泛函分析 Homework 02

姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 1

在 $\mathbb{R}$ 上定义 $d(x,y) := \arctan|x-y|$
试证明 $(\mathbb{R}, d)$ 是度量空间.

Proof:

- ① 正定性:

  $$d(x,y) = \arctan|x-y| \geq \arctan(0) = 0 \ (\forall\, x,y \in \mathbb{R})$$

  当且仅当 $x = y$ 时取等.
- ② 对称性:

  $$d(y,x) = \arctan|y-x| = \arctan|x-y| = d(x,y)$$

- ③ 三角不等式:
  任意给定 $x,y,z \in \mathbb{R}$
  - 若 $\arctan|x-y| + \arctan|y-z| \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$，则我们有:

    $$\begin{aligned} d(x,z) &= \arctan|x-z| \\ &< \frac{\pi}{2} \\ &\leq \arctan|x-y| + \arctan|y-z| \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

  - 若 $\arctan|x-y| + \arctan|y-z| \in [0, \frac{\pi}{2})$,
    则我们有 $0 \leq |x-y||y-z| < 1$ 成立 (右侧的小于号基于 $\tan(\theta)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 1\ (\forall\, \theta \in (0,\frac{\pi}{2}))$ 的事实)
    因此我们有:

    $$\begin{aligned} \tan(d(x,z)) &= \tan(\arctan|x-z|) \\ &= |x-z| \\ &\leq |x-y| + |y-z| \quad (\text{note that } 0 \leq |x-y||y-z| < 1) \\ &\leq \frac{|x-y|+|y-z|}{1-|x-y||y-z|} \\ &= \frac{\tan(\arctan|x-y|) + \tan(\arctan|y-z|)}{1-\tan(\arctan|x-y|)\tan(\arctan|y-z|)} \\ &= \tan(\arctan|x-y| + \arctan|y-z|) \\ &= \tan(d(x,y)+d(y,z)) \\ \hline \Rightarrow\ d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

  综上所述，度量 d 满足三角不等式.

Problem 5

设 $d_1, d_2, \ldots, d_m, \ldots$ 都是集合 X 上的度量，试证明以下定义的 d 也是 X 上的度量:

- ① $d = \sup_{1\leq i\leq m} d_i$
- ② $d = \sqrt{d_1^2 + \cdots + d_m^2}$
- ③ $d = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{d_k}{1+d_k}$

Proof:
这三个度量的正定性和对称性都是显然的，我们只需证明它们满足三角不等式即可:

- ① 考虑 $d = \sup_{1\le i\le m} d_i$
  对于任意 $x,y,z\in X$ 都有:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sup_{1\le i\le m} d_i(x,z) \\ &\le \sup_{1\le i\le m} \{d_i(x,y)+d_i(y,z)\} \\ &\le \sup_{1\le i\le m} d_i(x,y) + \sup_{1\le i\le m} d_i(y,z) \\ &= d(x,y)+d(y,z) \end{aligned}$$

- ② 考虑 $d = \sqrt{d_1^2+\cdots+d_m^2}$

> **(Minkowsik 不等式)**
> 任意给定实数 $p\ge 1$ 和正整数 $n\in\mathbb{Z}_+$，对于任意 $x,y\in\mathbb{C}^n$ 我们都有:
>
> $$\|x+y\|_p = (\sum_{k=1}^n |x_k+y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^n |y_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p$$
>
> 当且仅当 x,y 线性相关时取等.

  根据 $p=2$ 情形的 Minkowsik 不等式可知 $\|\cdot\|_2$ 具有次可加性.
  于是对于任意 $x,y,z\in X$ 都有:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sqrt{d_1^2(x,z)+\cdots+d_m^2(x,z)} \\ &= \left\| \begin{bmatrix} d_1(x,z) \\ \vdots \\ d_m(x,z) \end{bmatrix} \right\|_2 \\ &\le \left\| \begin{bmatrix} d_1(x,y)+d_1(y,z) \\ \vdots \\ d_m(x,z)+d_m(y,z) \end{bmatrix} \right\|_2 \\ &\le \left\| \begin{bmatrix} d_1(x,y) \\ \vdots \\ d_m(x,y) \end{bmatrix} \right\|_2 + \left\| \begin{bmatrix} d_1(y,z) \\ \vdots \\ d_m(y,z) \end{bmatrix} \right\|_2 \\ &= \sqrt{d_1^2(x,y)+\cdots+d_m^2(x,y)} + \sqrt{d_1^2(y,z)+\cdots+d_m^2(y,z)} \\ &= d(x,y)+d(y,z) \end{aligned}$$

