é pensar matematicamente na questão do que viria a ser uma geometria definida em uma superfície esférica. Nós aprendemos, desde pequenos, que a geometria é plana e em geral é a nossa geometria do dia-a-dia. Nós sabemos o que são pontos, retas e polígonos em um plano, por exemplo, mas você sabe o que são pontos, retas e polígonos em uma esfera? Estas e outras questões surgem naturalmente quando nos aventuramos em analisar as superfícies curvas. Para ficar mais fácil de visualizar, imagine agora uma pequena formiga perambulando na superfície de uma bola.



2.1 A Esfera

É com essa perspectiva da formiga que abordaremos este assunto. Perceba que não faz sentido tentar imaginar a formiga caminhando em direção ao centro da bola. Imagine também que essa formiga é totalmente incapaz de "pular" para cima ou para fora.

Agora que você já tem uma visão intuitiva dessa superfície, vamos tentar formalizar a ideia. O primeiro passo é pegar essa esfera e "jogá-la" em um ambiente conhecido: o \mathbb{R}^3 . Vamos posicionar a nossa esfera, exatamente na origem do sistema de coordenadas, definindo raio 1.

Agora sim podemos começar a dissertar sobre a geometria desse objeto e o tópico central dessa sessão: o que é uma esfera? Para a matemática, não podemos enrolar e dizer apenas: "é um círculo em 3D" ou "é um cubo só que redondo". Não funciona assim, nós precisamos **definir**. Resumidamente, podemos (e devemos) dizer que a esfera é um conjunto; não de números simplesmente, mas de *vetores*.

Sim, vetores. Veremos agora que para viabilizar as nossas futuras contas vale muito a pena interpretar os pontos da esfera como vetores. Como isso? É simples: você aprendeu que podemos somar um vetor v a um ponto A e obter um novo ponto B , ($A + v = B$). Escolhamos então um ponto P qualquer na nossa esfera e vamos escrevê-lo como uma soma de ponto e vetor. O truque aqui é simplesmente escolher a origem como o ponto a ser somado por algum vetor v . Obtemos então

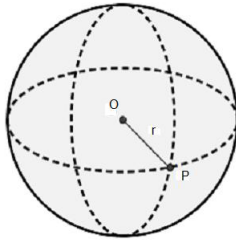
$$(0, 0, 0) + v = P \implies v = P.$$

Isso nos diz que falar de um ponto nessa esfera é exatamente o mesmo que falar de um vetor que "parte" da origem e "chega"

em sua superfície. Pensando assim, podemos definir:

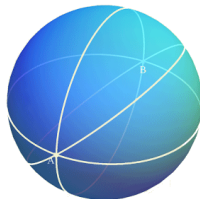
$$\mathbb{S}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}.$$

Traduzindo, temos \mathbb{S}^2 que é simplesmente o nome que decidimos dar à esfera. Ou seja, a esfera é o conjunto de vetores do \mathbb{R}^3 que possuem norma igual a 1, porque nós definimos que a nossa esfera tem raio 1.



2.2 Retas

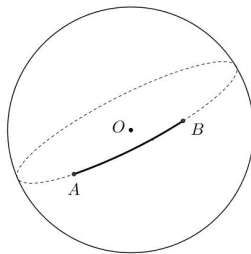
Depois de termos construído e formalizado os pontos da esfera, o próximo elemento geométrico natural a investigar são as *retas*. Talvez você já esteja questionando como podem existir retas se nossa superfície nem é plana, então precisamos esclarecer desde já que retas nem sempre precisam ser “retas”, e essa é a magia das geometrias não-euclidianas. Vamos pensar assim: de quantas maneiras você consegue conectar dois pontos no plano?



Existem infinitas maneiras, mas nós nos interessamos mais pelo caminho mais curto, que se trata do segmento de reta. Você deve ter aprendido que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta, mas quando falamos de geometrias não-euclidianas é conveniente usar um outro nome, mais elegante: *geodésica*. Uma geodésica é justamente a maneira mais curta de se caminhar de um ponto a outro, e nós pretendemos descobrir como descrever uma geodésica na esfera.

Dados dois pontos (ou vetores) no \mathbb{S}^2 , qual a maneira mais curta de conectá-los? Se imaginarmos um barbante ligando dois pontos de uma bola de futebol, não é difícil ver que a menor distância acontece quando esticamos o barbante ao máximo. Então, se podemos dizer também que este é um segmento de reta na esfera, qual é a reta que contém esse segmento?

Na geometria euclidiana nós podemos prolongar um segmento de reta infinitamente e obter a reta que o contém. O nosso caso não é muito diferente. Observe o que ocorre quando prolongamos um segmento em \mathbb{S}^2 :



Esse é, portanto, uma reta na geometria esférica e é dada pela intersecção de \mathbb{S}^2 com o plano definido pelos pontos P , Q e $(0, 0, 0)$; ou ainda, pelos vetores P e Q . Você aprendeu que dois vetores linearmente independentes definem exatamente um plano e é esse fato que estamos usando aqui. Se eles forem linearmente independentes, podem obter essa intersecção, e, por-

tanto, uma única reta. É importante observar, no entanto, que nem sempre dois pontos distintos definem uma única reta, mas estudaremos esse caso mais a frente, na seção 2.2.2.

2.2.1 Pólo

Para formalizarmos nossa ideia de retas, precisamos primeiramente introduzir o conceito de pólo. Não difere muito dos pólos que nós conhecemos: o pólo Sul e o pólo Norte. Pense assim, supondo que a nossa esfera é o planeta Terra, qual seria uma reta que poderíamos nomear? Uma resposta natural seria a linha do equador. (Perceba que os trópicos ou os círculos polares não são retas pois os planos que os contém não contém a origem do sistema - o centro da Terra). Considere a cidade de Macapá, no estado do Amapá, que se situa sobre a linha do equador. Seja M este vetor e N o vetor do pólo Norte, o que nós podemos dizer sobre M e N ? Agora você vai precisar se lembrar de algo muito importante que você deve ter estudado na aula anterior: o *produto interno*. O produto interno é uma operação entre dois vetores que nos fornece um número real. Para aplicarmos o produto interno nos vetores M e N não precisamos fazer conta alguma, basta observar que eles claramente formam um ângulo reto, ou seja são *ortogonais*. Nós sabemos que o produto interno de dois vetores ortogonais é sempre 0 e M e N são ortogonais, então podemos concluir que $\langle M, N \rangle = 0$. Mas o interessante é que podemos escolher outra cidade, Quito (capital do Equador), por exemplo e, seja M' o vetor que representa Quito, então $\langle M', N' \rangle = 0$. Qualquer vetor que determine um ponto na linha do equador será ortogonal ao pólo Norte. Podemos generalizar essa ideia da seguinte maneira. Seja t um pólo na esfera, então a reta r é:

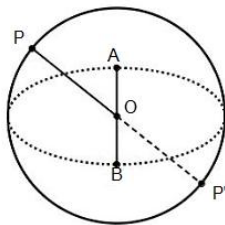
$$r = \{x \in \mathbb{S}^2 \mid \langle t, x \rangle = 0\}.$$

Isto é, uma reta r é o conjunto de vetores da esfera que possuem produto interno igual a 0 quando aplicados a um vetor

polar t . Analisando essa definição podemos notar algo muito interessante. Na esfera, como na geometria euclidiana, 2 pontos distintos de fato definem uma única reta. Mas esses espaços se diferem quando percebemos que na esfera podemos definir uma única reta com apenas um único vetor polar! Esse fato é importante para o entendimento dessa geometria, mas você verá que essa é uma das poucas “anomalias” da esfera e muitos outros processos serão análogos aos processos da geometria euclidiana.

2.2.2 Antípodas

Aqui abordaremos um caso específico de posição relativa de pontos que não deve apresentar muita dificuldade de visualização. Nós diremos que dois pontos P e Q são *antípodas* se $P = -Q$. Foi comentado anteriormente que vetores linearmente independentes definem uma única reta, mas temos aqui um caso peculiar (e único) de vetores no \mathbb{S}^2 que são LD, apesar de distintos, pois $P = (-1)Q$. Por serem LD, definem infinitos planos no \mathbb{R}^3 . logo, definem infinitas retas. Veja:



Voltando à analogia do planeta Terra, é fácil notar que os pólos Norte e Sul definem pontos antípodas. Além disso, se olharmos para o globo, perceberemos que os meridianos do fuso horários, por exemplo, são todos retas distintas que passam pelo pólo Norte e pólo Sul. Além disso, vale comentar que se t é um

vetor polar de uma reta dada, então sua antípoda, $-t$, também o é.

2.2.3 Posição relativa de retas

Voltemos por um momento ao bom e velho plano euclidiano. Como duas retas podem se relacionar? Nós aprendemos que, dadas duas retas distintas, elas são *concorrentes* ou *paralelas*, isto é, se cruzam em algum ponto ou nunca se cruzam. Queremos saber como duas retas distintas se comportam nessa nova geometria. Para isso precisaremos do *produto vetorial*.

Concorrência e Ortogonalidade

Vamos imaginar duas retas distintas l e m em \mathbb{S}^2 e considerar que possuem pólos t e r , respectivamente. Como são distintas, seus pólos são distintos, porém mais que isso: são distintos e não antípodas, ou seja, $t \neq \pm r$. Podemos então concluir que seu produto vetorial será diferente de 0. Consideremos então

$$p = \frac{(t \times r)}{|t \times r|}$$

. Não deve ser difícil ver que p e $-p$ tem norma igual a 1 e, por definição, pertencem à esfera. Além disso, você pode verificar sem contas complexas que $\langle p, t \rangle = \langle p, r \rangle = 0$, e assim provamos que p e $-p$ são os pontos de interseção de l e m .

Um caso específico da concorrência é a ortogonalidade, cuja ocorrência visivelmente depende da ortogonalidade dos seus vetores polares. Seja l uma reta qualquer de \mathbb{S}^2 com pólo t . Então se r é um vetor tal que $\langle t, r \rangle = 0$ temos que r pertence a l e, se chamarmos de m a reta definida por r , segue $l \perp m$. Mas nosso r é apenas um dos infinitos pontos que residem em l : poderíamos

tomar um r' em l e considerar a reta m' definida por este. Claramente, $m' \perp l$. Logo, quando se trata da geometria esférica, existem infinitas retas perpendiculares a uma única reta!

Paralelismo

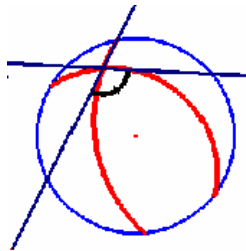
De forma análoga à demonstração do último resultado, podemos concluir que não existem retas paralelas na esfera, pois assim como para a ortogonalidade, o paralelismo de duas retas depende de seus vetores polares. Dois vetores distintos paralelos em \mathbb{S}^2 só podem ser antípodas e vetores antípodas definem precisamente a mesma reta. Portanto, se duas retas são paralelas então se tratam da mesma reta.

Ângulo entre retas

Novamente, podemos chegar nos resultados procurados apenas observando vetores polares. Sejam l e m duas retas distintas com pólos t e r . É natural que o ângulo entre as retas seja o mesmo que o ângulo entre os vetores polares. Podemos então calcular esse ângulo, que chamaremos de α , fazendo a seguinte operação:

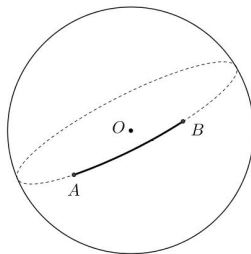
$$\langle t, r \rangle = ||t|| ||r|| \cos \alpha = \cos \alpha.$$

Então o ângulo entre l e m é $\arccos(\langle t, r \rangle)$.



2.3 Distâncias em \mathbb{S}^2

Agora que já sabemos o que é uma reta em \mathbb{S}^2 , podemos pensar em como calcular a distância entre dois pontos. No plano e no espaço encontramos essa distância calculando o comprimento do segmento de reta que os liga, pois, como já vimos, essa seria a Geodésica. Então em \mathbb{S}^2 precisamos apenas aprender a calcular o comprimento do segmento de reta que liga esses dois pontos.



Primeiramente precisamos relembrar um pouco de geometria no círculo.

Quando queremos calcular o comprimento C de um círculo de raio r utilizamos a fórmula

$$C = 2\pi r.$$

Então, quando queremos calcular apenas um pedaço desse comprimento, digamos o comprimento referente ao ângulo α , onde $\alpha \leq 2\pi$, podemos fazer a regra de três para descobrir qual será a nossa fórmula

$$\begin{array}{rcl} 2\pi r & - & 2\pi \text{ rad} \\ l & - & \alpha \text{ rad.} \end{array}$$

Logo, teremos que $l = \frac{\alpha}{r}$. Mas, como estamos trabalhando em uma esfera unitária, podemos dizer que $l = \alpha$.

