

Politechnika Warszawska
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych

Modelowanie i Identyfikacja

Projekt

Projekt I

Wykonał: Paweł Gajewski, 269823

Warszawa 2019/2020

1 Wstęp

Przedmiotem projektu jest obiekt opisany w przestrzeni stanów następującym modelem:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t) \quad (1)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u^2(t) + \alpha_3 u^3(t) + \alpha_4 u^4(t)) \quad (2)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (3)$$

gdzie:

$$K = 2, T_1 = 9, T_2 = 6, \alpha_1 = 0.15, \alpha_2 = -0.16, \alpha_3 = 0.25, \alpha_4 = 0.43$$

Sygnał sterujący spełnia warunek:

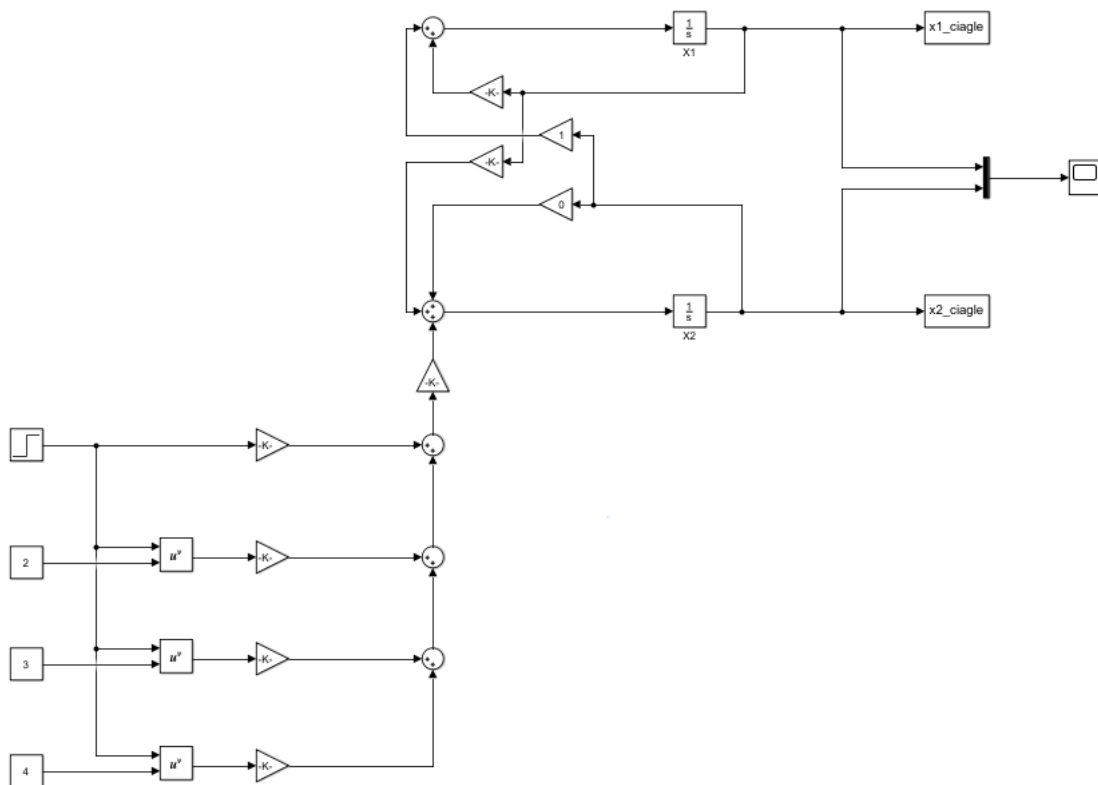
$$-1 \leq u \leq 1 \quad (4)$$

Wszystkie obliczenia, symulacje oraz wykresy wykonane zostały w środowisku Matlab wraz z toolboxem Simulink. Kod służący do wykonywania projektu został zamieszczony w skrypcie *MODIprojekt1.m*, będącym załącznikiem do poniższego sprawozdania i nie będzie tutaj przytaczany. Poszczególne zadania umieszczone są w osobnych sekcjach, jednak zaleca się conajmniej jednorazowe uruchomienie całego skryptu ze względu na zależności pomiędzy niektórymi punktami projektu. Graficzne reprezentacje poszczególnych modeli wykonane zostały w Simulinku i zawarte są w plikach *zad1.slx*, *zad2.slx* oraz *zad8.slx*, wywoływanych bezpośrednio z głównego skryptu.

2 Wykonanie zadań.

2.1 Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego.

Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego zawarta została w pliku *zad1.slx*.



Rysunek 1: Rozwiązanie zadania 1 - model dynamiczny ciągły

2.2 Wyznaczenie oraz reprezentacja graficzna dynamicznego modelu dyskretnego.

W celu wyznaczenia modelu dyskretnego wykorzystano dyskretyzację metodą Eulera (dokładnie: aproksymację prostokątną w przód), to znaczy:

$$\dot{x}(k) = \frac{x(k+1) - x(k)}{T} \quad (5)$$

gdzie: T - okres próbkowania.

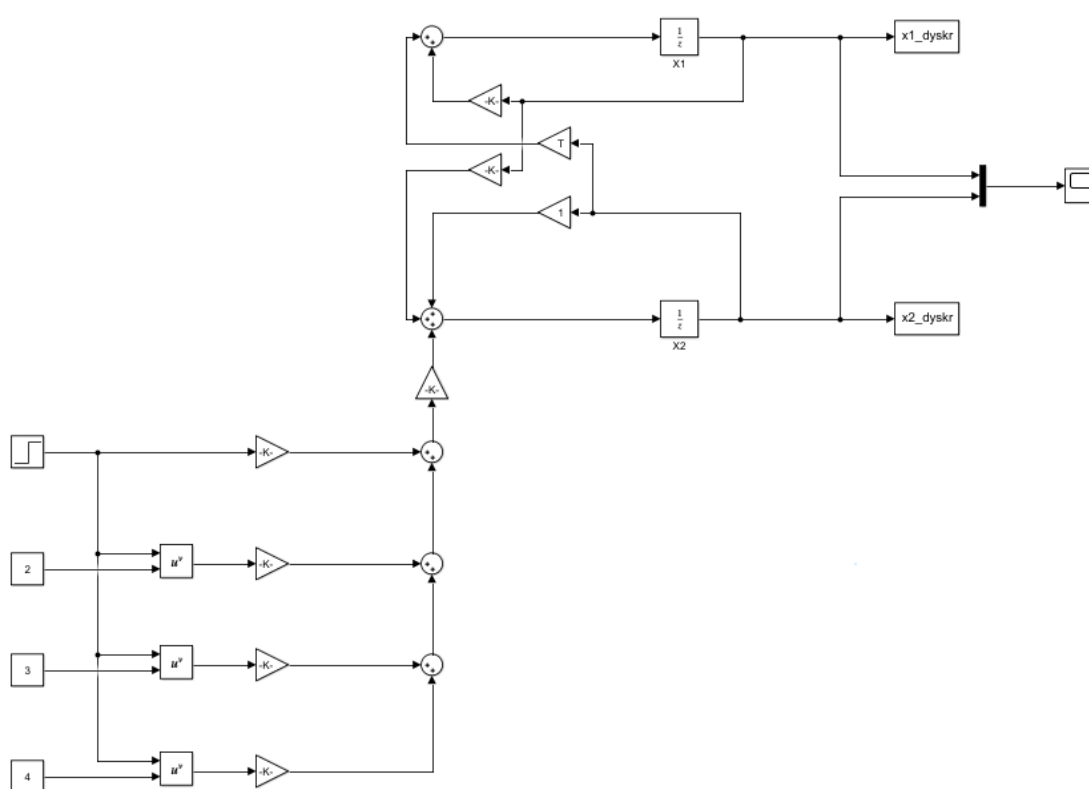
Podstawiając powyższą zależność do równań 1. oraz 2. otrzymamy model dyskretny w postaci równań różnicowych:

