高等线性代数 Homework 08

Due: Nov. 4, 2024
姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 1

记 $J_4(0)$ 为零特征值对应的 4 阶 Jordan 块，定义:

$$A := \begin{bmatrix} J_4(0) & c \\ & 0 \end{bmatrix} \text{ where } c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

试构造相似变换 P 使得 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 标准型.

- **Lemma 1: (幂零 Jordan 块的性质, Matrix Analysis 引理 $3.1.4$)**
  给定正整数 $n \geq 2$ 和 $x \in \mathbb{C}^n$，记 $\mathbb{C}^n$ 的第 i 个标准单位基向量为 e_i，则我们有:
  - $J_n(0)e_{i+1} = e_i \ (\forall \, i = 1, \dots, n-1)$
  - $J_n(0)^{\mathrm{T}} J_n(0) = \begin{bmatrix} 0 & \\ & I_{n-1} \end{bmatrix}$
  - $[I_n - J_n(0)^{\mathrm{T}} J_n(0)]x = (x^{\mathrm{T}} e_1) e_1$
  - $J_n(0)^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} & I_{n-k} \\ 0_{k \times k} & \end{bmatrix} & \text{if } 1 \leq k < n \\ 0_{n \times n} & \text{if } k \geq n \end{cases}$
- **Lemma 2: (严格上三角阵的 Jordan 标准型, Matrix Analysis 定理 $3.1.5$)**
  若 $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是严格上三角阵，则存在一个非奇异矩阵 $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和正整数 $n_1 \geq \cdots \geq n_p \geq 1$ 使得:

  $$S^{-1}TS = J_{n_1}(0) \oplus \cdots \oplus J_{n_p}(0)$$

  若 T 是实方阵，则相似矩阵 S 也可取成实的.

  Proof:
  我们使用数学归纳法.
  当 $n = 1$ 时，命题显然成立.
  当 $n > 1$ 时，假设命题对所有小于 n 阶的严格上三角阵都成立.
  我们可将 T 分块成 $T = \begin{bmatrix} 0 & a^{\mathrm{T}} \\ & T_1 \end{bmatrix}$
  其中 $a \in \mathbb{C}^{n-1}$，T_1 为 $n-1$ 阶的严格上三角阵.
  根据归纳假设，存在 $n-1$ 阶非奇异阵 S_1 使得:

  $$S_1^{-1} T_1 S_1 = \begin{bmatrix} J_{n_1}(0) & & & \\ & J_{n_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{n_1}(0) & \\ & J \end{bmatrix}$$

  其中 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1$ 满足 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n-1$
  而 $J = J_{n_2}(0) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(0)$ 为 $n - 1 - n_1$ 阶 Jordan 矩阵，显然它满足 $J^{n_1} = 0_{n_1 \times n_1}$
  于是我们有:

  $$\begin{bmatrix} 1 & \\ & S_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a^{\mathrm{T}} \\ & T_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^{\mathrm{T}} S_1 \\ & S_1^{-1} T_1 S_1 \end{bmatrix}$$

将 $S_1^{-1}T_1S_1$ 分块为 $S_1^{-1}T_1S_1 = J_{n_1}(0) \oplus J$
并对应地将 $a^{\mathrm{T}}S_1$ 分块为 $[a_1^{\mathrm{T}}, a_2^{\mathrm{T}}]$，其中 a_1, a_2 维数分别为 n_1 和 $n-1-n_1$
则我们有:

$$\begin{bmatrix} 0 & a^{\mathrm{T}}S_1 \\ & S_1^{-1}T_1P_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & a_1^{\mathrm{T}} & a_2^{\mathrm{T}} \\ \hline & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{array}\right]$$

考虑如下的相似变换:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & -a_1^{\mathrm{T}}J_{n_1}(0) & \\ & I_{n_1} & \\ & & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_1^{\mathrm{T}} & a_2^{\mathrm{T}} \\ & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a_1^{\mathrm{T}}J_{n_1}(0) & \\ & I_{n_1} & \\ & & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a_1^{\mathrm{T}}(I_{n_1} - J_{n_1}^{\mathrm{T}}(0)J_{n_1}(0)) & a_2^{\mathrm{T}} \\ & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{bmatrix} \quad (\text{note that } J_{n_1}^{\mathrm{T}}(0)J_{n_1}(0) = I_{n_1} - e_1e_1^{\mathrm{T}}) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & (a_1^{\mathrm{T}}e_1)e_1^{\mathrm{T}} & a_2^{\mathrm{T}} \\ & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

其中 e_1 为对应维数的 Euclid 空间的第 1 个单位标准基向量.