Em \mathbb{S}^2 , teremos nossos segmentos de reta como pedaços de círculos de raio 1, e o ângulo α referente ao comprimento de

arco é o ângulo entre os vetores que determinam os pontos da extremidades desse segmento. Assim, como aprendemos na aula anterior, uma das formas de calcular esse ângulo entre os vetores é com o produto interno, pois temos que

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos(\alpha),$$

onde α é o ângulo entre os vetores u e v . Como esses vetores pertencem à \mathbb{S}^2 , temos que $\|u\| = \|v\| = 1$, então

$$\langle u, v \rangle = \cos(\alpha)$$

e, portanto,

$$d(u, v) = \alpha = \arccos(\langle u, v \rangle).$$

Diferente do plano, existe uma distância máxima que dois pontos podem ter, essa distância é π e, quando temos essa distância máxima, os pontos são antípodas.

2.4 Áreas

Assim como no plano, quando aprendemos a calcular distâncias, temos todas as ferramentas necessárias para calcular áreas e, já que nosso espaço \mathbb{S}^2 é limitado, nada mais natural do que calcular a sua área.

2.4.1 Área de \mathbb{S}^2

Para calcularmos a área da nossa esfera unitária precisamos apenas do comprimento do círculo de mesmo raio. Pois, se pegarmos esse círculo e rotacionarmos 2π em torno de um eixo, teremos a esfera.

Multiplicando o comprimento do círculo pelo tanto que deslocamos ele temos

$$2\pi \cdot 2\pi = 4\pi^2.$$

Quando rotacionamos em torno do eixo, não ficamos com a área da esfera, pois acabamos contando algo a mais, exatamente uma rotação π a mais, portanto se dividirmos o que temos por π , encontraremos a área da nossa esfera. Logo,

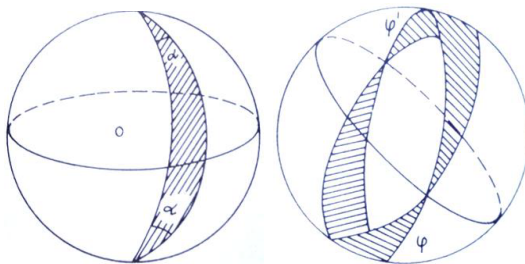
$$\text{Área da Esfera} = \frac{2\pi \cdot 2\pi}{\pi} = 4\pi.$$

2.4.2 Área de um fuso

Quando aprendemos a calcular o comprimento de um círculo inteiro, naturalmente nos perguntamos como calcular o comprimento de um pedaço desse círculo. Agora que vimos como calcular a área de toda a esfera, o mais natural é nos perguntarmos como calcular áreas de superfícies dentro dela.

A superfície mais simples em \mathbb{S}^2 é o fuso completo, uma fatia na esfera referente à um certo ângulo.

Se tivermos dois pontos antípodas e duas retas ou semirretas distintas ligando esses dois pontos, teremos que essas duas retas formam um fuso em \mathbb{S}^2 . Esse fuso esférico pode ser completo, se determinado por semirretas, ou duplo, se determinado por retas.



Então, como esse fuso é uma fatia da esfera, podemos calcular sua área através de uma regra de três simples, pois a área do fuso está para a área da esfera assim como o ângulo α está

para 2π . Chamaremos de A_f a área do fuso. Então,

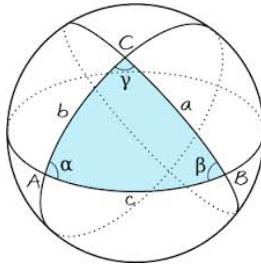
$$\frac{A_f}{4\pi} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$A_f = \frac{4\pi\alpha}{2\pi} = 2\alpha.$$

2.5 Triângulos em \mathbb{S}^2

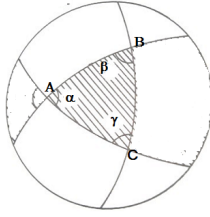
Anteriormente vimos uma superfície em \mathbb{S}^2 que tem duas arestas, agora veremos a superfície que possui três lados, ou seja, o triângulo.

Um triângulo esférico é uma superfície limitada por três retas na esfera, onde cada um de seus lados é menor que π . Pois quando um dos lados for π não é possível limitarmos a superfície para que ela tenha três lados, ela terá apenas dois e será um fuso.



A primeira diferença que temos entre um triângulo em \mathbb{S}^2 e no plano é a soma de seus ângulos internos, como o resultado a seguir irá nos provar.

Teorema 1. *Sejam α , β e γ os ângulos internos de um triângulo esférico ABC , então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + T$, onde T é a área desse triângulo esférico.*



Demonstração. Se prestarmos atenção nas retas que formam o nosso triângulo, veremos que elas formam também três fusos duplos e a interseção desses fusos produz dois triângulos, o triângulo ABC e o triângulo $A'B'C'$ formado pelas antípodas dos vértices de ABC . Além disso, os ângulos internos do triângulo ABC serão os ângulos que determinam a abertura dos fusos duplos.

Sabemos calcular as áreas desses fusos duplos, sendo elas 4α , 4β e 4γ . Ainda temos que a área do triângulo ABC é igual a área do triângulo $A'B'C'$, pois esses dois triângulos são congruentes, já que seus lados são iguais.

Quando somamos as áreas dos fusos, temos a área da esfera mais 4 vezes a área do triângulo ABC , pois as áreas de ABC e de $A'B'C'$ foram contadas duas vezes cada. Então

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4T$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + T.$$

Como queríamos provar. □

O teorema anterior nos dá uma fórmula para a área de um triângulo qualquer em \mathbb{S}^2 , para T área do triângulo esférico, temos que

$$T = -\pi + (\alpha + \beta + \gamma).$$

Pelo teorema anterior podemos ver que a área do triângulo é maior que π , mas se tentarmos aumentar ao máximo o nosso triângulo, imaginamos um triângulo esférico que ocupa quase

todo o hemisfério que o contém. Para isso tomamos três vértices equidistantes e muito próximos da reta que separa os hemisférios.

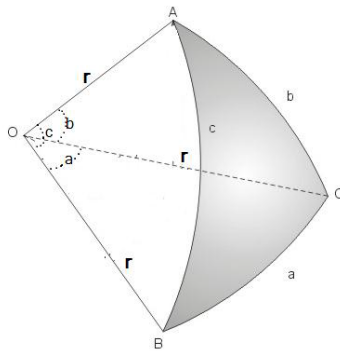
Quanto mais aproximamos esses vértices dessa reta, mais próxima a área é da área de todo o hemisfério 2π , então a soma dos ângulos tende para 3π , mas nunca chegará a esse valor. Logo, temos que

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

Agora finalmente veremos uma propriedade de triângulos que é compartilhada pela geometria plana e esférica, a desigualdade triangular.

Teorema 2. *Cada lado de um triângulo esférico é menor que a soma e maior que a diferença dos outros dois lados.*

Demonstração. Como podemos observar na figura abaixo, o lado AB , de comprimento c , do triângulo é igual ao ângulo \widehat{AOB} , em radianos. Da mesma forma, AC , de comprimento b , é igual ao ângulo \widehat{AOC} , em radianos. O lado BC , de comprimento a , é igual ao ângulo \widehat{BOC} , em radianos.



Se os lados a , b e c forem iguais, o teorema será verdadeiro.

Então seja a o maior lado e consideremos o triedro $O-ABC$. Sobre OA tomemos um ponto X qualquer, sobre OB tomemos um ponto Y e sobre XY um ponto P de modo que o ângulo

\widehat{XOP} seja igual ao ângulo \widehat{AOC} . Sobre OC tomemos um ponto Z tal que $OZ = OP$. Assim obtemos um triângulo XYZ no qual $XP = XZ$, pois temos a congruência LAL entre os triângulos XOZ e XOP .

Pela desigualdade triangular da geometria plana, temos $XZ + ZY > XY$, então $XZ + ZY > XP + PY$, como $XP = XZ$, temos que $ZY > PY$.

Como $ZY > PY$, temos que $ZOY > POY$. Então, $XOZ + ZOY > XOP + POY = XOY$. Ou seja, $a < b + c$.

□

2.6 Trigonometria Esférica

Nosso último passo na geometria esférica é aprender a fórmula fundamental da trigonometria esférica. Essa fórmula é rica em informações, pois com ela podemos determinar os três lados do triângulo e seus três ângulos internos.

Teorema 3. *Seja ABC um triângulo esférico, com lados a , b e c , e ângulos internos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} . Então*

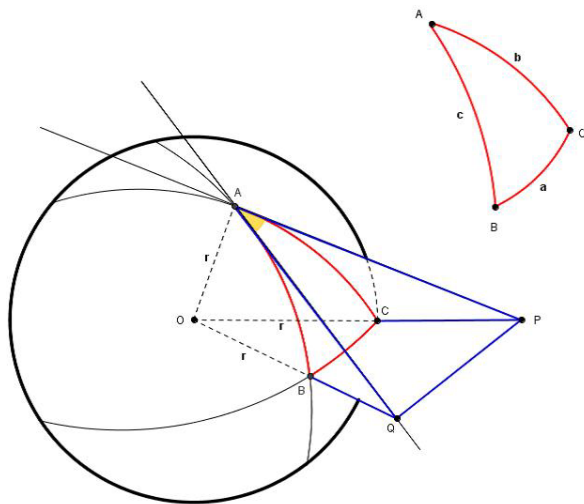
$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\widehat{A})$$

$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(\widehat{B})$$

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\widehat{C}).$$

Demonstração. Seja ABC um triângulo esférico com centro O e raio 1 como na figura abaixo. Então temos que o lado a equivale ao ângulo \widehat{COB} , o lado b equivale ao ângulo \widehat{AOC} e o lado c equivale ao ângulo \widehat{AOB} .

O ângulo \widehat{A} é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos AB e AC que passam por A . O ângulo \widehat{B} é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos BA e BC que passam por B e o ângulo \widehat{C} é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos CA e CB que passam por C .



Os lados a , b e c são opostos, respectivamente, aos ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} .

Prolongando as tangentes que passam por A e as retas OB e OC , temos que estas se encontram nos pontos P e Q .

As retas AP e AQ são tangentes à superfície da esfera e, portanto as semirretas AO e AP são perpendiculares, pois uma reta tangente a uma esfera é perpendicular ao raio. O mesmo acontece com as semirretas AO e AQ .

Com a geometria plana, podemos estabelecer algumas relações trigonométricas. Os triângulos OAP e OAQ são retângulos em A . Então

$$\cos(b) = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}},$$

$$\sin(b) = \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}},$$

$$\cos(c) = \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}},$$

$$\sin(c) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos

$$\overline{PO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2,$$

$$\overline{QO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AQ}^2.$$

Somando essas duas equações, temos que

$$\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 = 2\overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2.$$

Então,

$$2\overline{AO}^2 = \left(\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2\right) + \left(\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2\right).$$

Os triângulos PQO e PQA não são retângulos. Aplicando a lei dos cossenos, temos

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO}.\overline{QO}.\cos(a)$$

e

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP}.\overline{AQ}.\cos(\hat{A}).$$

Então,

$$\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO}.\overline{QO}.\cos(a) = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP}.\overline{AQ}.\cos(\hat{A}).$$

E portanto,

$$2\overline{PO}.\overline{QO}.\cos(a) = 2\overline{AO}^2 + 2\overline{AP}.\overline{AQ}.\cos(\hat{A}).$$

Então

$$\cos(a) = \frac{\overline{AO}^2}{\overline{PO}.\overline{QO}} + \frac{\overline{AP}.\overline{AQ}}{\overline{PO}.\overline{QO}}\cos(\hat{A})$$

Ou seja,

$$\cos(a) = \frac{\overline{AO}.\overline{AO}}{\overline{PO}.\overline{QO}} + \frac{\overline{AP}.\overline{AQ}}{\overline{PO}.\overline{QO}}\cos(\hat{A})$$

Substituindo $\cos(b) = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}}$, $\sin(b) = \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}}$, $\cos(c) = \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}}$, $\sin(c) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}}$, chegamos na fórmula fundamental para triângulos esféricos.

