泛函分析 Homework 03

姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

只要做: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 17

- 考试有一题算子范数.
  取等时会考察逼近，但不会考类似 Problem 11 的连续化.
- 考试有一题证明函数空间完备性 (类似 Problem 8)
- 考试会考察一些简单定理的证明

Problem 1

设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范空间，定义:

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{if } x=y \\ \|x-y\|+1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\forall\, x,y \in X)$$

试证明 d 是 X 上的距离，但不能由 X 上的范数诱导.

Proof:

- ① 正定性:

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{if } x=y \\ \|x-y\|+1>0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\forall\, x,y \in X)$$

- ② 对称性:

$$\begin{aligned} d(y,x) &= \begin{cases} 0 & \text{if } y=x \\ \|y-x\|+1>0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } x=y \\ \|x-y\|+1>0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

- ③ 三角不等式:
  当 $x=y$ 时，我们有 $d(x,y)=0\leq d(x,z)+d(z,y)\ (\forall\, z\in X)$ 成立.
  当 $x\neq y$ 时，x,y 至少有一个与 z 不相等，不妨设 $x\neq z$
  则我们有:

$$\begin{aligned} d(x,z)+d(z,y) &= \|x-z\|+1+d(z,y) \\ &\geq \|x-z\|+1+\|z-y\| \\ &\geq \|(x-z)+(z-y)\|+1 \\ &= \|x-y\|+1 \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

综上所述，d 是 X 上的距离.

(反证法) 假设存在 X 上的某个范数 $\|\cdot\|_\star$ 使得 $d(x,y)=\|x-y\|_\star\ (\forall\, x,y\in X)$
取 $y=0_X$ 和 $x\neq 0_X$，则我们有:

$$
\begin{aligned}
\|2x\|_\star &= d(2x, 0_X) \\
&= \|2x - 0_X\| + 1 \\
&= 2\|x\| + 1 \\
&= 2(\|x\| + 1) - 1 \\
&= 2d(x, 0_X) - 1 \\
&= 2\|x\|_\star - 1 \\
&\neq 2\|x\|_\star
\end{aligned}
$$

这表明 $\|\cdot\|_\star$ 不满足齐次性，与范数的定义矛盾.
因此 d 不能由 X 上的范数诱导.

Problem 2

考虑闭区间 $[a,b]$ 上的一阶连续可导实值函数空间 $C^1([a,b])$
定义:

$$
\|x\|_1 := \left(\int_a^b (|x(t)|^2 + |x'(t)|^2)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall\ x \in C^1([a,b]))
$$

- ① 试证明 $\|\cdot\|_1$ 是 $C^1([a,b])$ 上的范数
- ② $C^1([a,b])$ 在范数 $\|\cdot\|_1$ 下是否完备?

Part (1)

试证明 $\|\cdot\|_1$ 是 $C^1([a,b])$ 上的范数.

- **Lemma (Minkowski 不等式)**
  任意给定实数 $p \geq 1$ 和正整数 $n \in \mathbb{Z}_+$，对于任意 $x, y \in \mathbb{C}^n$ 我们都有:

  $$
  \|x+y\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p
  $$

  当且仅当 x, y 线性相关时取等.

Proof:

- ① 正定性:

  $$
  \|x\|_1 = \left(\int_a^b (|x(t)|^2 + |x'(t)|^2)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0 \quad (\forall\ x \in C^1([a,b]))
  $$

  当且仅当 $x \equiv 0$ 时取等.

- ② 齐次性:

  $$
  \begin{aligned}
  \|\alpha x\|_1 &= \left(\int_a^b (|\alpha x(t)|^2 + |\alpha x'(t)|^2)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\
  &= |\alpha|\left(\int_a^b (|x(t)|^2 + |x'(t)|^2)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall\ \alpha \in \mathbb{R}, x \in C^1([a,b])) \\
  &= |\alpha|\|x\|_1
  \end{aligned}
  $$

- ③ 三角不等式:

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_1 &= \left(\int_a^b (|x(t)+y(t)|^2+|x'(t)+y'(t)|^2)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{use Minkowski inequality}) \\
&\le \left(\int_a^b (|x(t)|^2+|x'(t)|^2)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b (|y(t)|^2+|y'(t)|^2)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x\|_1+\|y\|_1 \quad (\forall\, x,y\in C^1([a,b]))
\end{aligned}
$$

综上所述，$\|\cdot\|_1$ 为 $C^1([a,b])$ 上的范数.

Part (2)

$C^1([a,b])$ 在范数 $\|\cdot\|_1$ 下是否完备?

Proof:
$C^1([a,b])$ 在范数 $\|\cdot\|_1$ 下不完备.

