# 高等线性代数 Homework 11

Due: Dec. 2, 2024
姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

## Problem 1

计算以下矩阵的极分解和 Moore-Penrose 广义逆:

$$B := A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

- **Lemma:**
  我们可以这样将两个线性相关的向量 $x, \alpha x \in \mathbb{R}^n$ 正交化:

$$\begin{bmatrix} x & \alpha x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha^2+1}x & 0_n \end{bmatrix} \text{ where } \begin{cases} c = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}} \\ s = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}} \end{cases}$$

### (1) 奇异值分解

回忆起 Homework 10 Problem 5 的内容:
注意到 $A$ 的列向量组中，第 $1,2,3$ 列相互正交，而第 $4$ 列与第 $1$ 列线性相关.
**单边 Jacobi 迭代**的思想指导我们使用一个正交变换 $Q_{1,4}$ 将第 $4$ 列化为零:

$$Q_{1,4} := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$AQ_{1,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

这样 $AQ_{1,4}$ 的列向量就相互正交了.
此时可取:

$$U := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma := \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & & 0 \\ & \sqrt{2} & & 0 \\ & & \sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}$$

$$V := Q_{1,4} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$$

为保证奇异值从大到小排列，我们可以交换 $\Sigma$ 的 $(2,2),(3,3)$ 位置，
并对应交换 $U$ 的 $2,3$ 列和 $V$ 的 $2,3$ 行:

$$U := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma := \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & & 0 \\ & \sqrt{6} & & 0 \\ & & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$V := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$$

因此 $B = A^{\mathrm{T}} = (U\Sigma V^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = V\Sigma U^{\mathrm{T}}$

## (2) 极分解

取 $V$ 的前 3 列构成 $V_1 \in \mathbb{R}^{4\times 3}$，记 $\Sigma_1 = \mathrm{diag}\{\sqrt{6},\sqrt{6},\sqrt{2}\}$
于是 $B$ 的精简 SVD 分解为:

$$B = V_1\Sigma_1U^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & \\ & \sqrt{6} & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

注意到:

$$\begin{aligned} B &= V_1\Sigma_1U^{\mathrm{T}} \\ &= (V_1U^{\mathrm{T}})U\Sigma_1U^{\mathrm{T}} \\ &= QP \end{aligned}$$

我们就得到了 $B$ 的极分解 $B=QP$
其中 $Q\in\mathbb{R}^{4\times 3}$ 列标准正交，$P$ 为 Hermite 正定阵.

$$
\begin{aligned}
Q &:= V_1U^{\mathrm{T}}\\
&=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\
&=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{6}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P &:= U\Sigma_1U^{\mathrm{T}}\\
&=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{6}&&\\&\sqrt{6}&\\&&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\
&=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&1&1\\\sqrt{2}&1&-1\\\sqrt{2}&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&\sqrt{6}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

## (3) Moore-Penrose 逆

$B$ 的精简 SVD 分解为:

$$
B=V_1\Sigma_1U^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{6}&&\\&\sqrt{6}&\\&&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
$$

因此 $B$ 的 Moore-Penrose 逆为:

$$
\begin{aligned}
B^{\dagger} &:= U\Sigma_1^{-1}V_1^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & \\ & \sqrt{6} & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{6}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

# Problem 2

给定正整数 $m, n$，设 $A \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 满足:

$$
A = \begin{bmatrix} I_m & B \\ B^{\mathrm{H}} & I_n \end{bmatrix}
$$

若 $\|B\|_2 < 1$，试证明:

$$
\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{1+\|B\|_2}{1-\|B\|_2}
$$

- **Lemma: (Matrix Analysis 定理 $7.3.3$)**
  给定复矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，记 $q := \min\{m, n\}$
  设 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_q$ 为 $A$ 的奇异值
  定义 Hermite 阵 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & A \\ A^{\mathrm{H}} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}$
  则 $\tilde{A}$ 的特征值为 $-\sigma_1 \leq \cdots \leq -\sigma_q \leq \underbrace{0 = \cdots = 0}_{|m-n|} \leq \sigma_q \leq \cdots \leq \sigma_1$

