Pré-condicionadores para o método de Gradientes Conjugados

Egmara Antunes dos Santos
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
egmara.antunes@gmail.com

Prof. Abel Soares Siqueira
Departamento de Matemática - UFPR
abel.s.siqueira@gmail.com

Palavras-chave: Método de Gradientes Conjugados, Pré-condicionadores, fatoração Cholesky.

Resumo: Pré-condicionar um sistema linear tem como objetivo torná-lo mais favorável a métodos iterativos, tais como o método de gradientes conjugados, diminuindo o número de iterações necessário para se obter convergência. Neste trabalho é realizado um estudo sobre pré-condicionadores para sistemas lineares na forma

$$Ax = b,$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica positiva definida. Para matrizes com essas características, o método de gradientes conjugados encontra a solução x do sistema linear acima em no máximo n passos. Porém, computacionalmente, em problemas de dimensões muito grandes e mal condicionados, o número de iterações para se encontrar um resíduo pequeno pode ser alto, podendo ser muito maior do que n.

O objetivo deste trabalho é apresentar o uso de pré-condicionadores para sistemas lineares que buscam melhorar o desempenho do método de gradientes conjugados. A ideia principal é transformar o sistema linear anterior em um sistema equivalente da forma

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b,$$

e adaptar o método de gradientes conjugados para este novo sistema linear. A matriz M acima atua como um pré-condicionador para o sistema linear original.

Alguns conceitos sobre sistemas lineares pré-condicionados são abordados primeiramente. Em seguida, apresentamos um algoritmo do método de gradientes conjugados pré-condicionado utilizando a fatoração de Cholesky incompleta como um pré-condicionador. As implementações dos algoritmos foram realizadas na linguagem de programação Julia e baseiam-se nos métodos propostos por Moré e Lin em [3]. Por fim, discutiremos os testes que foram realizados para matrizes esparsas simétricas positivas definidas, obtidas das bibliotecas de matrizes [4] e [5], e as comparações com o algoritmo clássico de Hestenes e Stiefel descrito em [1].

Referências

[1] LOAN, C. F. GOLUB, G. H. *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 2013.

[2] SAAD, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, SIAM, 2003.

[3] LIN, C. J. MORÉ, J. J. *Incomplete Cholesky Factorizations with Limited Memory*, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 21, n.º 1, pp. 24-25, ago. de 1999, ISSN:1064-8275.

[4] HU, Y. A Gallery of Large Graphs, URL: `http://yifanhu.net/GALLERY/GRAPHS/`.

[5] National Institute of Standards e Technology, Matrix Market, URL: `http://math.nist.gov/MatrixMarket/`.