考虑一阶连续可导函数序列 $\{x_n\}$:

$$
\begin{aligned}
x_n(t) &:= \sqrt{\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{n^2}} \quad (\forall\, t\in[a,b]) \\
x_n'(t) &:= \frac{t-\frac{a+b}{2}}{\sqrt{\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{n^2}}} \quad (\forall\, t\in[a,b])
\end{aligned}
$$

设 $x(t) := |t-\frac{a+b}{2}|$ $(\forall\, t\in[a,b])$，则我们有:

$$
\begin{aligned}
\|x_n-x\|_1 &= \left(\int_a^b (|x_n(t)-x(t)|^2+|x_n'(t)-x(t)|^2)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(2\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(\left|\sqrt{\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{n^2}}-\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\right|^2+\left|\frac{t-\frac{a+b}{2}}{\sqrt{\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{n^2}}}-1\right|^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(2\int_0^{\frac{a+b}{2}} \left(\left|\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}-t\right|^2+\left|\frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}}-1\right|^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

(其中最后一步的收敛性是因为函数列 $\{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}\}$ 关于 n 一致收敛于 t，因而可以先取极限再求积分)
因此 $\{x_n\}$ 是 $\|\cdot\|_1$ 意义下的 Cauchy 序列，
但其极限 $x(t) := |t-\frac{a+b}{2}|$ $(\forall\, t\in[a,b])$ 不一阶连续可导，因而 $x\neq C^1([a,b])$
这说明 $C^1([a,b])$ 在范数 $\|\cdot\|_1$ 下不完备.

Problem 3

设 $0<p<1$，考虑 $L^p([0,1])$，定义:

$$
\|x\|_p := \int_0^1 |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty \quad (\forall\, x\in L^p([0,1]))
$$

试证明 $\|\cdot\|_p$ 不是 $L^p([0,1])$ 上的范数，但 $d_p(x,y) := \|x-y\|_p$ 是 $L^p([0,1])$ 上的距离.

- **Lemma:**
  给定 $0<p<1$，我们有:

$$(a+b)^p \le a^p + b^p \quad (\forall\, a, b \ge 0)$$

Proof:
考虑函数 $f(t) := (1+t)^p - 1 - t^p\ (t \ge 0)$
我们有:

$$\begin{aligned} &f(0) = 0 \\ \hline &f'(t) = p(1+t)^{p-1} - pt^{p-1} \\ &\qquad\ = p[(1+t)^{p-1} - t^{p-1}] \\ &\qquad\ < 0 \quad (\forall\, t > 0) \end{aligned}$$

因此 $f(t) \le 0\ (\forall\, t \ge 0)$
取 $t = \frac{a}{b}$ 即可得 $(a+b)^p \le a^p + b^p\ (\forall\, a, b \ge 0)$

Proof:
容易验证 $\|\cdot\|_p$ 不满足齐次性:

$$\begin{aligned} \|2x\|_p &= \int_0^1 |2x(t)|^p \mathrm{d}t \\ &= 2^p \int_0^1 |x(t)|^p \mathrm{d}t \quad (\forall\, x \in L^p([0,1])) \\ &= 2^p \|x\|_p \\ &< 2\|x\|_p \end{aligned}$$

现考虑 $d_p(x,y) := \|x-y\|_p$:

- ① 正定性和对称性是显然的.
- ② 三角不等式:

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= \int_0^1 |x(t)-y(t)|^p \mathrm{d}t \\ &\le \int_0^1 (|x(t)-z(t)| + |z(t)-y(t)|)^p \mathrm{d}t \quad (\text{use lemma}) \\ &\le \int_0^1 |x(t)-z(t)|^p \mathrm{d}t + \int_0^1 |z(t)-y(t)|^p \mathrm{d}t \\ &= d_p(x,z) + d_P(z,y) \end{aligned}$$

因此 $d_p(x,y) := \|x-y\|_p$ 是 $L^p([0,1])$ 上的距离.

Problem 4

设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范空间，X_0 是 X 的稠密子集.
试证明对于任意 $x \in X$ 都存在 $\{x_n\} \subset X_0$ 使得 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$

证明:
任意给定 $x \in X$
由于 X_0 是 X 的稠密子集，故存在 $x_1 \in X_0$ 使得 $\|x - x_1\| < \frac{1}{2}$
根据 $\|x_1\| - \|x\| \le \|x - x_1\| < \frac{1}{2}$ 可知 $\|x_1\| < \frac{1}{2} + \|x\|$

对于 $x - x_1 \in X$，存在 $x_2 \in X_0$ 使得 $\|(x-x_1) - x_2\| < \frac{1}{2^2}$
根据 $\|x_2\| - \|x - x_1\| \le \|(x-x_1) - x_2\| < \frac{1}{2^2}$ 可知:

$$\|x_2\| \le \|x - x_1\| + \|x - x_1 - x_2\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2^0}$$

