

Politechnika Warszawska
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych

Modelowanie i Identyfikacja

Projekt

Projekt II, zestaw 4

Wykonał: Paweł Gajewski, 269823

Warszawa 2019/2020

1 Wstęp

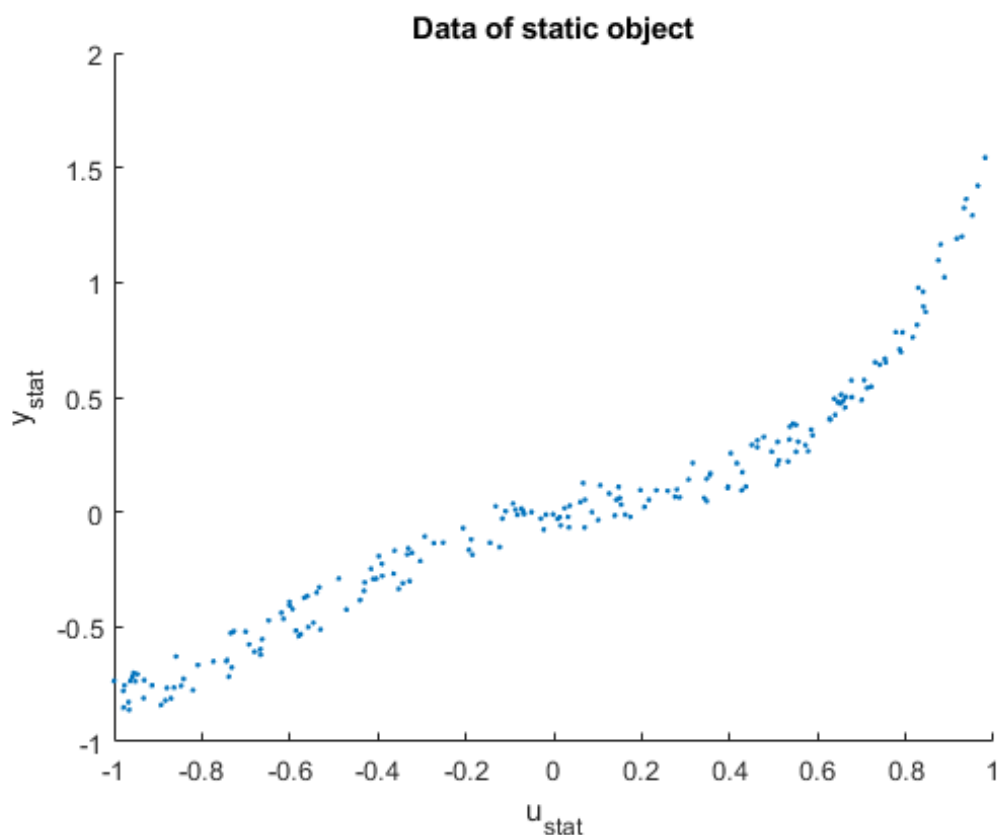
1.1 Cel projektu

Celem projektu jest wybranie struktury modeli oraz ich identyfikacja na podstawie zebranego zestawu danych. Pierwszy zestaw zawiera pomiary statyki obiektu, drugi natomiast - pomiary jego dynamiki.

1.2 Wizualizacja danych

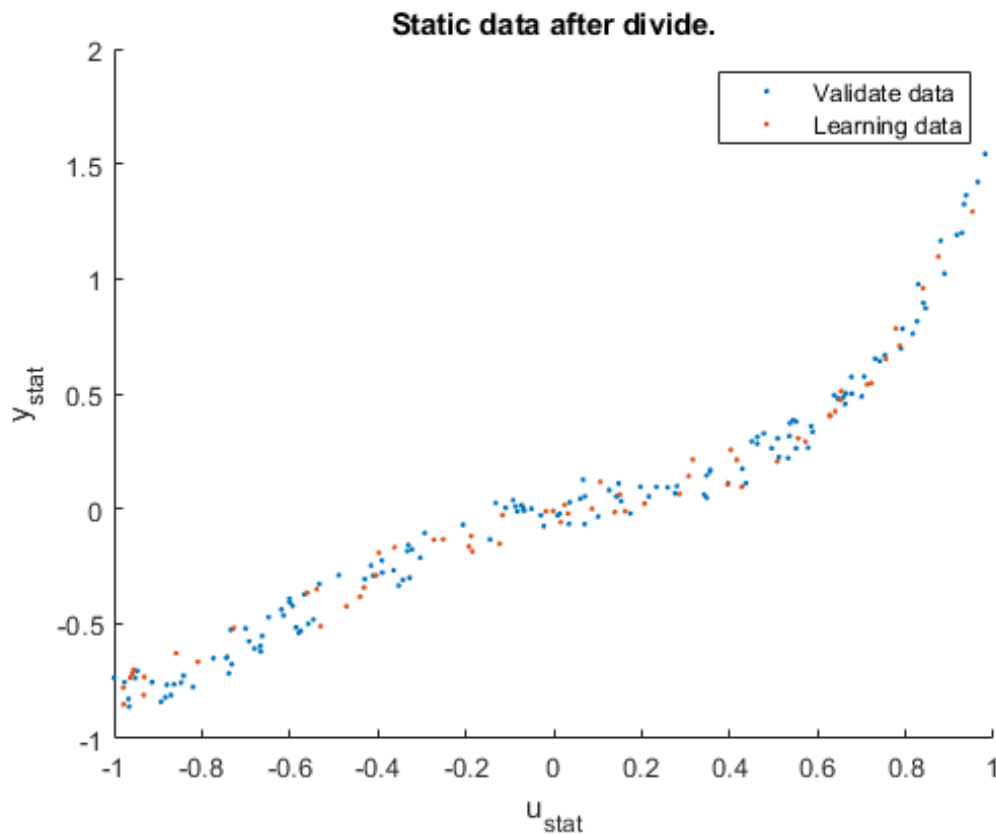
1.2.1 Dane do modelu statycznego

Dane potrzebne do wyznaczenia modelu statycznego zostały pobrane z pliku *danestat4.txt*. Zawarte w nim punkty zostały przedstawione na wykresie poniżej.



Rysunek 1: Zbiór danych wykorzystany do wyznaczenia modelu statycznego.

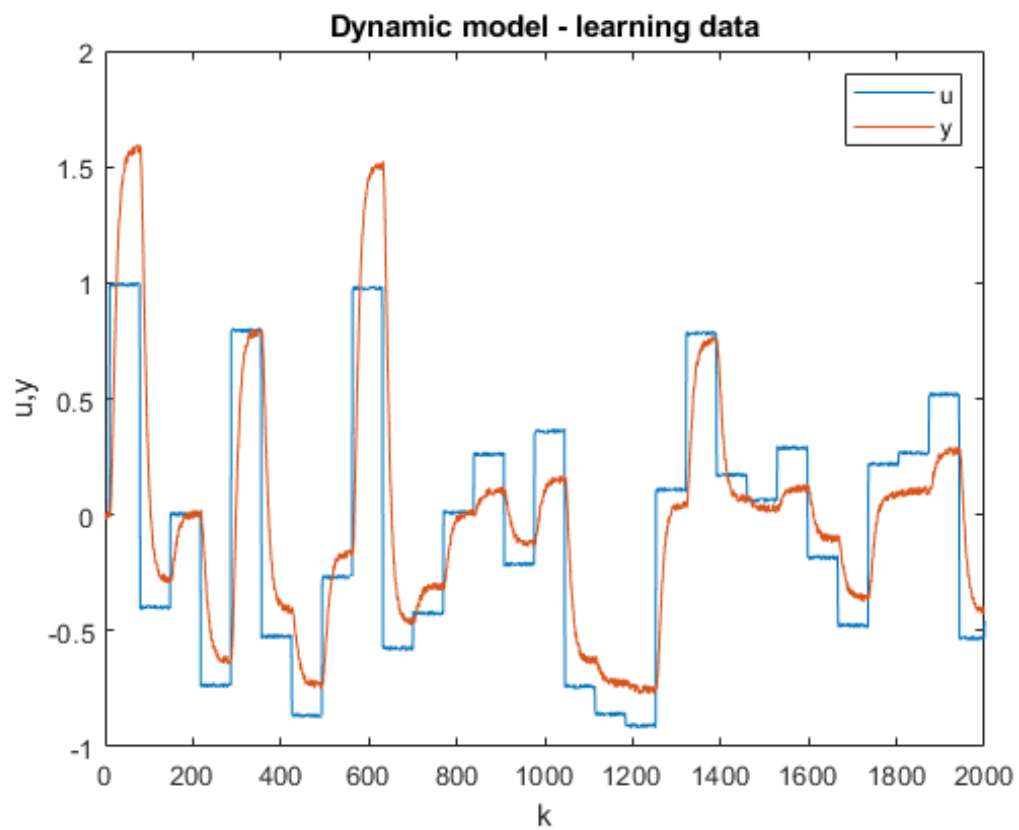
W celu wyznaczenia modelu należało przygotować dane, dzieląc go odpowiednio na zbiór uczący oraz weryfikujący. Przyjęto, że zbiór uczący będzie stanowił 30% całej bazy danych, natomiast zbiór weryfikujący - pozostałe 70%. Wynik podziału został przedstawiony na wykresie poniżej. Jak widać, zarówno zbiór uczący, jak i weryfikujący, zawierają próbki z prawie całej dziedziny $(-1;1)$.



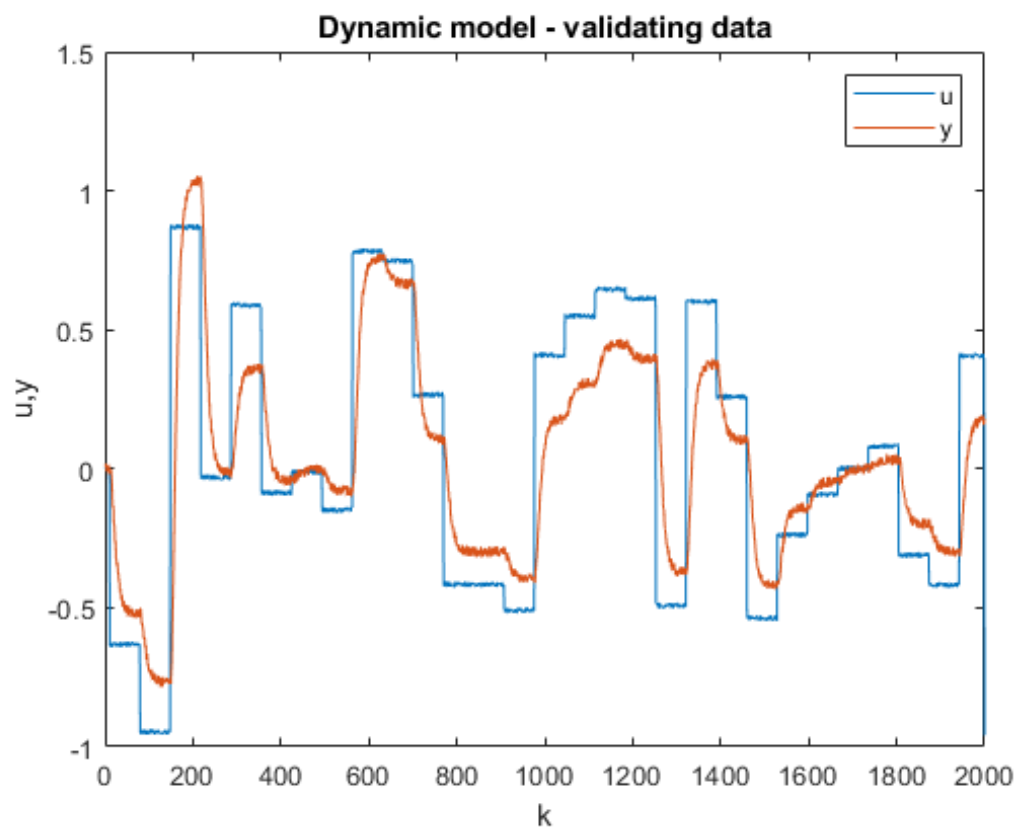
Rysunek 2: Zbiór danych wykorzystany do wyznaczenia modelu statycznego po podziale.

1.2.2 Model dynamiczny

Dane do przygotowania oraz weryfikacji modelu dynamicznego zawarte zostały w plikach *danedynucz4.txt* oraz *danedynwer4.txt*. Dane zostały już wcześniej podzielone, więc nie było potrzeby ich dzielenia. Każdy ze zbiorów posiada po 2000 próbek. Zbiory uczący oraz weryfikujący zaprezentowano na wykresach poniżej.



Rysunek 3: Dane uczące do modelu dynamicznego.



Rysunek 4: Dane weryfikujące do modelu dynamicznego.

2 Identyfikacja modeli statycznych

W tej sekcji przedstawione zostały wyniki tworzenia modeli statycznych o strukturze:

$$y(u) = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i u^i \quad (1)$$

gdzie:

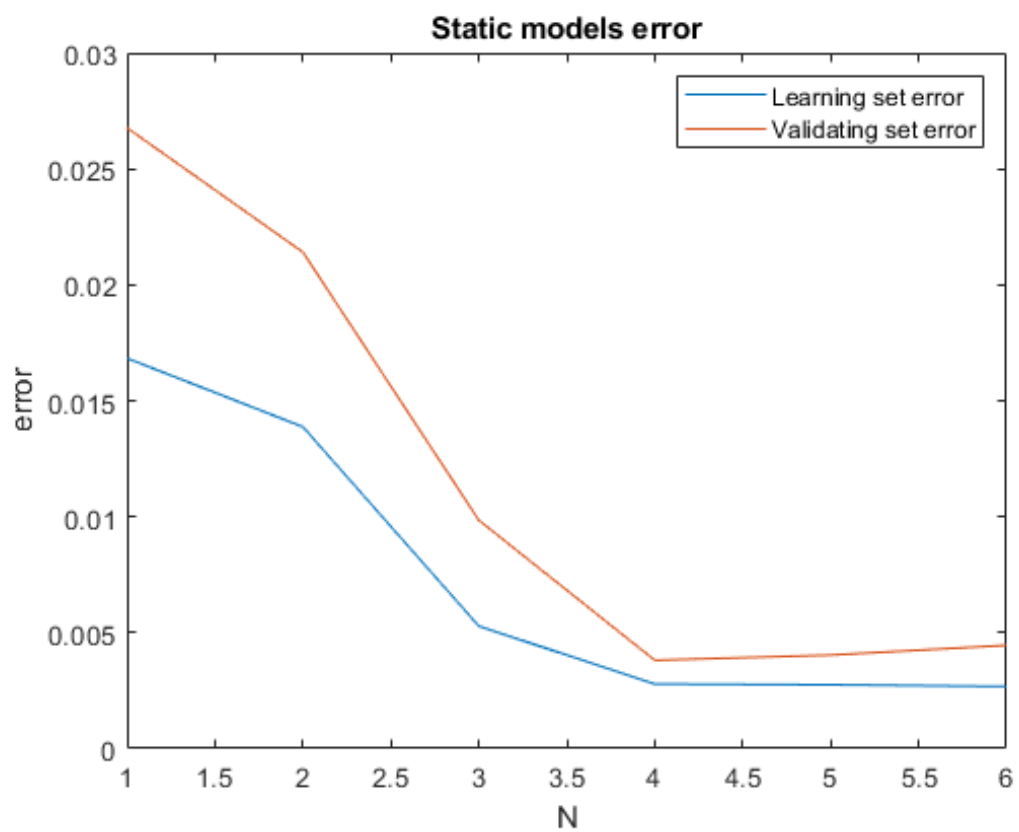
- N - stopień wielomianu modelu,
- a - współczynniki modelu.

Model liniowy jest szczególnym przypadkiem modelu wielomianowego (o 1. stopniu), więc został on omówiony razem z modelami o wyższych stopniach.

2.1 Zestawienie otrzymanych modeli

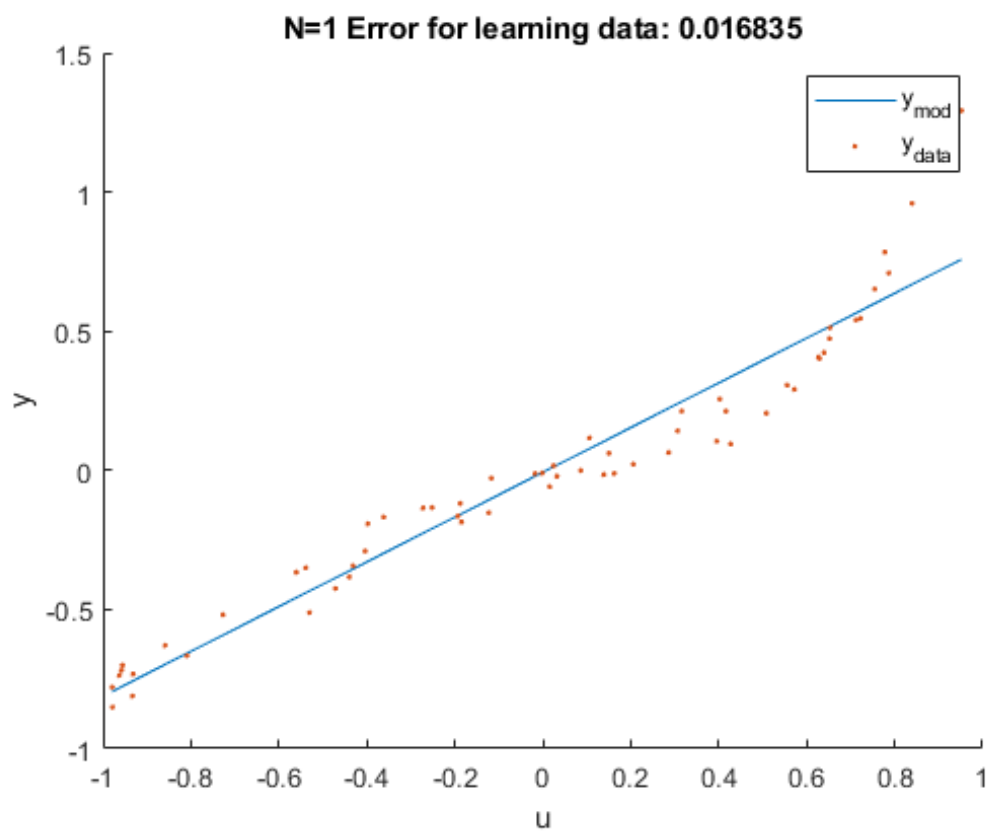
St. Wielomianu	Ilość wsp.	$E_{learning}$	E_{ver}
1	2	0.016835	0.026768
2	3	0.013875	0.021407
3	4	0.005283	0.009850
4	5	0.002789	0.003813
5	6	0.002754	0.004035
6	7	0.002683	0.004457

Tablica 1: Zestawienie modeli statycznych otrzymanych metodą najmniejszych kwadratów.

