Teorema fundamental das coálgebras

Arthur Rezende Alves Neto *
Bacharelado em Matemática - UFPR
arthurntcwb@yahoo.com.br

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
marcelomsa@ufpr.br

13 de Outubro de 2016

Palavras-chave: coálgebra, álgebra, álgebra de Hopf.

Resumo:

A estrutura de Álgebra de Hopf foi pela primeira vez observada em Topologia Algebrica por Heinz Hopf em 1941, no estudo de grupos de Lie conexos. Esse tópico acabou ganhando uma certa independência da Topologia, e por volta de 1969 surgiu uma teoria geral para Álgebras de Hopf, com um viés algébrico apenas. As aplicações de tal estrutura despontam em várias áreas da Matemática, tais como: Geometria Algébrica, teoria de Lie, teoria de Galois, teoria de Anéis Graduados, teoria de Operadores, Grupos localmente compactos, entre outras.

Uma álgebra de Hopf, além de possuir uma estrutura de álgebra, também possui uma estrutura dual, chamada de coálgebra. Para compreender então a estrutura "descoberta" por Hopf, precisa-se estudar suas estruturas subjacentes; e nesse trabalho pretendo abordar o estudo das Coálgebras, veremos que Álgebras e Coálgebras têm uma relação muito próxima.

Podemos definir uma álgebra, como sendo um $\mathbb{K}$-Espaço Vetorial, com uma estrutura de anel, no qual a multiplicação $m : A \times A \longrightarrow A$ é bilinear, e associativa. Utilizando o *produto tensorial*, podemos reescrever a multiplicação como sendo uma aplicação linear $m : A \otimes A \longrightarrow A$. A definição de coálgebra é dada dualizando no sentido categórico uma álgebra, mais explicitamente "refletindo" as setas. Quando dualizamos um espaço vetorial, este continua sendo um espaço vetorial, mas não sabemos o que significa dualizar a estrutura de anel; é aí que o conceito categórico nos ajuda. Se a álgebra possuí uma operação estrutural $m : A \otimes A \longrightarrow A$, a coálgebra possuí uma aplicação linear na direção contrária $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$. Deste modo, definimos uma coálgebra como um $\mathbb{K}$-Espaço Vetorial C, com uma aplicação linear $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ chamada *comultiplicação* ou *coproduto*, que respeita uma propriedade dual à associatividade. Um exemplo concreto de uma Coálgebra é dado pelo

*Bolsista do Programa PET-Matemática.

conjunto $\mathbb{R}[x]$, dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$. Podemos definir o coproduto $\Delta : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x] \otimes \mathbb{R}[x]$, dado na base de $\mathbb{R}[x]$ por $\Delta(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} \otimes x^k$ e estendido linearmente para os outros vetores do espaço $\mathbb{R}[x]$.

Coálgebras e álgebras estão fortemente relacionadas: Dado uma coálgebra C sobre $\mathbb{K}$, o seu espaço dual $C^* = \{f : C \longrightarrow \mathbb{K}; f\text{linear}\}$ tem uma estrutura de álgebra associada. No entanto, a teoria das coálgebras não é apenas uma consequência imediata da teoria das álgebras. O intuito deste trabalho é mostrar que, qualquer subespaço de dimensão finita de uma coálgebra, está contido em uma subcoálgebra de dimensão finita. Este resultado é importante para compreendermos as coálgebras e não possuí uma versão para as álgebras. Isso mostra que apesar de terem uma relação forte, essas estruturas são distintas e nem todos os resultados são adaptáveis.

Referências:

[1] RADFORD, DAVID E.(Ed.). **Hopf Algebra**.Ilinois, Chicago: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2012. 559 p. (49). 2012.

[2] DĂSCĂLESCU, Sarin; NĂSTĂSESCU, Constantin; RAIANU, Șerban (Ed.). **Hopf Algebra:** An Introduction. New York: Marcel Dekker, Inc., 2001.

[3] POLLACHINI, Giovani Goraiebe. **Álgebras de Hopf associadas a grafos tipo árvore.** 2015. 140 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015.