- ① 若 $a_1^{\mathrm{T}}e_1 = 0$，则上式化为 $\begin{bmatrix} 0 & & a_2^{\mathrm{T}} \\ & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{bmatrix}$ 并置换相似于 $\begin{bmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & 0 & a_2^{\mathrm{T}} \\ & & J \end{bmatrix}$
  根据归纳假设，$n-n_1$ 阶严格上三角阵 $\begin{bmatrix} 0 & a_2^{\mathrm{T}} \\ 0 & J \end{bmatrix}$ 相似于一个 $n-n_1$ 阶 Jordan 矩阵
  因此 $\begin{bmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & 0 & a_2^{\mathrm{T}} \\ & & J \end{bmatrix}$ 相似于一个 n 阶 Jordan 矩阵，于是命题对 n 阶的情况也成立.

- ② 若 $a_1^{\mathrm{T}}e_1 \neq 0$，则可对 $\begin{bmatrix} 0 & (a_1^{\mathrm{T}}e_1)e_1^{\mathrm{T}} & a_2^{\mathrm{T}} \\ & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{bmatrix}$ 做如下相似变换:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^{\mathrm{T}}e_1} & & \\ & I_{n_1} & \\ & & \frac{1}{a_1^{\mathrm{T}}e_1}I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & (a_1^{\mathrm{T}}e_1)e_1 & a_2^{\mathrm{T}} \\ & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (a_1^{\mathrm{T}}e_1) & & \\ & I_{n_1} & \\ & & (a_1^{\mathrm{T}}e_1)I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & e_1^{\mathrm{T}} & a_2^{\mathrm{T}} \\ & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{bmatrix} \quad \left(\text{note that } J_{n_1+1}(0) = \begin{bmatrix} 0 & e_1^{\mathrm{T}} \\ & J_{n_1}(0) \end{bmatrix} \text{ and } e_1a_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_2^{\mathrm{T}} \\ 0_{n_1\times(n-1-n_1)} \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_1a_2^{\mathrm{T}} \\ & J \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

  其中 e_1 为对应维数的 Euclid 空间的第 1 个单位标准基向量.
  对 $\begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_1a_2^{\mathrm{T}} \\ & J \end{bmatrix}$ 做如下的相似变换:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} I_{n_1+1} & e_2a_2^{\mathrm{T}} \\ & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_1a_2^{\mathrm{T}} \\ & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n_1+1} & -e_2a_2^{\mathrm{T}} \\ & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & -J_{n_1+1}(0)e_2a_2^{\mathrm{T}} + e_1a_2^{\mathrm{T}} + e_2a_2^{\mathrm{T}}J \\ & J \end{bmatrix} \quad (\text{note that } J_{n_1+1}(0)e_2 = e_1) \\
&= \begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_2a_2^{\mathrm{T}}J \\ & J \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

一般来说，可对 $\begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_k a_2^{\mathrm{T}} J^{k-1} \\ & J \end{bmatrix}$ $(k=1,\dots,n_1)$ 做如下相似变换:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} I_{n_1+1} & e_{k+1}a_2^{\mathrm{T}} \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_k a_2^{\mathrm{T}} J^{k-1} \\ & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1+1} & -e_{k+1}a_2^{\mathrm{T}} \\ & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & -J_{n_1+1}(0)e_{k+1}a_2^{\mathrm{T}}J^{k-1} + e_k a_2^{\mathrm{T}} J^{k-1} + e_k a_2^{\mathrm{T}} J^k \\ & J \end{bmatrix} \quad (\text{note that } J_{n_1+1}(0)e_{k+1} = e_k) \\
&= \begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_k a_2^{\mathrm{T}} J^k \\ & J \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

注意到 $J^{n_1} = 0_{n_1 \times n_1}$ (因为 J 中的幂零 Jordan 块的阶数均小于等于 n_1)

因此我们重复上述相似变换 n_1 次便可将 $\begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_1 a_2^{\mathrm{T}} \\ & J \end{bmatrix}$ 化为 $\begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & \\ & J \end{bmatrix}$

于是命题对 n 阶的情况也成立.

