电磁场与电磁波

第1章 矢量分析

1. 矢量乘法：

① 点积/标积：$\vec{A}\cdot\vec{B}$　　点积服从交换律和分配律

② 叉积/矢积：$\vec{A}\times\vec{B}$

$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ 交换律　$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ 分配律

标量三重积的运算性质：

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

矢量三重积的运算性质：

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

标积结果为标量，因此上式不写"·"

~~矢量~~积结果为矢量，因此上式写"·"

2. 三种常用的正交曲线坐标系

<1> 直角坐标系：

矢量$\vec{A}$表示为：$\vec{A}=\vec{e_x}A_x+\vec{e_y}A_y+\vec{e_z}A_z$

点积：$\vec{A}\cdot\vec{B}=(\vec{e_x}A_x+\vec{e_y}A_y+\vec{e_z}A_z)\cdot(\vec{e_x}B_x+\vec{e_y}B_y+\vec{e_z}B_z)$

$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$

叉积：$\vec{A}\times\vec{B}=(\vec{e_x}A_x+\vec{e_y}A_y+\vec{e_z}A_z)\times(\vec{e_x}B_x+\vec{e_y}B_y+\vec{e_z}B_z)$

$=\vec{e_x}(A_yB_z-A_zB_y)+\vec{e_y}(A_zB_x-A_xB_z)+\vec{e_z}(A_xB_y-A_yB_x)$

$=\begin{vmatrix}\vec{e_x}&\vec{e_y}&\vec{e_z}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}$

△根据叉积方向性 $x\to y\to z\to x$，因此$\vec{e_x}$后正方向是y轴分量，其余同理；叉积定义$\vec{e_x}$后只可能有y、z轴分量

△位置矢量：由坐标原点出发的矢量$\vec{r}$表示空间任一点的位置

$\vec{r}=\vec{e_x}x+\vec{e_y}y+\vec{e_z}z$

其微分矢量：$d\vec{r}=\vec{e_x}dx+\vec{e_y}dy+\vec{e_z}dz$

三个面积元：$dS_x=dydz$　$dS_y=dxdz$　$dS_z=dxdy$

体积元：$dV=dxdydz$

<2> 圆柱坐标系：

坐标变量：ρ, ϕ, z

坐标单位矢量：$\vec{e_\rho}, \vec{e_\phi}, \vec{e_z}$ $\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}$ 不是常矢量，方向会变

与直角坐标系之间的坐标变换：

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $x = \rho\cos\varphi$

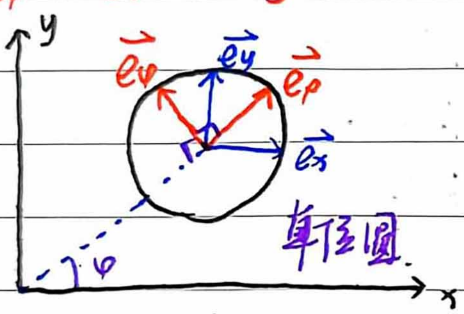
$\varphi = \arctan(y/x)$ $y = \rho\sin\varphi$

$z = z$ $z = z$

坐标单位矢量之间的关系

$\vec{e_\rho} = \vec{e_x}\cos\varphi + \vec{e_y}\sin\varphi$ $\vec{e_x} = \vec{e_\rho}\cos\varphi - \vec{e_\varphi}\sin\varphi$

$\vec{e_\varphi} = -\vec{e_x}\sin\varphi + \vec{e_y}\cos\varphi$ $\vec{e_y} = \vec{e_\rho}\sin\varphi + \vec{e_\varphi}\cos\varphi$



矩阵形式表示：

$$\begin{bmatrix} \vec{e_\rho}A_\rho \\ \vec{e_\varphi}A_\varphi \\ \vec{e_z}A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e_x}A_x \\ \vec{e_y}A_y \\ \vec{e_z}A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e_x}A_x \\ \vec{e_y}A_y \\ \vec{e_z}A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e_\rho} \\ \vec{e_\varphi} \\ \vec{e_z} \end{bmatrix} \begin{matrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{matrix}$$

坐标代这个矩阵也可以

矢量运算：条件：在同一点$P(\rho,\varphi,z)$或同一个φ [确保三个为常矢量]

$\vec{A}+\vec{B} = \vec{e_\rho}(A_\rho+B_\rho) + \vec{e_\varphi}(A_\varphi+B_\varphi) + \vec{e_z}(A_z+B_z)$

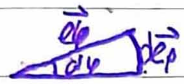
$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_\rho B_\rho + A_\varphi B_\varphi + A_z B_z$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e_\rho} & \vec{e_\varphi} & \vec{e_z} \\ A_\rho & A_\varphi & A_z \\ B_\rho & B_\varphi & B_z \end{vmatrix}$$

位置矢量：$\vec{r} = \vec{e_\rho}\rho + \vec{e_z}z$ [$\vec{e_\rho}$ 其实带有方向]

