高等线性代数 Homework 06

Due: Oct. 21, 2024
姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 1

构造可逆的线性变换 $\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{bmatrix}$ 将下面关于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的二次型化为关于 β_1,β_2,β_3 的对角二次型:

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3$$

Solution:
首先我们有:

$$\begin{aligned}f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)&=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3\\&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

注意到对称分块矩阵的**对称行列 Gauss 消元**可以表示为:

$$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}^{\mathrm{T}}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&\\A_{21}A_{11}^{-1}&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&\\&A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{21}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&A_{11}^{-1}A_{21}^{\mathrm{T}}\\&I\end{bmatrix}$$

于是我们有:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\1&0&2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

取 $C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ (即 $C=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$)

则我们有:

$$
\begin{aligned}
f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3 \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\-2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\-2&0&2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} \\
&= \left(C^{-1}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}\left(C^{-1}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{bmatrix} \\
&= \beta_1^2-\beta_2^2-\beta_3^2
\end{aligned}
$$

上述转换通过以下线性变换完成:

$$
\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} = C\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_1-\beta_2-\beta_3\\\beta_1+\beta_2-\beta_3\\\beta_3\end{bmatrix}
$$

Problem 2

已知:

$$
A = \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\1&3&6&10&15\\1&4&10&19&31\\1&5&15&31&53\end{bmatrix}
$$

试构造一个对称矩阵 X 使得 $\begin{cases}AXA=A\\XAX=X\end{cases}$

- **一点观察:**
  构造 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ Moore-Penrose 逆 $A^\dagger$ 需要求解 A 的一个满秩分解 $A=XY$，此时它具有如下形式:

  $$
  A^\dagger = Y^{\mathrm{H}}(YY^{\mathrm{H}})^{-1}(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}X^{\mathrm{H}}
  $$

  可以验证它满足 Penrose 方程组:

  $$
  \begin{cases}AA^\dagger A=A\\A^\dagger AA^\dagger=A^\dagger\\(AA^\dagger)^{\mathrm{H}}=AA^\dagger\\(A^\dagger A)^{\mathrm{H}}=A^\dagger A\end{cases}
  $$

  满秩分解通常可由 SVD 分解、QR 分解或 LU 分解得到.
  这里我们选用最适合手算的 LU 分解.

Solution:
注意到 A 的 LU 分解可通过行 Gauss 消元可得:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 19 & 31 \\ 1 & 5 & 15 & 31 & 53 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ 1 & & & 1 & \\ 1 & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & 5 & 9 & 14 \\ & 3 & 9 & 18 & 30 \\ & 4 & 14 & 30 & 52 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & & 1 & \\ 1 & 4 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & 1 & 3 & 6 \\ & & 3 & 9 & 18 \\ & & 6 & 18 & 36 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & 1 & 3 & 6 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

因此 $\mathrm{rank}(A) = 3 < 5$，表明 A 是奇异矩阵，A^{-1} 不存在.
所以我们需要构造 A 的 Moore-Penrose 广义逆.
根据上述 LU 分解我们可得到 A 的一个满秩分解为:

$$
Y := \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}
$$

$$
YY^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 19 & 31 \\ 1 & 5 & 15 & 31 & 53 \end{bmatrix} = A
$$

我们取:

$$
\begin{aligned}
X &:= Y(Y^{\mathrm{T}}Y)^{-1}(Y^{\mathrm{T}}Y)^{-1}Y^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 30 & 35 \\ 10 & 35 & 46 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 30 & 35 \\ 10 & 35 & 46 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{175} \begin{bmatrix} 155 & -110 & 50 \\ -110 & 130 & -75 \\ 50 & -75 & 50 \end{bmatrix} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{30625} \begin{bmatrix} 38625 & 3525 & -13075 & -11175 & 9225 \\ 3525 & 3050 & 2075 & 600 & -1375 \\ -13075 & 2075 & 8350 & 5750 & -5725 \\ -11175 & 600 & 5750 & 4275 & -3825 \\ 9225 & -1375 & -5725 & -3825 & 4325 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

其中 3 阶矩阵求逆可通过计算伴随矩阵除以行列式简单得到.
可以验证上述定义的 X 满足 **Penrose 条件** (中的两条):

$$
\begin{aligned}
AXA &= (YY^{\mathrm{T}})\cdot Y(Y^{\mathrm{T}}Y)^{-2}Y^{\mathrm{T}}\cdot(YY^{\mathrm{T}}) \\
&= Y(Y^{\mathrm{T}}Y)(Y^{\mathrm{T}}Y)^{-2}(Y^{\mathrm{T}}Y)Y^{\mathrm{T}} \\
&= YY^{\mathrm{T}} \\
&= A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
XAX &= Y(Y^{\mathrm{T}}Y)^{-2}Y^{\mathrm{T}}\cdot(YY^{\mathrm{T}})\cdot Y(Y^{\mathrm{T}}Y)^{-2}Y^{\mathrm{T}} \\
&= Y(Y^{\mathrm{T}}Y)^{-2}(Y^{\mathrm{T}}Y)(Y^{\mathrm{T}}Y)(Y^{\mathrm{T}}Y)^{-2}Y^{\mathrm{T}} \\
&= Y(Y^{\mathrm{T}}Y)^{-2}Y^{\mathrm{T}} \\
&= X
\end{aligned}
$$

Problem 3

给定正整数 n.
若 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称矩阵，且存在 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 使得 $(x^{\mathrm{T}}Ax)(y^{\mathrm{T}}Ay)<0$
试证明: 存在 $\operatorname{span}\{x,y\}$ 的一组基 $\{u,v\}$ 使得 $u^{\mathrm{T}}Au=v^{\mathrm{T}}Av=0$

Proof:
若 x,y 线性相关 (即存在 $\alpha\in\mathbb{R}$ 使得 $y=\alpha x$)，则 $(x^{\mathrm{T}}Ax)(y^{\mathrm{T}}Ay)=\alpha^2(x^{\mathrm{T}}Ax)^2\geq 0$ 与题干假设矛盾.
因此 x,y 线性无关，$\operatorname{span}\{x,y\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 2 维向量空间.

假设存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $(x+\lambda y)^{\mathrm{T}}A(x+\lambda y)=0$，则我们有:

$$
(y^{\mathrm{T}}Ay)\lambda^2+2(x^{\mathrm{T}}Ay)\lambda+x^{\mathrm{T}}Ax=0
$$

其中 A 的对称性保证了 $y^{\mathrm{T}}Ax=(x^{\mathrm{T}}Ay)^{\mathrm{T}}=x^{\mathrm{T}}Ay$
考虑上述一元二次方程的判别式:

$$
\Delta=[2(x^{\mathrm{T}}Ay)]^2-4(y^{\mathrm{T}}Ay)(x^{\mathrm{T}}Ax)>0
$$

因此它有两个不同的实数解:

$$
\lambda_{1,2}=\frac{-x^{\mathrm{T}}Ay\pm\sqrt{\Delta}}{y^{\mathrm{T}}Ay}
$$

取 $\begin{cases} u:=x+\lambda_1 y \\ v:=x+\lambda_2 y \end{cases}$ 则有 $u^{\mathrm{T}}Au=v^{\mathrm{T}}Av=0$
根据 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 易知 u,v 线性无关，因此 $\{u,v\}$ 构成 $\operatorname{span}\{x,y\}$ 的一组基.