$$x_1(k+1) = -\frac{T(T_1+T_2+1)}{T_1T_2}x_1(k) + Tx_2(k) \quad (6)$$

$$x_2(k+1) = -\frac{T}{T_1 T_2} x_1(k) + x_2 + \frac{KT}{T_1 T_2} (\alpha_1 u(k) + \alpha_2 u^2(k) + \alpha_3 u^3(k) + \alpha_4 u^4(k)) \quad (7)$$

$$y(t) = x_1(k) \quad (8)$$

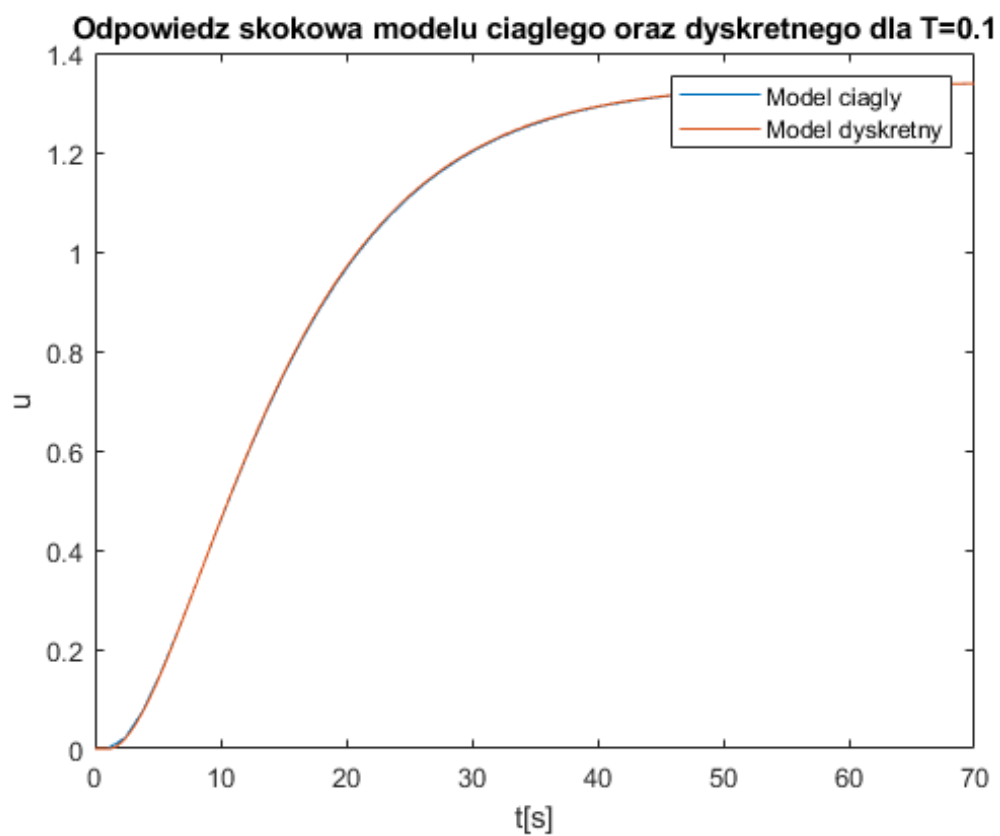
Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu dyskretnego zawarta została w pliku *zad2.slx*.



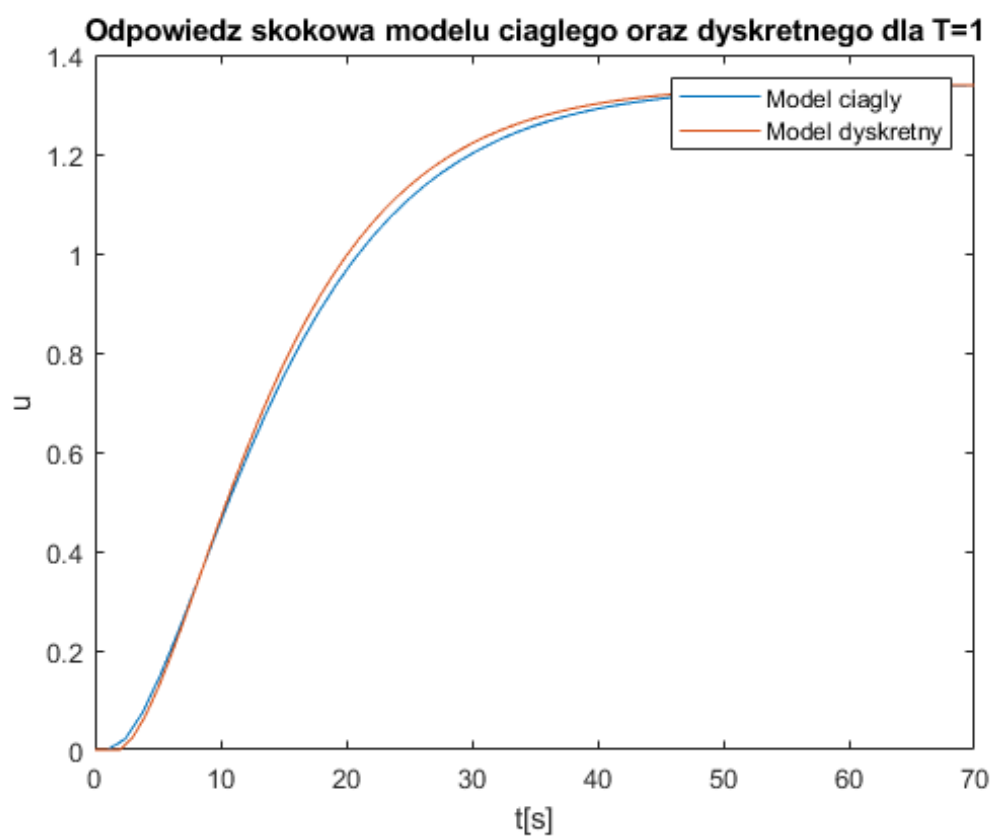
Rysunek 2: Rozwiązanie zadania 2 - model dynamiczny dyskretny