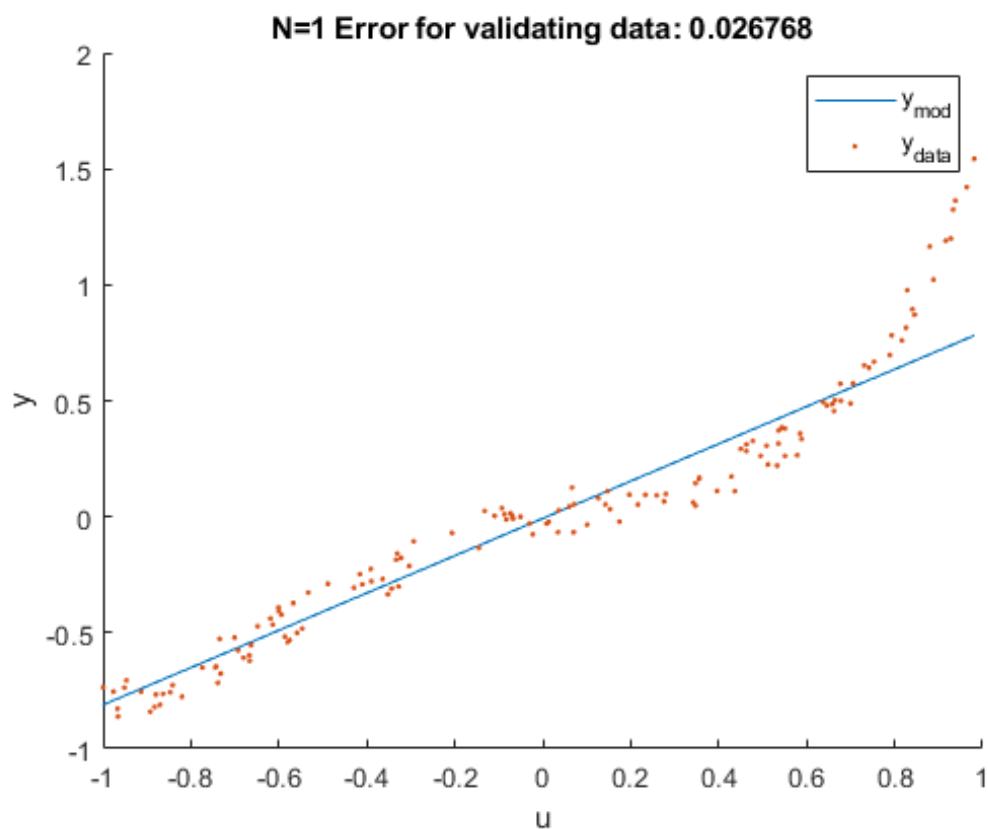


Rysunek 5: Przebieg wartości błędów modelowania od stopnia modelu.

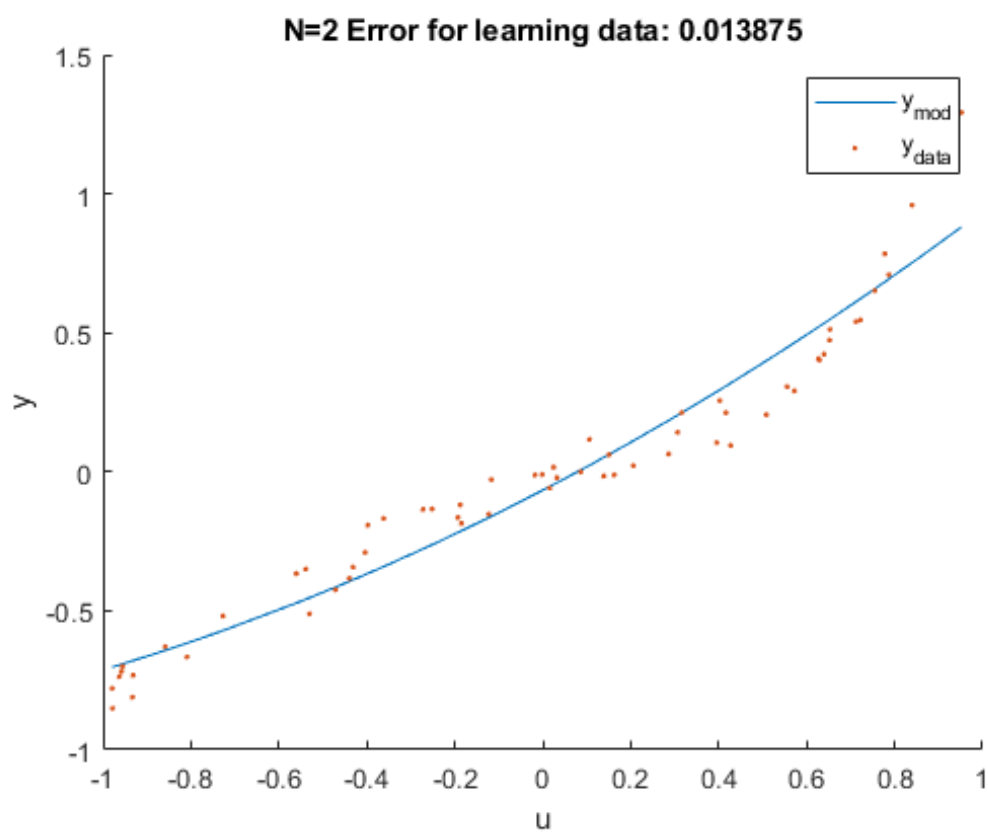
2.2 Wizualna ocena otrzymanych modeli



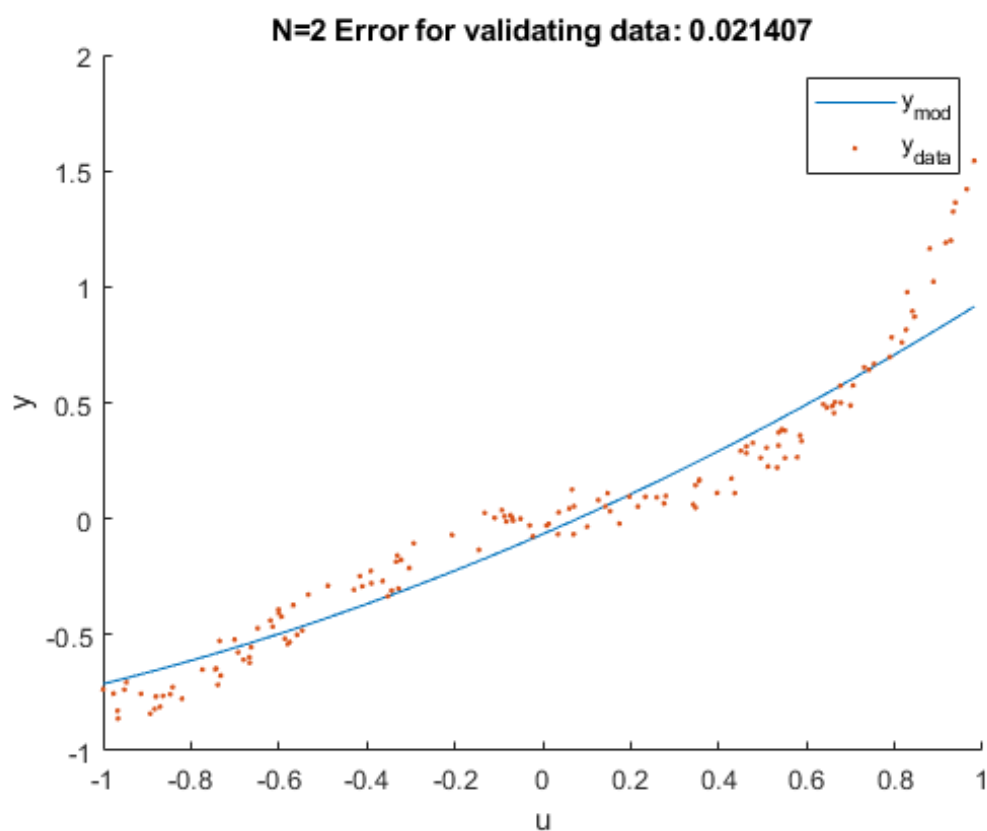
Rysunek 6: Porównanie modelu statycznego 1. rzędu z danymi uczącymi.



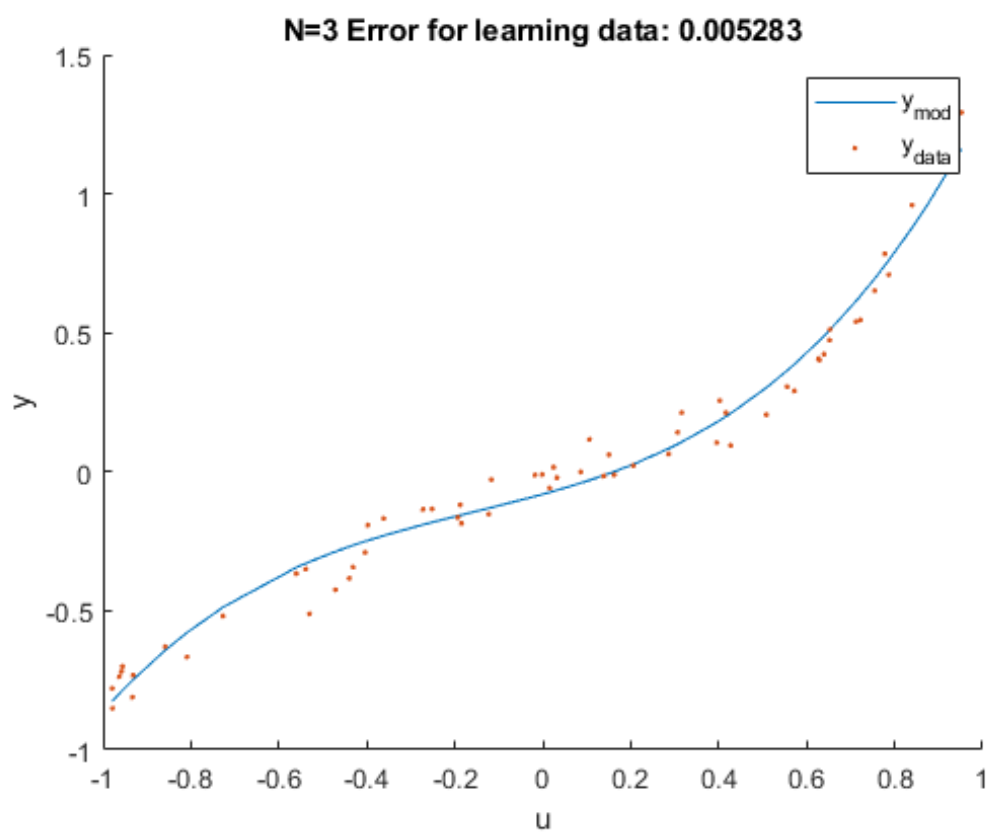
Rysunek 7: Porównanie modelu statycznego 1. rzędu z danymi weryfikującymi.



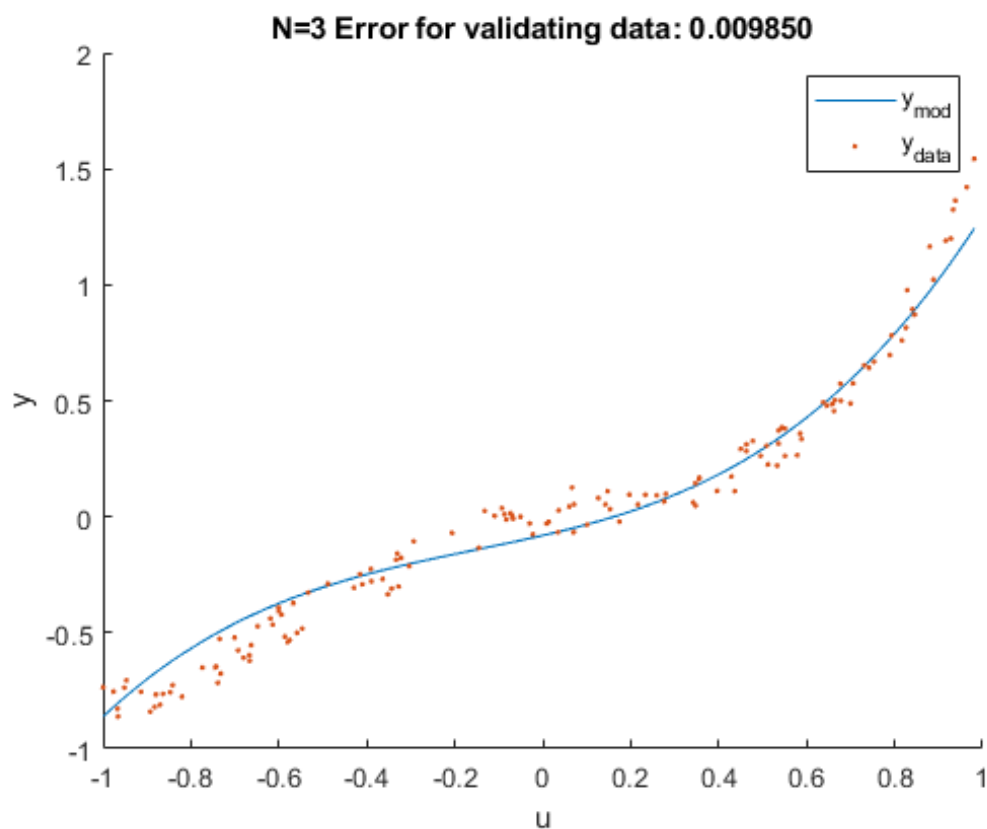
Rysunek 8: Porównanie modelu statycznego 2. rzędu z danymi uczącymi.



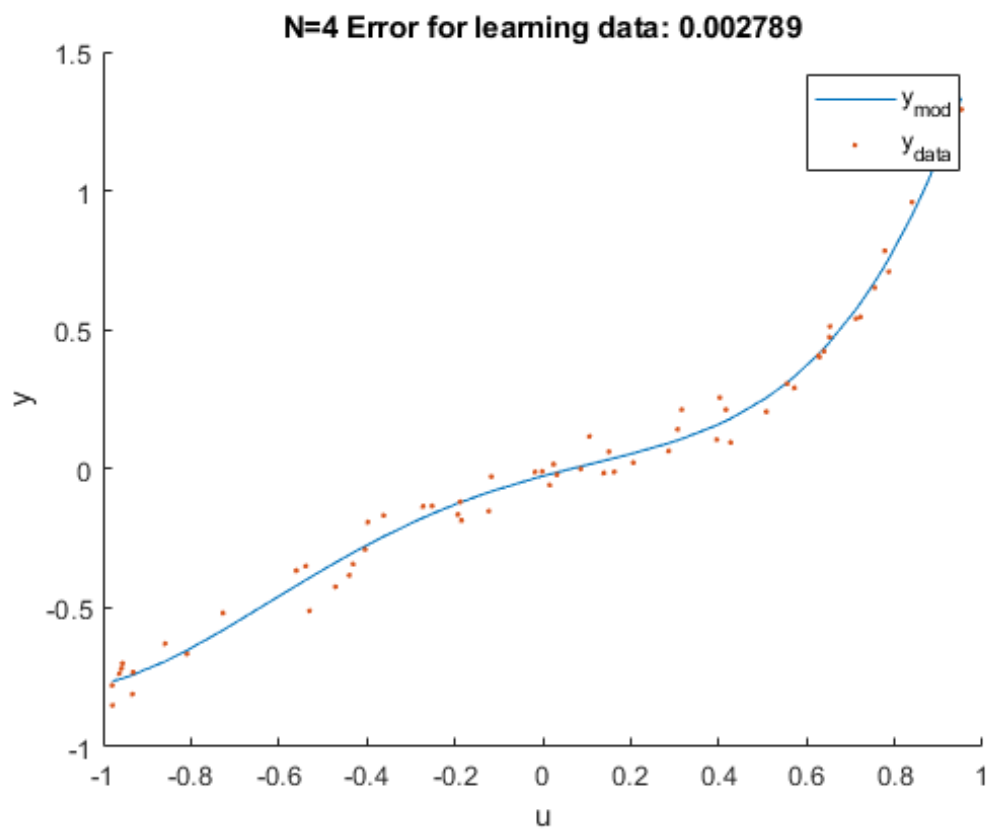
Rysunek 9: Porównanie modelu statycznego 2. rzędu z danymi weryfikującymi.



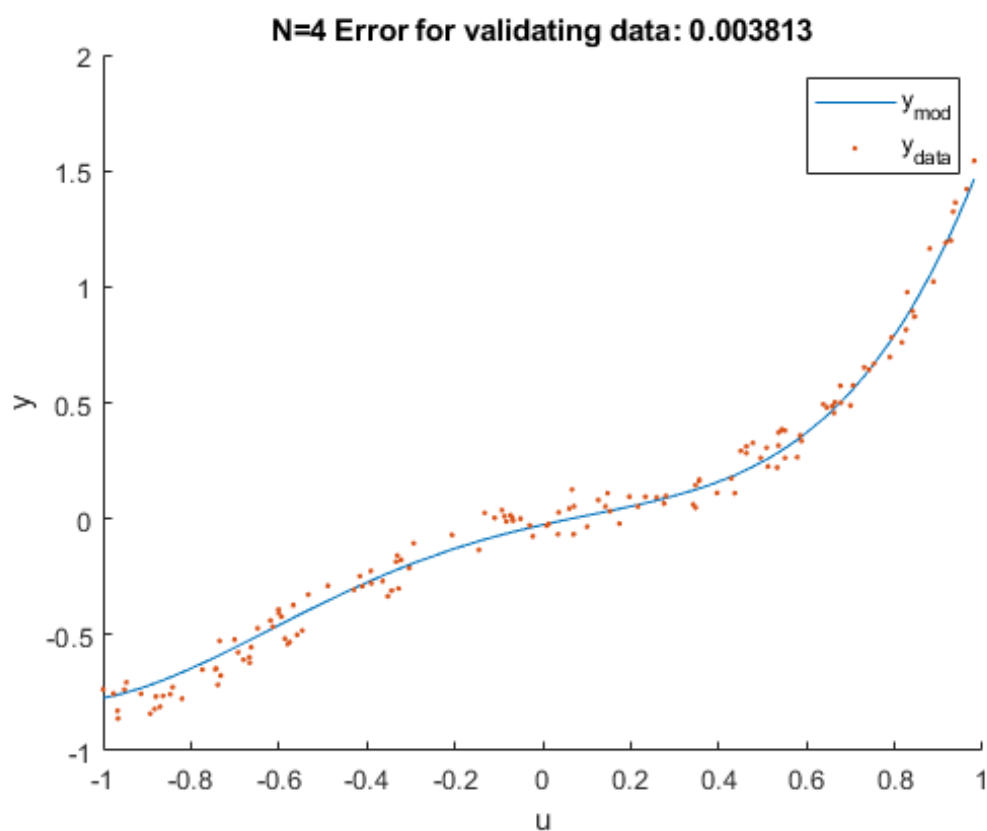
Rysunek 10: Porównanie modelu statycznego 3. rzędu z danymi uczącymi.



