

FDU 泛函分析 2. Banach 空间

本文参考以下教材:

- 工科泛函分析基础 (孙明正、李涪岸、张建国、邹杰涛) 第 3 章
- 应用泛函分析 (姚泽清、苏晓冰、郑琴、王在华) 第 3 章

欢迎批评指正!

2.1 赋范空间

2.1.1 定义

设 X 是域 \mathbb{F} 上的线性空间 (又称向量空间), 记其加法单位元为 0_X .

若存在函数 $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}_+$ 满足:

- ① **正定性**: $\|x\| \geq 0$ ($\forall x \in X$) 当且仅当 $x = 0_X$ 时取等

- ② **齐次性**: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ($\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{F}$)

- ③ **三角不等式**: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ($\forall x, y \in X$)

实际上我们可以得到完整的三角不等式: $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ($\forall x, y \in X$)
这是因为:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| & \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \\ \|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| & \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \end{cases} \\ \Rightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in X) \end{aligned}$$

则我们称 X 为**赋范空间**, 称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的**范数**.

- **有限维复 Euclid 空间** $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ ($p \geq 1$) 为赋范空间

其中 $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ ($\forall x \in \mathbb{C}^n$)

(特殊地, 当 $p = \infty$ 时 $\|\cdot\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ ($\forall x \in \mathbb{C}^n$))

- **p 次幂可和序列空间** $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ($1 \leq p < \infty$) 为赋范空间:

$$l^p := \{\{x_k\}_{k=1}^\infty : x_k \in \mathbb{C} \text{ for all } k \in \mathbb{Z}_+, \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty\}$$

$$\|x\|_p := (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{1/p}$$

- **有界序列空间** $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 为赋范空间:

$$l^\infty := \{\{x_k\}_{k=1}^\infty : x_k \in \mathbb{C} \text{ for all } k \in \mathbb{Z}_+, \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} |x_k| < \infty\}$$

$$\|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} |x_k|$$

- **p 次幂可积实值函数空间** $(L^p(\Omega), d_p)$ ($1 \leq p < \infty$) 为赋范空间:

(其中 Ω 为给定的 Lebesgue 可测集, 且 $m(\Omega) < \infty$)

(实际上 Ω 可以是无限测度的, 但必须要求它是 σ -有限的, 即存在至多可数个可测子集能够覆盖它)

$$L^p(\Omega) := \{x : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \int_\Omega |x(t)|^p dt < \infty\}$$

$$\|x\|_p := (\int_\Omega |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

- **几乎处处有界的可测函数空间** $(L^\infty(\Omega), d_\infty)$ 为赋范空间:
(其中 Ω 为给定的 Lebesgue 可测集, 且 $m(\Omega) < \infty$)

$$L^\infty(\Omega) := \{x : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} |x(t)| < \infty\}$$

$$\|x\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} |x(t)|$$

其中 $\operatorname{ess\,sup}$ 代表本质上确界, 即几乎处处的意义下的上确界.

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} |x(t)| := \inf\{M : M \geq 0 \text{ such that } |x(t)| \leq M \text{ holds almost everywhere on } \Omega\}$$

$$= \inf_{\Omega_0 \subset \Omega \text{ such that } m(\Omega_0)=0} \sup_{t \in \Omega \setminus \Omega_0} |x(t)|$$

其特例是闭区间 $[a, b]$ 上的**连续实值函数空间** $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

其中范数 $\|\cdot\|_\infty$ 的定义可等价写为:

$$\|x\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$$

我们还可定义闭区间 $[a, b]$ 上的**具有 k 阶连续导数的函数空间** $(C^k([a, b]), \|\cdot\|)$

其中范数 $\|\cdot\|$ 的定义为:

$$\|\cdot\| := \sum_{i=0}^k \max_{t \in [a, b]} |x^{(i)}(t)| \text{ where } x^{(i)}(t) \text{ denote the } i\text{-th derivative of } x(t)$$

- 闭区间 $[a, b]$ 上的**有界变差函数空间** $BV([a, b]) := \{f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \mid |\Delta f|_{[a, b]} < \infty\}$ 按照以下范数构成赋范空间:

$$\|f\| := |f(a)| + |\Delta f|_{[a, b]} \quad (\forall f \in BV([a, b]))$$

其中 $|\Delta f|_{[a, b]}$ 代表 f 在 $[a, b]$ 上的全变差 (定义参考 FDU 泛函分析 0. 实分析基础)

2.1.2 依范数收敛

设 $\{x_n\}$ 为赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的序列.

- 若存在 $x \in X$ 使得 $\|x_n - x\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$, 则我们称 $\{x_n\}$ 在 X 上依范数 $\|\cdot\|$ 收敛于 x
 - 若存在 $M > 0$ 使得 $\|x_n\| \leq M \ (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$, 则我们称序列 $\{x_n\}$ 有界.
- 赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的收敛序列一定有界.

