Teoria Matemática do Método dos Elementos Finitos e Aplicações

Edvaldo Bandeira da Silva
Bacharelado em Física - UFPR
ed.bandeira@outlook.com

Prof. Pedro D. Damázio (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
pddamazio@ufpr.br

15 de outubro de 2018

Palavras-chave: Método dos elementos finitos, método de Galerkin, problema de Poisson.

Resumo:

O Método dos Elementos Finitos (FEM)[1] tem sido amplamente utilizado em muitas áreas da matemática ou mesmo na engenharia por sua relativa simplicidade de implementação e por suas boas taxas de convergência. Apresenta uma rica e elegante teoria matemática que o fundamenta e que pode ser explorada em diferentes níveis, e suas aplicações se destacam, principalmente, no tratamento de sistemas de equações diferenciais parciais[2] que se fazem presentes em diversas áreas como a modelagem de fenômenos físico-químicos, por exemplo.

Obter a solução analítica de uma EDP para uma aplicação real pode ser, em geral, um árduo problema e muitas das vezes impossível. Para contornar este problema, mune-se do uso de métodos computacionais a fim de se ter uma forma de abordar essa classe de problemas. Por este motivo, utilizar métodos numéricos, quando implementados corretamente, podem fornecer boas aproximações.

Desta forma, o FEM é utilizado no tratamento de problemas de valores de contorno tendo como base o método de Galerkin, isto é, formulação fraca do problema. Assim, exige-se menor regularidade das funções e por este motivo o método é bastante flexível para soluções de equações diferenciais demasiada complicadas. Por fim, será utilizado o Lema de Céa para análise de erro e convergência deste método. E com estas ferramentas será abordado o problema de Poisson.

Em matemática, a equação de Poisson é uma EDP do tipo elíptica. Surge, por exemplo, no deslocamento vertical da solução u no ponto (x, y) de uma membrana tensionada Ω presa à borda $\partial\Omega$ e submetida a uma densidade de força vertical e

[1] *Finite Element Method*, do inglês.
[2] Daqui por diante, chamadas apenas de EDP.

proporcional a $f(x,y)$. Desta forma, impondo a área da membrana sem torção, isto é, onde ela está presa como o conjunto $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ e a densidade de força satisfaça a condição em que valha zero na fronteira, o problema a ser resolvido é:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \text{ tal que:} \\ \triangle u(x,y) = -f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

É uma generalização da equação de Laplace, que também é frequentemente vista na física. A equação recebeu o nome do matemático, geômetra e físico francês Siméon Denis Poisson.

Referências

[1] ALBERTY, J.; CARSTENSEN, C.; FUNKEN, S. Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation. **Numer. Algorithms**, 20(2-3):117–137, 1999.

[2] CIARLET, P. G. **The Finite Element Method for Eliptic Problems**, SIAM, 2002.

[3] DE OLIVEIRA, C. R. **Introdução à análise funcional**. IMPA, 2015.

[4] GALVIS, J.; VERSIEUX, H. **Introdução à aproximação numérica de equações diferenciais parciais via o método de elementos finitos**. IMPA, 2011.

[5] IÓRIO, V. **EDP, um curso de graduação**. IMPA, 2005.

[6] JOHNSON, C. **Numerical Solution of Partial Equations by the Finite Element Method**, Courier Corporation, 2012.

[7] KREYSZIG, E. **Introductory Funcional Analysis with Applications**, volume 1. wiley New York, 1978.

[8] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**, IMPA. Rio de Janeiro, 2017.

[9] RAPPAZ, J.; PICASSO, M. **Introduction à l'analyse numérique**, Lausanne (Suisse): Presses polytechniques et universitaires romandes, 1998.

[10] ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, **P. Real analysis**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1988.

[11] VIANNA FILHO, A. L. C. **Aplicação do Método de Elementos Finitos às Equações de Navier–Stokes**. 2016. 72 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação)–Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, UFPR, Curitiba, 2016.