2.3 Porównanie odpowiedzi skokowych modeli ciągłego oraz dyskretnego.

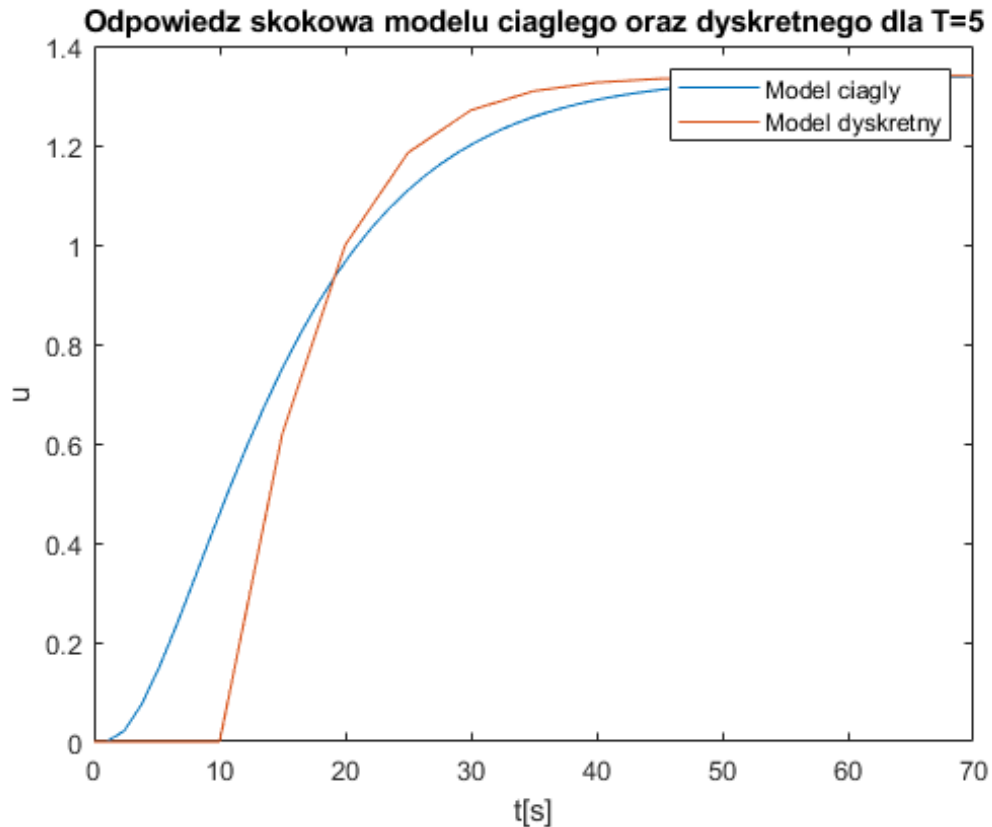
Sprawdzono układy dyskretny dla różnych wartości okresu próbkowania T .



Rysunek 3: Rozwiązanie zadania 3 - $T=0.1$



Rysunek 4: Rozwiązanie zadania 3 - $T=1$



Rysunek 5: Rozwiązanie zadania 3 - $T=5$

Jak widać, im większy jest okres próbkowania, tym gorsze jest odwzorowanie dynamiki układu ciągłego przez układ dyskretny. Wartości ustalone jednak są identyczne, co sugeruje, że zgodnie z oczekiwaniem, charakterystyka statyczna modelu dyskretnego nie zależy od okresu próbkowania.

2.4 Charakterystyka statyczna.

Charakterystyka statyczna modelu dyskretnego została wyznaczona na dwa dwa sposoby: eksperymentalnie przy użyciu narzędzia Simulink oraz analitycznie - przekształcając równanie dynamiczne.

2.4.1 Wyznaczenie eksperymentalne.

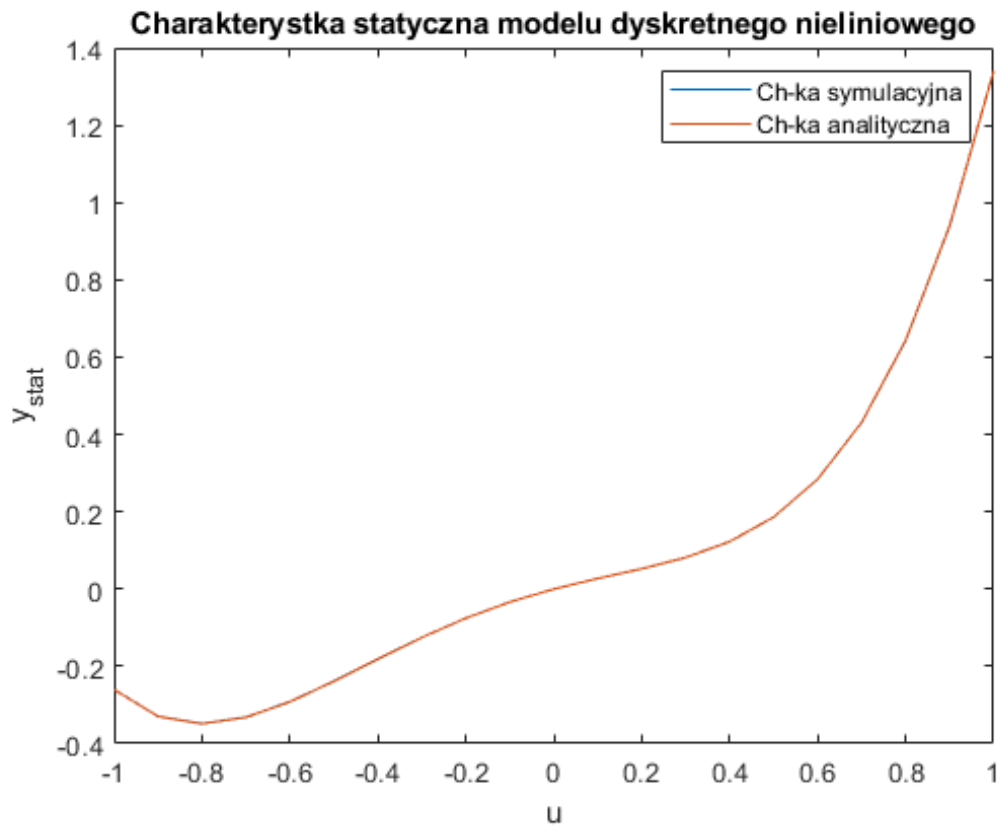
Charakterystyka statyczna może zostać wyznaczona eksperymentalnie, poprzez przeprowadzenie szeregu symulacji dla różnych wartości wielkości wejściowej u , a następnie przyjęcie za wartość $y_{stat}(u)$ wartości po ustaleniu wyjścia.

2.4.2 Wyznaczenie analityczne.

W stanie ustalonym, przy ustalonym sygnale wejściowym u , wartości zmiennych stanu nie zmieniają się, czyli: $\dot{x}(k) = 0$, czyli $x(k) = x(k+1) = x(k+2) = \dots = x$. Podstawiając te zależności pod równania 6. oraz 7. można wyznaczyć zależności pomiędzy zmiennymi stanu, a ostatecznie - równanie na wartość wyjściową modelu statycznego:

$$y(u) = K(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4) \quad (9)$$

Porównanie otrzymanych charakterystyk statycznych:



Rysunek 6: Rozwiązanie zadania 4

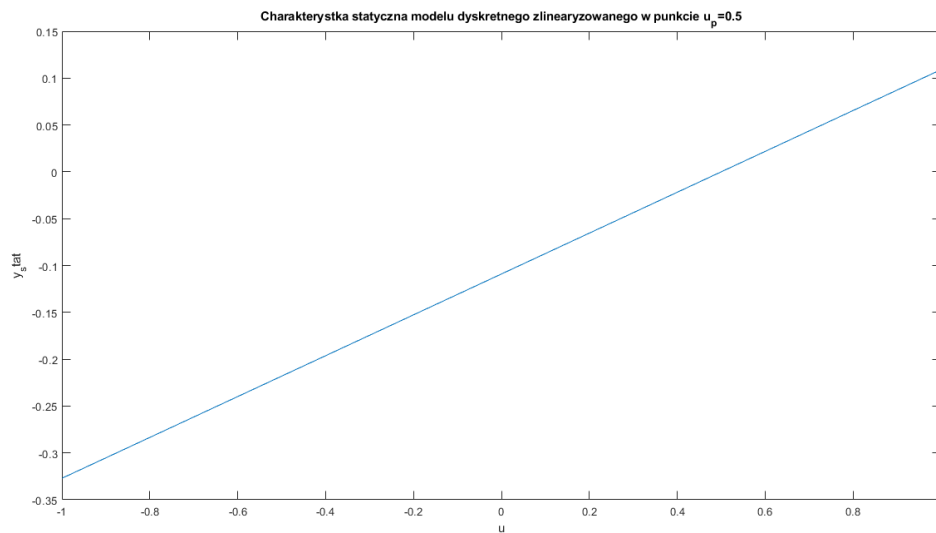
2.5 Charakterystyka statyczna zlinearyzowana.

