FDU 高等线性代数 Homework 01

Due: Sept. 9, 2024
姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 1

设 n 为给定的正整数，求 n 阶矩阵 A 的所有特征值和特征向量.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

- 实际上，我们观察到 A 是一个 **Frobenius 酉型**，故其特征多项式可以一眼看出来: $\det(\lambda I - A) = \lambda^n - 1$
  一般的 **Frobenius 酉型**形如:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

  可以证明其极小多项式 $m_A(t)$ 和特征多项式 $p_A(t)$ 均为 $t^n + a_{n-1}t + a_{n-2}t^{n-2} + \cdots + a_1 t + a_0$

Solution:
方阵 A 的特征多项式为:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \\ -1 & & & & \lambda \end{vmatrix}_n \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ & & & \lambda \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} -1 & & & \\ \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \end{vmatrix}_{n-1} \\ &= \lambda \cdot \lambda^{n-1} + 1 \cdot (-1)^{n-1} \\ &= \lambda^n - 1 \end{aligned}$$

(实际上，我们观察到 A 是一个 **Frobenius 酉型**，故其特征多项式可以一眼看出来: $\det(\lambda I - A) = \lambda^n - 1$)

令 $\det(\lambda I - A) = \lambda^n - 1 = 0$，可解得 n 个根为:

$$\lambda_k = \sqrt[n]{1} \exp\left\{ i(\frac{0}{n} + 2k\pi) \right\} = \left(\exp(\frac{2\pi i}{n}) \right)^k \ \ (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

若记 $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$，则我们可以将方阵 A 的 n 个特征值写为:

$$\lambda_k = \omega^k \ \ (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$
$$\text{where } \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

求解第 k 个特征向量就是要求解方程组:

$$
\det{(\lambda_k I_n - A)} x = \begin{bmatrix} \lambda_k & -1 & & & \\ & \lambda_k & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_k & -1 \\ -1 & & & & \lambda_k \end{bmatrix} x = 0_n
$$

$$
\Leftrightarrow
$$

$$
\begin{cases} x_2 = \lambda_k x_1 \\ x_3 = \lambda_k x_2 \\ \quad \vdots \\ x_n = \lambda_k x_{n-1} \\ x_1 = \lambda_k x_n \end{cases}
$$

我们可以取 $\lambda_k = \omega^k \ (k = 0, 1, \ldots, n-1)$ 对应的特征向量 $x^{(k)}$ 为:

$$
x^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{bmatrix}
$$

其中 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$

Problem 2

证明: 复数 z_1, z_2, z_3 满足 $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ 的充要条件是

$$
z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0
$$

Solution:
若 z_1, z_2, z_3 中有任意两个是相等的，
则可根据 $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = 0$ 推出 $z_1 = z_2 = z_3 = 0$，
进而有 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0$
此时命题成立.

下证 z_1, z_2, z_3 互不相同时命题成立.

- **① 必要性:**

  若 $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$，则 z_1, z_2, z_3 三点确定了一个正三角形.

  记 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$，则我们有 $\begin{cases} z_2 - z_3 = (z_2 - z_1)\omega \\ z_1 - z_3 = (z_2 - z_1)\omega^2 \end{cases}$

  于是有:

$$
\begin{aligned}
z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 &= \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2 + \frac{1}{2}(z_2 - z_3)^2 + \frac{1}{2}(z_1 - z_3)^2 \\
&= \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2(1 + \omega^2 + \omega^4) \quad (\text{note that } \omega^3 = 1) \\
&= \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2(1 + \omega^2 + \omega) \\
&= \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2 \left[1 + \cos{(\frac{4\pi}{3})} + i\sin{(\frac{4\pi}{3})} + \cos{(\frac{2\pi}{3})} + i\sin{(\frac{2\pi}{3})}\right] \\
&= \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2 \left[1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- **② 充分性:**
  必要性证明中蕴含了 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 的结论，因此我们有 $\omega^2 + \omega = -1$

  若 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0$，则我们有:

$$
\begin{aligned}
0 &= z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1 \quad (\text{note that } \omega^3=1 \text{ and } \omega^2+\omega=-1) \\
&= z_1^2+\omega^3 z_2^2+\omega^3 z_3^2+(\omega^2+\omega)z_1z_2+(\omega^2+\omega)z_2z_3+(\omega^2+\omega)z_3z_1 \\
&= (z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3)(z_1+\omega^2 z_2+\omega z_3)
\end{aligned}
$$