- ③ 考虑 $d = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}\frac{d_k}{1+d_k}$
  注意到 $f(t) = \frac{t}{1+t} = 1-\frac{1}{1+t}$ 在 $[0,\infty)$ 上递增，因此我们有:

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &= f(|a+b|) \\ &\le f(|a|+|b|) \\ &= \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \qquad (\forall\, a,b\in\mathbb{R}) \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \end{aligned}$$

  于是对于任意 $x,y,z\in X$ 都有:

$$
\begin{aligned}
d(x,z) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{d_k(x,z)}{1+d_k(x,z)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{d_k(x,y)+d_k(y,z)}{1+d_k(x,z)+d_k(y,z)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{d_k(x,y)}{1+d_k(x,y)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{d_k(y,z)}{1+d_k(y,z)} \\
&= d(x,y)+d(y,z)
\end{aligned}
$$

Problem 7

设 (X,d) 为离散度量空间，试证明 (X,d) 可分的充要条件是 X 为可数集.

Proof:
离散度量空间 (X,d) 中 d 的定义为:

$$
d(x,y) := \mathbb{1}(x\neq y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x=y \\ 1 & \text{if } x\neq y \end{cases} (\forall\, x,y\in X)
$$

- **充分性:**
  若 X 为可数集，则它自身就是稠密子集，故 (X,d) 可分.
- **必要性:**
  若 (X,d) 可分，则存在可数稠密子集 $S:=\{x_1,x_2,\ldots\}$
  (反证法) 假设 X 不是可数集，则一定有 $X\backslash S\neq\emptyset$
  因此存在 $x_0\in X\backslash S$，当 $r<1$ 时我们有 $B_{(X,d)}(x_0,r)\cap S=\emptyset$，这与 "$S$ 在 X 中稠密" 的假定矛盾.
  故 X 是可数集.

综上所述，命题得证.

Problem 8

设 (X,d) 为度量空间，$S\subset X$ 非空，定义 $f(x):=d(x,S)=\inf_{y\in S}d(x,y)$ $(\forall\, x\in X)$
试证明 $f(x)$ 是 X 上的连续函数.

Proof:
任意给定 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$，考虑所有满足 $d(x,z)<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ 的 $z\in X$:

- 一方面，根据下确界的性质可知存在 $y_1\in S$ 使得:

  $$
  d(x,y_1)<\inf_{y\in S}d(x,y)+\frac{\varepsilon}{2}=f(x)+\frac{\varepsilon}{2}
  $$

  于是我们有:

  $$
  \begin{aligned}
  f(z) &= \inf_{y\in S}d(z,y) \\
  &\leq d(z,y_1) \\
  &\leq d(z,x)+d(x,y_1) \quad (\text{note that } d(x,y_1)<f(x)+\frac{\varepsilon}{2} \text{ and } d(z,x)<\delta) \\
  &< \delta+(f(x)+\frac{\varepsilon}{2}) \\
  &= \frac{\varepsilon}{2}+f(x)+\frac{\varepsilon}{2} \\
  &= f(x)+\varepsilon
  \end{aligned}
  $$

  因此我们有 $f(z)<f(x)+\varepsilon$ 成立.
- 另一方面，根据下确界的性质可知存在 $y_2\in S$ 使得:

  $$
  d(z,y_2)<\inf_{y\in S}d(z,y)+\frac{\varepsilon}{2}=f(z)+\frac{\varepsilon}{2}
  $$

于是我们有:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \inf_{y\in S} d(x,y) \\
&\leq d(x,y_2) \\
&\leq d(x,z)+d(z,y_2) \quad (\text{note that } d(z,y_2)<f(z)+\frac{\varepsilon}{2} \text{ and } d(x,z)<\delta) \\
&< \delta+(f(z)+\frac{\varepsilon}{2}) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}+f(z)+\frac{\varepsilon}{2} \\
&= f(z)+\varepsilon
\end{aligned}$$

因此我们有 $f(x)<f(z)+\varepsilon$ 成立.