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\widehat{A})$$

De forma análoga, chegamos às outras duas combinações, completando assim o grupo das chamadas fórmulas fundamentais da trigonometria esférica

$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(\widehat{B})$$

e

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\widehat{C}).$$

□

2.7 Exercícios

Exercício 4. Encontre os vetores polares das retas determinadas pelos seguintes pares de pontos:

a) $(0, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$

b) $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$

c) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $(0, 0, 1)$

Exercício 5. Encontre os pontos de interseção dos seguintes pares de retas:

a) l com pólo $t = (0, 0, 1)$ e m com pólo $r = (0, 1, 0)$

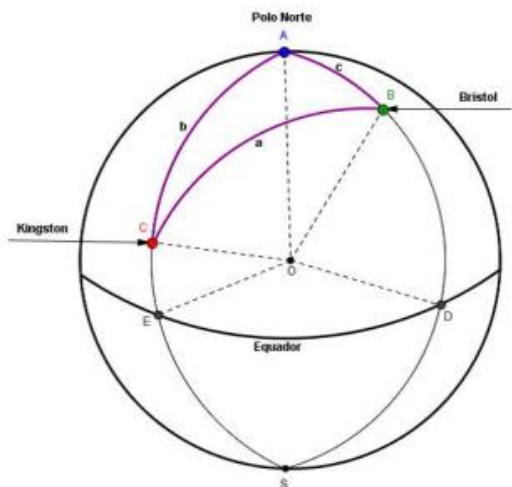
b) l com pólo $t = (0, 0, -1)$ e m com pólo $r = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

Exercício 6. Calcule o ângulo entre as retas dadas:

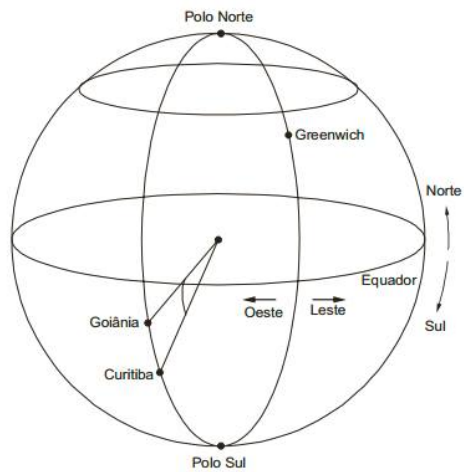
- a) l com pólo $t = (-1, 0, 0)$ e m com pólo $r = (0, 0, 1)$
- b) l com pólo $t = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2},)$ e m com pólo $r = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2},)$
- c) l com pólo $t = (\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2},)$ e m com pólo $r = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2},)$

Exercício 7. Determine a área de um triângulo esférico na esfera unitária onde $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$ e $\gamma = 5^\circ$.

Exercício 8. A cidade de Kingston, Jamaica, tem as seguintes coordenadas geográficas: latitude $18^\circ 5' N$ e longitude $76^\circ 58' W$, enquanto que a cidade de Bristol, Inglaterra, tem latitude $51^\circ 26' N$ e longitude $2^\circ W$. De posse dos dados, determine a distância entre Kingston e Bristol.



Exercício 9. As cidades de Curitiba e Goiânia estão localizadas sobre o mesmo meridiano ($49^\circ W$) e suas latitudes são respectivamente $26^\circ S$ e $17^\circ S$. Determine a distância entre elas.



Capítulo 3

Geometria Hiperbólica

3.1 Parte histórica

A história nos diz que Gauss, Bolyai e Lobachewsky desenvolveram, no século XIX, a Geometria Hiperbólica. No entanto, Lobachewsky foi o primeiro a publicar seus trabalhos, cabendo a ele a honra da descoberta dessa geometria. Porém, as dúvidas referentes à consistência da Geometria Hiperbólica, só foram esclarecidas no final do século, quando matemáticos como Eugenio Beltrami, Henri Poincaré e Felix Klein criaram no universo euclidiano modelos para esta nova geometria.

3.2 Hiperboloide

Como foi visto nos dias anteriores, sabemos que uma das coisas que mudam de uma geometria para outra, é o ambiente em que construímos as nossas retas. Por exemplo, na Geometria Euclidiana, podemos pensar que estamos sobre uma mesa e o segmento de uma reta é a menor distância entre dois pontos. Pense em uma mesa e marque dois pontos na superfície dela. Em seguida, pegue um cordão e estique esse cordão entre esses pontos e você verá um segmento de reta. Na Geometria Esférica,

imaginamos estar em cima de uma bola e o segmento de reta é, mais uma vez, o menor caminho entre dois pontos. Pegue então uma bola, e do mesmo jeito marque dois pontos sobre sua superfície, agora da mesma forma estique uma corda entre esses pontos e teremos um segmento nessa Geometria.

Na Geometria Hiperbólica, nos colocamos sobre uma hiperboloide, ilustrada abaixo.

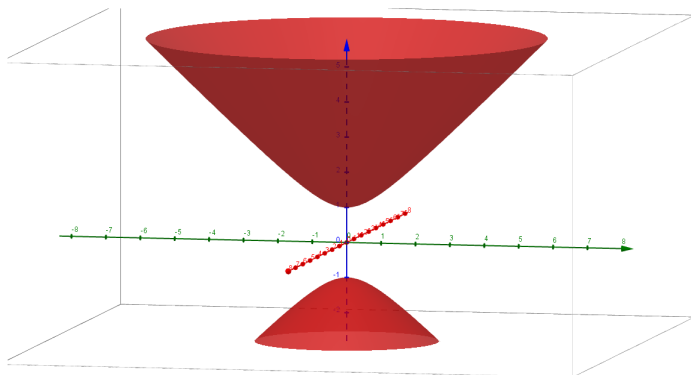


Figura 3.1: Hiperboloide de duas folhas.

Dizemos que os pontos em \mathbb{R}^3 pertencentes a essa superfície satisfazem a seguinte equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1.$$

3.2.1 Exemplo

1. Seja o ponto $(0, 0, 1)$, note que, substituindo na equação, temos que

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0^2 + 0^2 - 1^2 = -1,$$

ou seja, este ponto, pertence ao hiperboloide.

2. Seja o ponto $(1, 0, -\sqrt{2})$, note que, substituindo na equação, temos que

$$1^2 + 0^2 - (-\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = -1,$$

ou seja, também pertence ao hiperboloide.

3. Seja o ponto $(4, 1, 5)$, substituindo na equação, temos que

$$4^2 + 1^2 - 5^2 = 16 + 1 - 25 = -8 \neq -1,$$

ou seja, não pertence ao hiperboloide.

3.3 Geometria Hiperbólica

Como visto na seção anterior, notamos que a Superfície Hiperbólica possui dois "ramos": o superior e o inferior. Mas eles são perfeitamente idênticos. E para construir a nossa Geometria utilizaremos apenas um de seus "ramos". Chamemos de plano hiperbólico o ramo superior.

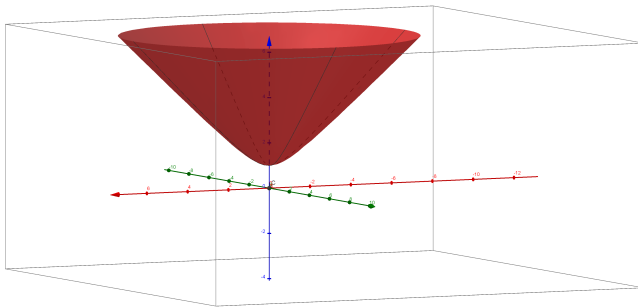


Figura 3.2: Hiperboloide

Da mesma forma que foi feito na Geometria Esférica, vimos que uma reta seria a interseção da esfera com um plano que passa pela origem. Podemos definir as retas nessa nova geometria da mesma forma.

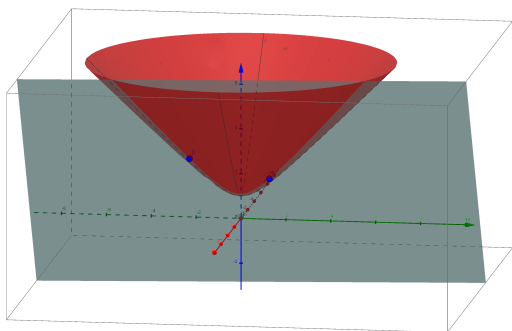


Figura 3.3: Reta no Hiperboloide

No decorrer dos anos, diversos matemáticos pensaram uma maneira diferente de compreender, ou de imaginar, essa Geometria. Chamamos esses modos de compreender a geometria de Modelos, e o modelo mais proeminente é o chamado Modelo de Poincaré. No qual, toda a Geometria Hiperbólica é totalmente representada por um disco, no qual as retas são arcos. Uma motivação que podemos dar para você pensar em tal modelo é observar a Superfície Hiperbólica de cima, deste modo

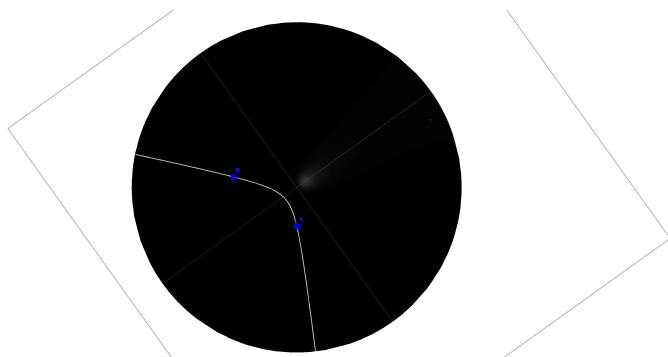


Figura 3.4: Projeção do Hiperboloide

3.4 Disco de Poincaré

No modelo do Disco de Poincaré, o plano hiperbólico é definido a partir da região limitada por uma circunferência. Denominamos essa região de disco. Os pontos internos a esta circunferência são denominados pontos do plano hiperbólico; os pontos que pertencem à circunferência são denominados pontos ideais e a circunferência é dita horizonte hiperbólico. Os arcos de circunferência contidos no Disco e ortogonais ao horizonte hiperbólico são as retas hiperbólicas, figura 1. Neste modelo, por um ponto P exterior a uma reta r passam infinitas retas paralelas, figura 2.

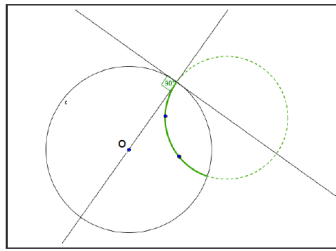


Figura 1: Reta hiperbólica como arco de circunferência ortogonal ao horizonte.

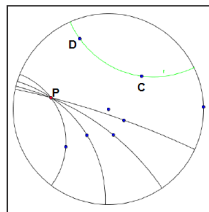


Figura 2: Infinitas retas hiperbólicas paralelas a r passando por P .

3.4.1 Construção das retas

Agora construiremos passo-a-passo as nossas retas hiperbólicas, mas no disco de Poincaré. Podemos pensar o disco com centro $O = (0, 0)$ para facilitar as contas depois.

1. Dado dois pontos A e B internos ao disco de centro O . Trace as retas OA e OB .
2. Trace a reta r perpendicular à OA que passa por A . Trace também a reta s perpendicular à OB que passa por B .
3. Seja N o ponto de interseção de r com a circunferência de centro O . E seja M o ponto de interseção da reta s com a circunferência de centro O .
4. Trace o segmento ON e o segmento OM .
5. Trace a reta t perpendicular a ON que passa por N . Trace também a reta u perpendicular a OM que passa por M .
6. Chame de A' o ponto de interseção da reta t com a reta OA e chame de B' o ponto de interseção da reta u com a reta OB .
7. Seja M_a o ponto médio de A e A' , e seja N_b o ponto médio de B e B' .
8. Trace a reta m perpendicular ao segmento AA' que passa por M_a , e trace a reta n perpendicular ao segmento BB' que passa por N_b .
9. Seja C o ponto onde m e n se interceptam. Desenhe o círculo de centro C e raio CA .

O arco do círculo de centro C que está interno ao disco de Poincaré, é a nossa reta que passa por A e B .