  **Proof:**
  首先假设 $m \geq n$，设 $A$ 的奇异值分解为:

$$
\begin{aligned}
A &= U\Sigma V^{\mathrm{H}} \\
&= [U_1, U_2]\begin{bmatrix} \Sigma_n \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix} V^{\mathrm{H}} \\
&= U_1\Sigma_n V^{\mathrm{H}}
\end{aligned}
$$

  其中 $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉矩阵，$U_1 \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 由 $U$ 的前 $n$ 列构成，
  $\Sigma_n = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$
  于是我们有:

$$
\begin{aligned}
A &= U_1\Sigma_1 V^{\mathrm{H}} \\
0_{m\times n} &= U_2 0_{(m-n)\times n} V^{\mathrm{H}} \\
A^{\mathrm{H}} &= V\Sigma_1 U_1^{\mathrm{H}} \\
0_{n\times m} &= V 0_{n\times(m-n)} U_2^{\mathrm{H}}
\end{aligned}
$$

定义 $m+n$ 阶矩阵:

$$
Q := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}V & \frac{\sqrt{2}}{2}V & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}
$$

容易验证 $Q$ 是酉矩阵:

$$
\begin{aligned}
Q^{\mathrm{H}}Q &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}V & \frac{\sqrt{2}}{2}V & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}V & \frac{\sqrt{2}}{2}V & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}U_1^{\mathrm{H}} & \frac{\sqrt{2}}{2}V^{\mathrm{H}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}U_1^{\mathrm{H}} & \frac{\sqrt{2}}{2}V^{\mathrm{H}} \\ U_2^{\mathrm{H}} & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}V & \frac{\sqrt{2}}{2}V & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}U_1^{\mathrm{H}}U_1 + \frac{1}{2}V^{\mathrm{H}}V & -\frac{1}{2}U_1^{\mathrm{H}}U_1 + \frac{1}{2}V^{\mathrm{H}}V & \frac{\sqrt{2}}{2}U_1^{\mathrm{H}}U_2 \\ -\frac{1}{2}U_1^{\mathrm{H}}U_1 + \frac{1}{2}V^{\mathrm{H}}V & \frac{1}{2}U_1^{\mathrm{H}}U_1 + \frac{1}{2}V^{\mathrm{H}}V & -\frac{\sqrt{2}}{2}U_1^{\mathrm{H}}U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}U_2^{\mathrm{H}}U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}U_2^{\mathrm{H}}U_1 & U_2^{\mathrm{H}}U \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n} & 0_{n\times(m-n)} \\ 0_{n\times n} & I_n & 0_{n\times(m-n)} \\ 0_{(m-n)\times n} & 0_{(m-n)\times n} & I_{m-n} \end{bmatrix} \\
&= I_{m+n}
\end{aligned}
$$

同时我们有:

$$
\begin{aligned}
Q^{\mathrm{H}}\tilde{A}Q &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}V & \frac{\sqrt{2}}{2}V & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & A \\ A^{\mathrm{H}} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}V & \frac{\sqrt{2}}{2}V & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}U_1^{\mathrm{H}} & \frac{\sqrt{2}}{2}V^{\mathrm{H}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}U_1^{\mathrm{H}} & \frac{\sqrt{2}}{2}V^{\mathrm{H}} \\ U_2^{\mathrm{H}} & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}AV & \frac{\sqrt{2}}{2}AV & 0_{m\times(n-m)} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}A^{\mathrm{H}}U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}A^{\mathrm{H}}U_1 & A^{\mathrm{H}}U_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}U_1^{\mathrm{H}}AV + \frac{1}{2}V^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U_1 & \frac{1}{2}U_1^{\mathrm{H}}AV - \frac{1}{2}V^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U_1 & \frac{\sqrt{2}}{2}V^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U_2 \\ -\frac{1}{2}U_1^{\mathrm{H}}AV + \frac{1}{2}V^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U_1 & -\frac{1}{2}U_1^{\mathrm{H}}AV - \frac{1}{2}V^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U_1 & \frac{\sqrt{2}}{2}V^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}U_2^{\mathrm{H}}AV & \frac{\sqrt{2}}{2}U_2^{\mathrm{H}}AV & 0_{(m-n)\times(m-n)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0_{n\times n} & 0_{n\times(m-n)} \\ 0_{n\times n} & -\Sigma_n & 0_{n\times(m-n)} \\ 0_{(m-n)\times n} & 0_{(m-n)\times n} & 0_{(m-n)\times(m-n)} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

