FDU 泛函分析 2. Banach 空间

本文参考以下教材:

- 工科泛函分析基础 (孙明正、李冱岸、张建国、邹杰涛) 第 3 章
- 应用泛函分析 (姚泽清、苏晓冰、郑琴、王在华) 第 3 章

欢迎批评指正!

2.1 赋范空间

2.1.1 定义

设 X 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 (又称向量空间)，记其加法单位元为 0_X.
若存在函数 $\|\cdot\|:X\mapsto\mathbb{R}_+$ 满足:

- **① 正定性:** $\|x\|\geq 0\ (\forall\ x\in X)$ 当且仅当 $x=0_X$ 时取等
- **② 齐次性:** $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|\ (\forall\ x\in X,\alpha\in\mathbb{F})$
- **③ 三角不等式:** $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|\ (\forall\ x,y\in X)$
  实际上我们可以得到完整的三角不等式: $|\|x\|-\|y\||\leq\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|\ (\forall\ x,y\in X)$
  这是因为:

$$\begin{cases}\|x\|=\|x-y+y\|\leq\|x-y\|+\|y\| & \Rightarrow\|x\|-\|y\|\leq\|x-y\|\\ \|y\|=\|y-x+x\|\leq\|y-x\|+\|x\| & \Rightarrow\|y\|-\|x\|\leq\|x-y\|\end{cases}$$
$$\Rightarrow|\|x\|-\|y\||\leq\|x-y\|\ (\forall\ x,y\in X)$$

则我们称 X 为**赋范空间**，称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的**范数**.

- **有限维复 Euclid 空间** $(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_p)\ (p\geq 1)$ 为赋范空间
  其中 $\|x\|_p:=(\sum_{i=1}^n|x_i|^p)^{1/p}\ (\forall\ x\in\mathbb{C}^n)$
  (特殊地，当 $p=\infty$ 时 $\|\cdot\|_\infty:=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|\ (\forall\ x\in\mathbb{C}^n)$)
- p **次幂可和序列空间** $(l^p,\|\cdot\|_p)\ (1\leq p<\infty)$ 为赋范空间:

$$l^p:=\{\{x_k\}_{k=1}^\infty:x_k\in\mathbb{C}\text{ for all }k\in\mathbb{Z}_+,\sum_{k=1}^\infty|x_k|^p<\infty\}$$
$$\|x\|_p:=(\sum_{i=1}^\infty|x_i|^p)^{1/p}$$

- **有界序列空间** $(l^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ 为赋范空间:

$$l^\infty:=\{\{x_k\}_{k=1}^\infty:x_k\in\mathbb{C}\text{ for all }k\in\mathbb{Z}_+,\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}|x_k|<\infty\}$$
$$\|x\|_\infty:=\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}|x_k|$$

- p **次幂可积实值函数空间** $(L^p(\Omega),d_p)\ (1\leq p<\infty)$ 为赋范空间:
  (其中 Ω 为给定的 Lebesgue 可测集，且 $m(\Omega)<\infty$)
  (实际上 Ω 可以是无限测度的，但必须要求它是 σ-有限的，即存在至多可数个可测子集能够覆盖它)

$$L^p(\Omega):=\{x:\Omega\mapsto\mathbb{R}:\int_\Omega|x(t)|^p\mathrm{d}t<\infty\}$$
$$\|x\|_p:=(\int_\Omega|x(t)|^p\mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}}$$

- **几乎处处有界的可测函数空间** $(L^{\infty}(\Omega), d_{\infty})$ 为赋范空间:
  (其中 Ω 为给定的 Lebesgue 可测集，且 $m(\Omega) < \infty$)

$$L^{\infty}(\Omega) := \{x : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \operatorname{ess}\ \sup_{t\in\Omega} |x(t)| < \infty\}$$
$$\|x\|_{\infty} := \operatorname{ess}\ \sup_{t\in\Omega} |x(t)|$$

  其中 $\operatorname{ess}\ \sup$ 代表本质上确界，即几乎处处的意义下的上确界.

$$\begin{aligned}\operatorname{ess}\ \sup_{t\in\Omega} |x(t)| &:= \inf\{M : M \geq 0 \text{ such that } |x(t)| \leq M \text{ holds almost everywhere on } \Omega\} \\ &= \inf_{\Omega_0\subset\Omega \text{ such that } m(\Omega_0)=0} \sup_{t\in\Omega\setminus\Omega_0} |x(t)|\end{aligned}$$

  其特例是闭区间 $[a,b]$ 上的**连续实值函数空间** $(C([a,b]), \|\cdot\|_{\infty})$
  其中范数 $\|\cdot\|_{\infty}$ 的定义可等价写为:

$$\|x\|_{\infty} := \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

  我们还可定义闭区间 $[a,b]$ 上的**具有 k 阶连续导数的函数空间** $(C^k([a,b]), \|\cdot\|)$
  其中范数 $\|\cdot\|$ 的定义为:

$$\|\cdot\| := \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^{(i)}(t)| \text{ where } x^{(i)}(t) \text{ denote the } i\text{-th derivative of } x(t)$$

- 闭区间 $[a,b]$ 上的**有界变差函数空间** $\mathrm{BV}([a,b]) := \{f : [a,b] \mapsto \mathbb{R} \mid |\Delta f|_{[a,b]} < \infty\}$ 按照以下范数构成赋范空间:

$$\|f\| := |f(a)| + |\Delta f|_{[a,b]}\ (\forall\ f \in \mathrm{BV}([a,b]))$$

  其中 $|\Delta f|_{[a,b]}$ 代表 f 在 $[a,b]$ 上的全变差 (定义参考 FDU 泛函分析 0. 实分析基础)

2.1.2 依范数收敛

设 $\{x_n\}$ 为赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的序列.