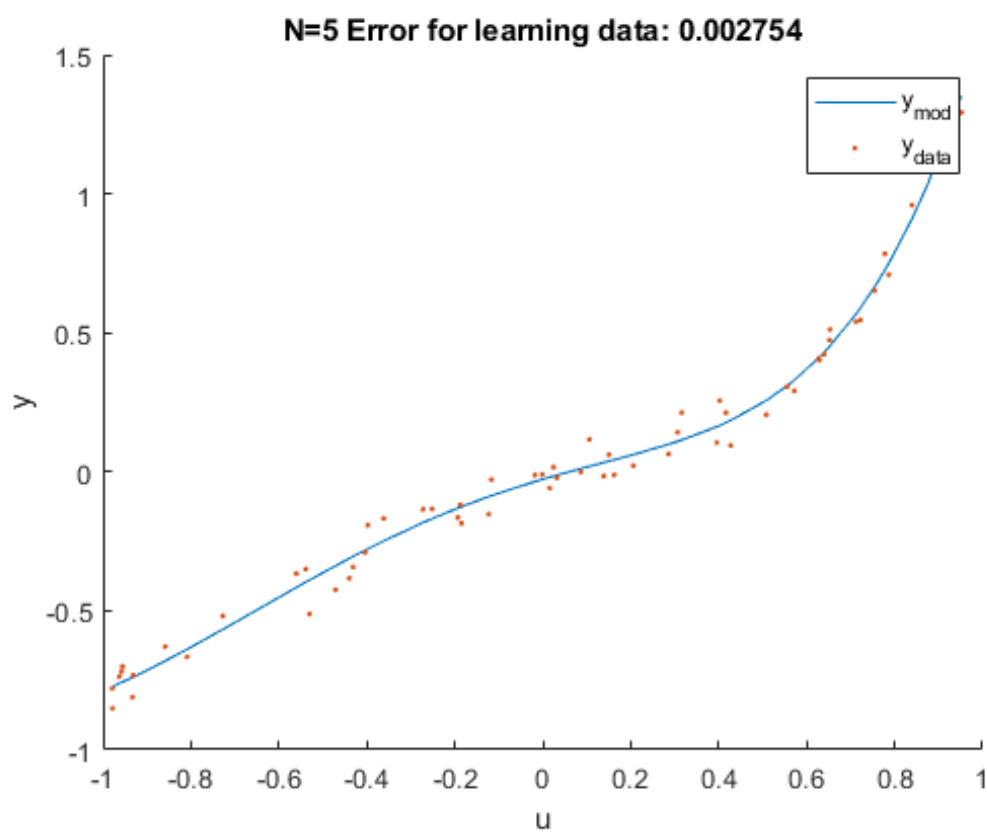
Rysunek 11: Porównanie modelu statycznego 3. rzędu z danymi weryfikującymi.



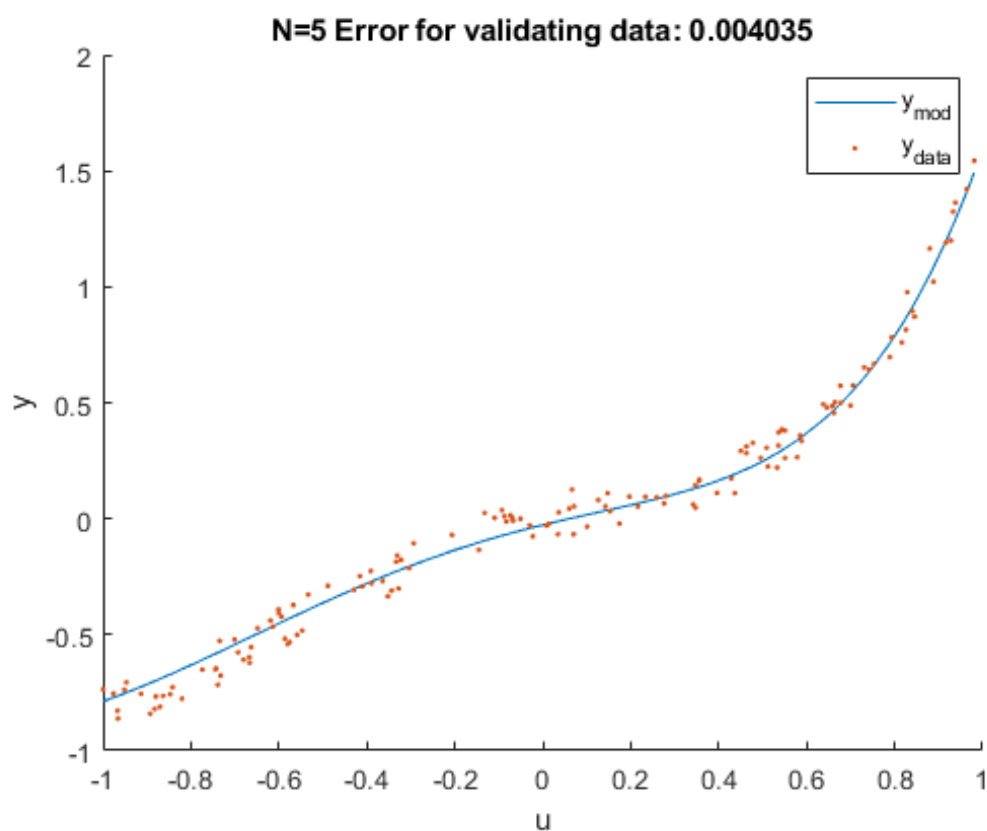
Rysunek 12: Porównanie modelu statycznego 4. rzędu z danymi uczącymi.



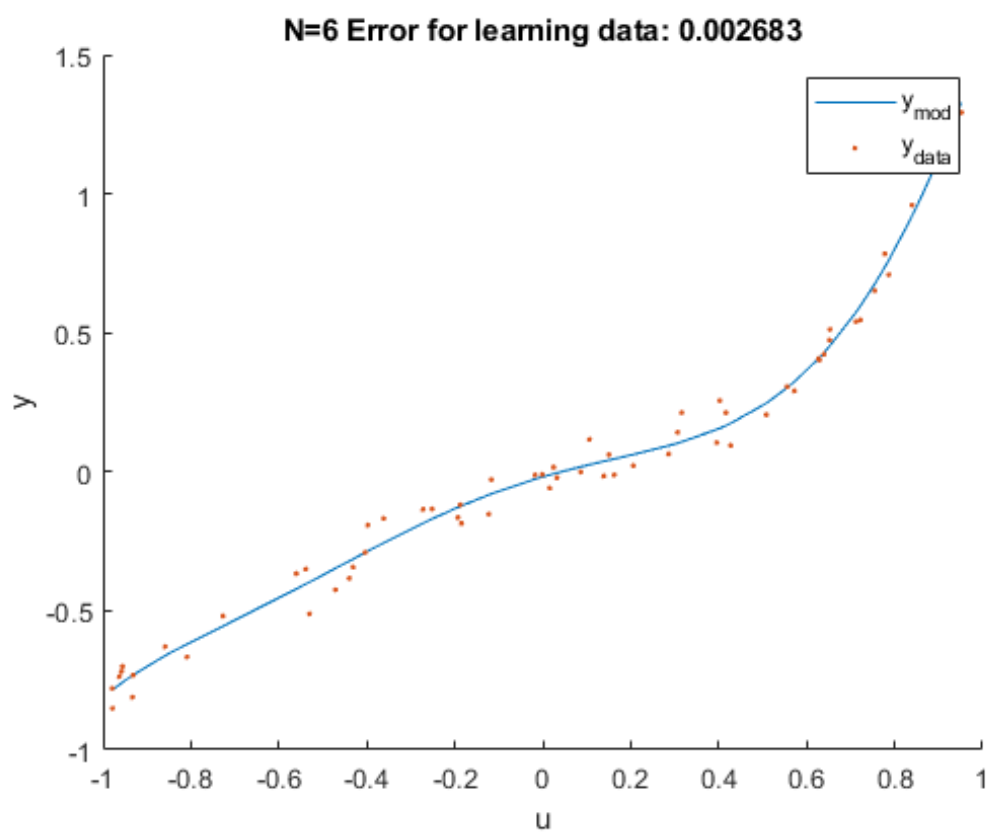
Rysunek 13: Porównanie modelu statycznego 4. rzędu z danymi weryfikującymi.



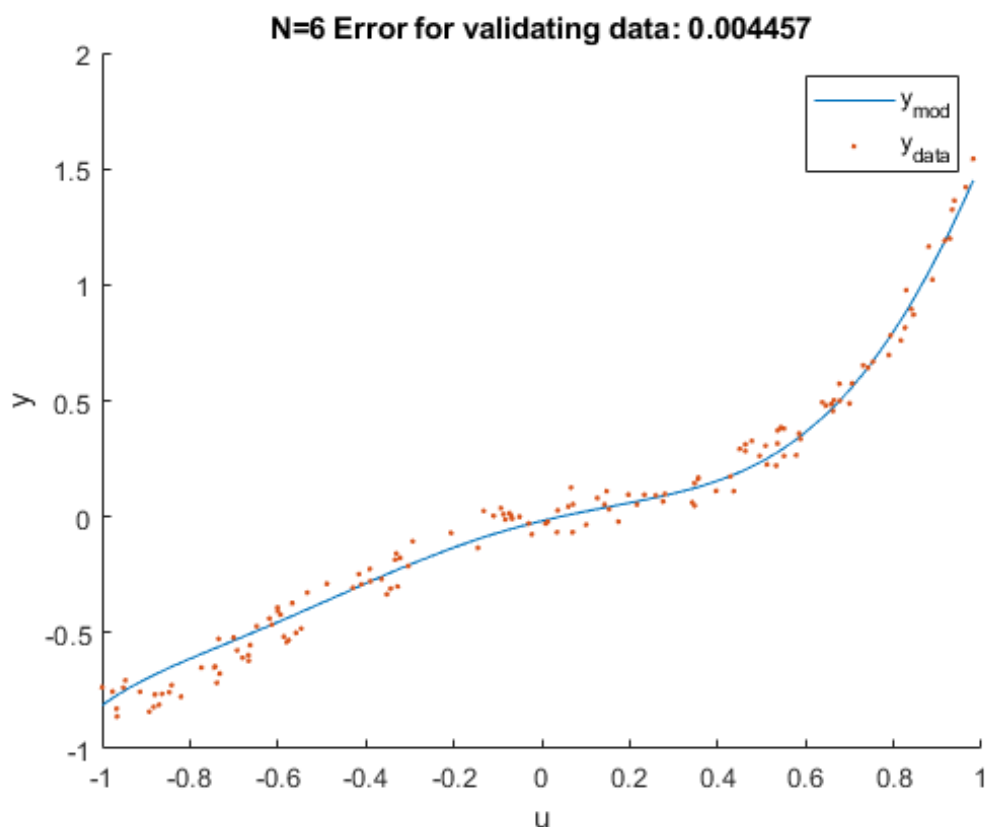
Rysunek 14: Porównanie modelu statycznego 5. rzędu z danymi uczącymi.



Rysunek 15: Porównanie modelu statycznego 5. rzędu z danymi weryfikującymi.



Rysunek 16: Porównanie modelu statycznego 6. rzędu z danymi uczącymi.



Rysunek 17: Porównanie modelu statycznego 6. rzędu z danymi weryfikującymi.

2.3 Podsumowanie

Jako najlepszy model wybrany został model o 4. stopniu wielomianu. Jest to model o najwyższym stopniu, dla którego obserwujemy malejące wartości błędu dla zbioru weryfikującego, to znaczy, że wszystkie modele wyższego stopnia są przewymiarowane, przez co zbyt dokładnie dopasowują się do danych zawartych w zbiorze uczącym. Ponadto, pod względem wizualnym, przebiegi modeli powyżej 4. stopnia nie różnią się znacząco między sobą, więc ograniczenie złożoności modelu do 4. stopnia jest wskazane.

3 Identyfikacja modeli dynamicznych

W tej sekcji przedstawione zostały wyniki tworzenia modeli dynamicznych o strukturze:

$$y(u) = \sum_{d=1}^D \left(\sum_{i=1}^{n_b} b_{id} u^d(k-i) + \sum_{i=1}^{n_a} a_{id} y^d(k-i) \right) \quad (2)$$

gdzie:

- N - stopień wielomianu modelu,
- a - współczynniki modelu związane z poprzednimi wartościami y,
- b - współczynniki modelu związane z poprzednimi sterowaniami,
- D - rząd dynamiki modelu

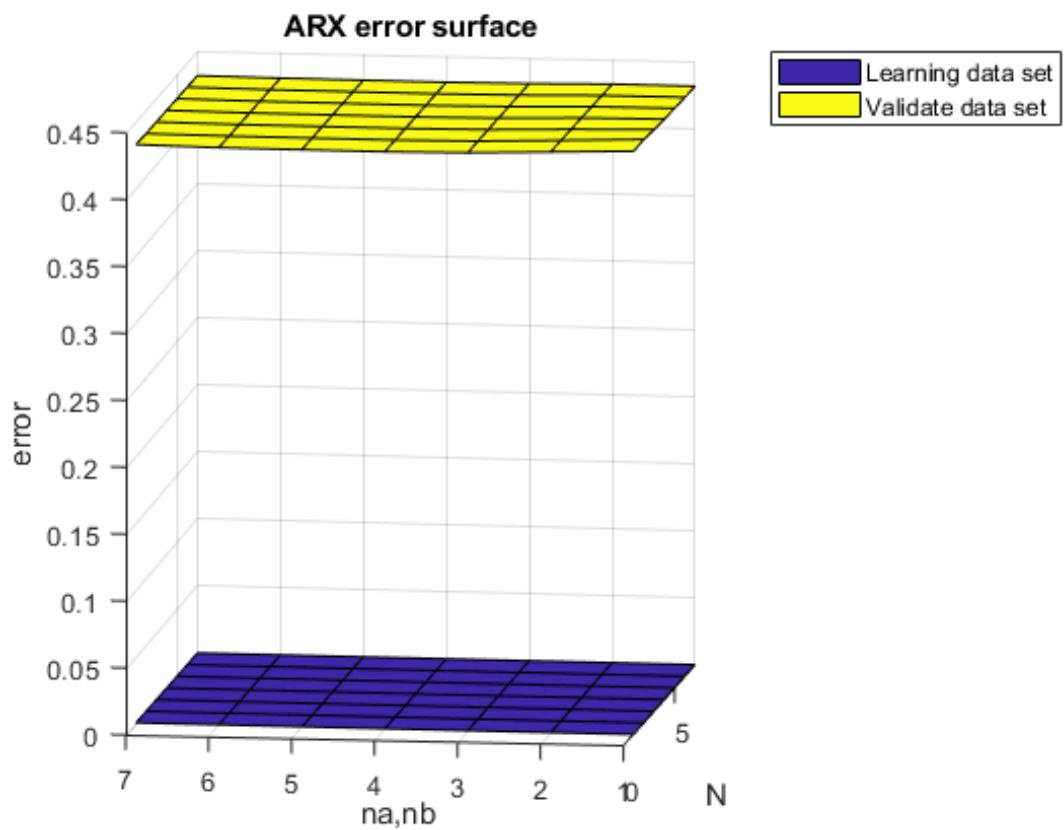
W celu generowania modeli dynamicznych napisany skrypt, który pozwala generować model o dowolnym rozmiarze n_a , n_b oraz stopniu wielomianu. Nie uwzględniano modeli o wyrazach mieszanych. W ostatecznych wynikach, wzięto pod uwagę modele, dla których dynamiczna zarówno wejścia, jak i sprzężenia zwrotnego, jest tego samego rzędu ($n_a = n_b$).

3.1 Zestawienie otrzymanych modeli

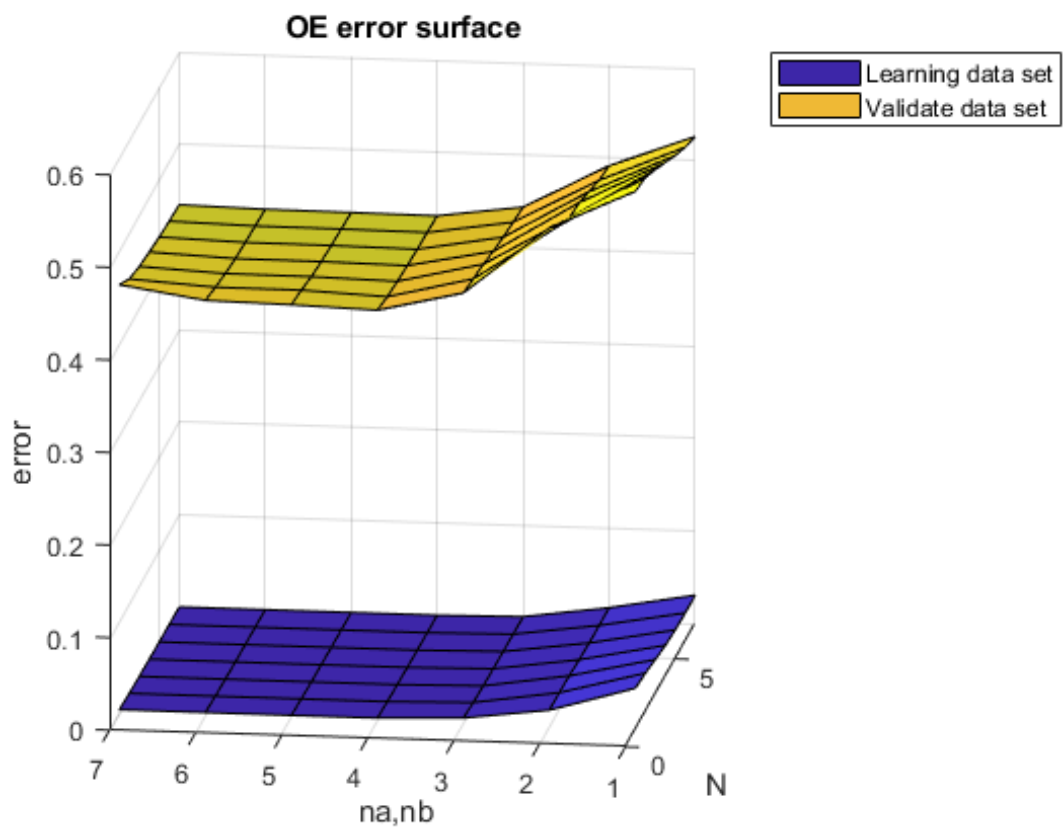
Rząd modelu			ARX		OE	
Rząd wielomianu	Rząd dynamiki	Ilość wsp.	$E_{learning}$	E_{ver}	$E_{learning}$	E_{ver}
1	1	2	4.0708e-04	0.4362	0.0443	0.5811
1	2	4	3.8912e-04	0.4363	0.0416	0.5769
1	3	6	3.3780e-04	0.4348	0.0373	0.5667
2	1	4	3.5624e-04	0.4341	0.0177	0.5388
2	2	8	3.0834e-04	0.4340	0.0176	0.5221
2	3	12	2.8132e-04	0.4336	0.0168	0.5113
3	1	6	3.3404e-04	0.4321	0.0061	0.4654
3	2	12	2.7043e-04	0.4320	0.0039	0.4616
3	3	18	2.3980e-04	0.4319	0.0029	0.4585
4	1	8	3.2331e-04	0.4314	0.0031	0.4438
4	2	16	2.5202e-04	0.4313	0.0019	0.4393
4	3	2	2.2530e-04	0.4313	0.0013	0.4369
5	1	5	3.2286e-04	0.4314	0.0030	0.4466
5	2	20	2.5090e-04	0.4314	0.0018	0.4434
5	3	30	2.2308e-04	0.4313	0.0011	0.4390

Tablica 2: Zestawienie modeli dynamicznych otrzymanych metodą najmniejszych kwadratów.