Problem 4

给定正整数 n.
若 $A,B,A-B$ 均为 n 阶 Hermite 正定阵.
试证明 $B^{-1}-A^{-1}$ 也是 Hermite 正定阵.

- **Lemma: (矩阵乘积的谱不变性, Matrix Analysis 定理 $1.3.22$)**
  任意给定矩阵 $A\in\mathbb{C}^{m\times n},B\in\mathbb{C}^{n\times m}$ (其中 $m\geq n$)
  则我们有 $AB\in\mathbb{C}^{m\times m},BA\in\mathbb{C}^{n\times n}$，且 $\operatorname{eig}(AB)=\operatorname{eig}(BA)\cup\{\underbrace{0,\dots,0}_{m-n\text{ times}}\}$
  即 AB 的 m 个特征值即 BA 的 n 个特征值附加上 $m-n$ 个零特征值.
  换句话说，二者的特征多项式满足: $p_{AB}(\lambda)=\lambda^{m-n}p_{BA}(\lambda)$
  这意味着 AB,BA 的非零特征值是完全相同的 (包括重数)，而零特征值的个数相差 $m-n$ 个.

  特殊地，当 $m=n$ 时，矩阵乘积 AB,BA 的特征值完全相同，
  此时若 A,B 至少有一个是非奇异阵，则 AB 和 BA 相似.

  Proof:
  任意给定矩阵 $A\in\mathbb{C}^{m\times n},B\in\mathbb{C}^{n\times m}$ (其中 $m\geq n$)，我们都有:

$$
\begin{bmatrix} I_n & -B \\ & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} BA & 0 \\ A & 0_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0_n & 0 \\ A & AB \end{bmatrix}
$$

  注意到 $\begin{bmatrix} I_n & -B \\ & I_m \end{bmatrix}$ 的逆矩阵即为 $\begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix}$

记 $C_1 = \begin{bmatrix} BA & 0 \\ A & 0_m \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0_n & 0 \\ A & AB \end{bmatrix}$
则上述等式表明 C_1, C_2 相似，于是 C_1, C_2 的特征值完全相同.
而 C_1 的特征值由 BA 的 n 个特征值和 m 个零特征值构成
相应地，C_2 的特征值由 AB 的 m 个特征值和 n 个零特征值构成.
比较二者，即可知 AB 的 m 个特征值即 BA 的 n 个特征值附加上 $m-n$ 个零特征值.

特殊地，当 $m=n$ 时，若 A, B 至少有一个是非奇异阵 (不妨设 A 非奇异)，
则有 $AB = A(BA)A^{-1}$，表明 $AB \sim BA$.

Proof:
根据 A, B 的 Hermite 正定性可知 A^{-1}, B^{-1} 存在且为 Hermite 正定阵
因此 $B^{-1} - A^{-1}$ 也是 Hermite 阵.

注意到 A, B 是正规矩阵 (Hermite 阵自然是正规矩阵)，因此 A, B 可酉对角化，即其谱分解存在.
设 A, B 的谱分解为 $\begin{cases} A := U_1 \Lambda_1 U_1^{\mathrm{H}} = U_1 \operatorname{diag}\{\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\} U_1^{\mathrm{H}} \\ B := U_2 \Lambda_2 U_2^{\mathrm{H}} = U_2 \operatorname{diag}\{\lambda_1(B), \ldots, \lambda_n(B)\} U_2^{\mathrm{H}} \end{cases}$
我们定义其 2 次根为 $\begin{cases} A^{\frac{1}{2}} := U_1 \Lambda_1^{\frac{1}{2}} U_1^{\mathrm{H}} = U_1 \operatorname{diag}\{\sqrt{\lambda_1(A)}, \ldots, \sqrt{\lambda_n(A)}\} U_1^{\mathrm{H}} \\ B^{\frac{1}{2}} := U_2 \Lambda_2^{\frac{1}{2}} U_2^{\mathrm{H}} = U_2 \operatorname{diag}\{\sqrt{\lambda_1(B)}, \ldots, \sqrt{\lambda_n(B)}\} U_2^{\mathrm{H}} \end{cases}$

根据 $A - B \succ 0$ 可知 $B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} - I_n \succ 0$
这表明 $(B^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}})(A^{\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}})$ 的所有特征值均大于 1
根据 **Lemma (矩阵乘积的谱不变性)** 可知 $(A^{\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}})(B^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}})$ 的所有特征值均大于 1
即有:

$$\begin{gathered} A^{\frac{1}{2}} B^{-1} A^{\frac{1}{2}} - I_n = (A^{\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}})(B^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}) - I_n \succ 0 \\ \Leftrightarrow \\ B^{-1} - A^{-\frac{1}{2}} I_n A^{-\frac{1}{2}} = B^{-1} - A^{-1} \succ 0 \end{gathered}$$

命题得证.

给定可逆矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$，我们有以下恒等式:

$$B^{-1} - A^{-1} = A^{-1}(A-B)B^{-1} = B^{-1}(A-B)A^{-1}$$

邵老师提供的解法 1:

$$\begin{aligned} B^{-1} - A^{-1} &= A^{-1}(A-B)B^{-1} \\ &= A^{-1}(A-B)A^{-1} + A^{-1}(A-B)(B^{-1} - A^{-1}) \\ &= A^{-1}(A-B)A^{-1} + A^{-1}(A-B)B^{-1}(A-B)A^{-1} \quad \text{(note that } A, B \text{ are Hermitian matrices)} \\ &= (A^{-1})^{\mathrm{H}}(A-B)A^{-1} + [(A-B)A^{-1}]^{\mathrm{H}} B^{-1} [(A-B)A] \quad \text{(note that } A - B \succ 0 \text{ and } B \succ 0) \\ &\succ 0 \end{aligned}$$

邵老师提供的解法 2:

$$\begin{aligned} B^{-1} - A^{-1} &= A^{-1}(A-B)B^{-1} \\ &= A^{-1}(A-B)A^{-1} + A^{-1}(A-B)(B^{-1} - A^{-1}) \\ &= A^{-1}(A-B)A^{-1} + A^{-1}(A-B)A^{-1}(A-B)B^{-1} \\ &= \cdots \text{(continuously decomposing } B^{-1} = A^{-1} + (B^{-1} - A^{-1}) = A^{-1} + A^{-1}(A-B)B^{-1}) \\ &= A^{-1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} ((A-B)A^{-1})^m \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A^{-1}((A-B)A^{-1})^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} A^{-1}((A-B)A^{-1})^{2k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [(A^{-1}(A-B))^k] A^{-1} [((A-B)A^{-1})^k] + \sum_{k=1}^{\infty} [A^{-1}((A-B)A^{-1})^k](A-B)[(A^{-1}(A-B))^k A^{-1}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [((A-B)A^{-1})^k]^{\mathrm{H}} A^{-1} [((A-B)A^{-1})^k] + \sum_{k=1}^{\infty} [(A^{-1}(A-B))^k A^{-1}]^{\mathrm{H}} (A-B) [(A^{-1}(A-B))^k A^{-1}] \\ &\succ 0 \quad \text{(note that } A - B \succ 0 \text{ and } B \succ 0) \end{aligned}$$