- 若存在 $x \in X$ 使得 $\|x_n - x\| \to 0\ (n \to \infty)$，则我们称 $\{x_n\}$ 在 X 上依范数 $\|\cdot\|$ 收敛于 x
- 若存在 $M > 0$ 使得 $\|x_n\| \leq M\ (\forall\ n \in \mathbb{Z}_+)$，则我们称序列 $\{x_n\}$ 有界.
  赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的收敛序列一定有界.

(工科泛函分析基础, 定理 $3.2.3$, 泛函分析讲义, 定理 $3.2.1$)
任意赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的范数 $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}_+$ 都是连续泛函.
换言之，只要 $\|x_n - x\| \to 0\ (n \to \infty)$，就有 $\|x_n\| \to \|x\|\ (n \to \infty)$
这个结论可由完整的三角不等式 $|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|\ (\forall\ n \in \mathbb{Z}_+)$ 简单推得.

(泛函分析讲义, 定理 $3.2.2$)
任意赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的加法与数乘运算都是连续的:

$$\begin{cases}\|x_n - x\| \to 0 & (n \to \infty) \\ \|y_n - y\| \to 0 & (n \to \infty)\end{cases} \Rightarrow \|(x_n + y_n) - (x - y)\| \to 0\ (n \to \infty)$$
$$\begin{cases}\|x_n - x\| \to 0 & (n \to \infty) \\ |\alpha_n - \alpha| \to 0 & (n \to \infty)\end{cases} \Rightarrow \|\alpha_n x_n - \alpha x\| \to 0\ (n \to \infty)$$

(Schauder 基)
设 $\{e^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的无限维赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的序列.
若对于任意 $x \in X$ 都存在唯一的 $\mathbb{F}$ 上的数列 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{(k)}-x\right\|=0$$

则我们称 $\{e^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $(X,\|\cdot\|)$ 中的 **Schauder 基**
级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e^{(k)}$ 称为 $x\in X$ 关于 $\{e^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 的展开式
数列 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ 称为 $x\in X$ 关于 $\{e^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 的展开系数.
(存疑: 上述定义的是可数形式的 Schauder 基，它可推广到不可数形式，即指标集不是可数集)

2.1.3 赋范空间是度量空间的特例

设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范空间.
我们称 $d(x,y)=\|x-y\|\ (\forall\ x,y\in X)$ 为由范数 $\|\cdot\|$ 导出的度量.
显然 (X,d) 为度量空间，且 X 中的序列依度量 d 收敛等价于依范数 $\|\cdot\|$ 收敛.
因此赋范空间都是度量空间 (反过来不成立)，度量空间的性质在赋范空间中都成立.

- **(泛函分析讲义, 例** $3.2.6$**)**
  序列空间 $(\mathbb{C}^{\infty},d)$

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{\infty}&:=\{\{x_k\}_{k=1}^{\infty}:x_k\in\mathbb{C}\text{ for all }k\in\mathbb{Z}_+\}\\ d(x,y)&:=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}\end{aligned}$$

  这是一个典型的例子: 它是度量空间，但不是赋范空间.
  由度量 d 导出的泛函 $\|x\|:=d(x,0_{\mathbb{C}^{\infty}})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k|}{1+|x_k|}$ 显然不满足齐次性
  (例如当 $x=(1,1,\dots)$ 时我们有 $\|2x\|\neq 2\|x\|$)
  其中 $0_{\mathbb{C}^{\infty}}:=(0,0,\dots)$ 是序列空间 $\mathbb{C}^{\infty}$ 的加法单位元.
  (存疑: 不保证其他度量也不能导出范数)

下面我们给出一个度量 d 可以导出范数的充分条件:
(工科泛函分析基础, 定理 $3.2.10$**, 泛函分析讲义, 定理** $3.2.4$**)**
设 X 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，记其加法单位元为 0_X
若 X 上定义的度量 $d:X\times X\mapsto\mathbb{R}_+$，且满足:

- ① $d(x-y,0_X)=d(x,y)\ (\forall\ x,y\in X)$
- ② $d(\alpha x,0_X)=|\alpha|d(x,0_X)\ (\forall\ x\in X,\alpha\in\mathbb{F})$

则泛函 $\|x\|:=d(x,0_X)\ (\forall\ x\in X)$ 是 X 上的一个范数.