> **Lemma:**
> 若 $z_1z_2=0$，则 z_1 和 z_2 至少有一个是零.
> (等价表述: 两个非零复数的乘积也不是零)
>
> - 当 $z_1=0$ 时，结论成立.
> - 当 $z_1\neq 0$ 时，可知逆元 z_1^{-1} 存在，我们有 $z_2=z_2(z_1z_1^{-1})=z_1^{-1}(z_1z_2)=z_1^{-1}\cdot 0=0$

根据引理可知 $z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3$ 和 $z_1+\omega^2 z_2+\omega z_3$ 至少有一个是零.
不妨设 $z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3=0$，则左右同乘 $(\omega^2-\omega)$ 可得:

$$
\begin{aligned}
0 &= (\omega^2-\omega)(z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3) \\
&= (\omega^2-\omega)z_1+(\omega^3-\omega^2)z_2+(\omega^4-\omega^3)z_3 \\
&= (\omega^2-\omega)z_1+(1-\omega^2)z_2+(\omega-1)z_3 \\
&= (\omega-1)(z_3-z_1)+(\omega^2-1)(z_1-z_2) \\
&= (\omega-1)[(z_3-z_1)+(\omega+1)(z_1-z_2)] \\
&= (\omega-1)[(z_3-z_2)+\omega(z_1-z_2)]
\end{aligned}
$$

由于 $\omega-1=e^{\frac{2\pi i}{3}}-1=(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)-1\neq 0$，故根据引理可知:

$$
\begin{gathered}
(z_3-z_1)+(\omega+1)(z_1-z_2)=0 \\
(z_3-z_2)+\omega(z_1-z_2)=0
\end{gathered}
$$

注意到 $\begin{cases} |\omega+1|=|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1|=1 \\ |\omega|=|e^{\frac{2\pi i}{3}}|=1 \end{cases}$
于是我们有:

$$
\begin{cases}
|z_3-z_1|=|(\omega+1)(z_2-z_1)|=|\omega+1||z_2-z_1|=1\cdot|z_2-z_1|=|z_2-z_1| \\
|z_3-z_2|=|\omega(z_2-z_1)|=|\omega||z_2-z_1|=1\cdot|z_2-z_1|=|z_2-z_1|
\end{cases}
$$

因此 $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$

综上所述，命题得证.

> 事实上，下列命题等价:
>
> - $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$
> - $z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1=\frac{1}{2}[(z_2-z_1)^2+(z_2-z_3)^2+(z_1-z_3)^2]=0$
> - $z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3=0$ (其中 $\omega=\exp\left(\frac{2\pi}{3}\right)$)

Problem 3

设 m 和 n 为给定的正整数，记 $\omega=\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$
证明: 对任何 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 都有:

$$
A^m+B^m=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(A+\omega^k B)^m
$$

Solution:
注意到 A,B 不一定是可交换的 (即 $AB=BA$)
因此 $(A+B)^m$ 不能简单展开为 $\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}A^{m-j}B^j$

我们记 $(A+B)^m$ 的展开式中 $\binom{m}{j}$ 个由 $m-j$ 个 A 和 j 个 B 构成的项之和为 $\text{term}(A,B,j)$
显然我们有 $\text{term}(A,\omega^k B,j)=\omega^{jk}\text{term}(A,B,j)$ 成立.

注意到有限求和是可以交换次序的，于是我们有:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(A+\omega^k B)^m &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\sum_{j=0}^{m}\text{term}(A,\omega^k B,j)\right\} \\
&= \frac{1}{m}\sum^{m-1}\left\{\sum^{m}\omega^{jk}\text{term}(A,B,j)\right\} \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m}\left\{\left(\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk}\right)\mathrm{term}(A,B,j)\right\}$$

注意到 $\omega^m = 1$ (即 ω 是 1 的一个 m 次复根)

- 当 j 为 m 的整数倍 (即 j 为 0 或 m) 时，我们有:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk} = \sum_{k=0}^{m-1}1 = m$$

- 当 j 不为 m 的整数倍 (即 $j = 1, \dots, m-1$) 时，我们有:

$$\begin{aligned}
\omega^j\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk} &= \omega^j(1+\omega^j+\cdots+\omega^{(m-2)j}+\omega^{(m-1)j}) \\
&= \omega^j+\omega^{2j}+\cdots+\omega^{(m-1)j}+\omega^{mj} \quad (\text{note that } \omega^m = 1) \\
&= \omega^j+\omega^{2j}+\cdots+\omega^{(m-1)j}+1 \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk}
\end{aligned}$$

于是有 $(\omega^j-1)\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk} = 0$ 成立.