Note que os primeiros 6 pontos, são apenas para podermos encontrar os pontos A' e B' , mas o que tem de especial esses pontos. Eles são chamados, **pontos inversos**, pois a distância AO e a distância $A'O$ são inversos, isto é $AO \cdot A'O = 1$. Veja a figura

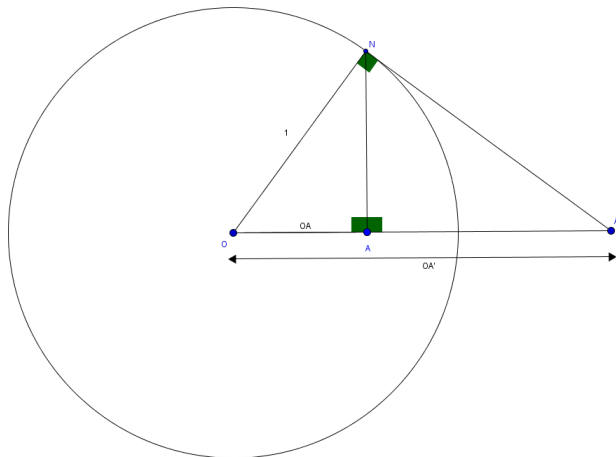


Figura 3.5: Ponto Inverso

Como sabemos por semelhanças de triângulos, temos que $AO \cdot A'O = 1$. Deste modo, talvez possamos calcular esses pontos, para casos específicos (também é possível para o caso geral, mas as contas são mais complicadas).

1. Para $A = (a, 0)$, temos que $AO = a$, daí precisamos pensar em um número, tal que vezes a dê 1. Esse número é o $\frac{1}{a}$, precisamos achar um ponto que tenha essa distância do $O = (0, 0)$ e que esteja no eixo x , ou seja, tenha coordenada $y = 0$. O ponto em questão é o $A' = \left(\frac{1}{a}, 0\right)$.
2. Para $A = (0, a)$, pelas mesmas contas, temos que $A' = \left(0, \frac{1}{a}\right)$.

3. Para $A = (a, a)$, temos que

$$OA = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2},$$

precisamos achar um ponto $A' = (a', a')$ de tal maneira que

$$\begin{aligned} OA \cdot A'O &= 1 \\ \sqrt{a^2 + a^2} \sqrt{a'^2 + a'^2} &= 1 \\ \sqrt{2a^2} \sqrt{2a'^2} &= 1 \\ a\sqrt{2} \sqrt{2}a' &= 1 \\ a2a' &= 1 \\ a' &= \frac{1}{2a}. \end{aligned}$$

O ponto $A' = \left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a} \right)$.

3.5 Distância entre dois pontos

Para calcular a distância hiperbólica entre os pontos A e B (usaremos a letra grega δ para denotar essa "nova" distância), traçamos a reta hiperbólica que passa por esses pontos e consideramos C e D que estão na circunferência euclidiana que define o Disco de Poincaré, figura 3. A partir da figura (3) pode-se estabelecer a seguinte relação

$$\delta(A, B) = \left| \ln \left(\frac{AC/AD}{BC/BD} \right) \right|$$

As medidas AC , BC , AD e BD correspondem às medidas de segmentos euclidianos.

3.5.1 Exemplos

1. Seja $A = (-0.5, 0.5)$, $B = (0.5, -0.5)$, $C = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
 $D = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

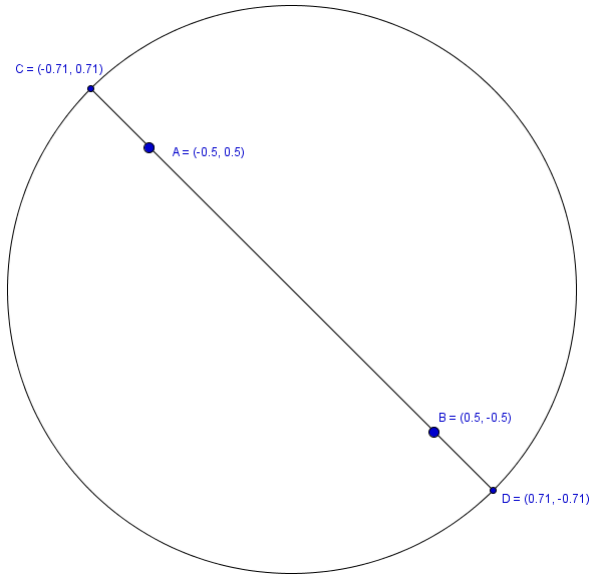


Figura 3.6: Disco 1

Resolução:

Precisamos resolver a equação

$$\delta(A, B) = \left| \ln \left(\frac{AC/AD}{BC/BD} \right) \right|$$

Em que

$$AC = |C - A| = |(-0.71, 0.71) - (-0.5, 0.5)| = |(-0.21, 0.21)| = \sqrt{(-0.21)^2 + 0.21^2} = 0.3.$$

$$AD = |D-A| = |(0.71, -0.71) - (-0.5, 0.5)| = |(1.21, -0.21)| = \sqrt{1.21^2 + (-0.21)^2} = 1.7.$$

$$BC = |C-B| = |(-0.71, 0.71) - (0.5, -0.5)| = |(-0.21, 1.21)| = \sqrt{(-0.21)^2 + 1.21^2} = 1.7.$$

$$BD = |D-B| = |(0.71, -0.71) - (0.5, -0.5)| = |(0.21, -0.21)| = \sqrt{0.21^2 + (-0.21)^2} = 0.3.$$

Então

$$\delta(A, B) = \left| \ln \left(\frac{0.3/1.7}{1.7/0.3} \right) \right| = 3.5$$

2. Seja $A = (-0.65, 0.65)$, $B = (0.35, -0.35)$, $C = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$$D = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Resolução:

Precisamos resolver a equação

$$\delta(A, B) = \left| \ln \left(\frac{AC/AD}{BC/BD} \right) \right|$$

Em que

$$AC = |C-A| = |(-0.71, 0.71) - (-0.65, 0.65)| = |(-0.06, 0.06)| = \sqrt{(-0.06)^2 + 0.06^2} = 0.08.$$

$$AD = |D-A| = |(0.71, -0.71) - (-0.65, 0.65)| = |(1.36, -1.36)| = \sqrt{1.36^2 + (-1.36)^2} = 1.92$$

$$BC = |C-B| = |(-0.71, 0.71) - (0.35, -0.35)| = |(-1.36, 1.36)| = \sqrt{(-1.36)^2 + 1.36^2} = 1.92$$

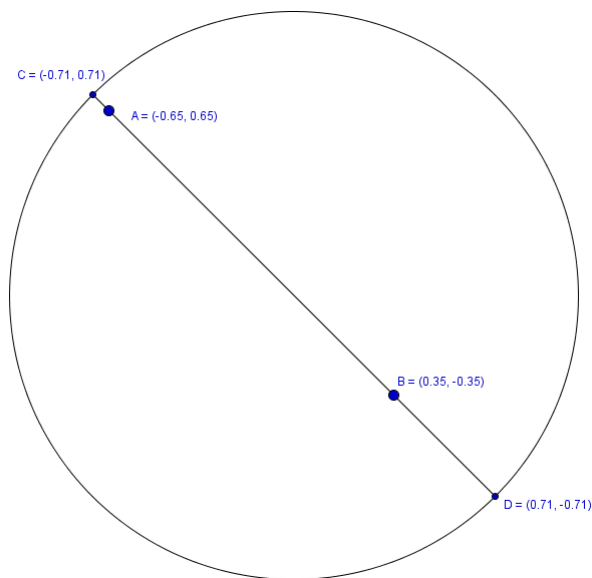


Figura 3.7: Disco 2

$$BD = |D - B| = |(0.71, -0.71) - (0.35, -0.35)| = |(0.06, -0.06)| = \sqrt{0.06^2 + (-0.06)^2} = 0.08$$

Então

$$\delta(A, B) = \left| \ln \left(\frac{0.08/1.92}{1.92/0.08} \right) \right| = 6.35$$

Como vimos nos dois exemplos acima, as distâncias se deformam a medida que nos aproximamos das bordas do Disco de Poincaré. Com isso podemos concluir que pontos que estão visualmente próximos podem estar bem distantes.

3.6 Área

Como já visto nas geometrias anteriores, um triângulo vai ser a região delimitada por três retas não-colineares. Como mostra a figura

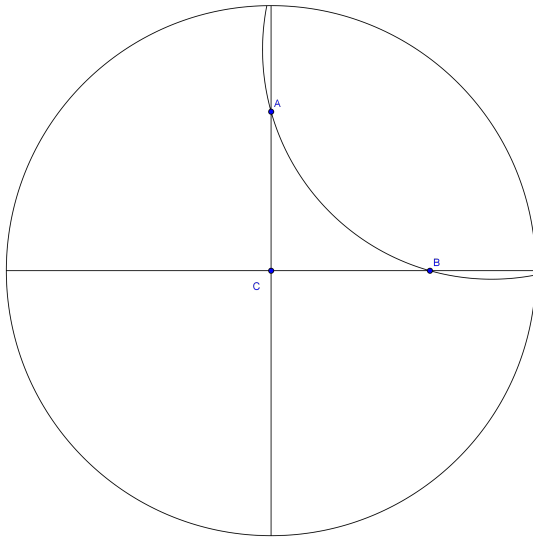


Figura 3.8: Triângulo ABC

Note que, nesse triângulo a soma dos ângulos internos não vai resultar em 180, ou π radianos.

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

Na Geometria Hiperbólica, temos que a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta em um número menor do que π . Sabemos que as distâncias no disco de Poincaré não coincidem com as distâncias euclidianas. Não é de se espantar, que a área também não seja. Nós então introduziremos a área de um triângulo, com ângulos internos α , β , γ , fica dessa forma:

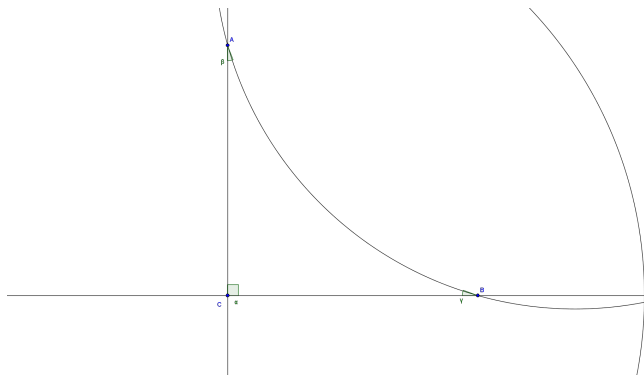


Figura 3.9: Triângulo ABC

$$A(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Agora que já sabemos como construir um triângulo, nos perguntamos se sabemos como construir um quadrilátero. Do mesmo modo como definimos nas outras geometrias, vamos dizer que um quadrilátero é a região delimitada por 4 retas. Deste modo

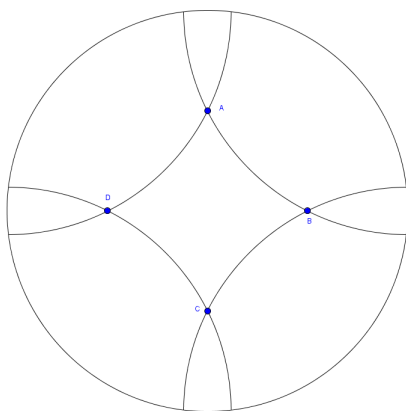


Figura 3.10: Quadrado $ABCD$

Note mais uma vez que, a soma dos ângulos internos desse

quadrilátero não resulta em 360 ou 2π radianos. Vamos chamar de α , β , γ e δ , os ângulos dos vértices A , B , C , D respectivamente.

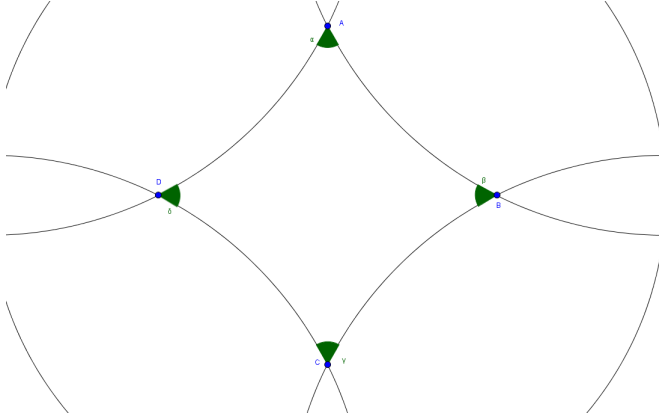


Figura 3.11: Quadrado $ABCD$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta < 2\pi$$

Para calcular a sua área, vamos dividir o nosso quadrilátero em dois triângulos, o Δ_1 que será o triângulo ADC , com ângulos α_1 , δ e γ_1 e o Δ_2 que será o triângulo ABC , com ângulos α_1 , β e γ_2 , como na figura 3.12.