证明:

- ① 正定性: $\|x\|=d(x,0_X)\geq 0\ (\forall\ x\in X)$ 当且仅当 $x=0_X$ 时取等.
- ② 齐次性: $\|\alpha x\|=d(\alpha x,0_X)=|\alpha|d(x,0_X)=|\alpha|\|x\|\ (\forall\ x\in X,\alpha\in\mathbb{F})$
- ③ 三角不等式:
  对于任意 $x,y\in X$ 我们都有:

$$\begin{aligned}\|x+y\|&=d(x+y,0_X)\\&\leq d(x+y,y)+d(y,0_X)\quad(\text{note that }d(x-y,0_X)=d(x,y)\ (\forall\ x,y\in X))\\&=d((x+y)-y,0_X)+d(y,0_X)\\&=d(x,0_X)+d(y,0_X)\\&=\|x\|+\|y\|\end{aligned}$$

2.1.4 积空间与积范数

设 X,Y 为域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间.
我们定义直积集 $X\times Y:=\{(x,y):x\in X,y\in Y\}$ 为 X,Y 的**积空间**
(它也是线性空间, 加法即元组加法, 数乘即元组数乘)

若 $(X,\|\cdot\|_X)$ 和 $(Y,\|\cdot\|_Y)$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的赋范空间.
则积空间 $X\times Y$ 按照以下范数都构成赋范空间:

$$\|(x,y)\|_p:=(\|x\|_X^p+\|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}}\ (\forall\ 1\leq p<\infty)$$
$$\|(x,y)\|_\infty:=\max\{\|x\|_X,\|y\|_Y\}$$

上述范数通称为**积范数**，它们导出的收敛都是依坐标收敛.

2.2 Banach 空间

2.2.1 定义

我们称完备的赋范空间为 **Banach 空间** (即其中的 Cauchy 序列都是收敛列)

- 有限维赋范空间都是 Banach 空间.
  因此**有限维复 Euclid 空间** $(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_p)$ $(p\geq 1)$ 为 Banach 空间
  其中 $\|x\|_p:=(\sum_{i=1}^n|x_i|^p)^{1/p}$ $(\forall\ x\in\mathbb{C}^n)$
  (特殊地，当 $p=\infty$ 时 $\|\cdot\|_\infty:=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$ $(\forall\ x\in\mathbb{C}^n)$)
- **p 次幂可和序列空间** $(l^p,\|\cdot\|_p)$ $(1\leq p<\infty)$ 为 Banach 空间:

$$l^p:=\{\{x_k\}_{k=1}^\infty:x_k\in\mathbb{C}\text{ for all }k\in\mathbb{Z}_+,\sum_{k=1}^\infty|x_k|^p<\infty\}$$
$$\|x\|_p:=(\sum_{i=1}^\infty|x_i|^p)^{1/p}$$

- **有界序列空间** $(l^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ 为 Banach 空间:

$$l^\infty:=\{\{x_k\}_{k=1}^\infty:x_k\in\mathbb{C}\text{ for all }k\in\mathbb{Z}_+,\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}|x_k|<\infty\}$$
$$\|x\|_\infty:=\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}|x_k|$$

- **p 次幂可积实值函数空间** $(L^p(\Omega),d_p)$ $(1\leq p<\infty)$ 为 Banach 空间:
  (其中 Ω 为给定的 Lebesgue 可测集，且 $m(\Omega)<\infty$)
  (实际上 Ω 可以是无限测度的，但必须要求它是 σ-有限的，即存在至多可数个可测子集能够覆盖它)

$$L^p(\Omega):=\{x:\Omega\mapsto\mathbb{R}:\int_\Omega|x(t)|^p\mathrm{d}t<\infty\}$$
$$d_p(x,y):=(\int_\Omega|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}}$$

- **几乎处处有界的可测函数空间** $(L^\infty(\Omega),d_\infty)$ 为 Banach 空间:
  (其中 Ω 为给定的 Lebesgue 可测集，且 $m(\Omega)<\infty$)

$$L^\infty(\Omega):=\{x:\Omega\mapsto\mathbb{R}:\operatorname{ess}\ \sup_{t\in\Omega}|x(t)|<\infty\}$$
$$\|x\|_\infty:=\operatorname{ess}\ \sup_{t\in\Omega}|x(t)|$$

其中 ess sup 代表本质上确界，即几乎处处的意义下的上确界.

$$\begin{aligned}\underset{t\in\Omega}{\text{ess sup}}|x(t)| &:= \inf\{M: M\geq 0 \text{ such that } |x(t)|\leq M \text{ holds almost everywhere on } \Omega\} \\ &= \inf_{\Omega_0\subset\Omega \text{ such that } m(\Omega_0)=0}\ \sup_{t\in\Omega\setminus\Omega_0}|x(t)|\end{aligned}$$

其特例是闭区间 $[a,b]$ 上的**连续实值函数空间** $(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$
其中范数 $\|\cdot\|_\infty$ 的定义可等价写为:

$$\|x\|_\infty := \max_{t\in[a,b]}|x(t)|$$

我们还可定义闭区间 $[a,b]$ 上的**具有 k 阶连续导数的实值函数空间** $(C^k([a,b]),\|\cdot\|)$
其中范数 $\|\cdot\|$ 的定义为:

$$\|\cdot\| := \sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}|x^{(i)}(t)| \text{ where } x^{(i)}(t) \text{ denote the } i\text{-th derivative of } x(t)$$

$$\text{or}$$

$$\|\cdot\| := \max_{0\leq i\leq k}\max_{t\in[a,b]}|x^{(i)}(t)| \text{ where } x^{(i)}(t) \text{ denote the } i\text{-th derivative of } x(t)$$