> **Lemma:**
> 若 $z_1z_2 = 0$，则 z_1 和 z_2 至少有一个是零.
> (等价表述: 两个非零复数的乘积也不是零)
>
> - 当 $z_1 = 0$ 时，结论成立.
> - 当 $z_1 \neq 0$ 时，可知逆元 z_1^{-1} 存在，我们有 $z_2 = z_2(z_1z_1^{-1}) = z_1^{-1}(z_1z_2) = z_1^{-1}\cdot 0 = 0$

由于 $\omega^j - 1 = \exp\{\frac{2j\pi i}{m}\} - 1 \neq 0$，故根据引理可知 $\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk} = 0$

综上所述，我们有:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk} = \begin{cases} m, & \text{if } j = 0, m \\ 0, & \text{if } j = 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

将上述结果代入 (3.1) 式中我们有:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(A+\omega^kB)^m &= \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m}\left\{\left(\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{jk}\right)\mathrm{term}(A,B,j)\right\} \\
&= \frac{1}{m}(mA^m+mB^m) \\
&= A^m+B^m
\end{aligned}$$

命题得证.

Problem 4

> **Lemma:**
> 以下内容均来自 **Complex Variables and Applications (9th Edition J. Brown, R. Churchill) Chaper 6**
>
> **(Complex Variables and Applications 第 74 节)**
> 若函数在简单闭围道 C 的内部除了有限多个奇点以外处处解析，则这些奇点必定是孤立奇点.
> 特殊地，有理函数 (即两个多项式函数的商) 的奇点总是孤立奇点，因为分母中的多项式函数仅有有限个零点.
>
> **(Complex Variables and Applications 第 75 节)**
> 若 z_0 是函数 f 的孤立奇点，则存在正数 $R > 0$ 使得 f 在 $0 < |z-z_0| < R$ 中的任意一点 z 处解析
> 因此函数 f 关于 z_0 的 Laurent 级数展开式为:

> $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$
> $$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\quad(n=0,1,\dots)$$
> $$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}z\quad(n=1,2,\dots)$$
>
> 其中 C 为 $0<|z-z_0|<R$ 中任意围绕 z_0 的简单正向闭围道.
>
> 特别地，b_1 的表达式为 $b_1=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\mathrm{d}z$
> 我们称其为函数 f 在孤立奇点 z_0 处的**留数** (residue)，记为 $\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)$
>
> 于是我们有:
>
> $$\int_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)$$
>
> **(Cauchy 留数定理, Complex Variables and Applications 第 76 节)**
> 设 C 为正向简单闭围道.
> 若函数 f 在 C 及其内部除了有限多个奇点 z_k $(k=1,\dots,n)$ 以外处处解析 (自然是孤立奇点)
> 则我们有:
>
> $$\int_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z)$$
>
> 即 f 沿 C 的积分值 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 为其内部有限个奇点处的留数之和的 $2\pi i$ 倍.
>
> 下面的定理仅仅涉及一个留数，故运用起来有时比 Cauchy 留数定理更加方便:
> **(Complex Variables and Applications 第 77 节 定理)**
> 若函数 f 在有限平面上除了有限多个奇点以外处处解析，且这些奇点落在一条正向简单闭围道 C 的内部
> 则我们有:
>
> $$\int_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\{\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})\}$$

计算复积分:

$$\int_{|z|=4}\frac{1}{z^2-3z+2}\mathrm{d}z$$

Solution:
记围道 C 为 $|z|=4$ 确定的正向圆周 (即逆时针方向).
注意到多项式函数 $p(z)=z^2-3z+2$ 在整个复平面都是解析的，且仅有 $z=1,2$ 两个零点.
因此 $f(z)=\frac{1}{p(z)}$ 在复平面上仅有 $z=1,2$ 两个孤立奇点，且都落在围道 C 的内部.