Agora, podemos calcular a área do quadrilátero, desta maneira

$$A(\square) = A(\Delta_1) + A(\Delta_2)$$

$$A(\square) = \pi - (\alpha_1 + \delta + \gamma_1) + \pi - (\alpha_2 + \beta + \gamma_2)$$

$$A(\square) = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2) - \beta - (\gamma_1 + \gamma_2) - \delta$$

$$A(\square) = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$

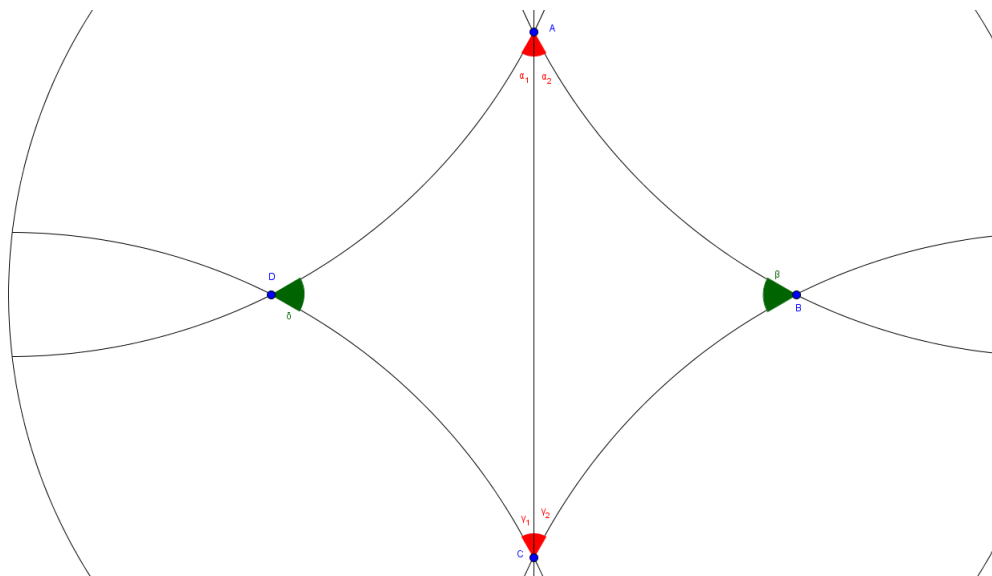


Figura 3.12: Quadrado $ABCD$

Desta maneira, nós conseguimos calcular a área de qualquer polígono de n lados, com ângulos internos iguais à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. É dado pela fórmula

$$A(P_n) = (n - 2)\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n).$$

3.7 Exercícios

Exercício 10. Verifique se os seguintes pontos pertencem ao hiperboloide:

- a) $(3, 4, -5)$
- b) $(2, 0, -1)$
- c) $(1, -1, -\sqrt{3})$

d) $(1, -1, \sqrt{3})$

Exercício 11. Mostre que, se o ponto (a, b, c) pertence ao hiperboloide, então o ponto $(a, b, -c)$, também pertence.

Exercício 12. Calcule, A' em cada um dos casos abaixo

a) $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

b) $A = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

c) $A = (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

d) $A = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

e) $A = (-\frac{7}{10}, -\frac{7}{10})$

f) $A = (0, \frac{\pi}{4})$

g) $A = (\frac{\pi}{4}, 0)$

Exercício 13.

Calcule a área dos triângulos, que possuem os seguintes ângulos:

a) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$

Exercício 14. Considere um triângulo, que possui todos os seus ângulos iguais. Qual precisa ser a medida de seus ângulos para que sua área seja igual à 1

Exercício 15. Dado um polígono de n lados, com área igual a A . Existe um polígono de $n+1$ lados, com todos os seus ângulos iguais, com essa área ? Se sim, calcule o valor dos ângulos.

Exercício 16. Dado um polígono de n lados, com área igual a A . Qual deve ser a restrição para que haja um polígono de $n-1$ lados com essa mesma área ?

Capítulo 4

Geometria Topológica

4.1 Introdução

Existe uma área da matemática chamada Topologia, em que se estuda as propriedades dos objetos, como sua geometria intrínseca e sua geometria extrínseca. Além disso existem propriedades como a orientabilidade, o número de Euler e muito mais. Nesta seção estudaremos estes conceitos e aplicações.

4.2 Planolândia

O Quadrado é um ser que vive na aldeia de Toreia. Mas o quadrado é alguém que tem apenas duas dimensões, logo não poderia habitar o nosso universo de três dimensões. Ele vive na Planolândia, um universo de duas dimensões. Os moradores da Planolândia sempre acreditaram morar em um plano gigante de duas dimensões. Porém, um dia A Pedra chegou e disse que o plano em que eles morariam não é um plano, e sim uma circunferência. Evidentemente esta teoria atraiu poucas pessoas, mas O Quadrado se interessou por ela. Para analisar mais essa questão, O Quadrado e seus amigos decidiram se aventurar por Planolândia e sair de Toreia. Eles decidiram simplesmente an-

dar reto e ver onde eles poderiam chegar. Em um dia eles saíram em direção ao norte com uma linha para marcar o caminho que fariam na viagem. Após duas semanas de viagem, eles voltaram para Toreia, e chegaram ao mesmo ponto onde tinham iniciado. Isto deixou varios moradores intrigados, porém alguns disseram que eles apenas se confundiram e andaram em círculo. Não convencido, O Quadrado decidiu sair do mesmo ponto só que agora da direção leste para oeste. Ele percebeu que esta viagem durou bem menos que a anterior, algo em torno de uma semana, e o mais importante: ele não encontrou o outro fio em nenhum momento. Isto foi deixando os habitantes intrigados e eles começaram a falar que a Planolândia era algo parecido com um hiperplano. Para nós habitantes terrestres, é facil perceber que o tipo de superfície que eles se encontram é algo parecido com uma rosquinha, ou o toro.

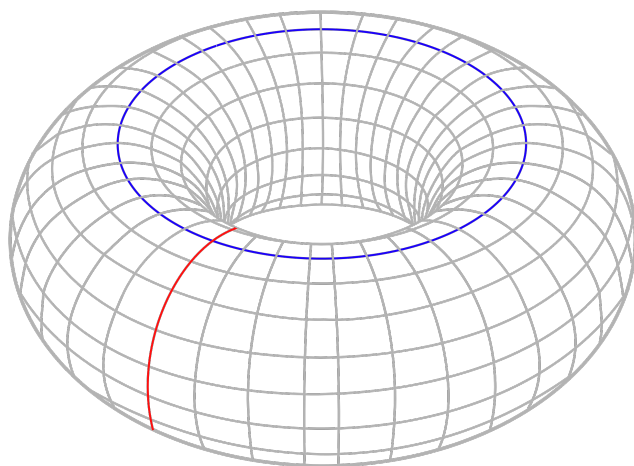


Figura 4.1: Toro e os dois caminhos percorridos.

No entanto, para O Quadrado isso é difícil de se imaginar, já que eles vivem em um espaço bidimensional, e não tem a

ajuda de uma terceira dimensão para visualizar o toro. Como uma analogia, imagine que um astronauta esteja numa viagem pela via galáctica e recebe uma frequência. O astronauta pensa que pode ser um extraterrestre tentando fazer contato com ele, mas então nota-se que é apenas a transmissão do programa do Faustão. Além disso imagine que você é um astronauta e você está observando o mesmo objeto em dois pontos diferentes no céu. Cada uma dessas situações te leva a crer em formas diferentes para o espaço que habitamos. Mas isso não quer dizer que você saiba qual é a forma do espaço! Os objetos que falamos aqui, como o toro e o plano, não estão necessariamente no \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Vamos chamar estes objetos de variedade.

4.3 Colagem

Um jogo popular antigo de dois aviões que andavam por uma tela e podiam atravessa-lá fazia muito sucesso. Se olharmos para a parte matemática do jogo, isso é equivalente a dizer que as telas estão coladas.

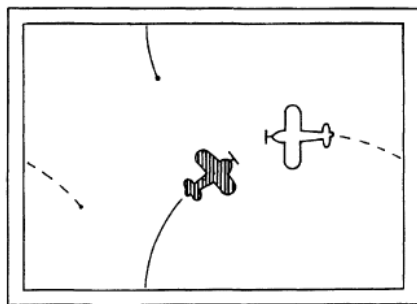


Figura 4.2: Jogo do biplanar.

A tela esquerda está colada com a direita e a de cima com a de baixo. Quando fizemos este processo de colagem descrito acima, criamos algo chamado toro bidimensional. Existe uma

relação entre o toro da seção anterior e este. Mas a partir de agora você deve imaginar o toro como acima descrito, e não como uma rosquinha. Da mesma forma que tem-se o jogo dos aviões, podemos jogar o Jogo da Velha no toro! Colamos os lados opostos como no jogo do biplanar. Um exemplo disso é a Figura 4.3, onde um jogo vitorioso é o destacado abaixo.

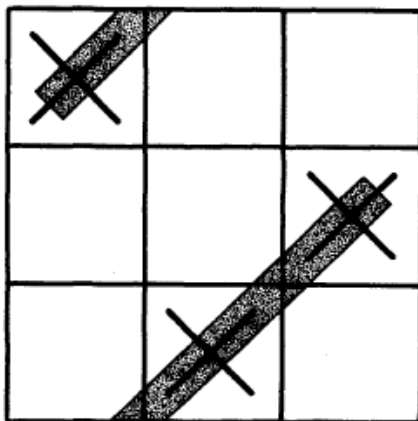


Figura 4.3: Jogo do Velha no toro.

A ideia básica é você andar para a esquerda ou direita e voltar ao mesmo lugar. Na figura acima se você deslocar os 3×3 's para cima, vamos ter uma diagonal com \times . Da mesma forma que fizemos a colagem para o jogo da velha, pode-se aplicar isso para um xadrez, ou seja, é possível jogar um xadrez no toro. Para não ficar trivial é necessário que você ajeite a posição inicial de uma maneira diferente da usual, como pode ser visto na Figura 4.4.

O toro que estivemos usando para a construção do jogo da velha e xadrez é uma variedade bidimensional. Mas ele foi definido de uma maneira abstrata colando os seus lados, ao invés da forma tridimensional apresentada na seção passada. O mesmo truque é usado para definir variedades tridimensionais, sem usar desenhos em um espaço de quarta dimensão. Assim definimos o

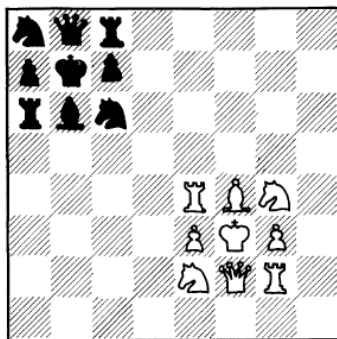


Figura 4.4: Xadrez no toro.

nosso 3-Toro colando os lados opostos de um cubo! Se tentássemos desenhar o 3-Toro como foi com o Toro bidimensional, não conseguiríamos, já que seria necessário uma quarta dimensão para trabalhar. Podemos representar o 2-Toro e o 3-Toro da seguinte forma. Note que no 3-Toro identificamos uma face com a sua oposta, da mesma maneira que no 2-Toro.

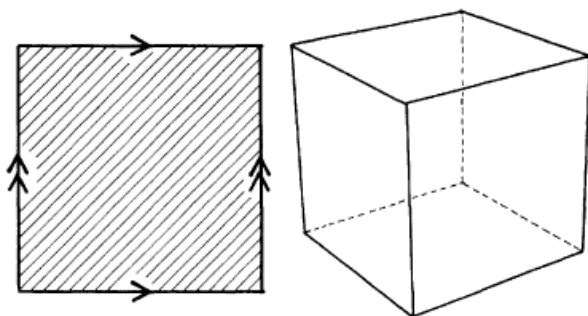


Figura 4.5: Representação do toro e do 3-Toro.

4.4 Vocabulário

4.4.1 Topologia x Geometria

Como você já pode ter percebido, existem algumas diferenças quando estamos tratando de objetos na forma geométrica e quando estamos os tratando na forma topológica. Por exemplo na Figura 4.6 temos que os dois objetos a esquerda são topologicamente iguais, e os dois da direita também. Mas geometricamente falando os quatro objetos são diferentes. Isto é algo interessante, pois assim você consegue uma classificação de superfícies (assunto que será tratado em seções posteriores). Embora possamos mudar a forma geométrica da superfície quando giramos, amassamos ou façamos qualquer ação que fure ou corte, estas ações mantêm a "topologia" da superfície.