综上所述，我们有 $|f(x)-f(z)|<\varepsilon$ 成立.
根据 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$ 的任意性可知 $f(x)$ 是 X 上的连续函数.

Problem 9

(Urysohn 引理的特殊情况)
设 (X,d) 是度量空间，F_1,F_2 是 X 中不相交的闭集.
试证明存在 X 上的连续函数 $f(x)$ 使得 $\begin{cases} f(x)=0 & \text{if } x\in F_1 \\ f(x)=1 & \text{if } x\in F_2 \end{cases}$

Proof:
我们定义:

$$\begin{aligned}
d(x,F_1) &:= \inf_{y\in F_1} d(x,y) = \min_{y\in F_1} d(x,y) \\
d(x,F_2) &:= \inf_{y\in F_2} d(x,y) = \min_{y\in F_2} d(x,y) \\
f(x) &:= \frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}
\end{aligned}$$

根据 **Problem 8** 的结论可知 $d(x,F_1)$ 和 $d(x,F_2)$ 都是 X 上的连续函数.
其中 $\inf$ 变为 $\min$ 是由 F_1,F_2 的闭性保证的,
因为连续函数在非空闭集上一定可以取到下确界，即最小值存在.

因此 $d(x,F_1)=0$ 当且仅当 $x\in F_1$，$d(x,F_2)=0$ 当且仅当 $x\in F_2$
根据 $F_1\cap F_2\neq\emptyset$ 可知 $d(x,F_1)$ 和 $d(x,F_2)$ 不能同时为零，表明 $f(x)$ 在 X 上是定义良好的.
由于函数的四则运算保持连续性，故 $f(x):=\frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}$ 是 X 上的连续函数.

显然它满足 $\begin{cases} f(x)=0 & \text{if } x\in F_1 \\ f(x)=1 & \text{if } x\in F_2 \end{cases}$

Problem 11

设 $f(x)$ 是度量空间 (X,d_X) 到度量空间 (X,d_Y) 的连续映射，A 在 X 中稠密.
试证明 $f(A)$ 在 $f(X)$ 中稠密.

Proof:
由于 A 在 (X,d_X) 中稠密，故 $X\subseteq \text{cl}(A)$ (其中 $\text{cl}(A)$ 代表 A 的闭包)
换言之，任意给定 $x\in X$，要么有 $x\in A$，要么 x 是 A 的极限点

- 若 $x\in A$，则 $f(x)\in f(A)$
- 若 x 是 A 的极限点，即存在 A 中的序列 $\{x_n\}$ 依度量 d_X 收敛于 x，
  则根据映射 f 的连续性可知 $f(A)$ 中的序列 $\{f(x_n)\}$ 依度量 d_Y 收敛于 $f(x)$
  因此 $f(x)$ 也是 $f(A)$ 的极限点.

因此任意给定 $x\in X$，要么有 $f(x)\in A$，要么 $f(x)$ 是 $f(A)$ 的极限点.
这表明 $f(X)\subseteq \text{cl}(f(A))$，故 $f(A)$ 在 $f(X)$ 中稠密.

Problem 13

设 M 是 $(C([a,b]),d_\infty)$ 中的有界集.
试证明 $S:=\{F(x)=\int_a^x f(t)dt : f\in M\}$ 是列紧集.

- **(有界集合)**
  设 (X,d) 是一个度量空间，S 是 X 的子集.
  我们称 S 是**有界的** (bounded)，当且仅当 X 中存在一个包含 S 的球 $B(x,r)$.
  我们称 (X,d) 是有界的，当且仅当存在一个包含 X 的球 $B(x,r)$.
- **(Arzela-Ascoli 定理, 工科泛函分析基础, 定理 $2.2.18$, 泛函分析讲义, 定理 $2.2.8$)**
  闭区间 $[a,b]$ 上的连续实值函数空间 $(C([a,b]),d_\infty)$ 的子集 S 列紧的充要条件是:
  ① S 一致有界，即存在 $M>0$ 使得对于任意 $x\in S$ 都有 $|x(t)|<M\ (\forall\, t\in[a,b])$ 成立.
  ② S 等度连续，即对于任意 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta>0$ 使得只要 $|t_1-t_2|<\delta$ 就有
  $|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon\ (\forall\, x\in S)$ 成立.