(工科泛函分析基础, 定理 3.2.3, 泛函分析讲义, 定理 3.2.1)

任意赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的范数 $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}_+$ 都是连续泛函.

换言之, 只要 $\|x_n - x\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$, 就有 $\|x_n\| \rightarrow \|x\| \ (n \rightarrow \infty)$

这个结论可由完整的三角不等式 $||x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \ (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$ 简单推得.

(泛函分析讲义, 定理 3.2.2)

任意赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的加法与数乘运算都是连续的:

$$\begin{cases} \|x_n - x\| \rightarrow 0 & (n \rightarrow \infty) \\ \|y_n - y\| \rightarrow 0 & (n \rightarrow \infty) \end{cases} \Rightarrow \|(x_n + y_n) - (x + y)\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$$

$$\begin{cases} \|x_n - x\| \rightarrow 0 & (n \rightarrow \infty) \\ \|\alpha_n - \alpha\| \rightarrow 0 & (n \rightarrow \infty) \end{cases} \Rightarrow \|\alpha_n x_n - \alpha x\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$$

(Schauder 基)

设 $\{e^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ 是域 \mathbb{F} 上的无限维赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的序列.

若对于任意 $x \in X$ 都存在唯一的 \mathbb{F} 上的数列 $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ 使得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{(k)} - x \right\| = 0$$

则我们称 $\{e^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $(X, \|\cdot\|)$ 中的 **Schauder 基**

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{(k)}$ 称为 $x \in X$ 关于 $\{e^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 的展开式

数列 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ 称为 $x \in X$ 关于 $\{e^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 的展开系数.

(存疑: 上述定义的是可数形式的 Schauder 基, 它可推广到不可数形式, 即指标集不是可数集)

2.1.3 赋范空间是度量空间的特例

设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范空间.

我们称 $d(x, y) = \|x - y\|$ ($\forall x, y \in X$) 为由范数 $\|\cdot\|$ 导出的度量.

显然 (X, d) 为度量空间, 且 X 中的序列依度量 d 收敛等价于依范数 $\|\cdot\|$ 收敛.

因此赋范空间都是度量空间 (反过来不成立), 度量空间的性质在赋范空间中都成立.

• (泛函分析讲义, 例 3.2.6)

序列空间 (\mathbb{C}^{∞}, d)

$$\mathbb{C}^{\infty} := \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} : x_k \in \mathbb{C} \text{ for all } k \in \mathbb{Z}_+\}$$

$$d(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

这是一个典型的例子: 它是度量空间, 但不是赋范空间.

由度量 d 导出的泛函 $\|x\| := d(x, 0_{\mathbb{C}^{\infty}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k|}{1 + |x_k|}$ 显然不满足齐次性

(例如当 $x = (1, 1, \dots)$ 时我们有 $\|2x\| \neq 2\|x\|$)

其中 $0_{\mathbb{C}^{\infty}} := (0, 0, \dots)$ 是序列空间 \mathbb{C}^{∞} 的加法单位元.

(存疑: 不保证其他度量也不能导出范数)

下面我们给出一个度量 d 可以导出范数的充分条件:

(工科泛函分析基础, 定理 3.2.10, 泛函分析讲义, 定理 3.2.4)

设 X 是域 \mathbb{F} 上的线性空间, 记其加法单位元为 0_X

若 X 上定义的度量 $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}_+$, 且满足:

- ① $d(x - y, 0_X) = d(x, y)$ ($\forall x, y \in X$)
- ② $d(\alpha x, 0_X) = |\alpha| d(x, 0_X)$ ($\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{F}$)

则泛函 $\|x\| := d(x, 0_X)$ ($\forall x \in X$) 是 X 上的一个范数.

证明:

- ① 正定性: $\|x\| = d(x, 0_X) \geq 0$ ($\forall x \in X$) 当且仅当 $x = 0_X$ 时取等.
- ② 齐次性: $\|\alpha x\| = d(\alpha x, 0_X) = |\alpha| d(x, 0_X) = |\alpha| \|x\|$ ($\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{F}$)
- ③ 三角不等式:

对于任意 $x, y \in X$ 我们都有:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= d(x + y, 0_X) \\ &\leq d(x + y, y) + d(y, 0_X) \quad (\text{note that } d(x - y, 0_X) = d(x, y) \text{ } (\forall x, y \in X)) \\ &= d((x + y) - y, 0_X) + d(y, 0_X) \\ &= d(x, 0_X) + d(y, 0_X) \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

2.1.4 积空间与积范数

设 X, Y 为域 \mathbb{F} 上的线性空间.