综上所述，引理得证.

Solution:

$$
A := \begin{bmatrix} J_4(0) & c \\ & 0 \end{bmatrix} \text{ where } c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

根据 **Lemma 2** 证明过程的指导，我们做如下相似变换:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} I_4 & J_4^{\mathrm{T}}(0)c \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_4(0) & c \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & -J_4^{\mathrm{T}}(0)c \\ & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & c \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & -J_4^{\mathrm{T}}(0)c \\ & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & (I_4 - J_4(0)J_4^{\mathrm{T}}(0))c \\ & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{note that } J_4(0)J_4^{\mathrm{T}}(0) = I_4 - e_4 e_4^{\mathrm{T}}) \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & e_4 e_4^{\mathrm{T}} c \\ & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{note that } e_4^{\mathrm{T}} c = 4) \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & 4e_4 \\ & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

其中 e_4 为对应维数的 Euclid 空间的第 1 个单位标准基向量.

再对 $\begin{bmatrix} J_4(0) & 4e_4 \\ & 0 \end{bmatrix}$ 做如下相似变换:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} I_4 & \\ & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_4(0) & 4e_4 \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & \\ & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & 4e_4 \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & \\ & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & e_4 \\ & 0 \end{bmatrix} \\
&= J_5(0)
\end{aligned}
$$

因此可将相似变换矩阵 P 定义为:

$$
\begin{aligned}
P &:= \begin{bmatrix} I_4 & -J_4^{\mathrm{T}}(0)c \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & \\ & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_4 & -\frac{1}{4} J_4^{\mathrm{T}}(0)c \\ & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & -\frac{1}{4} \\ & & 1 & & -\frac{2}{4} \\ & & & 1 & -\frac{3}{4} \\ & & & & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{-1} &:= \begin{bmatrix} I_4 & \\ & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & J_4^{\mathrm{T}}(0)c \\ & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_4 & J_4^{\mathrm{T}}(0)c \\ & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & 1 \\ & & 1 & & 2 \\ & & & 1 & 3 \\ & & & & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

下面我们验证其正确性:

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} I_4 & J_4^{\mathrm{T}}(0)c \\ & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_4(0) & c \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & -\frac{1}{4} J_4^{\mathrm{T}}(0)c \\ & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & c \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & -\frac{1}{4} J_4^{\mathrm{T}}(0)c \\ & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & \frac{1}{4}(I_4 - J_4(0)J_4^{\mathrm{T}}(0))c \\ & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{note that } J_4(0)J_4^{\mathrm{T}}(0) = I_4 - e_4 e_4^{\mathrm{T}}) \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & \frac{1}{4}(e_4 e_4^{\mathrm{T}})c \\ & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & \frac{1}{4} e_4 (e_4^{\mathrm{T}} c) \\ & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{note that } e_4^{\mathrm{T}} c = 4) \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & e_4 \\ & 0 \end{bmatrix} \\
&= J_5(0)
\end{aligned}
$$

另解:
直接取:

$$
P = \begin{bmatrix} 1 & & & & a \\ & 1 & & & b \\ & & 1 & & c \\ & & & 1 & d \\ & & & & e \end{bmatrix}
$$

$$
P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & -ae^{-1} \\ & 1 & & & -be^{-1} \\ & & 1 & & -ce^{-1} \\ & & & 1 & -de^{-1} \\ & & & & e^{-1} \end{bmatrix}
$$

我们有:

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 1 &&&& -ae^{-1} \\ & 1 &&& -be^{-1} \\ && 1 && -ce^{-1} \\ &&& 1 & -de^{-1} \\ &&&& e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 &&& 1 \\ & 0 & 1 && 2 \\ && 0 & 1 & 3 \\ &&& 0 & 4 \\ &&&& 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 &&&& a \\ & 1 &&& b \\ && 1 && c \\ &&& 1 & d \\ &&&& e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 &&&& -ae^{-1} \\ & 1 &&& -be^{-1} \\ && 1 && -ce^{-1} \\ &&& 1 & -de^{-1} \\ &&&& e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 &&& b+e \\ & 0 & 1 && c+2e \\ && 0 & 1 & d+3e \\ &&& 0 & 4e \\ &&&& 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 &&& b+e \\ & 0 & 1 && c+2e \\ && 0 & 1 & d+3e \\ &&& 0 & 4e \\ &&&& 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

解 $\begin{cases} b+e=0 \\ c+2e=0 \\ d+3e=0 \\ 4e=1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} b=-\frac{1}{4} \\ c=-\frac{2}{4} \\ d=-\frac{3}{4} \\ e=\frac{1}{4} \end{cases}$ (而 $a\in\mathbb{R}$ 可以任取)

Problem 2

给定正整数 n，设 A 是所有上三角元 (包括对角元) 都为 1 的 n 阶上三角阵
试求 A 的 Jordan 标准型.

- **Lemma: (Matrix Analysis 定理 $3.3.15$)**
  设 n 阶方阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征多项式和极小多项式分别为 $p_A(t)$ 和 $m_A(t)$
  则下列命题等价:
  - $m_A(t)$ 的次数为 n
  - $m_A(t)\equiv p_A(t)$
  - A 是非退化的 (nonderogatory)，即 A 所有特征值的几何重数都是 1 (即每个不同的特征值只对应一个 Jordan 块)
  - A 相似于 $p_A(t)$ 对应的 Frobenius 西型

Solution:
显然 A 的所有特征值均为 1 (因为特征多项式 $p_A(t)=\det(tI_n-A)=(t-1)^n$)
我们有两种方法可以证明 A 的特征值 1 的几何重数为 1:

- **Method 1:**
  注意到:

$$
(A-I_n)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 &&& \\ 1 & 0 && \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$\Leftrightarrow$$

$$
\operatorname{Range}((A-I_n)^{\mathrm{T}}) = \operatorname{span}\{e_2,e_3,\dots,e_n\}
$$

  因此特征空间 $\operatorname{Ker}(A-I_n)=\operatorname{Range}((A-I_n)^{\mathrm{T}})^{\perp}=\operatorname{span}\{e_1\}$ 的维数为 1
  这表明 A 的特征值 1 的几何重数为 1，即只对应 1 个 Jordan 块.

- **Method 2:**
  注意到 $A-I_n$ 为严格上三角阵，因此 $(A-I_n)^k=0_{n\times n}$ 当且仅当 $k\geq n$
  于是能够零化 A 的次数最小的首一多项式就是 $(t-1)^n$
  这表明 A 的极小多项式 $m_A(t)=(t-1)^n=p_A(t)$
  根据 **Lemma** 可知A 是非退化的，即 A 所有特征值的几何重数都是 1 (即每个不同的特征值只对应一个 Jordan 块)

无论如何，我们知道 A 的 Jordan 标准型仅由关于特征值 1 的一个 n 阶 Jordan 块构成:

$$J:=J_n(1)=\begin{bmatrix}1&1&&&\\&1&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1&1\\&&&&1\end{bmatrix}_{n\times n}$$

Problem 3

设 $J_3(1)$ 是关于特征值 1 的 3 阶 Jordan 块
试求关于 $X\in\mathbb{C}^{3\times 3}$ 的矩阵方程 $X^2=J_3(1)$ 的一个解.

Solution:
注意到 $J_3(1)$ 是一个上三角阵，且对角元均为 1
故我们不妨将矩阵方程 $X^2=J_3(1)$ 的候选解范围缩小到对角元均为 1 的 3 阶上三角阵.