Do zlinearyzowania funkcji posłużymy się pierwszymi dwoma wyrazami ciągu Taylora. Zakładamy, że \bar{u} to punkt linearyzacji.

$$y(u) \approx y(\bar{u}) + \frac{dy(\bar{u})}{du}(u - \bar{u}) \quad (10)$$

Otrzymano następujący wzór na zlinearyzowaną charakterystykę statyczną w punkcie linearyzacji \bar{u} :

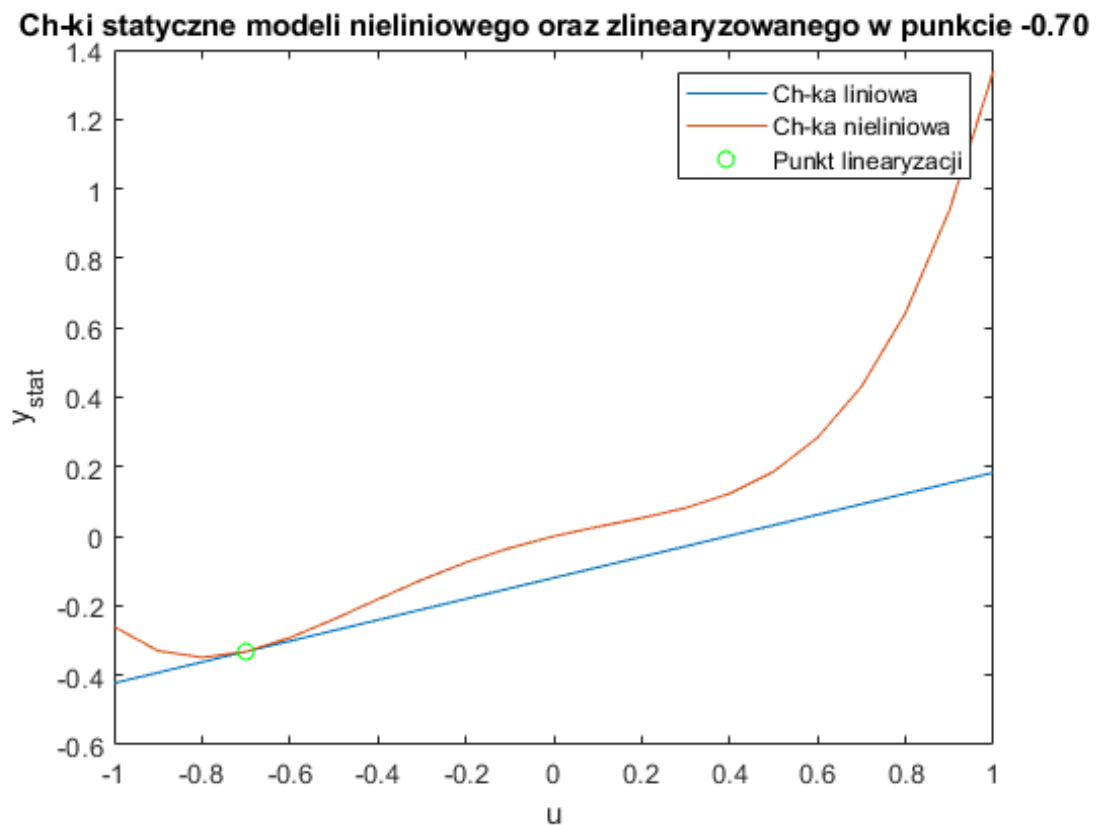
$$y(u) = K(4\alpha_4\bar{u}^3 + 3\alpha_3\bar{u}^2 + 2\alpha_2\bar{u} + \alpha_1)u - K(3\alpha_4\bar{u}^4 + 2\alpha_3\bar{u}^3 + \alpha_2\bar{u}^2) \quad (11)$$



Rysunek 7: Rozwiązanie zadania 4 - punkt linearyzacji $\bar{u} = 0.5$

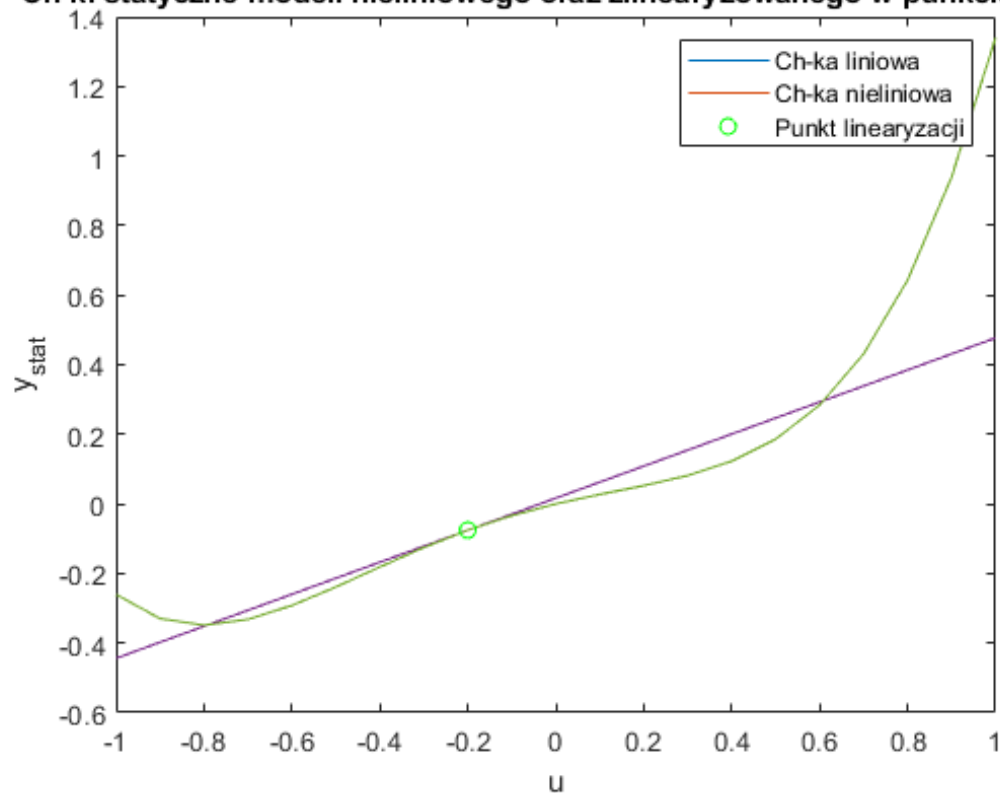
2.6 Porównanie charakterystyk statycznej - liniowej oraz nieliniowej.