我们定义直积集 $X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ 为 X, Y 的**积空间**
(它也是线性空间, 加法即元组加法, 数乘即元组数乘)

若 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 为域 \mathbb{F} 上的赋范空间.

则积空间 $X \times Y$ 按照以下范数都构成赋范空间:

$$\begin{aligned}\|(x, y)\|_p &:= (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}} \quad (\forall 1 \leq p < \infty) \\ \|(x, y)\|_\infty &:= \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}\end{aligned}$$

上述范数通称为**积范数**, 它们导出的收敛都是依坐标收敛.

2.2 Banach 空间

2.2.1 定义

我们称完备的赋范空间为 **Banach 空间** (即其中的 Cauchy 序列都是收敛列)

- 有限维赋范空间都是 Banach 空间.
因此**有限维复 Euclid 空间** $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ ($p \geq 1$) 为 Banach 空间
其中 $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ ($\forall x \in \mathbb{C}^n$)
(特殊地, 当 $p = \infty$ 时 $\|\cdot\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ ($\forall x \in \mathbb{C}^n$))
- p 次幂可和序列空间 $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ($1 \leq p < \infty$) 为 Banach 空间:

$$l^p := \{\{x_k\}_{k=1}^\infty : x_k \in \mathbb{C} \text{ for all } k \in \mathbb{Z}_+, \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty\}$$

$$\|x\|_p := (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{1/p}$$

- 有界序列空间** $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 为 Banach 空间:

$$l^\infty := \{\{x_k\}_{k=1}^\infty : x_k \in \mathbb{C} \text{ for all } k \in \mathbb{Z}_+, \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} |x_k| < \infty\}$$

$$\|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} |x_k|$$

- p 次幂可积实值函数空间 $(L^p(\Omega), d_p)$ ($1 \leq p < \infty$) 为 Banach 空间:
(其中 Ω 为给定的 Lebesgue 可测集, 且 $m(\Omega) < \infty$)
(实际上 Ω 可以是无限测度的, 但必须要求它是 σ -有限的, 即存在至多可数个可测子集能够覆盖它)

$$L^p(\Omega) := \{x : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \int_\Omega |x(t)|^p dt < \infty\}$$

$$d_p(x, y) := (\int_\Omega |x(t) - y(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

- 几乎处处有界的可测函数空间** $(L^\infty(\Omega), d_\infty)$ 为 Banach 空间:
(其中 Ω 为给定的 Lebesgue 可测集, 且 $m(\Omega) < \infty$)

$$L^\infty(\Omega) := \{x : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \text{ess sup}_{t \in \Omega} |x(t)| < \infty\}$$

$$\|x\|_\infty := \text{ess sup}_{t \in \Omega} |x(t)|$$

其中 ess sup 代表本质上确界，即几乎处处意义下的上确界.

$$\begin{aligned} \text{ess sup}_{t \in \Omega} |x(t)| &:= \inf \{M : M \geq 0 \text{ such that } |x(t)| \leq M \text{ holds almost everywhere on } \Omega\} \\ &= \inf_{\Omega_0 \subset \Omega \text{ such that } m(\Omega_0)=0} \sup_{t \in \Omega \setminus \Omega_0} |x(t)| \end{aligned}$$

其特例是闭区间 $[a, b]$ 上的**连续实值函数空间** $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

其中范数 $\|\cdot\|_\infty$ 的定义可等价写为:

$$\|x\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$$

我们还可定义闭区间 $[a, b]$ 上的**具有 k 阶连续导数的实值函数空间** $(C^k([a, b]), \|\cdot\|)$

其中范数 $\|\cdot\|$ 的定义为:

$$\|\cdot\| := \sum_{i=0}^k \max_{t \in [a, b]} |x^{(i)}(t)| \text{ where } x^{(i)}(t) \text{ denote the } i\text{-th derivative of } x(t)$$

or

$$\|\cdot\| := \max_{0 \leq i \leq k} \max_{t \in [a, b]} |x^{(i)}(t)| \text{ where } x^{(i)}(t) \text{ denote the } i\text{-th derivative of } x(t)$$

- 闭区间 $[a, b]$ 上的**有界变差函数空间** $BV([a, b]) := \{f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \mid |\Delta f|_{[a, b]} < \infty\}$ 按照以下范数构成 Banach 空间:

$$\|f\| := |f(a)| + |\Delta f|_{[a, b]} \quad (\forall f \in BV([a, b]))$$

其中 $|\Delta f|_{[a, b]}$ 代表 f 在 $[a, b]$ 上的全变差 (定义参考 FDU 泛函分析 0. 实分析基础)

(若 $\{f_n\}$ 是 $BV([a, b])$ 中的 Cauchy 序列, 则全变差的完备性保证了存在收敛的极限函数 f , 并且 f 的全变差有限)

