2019609028 박경훈 알고리즘 TSP 과제

서론:

이번 과제에서 TSP 문제를 해결하기 위해 백트래킹과 분기 한정 방식을 사용하여 두 알고리즘을 비교하였습니다. TSP 는 주어진 도시들을 한 번씩 방문하고 시작점으로 돌아오는 최소 경로를 찾는 문제입니다.

Backtracking:

백트래킹은 가능한 모든 경로를 탐색하여 최적의 해를 찾는 알고리즘입니다. 이 알고리즘은 재귀적으로 모든 경로를 시도하고, 현재 경로가 최소 경로인지 확인합니다.

```
void TSPAlgorithms::Backtrack(const Graph &graph, vector<int> &path, vector<bool> &visited,
                              int current_length, int &min_length, vector<int> &best_path) {
    int n = graph.size();
    if (path.size() == n) {
        int length = current_length + graph[path.back()][path[0]];
        if (length < min_length) {
            min_length = length;
            best_path = path;
            best_path.push_back(path[0]);
        }
        return;
    }

    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        if (!visited[i]) {
            visited[i] = true;
            path.push_back(i);
            Backtrack(graph, path, visited, current_length + graph[path[path.size() - 2]][i], min_length, best_path);
            visited[i] = false;
            path.pop_back();
        }
    }
}
```

백트래킹을 위해서 구현한 재귀함수로 현재 경로와 방문 상태를 업데이트하며 가능한 모든 경로를 탐색합니다. 즉 모든 노드를 방문했을 때 현재 경로의 길이를 계산하고, 최소 경로와 비교하며 갱신합니다.

```
int TSPAlgorithms::Backtracking(const Graph &graph, vector<int> &best_path) {
    int n = graph.size();
    vector<int> path = {0};
    vector<bool> visited(n, false);
    visited[0] = true;
    int min_length = numeric_limits<int>::max();
    Backtrack(graph, path, visited, 0, min_length, best_path);
    return min_length;
}
```

Backtracking 함수에서는 초기화 작업을 수행하고 재귀적으로 Backtrack 함수를 호출해서 결과를 얻어냅니다. 시작 도시를 0 번으로 설정하고, 방문하지 않은 노드를 하나씩 방문하며 경로를 기록 합니다. 모든 노드를 방문하면 경로의 길이를 계산하고, 최소 경로와 비교하고 재귀적으로 반복해서 모든 경로를 탐색합니다.

2019609028 박경훈 알고리즘 TSP 과제

Best-First Search Branch and Bound:

분기 한정 알고리즘은 백트래킹의 단점을 보완하여 불필요한 경로 탐색을 줄이는 방법입니다. 이는 현재 경로의 하한 값을 계산하고, 최소 경로보다 큰 경우 해당 경로를 pruning 합니다.

```
int TSPAlgorithms::Bound(const Graph &graph, const vector<int> &path, const vector<bool> &visited) {
    int n = graph.size();
    int bound = 0;

    for (size_t i = 1; i < path.size(); ++i) {
        bound += graph[path[i - 1]][path[i]];
    }

    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        if (!visited[i]) {
            int min_edge = numeric_limits<int>::max();
            for (int j = 0; j < n; ++j) {
                if (!visited[j] && i != j) {
                    min_edge = min(min_edge, graph[i][j]);
                }
            }
            bound += min_edge;
        }
    }

    return bound;
}
```

Bound 함수에서는 현재 경로의 하한 값을 계산하여서 현재 경로가 최소 경로가 될 가능성의 여부를 확인합니다. 먼저 path 배열에 저장된 현재 경로를 따라 노드 간 이동 비용을 더합니다. 방문하지 않은 각 노드간의 이동의 최소 이동 비용을 계산하기 위해서 graph[i][j]의 값이 최소인 값을 선택하여서 미래에 발생하게 될 비용의 하한값을 예측합니다.