Poniżej przedstawiono zlinearyzowane charakterystyki statyczne otrzymane dla różnych punktów linearyzacji wraz z charakterystyką statyczną obiektu nieliniowego:



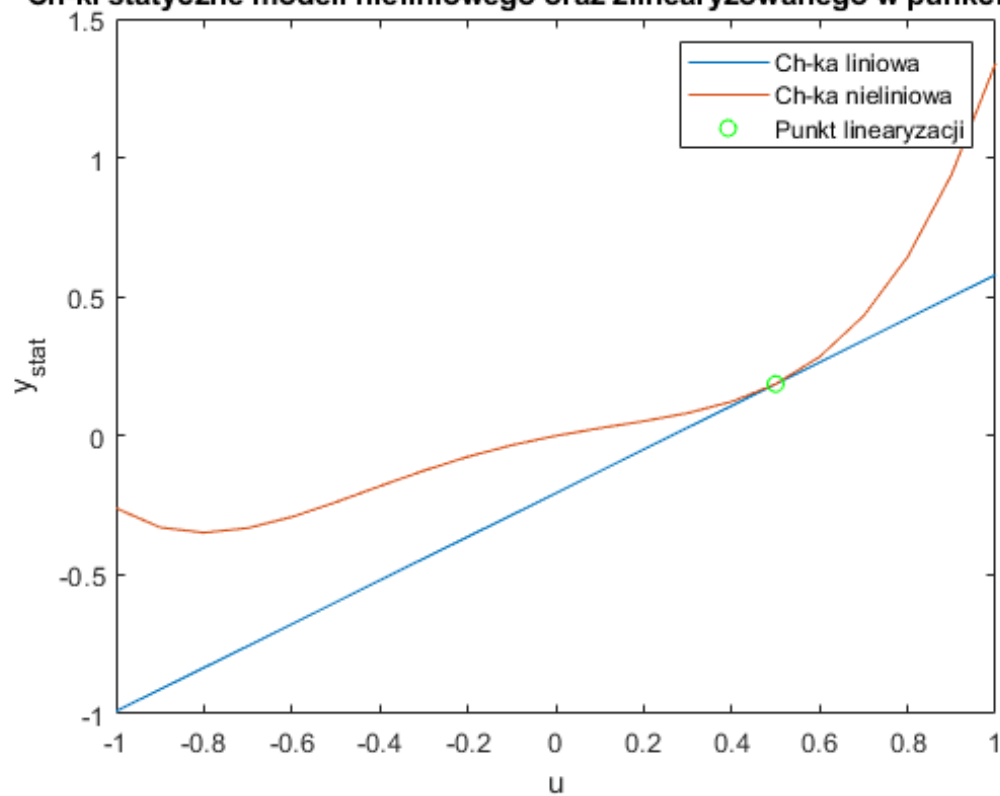
Rysunek 8: Rozwiązanie zadania 6 - punkt linearyzacji $\bar{u} = -0.7$

Ch-ki statyczne modeli nieliniowego oraz zlinearyzowanego w punkcie -0.20



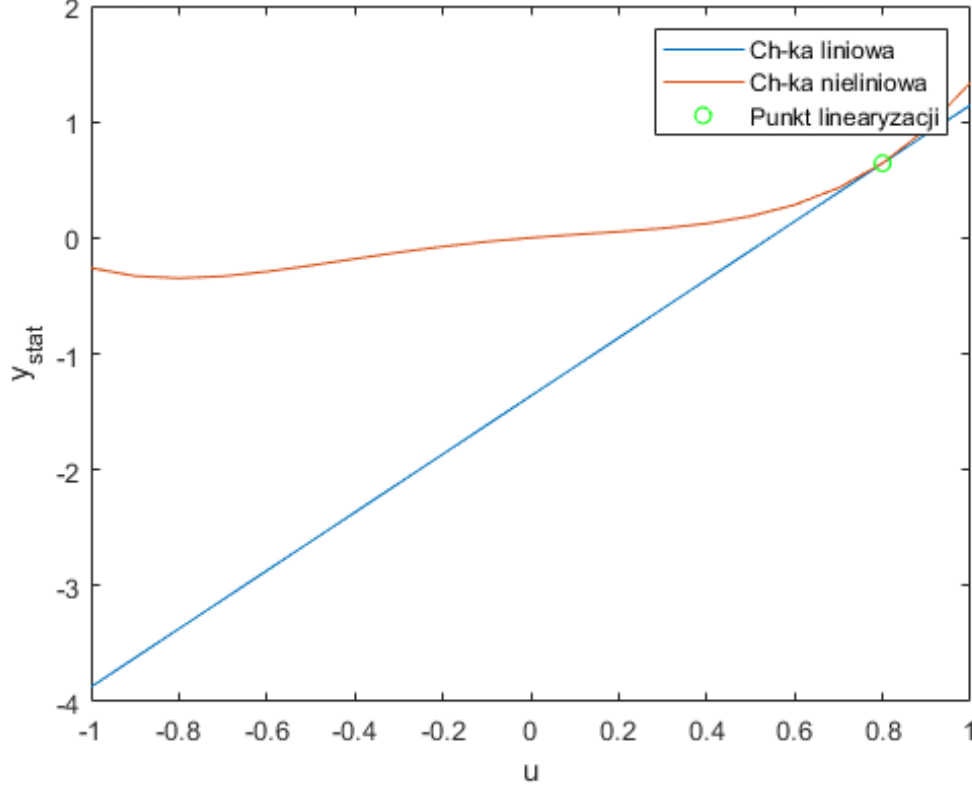
Rysunek 9: Rozwiązanie zadania 6 - punkt linearyzacji $\bar{u} = -0.2$

Ch-ki statyczne modeli nieliniowego oraz zlinearyzowanego w punkcie 0.50



Rysunek 10: Rozwiązanie zadania 6 - punkt linearyzacji $\bar{u} = 0.5$

Ch-ki statyczne modeli nieliniowego oraz zlinearyzowanego w punkcie 0.80



Rysunek 11: Rozwiązanie zadania 6 - punkt linearyzacji $\bar{u} = 0.8$

2.7 Zlinearyzowany model dynamiczny dyskretny.

Tą samą metodą co charakterystykę statyczną, można dokonać linearyzacji modelu dyskretnego. Linearyzacja będzie występować wyłącznie w równaniu 7.

Zlinearyzowany model dyskretny w postaci równań stanu:

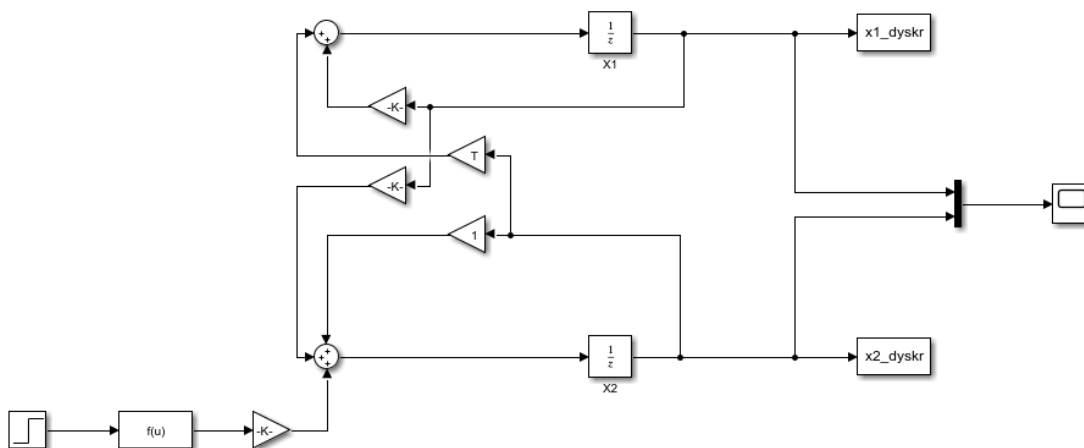
$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2(t)}{dt} = & -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1(\bar{u} + (u(t) - \bar{u})) + \alpha_2(\bar{u}^2 + 2\bar{u}(u(t) - \bar{u})) \\ & + \alpha_3(\bar{u}^3 + 3(\bar{u}^2)(u(t) - \bar{u})) + \alpha_4(\bar{u}^4 + 4(\alpha u^3)(u(t) - \bar{u}))) \end{aligned} \quad (13)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (14)$$

2.8 Reprezentacja graficzna zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego.

Reprezentacja graficzna zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego zawarta została w pliku *zad8.slx*.