Banach 空间	范数
\mathbb{C}^n (可分)	$\ x\ _p := (\sum_{i=1}^n x_i ^p)^{1/p}$
$l^p := \{\{x_k\}_{k=1}^\infty : x_k \in \mathbb{C} \text{ for all } k \in \mathbb{Z}_+, \sum_{k=1}^\infty x_k ^p < \infty\}$ (可分)	$\ x\ _p := (\sum_{i=1}^\infty x_i ^p)^{1/p}$
$l^\infty := \{\{x_k\}_{k=1}^\infty : x_k \in \mathbb{C} \text{ for all } k \in \mathbb{Z}_+, \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} x_k < \infty\}$ (不可分)	$\ x\ _\infty := \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} x_k $
$L^p(\Omega) := \{x : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \int_\Omega x(t) ^p dt < \infty\}$ (可分)	$\ x\ _p := \left(\int_\Omega x(t) ^p dt\right)^{1/p}$
$L^\infty(\Omega) := \{x : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \text{ess sup}_{t \in \Omega} x(t) < \infty\}$ (不可分)	$\ x\ _\infty := \text{ess sup}_{t \in \Omega} x(t) $
$C(\Omega) := \{x : \Omega \mapsto \mathbb{R} : x \text{ is continuous on } \Omega\}$ (可分)	$\ x\ _\infty := \max_{t \in \Omega} x(t) $

值得说明的是, $C(\Omega)$ 在范数 $\|x\|_\infty := \max_{t \in \Omega} |x(t)|$ 的意义下是完备的,

且自己就是自己的可数稠密子集, 因而可分.

但 $C(\Omega)$ 在范数 $\|x\|_\infty := \text{ess sup}_{t \in \Omega} |x(t)|$ (其收敛性更宽松) 的意义下是不完备的, 其完备化便是 $L^\infty(\Omega)$

而 $L^\infty(\Omega)$ 是不可分的, 这是因为 $L^\infty(\Omega)$ 中 0-1 函数全体是不可数集且不同 0-1 函数之间距离为 1 假设 $L^\infty(\Omega)$ 存在稠密子集, 那么就会被 $L^\infty(\Omega)$ 中的 0-1 函数划分成不可数个足够小的 (因而不相交的) 邻域,

这说明 $L^\infty(\Omega)$ 的任意稠密子集都是不可数的, 即不存在可数稠密子集, 表明 $L^\infty(\Omega)$ 是不可分的.

2.2.2 基本性质

(应用泛函分析, 定理 3.3.2)

Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 的赋范子空间 $(Y, \|\cdot\|)$ 是完备的 (即是 Banach 空间), 当且仅当 Y 是 X 中的闭集.

这实际上是完备度量空间的性质, 我们将其搬运到完备赋范空间 (即 Banach 空间) 上了:

完备度量空间具有一些非常好的性质.

例如, 完备度量空间总是闭的,

即不管把它放在什么样的更大空间中, 它总是一个闭集.

更准确地说:

(工科泛函分析基础, 定理 2.4.7, 泛函分析讲义 定理 2.4.3)

因此完备度量空间 (X, d) 的子集 $(Y, d|_{Y \times Y})$ 是完备的, 当且仅当 Y 是 X 中的闭集.

(泛函分析讲义, 例 3.2.3)

试证明 \mathbb{C} 上的收敛数列全体构成的空间 c^∞ 按照范数 $\|\cdot\|_\infty$ 构成 Banach 空间.

- 我们只需说明 $(c^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 是 $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 的闭子空间, 就可说明 $(c^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 是 Banach 空间.

考虑 $(c^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 任意给定的收敛序列 $\{x^{(n)}\}$, 设其极限为 $x^{(0)}$

则对于任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{Z}_+$ 使得:

$$\|x^{(n)} - x^{(0)}\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall n \geq N)$$

取 $n = N$, 则根据上式可知 $|x_k^{(N)} - x_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}_+)$

注意到 $x^{(N)} = \{x_k^{(N)}\}_{k=1}^\infty$ 为收敛数列, 故它一定是 Cauchy 数列,

即存在 $K \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $|x_k^{(N)} - x_l^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall k, l \geq K)$

因此对于任意 $k, l \geq K$ 我们都有:

$$\begin{aligned} |x_k^{(0)} - x_l^{(0)}| &\leq |x_k^{(0)} - x_k^{(N)}| + |x_k^{(N)} - x_l^{(N)}| + |x_l^{(N)} - x_l^{(0)}| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

这表明 $x^{(0)} = \{x_k^{(0)}\}_{k=1}^\infty$ 是 \mathbb{C} 上的 Cauchy 数列.