现假设已经归纳地找到了 $x_1, \dots, x_k$
对于 $x - x_1 - \cdots - x_k \in X$，存在 $x_{k+1} \in X_0$ 使得 $\|(x - x_1 - \cdots - x_k) - x_{k+1}\| < \frac{1}{2^{k+1}}$
根据 $\|x_{k+1}\| - \|x - x_1 - \cdots - x_k\| \leq \|(x - x_1 - \cdots - x_k) - x_{k+1}\| < \frac{1}{2^{k+1}}$ 可知:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1}\| &\leq \|x - x_1 - \cdots - x_k\| + \|(x - x_1 - \cdots - x_k) - x_{k+1}\| \\ &< \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &< \frac{1}{2^{k-1}}\end{aligned}$$

这样我们就找到了一列 $\{x_n\} \subset X_0$ 使得:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| < \frac{1}{2^n} \quad (\forall\, n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\|x_1\| \leq \frac{1}{2} + \|x\|$$

$$\|x_n\| < \frac{1}{2^{n-2}} \quad (\forall\, n \geq 2)$$

于是我们有:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \frac{1}{2} + \|x\| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-2}} = \|x\| + \frac{5}{2} < \infty$$

Problem 5

对于任意 $x \in C([0,1])$ 定义:

$$\|x\|_1 := \left(\int_0^1 |x(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_2 := \left(\int_0^1 (1+t)|x(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$$

试证明 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 的等价性.

Proof:

- 一方面，我们有:

$$\begin{aligned}\|x\|_2 &= \left(\int_0^1 (1+t)|x(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \left(\int_0^1 (1+0)|x(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall\, x \in C([0,1])) \\ &= \|x\|_1\end{aligned}$$

- 另一方面，我们有:

$$\begin{aligned}\|x\|_2 &= \left(\int_0^1 (1+t)|x(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^1 (1+1)|x(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall\, x \in C([0,1])) \\ &= \sqrt{2}\|x\|_1\end{aligned}$$

综上所述，范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 在 $C([0,1])$ 上等价.

Problem 6

设 $(X_1, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X_2, \|\cdot\|_2)$ 为赋范空间.
在 $X_1 \times X_2 = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ 中定义:

$$\begin{aligned}\|x\|_{\text{sum}} &:= \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 \\ \|x\|_{\max} &:= \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\}\end{aligned}$$

试证明 $\|\cdot\|_{\text{sum}}$ 和 $\|\cdot\|_{\max}$ 的等价性.

Proof:

- 一方面，我们有:

$$\begin{aligned}\|x\|_{\text{sum}} &= \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 \\ &\geq \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\} \quad (\forall\, x \in X_1 \times X_2 = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}) \\ &= \|x\|_{\max}\end{aligned}$$

- 另一方面，我们有:

$$\begin{aligned}\|x\|_{\text{sum}} &= \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 \\ &\leq 2\max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\} \quad (\forall\, x \in X_1 \times X_2 = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}) \\ &= 2\|x\|_{\max}\end{aligned}$$

综上所述，范数 $\|\cdot\|_{\text{sum}}$ 和 $\|\cdot\|_{\max}$ 在 $X_1 \times X_2$ 上等价.

Problem 7

考虑闭区间 $[a, b]$ 上的 k 阶连续可导实值函数空间 $C^k([a, b])$
定义:

$$d(x, y) := \sum_{i=0}^{k} \max_{t \in [a,b]} |x^{(i)}(t) - y^{(i)}(t)| \quad (x, y \in C^k([a, b]))$$

试证明:

- ① $(C^k([a, b]), d)$ 是完备的度量空间
- ② 若定义 $\|x\| := d(x, 0)$，则 $(C^k([a, b]), \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间

Part (1)

$(C^k([a, b]), d)$ 是完备的度量空间.

- **Lemma (陶哲轩实分析, 定理 $14.7.1$)**
  设 $[a, b]$ 是一个区间.
  对于任意正整数 n，设 $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ 是一个可微函数，其导函数 f_n' 是连续函数.
  若导函数序列 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于函数 $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$,
  且存在一点 x_0 使得极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ 存在,
  则函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于一个可微函数 f，且 f 的导函数 $f' = g$.

  通俗地说，如果 f_n' 是一致收敛的，且对于某个 x_0，$f_n(x_0)$ 收敛,
  则 f_n 也是一致收敛的，且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$

Proof:
首先证明 d 是 $C^k([a, b])$ 上的距离:

- ① 正定性和对称性显然.

- ② 三角不等式:

$$\begin{aligned}d(x,z)+d(z,y)&=\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}|x^{(i)}(t)-z^{(i)}(t)|+\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}|z^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|\\&\geq\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}\{|x^{(i)}(t)-z^{(i)}(t)|+|z^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|\}\\&\geq\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}\{|x^{(i)}(t)-z^{(i)}(t)+z^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|\}\\&=\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|\\&=d(x,y)\end{aligned}\quad(\forall\, x,y,z\in C^k([a,b]))$$

因此 d 是 $C^k([a,b])$ 上的距离.