邵老师提供的解法 3:
可以证明恒等式 $B^{-1}-A^{-1}=B^{-1}[(A-B)^{-1}+B^{-1}]^{-1}B^{-1}$:

$$\begin{aligned}(B^{-1}-A^{-1})B[(A-B)^{-1}+B^{-1}]B &= A^{-1}(A-B)B^{-1}\cdot B[(A-B)^{-1}+B^{-1}]B \\ &= A^{-1}I_nB+A^{-1}(A-B)I_n \\ &= A^{-1}B+I_n-A^{-1}B \\ &= I_n \\ \hline \Rightarrow\ B^{-1}-A^{-1} &= B^{-1}[(A-B)^{-1}+B^{-1}]^{-1}B^{-1}\end{aligned}$$

根据 $[(A-B)^{-1}+B^{-1}]^{-1}\succ 0$ 可知 $B^{-1}-A^{-1}=B^{-1}[(A-B)^{-1}+B^{-1}]^{-1}B^{-1}\succ 0$

邵老师提供的解法 4:
存在非奇异阵 $L\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A=LL^{\mathrm{H}}$ (Cholesky 分解, 其中 L 为对角元为正实数的下三角阵)
因此 $I-L^{-1}BL^{-H}=L^{-1}(LL^{\mathrm{H}}-B)L^{-H}=L^{-1}(A-B)L^{-H}\succ 0$
这表明 $L^{-1}BL^{-H}$ 的所有特征值都小于 1 (谱半径 $\rho(L^{-1}BL^{-H})<1$)
结合 $L^{-1}BL^{-H}$ 的正定性可知其所有特征值都在 $(0,1)$ 之间 (谱半径 $\rho(L^{-1}BL^{-H})\in(0,1)$)
因此其逆矩阵 $(L^{-1}BL^{-H})^{-1}=L^HB^{-1}L$ 的所有特征值都大于 1 (谱半径 $\rho(L^HB^{-1}L)>1$)
于是 $L^{\mathrm{H}}B^{-1}L-I\succ 0$
因此我们有 $B^{-1}-A^{-1}=B^{-1}-(LL^{\mathrm{H}})^{-1}=L^{-H}(L^{\mathrm{H}}B^{-1}L-I)L^{-1}\succ 0$

Problem 5

(惯性指数的次可加性, Subadditivity of Inertia Index)
给定正整数 n.
若 A,B 都是 n 阶 Hermite 阵
试证明: $\mathrm{I}_{n^+}(A+B)\leq \mathrm{I}_{n^+}(A)+\mathrm{I}_{n^+}(B)$
其中 $\mathrm{I}_{n^+}(A)$ 代表 A 的正惯性指数.

- **Lemma 1: (Courant–Fischer min-max 定理, Matrix Analysis 定理 $4.2.6$)**
  给定 Hermite 阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，特征值按非减的次序排列: $\lambda_{\min}=\lambda_1(A)\leq\cdots\leq\lambda_n(A)=\lambda_{\max}$
  记 S 为 $\mathbb{C}^n$ 的子空间，则我们有:

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \min_{S\subseteq\mathbb{C}^n:\dim(S)=i}\left\{\max_{x\neq 0_n\in S}\frac{x^{\mathrm{H}}Ax}{x^{\mathrm{H}}x}\right\} \\ &= \max_{S\subseteq\mathbb{C}^n:\dim(S)=n-i+1}\left\{\min_{x\neq 0_n\in S}\frac{x^{\mathrm{H}}Ax}{x^{\mathrm{H}}x}\right\}\end{aligned}\quad (i=1,\dots,n)$$

  Proof:
  $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是 Hermite 阵 (自然是正规矩阵)，一定可以酉对角化.
  即存在酉矩阵 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 和对角阵 $\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ 使得 $A=U\Lambda U^{\mathrm{H}}$
  其中 U 的列向量组 $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ 构成 $\mathbb{C}^n$ 的一组标准正交基.

  对于任意给定的 $i=1,\dots,n$，定义 $U_{(i)}=\mathrm{span}\{u_i,u_{i+1},\dots,u_n\}$
  则 $U_{(i)}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的子空间，维数 $\dim(U_{(i)})=n-i+1$
  对于 $\mathbb{C}^n$ 任意给定的 i 维子空间 S，我们都有:

$$\begin{aligned}\dim(S\cap U_{(i)}) &= \dim(S)+\dim(U_{(i)})-\dim(S+U_{(i)}) \\ &\geq i+(n-i+1)-n \\ &= 1\end{aligned}$$

  这表明 $S\cap U_{(i)}$ 一定有非零向量，即 $(S\cap U_{(i)})\backslash\{0_n\}\neq\emptyset$

  任意给定 $\mathbb{C}^n$ 的 i 维子空间 S
  不失一般性，可取单位向量 $x\in(S\cap U_{(i)})$，我们都有:

$$
\begin{aligned}
x^{\mathrm{H}}Ax &= x^{\mathrm{H}}(U\Lambda U^{\mathrm{H}})x \\
&= (U^{\mathrm{H}}x)^{\mathrm{H}}\Lambda(U^{\mathrm{H}}x) \quad (\text{Denote } y := U^{\mathrm{H}}x, \text{ note that } \|y\|_2 = \|U^{\mathrm{H}}x\|_2 = 1) \\
&= y^{\mathrm{H}}\Lambda y \quad (\text{Let } y = \sum_{k=i}^{n} u_k\alpha_k, \text{ where } \sum_{k=i}^{n} |\alpha_k|^2 = 1) \\
&= \sum_{k=i}^{n} |\alpha_k|^2\lambda_k \quad (\text{note that } \lambda_i \leq \lambda_{i+1} \leq \cdots \leq \lambda_n) \\
&\geq \lambda_i \sum_{k=i}^{n} |\alpha_k|^2 \quad (\text{note that } \sum_{k=i}^{n} |\alpha_k|^2 = 1) \\
&= \lambda_i
\end{aligned}
$$

上式的不等号至少在 $S = \operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_i\}$ 且 x 与 u_i 线性相关时取等.
因此我们有:

$$
\begin{aligned}
\lambda_i &= \min_{S\subseteq\mathbb{C}^n:\dim(S)=i} \left\{ \max_{\{x|x\in S \text{ such that } \|x\|_2=1\}} x^{\mathrm{H}}Ax \right\} \\
&= \min_{S\subseteq\mathbb{C}^n:\dim(S)=i} \left\{ \max_{x\neq 0_n\in S} \frac{x^{\mathrm{H}}Ax}{x^{\mathrm{H}}x} \right\}
\end{aligned}
\quad (i = 1, \ldots, n)
$$

对 $-A$ 应用上述结论即得:
(注意对 $-A$ 来说，特征值非减次序为 $-\lambda_n \leq \cdots \leq -\lambda_1$，因此 $-\lambda_i$ 是 $-A$ 的第 $n-i+1$ 小的特征值)

$$
\begin{aligned}
-\lambda_i &= \min_{S\subseteq\mathbb{C}^n:\dim(S)=n-i+1} \left\{ \max_{\{x|x\in S \text{ such that } \|x\|_2=1\}} -x^{\mathrm{H}}Ax \right\} \\
&= \min_{S\subseteq\mathbb{C}^n:\dim(S)=n-i+1} \left\{ \max_{x\neq 0_n\in S} -\frac{x^{\mathrm{H}}Ax}{x^{\mathrm{H}}x} \right\}
\end{aligned}
\quad (i = 1, \ldots, n)
$$

于是有:

$$
\begin{aligned}
\lambda_i &= \min_{S\subseteq\mathbb{C}^n:\dim(S)=n-i+1} \left\{ \max_{\{x|x\in S \text{ such that } \|x\|_2=1\}} x^{\mathrm{H}}Ax \right\} \\
&= \min_{S\subseteq\mathbb{C}^n:\dim(S)=n-i+1} \left\{ \max_{x\neq 0_n\in S} \frac{x^{\mathrm{H}}Ax}{x^{\mathrm{H}}x} \right\}
\end{aligned}
\quad (i = 1, \ldots, n)
$$

命题得证.