下面我们计算 $\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$ 在 $z=0$ 处的留数:
定义 $g(z):=\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$，则我们有:

$$\begin{aligned}g(z)&=\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\\&=\frac{1}{z^2}\left[\frac{1}{z^2}-3\frac{1}{z}+2\right]\\&=\frac{1}{z^4}(1-3z+z^2)\end{aligned}$$

注意到 $h(z):=1-3z+z^2$ 在 $z=0$ 处是解析的，故它存在关于 $z=0$ 的 Taylor 展开式:

$$h(z)=1-3z+z^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

因此我们有:

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1}{z^4} h(z) \\
&= \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} z^{n-4}
\end{aligned}
$$

注意到 $\frac{1}{z}$ 的系数即为所求留数，于是有:

$$
\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})\right] = \operatorname*{Res}_{z=0} g(z) = \frac{h^{(3)}(0)}{3!} = \frac{0}{6} = 0
$$

因此 f 在 C 上的积分为:

$$
\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C \frac{1}{z^2-3z+2}\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})\right] = 2\pi i \cdot 0 = 0
$$

Problem 5

证明: 任何复方阵都可以在复数域上相似上三角化，
即对于任意复方阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 总存在非奇异的复方阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为上三角矩阵.

Solution:
要证明任意复方阵都可以相似上三角化，
只需证明任意复方阵都可以**酉上三角化** (因为酉相似变换是相似变换的一种)

任意给定复方阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，设其特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

设 x 为 A 关于特征值 λ_1 的单位特征向量，即满足 $\begin{cases} Ax = \lambda_1 x \\ \|x\|_2 = 1 \end{cases}$
任取一个第一列为 x 的酉矩阵 $U_1 = [x, u_2, \dots, u_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$，则我们有:

$$
\begin{aligned}
U_1^{\mathrm{H}} A U_1 &= \begin{bmatrix} x^{\mathrm{H}} \\ u_2^{\mathrm{H}} \\ \vdots \\ u_n^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x^{\mathrm{H}} \\ u_2^{\mathrm{H}} \\ \vdots \\ u_n^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 x & Au_2 & \cdots & Au_n \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 x^{\mathrm{H}} x & x^{\mathrm{H}} A u_2 & \cdots & x^{\mathrm{H}} A u_n \\ \hline \lambda_1 x^{\mathrm{H}} u_2 & u_2^{\mathrm{H}} A u_2 & \cdots & u_2^{\mathrm{H}} A u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 x^{\mathrm{H}} u_n & u_n^{\mathrm{H}} A u_2 & \cdots & u_n^{\mathrm{H}} A u_n \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & x^{\mathrm{H}} A u_2 & \cdots & x^{\mathrm{H}} A u_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

由于 $u_2, \dots, u_n$ 是标准正交的，
故子矩阵 $A_1 = [u_i^{\mathrm{H}} A u_j]_{i,j=2}^n = [u_2, \dots, u_n]^{\mathrm{H}} A [u_2, \dots, u_n]$ 的特征值是 $\lambda_2, \dots, \lambda_n$

对 A_1 重新执行上述过程，
可得到一个酉矩阵 $\widetilde{U}_2 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ 使得 $\widetilde{U}_2^{\mathrm{H}} A_1 \widetilde{U}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & * \\ 0_{n-2} & A_2 \end{bmatrix}$ (其中 A_2 的特征值是 $\lambda_3, \dots, \lambda_n$)

记 $U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \widetilde{U}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 则我们有:

$$
\begin{aligned}
U_2^{\mathrm{H}}(U_1^{\mathrm{H}}AU_1)U_2 &= U_2^{\mathrm{H}}\begin{bmatrix}\lambda_1 & * \\ & A_1\end{bmatrix}U_2 \\
&= \begin{bmatrix}1 & \\ & \widetilde{U}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\lambda_1 & * \\ & A_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & \widetilde{U}_2\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\lambda_1 & * \\ & \widetilde{U}_2^{\mathrm{T}}A_1\widetilde{U}_2\end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c|cc}\lambda_1 & * & * \\ \hline & \lambda_2 & * \\ & & A_2\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