下面证明 $C^k([a,b])$ 在距离 d 下是完备的.
设 $\{x_n\}$ 是 $(C^k([a,b]),d)$ 中的 Cauchy 序列,
即对于任意 $\varepsilon>0$, 都存在 $N\in\mathbb{Z}_+$ 使得:

$$d(x_n,x_m)=\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}|x_n^{(i)}(t)-x_m^{(i)}(t)|<\varepsilon\quad(\forall\, m,n>N)$$

于是我们有:

$$d_\infty(x_n^{(i)},x_m^{(i)})=\max_{t\in[a,b]}|x_n^{(i)}(t)-x_m^{(i)}(t)|<\varepsilon\quad(\forall\, m,n>N)$$

这表明对于任意 $i=0,1,\dots,k$, 序列 $\{x_n^{(i)}\}$ 都是 $(C([a,b]),d_\infty)$ 中的 Cauchy 序列.
根据 $(C([a,b]),d_\infty)$ 的完备性可知, 存在 $f_i\in C^{[a,b]}$ 使得 $d_\infty(x_n^{(i)},f_i)\to 0\ (n\to\infty)$
(注意: $(C([a,b]),d_\infty)$ 中的依度量收敛等价于一致收敛)
根据 **Lemma** 可知 f_i 可导, 且 $f_i'=f_i\ (i=1,\dots,k)$
记 $x:=f_0$ 可知 x 是 k 阶连续可导的函数 (因而 $x\in C^k([a,b])$), 且 $x^{(i)}=f_i\ (i=0,1,\dots,k)$
于是我们有:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)&=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}|x_n^{(i)}(t)-x^{(i)}(t)|\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}|x_n^{(i)}(t)-f_i(t)|\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=0}^{k}d_\infty(x_n^{(i)},f_i)\right\}\\&=\sum_{i=0}^{k}\lim_{n\to\infty}d_\infty(x_n^{(i)},f_i)\\&=0\end{aligned}$$

这表明 $C^k([a,b])$ 在距离 d 下是完备的.

Part (2)

若定义 $\|x\| := d(x,0)$，则 $(C^k([a,b]),\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

Proof:
首先验证 $\|\cdot\|$ 是 $C^k([a,b])$ 上的范数:

- ① 正定性显然.
- ② 齐次性:

$$\begin{aligned}\|\alpha x\| &= \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |\alpha x^{(i)}(t) - 0| \\ &= |\alpha| \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^{(i)}(t) - 0| \\ &= |\alpha|\|x\|\end{aligned} \quad (\forall\, \alpha\in\mathbb{R}, x\in C^k([a,b]))$$

因此 $\|\cdot\|$ 是 $C^k([a,b])$ 上的范数.
由于 $C^k([a,b])$ 在距离 d 下是完备的，而 d 是 $\|\cdot\|$ 诱导的距离，
故 $C^k([a,b])$ 在范数 $\|\cdot\|$ 下是完备的，即 $(C^k([a,b]),\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

Problem 8 $(\star)$

记 H^p $(0\le p\le 1)$ 为 $[a,b]$ 上满足 Holder 条件的函数全体:

$$|x(t_1)-x(t_2)| \le M|t_1-t_2|^p \quad (\forall\, t_1,t_2\in[a,b])$$

其中的线性运算与 $C([a,b])$ 相同.
在 H^p 中定义范数:

$$\|x\| := |x(a)| + \sup_{a\le t_1<t_2\le b} \frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^p}$$

试证明 H^p 是 Banach 空间.

Proof:
首先验证 $\|\cdot\|$ 为 H^p 中的范数:

- ① 正定性和齐次性显然.
- ② 三角不等式:

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= |x(a)+y(a)| + \sup_{a\le t_1<t_2\le b} \frac{|x(t_1)+y(t_1)-x(t_2)-y(t_2)|}{|t_1-t_2|^p} \\ &\le |x(a)|+|y(a)| + \sup_{a\le t_1<t_2\le b} \frac{|x(t_1)-x(t_2)|+|y(t_1)-y(t_2)|}{|t_1-t_2|^p} \\ &\le |x(a)|+|y(a)| + \sup_{a\le t_1<t_2\le b} \frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^p} + \sup_{a\le t_1<t_2\le b} \frac{|y(t_1)-y(t_2)|}{|t_1-t_2|^p} \\ &= \|x\|+\|y\|\end{aligned} \quad (\forall\, x,y\in H^p)$$

因此 $\|\cdot\|$ 为 H^p 中的范数.

