Lista de exercícios 3

1. Calcular o valor aproximado de π, usando os primeiros N termos das séries a seguir, estimando o erro relativo em relação ao valor assintótico (valor de π em precisão dupla). Dica: para alguns casos se faz útil o uso de fórmulas de recorrência $s_n = f(s_{n-1})$. Dica: Uma alternativa para escrever $(-1)^n$ de maneira computacionalmente mais eficiente é `(1-2*(n%2))`.

   (a) série de Sharp:
   $$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k 3^{1/2-k}}{2k+1}$$

   (b) fórmula de Wallis:
   $$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

   (c) *desafio* - fórmula de Viète (baseada no método de Arquimedes):
   $$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

   (d) *desafio* - fórmula de Lambert (prova que π é irracional):
   $$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{3+\frac{2^2}{5+\frac{3^2}{7+\frac{4^2}{9+\ldots}}}}$$

2. Faça um gráfico ou mais gráficos comparando a convergência de fórmulas para π apresentadas nessa lista e na anterior, onde o eixo y corresponde ao valor da fórmula, e o eixo x é o número de termos utilizados para computá-la. Dica: no `gnuplot` o comando `plot pi` grafica o valor constante de π. Alternativamente, o eixo y pode ser o erro relativo em relação ao valor de π. Utilize legendas para distinguir cada curva.

3. Um diodo é um elemento não-linear que deixa passar corrente elétrica quando aplicada uma diferença de potencial positiva entre seu terminais, porém não permite passagem de corrente (ou permite muito fracamente) se a diferença de potencial é negativa. É por isso que os diodos são utilizados como retificadores, ou seja, convertem a corrente alternada em corrente direta. Quando a resistência própria do diodo é desconsiderada, esse comportamento da corrente elétrica do diodo pode ser modelado por:
   $$i = i_s \exp\left(\frac{qV_j}{nk_BT}\right)$$
   onde i_s é a corrente de saturação que para o silício, dada por $i_s \approx 1.0\times10^{-8}$ A, $q = 1.6\times10^{-19}$ C é a carga do elétron, V_j é a diferença de potencial aplicada ao diodo, $n = 2$ para o silício, $k_B = 1.38\times10^{-23}$ J/K. Escreva um programa que calcule i para o diodo de silício em função da diferença de potencial V_j. Faça um gráfico para três casos: T=272K, 300K e 350K; variando a diferença de potencial entre -1.5V e 3.4V. Dica: coloque o eixo y em escala logaritmica através de `set logscale y`.

4. Faça um gráfico de $n \times F_n$ na série de Fibonacci, comparando com a fórmula de Binet:
   $$f(n) = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}},$$
   onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro.

5. A função que conta o número de números primos contidos no intervalo entre zero e um número real x se chama função de contagem de números primos, designada por $\pi(x)$. Faça um programa que calcule essa função e crie um arquivo de coluna de dados na forma $x \quad \pi(x)$. Faça um gráfico desse resultado para $\pi(x)$, comparando com as funções $x/(\ln x + 2)$ e $x/(\ln x - 4)$. Faça outro gráfico da razão $\pi(x)/(x/\ln x)$.

6. Faça um gráfico da função fatorial, como implementada na lista anterior. Para tanto imprima em forma de coluna os valores de x e $x!$. Faça um gráfico no `gnuplot` do arquivo de dado utilizando "pontos", juntamente com as seguintes funções:

   - e^x
   - x^x
   - $\sqrt{2\pi x}\ \ x^x\, e^{-x}$

   onde a última é a fórmula de Stirling, utilizada como uma aproximação ao fatorial. Pode ser interessante utilizar escala logarítmica no eixo y. Faça mais dois gráficos, um da diferença absoluta (módulo) entre a fórmula de Stirling e o fatorial em função de x, e outro do erro relativo em função de x.

