期末回忆

Problem 1

定义线性算子 $(Tx)(t) := \int_a^t x(s)\mathrm{d}s$
(1) 计算 $L([a,b]) \mapsto C([a,b])$ 上的算子范数.

- 首先证明 T 是有界的:

$$
\begin{aligned}
\|Tx\|_\infty &= \max_{t\in[a,b]} |(Tx)(t)| \\
&= \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^t x(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\le \max_{t\in[a,b]} \int_a^t |x(s)|\mathrm{d}s \\
&= \int_a^b |x(s)|\mathrm{d}s \\
&\le \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \cdot \int_a^b 1\mathrm{d}s \\
&= (b-a)\|x\|_\infty
\end{aligned}
$$

  因此 T 是有界的.
  根据 $\|T\| = \inf\{M : M > 0 \text{ such that } \|Tx\|_Y \le M\|x\|_X \text{ for all } x \in X\}$ 可知 $\|T\| \le b-a$

- 其次证明 $\|T\| = b-a$:
  取 $x_0(t) \equiv 1\ (\forall\, t \in [a,b])$，它满足 $\|x_0\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x_0(t)| = 1$
  于是我们有:

$$
\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Tx\|_\infty \quad (\text{note that } \|x_0\|_\infty = 1) \\
&\ge \|Tx_0\|_\infty \\
&= \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^t x_0(s)\mathrm{d}s\right| \\
&= \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^t 1\mathrm{d}s\right| \\
&= \max_{t\in[a,b]} (t-a) \\
&= b-a
\end{aligned}
$$

  结合 $\|T\| \le b-a$ 可知 $\|T\| = b-a$，命题得证.

---

(2) 计算 $L([a,b]) \mapsto L([a,b])$ 上的算子范数.

- 首先证明 T 是有界的:

$$
\begin{aligned}
\|Tx\|_\infty &= \max_{t\in[a,b]} |(Tx)(t)| \\
&= \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^t x(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \max_{t\in[a,b]} \int_a^t |x(s)|\mathrm{d}s \\
&= \int_a^b |x(s)|\mathrm{d}s \\
&= \|x\|_1
\end{aligned}
$$

因此 T 是有界的.
根据 $\|T\| = \inf\{M : M > 0 \text{ such that } \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \text{ for all } x \in X\}$ 可知 $\|T\| \leq 1$

- 其次证明 $\|T\| = 1$:
  取 $x_0(t) = \frac{1}{b-a}$ $(\forall\, t \in [a,b])$，它满足 $\|x_0\|_1 = \int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t = \frac{b-a}{b-a} = 1$
  于是我们有:

$$
\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{\|x\|_1=1} \|Tx\|_\infty \quad (\text{note that } \|x_0\|_1 = 1) \\
&\geq \|Tx_0\|_\infty \\
&= \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^t x_0(s)\mathrm{d}s\right| \\
&= \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^t \frac{1}{b-a}\mathrm{d}s\right| \\
&= \max_{t\in[a,b]} \frac{t-a}{b-a} \\
&= \frac{b-a}{b-a} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

  结合 $\|T\| \leq 1$ 可知 $\|T\| = 1$，命题得证.

Problem 2

证明赋范空间上的线性算子的 "有界" 等价于 "连续".

> **(工科泛函分析基础 定理 $3.3.5$, 泛函分析讲义 定理 $3.3.2$)**
> 设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的两个赋范空间，$T : X \mapsto Y$ 是一个线性算子.
> T 为连续算子当且仅当 T 是有界算子.
> (这表明连续线性算子等价于有界线性算子)

- **充分性:**
  设 T 是有界算子，则存在 $M > 0$ 使得 $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ $(\forall\, x \in X)$
  考虑 X 中的序列 $\{x_n\}$
  若 $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ (即 $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$)，则我们有:

$$
\|T(x_n) - T(x)\|_Y = \|T(x_n - x)\|_Y \leq M\|x_n - x\|_X \to 0 \ (n \to \infty)
$$

  这表明 T 是连续算子.