下面说明 H^p 在 $\|\cdot\|$ 下是完备的.
设 $\{x_n\}$ 是 H^p 中的 Cauchy 序列，即对于任意 $\varepsilon>0$，都存在 $N\in\mathbb{Z}_+$ 使得:

$$\|x_n-x_m\| = |x_n(a)-x_m(a)| + \sup_{a\le t_1<t_2\le b} \frac{|x_n(t_1)-x_m(t_1)-x_n(t_2)+x_m(t_2)|}{|t_1-t_2|^p} < \varepsilon$$

首先有 $|x_n(a)-x_m(a)|<\varepsilon$ 成立，表明 $\{x_n\}$ 在 $t=a$ 处收敛.
其次有:

$$\begin{aligned}\varepsilon &> \sup_{a\le t_1<t_2\le b}\frac{|x_n(t_1)-x_m(t_1)-x_n(t_2)+x_m(t_2)|}{|t_1-t_2|^p} \\ &\ge \frac{|x_n(t)-x_m(t)-x_n(a)+x_m(a)|}{|t-a|^p} \\ &\ge \frac{|x_n(t)-x_m(t)|}{|b-a|^p}-\frac{|x_n(a)-x_m(a)|}{|b-a|^p}\end{aligned} \quad (\forall\, t\in(a,b])$$

因此我们有:

$$\begin{aligned}|x_n(t)-x_m(t)| &\le \varepsilon|b-a|^p+|x_n(a)-x_m(a)| \\ &< \varepsilon|b-a|^p+\varepsilon \\ &= \varepsilon(|b-a|^p+1)\end{aligned} \quad (\forall\, t\in(a,b])$$

因此 $\{x_n\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛，设逐点极限为 x.

我们只需证明 $x\in H^p$，即 x 满足 Holder 条件:
在 $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$ 中令 $m\to\infty$ 便得到:

$$\begin{aligned}\varepsilon &> \|x_n-x\| \\ &= \|x\|-\|x_n\| \\ &\ge \sup_{a\le t_1<t_2\le b}\frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^p}-\|x_n\|\end{aligned}$$

因此我们有:

$$\sup_{a\le t_1<t_2\le b}\frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^p}\le\varepsilon+\|x_n\| \quad (\forall\, n>N)$$

由于收敛序列一定是有界序列，故我们有:

$$\sup_{a\le t_1<t_2\le b}\frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^p}\le\varepsilon+\sup_{n>N}\|x_n\|<\infty$$

这表明 x 满足 Holder 条件，即存在 $M<\infty$ 使得:

$$|x(t_1)-x(t_2)|\le M|t_1-t_2|^p \quad (\forall\, t_1,t_2\in[a,b])$$

故 $x\in H^p$
因此 H^p 在 $\|\cdot\|$ 下是完备的，即 $(H^p,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

Problem 9

设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间，$X\neq\{0_X\}$
试证明 X 是 Banach 空间当且仅当 X 中的单位球面 $S:=\{x\in X:\|x\|=1\}$ 完备.

Proof:

- ① 必要性:
  设 X 是 Banach 空间.
  则对于 S 上的任意 Cauchy 序列，都存在 $x\in X$ 使得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$
  根据 $|\|x_n\|-\|x\||\le\|x_n-x\|\to 0\ (n\to\infty)$ 可知:

  $$\|x\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=1$$

  表明 $x\in S$，说明 S 是完备的.

- ② 充分性:
  设 S 完备.
  设 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列.
  注意到:

  $$|\|x_n\| - \|x_m\|| \le \|x_n - x_m\| \to 0 \quad (n, m \to 0)$$

  故 $\{\|x_n\|\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的收敛数列.

  若 $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$，则我们有 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0_X \in X$
  若 $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = a > 0$，则存在 $N \in \mathbb{Z}_+$ 使得对于任意 $n > N$ 我们都有 $\|x_n\| \ge \frac{a}{2} > 0$
  记 $y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$
  根据 $\|y_n\| = 1$ 可知 $\{y_n\} \subset S$
  对于任意 $m, n > N$ 我们都有:

  $$\begin{aligned}\|y_n - y_m\| &= \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right\| \\ &= \left\| \frac{\|x_m\|x_n - \|x_n\|x_m}{\|x_n\|\|x_m\|} \right\| \\ &= \left\| \frac{\|x_m\|x_n - \|x_m\|x_m + \|x_m\|x_m - \|x_n\|x_m}{\|x_n\|\|x_m\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|x_n\|} \left\| \|x_n - x_m\| + (\|x_m\| - \|x_n\|) \frac{x_m}{\|x_m\|} \right\| \\ &\le \frac{1}{\|x_n\|} \{\|x_n - x_m\| + |\|x_m\| - \|x_n\|| \cdot 1\} \\ &< \frac{2}{a} \{\|x_n - x_m\| + |\|x_m\| - \|x_n\||\} \\ &\to 0 \quad (n, m \to \infty)\end{aligned}$$