因此 $\tilde{A}$ 的特征值为 $-\sigma_1 \le \cdots \le -\sigma_n \le \underbrace{0 = \cdots = 0}_{m-n} \le \sigma_n \le \cdots \le \sigma_1$

当 $m < n$ 时我们可对 $A^{\mathrm{H}}$ 应用上述结论便得到:
$\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & A^{\mathrm{H}} \\ A & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}$ 的特征值为
$-\sigma_1 \leq \cdots \leq -\sigma_m \leq \underbrace{0 = \cdots = 0}_{n-m} \leq \sigma_m \leq \cdots \leq \sigma_1$

注意到:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} & I_n \\ I_m & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & A^{\mathrm{H}} \\ A & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & I_n \\ I_m & \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} & I_m \\ I_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{H}} & 0_{n\times n} \\ 0_{m\times m} & A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & A \\ A^{\mathrm{H}} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \\ &= \tilde{A} \end{aligned}$$

因此 $\tilde{A}$ 的特征值为 $-\sigma_1 \leq \cdots \leq -\sigma_m \leq \underbrace{0 = \cdots = 0}_{n-m} \leq \sigma_m \leq \cdots \leq \sigma_1$

综上所述，$\tilde{A}$ 的特征值为 $-\sigma_1 \leq \cdots \leq -\sigma_q \leq \underbrace{0 = \cdots = 0}_{|m-n|} \leq \sigma_q \leq \cdots \leq \sigma_1$ (其中 $q = \min\{m,n\}$)

**Proof:**
设 $B$ 的奇异值为 $\sigma_1(B) \geq \cdots \geq \sigma_q(B)$ (其中 $q = \min\{m,n\}$)
根据引理可知 $A = \begin{bmatrix} I_m & B \\ B^{\mathrm{H}} & I_n \end{bmatrix}$ 的特征值为:

$$1 - \sigma_1(B) \leq \cdots \leq 1 - \sigma_q(B) \leq \underbrace{0 = \cdots = 0}_{|m-n|} \leq 1 + \sigma_q(B) \leq \cdots \leq 1 + \sigma_1(B)$$

显然 $A$ 的模最大特征值 $\lambda_{\max}(A) = 1 + \sigma_1(B) = 1 + \|B\|_2$
根据 $\sigma_1(B) = \|B\|_2 < 1$ 可知 $A$ 的模最小特征值 $\lambda_{\min}(A) = 1 - \sigma_1(B) = 1 - \|B\|_2$
注意到 $A$ 是 Hermite 正定阵，因此有:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(A) &= \lambda_{\max}(A) = 1 + \|B\|_2 \\ \sigma_{\min}(A) &= \lambda_{\min}(A) = 1 - \|B\|_2 \end{aligned}$$

于是有:

$$\begin{aligned} \kappa_2(A) &= \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \\ &= \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)} \\ &= \frac{1 + \|B\|_2}{1 - \|B\|_2} \end{aligned}$$

命题得证.

# Problem 3

给定正整数 $n \geq 2$，设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$
试举例说明下列情况可能发生:

- ① $(AB)^{\dagger} \neq B^{\dagger} A^{\dagger}$
- ② $(A^k)^{\dagger} \neq (A^{\dagger})^k$ (其中 $k \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{1\}$)

- ③ $A^\dagger$ 的非零特征值的倒数不是 $A$ 的特征值

**Solution:**
我们取以下 2 阶方阵:

$$
\begin{aligned}
A &:= \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

其特征值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}, 0$
根据其精简 $\text{SVD}$ 分解可知 $A$ 的 Moore-Penrose 逆为:

$$
\begin{aligned}
A^\dagger &:= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot 1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

注意到 $A^\dagger$ 的非零特征值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，其倒数 $\sqrt{2}$ 并非 $A$ 的特征值.
因此命题 ③ 是有可能发生的.