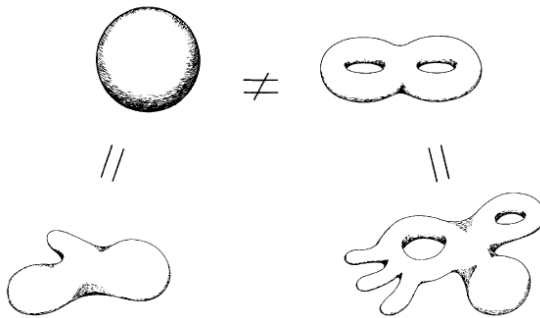


Figura 4.6: Superfícies que são topologicamente iguais e diferentes a outras.

Se nós colarmos o toro fisicamente, ou seja, colar os lados opostos de um quadrado, nós obteremos a rosquinha novamente! Isso quer dizer que eles tem a mesma topologia, mas não a mesma geometria.

4.4.2 Propriedades intrínsecas x extrínsecas

A Figura 4.7 nos mostra uma fita de borracha sendo torcida. Do nosso ponto de vista, vemos que as fitas são topologicamente diferentes, pois elas foram cortadas, giradas e depois coladas novamente. Mas para um habitante da Planolândia ela se manteve igual. Pois para ele o que aconteceu foi que a fita foi cortada, girada e voltou ao ponto inicial assim como estava anteriormente. A propriedade intrínseca da fita não foi mudada, mas a extrínseca, o jeito que está colocada no espaço tridimensional, foi.

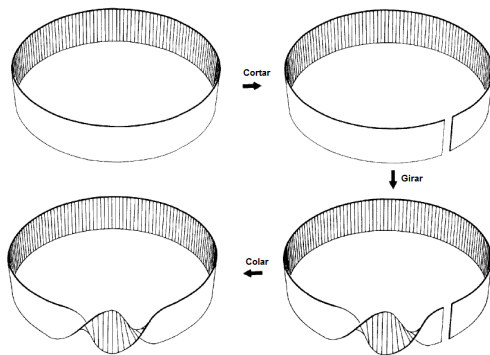


Figura 4.7: Como torcer uma fita de borracha.

Essa mesma ideia se aplica para a geometria da superfície. Para um habitante da planolândia morando em uma folha de papel, se ela for entortada ou não, ele não sentirá diferença nenhuma, enquanto nós habitantes do espaço tridimensional veremos a clara diferença. A essência desse estudo de propriedades intrínsecas é que uma variedade existe por si só e não depende do meio que ela está, ou seja, não precisa necessariamente estar imersa em um espaço de dimensão maior.

4.4.3 Variedades abertas e fechadas

Intuitivamente, *fechado* significa finito e *aberto* significa infinito. Ou seja, uma variedade fechada seria uma variedade finita, enquanto uma variedade aberta seria uma variedade infinita. Porém existem duas complicações. Uma delas é que variedades com pontas não são as variedades que estamos estudando aqui (são chamadas de variedades com borda). Logo uma variedade ser aberta e fechada vai implicar, neste contexto, que ela não tem pontas.

A outra complicação é que existem superfícies infinitamente longas, porém com área finita. Por exemplo, o toro com uma cuspide tem área finita, porém é infinitamente longo. Então uma superfície vai ser classificada como aberta ou fechada pelo seu comprimento. Portanto o toro com uma cuspide é aberto.

4.5 Orientabilidade

O Quadrado e seus amigos eufóricos se divertiam explorando a Planolândia atrás de novas descobertas. Até que um dia eles estavam andando em uma área rural e se depararam com um idoso que estava aborrecido com eles, pois estavam andando na contramão. Sem entender nada eles chegaram em Toreia e perceberam que a placa da cidade estava ao contrário, ou seja, siɹɔT . Andando um pouco mais, eles perceberam que todas as placas e sinais estavam espelhados. O que será que pode ter acontecido com nossos amigos?

Na história, os habitantes da Planolândia voltaram com a sua imagem espelhada. Isso acontece pois eles passaram por uma região como a da Figura 4.8.

Mas como podemos trazer a faixa de Moebius para uma superfície? A garrafa de Klein é um exemplo. Você pode fazê-la através de faixas de Moebius e representá-la assim como fizemos com o toro, veja Figura 4.9. A única diferença é o jeito que ela

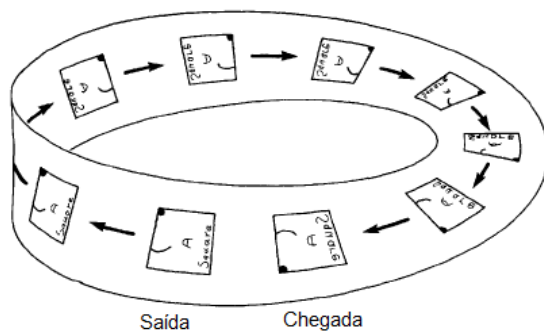


Figura 4.8: Habitantes da Planolândia viajando pela região de inversão.

está sendo colada. Você pode colar a parte de cima com a de baixo, mas vai inverter a colagem entre o lado esquerdo com o direito, de modo que as setas se coincidam.

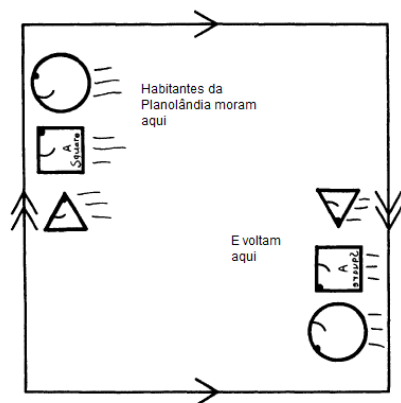


Figura 4.9: Representação da garrafa de Klein.

Para ter uma intuição da garrafa de Klein, podemos falar do jogo da Velha nessa superfície também! Mas note que há diferenças agora, pois estamos espelhando as ações quando andando da esquerda para a direita. Observe a Figura 4.10

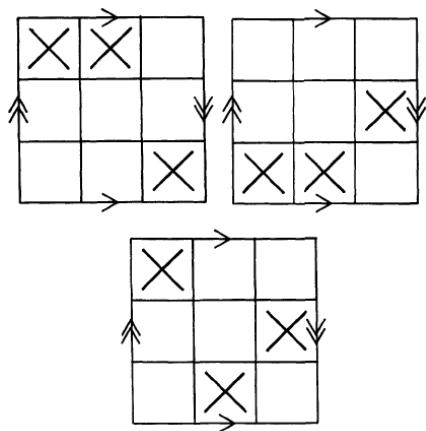


Figura 4.10: Quais dessas jogadas é a jogada ganhadora?

É possível visualizar a garrafa de Klein no nosso espaço tri-dimensional. Pegue um quadrado de borracha, enrole ele em um cilindro e cole-o de forma a ficar como na Figura 4.11. Após isso passe o cilindro por dentro dele e cole os seus finais.

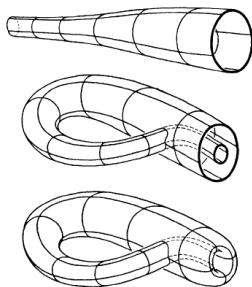


Figura 4.11: Formando uma garrafa de Klein com um quadrado de borracha.

Um caminho em uma superfície ou em uma 3-Variedade que traz o viajante ao ponto inicial espelhado, se chama um caminho que reverte orientação. As variedades que não contêm tais caminhos se chamam *orientáveis*, enquanto os que contêm se

chamam *não orientáveis*.

Você pode criar a sua própria variedade não orientável! Como você faria isso?

O plano projetivo é uma superfície que localmente é como a esfera, mas que tem topologia global diferente. O plano projetivo é feito colando pontos opostos no *aro* do hemisfério. Observe a Figura 4.12 para ter uma ideia.

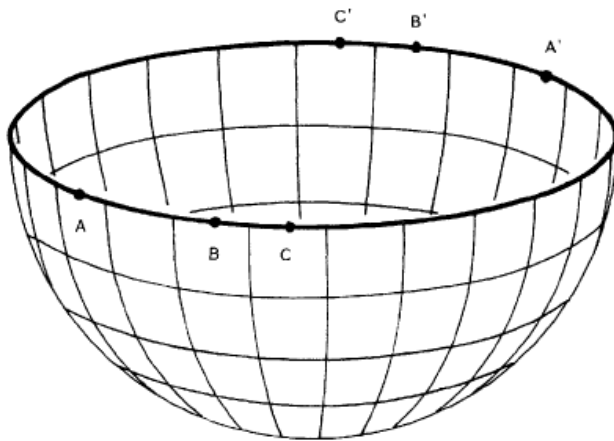


Figura 4.12: O plano projetivo.

Se estamos interessados apenas nas propriedades topológicas do plano projetivo, podemos escrevê-lo de uma forma parecida com a do toro. Nós podemos pegar o hemisfério e colar os pontos opostos, representando-os como na Figura 4.13. Alternativamente podemos dizer que uma superfície é *orientável* se ela não contém uma faixa de Moebius.

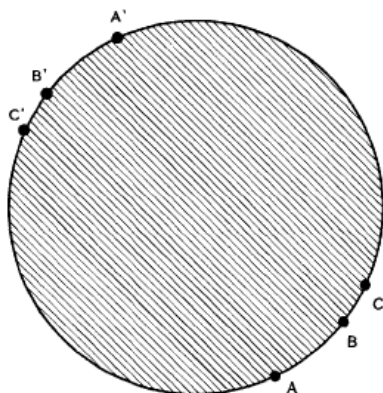


Figura 4.13: Topologicamente, o plano projetivo é um disco com os pontos opostos colados.

4.6 Somas conexas

4.6.1 Planolândia e o seu desfecho

Após esses problemas com a reversão da orientação na Planolândia e com uma eventual adaptação dos habitantes que tiveram a orientação revertida, surgiu uma nova pergunta. Como seria o formato da Planolândia? Agora não mais pode-se dizer que é o toro, pois ele é orientável e no mundo deles há uma região de reversão. A Planolândia poderia assumir o formato da Figura 4.14.

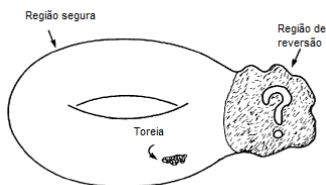


Figura 4.14: Ainda não se sabe o formato da Planolândia.

Antes de qualquer viagem para desvendar os mistérios da região desconhecida, os moradores imaginavam que a região desconhecida poderia ser um bitoro. Então uma equipe composta de 8 habitantes de Toreia foram explorar essa região desconhecida. Eles dividiram a região em 8 setores e cada um foi explorá-la. Após a excursão eles descobriram que nenhum voltou revertido e além do mais, as regiões estavam conectadas de uma maneira estranha. O setor 1 estava conectado com o setor 8 e não com o setor 7 como esperado. Era o setor 2 que estava conectado com o setor 7. Veja a Figura 4.15

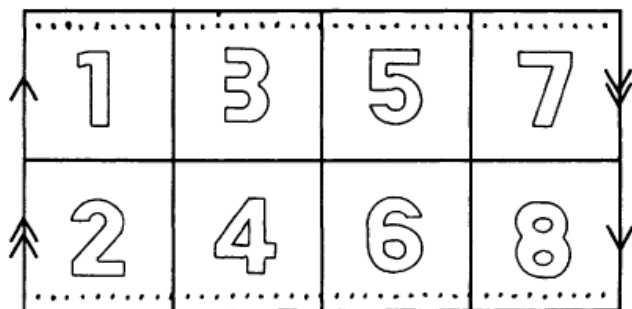


Figura 4.15: Como os oito setores foram colocados juntos.

Isso quer dizer que os habitantes de Toreia e Planolândia descobriram a faixa de Moebius! Portanto, a Planolândia consiste de uma faixa de Moebius e o toro. Após isso os moradores viveram felizes para sempre e a região de reversão é motivo apenas de piadas e pegadinhas.

Como os moradores da Planolândia apontaram, um bitoro lembra dois toros. E é possível obter um bitoro através de dois toros cortando um disco de cada toro e colando essas duas partes. Veja a Figura 4.16 Essa operação é chamada de *soma conexa*.