  因此 $\{y_n\}$ 是 S 的 Cauchy 列
  根据 S 的完备性可知，存在 $y \in S$ 使得 $y_n \to y \ (n \to \infty)$
  于是我们有:

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| y_n = ay \in X$$

  综上所述，$(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

Problem 10 $(\star)$

给定 $\phi \in C([a, b])$，定义线性算子 $T : L^1([a, b]) \mapsto L^1([a, b])$ 如下:

$$(Tx)(t) = \phi(t)x(t) \quad (\forall\, x \in L^1([a, b]))$$

试证明 $\|T\| = \|\phi\|_\infty$

Proof:
注意到:

$$\begin{aligned}\|Tx\|_1 &= \int_a^b |(Tx)(t)| \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b |\phi(t)x(t)| \mathrm{d}t \\ &\le \max_{t\in[a,b]} |\phi(t)| \int_a^b |x(t)| \mathrm{d}t \\ &= \|\phi\|_\infty \|x\|_1\end{aligned} \qquad (\forall\, x \in L^1([a, b]))$$

根据 $\phi \in C([a,b])$ 可知存在 $t_0 \in [a,b]$ 使得 $\phi(t_0) = \max_{t\in[a,b]} |\phi(t)| = \|\phi\|_\infty$
则上式当 $x = \delta(t_0)$ (Dirac 函数) 时取等.
注意到 $\int_a^b \delta(t_0)dt = 1$，故有 $\|x\|_1 = 1$ 和 $\|Tx\|_1 = \|\phi\|_\infty$
(严格来说，我们应该使用 Gauss 磨光函数来一致逼近 Dirac 函数: $\{x_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\exp\{-\frac{(t-t_0)^2}{2n^2}\}\}$)
因此我们有:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|Tx\|_1 = \|\phi\|_\infty$$

Problem 11 $(\star)$

给定 $\phi \in C([a,b])$，定义泛函 $f : C([a,b]) \mapsto \mathbb{R}$ 如下:

$$f(x) := \int_a^b \phi(t)x(t)\mathrm{d}t \quad (\forall\, x \in C([a,b]))$$

试求 $\|f\|$

Solution:
注意到:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\int_a^b \phi(t)x(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\le \int_a^b |\phi(t)x(t)|\mathrm{d}t \qquad\qquad (\forall\, x \in C([a,b])) \\ &\le \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \int_a^b |\phi(t)|\mathrm{d}t \\ &= \|\phi\|_1 \|x\|_\infty \end{aligned}$$

其中 $\|\phi\|_1 := \int_a^b |\phi(t)|\mathrm{d}t$
这表明 $\|f\| = \sup_{\|x\|_\infty=1} |f(x)| \le \|\phi\|_1 = \int_a^b |\phi(t)|\mathrm{d}t$

考虑函数 $x(t)$，它在 $\phi(t)$ 零点处为 0，在其他点处为 $\mathrm{sgn}(\phi(t))$
但这个函数并不是连续实值函数，即 $x \notin C([a,b])$
我们用一个函数序列逼近它.
(存疑: $\phi(t)$ 在 $[a,b]$ 上有无限个零点怎么办?)

> 助教 (陈柯屿):
> 只要考虑小区间上是否有零点即可，有多少个不重要.
> 重要的是这样的小区间上函数值不超过 ε

任意给定 $\varepsilon > 0$
将 $[a,b]$ 划分为 n 等分，其中 n 足够大，以确保任意区间至多包含 $\phi(t)$ 的一个零点.
若某一区间不包含 $\phi(t)$ 的零点，则 $x_n(t)$ 取值为 $\mathrm{sgn}(\phi(t))$，记这类区间的并集为 S_1
若某一区间包含 $\phi(t)$ 的一个零点，则 $x_n(t)$ 取成线性函数连接端点值以保证连续性，记这类区间的并集为 S_2
(注意到闭区间上的连续函数一定一致连续，故 n 足够大时，可保证在这类区间上 $|\phi(t)|$ 的积分小于 ε)
因此对于足够大的 n 我们有:

$$
\begin{aligned}
f(x_n) &= \int_a^b \phi(t)x_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{S_1} \phi(t)\mathrm{sgn}(\phi(t))\mathrm{d}t + \int_{S_2} \phi(t)x_n(t)\mathrm{d}t \\
&\geq \int_{S_1} |\phi(t)|\mathrm{d}t - \int_{S_2} |\phi(t)|\mathrm{d}t \quad (\text{note that } S_1 \cup S_2 = [a,b]) \\
&= \int_a^b |\phi(t)|\mathrm{d}t - 2\int_{S_2} |\phi(t)|\mathrm{d}t \\
&> \int_a^b |\phi(t)|\mathrm{d}t - 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