设 $X=\begin{bmatrix}1&a&b\\&1&c\\&&1\end{bmatrix}$ $(a,b,c\in\mathbb{C})$ 是方程的一个解，则我们有:

$$\begin{aligned}X^2&=\begin{bmatrix}1&a&b\\&1&c\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&a&b\\&1&c\\&&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&2a&2b+ac\\&1&2c\\&&1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\begin{cases}2a=1\\2b+ac=0\\2c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{1}{8}\\c=\frac{1}{2}\end{cases}\\&=\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

因此 $X=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\&1&\frac{1}{2}\\&&1\end{bmatrix}$ 是矩阵方程 $X^2=J_3(1)$ 的一个解

Problem 4

(可与非退化矩阵交换的矩阵)
给定正整数 n，J 是一个 n 阶 Jordan 块，A 是一个 n 阶复方阵，满足 $AJ=JA$
试证明存在不超过 $n-1$ 次的复系数多项式 $g(t)$ 使得 $A=g(J)$

- **Lemma: (幂零 Jordan 块的性质, Matrix Analysis 引理 3.1.4)**
  给定正整数 $n\geq 2$ 和 $x\in\mathbb{C}^n$，记 $\mathbb{C}^n$ 的第 i 个标准单位基向量为 e_i，则我们有:
  - $J_n(0)e_{i+1}=e_i\ (\forall\, i=1,\dots,n-1)$
  - $J_n(0)^{\mathrm{T}}J_n(0)=\begin{bmatrix}0&\\&I_{n-1}\end{bmatrix}$
  - $[I_n-J_n(0)^{\mathrm{T}}J_n(0)]x=(x^{\mathrm{T}}e_1)e_1$

- $J_n(0)^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} & I_{n-k} \\ 0_{k\times k} & \end{bmatrix} & \text{if } 1 \le k < n \\ 0_{n\times n} & \text{if } k \ge n \end{cases}$

Proof:
设 $J := J_n(\lambda)$ (其中 $\lambda \in \mathbb{C}$) 并记 $A = [a_1, \dots, a_n]$
则等式 $AJ = JA$ 可等价表示为:
(其中 $\otimes$ 代表 Kronecker 乘积，$\text{vec}(\cdot)$ 代表向量化操作符)

$$\begin{gathered} J_n(\lambda)A - AJ_n(\lambda) = 0_{n\times n} \\ \Leftrightarrow \\ (I_n \otimes J_n(\lambda) - J_n^{\mathrm{T}}(\lambda) \otimes I_n)\text{vec}(A) = \text{vec}(0_{n\times n}) \\ \Leftrightarrow \\ \left(\begin{bmatrix} J_n(\lambda) & & & \\ & J_n(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_n(\lambda) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda I_n & & & \\ I_n & \lambda I_n & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I_n & \lambda I_n \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n \\ 0_n \\ \vdots \\ 0_n \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} J_n(0) & & & \\ -I_n & J_n(0) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -I_n & J_n(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n \\ 0_n \\ \vdots \\ 0_n \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \\ \begin{cases} J_n(0)a_1 = 0_n \\ J_n(0)a_k = a_{k-1} \ (k = 2, \dots, n) \end{cases} \end{gathered}$$

我们可知 $a_1, \dots, a_n$ 具有如下形式:

$$\begin{aligned} a_1 &= c_0 e_1 \\ a_2 &= c_1 e_1 + c_0 e_2 \\ a_3 &= c_2 e_1 + c_1 e_2 + c_0 e_3 \qquad (\text{where } c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}) \\ &\cdots \\ a_n &= c_{n-1} e_1 + \cdots + c_0 e_n \end{aligned}$$

因此 A 一定是**上三角 Toeplitz 矩阵**:

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n] = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ & c_0 & c_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & c_2 \\ & & & c_0 & c_1 \\ & & & & c_0 \end{bmatrix} \quad (\text{where } c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C})$$