依此类推，我们最终得到 $n-1$ 个酉矩阵 $\{\widetilde{U}_i\}_{i=1}^{n-1}$ (其中 $\widetilde{U}_i \in \mathbb{C}^{(n-i+1)\times(n-i+1)}$)
记 $U_1 = \widetilde{U}_1$ 和 $U_i = \begin{bmatrix}I_{i-1} & \\ & \widetilde{U}_i\end{bmatrix}$ $(i = 2,\dots,n-1)$
取 $U = U_1 \cdots U_{n-1}$ 即得 A 的 **Schur 分解**:

$$
U^{\mathrm{H}}AU = U_{n-1}^{\mathrm{H}}\cdots U_1^{\mathrm{H}}AU_1\cdots U_{n-1} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix} \overset{\Delta}{=} T
$$

命题得证.

Problem 6 (optional)

设 n 为正整数.
已知 n 次系数多项式 $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ 的系数满足 $a_0 > \cdots > a_n > 0$
证明: $f(z)$ 的所有复根都在单位圆外. (提示: 考察 $g(z) = (1-z)f(z)$)

Solution:
当 $|z| \leq 1$ 时，我们有:

$$
\begin{aligned}
|g(z)| &= |(1-z)f(z)| \\
&= \left|(1-z)\sum_{k=0}^n a_k z^k\right| \\
&= \left|a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})z^k - a_n z^{n+1}\right| \quad (\text{triangle inequality}) \\
&\geq |a_0| - \left|\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})z^k - a_n z^{n+1}\right| \quad (\text{triangle inequality and } |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \text{ for all } z_1, z_2 \in \mathbb{C}) \\
&\geq |a_0| - \sum_{k=1}^n |a_k - a_{k-1}||z|^k - |a_n||z|^{n+1} \quad (\text{note that } a_0 > \cdots > a_n > 0) \\
&= a_0 - \sum_{k=1}^n (a_{k-1} - a_k)|z|^k - a_n|z|^{n+1} \quad (\text{note that } |z| \leq 1) \\
&\geq a_0 - \sum_{k=1}^n (a_{k-1} - a_k)\cdot 1 - a_n \cdot 1 \\
&= a_0 - (a_0 - a_n) - a_n \\
&= 0
\end{aligned}
$$

上述三个不等号同时取等的充要条件是:

- ① $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})z^k - a_n z^{n+1}$ 与 a_0 反方向 (即与 1 反方向)
  (注意 a_0 是正实数，而 $a_k - a_{k-1} < 0$ $(k = 1,\dots,n)$)
- ② $z, z^2, \dots, z^{n+1}$ 同方向
- ③ $|z| = 1$

容易验证这样的 z 只能是 $z = e^{2m\pi i} = 1 \ \ (m \in \mathbb{Z})$
因此当 $|z| \leq 1$ 且 $z \neq 1$ 时，我们都有 $|g(z)| > 0$ 成立，表明这样的 z 不是 $g(z)$ 的根.
于是 $g(z)$ 的根要么是 $z = 1$，要么满足 $|z| > 1$

注意到 $g(z) = (1-z)f(z)$ 的复根除了额外的 1 以外，其余复根都与 $f(z)$ 的相同
而根据 $f(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k > 0$ 可知 $z = 1$ 不是 $f(z)$ 的根.
因此 $f(z)$ 的所有根都满足 $|z| > 1$，即都落在单位圆周 $|z| = 1$ 的外部.

Problem 7 (optional)

证明下面的函数不是解析函数，但在复平面上处处满足 Cauchy-Riemann 方程:

$$f(z) = \begin{cases} \exp\left(-z^{-4}\right), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Solution:

> **(极坐标下可导的充分条件, Complex Variables and Applications 第 24 节)**
> 若函数 $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ 在非零点 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ 的某个邻域内有定义，且满足:
>
> - 函数 u, v 在 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ 的该邻域内可偏导
> - 函数 u, v 的一阶偏导数在 (r_0, θ_0) 处连续且满足**极坐标形式的 Cauchy-Riemann 方程**:
>
> $$\begin{aligned} r u_r(r_0,\theta_0) &= v_\theta(r_0,\theta_0) \\ u_\theta(r_0,\theta_0) &= -r v_r(r_0,\theta_0) \end{aligned}$$
>
> 则 f 在 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ 处可导，且导数 $f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r(r_0,\theta_0) + iv_r(r_0,\theta_0))$