- **Lemma 2: (Weyl 不等式, Matrix Analysis 定理** $4.3.1$**)**
  给定 Hermite 阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$
  设 $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^n, \{\lambda_i(B)\}_{i=1}^n, \{\lambda_i(A+B)\}_{i=1}^n$ 为 $A, B, A+B$ 的非减次序的特征值.
  任意给定 $i = 1, 2, \ldots, n$
  - ① 对于任意 $j = 1, \ldots, i$ 都有 $\lambda_j(A) + \lambda_{1+i-j}(B) \leq \lambda_i(A+B)$ 成立
    上式对某一对 (i, j) 取等，当且仅当存在非零向量 x 使得 $\begin{cases} Ax = x\lambda_j(A) \\ Bx = x\lambda_{1+i-j}(B) \\ (A+B)x = x\lambda_i(A+B) \end{cases}$
    若 $A, B, A+B$ 不存在公共特征向量，则上述不等式都是严格不等式.
  - ② 对于任意 $j = i, \ldots, n$ 都有 $\lambda_i(A+B) \leq \lambda_j(A) + \lambda_{n+i-j}(B)$ 成立
    上式对某一对 (i, j) 取等，当且仅当存在非零向量 x 使得 $\begin{cases} Ax = x\lambda_j(A) \\ Bx = x\lambda_{n+i-j}(B) \\ (A+B)x = x\lambda_i(A+B) \end{cases}$
    若 $A, B, A+B$ 不存在公共特征向量，则上述不等式都是严格不等式.

  Proof:
  任意给定 $i = 1, 2, \ldots, n$

  首先证明 $\forall\, j = 1, \ldots, i, \ \ \lambda_j(A) + \lambda_{1+i-j}(B) \leq \lambda_i(A+B)$:
  对于任意给定的 $j = 1, 2, \ldots, i$
  设 S_1, S_2, S_3 分别为 $\mathbb{C}^n$ 的 $(n-j+1), (n-(1+i-j)+1), i$ 维子空间，于是有:

$$
\begin{aligned}
\dim(S_1 \cap S_2 \cap S_3) &\geq \dim(S_1) + \dim(S_2) + \dim(S_3) - (3-1)\dim(\mathbb{C}^n) \\
&= (n-j+1) + (n-(1+i-j)+1) + i - 2n \\
&= 1
\end{aligned}
$$

故 $(S_1 \cap S_2 \cap S_3)/\{0_n\} \neq \emptyset$
因此可取 $x_0 \neq 0_n \in (S_1 \cap S_2 \cap S_3)$
则根据 **Courant-Fischer min-max 定理**可知:

$$\begin{cases} \lambda_i(A) = \min\limits_{S \subseteq \mathbb{C}^n : \dim(S) = i} \left\{ \max\limits_{x \neq 0_n \in S} \frac{x^{\mathrm{H}} A x}{x^{\mathrm{H}} x} \right\} \\ \lambda_i(A) = \max\limits_{S \subseteq \mathbb{C}^n : \dim(S) = n-i+1} \left\{ \min\limits_{x \neq 0_n \in S} \frac{x^{\mathrm{H}} A x}{x^{\mathrm{H}} x} \right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lambda_j(A) + \lambda_{1+i-j}(B) &\leq \frac{x_0^{\mathrm{H}} A x_0}{x_0^{\mathrm{H}} x_0} + \frac{x_0^{\mathrm{H}} B x_0}{x_0^{\mathrm{H}} x_0} \quad (\text{note that } x_0 \in S_1 \text{ and } x_0 \in S_2) \\ &= \frac{x_0^{\mathrm{H}} (A+B) x_0}{x_0^{\mathrm{H}} x_0} \quad (\text{note that } x_0 \in S_3) \\ &\leq \lambda_i(A+B) \end{aligned}$$

其次证明 $\forall\, j = i, \ldots, n, \ \ \lambda_i(A+B) \leq \lambda_j(A) + \lambda_{n+i-j}(B)$:
对于任意给定的 $j = i, \ldots, n$
设 S_1, S_2, S_3 分别为 $\mathbb{C}^n$ 的 $j, (n+i-j), (n-i+1)$ 维子空间，于是有:

$$\begin{aligned} \dim(S_1 \cap S_2 \cap S_3) &\geq \dim(S_1) + \dim(S_2) + \dim(S_3) - (3-1)\dim(\mathbb{C}^n) \\ &= j + (n+i-j) + (n-i+1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

故 $(S_1 \cap S_2 \cap S_3)/\{0_n\} \neq \emptyset$
因此可取 $x_0 \neq 0_n \in (S_1 \cap S_2 \cap S_3)$
则根据 **Courant-Fischer min-max 定理**可知:

$$\begin{cases} \lambda_i(A) = \min\limits_{S \subseteq \mathbb{C}^n : \dim(S) = i} \left\{ \max\limits_{x \neq 0_n \in S} \frac{x^{\mathrm{H}} A x}{x^{\mathrm{H}} x} \right\} \\ \lambda_i(A) = \max\limits_{S \subseteq \mathbb{C}^n : \dim(S) = n-i+1} \left\{ \min\limits_{x \neq 0_n \in S} \frac{x^{\mathrm{H}} A x}{x^{\mathrm{H}} x} \right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lambda_i(A+B) &\leq \frac{x_0^{\mathrm{H}} (A+B) x_0}{x_0^{\mathrm{H}} x_0} \quad (\text{note that } x_0 \in S_3) \\ &= \frac{x_0^{\mathrm{H}} A x_0}{x_0^{\mathrm{H}} x_0} + \frac{x_0^{\mathrm{H}} B x_0}{x_0^{\mathrm{H}} x_0} \quad (\text{note that } x_0 \in S_1 \text{ and } x_0 \in S_2) \\ &\leq \lambda_j(A) + \lambda_{n+i-j}(B) \end{aligned}$$

命题得证.

Proof:
要证明 $\mathrm{I}_{n^+}(A+B) \leq \mathrm{I}_{n^+}(A) + \mathrm{I}_{n^+}(B)$
等价于证明 $A+B$ 的第 $\mathrm{I}_{n^+}(A) + \mathrm{I}_{n^+}(B)$ 大的特征值 $\lambda_{n-\mathrm{I}_{n^+}(A)-\mathrm{I}_{n^+}(B)}(A+B) \leq 0$
这可有 Weyl 不等式直接得到:

$$\begin{aligned} &\text{Weyl inequality: } \forall\, j = i, \ldots, n, \ \ \lambda_i(A+B) \leq \lambda_j(A) + \lambda_{n+i-j}(B) \\ &\text{Subsituting } i = n - \mathrm{I}_{n^+}(A) - \mathrm{I}_{n^+}(B) \text{ and } j = n - \mathrm{I}_{n^+}(A) \text{ we obtain:} \\ &\lambda_{n-\mathrm{I}_{n^+}(A)-\mathrm{I}_{n^+}(B)}(A+B) \leq \lambda_{n-\mathrm{I}_{n^+}(A)}(A) + \lambda_{n-\mathrm{I}_{n^+}(B)}(B) \\ &\qquad < 0 + 0 \\ &\qquad = 0 \end{aligned}$$

命题得证.