线元矢量：$d\vec{r} = \vec{e_\rho}d\rho + \vec{e_\varphi}\rho d\varphi + \vec{e_z}dz$

△ $d(\vec{e_\rho}\rho) = \rho d\vec{e_\rho} + \vec{e_\rho}d\rho = \vec{e_\varphi}\rho d\varphi + \vec{e_\rho}d\rho$



$d\vec{e_\rho} = \vec{e_\varphi}\cdot d\varphi$

面元矢量：$dS_\rho = \rho d\varphi dz$

$dS_\varphi = d\rho dz$

$dS_z = \rho d\rho d\varphi$

体积元：$dV = \rho d\varphi d\rho dz$

<3> 球坐标系

坐标矢量：$r\ \theta\ \varphi$

坐标单位矢量：$\vec{e_r}\ \vec{e_\theta}\ \vec{e_\varphi}$ [均不是常矢量]

与直角坐标系之间的变换：

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad x = r\sin\theta\cos\varphi$

$\theta = \arccos(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ $\qquad y = r\sin\theta\sin\varphi$

$\varphi = \arctan(y/x)$ $\qquad z = r\cos\theta$

坐标单位矢量之间的关系（与直角坐标系）

$$\begin{cases} \vec{e_r} = \vec{e_x}\sin\theta\cos\varphi + \vec{e_y}\sin\theta\cos\varphi + \vec{e_z}\cos\theta \\ \vec{e_\theta} = \vec{e_x}\cos\theta\cos\varphi + \vec{e_y}\cos\theta\sin\varphi - \vec{e_z}\sin\theta \\ \vec{e_\varphi} = -\vec{e_x}\sin\varphi + \vec{e_y}\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e_x} = \vec{e_r}\sin\theta\cos\varphi + \vec{e_\theta}\cos\theta\cos\varphi - \vec{e_\varphi}\sin\varphi \\ \vec{e_y} = \vec{e_r}\sin\theta\sin\varphi + \vec{e_\theta}\cos\theta\sin\varphi + \vec{e_\varphi}\cos\varphi \\ \vec{e_z} = \vec{e_r}\cos\theta - \vec{e_\theta}\sin\theta \end{cases}$$

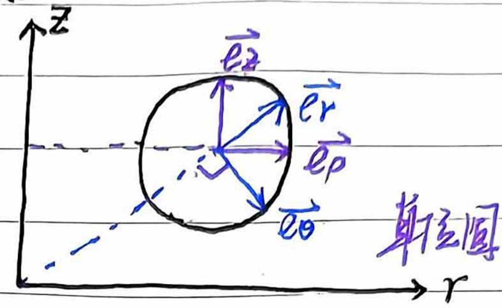
写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \vec{e_r} \\ \vec{e_\theta} \\ \vec{e_\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e_x} \\ \vec{e_y} \\ \vec{e_z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e_x} \\ \vec{e_y} \\ \vec{e_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e_r} \\ \vec{e_\theta} \\ \vec{e_\varphi} \end{bmatrix}$$

坐标单位矢量之间的关系(与柱坐标系)

	$\vec{e_\rho}$	$\vec{e_\varphi}$	$\vec{e_z}$
$\vec{e_r}$	$\sin\theta$	0	$\cos\theta$
$\vec{e_\theta}$	$\cos\theta$	0	$-\sin\theta$ ~~$\sin\theta$~~
$\vec{e_\varphi}$	0	1	0



二者φ方向相同，故不出现φ

位置矢量：$\vec{r} = \vec{e_r}\, r$

线元矢量：$d\vec{r} = \vec{e_r}\,dr + \vec{e_\theta}\,r\,d\theta + \vec{e_\varphi}\,r\sin\theta\,d\varphi$

面元矢量：$dS_r = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

$dS_\theta = r\sin\theta\,dr\,d\varphi$

$dS_\varphi = r\,dr\,d\theta$

体积元 $dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

矢量在球坐标系中的表示及运算 同一点或在同一条半径线上(方向)

$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_rB_r + A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e_r} & \vec{e_\theta} & \vec{e_\varphi} \\ A_r & A_\theta & A_\varphi \\ B_r & B_\theta & B_\varphi \end{vmatrix}$$

3. 在正交曲线坐标系中，其坐标变量(u_1,u_2,u_3)不一定都是长度，其线元必然有一个修正系数，称为拉梅系数

线元：$d\vec{l} = h_1du_1\vec{e_{u_1}} + h_2du_2\vec{e_{u_2}} + h_3du_3\vec{e_{u_3}}$

面元：$d\vec{S_1} = h_2h_3du_2du_3\vec{e_{u_1}}$

$d\vec{S_2} = h_1h_3du_1du_3\vec{e_{u_2}}$

$d\vec{S_3} = h_1h_2du_1du_2\vec{e_{u_3}}$

体元：$dV = h_1h_2h_3du_1du_2du_3$

直角：$h_1=h_2=h_3=1$ 柱坐标：$h_1=1$ $h_2=\rho$ $h_3=1$ 球：$h_1=1$ $h_2=r$ $h_3=r\sin\theta$