当 $z \neq 0$ 时，我们有:

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp\{-z^{-4}\} \\ &= \exp\{-r^{-4}e^{-4i\theta}\} \\ &= \exp\{-r^{-4}[\cos(-4\theta) + i\sin(-4\theta)]\} \\ &= \exp\{-r^{-4}\cos(-4\theta)\} \cdot \exp\{i \cdot [-r^{-4}\sin(-4\theta)]\} \\ &= \exp\{-r^{-4}\cos(-4\theta)\} \cdot \{\cos\left(-r^{-4}\sin(-4\theta)\right) + i\sin\left(-r^{-4}\sin(-4\theta)\right)\} \\ &= u(r,\theta) + iv(r,\theta) \end{aligned}$$

其中我们记:

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \exp\{-r^{-4}\cos(-4\theta)\}\cos\left(-r^{-4}\sin(-4\theta)\right) = g(r,\theta)\cos(h(r,\theta)) \\ v(r,\theta) &= \exp\{-r^{-4}\cos(-4\theta)\}\sin\left(-r^{-4}\sin(-4\theta)\right) = g(r,\theta)\sin(h(r,\theta)) \\ &\text{where } \begin{cases} g(r,\theta) = \exp\{-r^{-4}\cos(-4\theta)\} \\ h(r,\theta) = -r^{-4}\sin(-4\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_r(r,\theta) = 4r^{-5}\cos(-4\theta)g(r,\theta) \\ g_\theta(r,\theta) = -4r^{-4}\sin(-4\theta)g(r,\theta) \\ h_r(r,\theta) = 4r^{-5}\sin(-4\theta) \\ h_\theta(r,\theta) = 4r^{-4}\cos(-4\theta) \end{cases} \end{aligned}$$

经计算可得:

$$\begin{aligned} u_r(r,\theta) &= g_r(r,\theta)\cos(h(r,\theta)) + g(r,\theta)[-\sin(h(r,\theta))h_r(r,\theta)] \\ &= 4r^{-5}\cos(-4\theta)g(r,\theta)\cos(h(r,\theta)) - g(r,\theta)\sin(h(r,\theta))4r^{-5}\sin(-4\theta) \\ &= 4r^{-5}g(r,\theta)\cos(h(r,\theta) - 4\theta) \\ \hline u_\theta(r,\theta) &= g_\theta(r,\theta)\cos(h(r,\theta)) + g(r,\theta)[-\sin(h(r,\theta))h_\theta(r,\theta)] \\ &= -4r^{-4}\sin(-4\theta)g(r,\theta)\cos(h(r,\theta)) - g(r,\theta)\sin(h(r,\theta))4r^{-4}\cos(-4\theta) \\ &= -4r^{-4}g(r,\theta)\sin(h(r,\theta) - 4\theta) \\ \hline v_r(r,\theta) &= g_r(r,\theta)\sin(h(r,\theta)) + g(r,\theta)\cos(h(r,\theta))h_r(r,\theta) \\ &= 4r^{-5}\cos(-4\theta)g(r,\theta)\sin(h(r,\theta)) + g(r,\theta)\cos(h(r,\theta))4r^{-5}\sin(-4\theta) \\ &= 4r^{-5}g(r,\theta)\sin(h(r,\theta) - 4\theta) \\ \hline v_\theta(r,\theta) &= g_\theta(r,\theta)\sin(h(r,\theta)) + g(r,\theta)\cos(h(r,\theta))h_\theta(r,\theta) \\ &= -4r^{-4}\sin(-4\theta)g(r,\theta)\sin(h(r,\theta)) + g(r,\theta)\cos(h(r,\theta))4r^{-4}\cos(-4\theta) \\ &= 4r^{-4}g(r,\theta)\cos(h(r,\theta) - 4\theta) \end{aligned}$$