根据复数域 \mathbb{C} 的完备性可知 $x^{(0)} = \{x_k^{(0)}\}_{k=1}^\infty$ 是 \mathbb{C} 上的收敛数列, 即 $x^{(0)} \in c^\infty$

这就说明了 $(c^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 是 $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 的闭子空间, 故 $(c^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 是 Banach 空间.

(泛函分析讲义, 例 3.2.4)

试证明 \mathbb{C} 上的收敛于 0 的数列全体构成的空间 c_0^∞ 按照范数 $\|\cdot\|_\infty$ 构成 Banach 空间.

- 我们只需说明 $(c_0^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 是 $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 的闭子空间, 就可说明 $(c_0^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 是 Banach 空间.

考虑 $(c_0^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 任意给定的收敛序列 $\{x^{(n)}\}$, 设其极限为 $x^{(0)}$

则对于任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{Z}_+$ 使得:

$$\|x^{(n)} - x^{(0)}\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geq N)$$

取 $n = N$, 则根据上式可知 $|x_k^{(N)} - x_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}_+)$

注意到 $x^{(N)} = \{x_k^{(N)}\}_{k=1}^\infty$ 是收敛于 0 的数列, 即存在 $K \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$|x_k^{(N)} - 0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall k \geq K)$

因此对于任意 $k \geq K$ 我们都有:

$$\begin{aligned}
|x_k^{(0)} - 0| &\leq |x_k^{(0)} - x_k^{(N)}| + |x_k^{(N)} - 0| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

这表明 $x^{(0)} = \{x_k^{(0)}\}_{k=1}^\infty$ 是 \mathbb{C} 上收敛于 0 的数列, 即 $x^{(0)} \in c_0^\infty$
这就说明了 $(c_0^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 是 $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 的闭子空间, 故 $(c_0^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 是 Banach 空间.

(F. Riesz 引理, 应用泛函分析, 引理 3.4.1, 泛函分析讲义, 引理 3.2.1)

设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范空间.

若 X 中的真子空间 $S \subset X$ 是闭的,

则对于任意 $\varepsilon \in (0, 1)$ 都存在满足 $\|x_0\| = 1$ 的 $x_0 \in X$ 使得 $\|x - x_0\| > \varepsilon$ ($\forall x \in S$)

- 若上述引理中的真子空间 S 不是闭集, 则结论可能不成立.
- 一般来说, 上述引理中的 " $\forall \varepsilon \in (0, 1), \exists x_0 \in X$ such that $\|x - x_0\| > \varepsilon$ ($\forall x \in S$)" 不能加强为 " $\exists x_0 \in X$ such that $\|x - x_0\| \geq 1$ ($\forall x \in S$)" 但对于内积空间的情况是可以这样加强的.
- 上述引理表明赋范空间中的闭真子空间 S 和其空间 X 中的元素之间, 总是存在某种程度的分离. 这意味着 X 中的任意闭真子空间都不可能填满 X 的整个空间.

证明:

由于 $S \subset X$ 是 X 的真子空间, 故存在 $x_1 \in X \setminus S$

我们定义 $d(x_1, S) := \inf_{x \in S} \|x - x_1\|$

由于 S 是闭的, 故 $d(x_1, S) > 0$

(如若不然, 则 $d(x_1, S) = 0$ 代表存在 $\{x_n\} \subset S$ 使得 $\|x_n - x_1\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 根据 S 的闭性可知 $x_1 \in S$, 矛盾!)

对于任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 我们都有 $\frac{d(x_1, S)}{\varepsilon} > d(x_1, S) = \inf_{x \in S} \|x - x_1\|$

根据下确界的性质可知存在 $x_2 \in S$ 使得 $\|x_2 - x_1\| < \frac{d(x_1, S)}{\varepsilon}$

定义 $x_0 := \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}$, 显然满足 $\|x_0\| = 1$

则对于任意 $x \in S$ 我们都有:

$$\begin{aligned}
\|x - x_0\| &= \left\| x - \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|} \right\| \\
&= \frac{1}{\|x_1 - x_2\|} \|(\|x_1 - x_2\|x + x_2) - x_1\| \quad (\text{note that } \begin{cases} x \in S \\ x_2 \in S \end{cases} \Rightarrow \|x_1 - x_2\|x + x_2 \in S) \\
&\geq \frac{1}{\|x_1 - x_2\|} \inf_{x \in S} \|x - x_1\| \\
&= \frac{1}{\|x_1 - x_2\|} d(x_1, S) \quad (\text{note that } \|x_2 - x_1\| < \frac{d(x_1, S)}{\varepsilon}) \\
&> \varepsilon
\end{aligned}$$

命题得证.