注意到 $\|x_n\|_\infty = 1$，故 $\|f\| = \sup_{\|x\|_\infty=1} |f(x)| \geq f(x_n) > \int_a^b |\phi(t)|\mathrm{d}t - 2\varepsilon$
令 $\varepsilon \to 0$ 可得 $\|f\| \geq \int_a^b |\phi(t)|\mathrm{d}t$

综上所述，我们有:

$$
\|f\| = \sup_{\|x\|_\infty=1} |f(x)| = \|\phi\|_1 = \int_a^b |\phi(t)|\mathrm{d}t
$$

Problem 12 $(\star)$

定义泛函 $f : C([a,b]) \mapsto \mathbb{R}$ 如下:

$$
f(x) := x(a) - x(b) \quad (\forall\, x \in C([a,b]))
$$

试证明 f 是 $C([a,b])$ 上的有界线性泛函，并求 $\|f\|$

Proof:
首先证明线性性:

$$
\begin{aligned}
f(\alpha x + \beta y) &= \alpha x(a) + \beta y(a) - \alpha x(b) - \beta y(b) \\
&= \alpha f(x) + \beta f(y)
\end{aligned}
\quad (\forall\, x, y \in C([a,b]), \alpha, \beta \in \mathbb{R})
$$

其次证明有界性:

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= |x(a) - x(b)| \\
&\leq |x(a)| + |x(b)| \quad (\forall\, x \in C([a,b])) \\
&\leq 2\|x\|_\infty
\end{aligned}
$$

当 $x(t) = \frac{2}{b-a}(t - \frac{a+b}{2})$ 时上式可以取等.
表明 f 是有界线性泛函，且算子范数为:

$$
\|f\| = \sup_{\|x\|_\infty=1} |f(x)| = 2
$$

Problem 13 $(\star)$

试求泛函 $f(x) := \int_0^1 \sqrt{t}x(t^2)dt$ 在 $C([0,1])$ 和 $L^2([0,1])$ 上的算子范数 $\|f\|$

- 助教: 可以使用 Holder 不等式

Solution:
注意到:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^1 \sqrt{t}x(t^2)\mathrm{d}t \quad (\text{let } u = t^2) \\
&= \int_0^1 \sqrt[4]{u}\cdot x(u)\mathrm{d}\sqrt{u} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{u}}x(u)\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

- ① 当 $x \in C([0,1])$ 时，我们有:

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{u}}x(u)\mathrm{d}u\right| \\
&\le \frac{1}{2}\|x\|_\infty \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{u}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\|x\|_\infty \cdot [\frac{4}{3}u^{\frac{3}{4}}]|_{u=0}^1 \\
&= \frac{2}{3}\|x\|_\infty
\end{aligned}
$$

  当 $x \equiv 1$ 时上式可以取等.
  因此我们有:

$$
\|f\| = \sup_{\|x\|_\infty = 1}|f(x)| = \frac{2}{3}
$$

- ② 当 $x \in L^2([0,1])$，我们有:

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= \frac{1}{2}\left|\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{u}}x(u)\mathrm{d}u\right| \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\
&\le \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt[4]{u}}\right|^2\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |x(u)|^2\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|_2 \\
&= \frac{1}{2}(2\sqrt{u}|_{u=0}^1)^{\frac{1}{2}}\|x\|_2 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\|x\|_2
\end{aligned}
$$

  当 $x(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ 时上式可以取等.
  因此我们有:

$$
\|f\| = \sup_{\|x\|_\infty = 1}|f(x)| = \frac{\sqrt{2}}{2}
$$

Problem 14

设 T_n 是 $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \le p < \infty)$ 上的线性算子:

$$
(T_n x)(t) := \begin{cases} x(t) & \text{if } |t| \le n \\ 0 & \text{if } |t| > n \end{cases} \quad (\forall\, x \in L^p(\mathbb{R}))
$$

试证明 $\{T_n\}$ 强收敛于恒等算子 I，但不一致收敛到 I

Proof:
对于任意 $x \in L^p(\mathbb{R})$，它一定处处有限，故对于足够大的 n 我们有 $T_n x = x$ 成立.
因此 $\{T_n\}$ 强收敛于恒等算子 I，即 $\lim_{n\to\infty}\|(I - T_n)x\|_p = 0$

注意到:

$$((I-T_n)x)(t) = \begin{cases} 0 & |t| \le n \\ x(t) & |t| > n \end{cases}$$

定义 $L^p(\mathbb{R})$ 中的序列 $\{x_n\}$ 如下:

$$x_n(t) = \begin{cases} 2n & 0 \le t \le \frac{1}{(2n)^p} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

则我们有 $(I-T_n)x_n = x_n$，因而有:

$$\|(I-T_n)x_n\|_p = \|x_n\|_p$$

注意到 $\|x_n\|_p = 1$
因此算子范数为:

$$\|I-T_n\| = \sup_{\|x\|_p=1} \|(I-T_n)x\| \ge 1$$

说明 $\{T_n\}$ 不依算子范数收敛到恒等算子 I

Problem 15

定义算子 $T : L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$ 如下:

$$(T(x))(t) := x(-t) \quad (\forall\, x \in L^2(\mathbb{R}))$$

问: T 是否为连续算子?