邵老师提供的简单证明:
我们可以使用合同变换得到以下等价关系:

$$\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A+B & B \\ B & B \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix} I & I \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \\ I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \\ I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B & B \\ B & B \end{bmatrix} \right)$$

由于 $A+B$ 是子矩阵，故我们有:
(根据 Cauchy 交错原理可知子矩阵的特征值交错排列在原矩阵特征值之间，因此其惯性指数也小于等于原矩阵的惯性指数)

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n^+}(A+B) &\leq \mathrm{I}_{n^+}\left(\begin{bmatrix} A+B & B \\ B & B \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathrm{I}_{n^+}\left(\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathrm{I}_{n^+}(A) + \mathrm{I}_{n^+}(B)
\end{aligned}$$

Problem 6 (optional)

在平面直角坐标系中，由方程 $y = x + x^{-1}$ 定义的曲线是双曲线.
试构造一个正交变换 $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 使得在由 $\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 定义的新坐标下 $y = x + x^{-1}$ 转化为双曲线的标准方程.

Solution:
定义 Q 为复数 $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ 的实矩阵表示 (设 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$):

$$Q := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -(-\sin(\theta)) \\ -(\sin(\theta)) & \cos(\theta) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

于是我们有:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\tilde{x} - \sin(\theta)\tilde{y} \\ \sin(\theta)\tilde{x} + \cos(\theta)\tilde{y} \end{bmatrix}$$

因此有:

$$\begin{gathered}
y = x + x^{-1} \\
\Leftrightarrow \\
\sin(\theta)\tilde{x} + \cos(\theta)\tilde{y} = \cos(\theta)\tilde{x} - \sin(\theta)\tilde{y} + \frac{1}{\cos(\theta)\tilde{x} - \sin(\theta)\tilde{y}} \\
\Leftrightarrow \\
[\sin(\theta) - \cos(\theta)]\tilde{x} + [\cos(\theta) + \sin(\theta)]\tilde{y} = \frac{1}{\cos(\theta)\tilde{x} - \sin(\theta)\tilde{y}}
\end{gathered}$$

我们令:

$$\begin{gathered}
\frac{\cos(\theta) + \sin(\theta)}{\sin(\theta) - \cos(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\
\Leftrightarrow \\
(\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 = 2\sin^2(\theta) \quad (\text{note that } \theta \in (0, \frac{\pi}{2})) \\
\Leftrightarrow \\
\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\sin(\theta) \\
\Leftrightarrow \\
\begin{cases} \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}
\end{gathered}$$

于是我们有:

$$[\sin(\theta)-\cos(\theta)]\tilde{x}+[\cos(\theta)+\sin(\theta)]\tilde{y}=\frac{1}{\cos(\theta)\tilde{x}-\sin(\theta)\tilde{y}}\quad(\text{note that }\frac{\cos(\theta)+\sin(\theta)}{\sin(\theta)-\cos(\theta)}=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)})$$
$$\Leftrightarrow$$
$$[\sin(\theta)-\cos(\theta)]\cos(\theta)\tilde{x}^2-[\cos(\theta)+\sin(\theta)]\sin(\theta)\tilde{y}^2=1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{3\sqrt{2}-2}{4}\tilde{x}^2-\frac{3\sqrt{2}+2}{4}\tilde{y}^2=1$$

此时 $Q=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{bmatrix}$ 而 $\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{bmatrix}=Q\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

Problem 7 (optional)

给定正整数 n 和向量 $x,y\in\mathbb{R}^n$ (其中 $x\neq 0_n$)
试证明: $y^{\mathrm{T}}x>0$ 的充要条件是存在对称正定阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $y=Ax$

- **Lemma:**
  若非零向量 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 满足 $\|x\|_2=\|y\|_2$，定义 $\begin{cases}w:=\frac{x-y}{\|x-y\|_2}\\ H:=I_n-2ww^{\mathrm{T}}\end{cases}$ 则我们有 $y=Hx$ 成立.

  Proof:

$$\begin{aligned}Hx&=(I_n-2ww^{\mathrm{T}})x\\&=\left\{I_n-2\frac{(x-y)(x-y)^{\mathrm{T}}}{(x-y)^{\mathrm{T}}(x-y)}\right\}x\\&=x-2\frac{(x-y)^{\mathrm{T}}x}{x^{\mathrm{T}}y-y^{\mathrm{T}}x-x^{\mathrm{T}}y-y^{\mathrm{T}}y}(x-y)\quad(\text{note that }\|y\|_2=\|x\|_2)\\&=x-2\frac{x^{\mathrm{T}}x-x^{\mathrm{T}}y}{2(x^{\mathrm{T}}x-x^{\mathrm{T}}y)}(x-y)\\&=x-(x-y)\\&=y\end{aligned}$$

Proof:

- **必要性:**
  若存在对称正定阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $y=Ax$，则我们有 $y^{\mathrm{T}}x=x^{\mathrm{T}}Ax>0$ 成立.
- **充分性:**
  现假设 $y^{\mathrm{T}}x>0$，我们希望构造一个对称正定阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $y=Ax$
  - **构造法 1:**

$$\frac{A:=I_n-\frac{xx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}+\frac{yy^{\mathrm{T}}}{y^{\mathrm{T}}x}}{Ax=\left(I_n-\frac{xx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}+\frac{yy^{\mathrm{T}}}{y^{\mathrm{T}}x}\right)x=x-x+y=y}$$

    显然 A 是对称阵，只需说明 A 正定即可:
    首先 $I_n-\frac{xx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}$ 半正定，仅有一个特征值为 0，对应特征向量为 x，其余特征值为 1
    因此 $v^{\mathrm{T}}(I_n-\frac{xx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x})v=0$ 当且仅当 $v\in\mathrm{span}\{x\}$ 成立.
    而 $\frac{yy^{\mathrm{T}}}{y^{\mathrm{T}}x}$ 同样半正定，但由于 $x^{\mathrm{T}}(\frac{yy^{\mathrm{T}}}{y^{\mathrm{T}}x})x=x^{\mathrm{T}}y>0$，故对于任意 $v\in\mathrm{span}\{x\}\backslash\{0_n\}$ 都有 $v^{\mathrm{T}}(\frac{yy^{\mathrm{T}}}{y^{\mathrm{T}}x})v>0$ 成立.
    因此对于任意 $v\neq 0_n\in\mathbb{R}^n$ 我们都有 $v^{\mathrm{T}}Av=v^{\mathrm{T}}(I_n-\frac{xx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}+\frac{yy^{\mathrm{T}}}{y^{\mathrm{T}}x})v>0$ 成立.
    这表明 A 是正定阵.
  - **构造法 2:**

$$
\begin{aligned}
\alpha &:= \frac{2x^{\mathrm{T}}x}{y^{\mathrm{T}}x} > 0 \\
z &:= y\alpha - x \\
A &:= \frac{1}{\alpha}\left(I + \frac{zz^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}\right)
\end{aligned}
$$