Poniżej przedstawiono również wykresy przedstawiające wartości poszczególnych błędów (aby poprawić wrażenia wizualne - również dla modeli nie uwzględnionych w powyższej tabeli).



Rysunek 18: Wykresy błędów wybranych modeli dla pracy w trybie bez rekurencji.

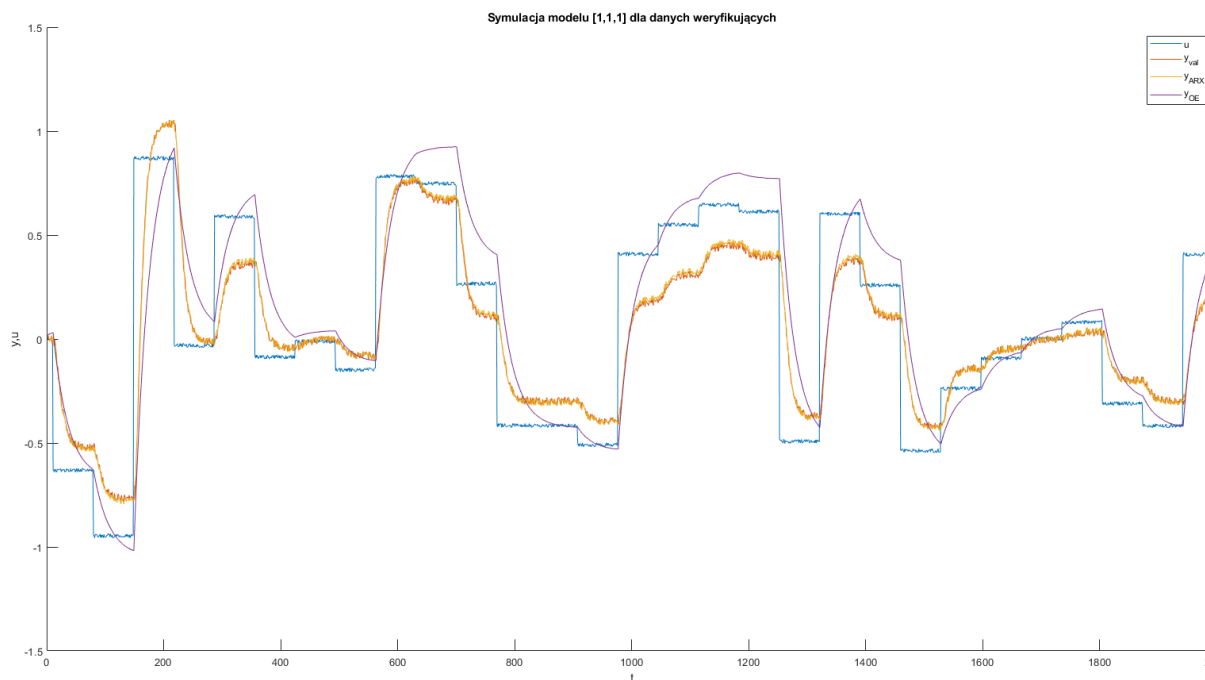


Rysunek 19: Wykresy błędów wybranych modeli dla pracy w trybie z rekurencją.

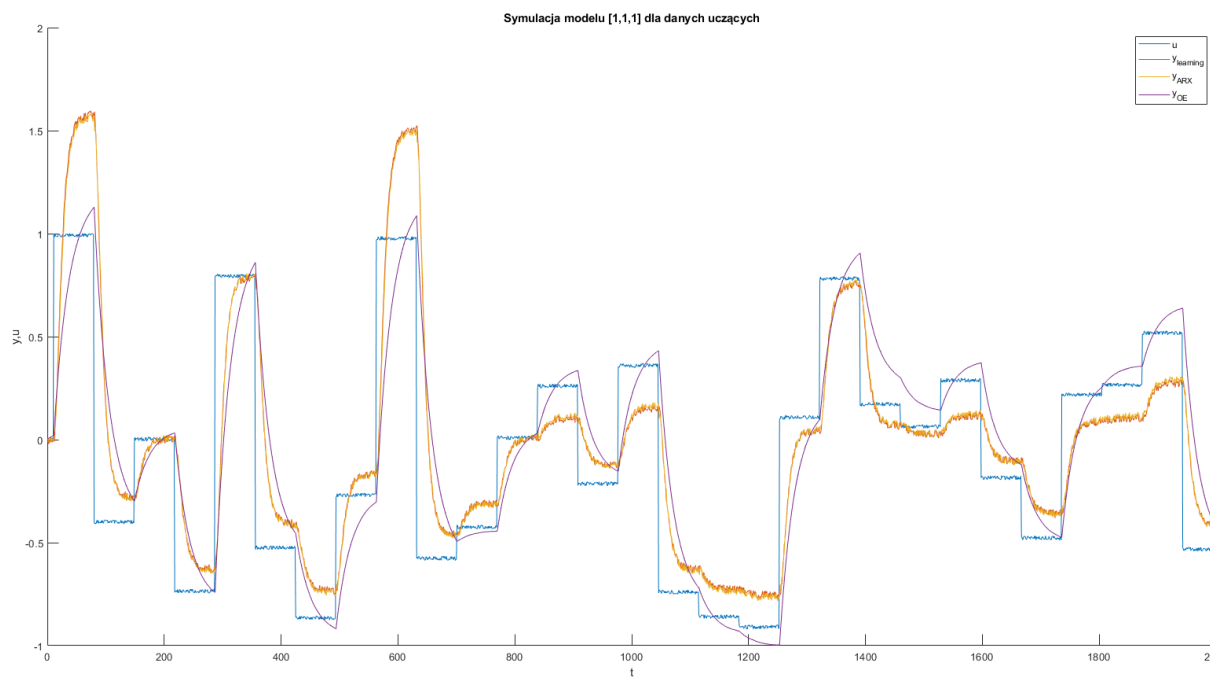
3.2 Wizualna ocena otrzymanych modeli

W opisie modeli przyjęto oznaczenia, które jednoznacznie identyfikują model wypisując jego wartości charakterystyczne, czyli $[n_a, n_b, \text{stopień}]$. Na przykład model drugiego rzędu oraz stopniu wielomianu równym 3, będzie oznaczony $[2, 2, 3]$.

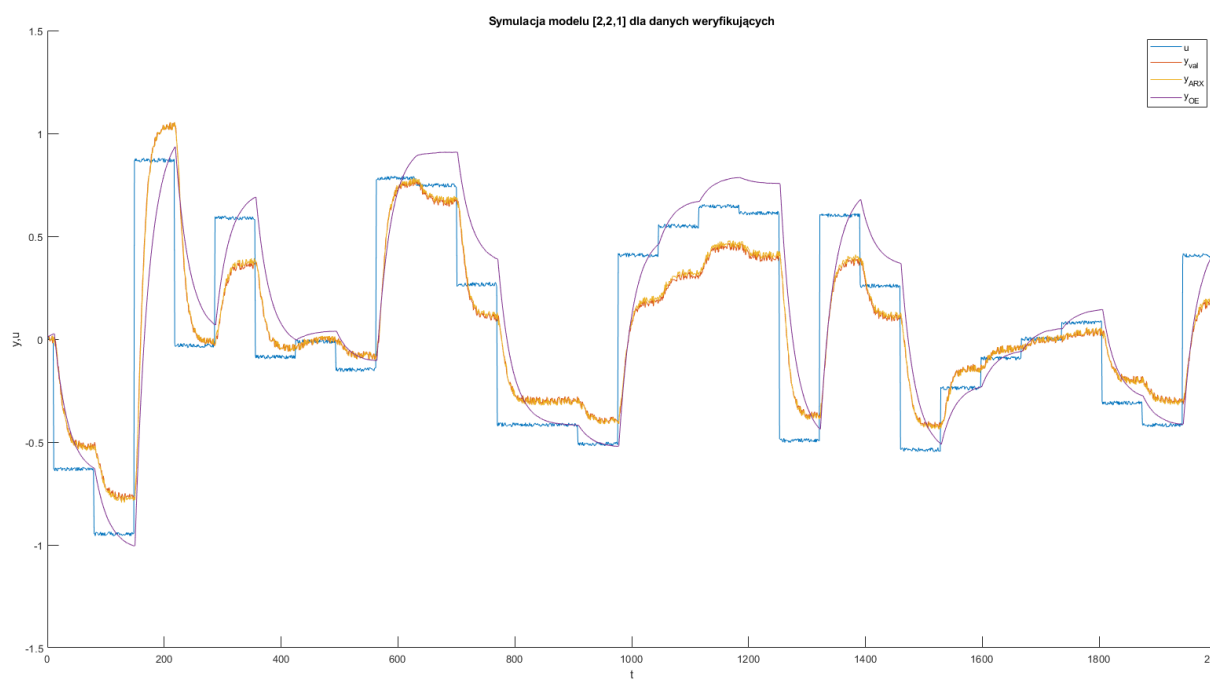
3.2.1 Modele z wielomianem 1. stopnia



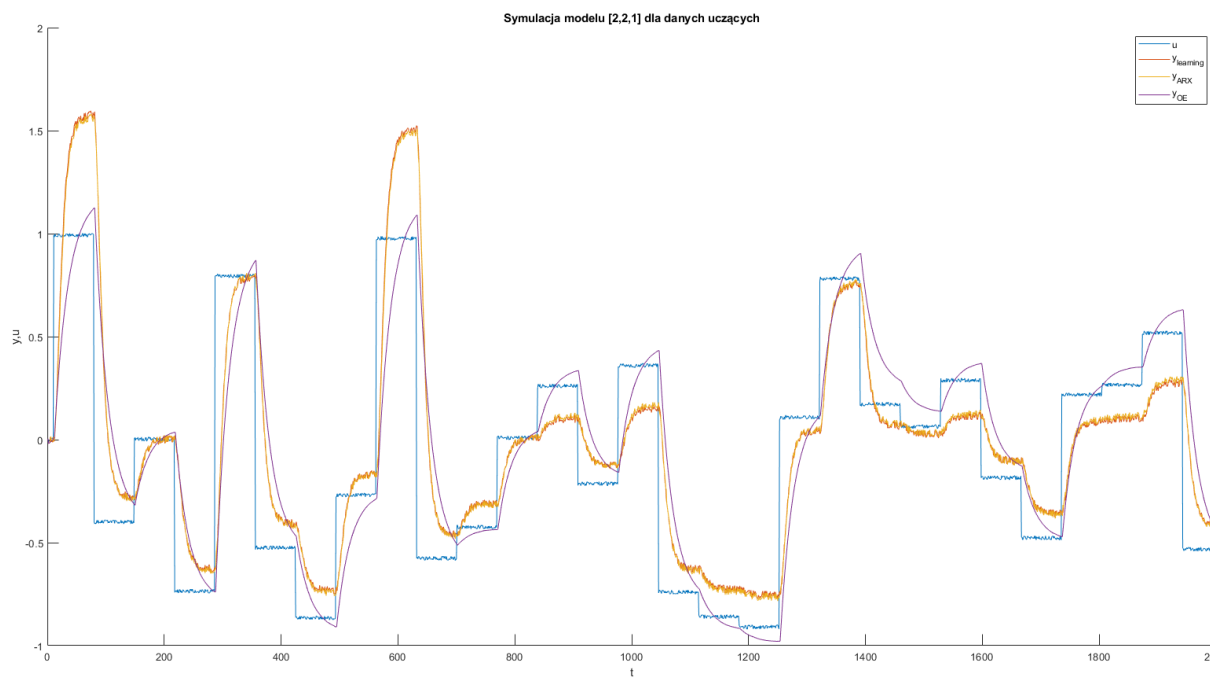
Rysunek 20: Działanie modelu dynamicznego o 1. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 1. dla zbioru weryfikującego.



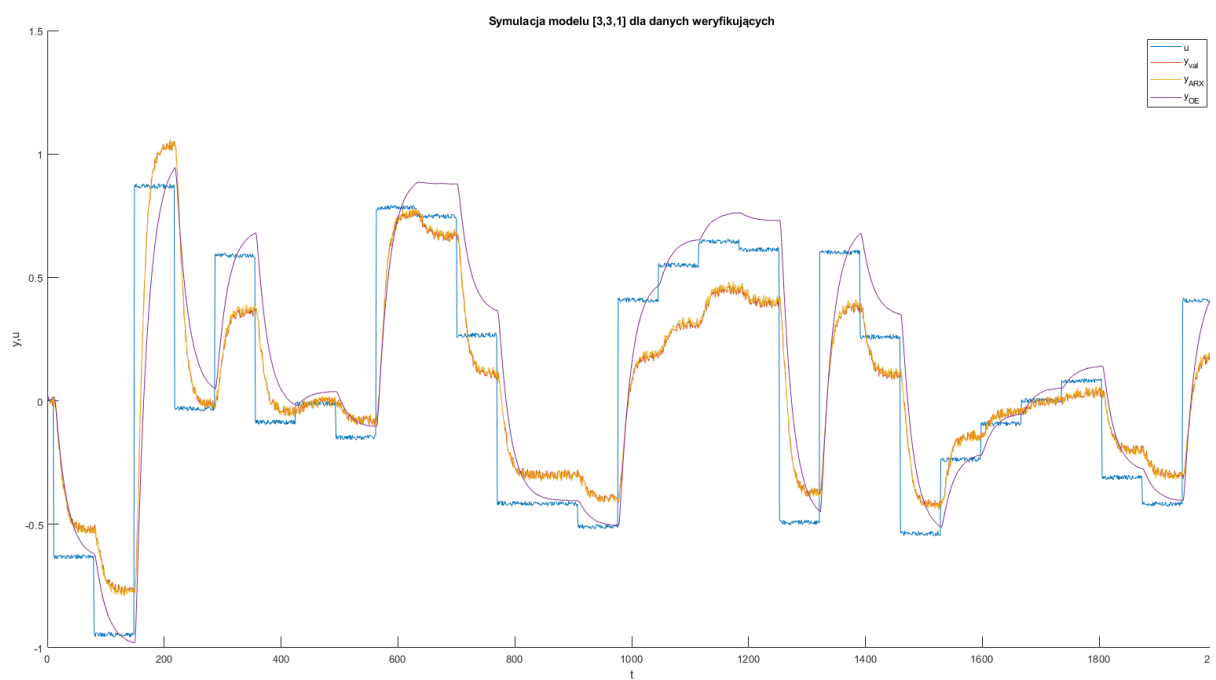
Rysunek 21: Działanie modelu dynamicznego o 1. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 1. dla zbioru uczącego.



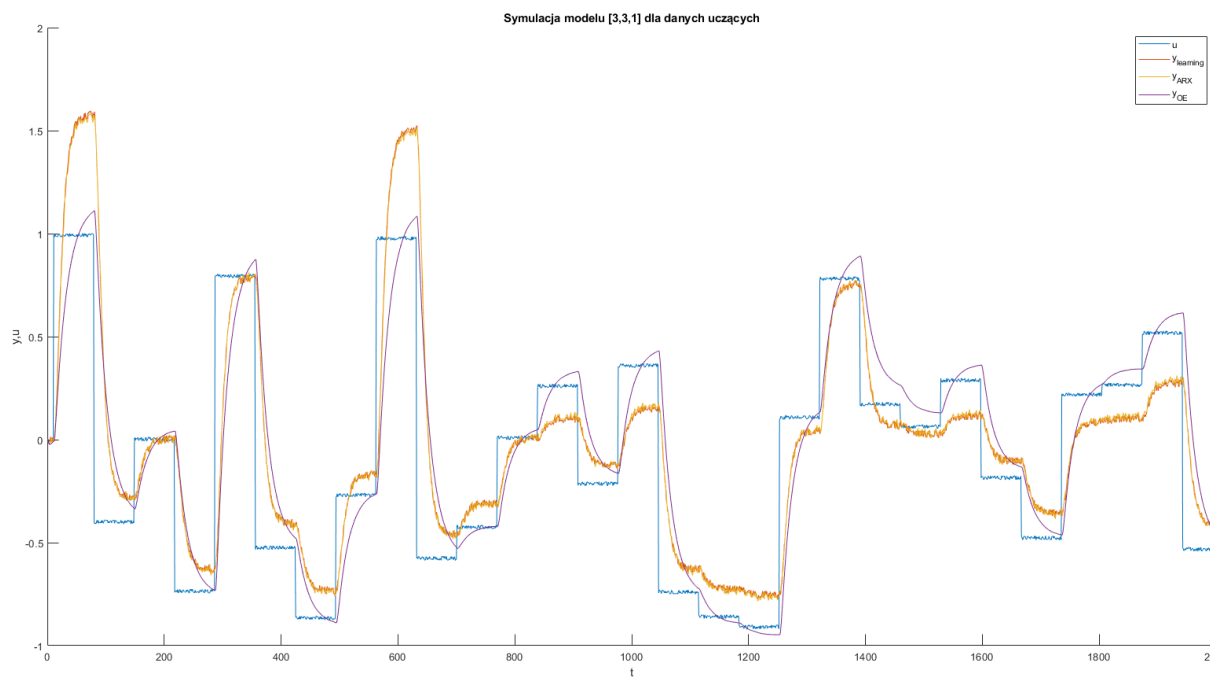
Rysunek 22: Działanie modelu dynamicznego o 1. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 2. dla zbioru weryfikującego.



Rysunek 23: Działanie modelu dynamicznego o 1. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 2. dla zbioru uczącego.