Proof:
由于 M 是 $(C([a,b]),d_\infty)$ 中的有界集，
故存在 $K>0$ 使得对于任意 $f\in M$ 都有 $|f(x)|\leq K\ (\forall\, x\in[a,b])$

任意给定 $f\in M$，现考虑 S 中的函数 $F(x):=\int_a^x f(t)dt$:

- **① 一致有界:**

$$\begin{aligned}|F(x)|&=\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\\&\leq\int_a^x|f(t)|\mathrm{d}t\\&\leq\int_a^x K\mathrm{d}t\qquad(\forall\, x\in[a,b])\\&\leq\int_a^b K\mathrm{d}t\\&=K(b-a)\end{aligned}$$

  故 $S:=\{F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t : f\in M\}$ 一致有界.
- **② 等度连续:**
  对于任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{K}$
  只要 $|x_1-x_2|<\delta$，我们就有:

$$\begin{aligned}|F(x_2)-F(x_1)|&=\left|\int_a^{x_2}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_1}f(t)\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t\right|\\&\leq K\,|x_2-x_1|\\&<K\delta\\&=K\cdot\frac{\varepsilon}{K}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

  因此 $S:=\{F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t : f\in M\}$ 等度连续

综合①②，根据 **Arzela-Ascoli 定理**可知 S 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续实值函数空间 $(C([a,b]),d_\infty)$ 中的列紧集.

Problem 16

设 D 是区间 $[0,1]$ 上具有连续导数 (在端点 $t=1,t=0$ 处分别具有左、右导数) 的实函数全体.
在 D 上定义 $d(x,y):=\sup_{0\leq t\leq 1}|x(t)-y(t)|+\sup_{0\leq t\leq 1}|x'(t)-y'(t)|$
试证明:

- ① (D,d) 是度量空间
- ② D 中序列 $\{x_n\}$ 按度量 d 收敛于 x 的充要条件是 $\{x_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 x 且 $\{x'_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 x'
- ③ D 是完备的

Part (1)

试证明 (D,d) 是度量空间.

Proof:

- **① 正定性:**

$$d(x,y)=\sup_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|+\sup_{0\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|\ge 0\ (\forall\ x,y\in D)$$

  当且仅当 $x=y$ 时取等.

- **② 对称性:**

$$\begin{aligned}d(y,x)&=\sup_{0\le t\le 1}|y(t)-x(t)|+\sup_{0\le t\le 1}|y'(t)-x'(t)|\\&=\sup_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|+\sup_{0\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|\ (\forall\ x,y\in D)\\&=d(x,y)\end{aligned}$$

- **③ 三角不等式:**

$$\begin{aligned}d(x,z)&=\sup_{0\le t\le 1}|x(t)-z(t)|+\sup_{0\le t\le 1}|x'(t)-z'(t)|\\&\le\sup_{0\le t\le 1}\{|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|\}+\sup_{0\le t\le 1}\{|x'(t)-y'(t)|+|y'(t)-z'(t)|\}\\&\le\sup_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|+\sup_{0\le t\le 1}|y(t)-z(t)|+\sup_{0\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|+\sup_{0\le t\le 1}|y'(t)-z'(t)|\\&=d(x,y)+d(y,z)\end{aligned}\quad(\forall\ x,y,z\in D)$$

综上所述，(D,d) 是度量空间.