显然 A 是对称正定阵.
下面我们证明 $y = Ax$:

$$
\begin{aligned}
z^{\mathrm{T}}x &= (y\alpha - x)^{\mathrm{T}}x \\
&= y^{\mathrm{T}}x \cdot \alpha - x^{\mathrm{T}}x \\
&= y^{\mathrm{T}}x \cdot \frac{2x^{\mathrm{T}}x}{y^{\mathrm{T}}x} - x^{\mathrm{T}}x \\
&= x^{\mathrm{T}}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= Ax \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(I + \frac{zz^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}\right)x \\
&= \frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{\alpha}\frac{z^{\mathrm{T}}x}{x^{\mathrm{T}}x}z \quad (\text{note that } z^{\mathrm{T}}x = x^{\mathrm{T}}x \text{ and } z = y\alpha - x) \\
&= \frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{\alpha}\frac{x^{\mathrm{T}}x}{x^{\mathrm{T}}x}(y\alpha - x) \\
&= \frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{\alpha}(y\alpha - x) \\
&= y
\end{aligned}
$$

- **构造法 3:**
  由于 $x \neq 0_n$，故存在非奇异阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $Px = e_1$
  具体来说，**Lemma** 指导我们这样构造 P:

$$
\begin{aligned}
w &:= \frac{x - \|x\|_2 e_1}{\|x - \|x\|_2 e_1\|_2} \\
H &:= I_n - 2ww^{\mathrm{T}} \\
P &:= \frac{1}{\|x\|_2}H
\end{aligned}
$$

  记 $\tilde{y} := P^{-T}y = [\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n]^{\mathrm{T}}$，考虑其第一个元素:

$$
\tilde{y}_1 = e_1^{\mathrm{T}}\tilde{y} = (Px)^{\mathrm{T}}(P^{-T}y) = x^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}P^{-T}y = x^{\mathrm{T}}y > 0
$$

  我们可取一个对称阵 $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$，其第一列为 $\tilde{y}$ (第一行对应为 $\tilde{y}^{\mathrm{T}}$)
  显然它满足 $Be_1 = \tilde{y}$
  由于其右下 $n-1$ 阶主子阵可以任取 (不过要保证对称性)
  故我们可令其为对角阵，且对角元取得足够大使得 B 为正定阵 (所有顺序主子式都大于 0)
  取 $A := P^{\mathrm{T}}BP$，显然它是对称正定阵.
  同时我们有:

$$
\begin{aligned}
Ax &= P^{\mathrm{T}}BPx \quad (\text{note that } Px = e_1) \\
&= P^{\mathrm{T}}Be_1 \quad (\text{note that } Be_1 = \tilde{y}) \\
&= P^{\mathrm{T}}\tilde{y} \quad (\text{note that } \tilde{y} = P^{-T}y) \\
&= P^{\mathrm{T}}(P^{-T}y) \\
&= y
\end{aligned}
$$

综上所述，命题得证.

错误的做法 1:
现假设 $y^{\mathrm{T}}x > 0$
当 x, y 线性相关 (即存在 $\alpha > 0$ 使得 $y = \alpha x$) 时，我们可取 $A = \alpha I_n$，即满足 $y = Ax$
当 x, y 线性无关时，我们定义:

$$\alpha := \frac{\|y\|_2}{\|x\|_2}$$
$$\tilde{y} := \frac{1}{\alpha} y \, (\text{so that } \|\tilde{y}\|_2 = \|x\|_2)$$

并构造以下 Householder 变换:

$$w := \frac{x - \tilde{y}}{\|x - \tilde{y}\|_2}$$
$$H := I_n - 2ww^{\mathrm{T}}$$

根据 **Lemma** 可知 $Hx = \tilde{y}$
定义 $A := \alpha H$，则我们有 $Ax = \alpha Hx = \alpha \tilde{y} = y$ 成立.
但 A 并不是一个对称正定阵.

错误的做法 2:
当 x, y 线性无关时，我们定义:

$$\alpha := \frac{\|y\|_2}{\|x\|_2}$$
$$\tilde{y} := \frac{1}{\alpha} y \, (\text{so that } \|\tilde{y}\|_2 = \|x\|_2)$$
$$z := \frac{1}{2}(x + y)$$
$$\beta := \frac{\|z\|_2}{\|x\|_2}$$
$$\tilde{z} := \frac{1}{\beta} z \, (\text{so that } \|\tilde{z}\|_2 = \|x\|_2)$$

并构造以下 Householder 变换:

$$w_1 := \frac{x - \tilde{z}}{\|x - \tilde{z}\|_2}$$
$$H_1 := I_n - 2w_1 w_1^{\mathrm{T}}$$
$$w_2 := \frac{\tilde{y} - \tilde{z}}{\|\tilde{y} - \tilde{z}\|_2}$$
$$H_2 := I_n - 2w_2 w_2^{\mathrm{T}}$$

根据 **Lemma** 可知 $\begin{cases} H_1 x = \tilde{z} \\ H_2 \tilde{z} = \tilde{y} \end{cases}$
定义 $A := \alpha H_2 H_1$，则我们有 $Ax = \alpha H_2 H_1 x = \alpha H_2 \tilde{z} = \alpha \tilde{y} = y$ 成立.
但是这样定义的 A 并不是一个对称正定阵 (甚至不一定是对称阵)

错误的做法 3:
当 x, y 线性无关时，基于 Rodrigues' rotation formula 我们可以构造如下旋转矩阵:

$$\alpha := \frac{\|y\|_2}{\|x\|_2}$$
$$\tilde{y} := \frac{1}{\alpha} y \, (\text{so that } \|\tilde{y}\|_2 = \|x\|_2)$$
$$H := 2\frac{(x + \tilde{y})(x + \tilde{y})^{\mathrm{T}}}{(x + \tilde{y})^{\mathrm{T}}(x + \tilde{y})} - I_n$$
$$A := \alpha H$$

可以证明 $Ax = \alpha Hx = \alpha \tilde{y} = y$
但 A 并不是对称正定阵.

错误的做法 4:
当 x, y 线性无关时，我们可通过如下步骤构造对称正定阵 A 使得 $y = Ax$:

- ① 首先构造一个实对称正交阵 (Householder 变换) $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得 $Hx = \|x\|_2 e_1$
  其中 e_1 是 $\mathbb{R}^n$ 的第 1 个标准正交基向量.
  具体来说，**Lemma** 指导我们这样构造 H:

$$
\begin{aligned}
w &:= \frac{x-\|x\|_2 e_1}{\|x-\|x\|_2 e_1\|_2} \\
H &:= I_n - 2ww^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

根据 $\frac{x}{\|x\|_2} = \frac{1}{\|x\|_2}H^{\mathrm{T}}\|x\|_2 e_1 = H^{\mathrm{T}}e_1 = He_1$ 可知 H 的第 1 列为 $\frac{x}{\|x\|_2}$，第 1 行为 $\frac{x^{\mathrm{T}}}{\|x\|_2}$
记 $\tilde{y} := Hy$，则其第一个元素 $\tilde{y}_1 = e_1^{\mathrm{T}}\tilde{y} = e_1^{\mathrm{T}}Hy = \frac{x^{\mathrm{T}}}{\|x\|_2}y > 0$