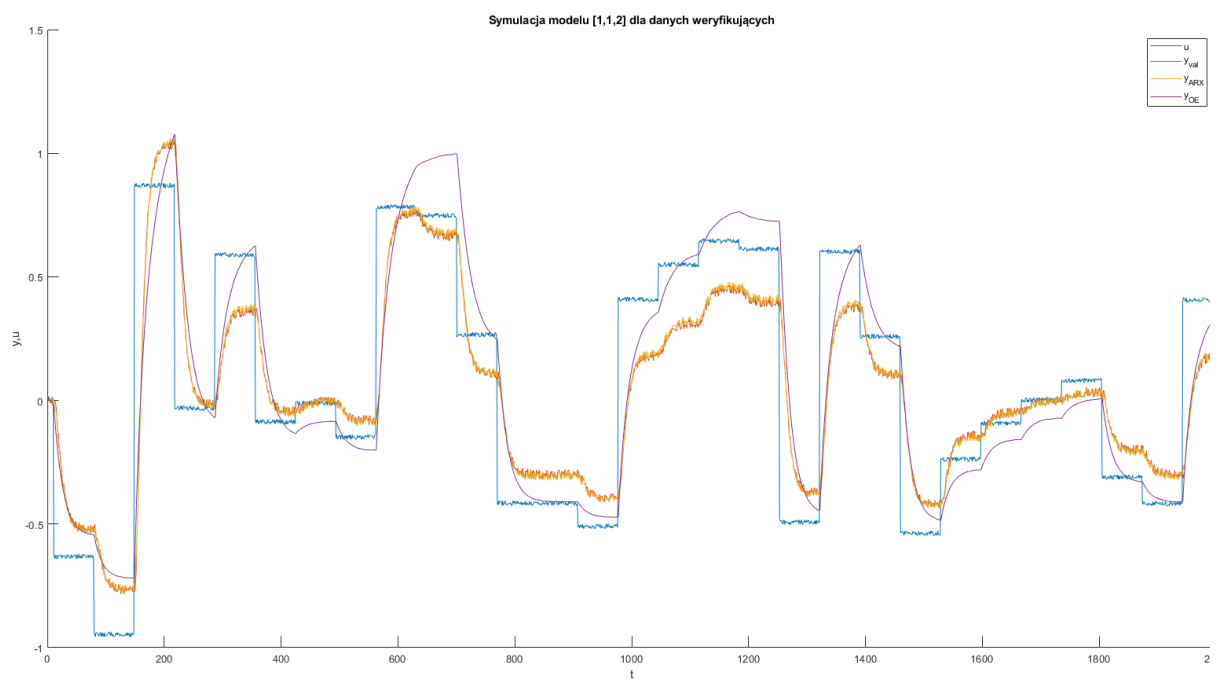


Rysunek 24: Działanie modelu dynamicznego o 1. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 3. dla zbioru weryfikującego.

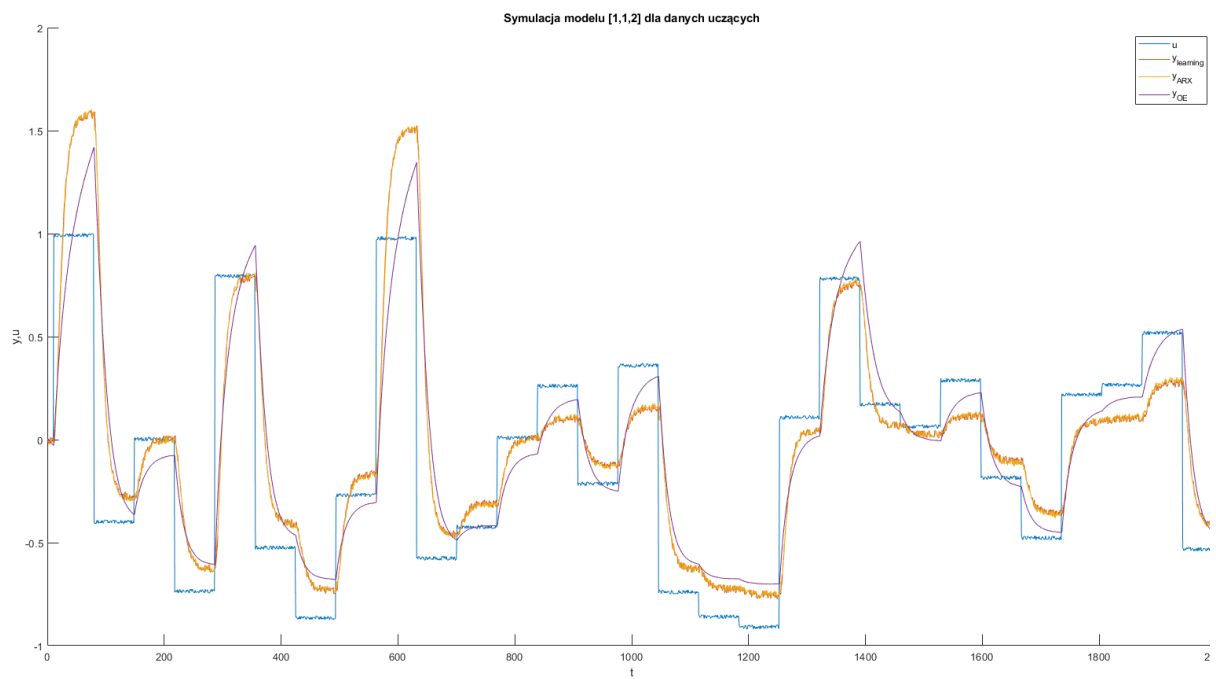


Rysunek 25: Działanie modelu dynamicznego o 1. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 3. dla zbioru uczącego.

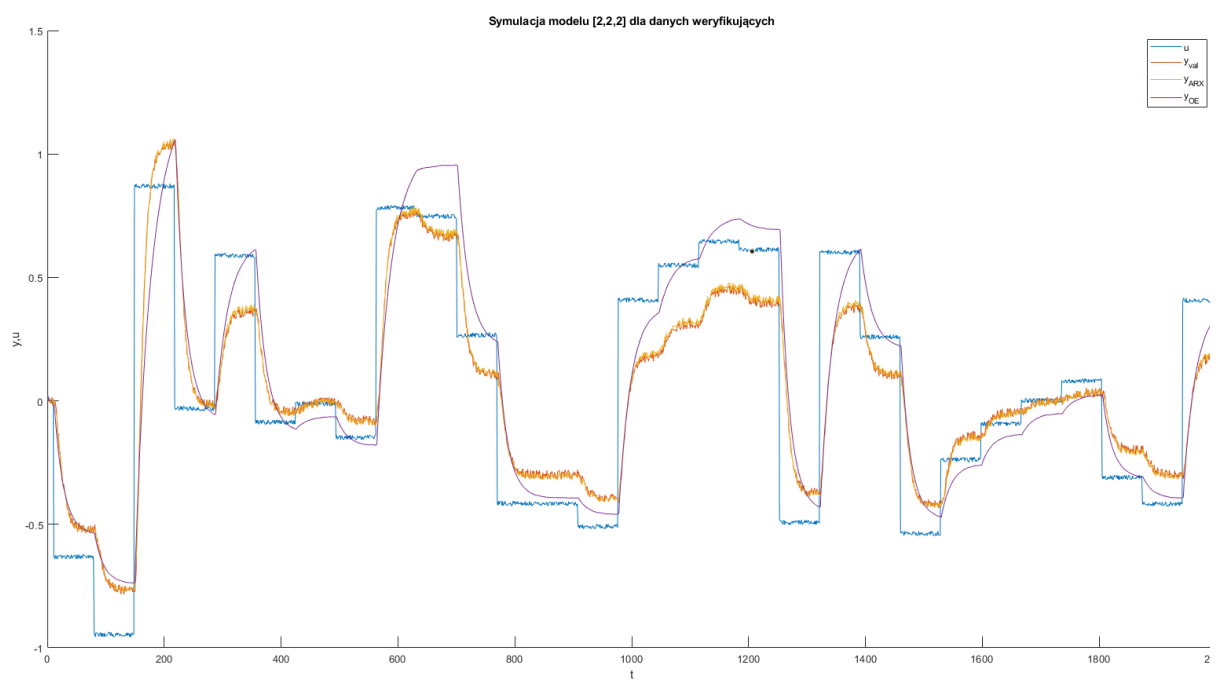
3.2.2 Modele z wielomianem 2. stopnia



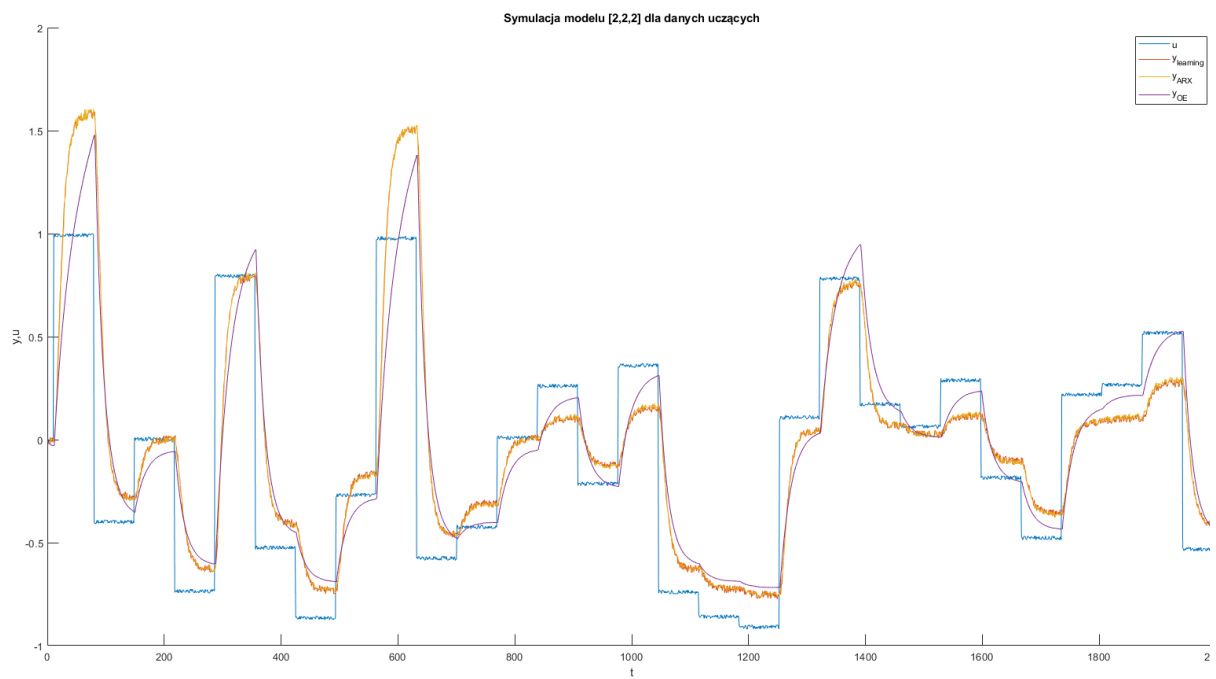
Rysunek 26: Działanie modelu dynamicznego o 2. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 1. dla zbioru weryfikującego.



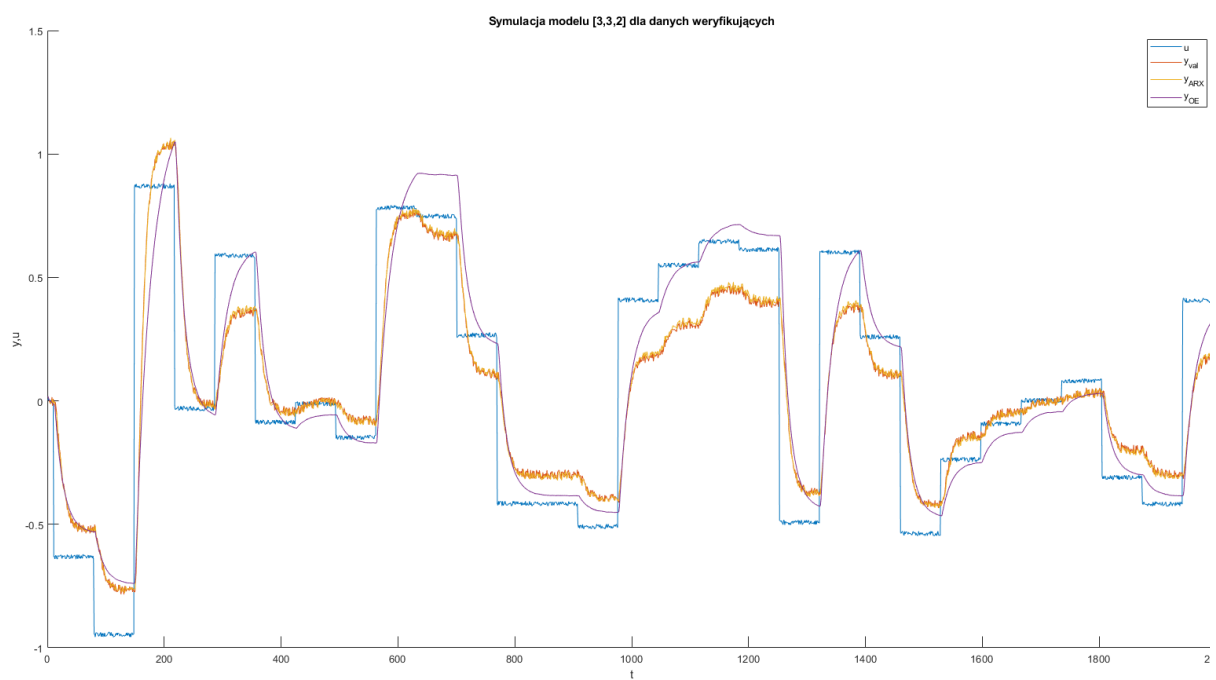
Rysunek 27: Działanie modelu dynamicznego o 2. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 1. dla zbioru uczącego.



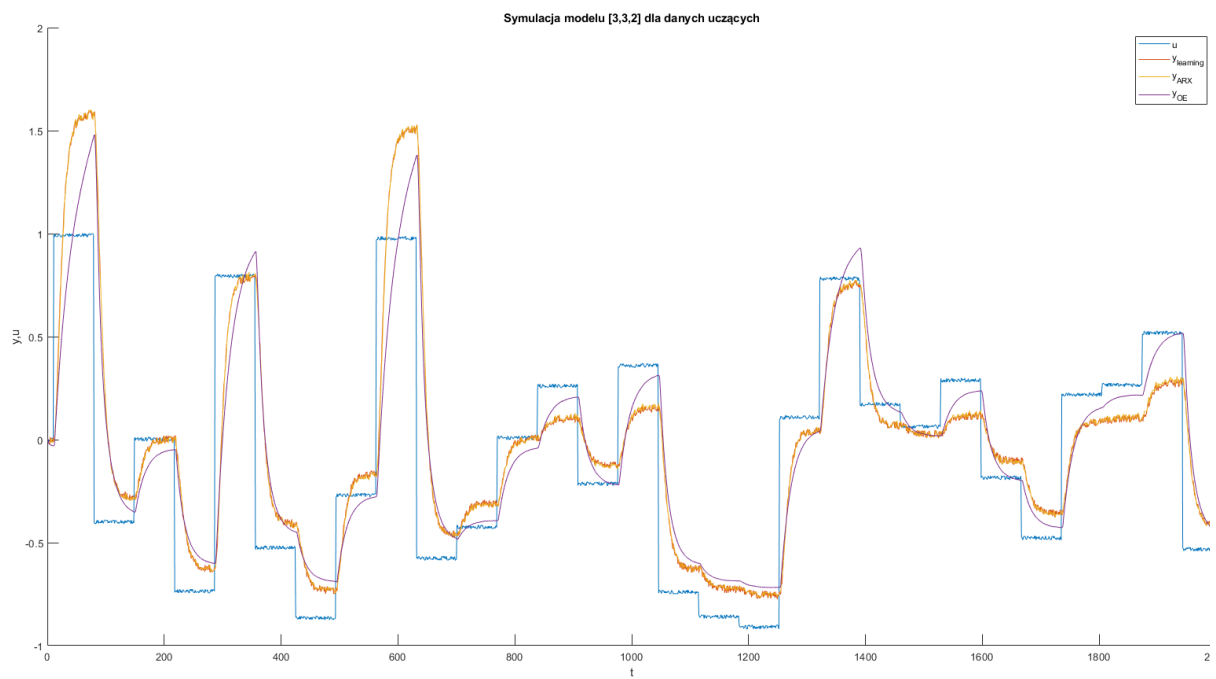
Rysunek 28: Działanie modelu dynamicznego o 2. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 2. dla zbioru weryfikującego.



Rysunek 29: Działanie modelu dynamicznego o 2. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 2. dla zbioru uczącego.

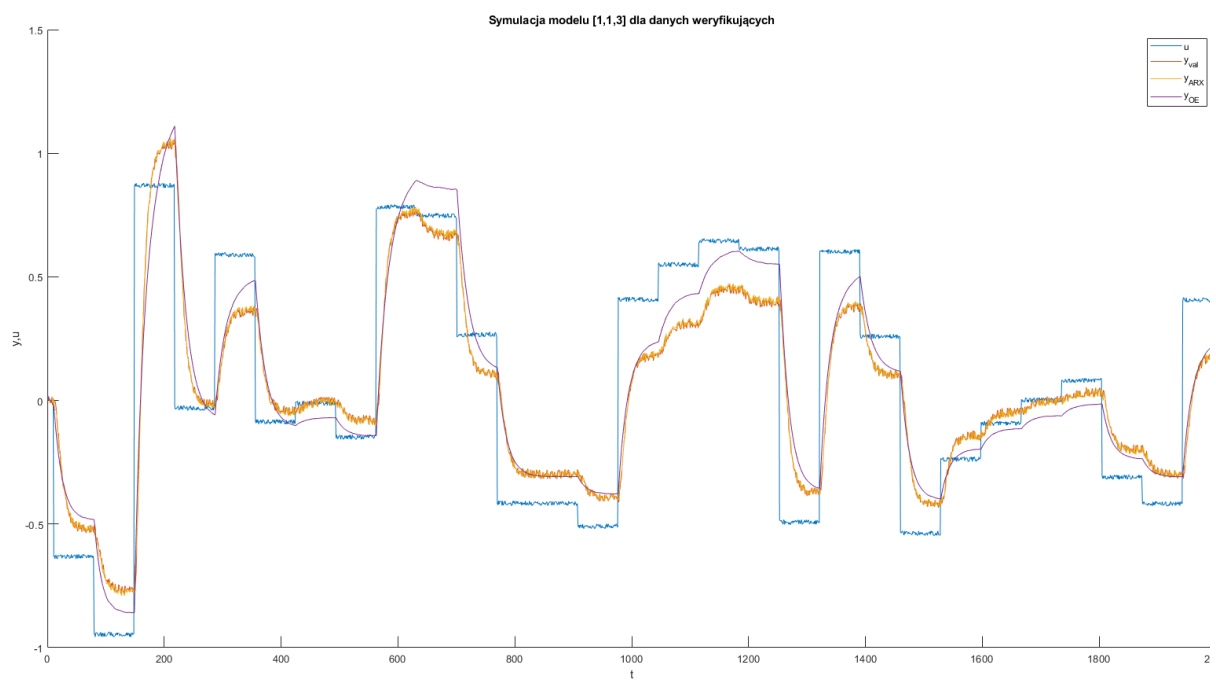


Rysunek 30: Działanie modelu dynamicznego o 2. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 3. dla zbioru weryfikującego.