- 闭区间 $[a,b]$ 上的**有界变差函数空间** $\mathrm{BV}([a,b]) := \{f:[a,b]\mapsto\mathbb{R} \mid |\Delta f|_{[a,b]}<\infty\}$ 按照以下范数构成 Banach 空间:

$$\|f\| := |f(a)| + |\Delta f|_{[a,b]}\ (\forall\ f\in\mathrm{BV}([a,b]))$$

其中 $|\Delta f|_{[a,b]}$ 代表 f 在 $[a,b]$ 上的全变差 (定义参考 FDU 泛函分析 0. 实分析基础)
(若 $\{f_n\}$ 是 $\mathrm{BV}([a,b])$ 中的 Cauchy 序列，则全变差的完备性保证了存在收敛的极限函数 f，并且 f 的全变差有限)

Banach 空间	范数
$\mathbb{C}^n$ (可分)	$\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p)^{1/p}$
$l^p := \{\{x_k\}_{k=1}^\infty : x_k\in\mathbb{C} \text{ for all } k\in\mathbb{Z}_+, \sum_{k=1}^\infty \|x_k\|^p<\infty\}$ (可分)	$\|x\|_p := (\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^p)^{1/p}$
$l^\infty := \{\{x_k\}_{k=1}^\infty : x_k\in\mathbb{C} \text{ for all } k\in\mathbb{Z}_+, \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\|x_k\|\}$ (不可分)	$\|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\|x_k\|$
$L^p(\Omega) := \{x:\Omega\mapsto\mathbb{R} : \int_\Omega \|x(t)\|^p\mathrm{d}t<\infty\}$ (可分)	$\|x\|_p := \int_\Omega \|x(t)\|^p\mathrm{d}t$
$L^\infty(\Omega) := \{x:\Omega\mapsto\mathbb{R} : \text{ess sup}_{t\in\Omega}\|x(t)\|\}$ (不可分)	$\|x\|_\infty := \text{ess sup}_{t\in\Omega}\|x(t)\|$
$C(\Omega) := \{x:\Omega\mapsto\mathbb{R} : x \text{ is continuous on } \Omega\}$ (可分)	$\|x\|_\infty := \max_{t\in\Omega}\|x(t)\|$

值得说明的是，$C(\Omega)$ 在范数 $\|x\|_\infty := \max_{t\in\Omega}|x(t)|$ 的意义下是完备的，
且自己就是自己的可数稠密子集，因而可分.
但 $C(\Omega)$ 在范数 $\|x\|_\infty := \text{ess sup}_{t\in\Omega}|x(t)|$ (其收敛性更宽松) 的意义下是不完备的，其完备化便是 $L^\infty(\Omega)$
而 $L^\infty(\Omega)$ 是不可分的，这是因为 $L^\infty(\Omega)$ 中 0-1 函数全体是不可数集且不同 0-1 函数之间距离为 1
假设 $L^\infty(\Omega)$ 存在稠密子集，那么就会被 $L^\infty(\Omega)$ 中的 0-1 函数划分成不可数个足够小的 (因而不相交的) 邻域，
这说明 $L^\infty(\Omega)$ 的任意稠密子集都是不可数的，即不存在可数稠密子集，表明 $L^\infty(\Omega)$ 是不可分的.

2.2.2 基本性质

(应用泛函分析, 定理 $3.3.2$)
Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 的赋范子空间 $(Y, \|\cdot\|)$ 是完备的 (即是 Banach 空间)，当且仅当 Y 是 X 中的闭集.
这实际上是完备度量空间的性质，我们将其搬运到完备赋范空间 (即 Banach 空间) 上了:

> 完备度量空间具有一些非常好的性质.
> 例如，完备度量空间总是闭的，
> 即不管把它放在什么样的更大空间中，它总是一个闭集.
> 更准确地说:
> **(工科泛函分析基础, 定理 $2.4.7$, 泛函分析讲义 定理 $2.4.3$)**
> 因此完备度量空间 (X, d) 的子集 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 是完备的，当且仅当 Y 是 X 中的闭集.

(泛函分析讲义, 例 $3.2.3$)
试证明 $\mathbb{C}$ 上的收敛数列全体构成的空间 c^{∞} 按照范数 $\|\cdot\|_{\infty}$ 构成 Banach 空间.

- 我们只需说明 $(c^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ 是 $(l^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ 的闭子空间，就可说明 $(c^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ 是 Banach 空间.
  考虑 $(c^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ 任意给定的收敛序列 $\{x^{(n)}\}$，设其极限为 $x^{(0)}$
  则对于任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{Z}_+$ 使得:
  $$\|x^{(n)} - x^{(0)}\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} \ (\forall\, n \geq N)$$
  取 $n = N$，则根据上式可知 $|x_k^{(N)} - x_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} \ (\forall\, k \in \mathbb{Z}_+)$
  注意到 $x^{(N)} = \{x_k^{(N)}\}_{k=1}^{\infty}$ 为收敛数列，故它一定是 Cauchy 数列，
  即存在 $K \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $|x_k^{(N)} - x_l^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3} \ (\forall\, k, l \geq K)$
  因此对于任意 $k, l \geq K$ 我们都有:
  $$\begin{aligned} |x_k^{(0)} - x_l^{(0)}| &\leq |x_k^{(0)} - x_k^{(N)}| + |x_k^{(N)} - x_l^{(N)}| + |x_l^{(N)} - x_l^{(0)}| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$
  这表明 $x^{(0)} = \{x_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 Cauchy 数列.
  根据复数域 $\mathbb{C}$ 的完备性可知 $x^{(0)} = \{x_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的收敛数列，即 $x^{(0)} \in c^{\infty}$
  这就说明了 $(c^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ 是 $(l^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ 的闭子空间，故 $(c^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ 是 Banach 空间.