- **必要性:**
  设 T 是连续算子.
  (反证法) 假设 T 是无界算子，则存在序列 $\{x_n\}$ 使得 $\|T(x_n)\|_Y > n\|x_n\|_X$ $(\forall\, n \in \mathbb{Z}_+)$
  定义 $z_n := \frac{x_n}{n\|x_n\|_X}$ $(\forall\, n \in \mathbb{Z}_+)$，则我们有:

$$\|z_n\|_X = \left\| \frac{x_n}{n\|x_n\|_X} \right\|_X = \frac{1}{n} \to 0$$

因此 $z_n \to 0_X \ (n \to \infty)$
根据 T 的连续性可知 $T(z_n) \to T(0_X) = 0_Y \ (n \to \infty)$
但注意到:

$$\begin{aligned}
\|T(z_n) - 0_Y\|_Y &= \|T(z_n - 0_X)\|_Y \\
&= \left\| T\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|_X} \right) \right\|_Y \\
&= \frac{\|T(x_n)\|_Y}{n\|x_n\|_X} \qquad\qquad (\forall\, n \in \mathbb{Z}_+) \\
&\geq \frac{n\|x_n\|_X}{n\|x_n\|_X} \\
&= 1
\end{aligned}$$

这与 $T(z_n) \to T(0_X) = 0_Y \ (n \to \infty)$ 矛盾.
因此 T 是有界算子.

Problem 3

线性泛函 f 连续当且仅当 $\mathrm{Ker}(f)$ 是 X 的闭子空间.

> **(泛函分析讲义, 定理 3.3.4)**
> 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的赋范空间，f 是 $X \mapsto \mathbb{F}$ 的线性泛函.
> 则 f 连续当且仅当 $\mathrm{Ker}(f) := \{x \in X : f(x) = 0_{\mathbb{F}}\}$ 是 X 的闭子空间.

- **必要性:**
  设 f 连续.
  考虑 $\mathrm{Ker}(f)$ 中的序列 $\{x_n\}$
  若 $x_n \to x \ (n \to \infty)$ (即 $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$),
  则根据 f 的连续性可知:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)| &= \lim_{n\to\infty} |0_{\mathbb{F}} - f(x)| \quad (\text{note that } \{x_n\} \subset \mathrm{Ker}(f)) \\
&= |0_{\mathbb{F}} - f(x)| \\
&= 0
\end{aligned}$$

  因此 $f(x) = 0_{\mathbb{F}}$，于是 $x \in \mathrm{Ker}(f)$
  这表明 $\mathrm{Ker}(f)$ 是 X 的闭子空间.

- **充分性:**
  设 $\mathrm{Ker}(f)$ 是 X 的闭子空间.
  由于 f 是线性泛函，故要证明 f 连续，即等价于证明 f 有界.
  (反证法)
  假设 f 无界，则存在 $\{x_n\} \in X$ 使得 $|f(x_n)| \geq n\|x_n\| \ (\forall\, n \in \mathbb{Z}_+)$
  定义 $z_n := \frac{x_1}{f(x_1)} - \frac{x_n}{f(x_n)} \ (\forall\, n \in \mathbb{Z}_+)$
  根据 $f(z_n) = f(\frac{x_1}{f(x_1)} - \frac{x_n}{f(x_n)}) = \frac{f(x_1)}{f(x_1)} - \frac{f(x_n)}{f(x_n)} = 0_{\mathbb{F}}$ 可知 $z_n \in \mathrm{Ker}(f) \ (\forall\, n \in \mathbb{Z}_+)$
  注意到:

$$\begin{aligned}\left\|z_n - \frac{x_1}{f(x_1)}\right\| &= \left\|\frac{x_1}{f(x_1)} - \frac{x_n}{f(x_n)} - \frac{x_1}{f(x_1)}\right\| \\ &= \left\|-\frac{x_n}{f(x_n)}\right\| \\ &= \frac{\|x_n\|}{|f(x_n)|} \quad (\text{note that } |f(x_n)| \geq n\|x_n\| \ (\forall\, n \in \mathbb{Z}_+)) \\ &\leq \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty)\end{aligned}$$

因此 $z_n \to \frac{x_1}{f(x_1)} \ (n \to \infty)$
根据 $\mathrm{Ker}(f)$ 的闭性可知 $\frac{x_1}{f(x_1)} \in \mathrm{Ker}(f)$
但注意到 $f(\frac{x_1}{f(x_1)}) = \frac{f(x_1)}{f(x_1)} = 1_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$，与 $\frac{x_1}{f(x_1)} \in \mathrm{Ker}(f)$ 矛盾.
因此 f 是有界线性泛函，即等价于 f 是连续线性泛函.