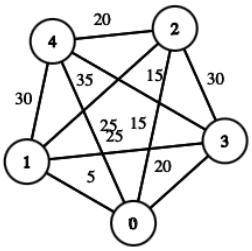
2019609028 박경훈 알고리즘 TSP 과제

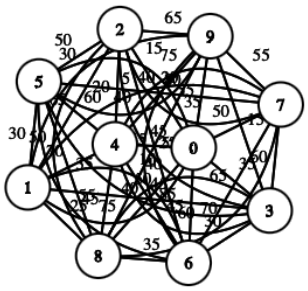
```cpp
int TSPAlgorithms::BFBnB(const Graph &graph, vector<int> &best_path) {
    int n = graph.size();
    struct Node {
        vector<int> path;
        vector<bool> visited;
        int current_length;
        int bound;

        bool operator>(const Node &other) const {
            return bound > other.bound;
        }
    };

    priority_queue<Node, vector<Node>, greater<Node>> pq;
    Node root = {{0}, vector<bool>(n, false), 0, 0};
    root.visited[0] = true;
    root.bound = Bound(graph, root.path, root.visited);
    pq.push(root);

    int min_length = numeric_limits<int>::max();

    while (!pq.empty()) {
        Node node = pq.top();
        pq.pop();

        if (node.bound >= min_length) continue;

        if (node.path.size() == n) {
            int length = node.current_length + graph[node.path.back()][node.path[0]];
            if (length < min_length) {
                min_length = length;
                best_path = node.path;
                best_path.push_back(node.path[0]);
            }
        } else {
            for (int i = 0; i < n; ++i) {
                if (!node.visited[i]) {
                    Node child = node;
                    child.path.push_back(i);
                    child.visited[i] = true;
                    child.current_length += graph[node.path.back()][i];
                    child.bound = child.current_length + Bound(graph, child.path, child.visited);
                    if (child.bound < min_length) {
                        pq.push(child);
                    }
                }
            }
        }
    }

    return min_length;
}
```

우선순위 큐를 사용하여 최적 경로를 찾습니다. 각 노드는 경로, 방문 상태, 현재 길이 및 하한 값을 포함합니다. 루트 노드를 생성하고 경로의 하한 값을 계산하고 우선순위 큐에 루트 노드를 추가한 후 큐에서 노드를 꺼내 자식 노드를 생성합니다. 각 자식 노드는 Bound 함수로 하한 값을 계산하여 최소 경로보다 작은 경우에 큐에 추가해 줍니다. 모든 노드를 방문한 경로의 길이를 계산하고 최소 경로와 비교하는 과정을 큐가 텅 비게 될 때까지 반복합니다.

2019609028 박경훈 알고리즘 TSP 과제

사용된 그래프:





https://csacademy.com/app/graph_editor/

```
Graph graph5 = {
        {0, 5, 15, 20, 25},
        {5, 0, 35, 25, 30},
        {15, 35, 0, 30, 20},
        {20, 25, 30, 0, 15},
        {25, 30, 20, 15, 0}
    };
```

```
Graph graph10 = {
        {0, 75, 80, 35, 45, 15, 45, 50, 40, 55},
        {75, 0, 65, 45, 70, 30, 10, 5, 25, 30},
        {80, 65, 0, 25, 20, 50, 55, 35, 50, 65},
        {35, 45, 25, 0, 60, 50, 30, 60, 40, 15},
        {45, 70, 20, 60, 0, 60, 85, 75, 45, 40},
        {15, 30, 50, 50, 60, 0, 55, 20, 35, 40},
        {45, 10, 55, 30, 85, 55, 0, 65, 35, 25},
        {50, 5, 35, 60, 75, 20, 65, 0, 70, 55},
        {40, 25, 50, 40, 45, 35, 35, 70, 0, 45},
        {55, 30, 65, 15, 40, 40, 25, 55, 45, 0}
    };
```

node[i][j]에 대한 cost 로 나타낸 adjacency matrix 형식

2019609028 박경훈 알고리즘 TSP 과제

출력결과:

```
❯ ./tsp
Backtracking (5 nodes) Result:
Cost: 80
Path: 0 1 3 4 2 0
Time: 104µs

BFBnB (5 nodes) Result:
Cost: 80
Path: 0 1 3 4 2 0
Time: 128µs

Backtracking (10 nodes) Result:
Cost: 220
Path: 0 5 7 1 6 9 3 2 4 8 0
Time: 207038µs

BFBnB (10 nodes) Result:
Cost: 220
Path: 0 5 7 1 6 9 3 2 4 8 0
Time: 9898µs
```

Backtracking (5 nodes) Result:
Cost: 80
Path: 0 1 3 4 2 0
Time: 104µs

BFBnB (5 nodes) Result:
Cost: 80
Path: 0 1 3 4 2 0
Time: 128µs

Backtracking (10 nodes) Result:
Cost: 220
Path: 0 5 7 1 6 9 3 2 4 8 0
Time: 207038µs

BFBnB (10 nodes) Result:
Cost: 220
Path: 0 5 7 1 6 9 3 2 4 8 0
Time: 9898µs

고찰:

Fully connected node 의 개수가 5 개였을 때 Backtracking 의 경우가 간소하게 나마 Best-First Search with Branch and Bound 알고리즘을 사용했을 때 빠르다는 것이 확인되었습니다. 반면에 Fully connected node 의 숫자가 10 개로 늘어난 경우 탐색공간이 매우 커지기 때문에 가능한 모든 경우의 수를 따지는 Backtracking 이 Branch and Bound 의 경우보다 성능이 저하됨을 확인하였습니다.