(应用泛函分析 定理 3.4.4, 泛函分析讲义 定理 3.2.11)

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, 则下列命题等价:

- ① X 是有限维的
- ② X 中的有界集都是列紧集
- ③ X 中的有界闭集都是紧集
- ④ X 中的单位闭球 $\bar{B}(0_X, 1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ 是紧集
- ⑤ X 中的单位球面 $\text{bd}(\bar{B}(0_X, 1)) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ 是紧集

我们这里仅证明 ⑤ \Rightarrow ①:

设 X 中的单位球面 $\text{bd}(\bar{B}(0_X, 1)) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ 是紧集.

(反证法) 假设 $(X, \|\cdot\|)$ 是无限维赋范空间,

则存在 X 中的序列 $\{x_n\}$, 其任意有限个元素都线性无关.

记 $X_n := \text{span}\{x_1, \dots, x_n\} (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$

由于 X_n 是 X 的有限维子空间, 故它一定是闭的, 于是 X_{n-1} 一定是 X_n 的闭子空间.

根据 F. Riesz 引理可知, 存在 $y_n \in X_n$ 满足
$$\begin{cases} \|y_n\| = 1 \\ \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} (\forall x \in X_{n-1}) \end{cases}$$

这样我们就得到了单位球面 $\text{bd}(\bar{B}(0_X, 1))$ 上的点列 $\{y_n\}$ 满足 $\|y_m - y_n\| \geq \frac{1}{2} (\forall m > n \geq 2)$ (注意到 $y_n \in X_{m-1}$)

因此 $\{y_n\}$ 的任一子列都不可能是 Cauchy 列, 从而不可能有收敛子列.

这与 "单位球面 $\text{bd}(\bar{B}(0_X, 1))$ 是紧集" 的假设矛盾, 说明 $(X, \|\cdot\|)$ 必须是有限维赋范空间.

(应用泛函分析, 定理 3.3.1, 泛函分析讲义, 定理 3.2.6)

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, 则 X 为 Banach 空间的充要条件是:

对于任意 $\{x_n\} \subset X$, 只要 $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ 收敛, 就有 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛.

(类似于数学分析中的结论: 绝对收敛的序列一定收敛)

• 必要性:

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

任意给定 $\{x_n\} \subset X$, 记 $S_n := \sum_{k=1}^n x_k (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ 收敛, 则我们有:

$$\begin{aligned} \|S_{n+p} - S_n\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n+p} x_k - \sum_{k=1}^n x_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \quad (\forall p \in \mathbb{Z}_+) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

因此 $\{S_n = \sum_{k=1}^n x_k\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列.

由于 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, 故序列 $\{S_n = \sum_{k=1}^n x_k\}$ 收敛, 即 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛.

• 充分性:

设对于任意 $\{x_n\} \subset X$, 只要 $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ 收敛, 就有 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛.

现考虑任意给定 Cauchy 序列 $\{x_n\} \subset X$,

根据 Cauchy 序列的定义可知存在正整数序列 $\{n_k\}$ 满足 $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} (\forall k \in \mathbb{Z}_+)$

根据 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ 的收敛性可知 $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$ 收敛,

从而根据假设可知 $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k+1}} - x_{n_1}$ 收敛,

于是可知序列 $\{x_{n_{k+1}} - x_{n_1}\}$ 收敛, 即子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛,

进而可知 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ 收敛, 表明赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

(应用泛函分析, 定理 3.3.3)

对于域 \mathbb{F} 上的赋范空间 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$

其积空间 $X \times Y$ 依积范数构成 Banach 空间, 当且仅当 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 均为 Banach 空间.

其中积范数的定义可以是以下任意一种:

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_p &:= (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}} \quad (\forall 1 \leq p < \infty) \\ \|(x, y)\|_{\infty} &:= \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \end{aligned}$$

2.2.3 有限维 Banach 空间

(范数的等价性)

设 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 是线性空间 X 上的两个范数.

若对于 X 中的任意序列 $\{x_n\}$, 依 $\|\cdot\|_\alpha$ 收敛等价于依 $\|\cdot\|_\beta$ 收敛 (即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\beta = 0)$$

则我们称范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 是等价的.

(范数等价定理, 应用泛函分析 定理 3.4.1, 泛函分析讲义, 定理 3.2.7)

线性空间 X 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 等价的充要条件是存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 使得:

$$c_1 \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_\alpha \quad (\forall x \in X)$$

• 充分性:

设存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 使得 $c_1 \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_\alpha \quad (\forall x \in X)$

对于 X 中的任意序列 $\{x_n\}$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\alpha = 0$, 则根据 $\|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_\alpha \quad (\forall x \in X)$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\beta = 0$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\beta = 0$, 则根据 $\|x\|_\alpha \leq \frac{1}{c_1} \|x\|_\beta \quad (\forall x \in X)$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\alpha = 0$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\beta = 0$, 表明范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 等价.