(泛函分析讲义, 例 $3.2.4$)
试证明 $\mathbb{C}$ 上的收敛于 0 的数列全体构成的空间 c_0^{∞} 按照范数 $\|\cdot\|_{\infty}$ 构成 Banach 空间.

- 我们只需说明 $(c_0^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ 是 $(l^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ 的闭子空间，就可说明 $(c_0^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ 是 Banach 空间.
  考虑 $(c^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ 任意给定的收敛序列 $\{x^{(n)}\}$，设其极限为 $x^{(0)}$
  则对于任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{Z}_+$ 使得:
  $$\|x^{(n)} - x^{(0)}\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{2} \ (\forall\, n \geq N)$$
  取 $n = N$，则根据上式可知 $|x_k^{(N)} - x_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{2} \ (\forall\, k \in \mathbb{Z}_+)$
  注意到 $x^{(N)} = \{x_k^{(N)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是收敛于 0 的数列，即存在 $K \in \mathbb{Z}_+$ 使得
  $|x_k^{(N)} - 0| < \frac{\varepsilon}{2} \ (\forall\, k \geq K)$
  因此对于任意 $k \geq K$ 我们都有:

$$
\begin{aligned}
|x_k^{(0)} - 0| &\le |x_k^{(0)} - x_k^{(N)}| + |x_k^{(N)} - 0| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

这表明 $x^{(0)} = \{x_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}$ 上收敛于 0 的数列，即 $x^{(0)} \in c_0^{\infty}$
这就说明了 $(c_0^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ 是 $(l^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ 的闭子空间，故 $(c_0^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ 是 Banach 空间.

(F. Riesz 引理, 应用泛函分析, 引理 $3.4.1$, 泛函分析讲义, 引理 $3.2.1$)
设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范空间.
若 X 中的真子空间 $S \subset X$ 是闭的，
则对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$ 都存在满足 $\|x_0\| = 1$ 的 $x_0 \in X$ 使得 $\|x - x_0\| > \varepsilon \ (\forall\, x \in S)$

- 若上述引理中的真子空间 S 不是闭集，则结论可能不成立.
- 一般来说，上述引理中的 "$\forall\, \varepsilon \in (0,1), \exists\, x_0 \in X \text{ such that } \|x - x_0\| > \varepsilon \ (\forall\, x \in S)$"
  不能加强为 "$\exists\, x_0 \in X \text{ such that } \|x - x_0\| \ge 1 \ (\forall\, x \in S)$
  但对于内积空间的情况是可以这样加强的.
- 上述引理表明赋范空间中的闭真子空间 S 和其空间 X 中的元素之间，总是存在某种程度的分离.
  这意味着 X 中的任意闭真子空间都不可能填满 X 的整个空间.

证明:
由于 $S \subset X$ 是 X 的真子空间，故存在 $x_1 \in X \backslash S$
我们定义 $d(x_1, S) := \inf_{x \in S} \|x - x_1\|$
由于 S 是闭的，故 $d(x_1, S) > 0$
(如若不然，则 $d(x_1, S) = 0$ 代表存在 $\{x_n\} \subset S$ 使得 $\|x_n - x_1\| \to 0 \ (n \to \infty)$，根据 S 的闭性可知 $x_1 \in S$，矛盾!)

对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$，我们都有 $\frac{d(x_1,S)}{\varepsilon} > d(x_1, S) = \inf_{x \in S} \|x - x_1\|$
根据下确界的性质可知存在 $x_2 \in S$ 使得 $\|x_2 - x_1\| < \frac{d(x_1,S)}{\varepsilon}$
定义 $x_0 := \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}$，显然满足 $\|x_0\| = 1$
则对于任意 $x \in S$ 我们都有:

$$
\begin{aligned}
\|x - x_0\| &= \left\| x - \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|} \right\| \\
&= \frac{1}{\|x_1 - x_2\|} \|(\|x_1 - x_2\| x + x_2) - x_1\| \quad (\text{note that } \begin{cases} x \in S \\ x_2 \in S \end{cases} \Rightarrow \|x_1 - x_2\| x + x_2 \in S) \\
&\ge \frac{1}{\|x_1 - x_2\|} \inf_{x \in S} \|x - x_1\| \\
&= \frac{1}{\|x_1 - x_2\|} d(x_1, S) \quad (\text{note that } \|x_2 - x_1\| < \frac{d(x_1, S)}{\varepsilon}) \\
&> \varepsilon
\end{aligned}
$$

命题得证.