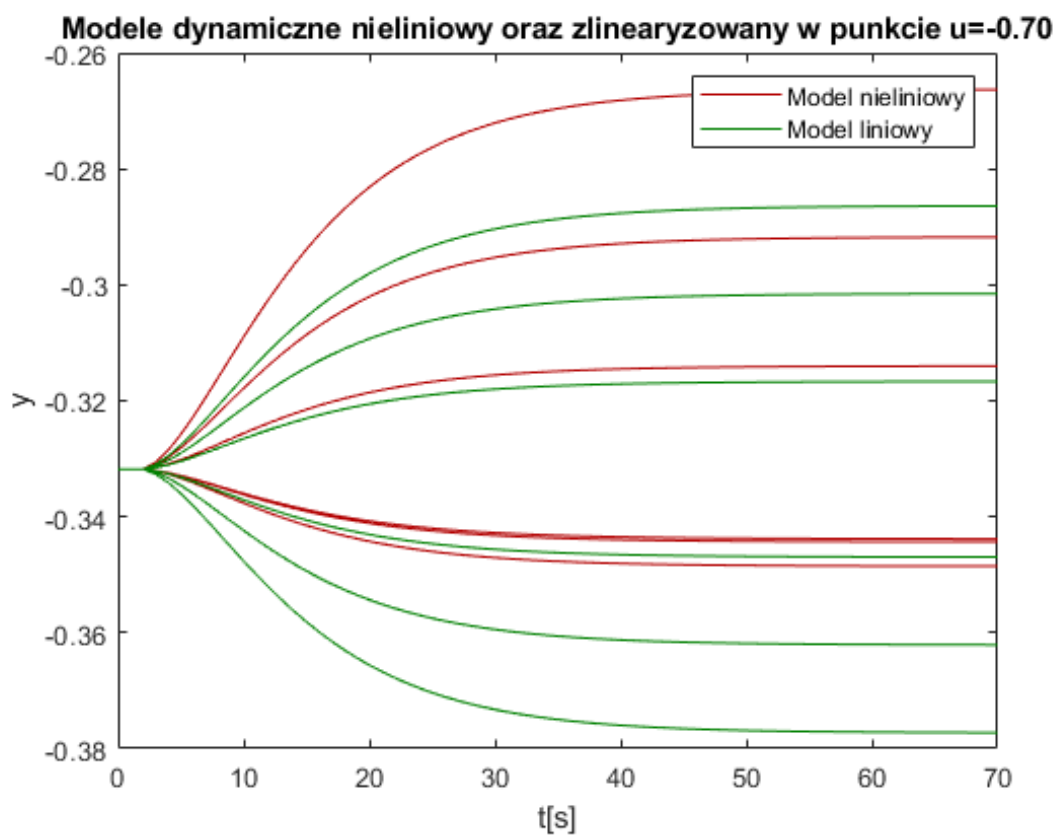
Rysunek 12: Rozwiązanie zadania 8

W celu uproszczenia zapisu, część równania dotycząca sygnału wejściowego, została przedstawiona w formie bloku funkcyjnego. Zawiera on równanie:

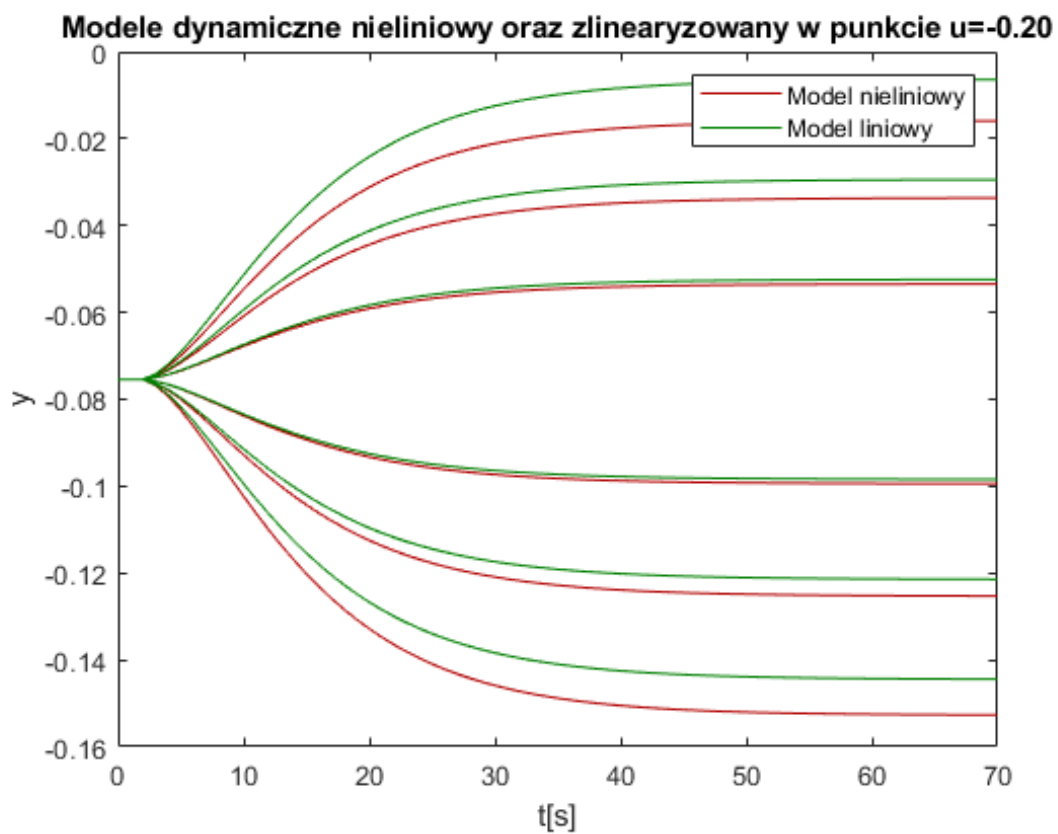
$$f(u) = \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 (\bar{u} + (u(t) - \bar{u})) + \alpha_2 (\bar{u}^2 + 2\bar{u}(u(t) - \bar{u})) + \alpha_3 (\bar{u}^3 + 3(\bar{u}^2)(u(t) - \bar{u})) + \alpha_4 (\bar{u}^4 + 4(\alpha u^3)(u(t) - \bar{u}))) \quad (15)$$