---

取 $B = A$
于是我们有:

$$
\begin{aligned}
AB &= A^2 \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

根据其精简 $\text{SVD}$ 分解可知 $AB = A^2$ 的 Moore-Penrose 逆为:

$$
\begin{aligned}
(AB)^\dagger &= (A^2)^\dagger \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

注意到:

$$
\begin{aligned}
B^\dagger A^\dagger &= (A^\dagger)^2 \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
&\neq (A^2)^\dagger = (AB)^\dagger
\end{aligned}
$$

因此命题 ①② 都是有可能发生的.

## Problem 4

给定正整数 $m, n, k$
若 $X \in \mathbb{C}^{m\times k}$ 列满秩，而 $Y \in \mathbb{C}^{k\times n}$ 行满秩，试证明 $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$

**Proof:**
设 $X \in \mathbb{C}^{m\times k}$ 和 $Y \in \mathbb{C}^{k\times n}$ 的精简 $\text{SVD}$ 分解为:

$$
\begin{aligned}
X &= U_1 \Sigma_1 V_1^{\text{H}} \\
Y &= U_2 \Sigma_2 V_2^{\text{H}}
\end{aligned}
$$

其中 $U_1 \in \mathbb{C}^{m\times k}$ 和 $V_2 \in \mathbb{C}^{n\times k}$ 列标准正交，$V_1, U_2 \in \mathbb{C}^{k\times k}$ 为酉矩阵，
而 $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是对角元均为正实数的对角阵.
则 $X, Y$ 的 Moore-Penrose 逆为:

$$
\begin{aligned}
X^\dagger &= V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^{\text{H}} \\
&= (V_1 \Sigma_1^{-2} V_1^{\text{H}})(V_1 \Sigma_1 U_1^{\text{H}}) \\
&= (V_1 \Sigma_1^2 V_1^{\text{H}})^{-1} (U_1 \Sigma_1 V_1^{\text{H}})^{\text{H}} \\
&= [(U_1 \Sigma_1 V_1^{\text{H}})^{\text{H}} (U_1 \Sigma_1 V_1^{\text{H}})]^{-1} (U_1 \Sigma_1 V_1^{\text{H}})^{\text{H}} \\
&= (X^{\text{H}} X)^{-1} X^{\text{H}} \\
\hline
Y^\dagger &= V_2 \Sigma_2^{-1} U_2^{\text{H}} \\
&= (V_2 \Sigma_2 U_2^{\text{H}})(U_2 \Sigma_2^{-2} U_2^{\text{H}}) \\
&= (U_2 \Sigma_2 V_2^{\text{H}})^{\text{H}} (U_2 \Sigma_2^2 U_2^{\text{H}})^{-1} \\
&= (U_2 \Sigma_2 V_2^{\text{H}})^{\text{H}} [(U_2 \Sigma_2 V_2^{\text{H}})(U_2 \Sigma_2 V_2^{\text{H}})^{\text{H}}]^{-1} \\
&= Y^{\text{H}} (Y Y^{\text{H}})^{-1}
\end{aligned}
$$

记 $\begin{cases} A := XY \\ B := Y^\dagger X^\dagger = Y^{\text{H}} (Y Y^{\text{H}})^{-1} (X^{\text{H}} X)^{-1} X^{\text{H}} \end{cases}$
我们可以验证 $B$ 满足 Penrose 方程组:

$$
\begin{aligned}
ABA &= (XY)[Y^{\mathrm{H}}(YY^{\mathrm{H}})^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}X^{\mathrm{H}}](XY) \\
&= X(YY^{\mathrm{H}})(YY^{\mathrm{H}})^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)Y \\
&= XY \\
&= A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BAB &= [Y^{\mathrm{H}}(YY^{\mathrm{H}})^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}X^{\mathrm{H}}](XY)[Y^{\mathrm{H}}(YY^{\mathrm{H}})^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}X^{\mathrm{H}}] \\
&= Y^{\mathrm{H}}(YY^{\mathrm{H}})^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)(YY^{\mathrm{H}})(YY^{\mathrm{H}})^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}X^{\mathrm{H}} \\
&= Y^{\mathrm{H}}(YY^{\mathrm{H}})^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}X^{\mathrm{H}} \\
&= B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(AB)^{\mathrm{H}} &= B^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}} \\
&= [Y^{\mathrm{H}}(YY^{\mathrm{H}})^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}X^{\mathrm{H}}]^{\mathrm{H}}(XY)^{\mathrm{H}} \\
&= [X(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}(YY^{\mathrm{H}})^{-1}Y](Y^{\mathrm{H}}X^{\mathrm{H}}) \\
&= X(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}X^{\mathrm{H}} \\
&= (XY)[Y^{\mathrm{H}}(YY^{\mathrm{H}})^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}X^{\mathrm{H}}] \\
&= AB
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(BA)^{\mathrm{H}} &= A^{\mathrm{H}}B^{\mathrm{H}} \\
&= (XY)^{\mathrm{H}}[Y^{\mathrm{H}}(YY^{\mathrm{H}})^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}X^{\mathrm{H}}]^{\mathrm{H}} \\
&= (Y^{\mathrm{H}}X^{\mathrm{H}})[X(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}(YY^{\mathrm{H}})^{-1}Y] \\
&= Y^{\mathrm{H}}(YY^{\mathrm{H}})^{-1}Y \\
&= [Y^{\mathrm{H}}(YY^{\mathrm{H}})^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}X^{\mathrm{H}}](XY) \\
&= BA
\end{aligned}
$$

因此 $A=XY$ 的 Moore-Penrose 逆即为 $B=Y^{\dagger}X^{\dagger}=Y^{\mathrm{H}}(YY^{\mathrm{H}})^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}X^{\mathrm{H}}$
命题得证.

# Problem 5

给定正整数 $m,n$，$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，试求:

$$
\max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}\quad\text{and}\quad\min_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}
$$

根据它们可以直接得出实数域上的结果.

**Solution:**
设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 的奇异值分解为 $A=U\Sigma V^{\mathrm{H}}$
其中 $U\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $V\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉矩阵，而 $\Sigma\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 的对角元均为非负实数.

任意给定 $x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}$ 和 $y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}$
根据 $\mathrm{span}\{U\}=\mathbb{C}^m$ 和 $\mathrm{span}\{V\}=\mathbb{C}^n$ 可知:
存在 $\alpha\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}$ 和 $\beta\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}$ 使得 $\begin{cases}x=V\alpha\\ y=U\beta\end{cases}$
根据 $l_2$ 范数的酉不变性可知:

$$
\begin{aligned}
\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} &= \frac{|(U\beta)^{\mathrm{H}}A(V\alpha)|}{\|U\beta\|_2\|V\alpha\|_2} \\
&= \frac{|\beta^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}}AV\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2} \\
&= \frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}
\end{aligned}
$$

- ① 首先假设 $m=n$，则可设 $\Sigma=\operatorname{diag}\{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\}$
  其中 $\sigma_{\max}=\sigma_1\geq\cdots\geq\sigma_n=\sigma_{\min}\geq 0$
  于是我们有:

$$
\begin{aligned}
\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}&=\frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}\quad(\text{use Cauchy-Schwarz inequality})\\
&\leq\frac{\|\Sigma^{\frac{1}{2}}\alpha\|_2\|\Sigma^{\frac{1}{2}}\beta\|_2}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}\\
&\leq\frac{\sqrt{\sigma_{\max}}\|\alpha\|_2\cdot\sqrt{\sigma_{\max}}\|\beta\|_2}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}\\
&=\sigma_{\max}
\end{aligned}
$$

  当且仅当 $x=v_1,y=u_1$ 或 $x=-v_1,y=-u_1$ 时取等.
  因此我们有:

$$
\max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\y\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}}}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}=\max_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\\beta\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}}}\frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}=\sigma_{\max}
$$

  另一方面我们有:

$$
\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}=\frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}\geq 0
$$

  当且仅当 $\beta\perp\Sigma\alpha$ (即 $y\perp Ax$) 时取等.
  因此我们有:

$$
\min_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\y\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}}}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}=\min_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\\beta\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}}}\frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}=0
$$