(应用泛函分析 定理 $3.4.4$, 泛函分析讲义 定理 $3.2.11$)
设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，则下列命题等价:

- ① X 是有限维的
- ② X 中的有界集都是列紧集
- ③ X 中的有界闭集都是紧集
- ④ X 中的单位闭球 $\bar{B}(0_X, 1) = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ 是紧集
- ⑤ X 中的单位球面 $\mathrm{bd}(\bar{B}(0_X, 1)) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ 是紧集

我们这里仅证明 ⑤ $\Rightarrow$ ①:
设X 中的单位球面 $\text{bd}(\bar{B}(0_X,1))=\{x\in X:\|x\|=1\}$ 是紧集.
(反证法) 假设 $(X,\|\cdot\|)$ 是无限维赋范空间,
则存在 X 中的序列 $\{x_n\}$，其任意有限个元素都线性无关.
记 $X_n:=\text{span}\{x_1,\dots,x_n\}$ $(\forall\, n\in\mathbb{Z}_+)$
由于 X_n 是 X 的有限维子空间，故它一定是闭的，于是 X_{n-1} 一定是 X_n 的闭子空间.
根据 **F. Riesz 引理**可知，存在 $y_n\in X_n$ 满足 $\begin{cases}\|y_n\|=1\\ \|y_n-x\|\geq\frac{1}{2}\ (\forall\, x\in X_{n-1})\end{cases}$
这样我们就得到了单位球面 $\text{bd}(\bar{B}(0_X,1))$ 上的点列 $\{y_n\}$ 满足 $\|y_m-y_n\|\geq\frac{1}{2}$ $(\forall\, m>n\geq 2)$
(注意到 $y_n\in X_{m-1}$)
因此 $\{y_n\}$ 的任一子列都不可能是 Cauchy 列，从而不可能有收敛子列.
这与 "单位球面 $\text{bd}(\bar{B}(0_X,1))$ 是紧集" 的假设矛盾，说明 $(X,\|\cdot\|)$ 必须是有限维赋范空间.

(应用泛函分析, 定理 $3.3.1$, 泛函分析讲义, 定理 $3.2.6$)
设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间，则 X 为 Banach 空间的充要条件是:
对于任意 $\{x_n\}\subset X$，只要 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ 收敛，就有 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ 收敛.
(类似于数学分析中的结论: 绝对收敛的序列一定收敛)

- **必要性:**
  设 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.
  任意给定 $\{x_n\}\subset X$，记 $S_n:=\sum_{k=1}^{n}x_k$ $(\forall\, n\in\mathbb{Z}_+)$
  若 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ 收敛，则我们有:
  $$\begin{aligned}\|S_{n+p}-S_n\|&=\left\|\sum_{k=1}^{n+p}x_k-\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|\\&=\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p}x_k\right\|\qquad\qquad(\forall\, p\in\mathbb{Z}_+)\\&\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}\|x_k\|\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$
  因此 $\{S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列.
  由于 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，故序列 $\{S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k\}$ 收敛，即 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ 收敛.
- **充分性:**
  设对于任意 $\{x_n\}\subset X$，只要 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ 收敛，就有 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ 收敛.
  现考虑任意给定 Cauchy 序列 $\{x_n\}\subset X$,
  根据 Cauchy 序列的定义可知存在正整数序列 $\{n_k\}$ 满足 $\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|<\frac{1}{2^k}$ $(\forall\, k\in\mathbb{Z}_+)$
  根据 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ 的收敛性可知 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|$ 收敛,
  从而根据假设可知 $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}x_{n_{k+1}}-x_{n_1}$ 收敛,
  于是可知序列 $\{x_{n_{k+1}}-x_{n_1}\}$ 收敛，即子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛,
  进而可知 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ 收敛，表明赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

(应用泛函分析, 定理 $3.3.3$)
对于域 $\mathbb{F}$ 上的赋范空间 $(X,\|\cdot\|_X)$ 和 $(Y,\|\cdot\|_Y)$
其积空间 $X\times Y$ 依积范数构成 Banach 空间，当且仅当 $(X,\|\cdot\|_X)$ 和 $(Y,\|\cdot\|_Y)$ 均为 Banach 空间.
其中积范数的定义可以是以下任意一种:
$$\|(x,y)\|_p:=(\|x\|_X^p+\|y\|_X^p)^{\frac{1}{p}}\ (\forall\, 1\leq p<\infty)$$
$$\|(x,y)\|_\infty:=\max\{\|x\|_X,\|y\|_Y\}$$

2.2.3 有限维 Banach 空间

(范数的等价性)
设 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 是线性空间 X 上的两个范数.
若对于 X 中的任意序列 $\{x_n\}$，依 $\|\cdot\|_\alpha$ 收敛等价于依 $\|\cdot\|_\beta$ 收敛 (即 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_\beta = 0$)
则我们称范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 是等价的.

(范数等价定理, 应用泛函分析 定理 $3.4.1$, 泛函分析讲义, 定理 $3.2.7$)
线性空间 X 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 等价的充要条件是存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 使得:

$$c_1\|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le c_2\|x\|_\alpha \ (\forall\ x \in X)$$