2.9 Porównanie odpowiedzi skokowych modeli dyskretnych - nieliniowego oraz zlinearyzowanego.

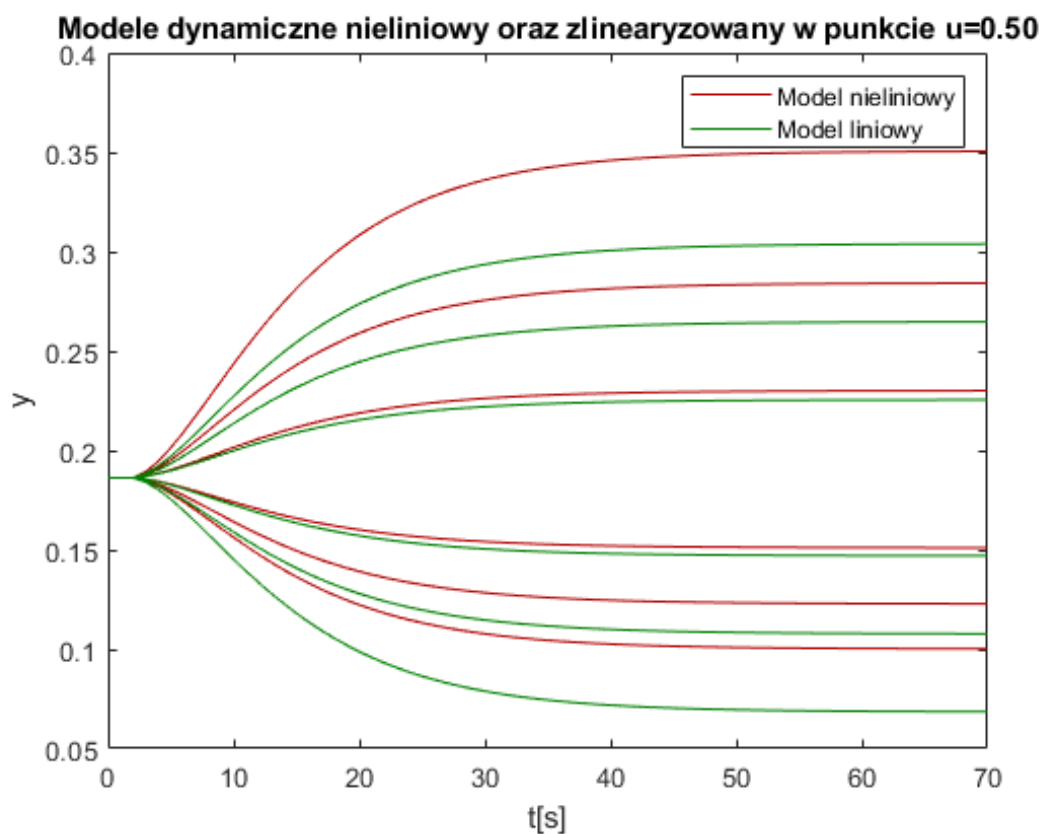
Poniżej przedstawiono odpowiedzi modeli dyskretnych, nieliniowego oraz zlinearyzowanego, na skoki wielkości wejściowej u (o różnych wartościach) z punktu pracy, dla którego został wyznaczony model zlinearyzowany. Skoki wykonywano o wartości $\Delta u = 0.05, 0.1, 0.15$.



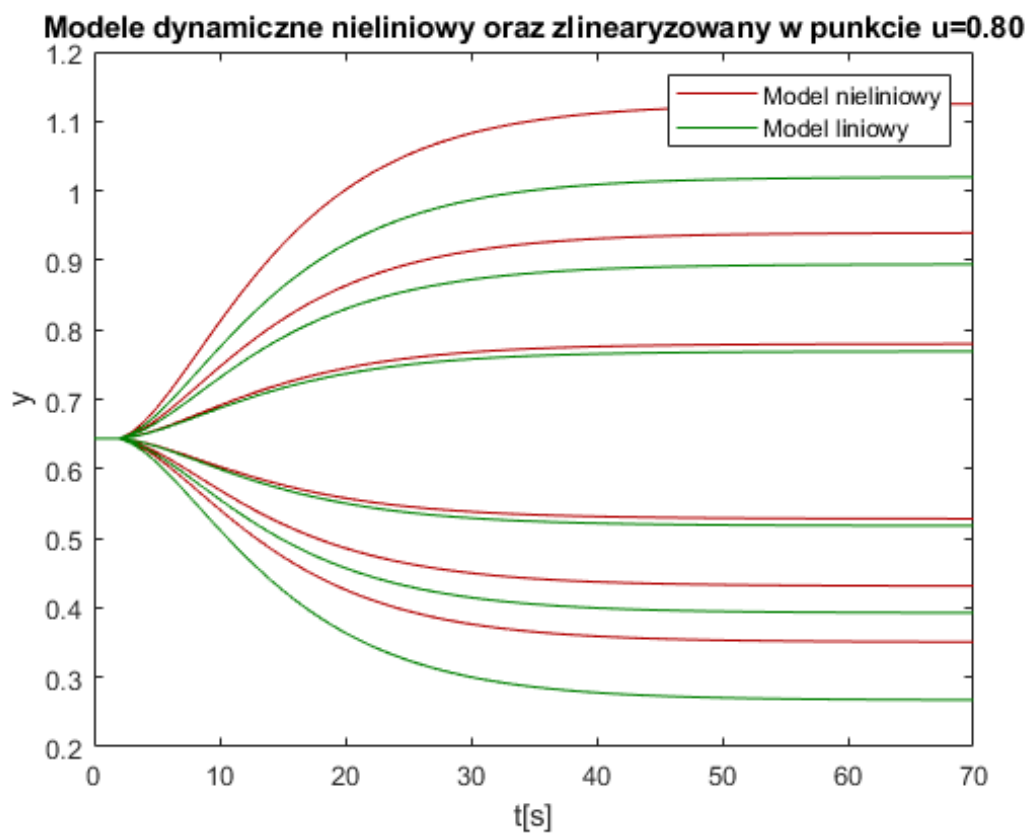
Rysunek 13: Rozwiązanie zadania 9



Rysunek 14: Rozwiązanie zadania 9



Rysunek 15: Rozwiązanie zadania 9



Rysunek 16: Rozwiązanie zadania 9

2.10 Model w postaci transmitancji dyskretnej.

W celu wyznaczenia modelu w postaci transmitancji dyskretnej, usuniemy wyrazy stałe z utworzonego wcześniej model zlinearyzowanego. Otrzymamy w ten sposób model w postaci:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (16)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (17)$$

W ten sposób wyznaczono poszczególne macierze modelu:

$$A = \begin{bmatrix} (1 - T\frac{T_1+T_2}{T_1+T_2}) & T \\ \frac{-T}{T_1T_2} & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{KT}{T_1T_2}(\alpha_1 + 2\alpha_2\bar{u} + 3\alpha_3\bar{u}^2 + 4\alpha_4\bar{u}^3) \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Następnie korzystając z poniższego równania wyznaczono transmitancję:

$$G(z) = C(Iz - A)^{-1}B + D \quad (19)$$

$$G(z) = \frac{4K\alpha_4T^2\bar{u}^3 + 3K\alpha_3T^2\bar{u}^2 + 2K\alpha_2T^2\bar{u} + K\alpha_1T^2}{T_1T_2z^2 + (TT_1 + TT_2 - 2T_1T_2)z + T_1T_2 - TT_2 - TT_1 + T^2} \quad (20)$$

Transmitancja modeli zlinearyzowanych wyznaczonych dla wcześniej używanych punktów linearyzacji:

$$G(z) \Big|_{\bar{u}=-0.7} = \frac{174713724808121727}{31128880624384868352z^2 - 53610849964218384384z + 23058430092136939520} \quad (21)$$

$$G(z) \Big|_{\bar{u}=-0.2} = \frac{33181080902585055}{3891110078048108544z^2 - 6701356245527298048z + 2882303761517117440} \quad (22)$$