根据 **Lemma** 可知幂零 Jordan 块满足 $J_n(0)^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} & I_{n-k} \\ 0_{k\times k} & \end{bmatrix} & \text{if } 1 \le k < n \\ 0_{n\times n} & \text{if } k \ge n \end{cases}$
因此 A 一定可以写成幂零 Jordan 块 $J_n(0)$ 的一个不超过 $n-1$ 次的复系数多项式，
进而可以写成任意 Jordan 块 $J_n(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ 的一个不超过 $n-1$ 次的复系数多项式:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ & c_0 & c_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & c_2 \\ & & & c_0 & c_1 \\ & & & & c_0 \end{bmatrix} \qquad (\text{where } c_0,\dots,c_{n-1}\in\mathbb{C}) \\
&= c_0 I_n + c_1 \begin{bmatrix} & I_{n-1} \\ 0_{1\times 1} & \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} & I_{n-2} \\ 0_{2\times 2} & \end{bmatrix} + \cdots + c_{n-1} \begin{bmatrix} & I_1 \\ 0_{(n-1)\times(n-1)} & \end{bmatrix} \\
&= c_0 I_n + c_1 J_n(0) + c_2 J_n^2(0) + \cdots + c_{n-1} J_n^{n-1}(0) \\
&= c_0 I_n + c_1 [J_n(\lambda) - \lambda I_n] + c_2 [J_n(\lambda) - \lambda I_n]^2 + \cdots + c_{n-1} [J_n(\lambda) - \lambda I_n]^{n-1} \\
&\overset{\Delta}{=} g(J_n(\lambda))
\end{aligned}
$$

命题得证.

Problem 5

(Jordan-Chevalley 分解)
给定正整数 n
试证明对于任意复方阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，都存在可对角化阵 A_D 和幂零阵 A_N 使得 $\begin{cases} A = A_D + A_N \\ A_D A_N = A_N A_D \end{cases}$

Proof:
复方阵的 Jordan-Chevalley 分解基于这样一个事实:
任意 Jordan 块都能分解为一个对角阵与一个幂零 Jordan 块的和.

考虑关于 λ 的 Jordan 块 $J_m(\lambda)$，它可分解为:

$$J_m(\lambda) = J_m(0) + \lambda I_m$$

更一般地，设复方阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的 Jordan 标准型为:

$$S^{-1}AS = J = \begin{bmatrix} J^{(1)}(\lambda_1) & & & \\ & J^{(2)}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J^{(d)}(\lambda_d) \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\dots,\lambda_d$ 互不相同，$J_1(\lambda_1),\dots,J_d(\lambda_d)$ 为对应的 Jordan 矩阵:

$$\begin{cases} J^{(1)}(\lambda_1) = J_{n_1^{(1)}}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{n_1^{(p_1)}}(\lambda_1) \text{ where } n_1 = \sum_{i=1}^{p_1} n_1^{(i)} \quad (n_1^{(1)} \ge \cdots \ge n_1^{(p_1)} \ge 1) \\ \quad\cdots \\ J^{(d)}(\lambda_d) = J_{n_d^{(1)}}(\lambda_d) \oplus \cdots \oplus J_{n_d^{(p_d)}}(\lambda_d) \text{ where } n_d = \sum_{i=1}^{p_d} n_d^{(i)} \quad (n_d^{(1)} \ge \cdots \ge n_d^{(p_d)} \ge 1) \end{cases}$$

我们可以将 Jordan 标准型写为一个幂零矩阵和一个对角阵的和:

$$J_D := D_1 \oplus \cdots \oplus D_d$$

$$\begin{cases} D_1 = \lambda_1 I_{n_1^{(1)}} \oplus \cdots \oplus \lambda_1 I_{n_1^{(p_1)}} = \lambda_1 I_{n_1} \\ \quad\cdots \\ D_d = \lambda_d I_{n_d^{(1)}} \oplus \cdots \oplus \lambda_d I_{n_d^{(p_d)}} = \lambda_d I_{n_d} \end{cases}$$

$$J_N := N_1 \oplus \cdots \oplus N_d$$

$$\begin{cases} N_1 = J_{n_1^{(1)}}(0) \oplus \cdots \oplus J_{n_1^{(p_1)}}(0) \\ \quad\cdots \\ N_d = J_{n_d^{(1)}}(0) \oplus \cdots \oplus J_{n_d^{(p_d)}}(0) \end{cases}$$

我们有 $J = J_N + J_D$ 成立.