- ② 其次假设 $m>n$，则我们可记:

$$
\begin{aligned}
A&=U\Sigma V^{\mathrm{H}}\\
&=[U_1,U_2]\begin{bmatrix}\Sigma_1\\0_{(m-n)\times n}\end{bmatrix}V^{\mathrm{H}}\\
&=U_1\Sigma_1V^{\mathrm{H}}
\end{aligned}
$$

  其中 $U_1\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 由 $U$ 的前 $n$ 列构成，而 $\Sigma_1\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是对角元均为非负实数的对角阵.
  将 $\beta\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}$ 对应地划分为 $\beta=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}$ (其中 $\beta_1\in\mathbb{C}^n$)
  则我们有:

$$
\begin{aligned}
\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}&=\frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}\\
&=\frac{\left|\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}^{\mathrm{H}}\begin{bmatrix}\Sigma_1\\0_{(m-n)\times n}\end{bmatrix}\alpha\right|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}\\
&=\frac{|\beta_1^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}\quad(\text{note that }\|\beta_1\|_2\leq\|\beta\|_2)\\
&\leq\frac{|\beta_1^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta_1\|_2}\quad(\text{use conclusion of case (1)})\\
&=\sigma_{\max}
\end{aligned}
$$

注意到当 $x=v_1,y=u_1$ 时我们有 $\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}=\frac{|u_1^{\mathrm{H}}Av_1|}{\|v_1\|_2\|u_1\|_2}=|u_1^{\mathrm{H}}(u_1\sigma_{\max})|=\sigma_{\max}$
因此我们有:

$$\max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}=\sigma_{\max}$$

另一方面我们有:

$$\begin{aligned}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}&=\frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}\\&=\frac{|\beta_1^{\mathrm{H}}\Sigma_1\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}\\&\geq 0\end{aligned}$$

当且仅当 $\beta_1\perp\Sigma_1\alpha$ (即 $y\perp Ax$) 时取等.
因此我们有:

$$\min_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}=\min_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ \beta\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}=0$$

- ③ 最后假设 $m<n$，根据 ② 中的结论我们有:
  (显然 $A,A^{\mathrm{H}}$ 具有相同的奇异值)

$$\begin{aligned}\max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}&=\max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|x^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}y|}{\|x\|_2\|y\|_2}=\sigma_{\max}(A^{\mathrm{H}})=\sigma_{\max}(A)=\sigma_{\max}\\ \min_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}&=\min_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|x^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}y|}{\|x\|_2\|y\|_2}=0\end{aligned}$$

综上所述，我们有:

$$\begin{aligned}\max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}&=\sigma_{\max}\\ \min_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}&=0\end{aligned}$$

**推论:**
在实数域上我们有:

$$\begin{aligned}\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{R}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{y^{\mathrm{T}}Ax}{\|x\|_2\|y\|_2}&=-\max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{R}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|y^{\mathrm{T}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}=-\sigma_{\max}\\ \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{R}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{y^{\mathrm{T}}Ax}{\|x\|_2\|y\|_2}&=\max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{R}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|y^{\mathrm{T}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}=\sigma_{\max}\\ \min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{R}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|y^{\mathrm{T}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}&=0\end{aligned}$$

命题得证.

# Problem 6 (optional)

试证明对于任意复矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 都有:

$$A^\dagger = \lim_{\delta\to 0_+}(A^{\mathrm{H}}A+\delta I_n)^{-1}A^{\mathrm{H}} = \lim_{\delta\to 0_+} A^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}}+\delta I_m)^{-1}$$

**Proof:**
记 $r := \operatorname{rank}(A)$
设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 的奇异值分解为:

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^{\mathrm{H}} \\ &= [U_1, U_2]\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}[V_1, V_2]^{\mathrm{H}} \\ &= U_1\Sigma_r V_1^{\mathrm{H}} \end{aligned}$$