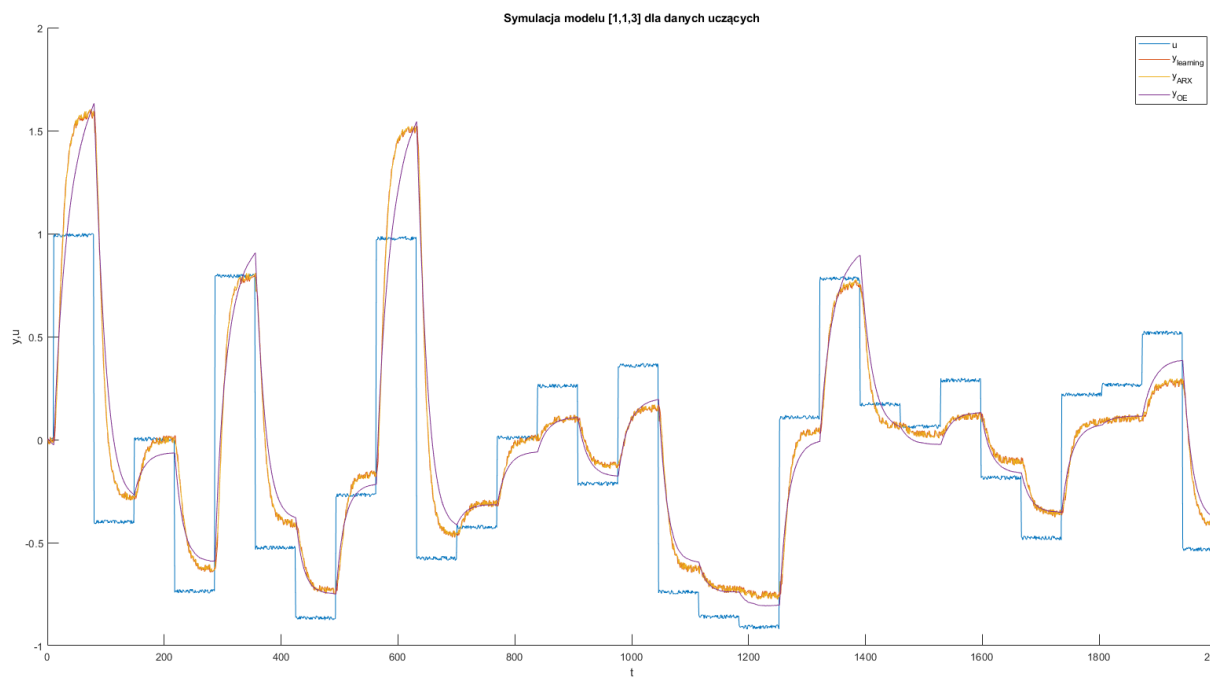


Rysunek 31: Działanie modelu dynamicznego o 2. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 3. dla zbioru uczącego.

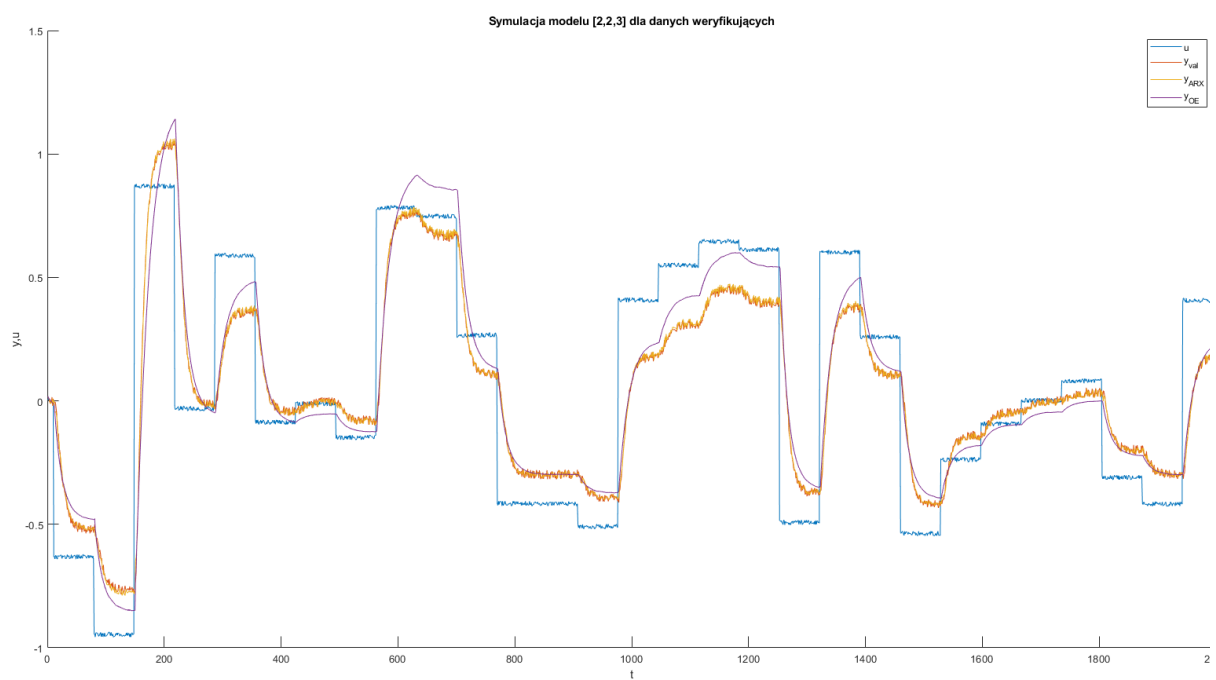
3.2.3 Modele z wielomianem 3. stopnia



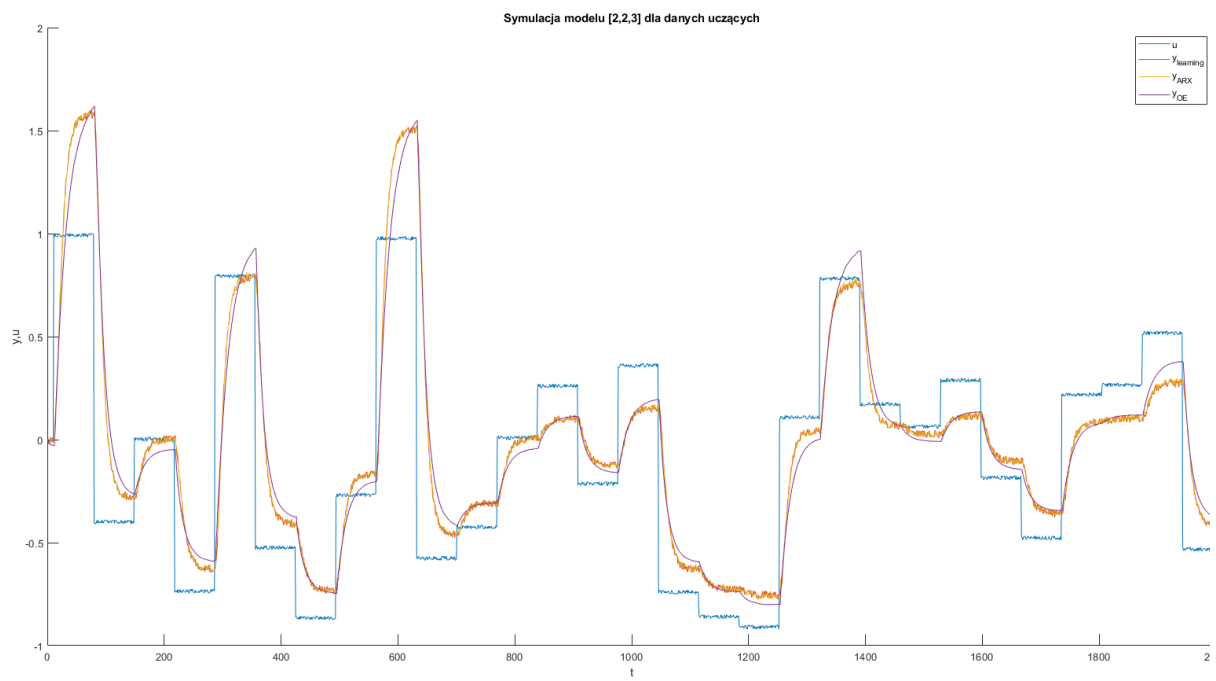
Rysunek 32: Działanie modelu dynamicznego o 3. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 1. dla zbioru weryfikującego.



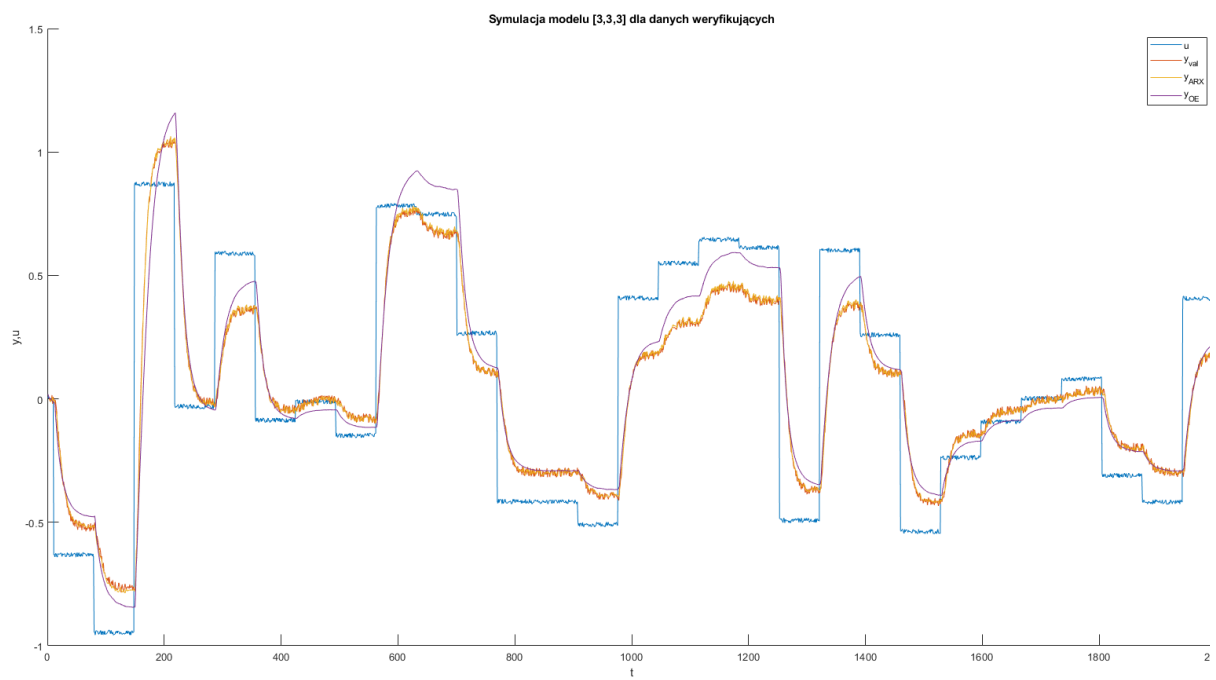
Rysunek 33: Działanie modelu dynamicznego o 3. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 1. dla zbioru uczącego.



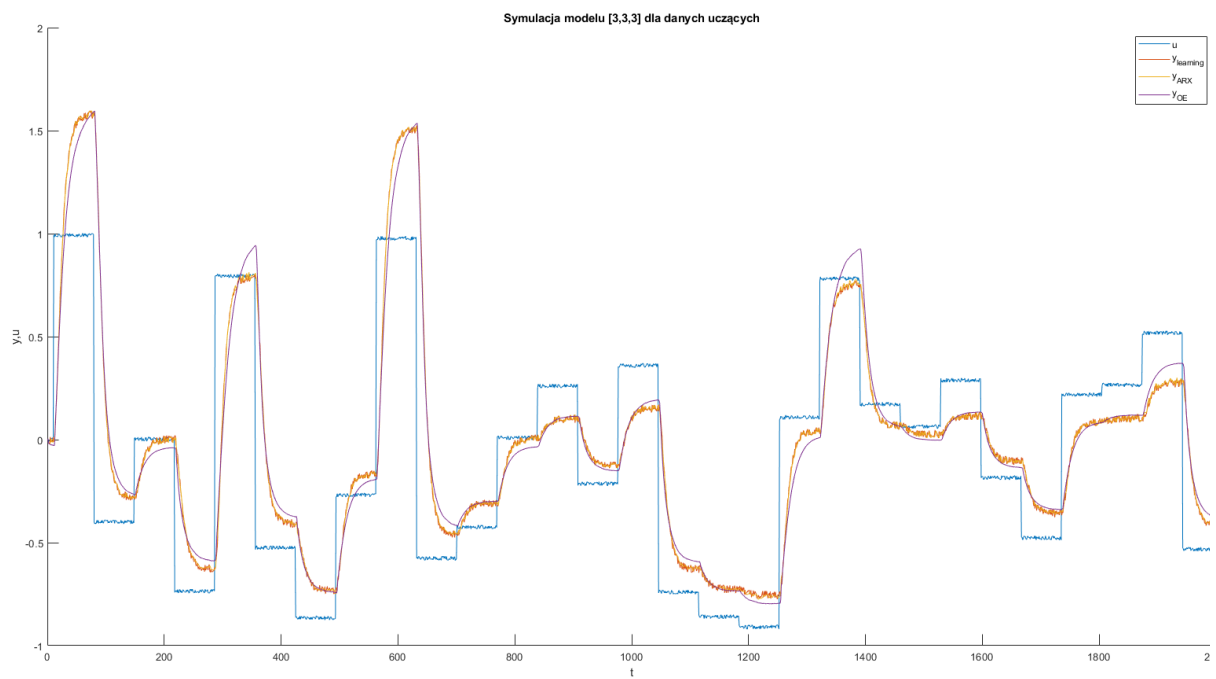
Rysunek 34: Działanie modelu dynamicznego o 3. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 2. dla zbioru weryfikującego.



Rysunek 35: Działanie modelu dynamicznego o 3. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 2. dla zbioru uczącego.

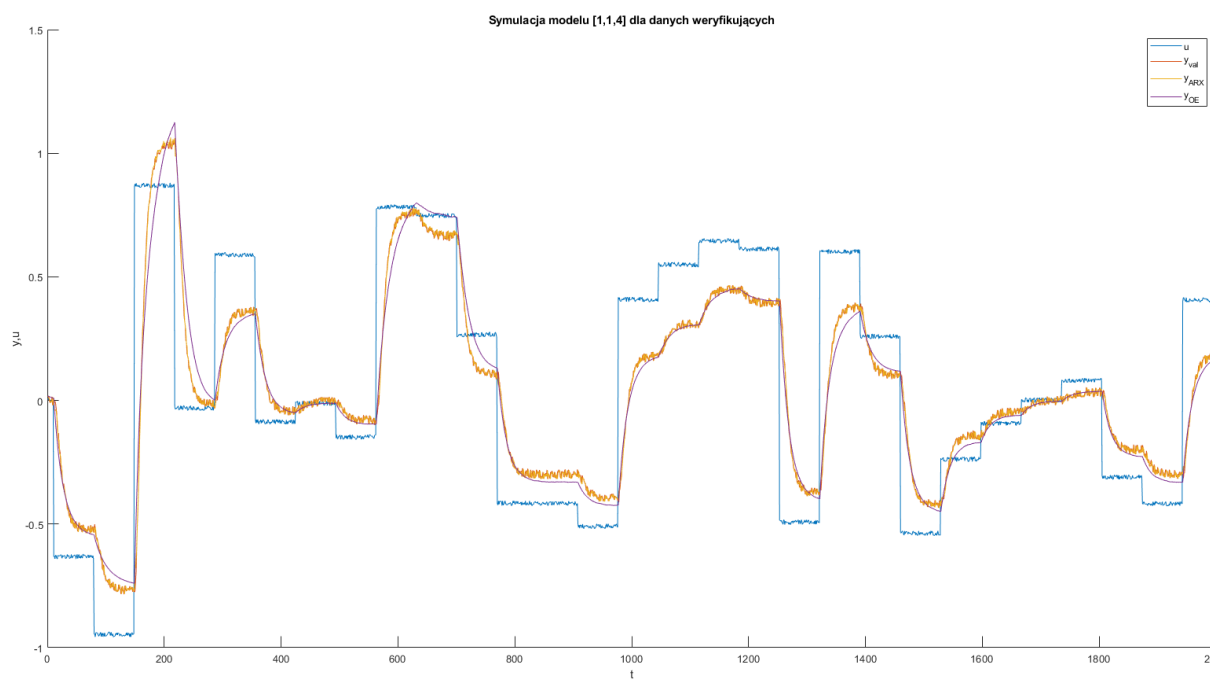


Rysunek 36: Działanie modelu dynamicznego o 3. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 3. dla zbioru weryfikującego.

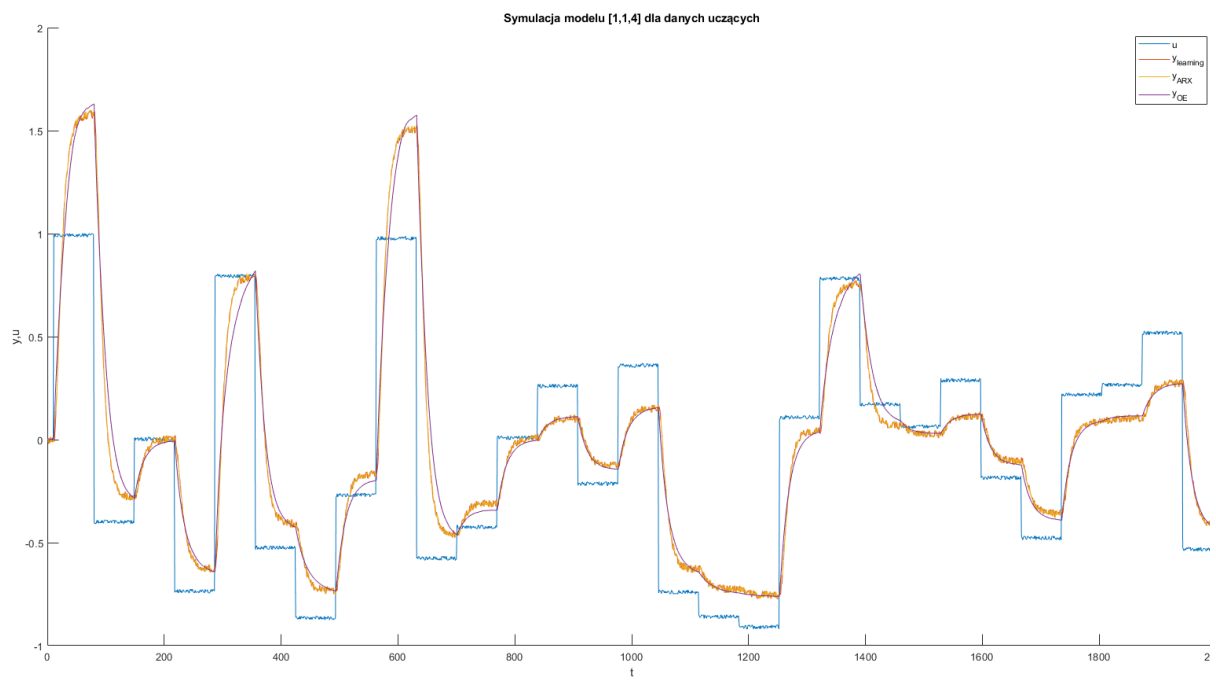


Rysunek 37: Działanie modelu dynamicznego o 3. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 3. dla zbioru uczącego.