可定义 $\begin{cases} A_N := SJ_NS^{-1} \\ A_D := SJ_DS^{-1} \end{cases}$ (它们满足
$A_N + A_D = SJ_NS^{-1} + SJ_DS^{-1} = S(J_N + J_D)S^{-1} = SJS^{-1} = A$)
显然 A_N 是一个幂零矩阵 (注意到 $A_N^k = SJ_N^kS^{-1}$, 因此 A_N 继承了 J_D 的幂零性)
而 A_D 是一个可相似对角化的矩阵.

由于 J_N, J_D 分块方式一致且 J_D 为对角阵，故我们有 $J_NJ_D = J_DJ_N$
进而有 $A_NA_D = A_DA_N$
命题得证.

Problem 6 (optional)

若递归数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的初值为 $a_0 = 0$，递归关系为 $a_{n+1} = \frac{4a_n-3}{3a_n+4}$ $(\forall\ n \in \mathbb{N})$
试求 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的通项公式.

- **Lemma: (和差角公式)**

$$\begin{aligned} \tan(\theta_1 - \theta_2) &= \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= \frac{\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)}{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)} \\ &= \frac{\tan(\theta_1) - \tan(\theta_2)}{1 + \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)} \end{aligned}$$

Solution:
记 $\theta_0 := \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$ 和 $b_n := \arctan(a_n)$ $(\forall\ n \in \mathbb{N})$
则我们有:

$$\begin{array}{l} b_0 = \arctan(a_0) = \arctan(0) = 0 \\ \hline \begin{aligned} b_{n+1} &= \arctan(a_{n+1}) \\ &= \arctan\left(\frac{4a_n - 3}{3a_n + 4}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{4\tan(b_n) - 3}{3\tan(b_n) + 4}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\tan(b_n) - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}\tan(b_n) + 1}\right) \quad (\text{note that } \tan(\theta_0) = \frac{3}{4}) \\ &= \arctan\left(\frac{\tan(b_n) - \tan(\theta_0)}{\tan(b_n)\tan(\theta_0) + 1}\right) \quad (\text{note that } \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan(\theta_1) - \tan(\theta_2)}{1 + \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)}) \\ &= \arctan(\tan(b_n - \theta_0)) \\ &= b_n - \theta_0\ (\forall\ n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \end{array}$$

于是我们得到 b_n 的通项公式为 $b_n = -(n-1)\theta_0$ $(\forall\ n \in \mathbb{N})$
进而得到 a_n 的通项公式为 $a_n = \tan(-(n-1)\theta_0)$ $(\forall\ n \in \mathbb{N})$
其中 $\theta_0 := \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

Matlab 代码验证:

```
% 初始化参数
N = 10; % 要生成的项数
a = zeros(1, N); % 初始化 a_n 序列
b = zeros(1, N); % 初始化 b_n 序列
theta_0 = atan(3/4); % 计算 theta_0

% 设置初值
a(1) = 0; % a_0 = 0

% 生成 a_n 序列
```

```
for n = 1:N-1
    a(n+1) = (4*a(n) - 3) / (3*a(n) + 4);
end

% 计算 b_n 序列
for n = 1:N
    b(n) = -(n-1)*theta_0;
end

% 计算 c_n 序列
c = tan(b);

% 输出结果
disp('a_n 序列:');
disp(a);
disp('b_n = -(n-1)theta_0 序列:');
disp(b);
disp('c_n = tan(b_n) 序列:');
disp(c);
```

运行结果:

```
a_n 序列:
         0   -0.7500   -3.4286    2.6591    0.6376   -0.0761   -0.8760   -4.7409
  2.1485    0.5355

b_n = -(n-1)theta_0 序列:
         0   -0.6435   -1.2870   -1.9305   -2.5740   -3.2175   -3.8610   -4.5045
-5.1480   -5.7915

c_n = tan(b_n) 序列:
         0   -0.7500   -3.4286    2.6591    0.6376   -0.0761   -0.8760   -4.7409
  2.1485    0.5355
```