4. 确定空间区域上的每一点都有确定物理量与之对应，称在该区域上定义了一个场

根据物理量是标量/矢量，场分为标量场/矢量场

根据是否与时间有关 ~~称~~ 分为静态场/时变场

5 等值面：三维标量场中取得同一数值的点在空间形成的曲面

特点：• 由隐函数存在定理知：函数 u（等值面方程）为单值，同且连续偏导数 u_x' u_y' u_z' 不全为零时，等值面一定存在

• 标量场的等值面充满场所在的整个空间

• 过空间任意一点有且仅有一个等值面通过，即互不相交

6 方向导数：$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{u(M)-u(M_0)}{\Delta l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}$

直角坐标系下计算公式：$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$

7. 标量场的梯度（grad u 或 ∇u）

描述标量场在某点的最大变化率及其变化最大的方向

梯度定义与坐标系的选择无关，但表达形式与坐标系有关

梯度的表达式：

直角坐标系：$\mathrm{grad}\,u = \vec{e_x}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial u}{\partial z}$

圆柱坐标系：$\mathrm{grad}\,u = \vec{e_\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \vec{e_\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \vec{e_z}\frac{\partial u}{\partial z}$

球坐标系：$\mathrm{grad}\,u = \vec{e_r}\frac{\partial u}{\partial r} + \vec{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \vec{e_\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}$

8. 哈密顿算子 ∇

直角坐标系下 $\nabla = \vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$

在运算中具有矢量和微分双重性质

梯度运算的基本公式：

$$\begin{cases} \nabla C = 0 \\ \nabla(Cu) = C\nabla u \\ \nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \\ \nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v\nabla u - u\nabla v) \\ \nabla f(u) = f'(u)\nabla u \\ \nabla f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial f}{\partial v}\nabla v \end{cases}$$

9. 在电磁场中，通常以 (x,y,z) 表示场点的坐标，以 (x',y',z') 表示源点的坐标。

$\vec{R} = \vec{e_x}(x-x') + \vec{e_y}(y-y') + \vec{e_z}(z-z')$　　$R = |\vec{R}|$

则有：$\nabla R = \frac{\vec{R}}{R}$　　$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$　　$\nabla f(R) = -\nabla' f(R)$

10. 矢量线：其上每一点切线方向代表该点矢量场的方向

方程 $\frac{dx}{F_x(x,y,z)} = \frac{dy}{F_y(x,y,z)} = \frac{dz}{F_z(x,y,z)}$

No.

DATE / /

① 矢量线不仅存在，而且充满了矢量场所在空间

② 矢量线互不相交

11. 矢量场的通量： $d\psi=\vec{F}\cdot d\vec{S}$ $\psi=\int_S d\psi=\int_S\vec{F}\cdot d\vec{S}$

矢量场通过闭合曲面通量： $\psi=\oint\vec{F}\cdot d\vec{S}$

表示穿出闭合曲面的正通量和进入闭合曲面负通量的代数和.

$\psi>0$ 通过闭合曲面有净的矢量线穿出 正源

$\psi<0$ 有净的矢量线进入 负源

$\psi=0$ 进入与穿出相等 无源

12. 矢量场的散度：矢量通过包含该点的任意闭合小曲面的通量与曲面元体积之比的极限（流出单位体积封闭面的通量）

$$\mathrm{div}\,\vec{F}(x,y,z)=\lim_{\Delta V\to0}\frac{\Delta\psi}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to0}\frac{\oint_S\vec{F}(x,y,z)d\vec{S}}{\Delta V}$$

① 矢量场的散度为一标量

② 表示场中一点处通量对体积的变化率，具有场的局部性质

③ 描述了矢量场中某点处通量源的密度（强度）

物理意义：

① 散度恒为零的矢量场为无源场

散度表达式：

直角坐标系： $\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$

圆柱坐标系： $\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\rho\partial\rho}+\frac{\partial F_\phi}{\rho\partial\phi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$

球坐标系： $\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(F_\phi)$

有关公式：

$\nabla\cdot\vec{C}=0$ （$\vec{C}$为常矢量）

$\nabla\cdot(\vec{C}f)=\vec{C}\cdot\nabla f$ （f为标量函数）

$\nabla\cdot(k\vec{F})=k\nabla\cdot\vec{F}$

$\nabla\cdot(f\vec{F})=f\nabla\cdot\vec{F}+\vec{F}\cdot\nabla f$

$\nabla\cdot(\vec{F}\pm\vec{G})=\nabla\cdot\vec{F}\pm\nabla\cdot\vec{G}$

对矢量函数求散度 有∵ 对标量函数求梯度

散度定理：

$$\oint_S\vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_V\nabla\cdot\vec{F}dV$$

13. 矢量场的环流和旋度

环流的定义： $\Gamma=\oint_C\vec{F}(x,y,z)d\vec{l}=\oint_C F_xdx+F_ydy+F_zdz$ （沿闭合路径的曲线积分）