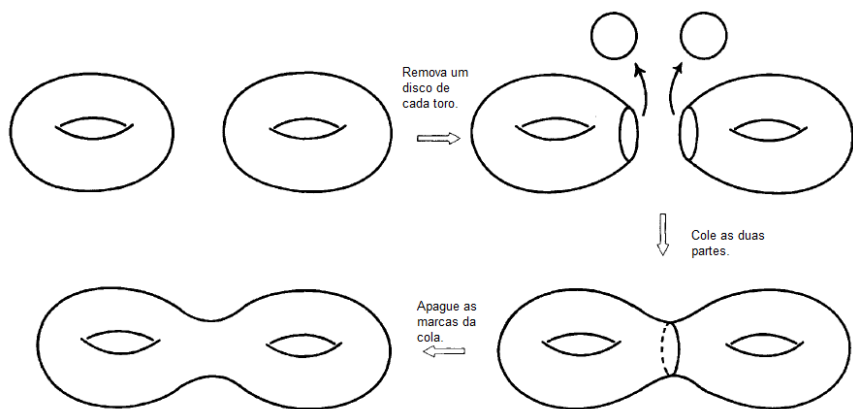


Figura 4.16: Processo de construção do bitoro.

A maioria das variedades tem nomes abreviados com letras e índices. Por exemplo, temos:

- E^2 o plano euclidiano;
- S^2 a esfera;
- T^2 o toro;
- K^2 a garrafa de Klein;
- P^2 o plano projetivo;
- D^2 o disco.

Vamos abreviar a soma conexa usando o símbolo $\#$. Por exemplo, um bitoro é representado por $T^2 \# T^2$.

Teorema 4. *Toda superfície é uma soma conexa de um toro com um plano projetivo.*

Neste caso vamos assumir que a soma conexa de um zero-toro com um zero-plano projetivo é a esfera. Considere a tabela a seguir.

		Número de planos projetivos				
		0	1	2	3	...
Número de toros	0	S^2	P^2	$P^2 \# P^2$	$P^2 \# P^2 \# P^2$...
	1	T^2	$T^2 \# P^2$	$T^2 \# P^2 \# P^2$	$T^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2$...
	2	$T^2 \# T^2$	$T^2 \# T^2 \# P^2$	$T^2 \# T^2 \# P^2 \# P^2$	\vdots	
	3	$T^2 \# T^2 \# T^2$	$T^2 \# T^2 \# T^2 \# P^2$	\vdots	\vdots	
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		

Figura 4.17: Soma conexa entre o plano projetivo e o toro.

Ela nos mostra algumas somas conexas entre o plano projetivo e o toro. Você consegue reconhecer alguma superfície?

Agora vamos mostrar que retirando um disco do plano projetivo obtemos a faixa de Moebius. Com isto, você será capaz de mostrar que $T^2 \# P^2 = K^2 \# P^2$ como exercício.

Primeiramente, retire um disco do plano projetivo, assim obtendo duas faixas distintas. Agora estique-as. Pegue a faixa inferior e gire ela, de forma que as duas flechas fiquem a direita e as três a esquerda. Após isso as duas faixas estarão com o mesmo sentido, a flecha superior estará apontando para direita. Cole as duas setas agora e assim se obtem a faixa de Moebius. Observa na Figura 4.18 um passo a passo visual. Primeiramente, retire um disco do plano projetivo, assim obtendo duas faixas distintas. Agora estique-as. Pegue a faixa inferior e gire ela, de forma que as duas flechas fiquem a direita e as três a esquerda. Após isso as duas faixas estarão com o mesmo sentido, a flecha superior estará apontando para direita. Cole as duas setas agora e assim se obtem a faixa de Moebius. Observa na Figura 4.18 um passo a passo visual.

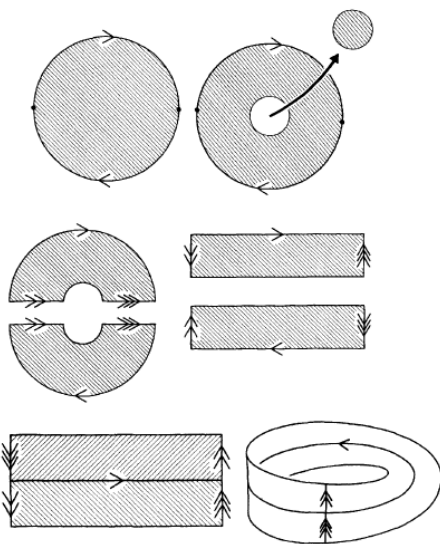


Figura 4.18: Plano projetivo e faixa de Moebius

4.7 O Teorema de Classificação

4.7.1 Introdução

Na seção anterior, vimos o que são superfícies e que algumas delas podem ser iguais entre si de uma forma topológica, isto é, uma pode ser deformada na outra sem rasgar ou criar um furo na superfície. De agora em diante diremos que este tipo de deformação é uma **deformação contínua**. Vimos também que essas superfícies podem ser um tanto quanto complicadas de se estudar, por exemplo a Planolândia. E, pasmem: podemos complicar mais, podemos dar nós nas superfícies, por exemplo podemos dar um nó em um toro como na figura 4.19.

O intuito desta seção é facilitar o estudos dessas superfícies, e vamos fazer isto da seguinte forma, vamos criar uma lista com superfícies padrões cuja as propriedades gerais já conhecemos bem, e dada uma nova superfície S , queremos saber se S pode

ser deformada em alguma dessas superfícies padrões.

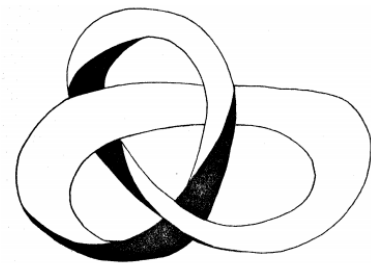


Figura 4.19: Toro com nó.

4.7.2 Superfícies e suas Propriedades

Para podermos desenvolver o estudo da classificação das superfícies, pedimos que elas tenham algumas propriedades, que vamos explicar agora.

Conexa

Queremos que a superfície tenha apenas um pedaço. De outra forma, uma superfície é conexa quando dados quaisquer dois pontos na superfície sempre possamos ligar eles por um caminho contido na superfície. A figura 4.20 é um exemplo de uma superfície não conexa.

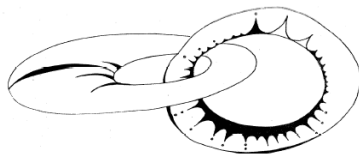


Figura 4.20: Superfície não conexa.

Fechada

Como já visto, a superfície é dita fechada se for finita e não tiver borda.

Triangulável

Uma superfície é dita triangulável, ou possui uma triangulação, quando é possível fatia-la em um número finito de vértices, arestas e triângulos. Se a sua superfície é curvada, como a esfera, então as arestas e triângulos serão curvados também. A figura 4.21 mostra uma triangulação da esfera com 4 vértices, 6 arestas curvadas e 4 triângulos curvados.

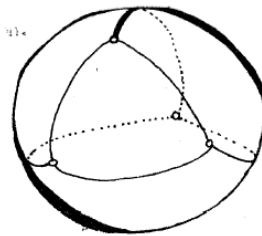


Figura 4.21: Triangulação da esfera.

Algumas vezes é mais fácil fatiar a superfície em polígonos e não em triângulos. Por exemplo a figura 4.22 mostra uma triangulação do toro em 9 vértices, 18 arestas e 9 quadrados.

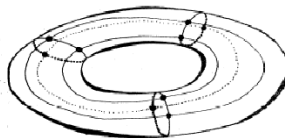


Figura 4.22: Triangulação do toro.

Veja que se conseguimos fatiar a superfície em polígonos, podemos então fatia-la em triângulos adicionando um vértice em cada polígono. Cada triangulação tem duas propriedades essenciais.

1. Toda aresta é a aresta de exatos dois triângulos.

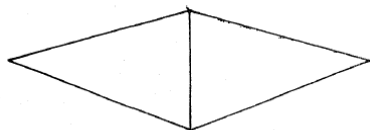


Figura 4.23

2. Todo vértice v , é vértice de pelo menos 3 triângulos, e todos os triângulos tendo v como vértice encaixam em um ciclo.

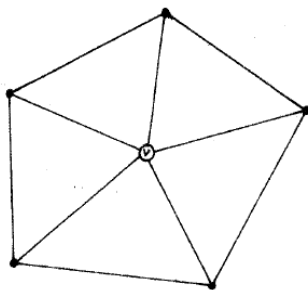


Figura 4.24

Um teorema importante afirma que toda superfície é triangulável.

Teorema 5. *Toda superfície possui uma triangulação.*

4.7.3 Superfícies Padrão

Como dito anteriormente, o nosso objetivo é classificar superfícies e para tal precisamos gerar uma lista de superfícies padrão que serviram de base para tal classificação. Agora introduziremos tais superfícies, mas antes temos que rever o conceito de orientação. Vamos considerar uma definição equivalente de orientação: diremos que a superfície S é orientada se S não contém uma faixa de Moebius.

A Superfície Padrão de n Alças Orientável

Para colar uma alça na esfera deve-se fazer o seguinte: corte dois pequenos buracos na esfera então tome um cilindro e cole as extremidades do cilindro na borda dos buracos na esfera. Veja que quando fazemos essa colagem é importante o sentido em que colamos os bordos (lembre-se que ao colarmos a dois lados de uma folha de papel podemos obter coisas diferentes dependendo da orientação). A figura 4.25 mostra como devemos fazer essa colagem.

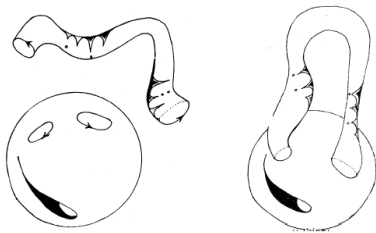


Figura 4.25: Colagem de 1 alça.

Da mesma forma que colamos uma alça na esfera, podemos colar mais de uma em diferentes lugares. Definimos a superfície padrão de n ($n \geq 0$) alças, sendo a esfera com n alças coladas.

A Superfície Padrão de n Alças Não-Orientável

Para colar uma faixa de Moebius em uma esfera corte um pequeno buraco na esfera, e cole a borda da faixa de Moebius com a borda do buraco, como feita na figura 4.26.

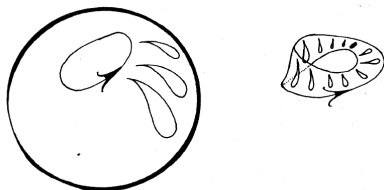


Figura 4.26: Colagem de 1 faixa de Moebius.

A colagem é fácil de ser feita na teoria, porém pode ser muito difícil de se visualizar a figura obtida, pois ela tem uma auto intersecção, como a garrafa de Klein. Definimos a superfície padrão de n ($n \geq 1$) alças não orientável sendo a esfera com n faixas de Moebius coladas.

Exemplo 1. 1. No caso $n = 1$, temos o plano projetivo.

2. No caso $n = 2$, temos a garrafa de Klein.

4.7.4 Superfícies de Tipo Esfera

Considere uma superfície S com uma triangulação. Uma curva sobre S é um caminho fechado sem auto intersecção, consistido de vértices e arestas da triangulação. Dizemos que uma curva separa S se cortando ao longo da curva, este corte causa a separação de S em dois pedaços. Dizemos que S é de tipo esfera se toda curva (em toda triangulação) separa S .

4.7.5 Característica de Euler

Considere uma superfície S munida de uma triangulação. Com v vértices, a arestas e f triângulos. Definimos a sua **ca**-

racterística de Euler $\chi(S)$ pela seguinte formula

$$\chi(S) = v + f - a.$$

Um fato marcante sobre a característica de Euler é que se tomarmos outra triangulação de S com \tilde{v} vértices, \tilde{a} arestas e \tilde{f} triângulos então

$$v + f - a = \tilde{v} + \tilde{f} - \tilde{a}.$$

É um pouco difícil de acreditar neste fato. Para ajudar, pense em alguns exemplos e veja como a conta sempre dará certo. Outro fato interessante é que a formula vale não apenas para triangulações com triângulos, mas para triangulações com polígonos, então na definição de $\chi(S)$ podemos trocar a palavra *triângulos* pela palavra *faces* (ver exercício 20).

Exemplos 1. 1. Cubo.

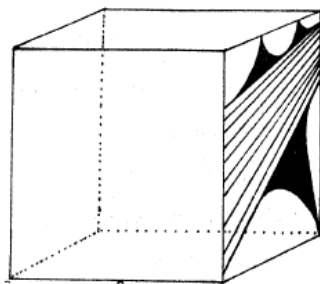


Figura 4.27: $\chi = 9 \text{ vertices} + 6 \text{ faces} - 12 \text{ arestas} = 2$.

2. Toro.

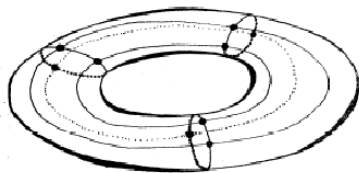


Figura 4.28: $\chi = 9 \text{ vertices} + 9 \text{ faces} - 18 \text{ arestas} = 0$.