- **充分性:**
  设存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 使得 $c_1\|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le c_2\|x\|_\alpha \ (\forall\ x \in X)$
  对于 X 中的任意序列 $\{x_n\}$
  若 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_\alpha = 0$，则根据 $\|x\|_\beta \le c_2\|x\|_\alpha \ (\forall\ x \in X)$ 可知 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_\beta = 0$
  若 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_\beta = 0$，则根据 $\|x\|_\alpha \le \frac{1}{c_1}\|x\|_\beta \ (\forall\ x \in X)$ 可知 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_\alpha = 0$
  因此 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_\beta = 0$，表明范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 等价.
- **必要性:**
  设范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 是等价的.
  (反证法) 假设不存在 $c_2 > 0$ 使得 $\|x\|_\beta \le c_2\|x\|_\alpha \ (\forall\ x \in X)$
  则对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 都存在 $x_n \in X$ 使得 $\|x_n\|_\beta > n\|x_n\|_\alpha$
  定义 $y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|_\beta} \ (\forall\ n \in \mathbb{Z}_+)$，则我们有:

  $$\begin{aligned}\|y_n\|_\alpha &= \left\|\frac{x_n}{\|x_n\|_\beta}\right\|_\alpha = \frac{\|x_n\|_\alpha}{\|x_n\|_\beta} < \frac{1}{n} \to 0 \ (n\to\infty) \\ \|y_n\|_\beta &= \left\|\frac{x_n}{\|x_n\|_\beta}\right\|_\beta = \frac{\|x_n\|_\beta}{\|x_n\|_\beta} = 1 \nrightarrow 0 \ (n\to\infty)\end{aligned}$$

  这与范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 的等价性矛盾，故存在 $c_2 > 0$ 使得 $\|x\|_\beta \le c_2\|x\|_\alpha \ (\forall\ x \in X)$
  同理可证存在 $c_1 > 0$ 使得 $\|x\|_\alpha \le c_1^{-1}\|x\|_\beta \ (\forall\ x \in X)$
  因此存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 使得 $c_1\|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le c_2\|x\|_\alpha \ (\forall\ x \in X)$

(准范数)
设 X 是域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间.
若 X 上的实值函数 f 满足:

- 非负性: $f(x) \ge 0 \ (\forall\ x \in X)$
- 正定性: $f(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0_X$
- 齐次性: $f(\alpha x) = |\alpha| f(x) \ (\forall\ x \in X, \alpha \in \mathbb{F})$
- 连续性: $f(x)$ 在 X 上关于 Euclid 范数是连续的，即
  $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_2 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|f(x_n) - f(x)| = 0$

则我们称 f 为 X 上的**准范数** (pre-norm)
满足三角不等式的准范数就是范数.

(工科泛函分析基础 定理 $3.2.12$, 泛函分析讲义 定理 $3.2.8$, Matrix Analysis 定理 $5.4.4$)
$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间 X 上的任意两个范数都是等价的.
(上述等价性可推广到准范数，因为证明中我们没有用到三角不等式)

- **证明:**
  设线性空间 X 的维度为 n，它的一组基为 $\{e^{(1)},\dots,e^{(n)}\}$
  对于任意 $x\in X$ 我们定义其坐标为 $z(x)=(z_1(x),\dots,z_n(x))$，满足:

$$
z_1(x),\dots,z_n(x)\in\mathbb{F}
$$
$$
x=\sum_{k=1}^n z_k(x)e^{(k)}
$$

设 $\|\cdot\|_\alpha,\|\cdot\|_\beta$ 是 X 上的两个范数，定义 $\begin{cases}f_1(z):=\|\sum_{k=1}^n z_ke^{(k)}\|_\alpha\\ f_2(z):=\|\sum_{k=1}^n z_ke^{(k)}\|_\beta\end{cases}$

它们天然是连续实值函数.

> **有限维实或复赋范空间上的范数都是一致连续函数:**
> 设 $\|\cdot\|$ 是 n 维实或复赋范空间 X 上的范数，$\{e^{(1)},\dots,e^{(n)}\}$ 是 X 的一组给定的基.
> 对于任意 $x,\Delta x\in X$，我们定义其在基 $\{e^{(1)},\dots,e^{(n)}\}$ 下的坐标为
> $\begin{cases}z=(z_1,\dots,z_n)\\ \Delta z=(\Delta z_1,\dots,\Delta z_n)\end{cases}$
> 则我们有:
>
> $$
> \begin{aligned}
> |\|x+\Delta x\|-\|x\||&\le\|(x+\Delta x)-x\|\\
> &=\|\Delta x\|\\
> &=\|\Delta z_1\cdot e^{(1)}+\cdots+\Delta z_n\cdot e^{(n)}\|\\
> &\le\sum_{k=1}^n|\Delta z_k|\|e^{(k)}\|\\
> &\le(\max_{1\le k\le n}|\Delta z_k|)\sum_{k=1}^n\|e^{(k)}\|\\
> &=(\sum_{k=1}^n\|e^{(k)}\|)\cdot\|\Delta z\|_\infty
> \end{aligned}
> $$
>
> 注意到 $\sum_{k=1}^n\|e^{(k)}\|$ 是与 $x,\Delta x$ 无关的常数
> 因此当 $\Delta x\to 0_X$ (即 $\|\Delta z\|_\infty=\max_{1\le k\le n}|\Delta z_k|\to 0$) 时，
> 我们有 $|\|x+\Delta x\|-\|x\||\to 0$，而且收敛速度与 x 无关.
> 这表明 $\|\cdot\|$ 在 X 上是一致连续的.