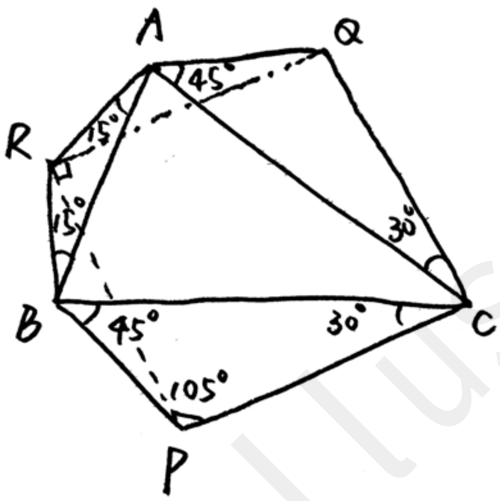
因此对于任意 $r > 0$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$ 我们都有:

$$
\begin{aligned}
ru_r(r,\theta) &= v_\theta(r,\theta)\\
u_\theta(r,\theta) &= -rv_r(r,\theta)
\end{aligned}
$$

注意到偏导数 $u_r, u_\theta, v_r, v_\theta$ 在任意 $r>0$ 和 $\theta\in\mathbb{R}$ 处都连续，因而在 $r=0$ 时也满足 Cauchy-Riemann 方程.
这表明 $f(z)$ 在复平面上处处满足 Cauchy-Riemann 方程.

Problem 8 (optional)

对于欧式平面 $\mathbb{R}^2$ 内的任意三角形 $\triangle ABC$
向外作 $\angle ABR, \angle BCP, \angle CAQ$ 使得 $\begin{cases}\angle CBP = \angle CAQ = 45^\circ\\ \angle BCP = \angle ACQ = 30^\circ\\ \angle ABR = \angle BAR = 15^\circ\end{cases}$.
利用复数证明证明: $\angle QRP = 90^\circ$ 且 $|QR| = |RP|$



Solution:
记 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OR}, \vec{OP}, \vec{OQ}$ 的复数表示为 a, b, c, z_1, z_2, z_3

根据 $1-2\sin^2(\frac{\pi}{12}) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 可解得 $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，进而有 $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
根据正弦定理可知:

$$
\begin{aligned}
\frac{|BR|}{|BA|} = \frac{|AR|}{|AB|} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\\
\frac{|BP|}{|BC|} = \frac{|AQ|}{|AC|} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

若记 $\omega = e^{i\frac{\pi}{12}}$，则我们有:

$$
\begin{cases}
z_1 - b = \vec{BR} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\omega\vec{BA} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\omega(a-b)\\
z_1 - a = \vec{AR} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\bar{\omega}\vec{AB} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\bar{\omega}(b-a)\\
z_2 - b = \vec{BP} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\bar{\omega}^3\vec{BC} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\bar{\omega}^3(c-b)\\
z_3 - a = \vec{AQ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\omega^3\vec{AC} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\omega^3(c-a)
\end{cases}
\text{where}
\begin{cases}
\omega = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\\
\bar{\omega} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\\
\bar{\omega}^3 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\\
\omega^3 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i
\end{cases}
$$

要证明 "$\angle QRP = 90^\circ$ 且 $|QR| = |RP|$"，即要证 $\vec{RQ} = e^{\frac{i\pi}{2}}\vec{RP}$
也就等价于证明 $z_3 - z_1 = i(z_2 - z_1)$

$$
\begin{aligned}
z_3 - z_1 - i(z_2 - z_1) &= [(z_3 - a) - (z_1 - a)] - i[(z_2 - b) - (z_1 - b)]\\
&= \left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\omega^3(c-a) - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\bar{\omega}(b-a)\right] - i\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\bar{\omega}^3(c-b) - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\omega(a-b)\right]\\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\{\omega^3(c-a) - \bar{\omega}(b-a) - i\bar{\omega}^3(c-b) + i\omega(a-b)\}
\end{aligned}
$$

因此要证明 $z_3-z_1-i(z_2-z_1)=0$，等价于证明 $\omega^3(c-a)-\bar{\omega}(b-a)-i\bar{\omega}^3(c-b)+i\omega(a-b)=0$
也就等价于证明 a,b,c 项的系数分别为 0:

- a 的系数为:

$$\begin{aligned}-\omega^3+\bar{\omega}+i\omega&=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)+\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)\\&=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\\&=0\end{aligned}$$

- b 的系数为:

$$\begin{aligned}-\bar{\omega}+i\bar{\omega}^3-i\omega&=-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)-i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)\\&=\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\\&=0\end{aligned}$$

- c 的系数为:

$$\begin{aligned}\omega^3-i\bar{\omega}^3&=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\&=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\&=0\end{aligned}$$

命题得证.

The End