Solution:
容易验证 T 是线性算子.
注意到:

$$\begin{aligned} \|Tx\|_2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(-t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\|_2 \end{aligned} \quad (\forall\, x \in L^2(\mathbb{R}))$$

于是我们有:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|Tx\|_2 = 1$$

说明 T 是有界线性算子，等价于连续线性算子.

Problem 16 $(\star)$

设 $\{T_n\}$ 为 $C([0,1])$ 上的一列线性算子:

$$(T_n x)(t) := x(t^{1+\frac{1}{n}}) \quad (\forall\, x \in C([0,1]))$$

试证明 $\{T_n\}$ 强收敛于某个有界线性算子，但不一致收敛到该算子.

- 助教: 注意共鸣定理的条件

Proof:
对于任意 $x \in C([0,1])$ 和 $t \in [0,1]$，我们都有:

$$
\begin{aligned}
\|(I-T_n)x\|_\infty &= \|x-T_nx\|_\infty \\
&= \max_{t\in[0,1]} |x(t)-x(t^{1+\frac{1}{n}})| \quad (\text{note that } x(t) \text{ is continuous on } [0,1]) \\
&\to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

因此 $\{T_n\}$ 强收敛于恒等算子 I
下面说明 $\{T_n\}$ 不一致收敛于恒等算子 I.
任意给定 $t_0 \in (0,1)$，定义:

$$
x_n(t) := \begin{cases} 0 & t\in[0,t_0^{1+\frac{1}{n}}] \\ \text{linear} & t\in[t_0^{1+\frac{1}{n}},t_0] \\ 1 & t\in[t_0,1] \end{cases}
$$

则 $\|x_n\|_\infty = 1$ 且有:

$$
((I-T_n)x_n)(t) = x_n(t)-(T_nx_n)(t) = \begin{cases} 0 & t\in[0,t_0^{(1+\frac{1}{n})^2}] \\ \text{linear} & t\in[t_0^{(1+\frac{1}{n})^2},t_0^{1+\frac{1}{n}}] \\ -1 & t=t_0^{1+\frac{1}{n}} \\ \text{linear} & t\in[t_0^{1+\frac{1}{n}},t_0] \\ 0 & t\in[t_0,1] \end{cases}
$$

因此有 $\|(I-T_n)x_n\|_\infty = 1 = \|x_n\|_\infty$
于是我们有:

$$
\|I-T_n\| = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|(I-T_n)x\|_\infty \geq 1
$$

说明 $\{T_n\}$ 不依算子范数收敛到恒等算子 I

Problem 17

给定极限为 0 的数列 $\{a_n\}$，定义算子 $T: l^2 \mapsto l^2$ 如下:

$$
T(x) := \sum_{i=1}^\infty a_ix_ie_i \quad (\forall\, x=\sum_{i=1}^\infty x_ie_i \in l^2)
$$

其中 $(e_i)_k := \delta_{k,i}$ (其中 $\delta_{i,j}$ 是 Kronecker 记号)
试证明 T 是紧算子.

Proof:
考虑算子列 $\{T_n\}$:

$$
T_nx = \sum_{i=1}^n a_ix_ie_i \quad (\forall\, x=\sum_{i=1}^\infty x_ie_i \in l^2)
$$

注意到 $\text{rank}(T_n) = \dim(\text{Range}(T_n)) \leq n$，故 T_n 是紧算子.
由于数列 $\{a_n\}$ 极限为 0，故对于任意 $\varepsilon>0$，都存在 $N\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $|a_n|<\varepsilon$ $(\forall\, n>N)$
因此我们有:

$$
\begin{aligned}
\|(T-T_n)x\|_2 &= \|Tx-T_nx\|_2 \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_ix_ie_i - \sum_{i=1}^{n} a_ix_ie_i\right\|_2 \\
&= \left\|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_ix_ie_i\right\|_2 \\
&= \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_ix_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad\qquad (\forall\ x=\sum_{i=1}^{\infty} x_ie_i \in l^2) \\
&\le \varepsilon\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \varepsilon\|x\|_2
\end{aligned}
$$

于是算子范数 $\|T-T_n\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|(T-T_n)x\|_2 \le \varepsilon$
这说明 $\|T-T_n\| \to 0\ (n\to\infty)$，故 T 也是紧算子.

Problem 18

试求 δ 函数的广义导数.

(这部分内容课上没讲)