Problem 4

(Homework 04 Problem 10)
实内积空间上 $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ 等价于存在 $\alpha > 0$ 使得 $y = \alpha x$

证明:
充分性显然，下证必要性:
设 $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$，则我们有:

$$\begin{aligned}\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) &= \|x+y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|\end{aligned}$$

因此我们有 $\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) = \|x\|\|y\|$
从而有:

$$\begin{aligned}\left\|y - \frac{\|y\|}{\|x\|}x\right\| &= 2\|y\|^2 - 2\frac{\|y\|}{\|x\|}\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) \\ &= 2\|y\|^2 - 2\frac{\|y\|}{\|x\|}\|x\|\|y\| \\ &= 0\end{aligned}$$

Problem 5

试求 l^2 上的一步左移算子的伴随算子.

Solution:
记 l^2 上的一步左移算子为:

$$T(x) := (x_2, x_3, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i+1}e_i \quad (\forall\, x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in l^2)$$

显然 T 为线性算子.
其中 e_i 的第 i 个元素是 1，而其他元素都是 0，即 $e_{ik} := \delta_{ik} \ (\forall\, k \in \mathbb{Z}_+)$

根据伴随算子的定义为:

$$
\begin{aligned}
\langle Tx, y\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} x_{i+1}e_i, \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_{i+1}y_i \qquad\qquad (\forall\, x, y \in l^2) \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i, \sum_{i=2}^{\infty} y_{i-1} e_i \right\rangle \\
&= \langle x, T^* y\rangle
\end{aligned}
$$

因此 T^* 是 l^2 上的一步右移算子:

$$
T^* y := (0, y_1, y_2, \dots) = \sum_{i=2}^{\infty} y_{i-1} e_i \quad (\forall\, y = (y_1, y_2, y_3, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i \in l^2)
$$

Problem 6

证明 Banach 空间自反当且仅当其共轭空间自反.

> **(泛函分析讲义, 定理** $3.4.9$**)**
> Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 是自对偶的，当且仅当其对偶空间 $(X_*, \|\cdot\|_*)$ 是自对偶的.

- 我们需要证明:
  若自然映射 $J_0 : X \mapsto X_{**}$ 是满的，则自然映射 $J_1 : X_* \mapsto X_{***}$ 也是满的.
  若自然映射 $J_1 : X_* \mapsto X_{***}$ 是满的，则自然映射 $J_0 : X \mapsto X_{**}$ 也是满的.
  换言之，$J_0(X) = X_{**}$ 的充要条件是 $J_1(X) = X_{***}$

证明:

- **必要性:** 设 $J_0(X) = X_{**}$
  任意给定 $F \in X_{***}$，定义 $f \in X_*$ 为 $f(x) := F(J_0(x))\ (\forall\, x \in X)$
  于是对于任意 $x \in X$ 都有:

  $$
  J_1(f)(J_0(x)) = J_0(x)(f) = f(x) = F(J_0(x))
  $$

  根据 $J_0(X) = X_{**}$，因此 $J_1(f) = F$
  根据 F 的任意性可知 $J_1(X_*) = X_{***}$
- **充分性:** 设 $J_1(X) = X_{***}$
  (反证法) 若 $J_0(X) \subset X_{**}$，则根据 Hahn-Banach 泛函延拓定理可知:
  存在 $F \in X_{***}$ 使得 F 在 $J_0(X)$ 上恒为 0 而 $\|F\| = 1$
  根据 $J_1(X_*) = X_{***}$ 可知存在 $f \in X_*$ 使得 $J_1(f) = F$
  于是对于任意 $x \in X$ 都有:

  $$
  f(x) = J_0(x)(f) = J_1(f)(J_0(x)) = F(J_0(x)) = 0
  $$

  所以 f 是 X 上的零泛函，与 $\|f\| = \|J_1(f)\| = \|F\| = 1$ 相矛盾，故有 $J_0(X) = X_{**}$