FDU 数字图像处理 5. 图像分割

本文参考以下教材:

- Digital Image Processing (4th Edition, R. Gonzalez, R. Woods) Chapter 10
- 数字图像处理 (第四版, R. Gonzalez, R. Woods) 第 10 章
- 机器学习 (周志华) 第 9 章

欢迎批评指正!

5.1 K-means

在 K 均值聚类中，每个观测值都被分配给具有最近均值的聚类，
因此每个均值称为其聚类的原型 (又称聚类中心)
K 均值算法是一个迭代过程，它不断地细化均值直至收敛.

给定灰度值 $z_1,\dots,z_n$

- ① 初始化: 规定一组初始均值 $\mu_1,\dots,\mu_K$
- ② 将每个样本分配给最接近的均值对应的聚类集合:
  遍历 $i=1,\dots,n$
  灰度值 z_i 隶属的类别序号为 $\arg\min_{k\in\{1,\dots,K\}}\|z_i-\mu_k\|^2$，分配给对应的聚类集合.
  最终得到聚类集合 $S_1,\dots,S_K$
- ③ 更新聚类中心:

$$\mu_k=\text{average}(S_k)=\frac{1}{|S_k|}\sum_{z\in S_k}z_k\ (\forall\ k=1,\dots,K)$$

- ④ 收敛检查:
  计算当前步骤和前几步中均值的残差的 Euclid 范数.
  若低于某个预设定的阈值，则停止迭代; 否则返回步骤 ②

该算法在有限次数的迭代后收敛到一个局部极小解 (不保证是全局极小解)
收敛的结果取决于 $\mu_1,\dots,\mu_K$ 的初值.
一般将均值 $\mu_1,\dots,\mu_K$ 的初值设置为随机选取的 k 个像素点的灰度值，重复多次，以检验解的稳定性.
(算法的 Python 实现参考 Homework 07 Problem 01)

例 10.22　用 k 均值聚类分割图像。

图 10.49(a)显示了一幅大小为 688×688 像素的图像，图 10.49(b)是用 k 均值算法（$k=3$）分割图像得到的结果。如看到的那样，该算法高精度地提取了图像中的所有有意义的区域。例如，比较两幅图像中字符的质量。重要的是，要认识到整个分割是对单个变量（灰度）聚类完成的。由于 k 均值处理的通常是向量观测值，因此其区分不同区域的能力随着式(10.84)中向量 z 的分量数的增加而增强。

a b

图 10.49　(a)大小为 688×688 像素的图像；(b)使用 $k=3$ 的 k 均值算法分割图像后的结果 ■

5.2 GMM-EM

n 维随机变量 x 的 **Gauss 混合分布**由 K 个多元 Gauss 分布的凸组合构成:

$$p_{\text{mixed}}(x) := \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \cdot p(x|\mu_k, \Sigma_k)$$

$$\text{where } p(x|\mu_k, \Sigma_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma_k|^{\frac{1}{2}}}\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu_k)^{\mathrm{T}}\Sigma_k^{-1}(x-\mu_k)\}\ (\forall\ k=1,\dots,K)$$

其中 $\alpha_1,\dots,\alpha_K > 0$ 为混合系数，满足 $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$

Gauss 混合模型参数估计的 EM 算法: (机器学习 周志华 图 9.6)
(算法的 Python 实现参考 Homework 07 Problem 01)
给定灰度值 $z_1,\dots,z_n$

- **(1)** 初始化 Gauss 混合分布的模型参数 $\{(\alpha_k, \mu_k, \Sigma_k) : 1 \le k \le K\}$
    - 可设置 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_K = \frac{1}{K}$
    - 可通过 K-means 聚类算法得到 $\mu_1,\dots,\mu_K$ 的初值和初始聚类集合 $S_1,\dots,S_K$
    - 可设置 $S_1,\dots,S_K$ 的样本协方差矩阵作为 $\Sigma_1,\dots,\Sigma_K$ 的初值:

    $$\Sigma_k := \frac{1}{|S_k|}\sum_{z\in S_k}(z-\mu_k)(z-\mu_k)^{\mathrm{T}}$$

- **(2)** 重复迭代直至模型参数的变化量小于某个预设定的阈值:
    - **① Expectation Step**
      遍历 $i=1,\dots,n$，计算 z_i 由第 $k=1,\dots,K$ 个 Gauss 混合成分生成的后验概率:

      $$\gamma_i^{(k)} := \frac{\alpha_k \cdot p(z_i|\mu_k, \Sigma_k)}{\sum_{k=1}^{K} \alpha_k \cdot p(z_i|\mu_k, \Sigma_k)}\ (\forall\ k=1,\dots,K)$$

    - **② Maximization Step**
      遍历 $k=1,\dots,K$，更新模型参数 $(\alpha_k, \mu_k, \Sigma_k)$

$$\mu_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(k)} z_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(k)}}$$

$$\Sigma_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(k)} (z_i - \mu_k)(z_i - \mu_k)^{\mathrm{T}}}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(k)}}$$

$$\alpha_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(k)}}{n}$$

- **(3)** 计算 $z_1, \ldots, z_n$ 的类标记，得到最终的 K 个聚类集合 $S_1, \ldots, S_K$

$$\mathrm{label}(z_i) = \arg\max_{k \in \{1, \ldots, K\}} \gamma_i^{(k)} \ (\forall\, i = 1, \ldots, n)$$

The End