7. Faça um programa que calcule pontos da trajetória de um projétil a partir das equações da cinemática, dadas as condições inicias escolhidas pelo programador:

   - $v_0 \rightarrow$ módulo da velocidade inicial em m/s^2.
   - $\theta_0 \rightarrow$ ângulo de lançamento em graus.
   - $y_0 \rightarrow$ altura inicial em metros.

   onde $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$ e $v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$. Os valores do tempo, altura e distância devem ser impressos em forma de coluna de dados. O tempo de vôo (tempo até que o projétil atinja o chão) nesse caso é dado pelo maior dos valores em:

   $$t_v = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}}{g}$$

   Cuidado para casos em que não há trajetórias fisicamente possíveis de serem realizadas (por exemplo se a altura inicial é negativa e a velocidade muito pequena). Esses casos correspondem matematicamente quando em t_v o argumento da raiz é negativo. As equações da cinemática na forma relevante para esse problema são:

   $$\begin{aligned} y &= y_0 + (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2v_{0x}^2} \\ x &= v_{0x}t \end{aligned}$$

   Explore diferentes casos de ângulo de lançamento, fazendo gráficos simultâneos para diferentes e distinguindo-os pela legenda.

8. Utilizando o programa desenvolvido no exercício anterior, faça uma estimativa do alcance $R \equiv x(t_v)$ em função da altura inicial, para 5 diferentes ângulos de lançamento. Fixe $v_0 = 1\text{m/s}^2$. Variando a altura inical, faça um gráfico de $R \times y_0$ e compare com o valor analítico de $x(t_v)$:

   $$R = \frac{v_0^2}{g}\cos\theta_0 \left(\sin\theta_0 + \sqrt{\sin^2\theta_0 + \frac{2gy_0}{v_0^2}} \right)$$

   fazendo gráficos simulâneos do resultado do programa (pontos), comparando com essa expressão (linhas).

9. Baseado no programa do exercício anterior, fazendo uma varredura nos valores de θ_0, faça uma estimativa para qual ângulo inicial o alcance é máximo. Fixe $v_0 = 1\text{m/s}^2$. Então faça um gráfico de $\theta_{max} \times y_0$ - analiticamente corresponde à maximização da equação acima. Para lançamentos a partir do solo $\theta_{max} = 45°$.

10. Em física nuclear, a fórmula semi-empírica da massa é uma expressão que pode ser utilizada para calcular aproximadamente a energia de ligação nuclear B em um núcleo atômico com número atômico Z (n^o de prótons, o que distingue quimicamente um átomo do outro) e número de massa A (prótons + nêutrons, ou equivalentemente, nucleons, que distingue isótopos do mesmo átomo):

$$B = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(A-2Z)^2}{A} + \frac{a_5}{A^{1/2}}$$

onde, em unidades de milhões de elétron-Volts, as constantes são $a_1 = 15.67$, $a_2 = 17.23$, $a_3 = 0.75$, $a_4 = 93.2$, e

$$a_5 = \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ é ímpar,} \\ 12.0 & \text{se } A \text{ e } Z \text{ são ambos pares,} \\ -12.0 & \text{se } A \text{ é par e } Z \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

a) Faça um programa que tome valores de A e Z, e imprime a energia de ligação para o átomo correspondente. Use o programa para obter a energia de ligação de um átomo com $Z = 28$ (Níquel) e $A = 58$. Dica: o valor real é aproximadamente 490MeV. Modifique seu programa para que ele não imprima a energia de ligação total, mas sim a energia de ligação por nucleon, $b \equiv B/A$.

b) Modifique seu programa para que ele, dado um certo átomo, um valor de Z, percorra todos valores de A, desde $A = Z$ até $A = 3Z$, para achar o valor de $A = A_{\max}$ que corresponda a maior energia de ligação por nucleon ($b_{\max}$). Esse é o núcleo mais estável para um dado número atômico. Faça com que seu programa imprima o valores de $A_{\max}$ e $b_{\max}$.

c) Agora modifique seu programa novamente para que, ao invés de tomar um valor de Z como entrada, percorra todos valores de Z desde 1 até 100 e imprima o valor $A_{\max}$ e $b_{\max}$ referente a configuração mais estável para cada átomo. Encaminhe a saída para um arquivo de dados na forma de três colunas: $Z \quad A_{\max} \quad b_{\max}$. Faça um gráfico de $Z \times b_{\max}$ e salve esse gráfico em um arquivo de imagem. Identifique visualmente para qual valor de Z a energia de ligação por nucleon é máxima.