在 Euclid 单位球面 $S:=\{z\in\mathbb{F}^n:\|z\|_2=1\}$ (它是一个紧集) 上定义 $h(z)=\frac{f_2(z)}{f_1(z)}$
显然 h 是紧集 S 上的连续函数.
(分母必不为零，因为 $f_1(z)=\|\sum_{k=1}^n z_ke^{(k)}\|_\alpha\neq\|0_X\|_\alpha=0$ $(\forall\ z\in S)$)

> **(Weierstrass 定理, Nonlinear Programming 命题 A.8)**
> 设 $\mathcal{X}$ 为 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ 上的有限维赋范空间 V 的非空子集
> 且 $f:\mathcal{X}\mapsto\mathbb{R}$ 在 $\mathcal{X}$ 处下半连续
> 即对于满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x$ 的每一个序列 $\{x^{(k)}\}\subset\mathcal{X}$ 都有 $f(x)\le\lim\limits_{k\to\infty}\inf f(x^{(k)})$
> (特殊地，连续函数一定下半连续)
>
> 若下列条件有一个成立:
>
> - ① $\mathcal{X}$ 是紧集 (即有界闭集)
> - ② $\mathcal{X}$ 是闭集，且 f 在 $x\in\mathcal{X}$ 上是强制的 (coercive)
>   即对于满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x^{(k)}\|=\infty$ 的每一个序列 $\{x^{(k)}\}\subset\mathcal{X}$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x^{(k)})=\infty$
> - ③ 存在 $\alpha\in\mathbb{R}$ 使得下水平集 $\{x\in\mathcal{X}:f(x)\le\alpha\}$ 是紧集
>
> 则 f 在 $\mathcal{X}$ 上的全局最小点的集合 $\arg\min\limits_{x\in\mathcal{X}}f(x)$ 为非空紧集.

根据 **Weierstrass 定理**可知 h 在 S 上存在有限的最小值 $C_{\min}$ 和最大值 $C_{\max}$
即对于任意 $z\in S$ (即 $z\in\mathbb{F}^n$ 且 $\|z\|_2=1$) 我们都有 $C_{\min}\leq h(z)=\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\leq C_{\max}$
根据范数的正定性，并结合 $0_n\notin S$ 可知 $C_{\min},C_{\max}>0$

根据范数的齐次性可知:
对于任意非零向量 $z\in\mathbb{F}^n$ 都有:

$$C_{\min}\leq h\left(\frac{z}{\|z\|_2}\right)=\frac{f_2(\frac{z}{\|z\|_2})}{f_1(\frac{z}{\|z\|_2})}=\frac{\frac{1}{\|z\|_2}f_2(z)}{\frac{1}{\|z\|_2}f_1(z)}=\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\leq C_{\max}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$C_{\min}f_1(z)\leq f_2(z)\leq C_{\max}f_1(z)$$

显然 $z=0_n$ 也满足不等式 $C_{\min}f_1(z)\leq f_2(z)\leq C_{\max}f_1(z)$
因此我们有:

$$C_{\min}f_1(z)\leq f_2(z)\leq C_{\max}f_1(z)\ \ (\forall\, z\in\mathbb{F}^n)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$C_{\min}\left\|\sum_{k=1}^n z_k e^{(k)}\right\|_\alpha\leq\left\|\sum_{k=1}^n z_k e^{(k)}\right\|_\beta\leq C_{\max}\left\|\sum_{k=1}^n z_k e^{(k)}\right\|_\alpha\quad(\forall\, z\in\mathbb{F}^n)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$C_{\min}\|x\|_\alpha\leq\|x\|_\beta\leq C_{\max}\|x\|_\alpha\ (\forall\, x\in X)$$

命题得证.

(工科泛函分析基础 定理 $3.2.13$, 泛函分析讲义 定理 $3.2.9$)

- **(应用泛函分析 定理 $3.4.3$)**
  数域 $\mathbb{F}$ (例如 $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) 上的 n 维赋范空间同构于 $\mathbb{F}^n$，依范数的收敛性等价于依坐标收敛.
- **(应用泛函分析 推论 $3.4.1$)**
  有限维赋范空间一定是 Banach 空间.
- **(应用泛函分析 推论 $3.4.2$)**
  任意赋范空间的有限维子空间一定是 Banach 空间，从而也是闭子空间.

但赋范空间的无限维子空间不一定是闭的.
(工科泛函分析基础 例 $3.2.15$, 泛函分析讲义 例 $3.2.8$)
无穷维赋范空间中存在不闭的无限维子空间.

- 考虑 2 次可和序列空间 $(l^2,\|\cdot\|_2)$ 中只有有限个非零坐标的元素构成的集合 $S\subset l^2$
  显然 S 对 l^2 上的加法和数乘封闭，故 S 是 l^2 的线性子空间.
  下面我们举例说明 S 不是闭的:
  定义 S 中的序列 $\{x_n\}$ 如下:

$$\begin{gathered}x_1=(1,0,0,\ldots)\\ x_2=(1,\frac{1}{2},0,0\ldots)\\ \cdots\\ x_n=(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2^{n-1}},0,0,\ldots)\\ \cdots\end{gathered}$$

可以证明 $\{x_n\}$ 收敛于 $x=(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2^{n-1}},\ldots)\in l^2$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_2 &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left|\frac{1}{2^k}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{4^k}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(\text{note that } \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k} = \frac{4}{3} \text{ is a convergent series}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

但注意到 $x \notin S$，因此 l^2 的线性子空间 S 不是闭的.

The End