$$G(z) \Big|_{\bar{u}=0.5} = \frac{157}{10800z^2 - 18600z + 8000} \quad (23)$$

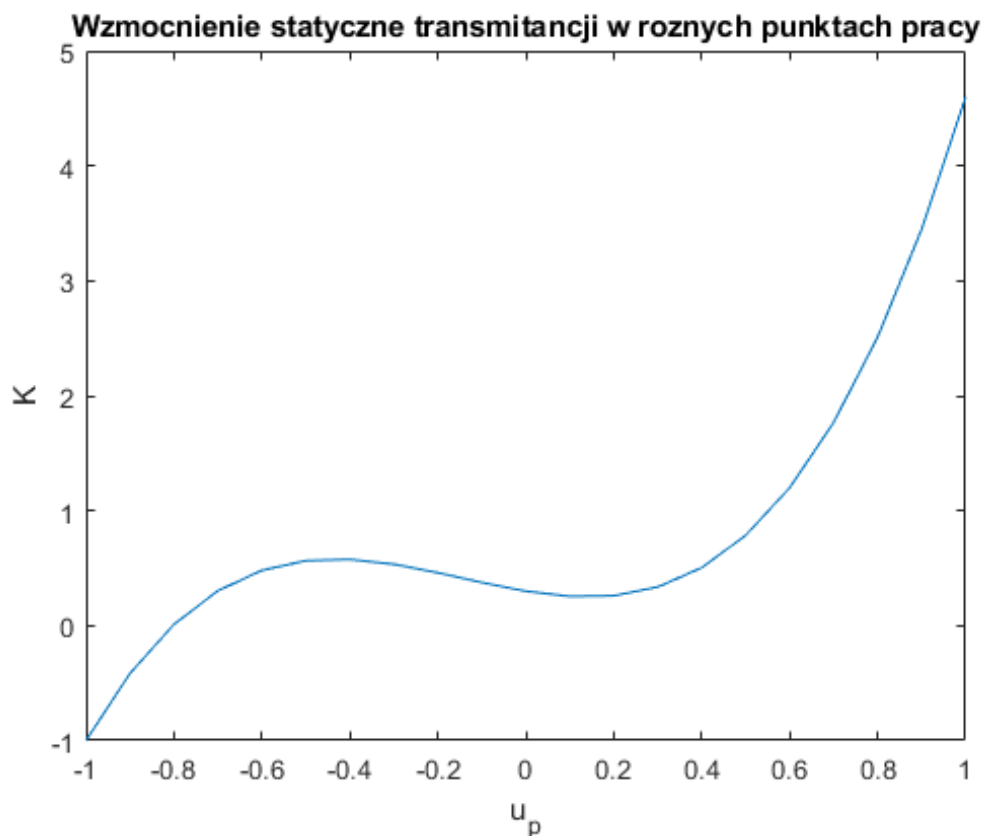
$$G(z) \Big|_{\bar{u}=0.8} = \frac{180812679567491835}{3891110078048108544z^2 - 6701356245527298048z + 2882303761517117440} \quad (24)$$

2.11 Zależność wzmocnienia statycznego od punktu pracy.

Z definicji, wzmocnienie statyczne transmitancji można wyznaczyć obliczając granicę z transmitancji dla z dążącego do jedności:

$$K_{stat} = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = 4K\alpha_4\bar{u}^3 + 3K\alpha_3\bar{u}^2 + 2K\alpha_2\bar{u} + K\alpha_1 \quad (25)$$

Poniżej przedstawiono charakterystykę, która przedstawia zależność wzmocnienia statycznego od danego punktu pracy.



Rysunek 17: Rozwiązanie zadania 11 - charakterystyka $K_{stat}(u)$

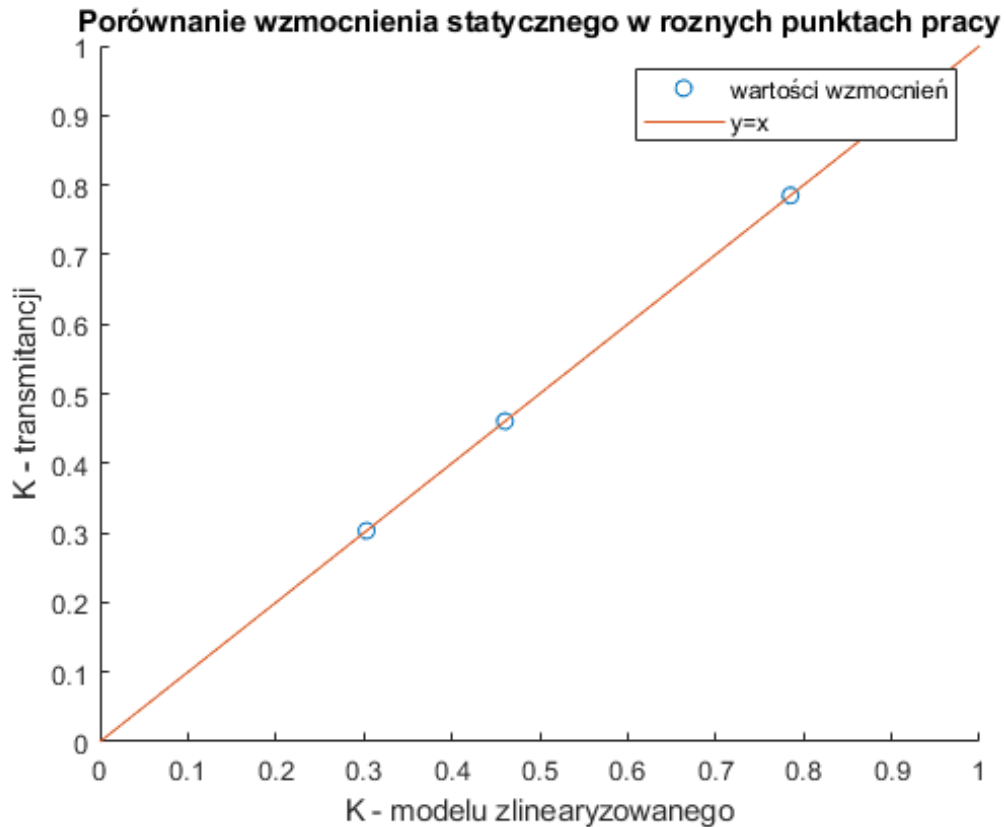
2.12 Porównanie wzmocnienia statycznego transmitancji oraz modelu zlinearyzowanego.

Aby wyznaczyć wzmocnienie statyczne modelu zlinearyzowanego należy:

1. Wykonać skok o dowolną wartość i zmierzyć wartość wyjściową po ustaleniu przebiegu (wartość statyczna),
2. Wykonać kolejny skok o ustaloną wartość, większą o Δu , a następnie ponownie odczytać wartość wyjściową po ustaleniu przebiegu,
3. Wartość wzmocnienia statycznego otrzymamy poprzez odjęcie kolejnej wartości statycznej od poprzedniej, a następnie podzieleniu przez przyrost skoku Δu .

$$K_{stat}(\bar{u}) = \frac{y_{stat}(\bar{u} + \Delta u) - y_{stat}(\bar{u})}{\Delta u} \quad (26)$$

Otrzymane w ten sposób wartości wzmocnienia statycznego porównano z wartościami wzmocnienia statycznego obliczonego przy użyciu transmitancji z kolejnych punktów pracy: -0.7, -0.2, 0.5.



Rysunek 18: Rozwiązanie zadania dodatkowego - porównanie wzmocnień statycznych

3 Wnioski

- Zgodnie z oczekiwaniami, odpowiedzi skokowe modeli zlinearyzowanych są symetryczne dla przeciwnych wartości skoków, a im większa jego amplituda, tym większa różnica między odpowiedzią skokową modeli zlinearyzowanych a modelu nieliniowego.
- Wartości wzmocnienia statycznego uzyskanego poprzez symulacje modeli zlinearyzowanych oraz przy użyciu transmitancji są identyczne,
- Transmitancje dyskretne często mają skomplikowaną strukturę ze względu na występujące w niej niecałkowite wartości liczbowe. Z tego względu, funkcja programu Matlab *collect*, wymuszająca użycie liczb całkowitych, zwraca kilkudziesięcocyfrowe wartości (będące najmniejszymi wspólnymi wielokrotnościami)