Part (2)

试证明 D 中序列 $\{x_n\}$ 按度量 d 收敛于 x 的充要条件是 $\{x_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 x 且 $\{x'_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 x'

Proof:

- **① 充分性:**
  若 $\{x_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 x 且 $\{x'_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 x'，
  则对于任意 $\varepsilon>0$ 都存在 $N_1,N_2\in\mathbb{Z}_+$ 使得:

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le 1}|x_n(t)-x(t)|<\frac{\varepsilon}{2}\ (\forall\ n>N_1)\\\sup_{0\le t\le 1}|x'_n(t)-x'(t)|<\frac{\varepsilon}{2}\ (\forall\ n>N_2)\end{aligned}$$

  因此对于任意 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 都有:

$$\begin{aligned}d(x_n,x)&=\sup_{0\le t\le 1}|x_n(t)-x(t)|+\sup_{0\le t\le 1}|x'_n(t)-x'(t)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

  这表明 $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$，即 $\{x_n\}$ 依度量 d 收敛于 x

- **② 必要性:**
  若 D 中序列 $\{x_n\}$ 按度量 d 收敛于 x，
  则对于任意 $\varepsilon>0$，都存在 $N\in\mathbb{Z}_+$ 使得:

$$d(x_n,x)<\varepsilon\ (\forall\ n>N)$$

这意味着:

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le 1}|x_n(t)-x(t)|\le d(x_n,x)<\varepsilon\ (\forall\ n>N)\\ \sup_{0\le t\le 1}|x_n'(t)-x'(t)|\le d(x_n,x)<\varepsilon\ (\forall\ n>N)\end{aligned}$$

这表明 $\{x_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 x 且 $\{x_n'\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 x'

Part (3)

试证明 (D,d) 是完备度量空间.

- **Lemma (陶哲轩实分析, 定理 $14.7.1$)**
  设 $[a,b]$ 是一个区间.
  对于任意正整数 n，设 $f_n:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ 是一个可微函数，其导函数 f_n' 是连续函数.
  若导函数序列 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于函数 $g:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$,
  且存在一点 x_0 使得极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)$ 存在,
  则函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于一个可微函数 f，且 f 的导函数 $f'=g$.

  通俗地说，如果 f_n' 是一致收敛的，且对于某个 x_0，$f_n(x_0)$ 收敛,
  则 f_n 也是一致收敛的，且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$

Proof:
考虑 D 中的 Cauchy 序列 $\{x_n\}$
对于任意 $\varepsilon>0$，都存在 $N\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $d(x_m,x_n)<\varepsilon\ (\forall\ m,n>N)$
因此我们有:

$$\begin{aligned}d_\infty(x_m,x_n)=\sup_{0\le t\le 1}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon\ (\forall\ m,n>N)\\ d_\infty(x_m,x_n)=\sup_{0\le t\le 1}|x_m'(t)-x_n'(t)|<\varepsilon\ (\forall\ m,n>N)\end{aligned}$$

因此 $\{x_n\}$ 和 $\{x_n'\}$ 都是 $C([0,1],d_\infty)$ 中的 Cauchy 序列.
由于 $C([0,1],d_\infty)$ 是完备度量空间,
故存在 $x,y\in C([0,1])$ 使得 $\{x_n\}$ 依度量收敛于 x，而 $\{x_n'\}$ 依度量收敛于 y,
即 $\{x_n\}$ 一致收敛于 x，而 $\{x_n'\}$ 一致收敛于 y.

根据 **Lemma** 可知 $y=x'$
因此 $\{x_n\}$ 一致收敛于 x'，而 $\{x_n'\}$ 一致收敛于 x'.
结合 **Part (2)** 的结论可知序列 $\{x_n\}$ 按度量 d 收敛于 x
这表明 (D,d) 是完备度量空间.

Problem 18

设 (X,d) 是度量空间.
试证明 Cauchy 列收敛当且仅当其存在收敛子列.

Proof:
考虑 (X,d) 中的任意 Cauchy 列 $\{x_n\}$

- **必要性显然.**
  若 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 收敛，则其每个子列都是收敛的.
  (度量空间中依度量收敛的序列的任意子列也收敛于同一极限)
- **充分性:**
  若 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，极限为 x,
  则对于任意 $\varepsilon>0$，都存在 $K,N\in\mathbb{Z}_+$ 使得:

$$d(x_{n_k} - x) < \frac{\varepsilon}{2} \ (\forall\, k > K)$$
$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \ (\forall\, m, n > N)$$

因此对于任意满足 $n_k > N$ 的 $k > K$ 和 $n > N$ 都有:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

这表明 $\{x_n\}$ 依度量 d 收敛到 x

Problem 19

设 $P([0,1])$ 是 $[0,1]$ 上的实系数多项式全体，定义 $d(p,q) := \int_0^1 |p(x) - q(x)| \mathrm{d}x \ (\forall\, p, q \in P([0,1]))$
试证明 $(P([0,1]), d)$ 不完备，并指出其完备化空间.

