

脑科学与类脑系统 Homework 03

姓名: 雍崔扬

学号: 21307140051

Problem 1

把 10 枚相同的硬币抛在地面上, 每枚硬币有正反两种可能.

试求观察前后获取的信息量?

Solution:

由于硬币是相同的, 故我们只关心有多少个硬币朝上 (具体哪些硬币朝上, 我们并不关心)

硬币朝上的数量 $X \sim B(10, 0.5)$ (二项分布)

因此观察前的信息熵为:

$$\begin{aligned} H_{\text{before}} &= - \sum_{k=0}^{10} P\{X = k\} \log(P\{X = k\}) \\ &= - \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 0.5^k (1 - 0.5)^{10-k} \log_2 \left(\binom{10}{k} 0.5^k (1 - 0.5)^{10-k} \right) \\ &= - \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 0.5^{10} \log_2 \left(\binom{10}{k} 0.5^{10} \right) \\ &\approx 2.7064 \text{ bits} \end{aligned}$$

而观察后的信息熵为:

$$H_{\text{after}} = 0$$

因此观察前后获取的信息量为:

$$\Delta I := H_{\text{before}} - H_{\text{after}} = 2.7064 \text{ bits}$$

Problem 2

有一同学, 考试成绩数学不及格的概率是 0.15, 语文不及格的概率是 0.05, 两者都不及格的概率为 0.03

在一次考试中, 已知他数学不及格, 那么他语文不及格的概率是多少?

Solution:

记该同学数学不及格和语文不及格的事件分别为 A, B , 则根据题设我们有:

$$P(A) = 0.15$$

$$P(B) = 0.05$$

$$P(A, B) = 0.03$$

因此在给定他数学不及格的条件下, 他语文不及格的概率为:

$$P(B|A) = \frac{P(A, B)}{P(A)} = \frac{0.03}{0.15} = 0.2$$

Problem 3

Monty Hall 问题，它是一个概率论中的经典问题，通常用来说明直觉在概率判断中的不足。

问题背景如下：

有三个房间，其中两个是陷阱，一个是大奖。你不知道每个房间后面是什么。

你首先选择一个房间（例如，房间 A）

主持人知道每个房间后面的内容，故意打开一个没有大奖的房间（例如，房间 B），并告诉你这是一个陷阱。

现在你有两个选择：坚持你原来的选择（房间 A），或者换到未选择的房间（房间 C）

在做出选择后，许多人可能会认为坚持或换的机会是相等的，即每个房间都有 $\frac{1}{2}$ 的概率

实际上这个问题的概率并不对称。

- 选择房间 A 后，大奖有 $\frac{1}{3}$ 的概率在房间 A 中。
- 不论你选择哪个房间，主持人总是会打开一个没有大奖的房间。
若你的初始选择是正确的（ $\frac{1}{3}$ 的概率），换房间将失去大奖。
若你的初始选择是错误的（ $\frac{2}{3}$ 的概率），换房间会得到大奖。

因此从概率的角度来看，换房间是更有利的选择，成功获得大奖的概率为 $\frac{2}{3}$ ，而坚持原选择的成功概率只有 $\frac{1}{3}$

计算信息量：

- ① 主持人提供信息前：

$$\begin{aligned} H_{\text{before}} &= -\left(\frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\ &= -\log_2\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \log_2 3 \\ &\approx 1.585 \text{ bit} \end{aligned}$$

- ② 主持人提供信息后：

$$\begin{aligned} H_{\text{after}} &= -\left(\frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}\right) + 0\log_2(0) + \frac{2}{3}\log_2\left(\frac{2}{3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{3}\log_2 3 + \frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \log_2 3 - \frac{2}{3} \\ &\approx 0.918 \text{ bit} \end{aligned}$$

- ③ 获得的信息量：

$$\Delta I := H_{\text{before}} - H_{\text{after}} = \frac{2}{3} = 0.667 \text{ bit}$$