• 必要性:

设范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 是等价的.

(反证法) 假设不存在 $c_2 > 0$ 使得 $\|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_\alpha \quad (\forall x \in X)$

则对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 都存在 $x_n \in X$ 使得 $\|x_n\|_\beta > n \|x_n\|_\alpha$

定义 $y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|_\beta} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$, 则我们有:

$$\begin{aligned} \|y_n\|_\alpha &= \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|_\beta} \right\|_\alpha = \frac{\|x_n\|_\alpha}{\|x_n\|_\beta} < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ \|y_n\|_\beta &= \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|_\beta} \right\|_\beta = \frac{\|x_n\|_\beta}{\|x_n\|_\beta} = 1 \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

这与范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 的等价性矛盾, 故存在 $c_2 > 0$ 使得 $\|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_\alpha \quad (\forall x \in X)$

同理可证存在 $c_1 > 0$ 使得 $\|x\|_\alpha \leq c_1^{-1} \|x\|_\beta \quad (\forall x \in X)$

因此存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 使得 $c_1 \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_\alpha \quad (\forall x \in X)$

(准范数)

设 X 是域 \mathbb{F} 上的 n 维线性空间.

若 X 上的实值函数 f 满足:

- 非负性: $f(x) \geq 0 \quad (\forall x \in X)$
- 正定性: $f(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0_X$
- 齐次性: $f(\alpha x) = |\alpha| f(x) \quad (\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{F})$
- 连续性: $f(x)$ 在 X 上关于 Euclid 范数是连续的, 即
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_2 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(x)| = 0$$

则我们称 f 为 X 上的准范数 (pre-norm)

满足三角不等式的准范数就是范数.

(工科泛函分析基础 定理 3.2.12, 泛函分析讲义 定理 3.2.8, Matrix Analysis 定理 5.4.4)

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} 上的有限维线性空间 X 上的任意两个范数都是等价的.

(上述等价性可推广到准范数, 因为证明中我们没有用到三角不等式)

• 证明:

设线性空间 X 的维度为 n , 它的一组基为 $\{e^{(1)}, \dots, e^{(n)}\}$

对于任意 $x \in X$ 我们定义其坐标为 $z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))$, 满足:

$$z_1(x), \dots, z_n(x) \in \mathbb{F}$$

$$x = \sum_{k=1}^n z_k(x) e^{(k)}$$

设 $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$ 是 X 上的两个范数, 定义
$$\begin{cases} f_1(z) := \|\sum_{k=1}^n z_k e^{(k)}\|_\alpha \\ f_2(z) := \|\sum_{k=1}^n z_k e^{(k)}\|_\beta \end{cases}$$

它们天然连续实值函数.

有限维实或复赋范空间上的范数都是一致连续函数:

设 $\|\cdot\|$ 是 n 维实或复赋范空间 X 上的范数, $\{e^{(1)}, \dots, e^{(n)}\}$ 是 X 的一组给定的基.

对于任意 $x, \Delta x \in X$, 我们定义其在基 $\{e^{(1)}, \dots, e^{(n)}\}$ 下的坐标为

$$\begin{cases} z = (z_1, \dots, z_n) \\ \Delta z = (\Delta z_1, \dots, \Delta z_n) \end{cases}$$

则我们有:

$$\begin{aligned} \left| \|x + \Delta x\| - \|x\| \right| &\leq \|(x + \Delta x) - x\| \\ &= \|\Delta x\| \\ &= \|\Delta z_1 \cdot e^{(1)} + \dots + \Delta z_n \cdot e^{(n)}\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \|e^{(k)}\| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k| \right) \sum_{k=1}^n \|e^{(k)}\| \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \|e^{(k)}\| \right) \cdot \|\Delta z\|_\infty \end{aligned}$$

注意到 $\sum_{k=1}^n \|e^{(k)}\|$ 是与 $x, \Delta x$ 无关的常数

因此当 $\Delta x \rightarrow 0_X$ (即 $\|\Delta z\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k| \rightarrow 0$) 时,

我们有 $\left| \|x + \Delta x\| - \|x\| \right| \rightarrow 0$, 而且收敛速度与 x 无关.

这表明 $\|\cdot\|$ 在 X 上是一致连续的.

在 Euclid 单位球面 $S := \{z \in \mathbb{F}^n : \|z\|_2 = 1\}$ (它是一个紧集) 上定义 $h(z) = \frac{f_2(z)}{f_1(z)}$

显然 h 是紧集 S 上的连续函数.