- ② 其次构造 $n-1$ 个 Givens 变换 $G_2,\ldots,G_n$ 使得:

$$
\begin{aligned}
G_i(\|x\|_2 e_1) &= \frac{1}{n-1}\tilde{y}_1 e_1 + \tilde{y}_i e_i \ (i=2,\ldots,n) \\
\text{where } G_i &= I_n + (\cos(\theta_i)-1)(e_1e_1^{\mathrm{T}} + e_ie_i^{\mathrm{T}}) + \sin(\theta_i)(e_1e_i^{\mathrm{T}} - e_ie_1^{\mathrm{T}}) \\
\hline
\text{so that } (G_2+\cdots+G_n)\|x\|_2 e_1 &= (n-1)\frac{1}{n-1}\tilde{y}_1 e_1 + \tilde{y}_2 e_2 + \cdots + \tilde{y}_n e_n \\
&= \tilde{y}_1 e_1 + \tilde{y}_2 e_2 + \cdots + \tilde{y}_n e_n \\
&= \tilde{y}
\end{aligned}
$$

单独提取第 $1, i\ (i=2,\ldots,n)$ 行列可以让我们看得更加清楚:

$$
\begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ -\sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \frac{1}{n-1}\tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_i \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{cases}
\cos(\theta_i) = \frac{1}{(n-1)\|x\|_2}\tilde{y}_1 > 0 \\
\sin(\theta_i) = -\frac{1}{\|x\|_2}\tilde{y}_i
\end{cases}
$$

注意到 $e_1e_i^{\mathrm{T}}$ 和 $e_ie_1^{\mathrm{T}}$ 的特征值均为 0，而 $e_1e_1^{\mathrm{T}}$ 和 $e_ie_i^{\mathrm{T}}$ 分别有一个特征值为 1，其余特征值为 0
因此 $\cos(\theta_i) > 0$ 就保证了 $G_i\ (i=2,\ldots,n)$ 是正定阵.

现在我们可以定义 $A := H^{\mathrm{T}}(G_2+\cdots+G_n)H$
则我们有:

$$
\begin{gathered}
Hy = \tilde{y} = (G_2+\cdots+G_n)\|x\|_2 e_1 = (G_2+\cdots+G_n)Hx \\
\Leftrightarrow \\
y = H^{\mathrm{T}}(G_2+\cdots+G_n)Hx = Ax
\end{gathered}
$$

不过 A 虽然正定，但不是对称阵.

Problem 8 (optional)

(Lowner-Heinz 不等式)
给定正整数 n
若 $A, B, A-B$ 均为 Hermite 正定阵
试证明: $A^{\frac{1}{2}} - B^{\frac{1}{2}}$ 也是 Hermite 正定阵.
举例说明 $A^2 - B^2$ 不一定是 Hermite 正定阵.

- 当 $AB = BA$ 时，我们有 $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) \succ 0$

Proof:
注意到 A, B 是正规矩阵，因此 A, B 可酉对角化，即其谱分解存在.

设 A, B 的谱分解为 $\begin{cases} A := U_1\Lambda_1U_1^{\mathrm{H}} = U_1\mathrm{diag}\{\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A)\}U_1^{\mathrm{H}} \\ B := U_2\Lambda_2U_2^{\mathrm{H}} = U_2\mathrm{diag}\{\lambda_1(B),\ldots,\lambda_n(B)\}U_2^{\mathrm{H}} \end{cases}$

我们定义其 2 次根为 $\begin{cases} A^{\frac{1}{2}} := U_1\Lambda_1^{\frac{1}{2}}U_1^{\mathrm{H}} = U_1\mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1(A)},\ldots,\sqrt{\lambda_n(A)}\}U_1^{\mathrm{H}} \\ B^{\frac{1}{2}} := U_2\Lambda_2^{\frac{1}{2}}U_2^{\mathrm{H}} = U_2\mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1(B)},\ldots,\sqrt{\lambda_n(B)}\}U_2^{\mathrm{H}} \end{cases}$

根据 $A - B \succ 0$ 可知 $I_n - A^{-1}B \succ 0$ (由于 $A^{-1}B$ 不一定 Hermite，故这个写法不严谨)
即 $A^{-1}B$ 的谱半径 $\rho(A^{-1}B) < 1$
因此我们有:

$$
\begin{aligned}
(\rho(A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}))^2 &\le \|A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\|_2^2 \quad (\text{spectral theorem}) \\
&= \rho((A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{H}}(A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}})) \\
&= \rho(B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}) \\
&= \rho(B^{-\frac{1}{2}} \cdot B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}} \cdot B^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{similarity transformation does not change eigenvalues}) \\
&= \rho(A^{-1}B) \\
&< 1
\end{aligned}
$$

因此 $\rho(A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}) < 1$，即有 $I_n - A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \succ 0$ (由于 $A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}$ 不一定 Hermite，故这个写法不严谨)
这表明 $A^{\frac{1}{2}} - B^{\frac{1}{2}} \succ 0$

根据上面的推导我们知道 $\rho(A^{-1}B)^2 \leq \rho(A^{-2}B^2)$
显然 $\rho(A^{-1}B)$ 不能保证 $\rho(A^{-2}B^2)$ 成立.
因此这道题是在说:

$$A^2 \succ B^2 \succ 0 \ \Rightarrow \ A \succ B \succ 0$$

且其逆命题不成立:

$$A = \begin{bmatrix} 2+\varepsilon & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ where } \varepsilon > 0 \text{ is a small positive number}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \succ 0 \ (\forall\, \varepsilon > 0)$$

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} (2+\varepsilon)^2+1 & 5+\varepsilon \\ 5+\varepsilon & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \\ & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+\varepsilon)^2 & 5+\varepsilon \\ 5+\varepsilon & 6 \end{bmatrix}$$

我们发现 $\det\left(A^2 - B^2\right) = 6(2+\varepsilon)^2 - (5+\varepsilon)^2 \to -1 \ (\varepsilon \to 0)$
因此存在某个 $\varepsilon = \varepsilon_0$ (例如 $\varepsilon = 0.01$，此时 $\det\left(A^2 - B^2\right) = -0.8575$) 使得 $A^2 - B^2$ 不是正定阵.

实际上我们还可推得:

$$A^2 \succeq B^2 \succeq 0 \ \Rightarrow \ A \succeq B \succeq 0$$

这是因为对于任意 $t_1 > t_2 > 0$ 都有:

$$A^2 \succeq B^2 \succeq 0 \ \Rightarrow \ (A+t_1 I)^2 \succ (B+t_2 I)^2 \succ 0 \ \Rightarrow \ (A+t_1 I) \succ (B+t_2 I) \succ 0$$

对 $(A+t_1 I) \succ (B+t_2 I) \succ 0$ 取极限 $t_1, t_2 \to 0$ 即得 $A \succeq B \succeq 0$
其逆命题同样不成立 **(反例待补充)**

邵老师提供的解法 1:

- 我们首先说明任意两个 Hermite 正定阵 A 和 B 可以通过合同变换同时对角化:
  根据惯性定理可知存在非奇异阵 $P_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $P_0^{\mathrm{H}} A P_0 = I_n$.
  注意到 $P_0^{\mathrm{H}} B P_0$ 仍是 Hermite 正定阵，故存在酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $D_B := U^{\mathrm{H}}(P_0^{\mathrm{H}} B P_0)U$ 为对角阵.
  取 $P = P_0 U$，则我们有:

$$\begin{aligned} P^{\mathrm{H}} A P_0 &= U^{\mathrm{H}}(P_0^{\mathrm{H}} A P_0)U = U^{\mathrm{H}} I_n U = I_n \\ P^{\mathrm{H}} B P &= U^{\mathrm{H}}(P_0^{\mathrm{H}} B P_0)U = D_B \end{aligned}$$