其中 $U \in \mathbb{C}^{m\times m}, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉矩阵，$U_1 \in \mathbb{C}^{m\times r}, V_1 \in \mathbb{C}^{n\times r}$ 分别由 $U, V$ 的前 $r$ 列构成.
而 $\Sigma_r = \operatorname{diag}\{\sigma_1,\dots,\sigma_r\}$ $(\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0)$
因此 $A$ 的 Moore-Penrose 逆为 $A^\dagger := V_1\Sigma_r^{-1}U_1^{\mathrm{H}}$

- ① 首先考虑 $(A^{\mathrm{H}}A+\delta I_n)^{-1}A^{\mathrm{H}}$ $(\delta > 0)$

  $$\begin{aligned} (A^{\mathrm{H}}A+\delta I_n)^{-1}A^{\mathrm{H}} &= [(U\Sigma V^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}(U\Sigma V^{\mathrm{H}})+\delta I_n]^{-1}(U\Sigma V^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} \\ &= (V\Sigma^{\mathrm{H}}\Sigma V^{\mathrm{H}}+\delta I_n)^{-1}(V\Sigma^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}}) \\ &= V(\Sigma^{\mathrm{H}}\Sigma+\delta I_n)^{-1}V^{\mathrm{H}}V\Sigma^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}} \\ &= V(\Sigma^{\mathrm{H}}\Sigma+\delta I_n)^{-1}\Sigma^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}} \\ &= [V_1, V_2]\left(\begin{bmatrix} \Sigma_r^2+\delta I_r & \\ & \delta I_{n-r} \end{bmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{H}}[U_1, U_2]^{\mathrm{H}} \\ &= [V_1, V_2]\begin{bmatrix} (\Sigma_r^2+\delta I_r)^{-1} & \\ & \delta I_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix}[U_1, U_2]^{\mathrm{H}} \\ &= [V_1, V_2]\begin{bmatrix} (\Sigma_r^2+\delta I_r)^{-1}\Sigma_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix}[U_1, U_2]^{\mathrm{H}} \\ &= V_1(\Sigma_r^2+\delta I_r)^{-1}\Sigma_r U_1^{\mathrm{H}} \\ &\to V_1\Sigma_r^{-1}U_1^{\mathrm{H}} \quad (\delta\to 0_+) \end{aligned}$$

  因此我们有:

  $$A^\dagger = \lim_{\delta\to 0_+}(A^{\mathrm{H}}A+\delta I_n)^{-1}A^{\mathrm{H}} = V_1\Sigma_r^{-1}U_1^{\mathrm{H}}$$

- ② 其次考虑 $A^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}}+\delta I_m)^{-1}$ $(\delta > 0)$

$$
\begin{aligned}
A^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}}+\delta I_m)^{-1} &= (U\Sigma V^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}[(U\Sigma V^{\mathrm{H}})(U\Sigma V^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}+\delta I_m]^{-1} \\
&= (V\Sigma^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}})(U\Sigma\Sigma^{\mathrm{H}}U+\delta I_m)^{-1} \\
&= V\Sigma^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}}U(\Sigma\Sigma^{\mathrm{H}}+\delta I_m)^{-1}U^{\mathrm{H}} \\
&= V\Sigma^{\mathrm{H}}(\Sigma\Sigma^{\mathrm{H}}+\delta I_m)^{-1}U^{\mathrm{H}} \\
&= [V_1,V_2]\left(\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{H}}\left(\begin{bmatrix}\Sigma_r^2+\delta I_r & \\ & \delta I_{m-r}\end{bmatrix}\right)^{-1}[U_1,U_2]^{\mathrm{H}} \\
&= [V_1,V_2]\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\Sigma_r^2+\delta I_r)^{-1} & \\ & \delta I_{m-r}\end{bmatrix}[U_1,U_2]^{\mathrm{H}} \\
&= [V_1,V_2]\begin{bmatrix}\Sigma_r(\Sigma_r^2+\delta I_r)^{-1} & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)}\end{bmatrix}[U_1,U_2]^{\mathrm{H}} \\
&= V_1\Sigma_r(\Sigma_r^2+\delta I_r)^{-1}U_1^{\mathrm{H}} \\
&\to V_1\Sigma_r^{-1}U_1^{\mathrm{H}} \quad (\delta\to 0_+)
\end{aligned}
$$

因此我们有:

$$
A^{\dagger}=\lim_{\delta\to 0_+}A^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}}+\delta I_m)^{-1}=V_1\Sigma_r^{-1}U_1^{\mathrm{H}}
$$

综上所述，我们有:

$$
\begin{aligned}
A^{\dagger} &= \lim_{\delta\to 0_+}(A^{\mathrm{H}}A+\delta I_n)^{-1}A^{\mathrm{H}} \\
&= \lim_{\delta\to 0_+}A^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}}+\delta I_m)^{-1} \\
&= V_1\Sigma_r^{-1}U_1^{\mathrm{H}}
\end{aligned}
$$

命题得证.