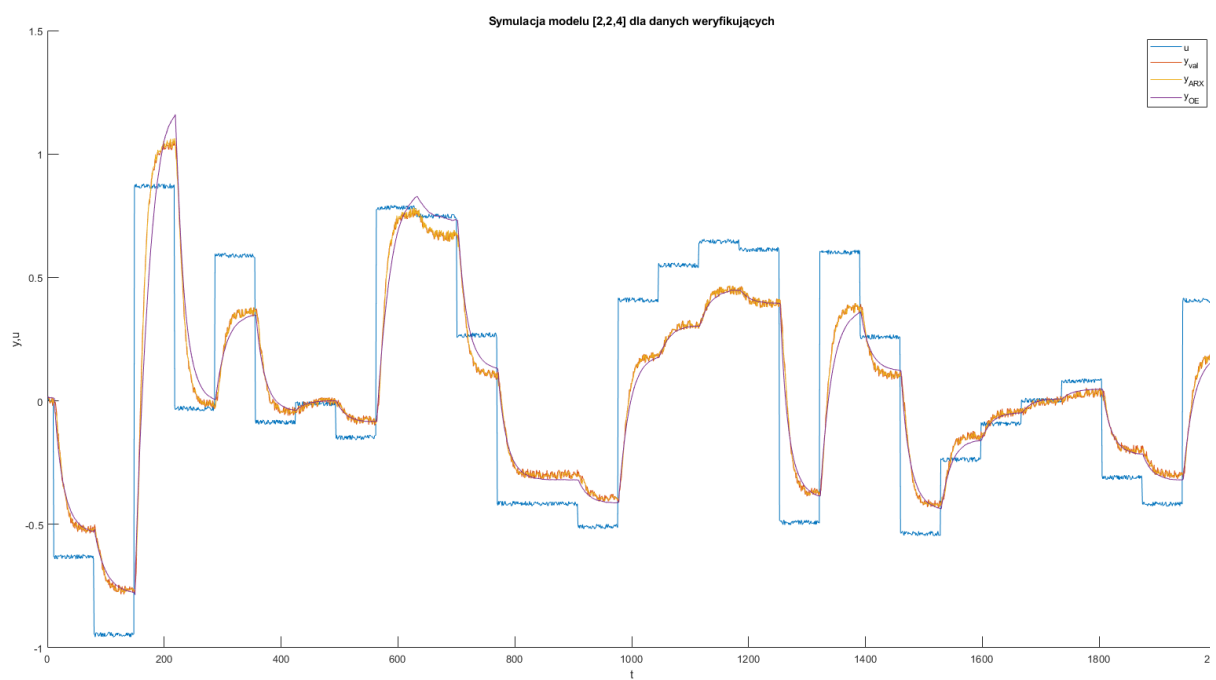
3.2.4 Modele z wielomianem 4. stopnia



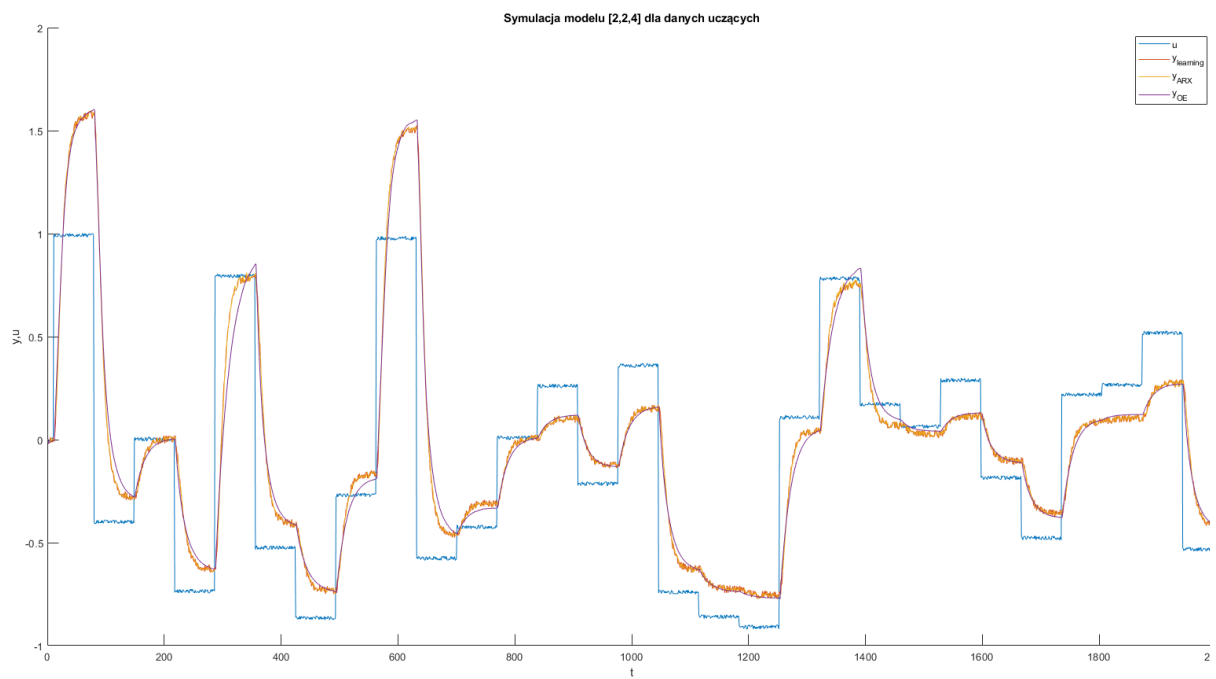
Rysunek 38: Działanie modelu dynamicznego o 4. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 1. dla zbioru weryfikującego.



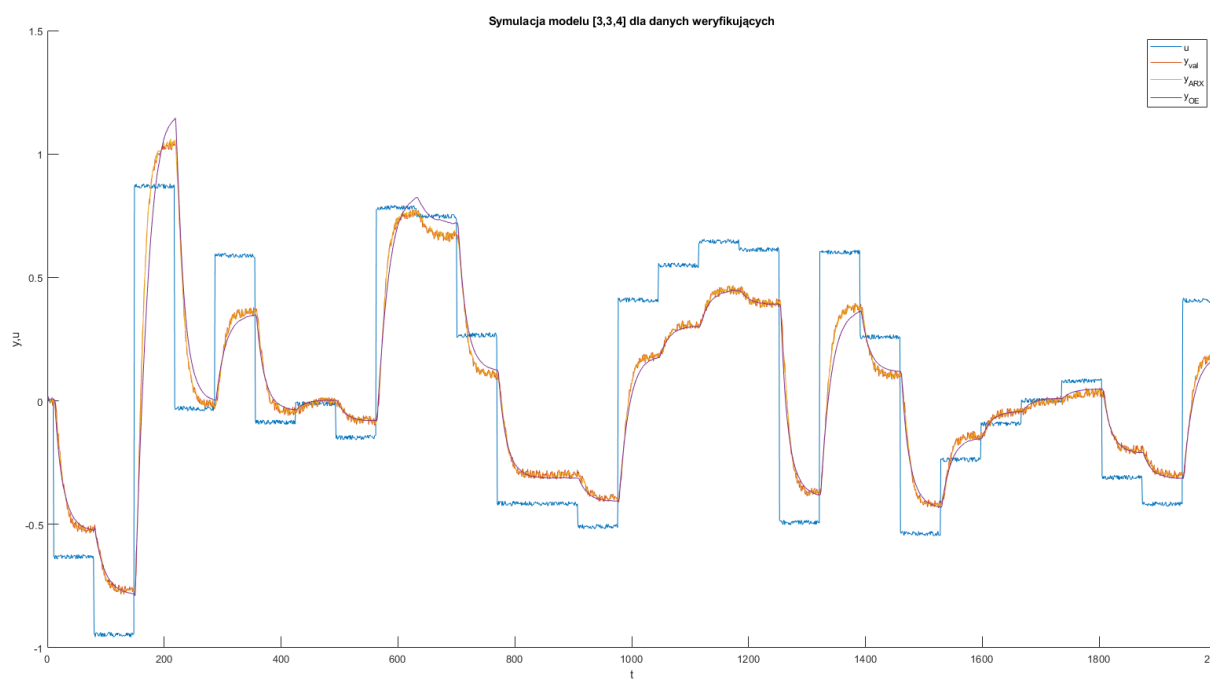
Rysunek 39: Działanie modelu dynamicznego o 4. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 1. dla zbioru uczącego.



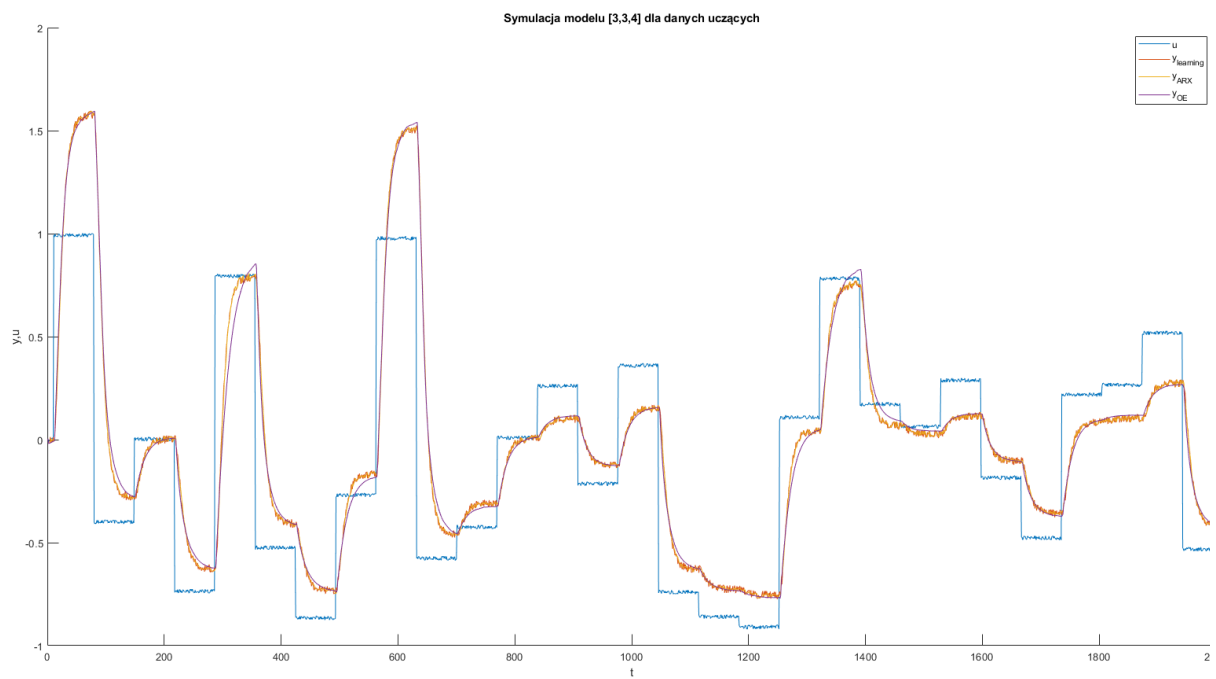
Rysunek 40: Działanie modelu dynamicznego o 4. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 2. dla zbioru weryfikującego.



Rysunek 41: Działanie modelu dynamicznego o 4. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 2. dla zbioru uczącego.

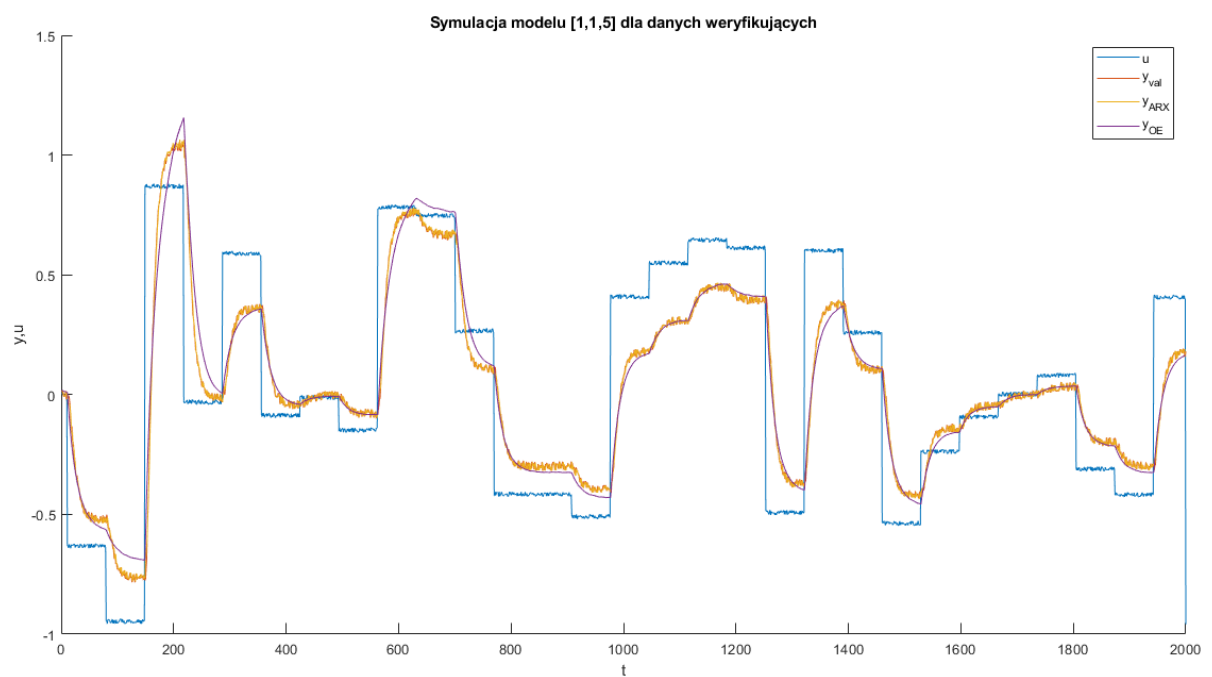


Rysunek 42: Działanie modelu dynamicznego o 4. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 3. dla zbioru weryfikującego.

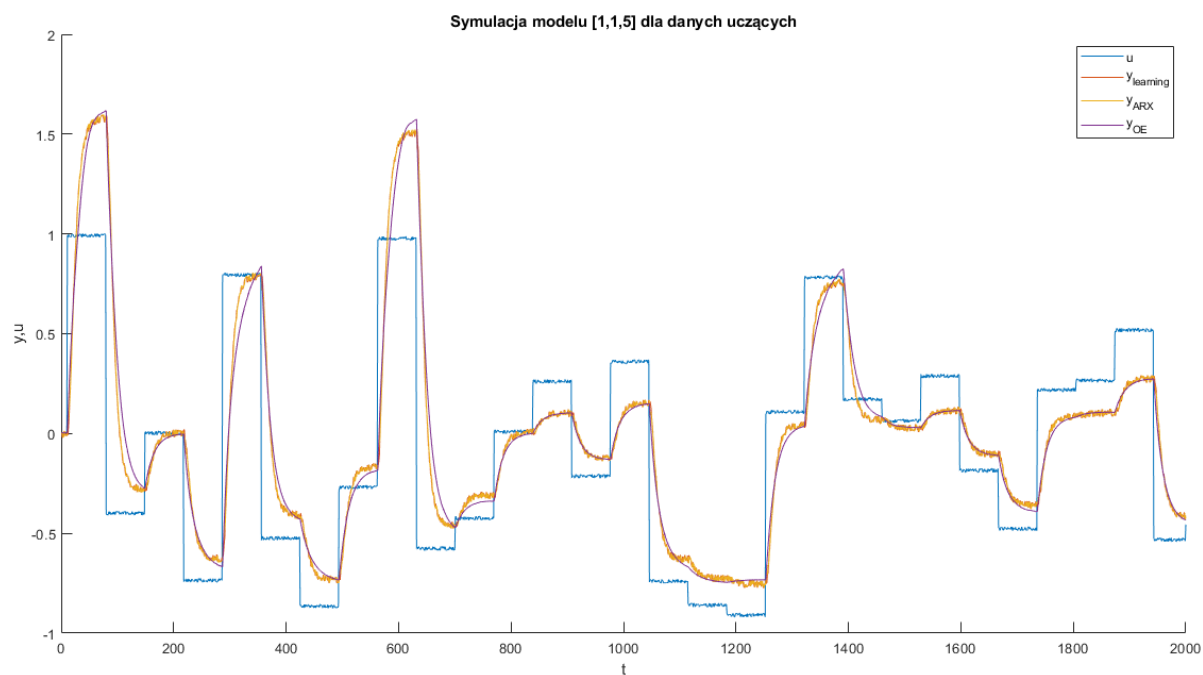


Rysunek 43: Działanie modelu dynamicznego o 4. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 3. dla zbioru uczącego.