(分母必不为零, 因为 $f_1(z) = \|\sum_{k=1}^n z_k e^{(k)}\|_\alpha \neq \|0_X\|_\alpha = 0$ ($\forall z \in S$))

(Weierstrass 定理, Nonlinear Programming 命题 A.8)

设 \mathcal{X} 为 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} 上的有限维赋范空间 V 的非空子集

且 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ 在 \mathcal{X} 处下半连续

即对于满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$ 的每一个序列 $\{x^{(k)}\} \subset \mathcal{X}$ 都有 $f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)})$

(特殊地, 连续函数一定下半连续)

若下列条件有一个成立:

- ① \mathcal{X} 是紧集 (即有界闭集)
- ② \mathcal{X} 是闭集, 且 f 在 $x \in \mathcal{X}$ 上是强制的 (coercive)
即对于满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)}\| = \infty$ 的每一个序列 $\{x^{(k)}\} \subset \mathcal{X}$ 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = \infty$
- ③ 存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得下水平集 $\{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq \alpha\}$ 是紧集

则 f 在 \mathcal{X} 上的全局最小点的集合 $\arg \min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$ 为非空紧集.

根据 **Weierstrass 定理** 可知 h 在 S 上存在有限的最小值 C_{\min} 和最大值 C_{\max}
 即对于任意 $z \in S$ (即 $z \in \mathbb{F}^n$ 且 $\|z\|_2 = 1$) 我们都有 $C_{\min} \leq h(z) = \frac{f_2(z)}{f_1(z)} \leq C_{\max}$
 根据范数的正定性, 并结合 $0_n \notin S$ 可知 $C_{\min}, C_{\max} > 0$

根据范数的齐次性可知:

对于任意非零向量 $z \in \mathbb{F}^n$ 都有:

$$\begin{aligned} C_{\min} \leq h\left(\frac{z}{\|z\|_2}\right) &= \frac{f_2\left(\frac{z}{\|z\|_2}\right)}{f_1\left(\frac{z}{\|z\|_2}\right)} = \frac{\frac{1}{\|z\|_2} f_2(z)}{\frac{1}{\|z\|_2} f_1(z)} = \frac{f_2(z)}{f_1(z)} \leq C_{\max} \\ &\Leftrightarrow \\ C_{\min} f_1(z) &\leq f_2(z) \leq C_{\max} f_1(z) \end{aligned}$$

显然 $z = 0_n$ 也满足不等式 $C_{\min} f_1(z) \leq f_2(z) \leq C_{\max} f_1(z)$

因此我们有:

$$\begin{aligned} C_{\min} f_1(z) &\leq f_2(z) \leq C_{\max} f_1(z) \quad (\forall z \in \mathbb{F}^n) \\ &\Leftrightarrow \\ C_{\min} \left\| \sum_{k=1}^n z_k e^{(k)} \right\|_{\alpha} &\leq \left\| \sum_{k=1}^n z_k e^{(k)} \right\|_{\beta} \leq C_{\max} \left\| \sum_{k=1}^n z_k e^{(k)} \right\|_{\alpha} \quad (\forall z \in \mathbb{F}^n) \\ &\Leftrightarrow \\ C_{\min} \|x\|_{\alpha} &\leq \|x\|_{\beta} \leq C_{\max} \|x\|_{\alpha} \quad (\forall x \in X) \end{aligned}$$

命题得证.

(工科泛函分析基础 定理 3.2.13, 泛函分析讲义 定理 3.2.9)

- **(应用泛函分析 定理 3.4.3)**
数域 \mathbb{F} (例如 \mathbb{R} or \mathbb{C}) 上的 n 维赋范空间同构于 \mathbb{F}^n , 依范数的收敛性等价于依坐标收敛.
- **(应用泛函分析 推论 3.4.1)**
有限维赋范空间一定是 Banach 空间.
- **(应用泛函分析 推论 3.4.2)**
任意赋范空间的有限维子空间一定是 Banach 空间, 从而也是闭子空间.

但赋范空间的无限维子空间不一定是闭的.

(工科泛函分析基础 例 3.2.15, 泛函分析讲义 例 3.2.8)

无穷维赋范空间中存在不闭的无限维子空间.

- 考虑 2 次可和序列空间 $(l^2, \|\cdot\|_2)$ 中只有有限个非零坐标的元素构成的集合 $S \subset l^2$
 显然 S 对 l^2 上的加法和数乘封闭, 故 S 是 l^2 的线性子空间.
 下面我们举例说明 S 不是闭的:
 定义 S 中的序列 $\{x_n\}$ 如下:

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, 0, \dots) \\ x_2 &= (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots) \\ &\dots \\ x_n &= (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, 0, 0, \dots) \\ &\dots \end{aligned}$$

可以证明 $\{x_n\}$ 收敛于 $x = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots) \in l^2$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{1}{2^k} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{4^k} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{note that } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3} \text{ is a convergent series}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

但注意到 $x \notin S$, 因此 l^2 的线性子空间 S 不是闭的.

The End