Agora vamos apresentar dois lemas importantes para o nosso teorema principal.

Lema 1. *Se S é uma superfície conexa, fechada e triangulável então $\chi(S) \leq 2$.*

Lema 2. *Se S é uma superfície conexa, fechada e triangulável então as três seguintes condições são equivalentes:*

1. S é de tipo esfera.
2. $\chi(S) = 2$.
3. S pode ser deformada continuamente até a esfera.

4.7.6 Teorema de Classificação

Agora estão em plenas condições de enunciar o Teorema de Classificação das Superfícies.

Teorema 6. *Toda superfícies conexa, fechada e triangulável pode ser deformada continuamente até uma das superfícies padrão.*

Demonstração. Seja S uma superfície conexa, fechada e triangulável. Devemos mostrar que S pode ser deformada continuamente a uma das superfícies padrões.

Escolha uma triangulação de S , e calcule $\chi(S)$. Então $\chi(S) \leq 2$ pelo lema 1. Se $\chi(S) = 2$ então S pode ser deformada continuamente até a esfera pelo lema 2. Assim podemos assumir que $\chi(S) < 2$, então S não é spherelike, e assim podemos escolher uma curva C em S que não separa S .

Considere uma faixa fina na superfície contendo C , então temos duas possibilidades: a faixa é um cilindro ou a faixa é uma faixa de Moebius.

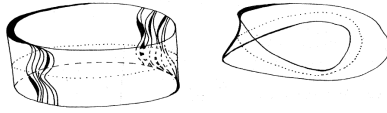


Figura 4.29: Faixa contendo C .

Se a faixa é um cilindro então dizemos que C preserva orientação, e se é uma faixa de Moebius dizemos que C reverte orientação. Agora construímos uma nova superfície S_1 por um processo chamado cirurgia, que é definido como, se C preserva orientação, corte ao longo de C e preencha cada lado com um disco. É importante deixar setas no bordo dos discos para facilitar a colagem depois.

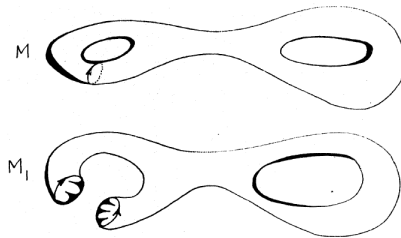


Figura 4.30: Processo de cirurgia.

Se C reverte orientação, novamente corte ao longo de C , mas agora apenas um lado é formado com o corte, então preencha

este lado com um disco. Neste caso o processo de cirurgia é um pouco difícil de se imaginar pois gera auto intersecção.

Afirmamos que

$$\chi(S_1) = \begin{cases} \chi(S) + 2, & \text{se } C \text{ preserva orientação} \\ \chi(S) + 1, & \text{se } C \text{ reverte orientação.} \end{cases}$$

Para provar isto suponha que C tenha k vértices e k arestas. Então $\chi(C) = k - k = 0$. Então remover C não altera $\chi(S)$. No caso que C preserva orientação formamos S_1 adicionando dois discos, onde cada disco é obtido ligando C a um ponto.

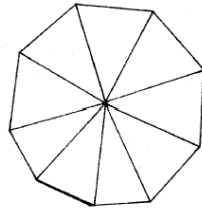


Figura 4.31

Então cada disco contém $(k+1)$ vértices, $2k$ arestas e k faces. Assim $\chi(disco) = 1$ e então, $\chi(S_1) = \chi(S) + 2\chi(disco) = \chi(S) + 2$. No caso em que C reverte orientação adicionamos apenas um disco, porém veja que este disco contém $2k$ triângulos mas ainda contém característica de Euler 1, então $\chi(S_1) = \chi(S) + 1$. Em ambos os casos $\chi(S) < \chi(S_1)$.

Agora procedemos da mesma forma. Podemos ter $\chi(S_1) = 2$ e S_1 pode ser deformada continuamente até a esfera, ou $\chi(S_1) < 2$ e podemos criar S_2 da mesma forma que criamos S_1 , e teremos $\chi(S_1) < \chi(S_2)$. Pelo lema 1 este processo deve ser finito (por que?). Após esse processo finito teremos gerado uma sequência de superfícies S_1, S_2, \dots, S_r tais que $S < S_1 < S_2 < \dots < S_r = 2$, sendo que S_r pode ser deformada continuamente até a esfera

pelo lema 2. Veja que S_r contém um número finito de pequenos discos provenientes das cirurgias, e podemos garantir que estes discos não intersectam. De fato, dois discos só terão intersecção se: a curva da cirurgia atual cruzar um disco de alguma cirurgia anterior. Mas podemos encolher o disco para o interior de algum dos triângulos, como na figura 4.32, pois assim nenhuma curva irá cruzá-lo.

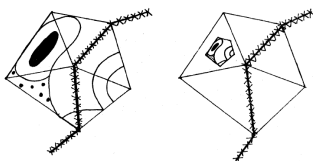


Figura 4.32

Neste momento a triangulação já teve o seu papel então podemos esquecê-la. Vamos concentrar nossa atenção para S_r . Sabemos que S_r pode ser deformada até a esfera, então vamos fazer isto, colocando cada par de discos, gerados por uma cirurgia que preserva orientação, lado a lado. Agora, vamos aplicar uma nova operação na superfície chamada costura. A ideia da costura é ligar os discos obtidos criando uma alça entre eles. Existem três tipos de costura.

- **Caso (i).** Quando dois discos estão com setas indo em direções opostas. Remova os discos, então puxe para cima dois pequenos tubos e cole eles, como na figura 4.33 . O efeito é equivalente a colar uma alça na esfera.

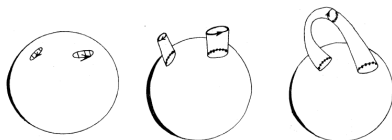


Figura 4.33

- **Caso (ii).** Quando temos apenas um disco. Remova o disco e cole a borda diametralmente. O efeito é o mesmo de colar uma faixa de Moebius.
- **Caso (iii).** Quando temos dois discos com setas indo na mesma direção. Remova os discos, puxe um tubo para cima e o outro tubo para baixo. Então cole eles como na figura 4.34. O efeito é o mesmo de colar uma garrafa de Klein, o que ainda é equivalente a colar duas faixas de Moebius.

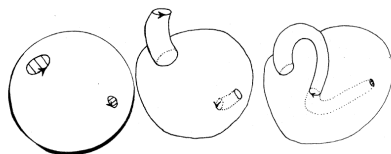


Figura 4.34

Realizando todas as costuras simultaneamente obtemos uma superfície S_* que pode ser deformada continuamente até S .

O caso orientável.

Se S é orientável então também é S_* . Logo S_* não contém faixas de Moebius, então só podemos ter realizados costuras do primeiro tipo para obtê-la. Então S_* é a superfície padrão orientável com n alças coladas, onde n é o número de cirurgias feitas.

O caso não-orientável.

Se S é não orientável então podem ocorrer todos os tipos de costura. Não pode ocorrer apenas costuras do tipo (i), pois S_* seria orientável e isto é um absurdo. Então devemos ter costuras do tipo do (ii) e (iii). Faça primeiro as cirurgias do tipo (ii) e (iii), obtendo assim pelo menos uma faixa de Moebius na esfera. Agora vamos transformar as costuras do tipo (i) em costuraras do tipo (iii) com o seguinte truque: dado um par de discos correspondentes a uma costura do tipo (i), tome um dos

discos, transporte o mesmo ao longo da esfera até uma das faixas de Moebius já obtidas. Então faça o disco percorrer a faixa de Moebius, assim como na história da Planolândia; a seta do disco vai inverter. Após isso transporte o disco para o local original. Assim obtemos discos na configuração exata para executar uma costura do tipo (iii). Em outras palavras transformamos as costuras do tipo (i) em costuras do tipo (iii). Assim S_* é a superfície padrão não orientável com n alças, lembre-se que no caso não orientável essas alças representam faixas de Moebius. Onde n é o número de costuras do tipo (ii) mais duas vezes o número de costuras do tipo (iii). Isto completa a demonstração do teorema.

□

4.8 Exercícios

Exercício 17. Imagine o jogo de xadrez na Figura 4.35 a ser colado para formar uma garrafa de Klein ao invés do toro. Qual peça preta é ameaçada pelo rei branco? Quais peças pretas o ameaçam?

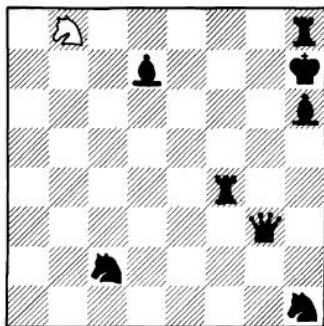


Figura 4.35: Um jogo de xadrez na garrafa de Klein

Exercício 18. Em uma partida do xadrez no toro, um rei e um bispo podem se ameaçar ao mesmo tempo?

Exercício 19. Você pode enrolar uma folha de papel em um cilindro sem perder as suas propriedades intrínsecas, mas a geometria extrínseca é alterada. Você também pode enrolar uma folha de papel no formato de um cone? Você consegue alterá-la em uma cesta de lixo sem deformação? O que isso nos mostra sobre a geometria intrínseca do papel, do cilindro, do cone e da cesta de lixo?

Exercício 20. Seja S uma superfície e considere uma triangulação de polígonos com v vértices, a arestas e f faces. Suponha que esses polígonos tenham n lados. Vamos montar uma nova triangulação adicionando um vértice no centro de cada polígono e ligando o mesmo aos vértices do polígono que o contém. Mostre que essa nova triangulação tem $v + f$ vértices, $a + nf$ arestas e nf faces.

Exercício 21. Calcule a característica de Euler das seguintes superfícies.

- a) Dodecaedro.
- b) Cilindro sem as tampas.
- c) Bitoro.

Exercício 22. Calcule a característica de Euler de uma esfera com k buracos. Sabendo que adicionando uma alça em uma esfera com 2 buracos não altera sua característica de Euler. Agora conclua que a característica de Euler da superfície padrão de n alças orientável é $2 - 2n$.

Referências Bibliográficas

- [1] ABREU, S. M.; OTTONI, J. E. **Geometria esférica e trigonometria esférica aplicadas à astronomia de posição.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Departamento de Física e Matemática - Defim, UFSJ/CAP, Universidade Federal de São João del-Rei, 2015.
- [2] ARNAULT, P. **Geometria Plana.** No Prelo.
- [3] As atribuições de padre Saccheri. Disponível em: <http://www.seara.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica2.htm>. Acesso em: 02 julho 2016.
- [4] BARBOSA, J. L. M. **Geometria hiperbólica.** IMPA, 2002.
- [5] BRAZ, F. M. **História da geometria hiperbólica.** Monografia (curso de Especialização em Matemática para Professores da Universidade Federal de Minas Gerais.) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.
- [6] CAMARGO, I.; BOULOS, P. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**, terceira edição, Ed. Pearson-Prentice Hall, 2005.

- [7] CASTRO, K. A. A Geometria hiperbólica como um exemplo das geometrias não euclidianas In: FÓRUM DE ESTUDOS MULTIDICIPLINARES, 3., 2009. Franca: UNIFACEF, 2009. p. 300-315
- [8] FIRER, M. **Geometria neutra e uma pitada de geometria hiperbólica.** No Prelo.
- [9] Gauss, os Bolyai e Lobatchevski. Disponível em: <http://www.seara.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica3.htm>. Acesso em: 02 julho 2016.
- [10] Geometria Plana . Disponível em: <http://www.infoescola.com/geometria-plana/>. Acesso em: 02 julho 2016.
- [11] Hyperbolic area . Disponível em: <http://www.maths.gla.ac.uk/wws/cabripages/hyperbolic/harea.html>. Acesso em: 02 julho 2016.
- [12] O quinto postulado dos Elementos de Euclides. Disponível em: <http://www.seara.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica1.htm>. Acesso em: 02 julho 2016.
- [13] Riemann, Beltrami e as geometrias não-euclidianas. Disponível em: <http://www.seara.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica4.htm>. Acesso em: 02 julho 2016.
- [14] RYAN, P. J. **Euclidean and non-Euclidean geometry an analytic approach.** Cambridge University Press, 1986.
- [15] WEEKS, J. R. **The shape of space**, segunda edição, CRC Press, 2001.
- [16] ZEEMAN, E. C. **An introduction to topology: The classification theorem for surfaces.** No Prelo.