11. Uma bola de dimensão desprezível em queda livre, na ausência de forças de arrasto, cai verticalmente até entrar de encontro ao chão. Nesse ponto a bola quica no chão. Faça um programa que simule esse comportamento. Agora, ao invés de usar uma expressão analítica para o movimento vertical do objeto, utilize a integração das equações de movimento:

$$\frac{dv}{dt} = a = F/m \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = v \tag{2}$$

através do método de Euler. O controle do contato com o chão deve ser feito a cada realização do laço, por exemplo com a condição `if(y<0)`, e ao atingir esse limite o objeto inverte o sentido velocidade, e seu módulo é alterado por um fator multiplicativo, o coeficiente de restituição e ($e = 1$ colisão elástica e $e = 0$ para uma colisão perfeitamente inelástica). Para uma bola de tênis oficial $e = 0.9$. Faça um gráfico da altura versus tempo para diferentes casos. *Observação:* Como será notado, o caso inelástico apresentará um estranho comportamento. Depois de um determinado número de quiques a bola fica "grudada" ao chão - na verdade um pouco abaixo dele. Isso é um artifício numérico devido a condição imprecisa (`y<0`) para caracterizar o choque com o chão, que somada a perda de velocidade em cada reflexão, podem fazer com que a partícula não tenha velocidade suficiente para "voltar a superfície" em apenas um passo. Existem muitas soluções possíveis para esse problema. Uma maneira simples é exigir uma condição extra para o quique: que a inversão da velocidade se dê apenas para determinado sinal: `if(y<0 && v<0)`.

12. Escreva um código que descreva a trajetória de uma partícula que se move num plano sem atrito, e está cercada por quatro paredes formando um quadrado. A partícula colide elasticamente com as paredes, invertendo o sinal da componente da velocidade associada a direção da parede. Esse sistema é chamado de *bilhar*. As equações de movimento podem ser facilmente integradas pelo método de Euler. Uma localização possível das paredes no plano cartesiano é a área delimitada pelas retas $y = \pm 1$ e $x = \pm 1$. Faça um gráfico da trajetória da partícula (x,y).

13. *Queda livre com arrasto quadrático (Rayleigh).* Um objeto em movimento através de um fluido, em velocidades relativamente altas, experimenta uma força contrária ao seu movimento que depende de sua velocidade e tem a forma empírica: $F_D = \frac{1}{2}\rho v^2 C_d A$, onde A é a área de seção reta efetiva do objeto, ρ é a densidade do fluido, C_d é o coeficiente de arrasto, que depende principalmente da forma do objeto ($C_d = 0.47$ para uma esfera), e v é a velocidade do objeto. Escreva um programa que resolva numericamente as equações de movimento (1) e (2). Tome a densidade do ar como $\rho = 1.225$ kg/m^3 e $g = 9.8$ m/s^2. Inicialmente tome $A = 0.045$ m^2, $m = 0.5$ kg, $C_d = 0.47$, e $y_0 = 150$ m. Ao fazer os gráficos de $y \times t$, $v \times t$ e $v \times y$, compare os resultados com os esperados em uma queda livre desprezando a força de arrasto, assim como os resultados obtidos através da solução analítica para esse caso:

$$\begin{aligned} v(t) &= -v_t \tanh\left(\frac{gt}{v_t}\right) \\ y(t) &= y_0 - \frac{v_t^2}{g} \ln\cosh\left(\frac{gt}{v_t}\right) \end{aligned}$$

onde $v_t = \sqrt{2mg/(\rho C_D A)}$ é velocidade terminal.