## Problem 7 (optional)

试证明对于任意实数 $a,b,c\in\mathbb{R}$ 都有:

$$
-\frac{3}{2}(a^2+b^2+2c^2)\le 3ab+bc+ca\le\frac{3+\sqrt{13}}{4}(a^2+b^2+2c^2)
$$

**Proof:**
首先考虑证明左侧的不等式:

$$
-\frac{3}{2}(a^2+b^2+2c^2)\le 3ab+bc+ca \quad (\forall\, a,b,c\in\mathbb{R})
$$

$$\Leftrightarrow$$

$$
\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2+3c^2+3ab+bc+ca\ge 0 \quad (\forall\, a,b,c\in\mathbb{R})
$$

$$\Leftrightarrow$$

$$
\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}3&3&1\\3&3&1\\1&1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\ge 0 \quad (\forall\, a,b,c\in\mathbb{R})
$$

$$\Leftrightarrow$$

$$
\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix}3&3&1\\3&3&1\\1&1&6\end{bmatrix}\right)\ge 0 \quad (\text{Rayleigh-Ritz Theorem})
$$

我们只需说明上述系数矩阵半正定即可，
即只需说明系数矩阵的任意主子式 (注意不仅仅是顺序主子式) 都是非负实数:

$$\det\left(\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}\right)=0$$
$$\det\left(\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 6\end{bmatrix}\right)=17$$
$$\det\left(\begin{bmatrix}3 & 3 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 6\end{bmatrix}\right)=0$$

这样我们就证明了左侧不等式成立.

---

接下来考虑证明右侧的不等式:

$$\begin{gathered}
3ab+bc+ca\leq\frac{3+\sqrt{13}}{4}(a^2+b^2+2c^2)\quad(\forall\, a,b,c\in\mathbb{R})\\
\Leftrightarrow\\
\frac{3+\sqrt{13}}{4}(a^2+b^2+2c^2)-3ab-bc-ca\geq 0\quad(\forall\, a,b,c\in\mathbb{R})\\
\Leftrightarrow\\
\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & -1\\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -1\\ -1 & -1 & 3+\sqrt{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}\geq 0\quad(\forall\, a,b,c\in\mathbb{R})\\
\Leftrightarrow\\
\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix}\frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & -1\\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -1\\ -1 & -1 & 3+\sqrt{13}\end{bmatrix}\right)\geq 0
\end{gathered}$$

我们只需说明上述系数矩阵半正定即可，
即只需说明系数矩阵的任意主子式 (注意不仅仅是顺序主子式) 都是非负实数:

$$\det\left(\begin{bmatrix}\frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3\\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2}\end{bmatrix}\right)=\frac{3\sqrt{13}-7}{2}\geq 0$$
$$\det\left(\begin{bmatrix}\frac{3+\sqrt{13}}{2} & -1\\ -1 & 3+\sqrt{13}\end{bmatrix}\right)=10+3\sqrt{13}\geq 0$$
$$\begin{aligned}
\det\left(\begin{bmatrix}\frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & -1\\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -1\\ -1 & -1 & 3+\sqrt{13}\end{bmatrix}\right)&=\frac{\sqrt{13}-3}{2}\begin{vmatrix}\frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & \frac{3-\sqrt{13}}{2}\\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & \frac{3-\sqrt{13}}{2}\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}\\
&=\frac{\sqrt{13}-3}{2}\begin{vmatrix}\frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & 0\\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & 0\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}\\
&=0
\end{aligned}$$

这样我们就证明了右侧不等式成立.

**The End**