Proof:

- **举例说明 $(P([0,1]), d)$ 不完备:**
  考虑 $P([0,1])$ 中的序列 $\{p_n(x) := x^n\}$
  对于任意 $\varepsilon > 0$，取 $N = \lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil$，则对于任意 $m, n > N$ 都有:

$$\begin{aligned} d(p_m, p_n) &= \int_0^1 |x^m - x^n| \mathrm{d}x \\ &\le \int_0^1 (x^m + x^n) \mathrm{d}x \\ &= \left\{ \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^{n+1}}{n+1} \right\}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \\ &< 1/\frac{2}{\varepsilon} + 1/\frac{2}{\varepsilon} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

  因此 $\{p_n\}$ 为 $(P([0,1]), d)$ 中的 Cauchy 序列.
  这个序列的依度量 d 收敛的极限为 $f(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$
  但 $f \notin P([0,1])$，故 $P([0,1])$ 在度量 d 下是不完备的.
- $(P([0,1]), d)$ 的完备化空间是 $(L^1([0,1]), d)$，即 $[0,1]$ 上的 **Lebesgue 可积函数空间**.
  (回忆起结论: 连续实值函数空间 $C([a,b])$ 按度量 d_p 的完备化空间是 p 次幂可积函数空间 $(L^p([a,b]), d_p)$)

Problem 21

已知 $\phi \in C([0,1]), r \in (0,1)$
试证明方程 $x(t) = r\sin(x(t)) + \phi(t)$ 在 $[0,1]$ 上存在唯一的连续解.

- **(不动点)**
  设 (X, d) 是度量空间，$T : X \mapsto X$ 是一个算子.
  若 $x_0 \in X$ 满足 $T(x_0) = x_0$，则我们称 x_0 为算子 T 的不动点.
- **(压缩映射)**
  设 (X, d) 是度量空间，$T : X \mapsto X$ 是一个算子.
  若存在常数 $\lambda \in (0,1)$ 使得 $d(T(x), T(y)) \le \lambda d(x,y) \ (\forall\, x, y \in X)$
  则我们称 T 为 X 上的压缩映射.
  显然压缩映射必定为连续映射.

- **(压缩映射定理, 又称 Banach 不动点定理, 工科泛函分析基础, 定理 $2.5.3$, 泛函分析讲义 定理 $2.5.1$)**
  设 (X,d) 为完备度量空间.
  若 $T:X\mapsto X$ 是一个压缩映射，则 T 在 X 中有唯一的不动点.

Proof:
定义映射 $T:C([0,1])\mapsto C([0,1])$ 为:

$$T(x)(t)=r\sin{(x(t))}+\phi(t)$$

则我们有:

$$\begin{aligned}
d_{\infty}(T(x),T(y)) &= \sup_{0\le t\le 1}|r\sin{(x(t))}+\phi(t)-r\sin{(y(t))}-\phi(t)| \\
&= r\sup_{0\le t\le 1}|\sin{(x(t))}-\sin{(y(t))}| \quad (\text{note that }\frac{d}{du}\sin{(u)}=\cos{(u)}\in[-1,1]\text{ for all }u\in\mathbb{R}) \\
&\le r\sup_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)| \\
&= r\cdot d_{\infty}(x,y)
\end{aligned}$$

由于 $r\in(0,1)$，故 T 是一个压缩映射.

注意到 $(C[0,1],d_{\infty})$ 是完备度量空间,
根据压缩映射定理可知存在唯一的 $x_{\star}\in C([0,1])$ 使得 $T(x_{\star})=x_{\star}$
也就是说，方程 $x(t)=T(x)(t)=r\sin{(x(t))}+\phi(t)$ 在 $C([0,1])$ 中存在唯一解.
命题得证.