- 因此对于 Hermite 正定阵 $A^{\frac{1}{2}}$ 和 $B^{\frac{1}{2}}$，存在非奇异阵 $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $\begin{cases} D_A := P^{\mathrm{H}} A^{\frac{1}{2}} P \\ D_B := P^{\mathrm{H}} B^{\frac{1}{2}} P \end{cases}$ 都是对角阵.

$$\begin{aligned} P^{\mathrm{H}}(A-B)P &= P^{\mathrm{H}}(A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} - B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}})P \\ &= P^{\mathrm{H}}(P^{-H}D_A P^{-1}P^{-H}D_A P^{-1} - P^{-H}D_B P^{-1}P^{-H}D_B P^{-1})P \\ &= D_A(P^{-1}P^{-H})D_A - D_B(P^{-1}P^{-H})D_B \quad (\text{denote } X := P^{-1}P^{-H}) \\ &= D_A X D_A - D_B X D_B \quad (\text{note that } A - B \succ 0) \\ &\succ 0 \end{aligned}$$

记 $\begin{cases} D_A := \mathrm{diag}\{d_1^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}\} \\ D_B := \mathrm{diag}\{d_1^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}\} \end{cases}$
考虑 $D_A X D_A - D_B X D_B$ 的对角元，我们有:

$$(d_{ii}^{(1)})^2 x_{ii} - (d_{ii}^{(2)})^2 x_{ii} = [(d_{ii}^{(1)})^2 - (d_{ii}^{(2)})^2] x_{ii} > 0 \ (i = 1, \dots, n)$$

注意到非奇异阵 $X := P^{-1}P^{-H}$ 是 Hermite 正定阵，因此 $X = [x_{ij}]$ 的对角元 x_{ii} $(i = 1, \dots, n)$ 均为正实数.
因此我们有 $d_{ii}^{(1)} > d_{ii}^{(2)}$ $(i = 1, \dots, n)$ 成立，进而有 $D_A - D_B \succ 0$ 成立.

$$\begin{aligned}A^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}}&=P^{-H}D_AP^{-1}-P^{-H}D_BP^{-1}\\&=P^{-H}(D_A-D_B)P^{-1}\\&\succ 0\end{aligned}$$

得证 $A^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}}$ 正定.

邵老师提供的解法 2:
注意到 $A^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}}$ 是 Hermite 阵，故其特征值均为实数.
设 λ 为 $A^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}}$ 的最小特征值，$x\neq 0_n$ 为对应的特征向量，满足 $(A^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}})x=x\lambda$
则我们有:

$$\begin{aligned}x^{\mathrm{H}}(A-B)x&=x^{\mathrm{H}}Ax-x^{\mathrm{H}}Bx\\&=x^{\mathrm{H}}Ax-(B^{\frac{1}{2}}x)^{\mathrm{H}}(B^{\frac{1}{2}}x)\quad(\text{note that }(A^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}})x=x\lambda\Rightarrow B^{\frac{1}{2}}x=(A^{\frac{1}{2}}-\lambda I_n)x)\\&=x^{\mathrm{H}}Ax-[(A^{\frac{1}{2}}-\lambda I_n)x]^{\mathrm{H}}(A^{\frac{1}{2}}-\lambda I_n)x\\&=x^{\mathrm{H}}[A-(A^{\frac{1}{2}}-\lambda I_n)^2]x\\&=2\lambda x^{\mathrm{H}}A^{\frac{1}{2}}x-\lambda^2x^{\mathrm{H}}Ax\quad(\text{note that }A-B\succ 0)\\&>0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\lambda>\frac{\lambda^2x^{\mathrm{H}}Ax}{2x^{\mathrm{H}}A^{\frac{1}{2}}x}>0\quad(\text{note that }\begin{cases}x^{\mathrm{H}}Ax>0\\x^{\mathrm{H}}A^{\frac{1}{2}}x>0\end{cases}\text{since }\begin{cases}A\succ 0\ (\text{hence }A^{\frac{1}{2}}\succ 0)\\x\neq 0_n\end{cases})$$

因此 $A^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}}$ 的最小特征值 $\lambda>0$，表明 $A^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}}$ 正定.

邵老师提供的解法 3:
可以证明对于任意正定阵 A 都有:

$$A^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty(I+t^2A^{-1})^{-1}\mathrm{d}t$$

设 A 的谱分解为 $A=U\Lambda U^{\mathrm{H}}$
要验证上式，根据 $U^{\mathrm{H}}A^{\frac{1}{2}}U=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty(I+t^2\Lambda^{-1})\mathrm{d}t$ 可知仅需对标量 $a>0$ 验证 $a^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty(1+t^2a^{-1})^{-1}\mathrm{d}t$ 成立即可.

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty(1+t^2a^{-1})^{-1}\mathrm{d}t&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sqrt{a}}{1+u^2}\mathrm{d}u\quad(\text{denote }u:=\frac{t}{\sqrt{a}})\\&=\sqrt{a}\cdot\frac{2}{\pi}\arctan(u)|_0^\infty\\&=\sqrt{a}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot(\frac{\pi}{2}-0)\\&=\sqrt{a}\end{aligned}$$

因此由 $A-B\succ 0$ 得 $(I+t^2B^{-1})-(I+t^2A^{-1})$ 正定,
进而有 $(I+t^2A^{-1})^{-1}-(I+t^2B^{-1})^{-1}$ 正定,
于是我们有:

$$\begin{aligned}A^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}}&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty(I+t^2A^{-1})^{-1}\mathrm{d}t-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty(I+t^2B^{-1})^{-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty[(I+t^2A^{-1})^{-1}-(I+t^2B^{-1})^{-1}]\mathrm{d}t\\&\succ 0\end{aligned}$$

因此 $A^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}}$ 也是 Hermite 正定阵.

利用邵老师提供的解法 3 的技术:
当 $0<\alpha<1$ 时，我们有:

$$\begin{aligned}A^\alpha&=\frac{\int_0^\infty(I+t^{1/\alpha}A^{-1})^{-1}\mathrm{d}t}{\int_0^\infty(1+t^{1/\alpha})^{-1}\mathrm{d}t}\\&=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\int_0^\infty(I+t^{1/\alpha}A^{-1})^{-1}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因此由 $A-B\succ 0$ 得 $(I+t^{1/\alpha}B^{-1})-(I+t^{1/\alpha}A^{-1})$ 正定,
进而有 $(I+t^{1/\alpha}A^{-1})^{-1}-(I+t^{1/\alpha}B^{-1})^{-1}$ 正定,
于是我们有:

$$\begin{aligned}A^\alpha-B^\alpha&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty(I+t^{1/\alpha}A^{-1})^{-1}\mathrm{d}t-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty(I+t^{1/\alpha}B^{-1})^{-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty[(I+t^{1/\alpha}A^{-1})^{-1}-(I+t^{1/\alpha}B^{-1})^{-1}]\mathrm{d}t\\&\succ 0\end{aligned}$$

因此 $A^\alpha-B^\alpha\ (0<\alpha<1)$ 也是 Hermite 正定阵.
这个结论 $A-B\succ 0\Rightarrow A^\alpha-B^\alpha\succ 0\ (0<\alpha<1)$ 称为 **Lowner-Heinz 不等式**.

The End