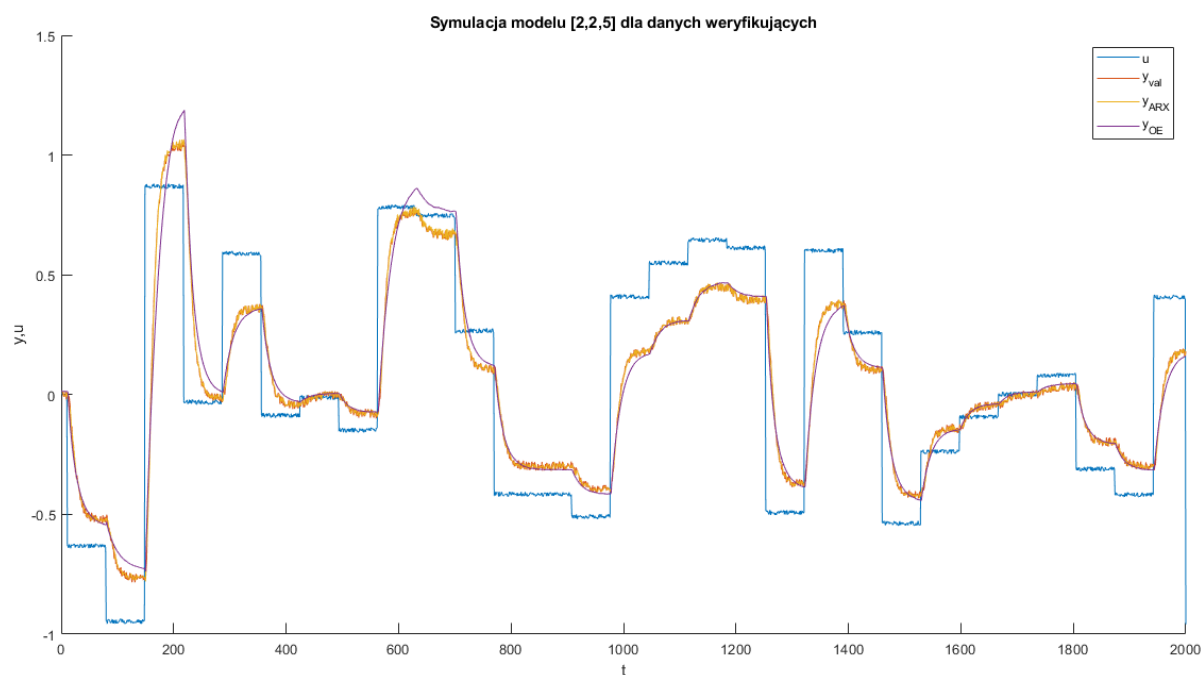
3.2.5 Modele z wielomianem 5. stopnia



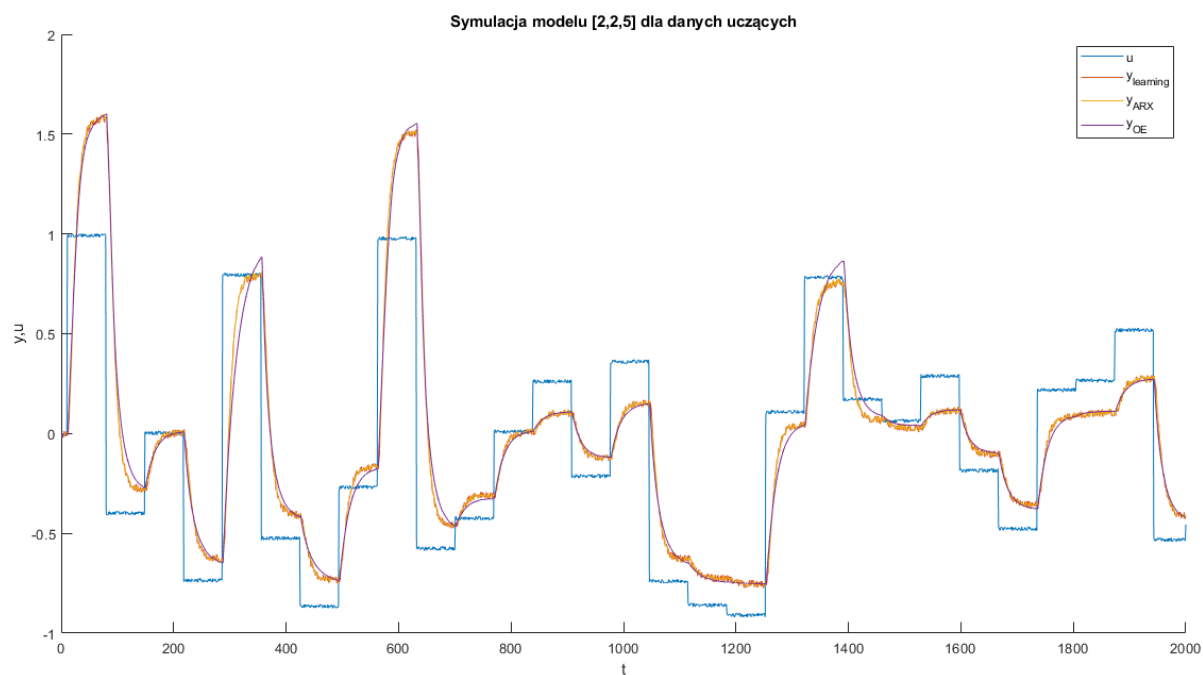
Rysunek 44: Działanie modelu dynamicznego o 5. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 1. dla zbioru weryfikującego.



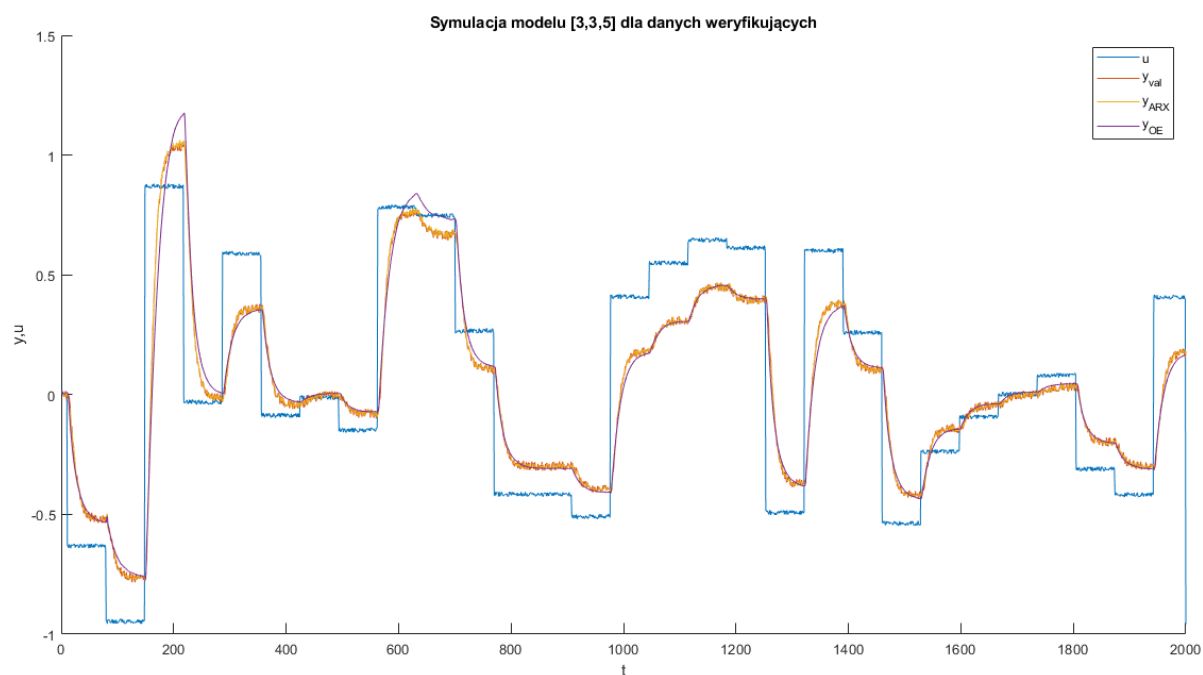
Rysunek 45: Działanie modelu dynamicznego o 5. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 1. dla zbioru uczącego.



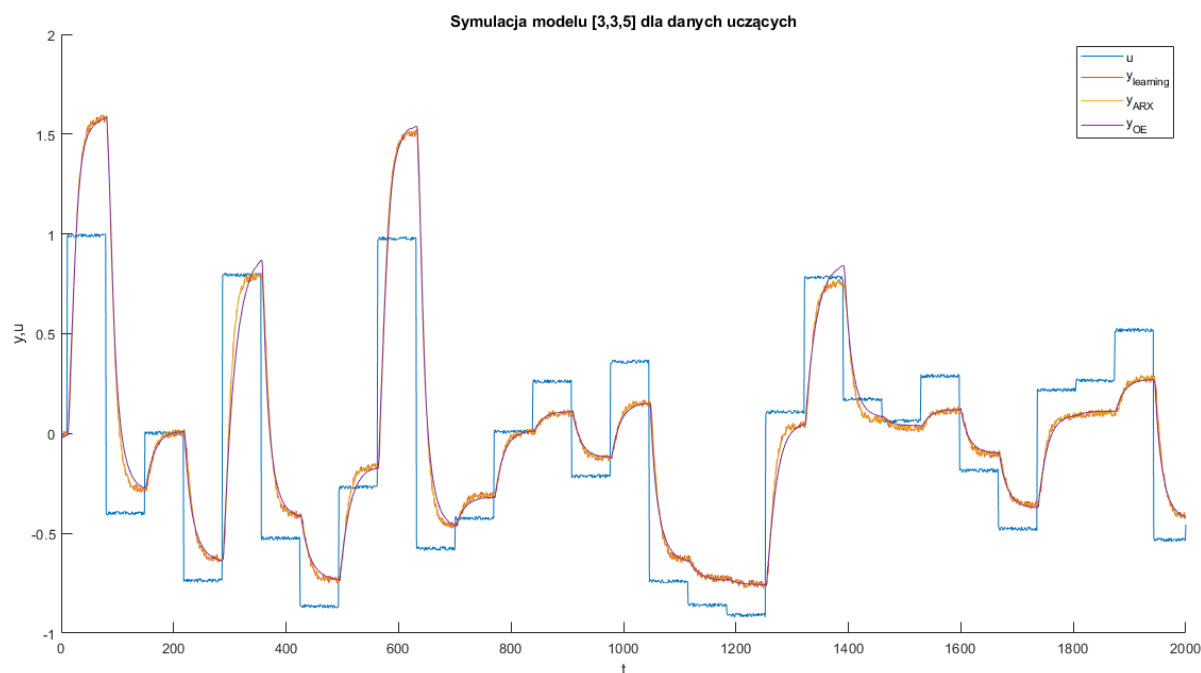
Rysunek 46: Działanie modelu dynamicznego o 5. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 2. dla zbioru weryfikującego.



Rysunek 47: Działanie modelu dynamicznego o 5. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 2. dla zbioru uczącego.



Rysunek 48: Działanie modelu dynamicznego o 5. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 3. dla zbioru weryfikującego.



Rysunek 49: Działanie modelu dynamicznego o 5. stopniu wielomianu i rzędowi dynamiki 3. dla zbioru uczącego.

3.3 Podsumowanie

Jako najlepszy model dynamiczny został wybrany model z dynamiką 3. rzędu oraz wielomianem 4. stopnia. Jak widać na wykresie przedstawiającym błędy poszczególnych modeli, w szczególności w trybie rekurencyjnym, modele z wielomianem o 4. stopniu cechują się najmniejszą wartością błędu, to znaczy, że modele o wyższych stopniach są przewymiarowane i zbyt dopasowane do danych uczących. Dlatego właśnie przy wyborze najlepszego modelu, pod uwagę brano modele właśnie 4. stopnia.

Zwiększanie rzędu modelu natomiast powoduje nieznaczne zmniejszanie wartości błędu. Biorąc pod uwagę fakt, żeby ograniczyć ilość parametrów modelu, na podstawie wizualnej oceny przebiegów wybrano model o dynamice 3. rzędu.

4 Charakterystyka statyczna na podstawie modelu dynamicznego

Charakterystykę statyczną na podstawie modelu dynamicznego czwartego stopnia i dynamicie trzeciego rzędu wyznaczono obliczając dla kolejnych wartości sterowania z przedziału $\langle -1; 1 \rangle$ wartość y spełniającą równanie:

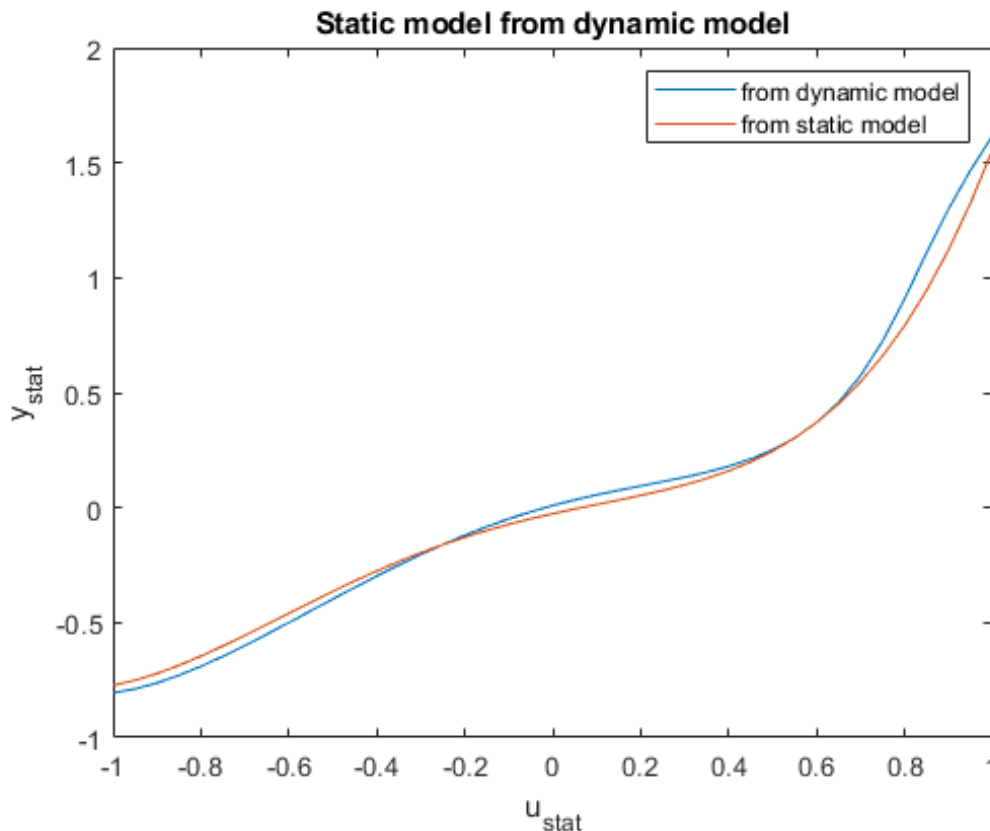
$$y - y_{mod} = y - f(u, u, u, y, y, y) = 0 \quad (3)$$

ponieważ w stanie statycznym wartość sygnału sterowania oraz wyjście modelu mają stałą wartość.

$$u(k-1) = u(k-2) = u(k-3) = u \quad (4)$$

$$y(k-1) = y(k-2) = y(k-3) = y \quad (5)$$

Równanie to rozwiązano przy użyciu solvera *fsolve* programu Matlab. Jest to solver iteracyjny, wymaga więc określenia punktu początkowego rozwiązania. Obliczenia powtórzono dla różnych punktów początkowych z przedziału $\langle -1, 1 \rangle$, za każdym razem otrzymując identyczną charakterystykę. Przedstawiono ją na poniższym wykresie, a porównując ją jednocześnie z charakterystyką modelu statycznego z zadania 1.

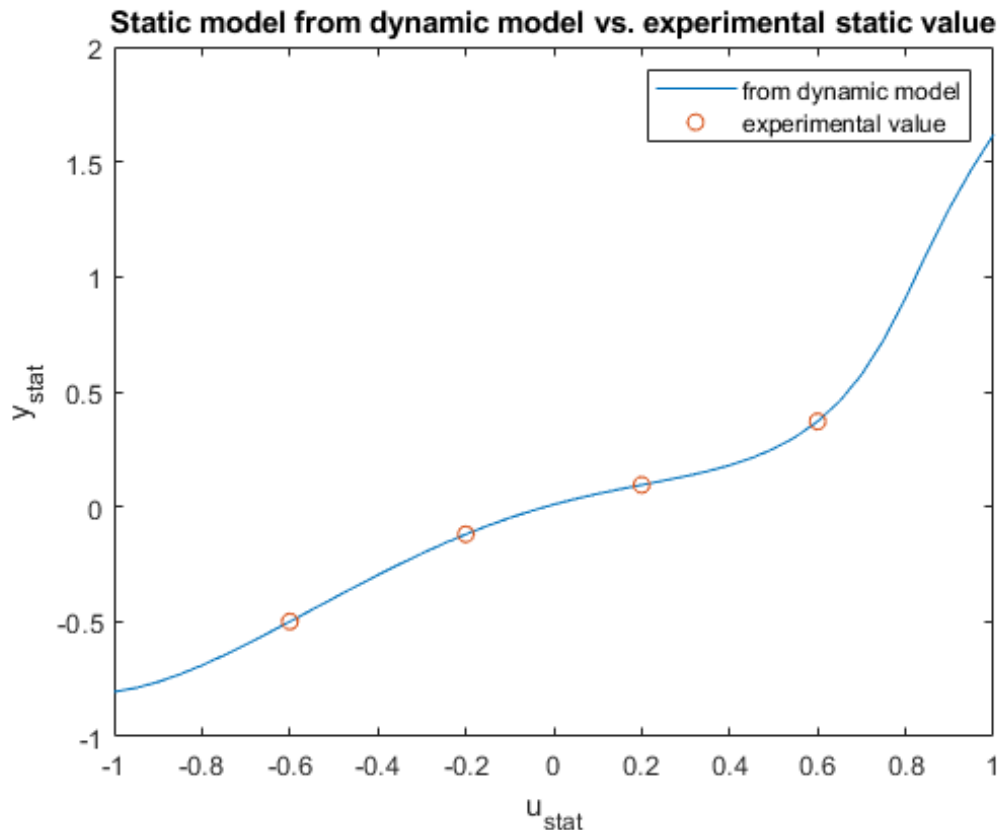


Rysunek 50: Porównanie modelu statycznego z ch. statyczną wyznaczoną z modelu dynamicznego.

Jak widać, otrzymane charakterystyki są do siebie zbliżone.

Następnie, eksperymentalnie wyznaczono cztery wartości statyczne przy użyciu tego samego modelu dynamicznego. Dla zadanych wartości u_0 , wykonano symulację skoku z wartości 0 do u_0 na horyzoncie symulacji wielokrotnie dłuższym niż horyzont dynamiki modelowanego

obiektu. Wartości otrzymane pod koniec symulacji są wartościami statycznymi y_0 . Otrzymane w ten sposób punkty porównano z charakterystyką wyznaczoną w sposób numeryczny.



Rysunek 51: Ch.statyczna z modelu dynamicznego vs. eksperymentalne wartości statyczne

Widać, że otrzymane eksperymentalnie wartości statyczne są zgodne z wyznaczoną wcześniej charakterystyką.

4.1 Wnioski

- model dynamiczny (a więc i dane przedstawiające pracę dynamiczną obiektu) może posłużyć również do wyznaczenia modelu statycznego. Jest to szczególnie przydatne, kiedy nie możemy bezpośrednio przeprowadzić eksperymentu wyznaczającego kolejne wartości statyczne obiektu (np. z powodu czasu, jaki jest potrzebny do ustalenia się wartości wyjściowych).
- ”model statyczny” otrzymany przy użyciu modelu dynamicznego i solvera jest stosunkowo szybki, kiedy wykorzystuje jako punkt początkowy poprzednią wyliczoną wartość y - potrzebuje on pojedynczych iteracji do znalezienia rozwiązania, często tylko jedną. Mógłby być wykorzystywany w systemach czasu rzeczywistego.