邵老师提供的一般方法:
考虑递归公式 $x_{k+1} = \frac{ax_k+b}{cx_k+d}$ $(\forall\, k \in \mathbb{Z}_+)$，我们可以将其等价写作:

$$\begin{cases} u_{k+1} = au_k + bv_k \\ v_{k+1} = cu_k + dv_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

$$x_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}$$

对于本题，我们有:

$$\begin{cases} u_{k+1} = 4u_k - 3v_k \\ v_{k+1} = 3u_k + 4v_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

$$x_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}$$

设初值 $x_0 = 0$ (对应地 $u_0 = 0$ 而 $v_0 = 1$)
系数矩阵的谱分解为:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 4+3i & \\ & 4-3i \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{H}}$$

于是我们有:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \cdots \\
&= \left(\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right)^n \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} (4+3i)^n & \\ & (4-3i)^n \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \right)^{\mathrm{H}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (4+3i)^n & \\ & (4-3i)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (4+3i)^n i - (4-3i)^n i \\ (4+3i)^n + (4-3i)^n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

因此我们有 $x_n = \frac{(4+3i)^n - (4-3i)^n}{(4+3i)^n + (4-3i)^n} i \ (\forall\ n \in \mathbb{Z}_+)$

Matlab 代码验证:

```
% 初始化参数
N = 10; % 要生成的项数
a = zeros(1, N); % 初始化 a_n 序列
x = zeros(1, N); % 初始化 x_k 序列
y = zeros(1, N); % 初始化 y_n 序列

% 设置初值
u_k = 0; % u_0 = 0
v_k = 1; % v_0 = 1
x(1) = u_k / v_k; % x_0 = 0

a(1) = 0; % a_0 = 0

% 生成 x_k 序列和 a_n 序列
for k = 1:N-1
    % 更新 u_k 和 v_k
    u_k_next = 4*u_k - 3*v_k;
    v_k_next = 3*u_k + 4*v_k;

    % 计算 x_k
    u_k = u_k_next;
    v_k = v_k_next;
    x(k+1) = u_k / v_k; % 计算 x_{k+1}

    % 生成 a_n 序列
    a(k+1) = (4*a(k) - 3) / (3*a(k) + 4);

    % 计算 y_n 序列
    y(k+1) = ((4 + 3i)^k - (4 - 3i)^k) / ((4 + 3i)^k + (4 - 3i)^k) * 1i;
end

% 输出结果
disp('a_n 序列:');
disp(a);
disp('x_k 序列:');
disp(x);
disp('y_n 序列:');
disp(y);
```

运行结果:

```
a_n 序列:
          0   -0.7500   -3.4286    2.6591    0.6376   -0.0761   -0.8760   -4.7409
 2.1485    0.5355

x_k 序列:
          0   -0.7500   -3.4286    2.6591    0.6376   -0.0761   -0.8760   -4.7409
 2.1485    0.5355

y_n 序列:
          0   -0.7500   -3.4286    2.6591    0.6376   -0.0761   -0.8760   -4.7409
 2.1485    0.5355
```

Problem 7 (optional)

试证明 Jordan 标准型在不计 Jordan 块次序的意义下是唯一的.

Proof:
Jordan 标准型的唯一性论断基于以下两个事实:

- ① 秩是一个相似不变量
- ② 若两个相似矩阵通过一个纯量矩阵 (形如 λI) 进行平移，则平移后它们仍是相似的.

注意到非幂零 Jordan 块和幂零 Jordan 块可通过幂运算来区分:

$$\operatorname{rank}(J_m(\lambda)^k) = \begin{cases} m\ (\forall\ k \in \mathbb{Z}_+) & \text{if } \lambda \neq 0 \\ \begin{cases} m-k-1 & \text{if } 0 \leq k \leq m-1 \\ 0 & \text{if } k \geq m \end{cases} & \text{if } \lambda = 0 \end{cases}$$

因此非幂零 Jordan 块求幂不会出现降秩，而幂零 Jordan 块求幂会逐步降秩，直到秩为零.
这启发我们用 $\operatorname{rank}((A-\lambda I_n)^k) = \operatorname{rank}((J-\lambda I_n)^k)$ 来刻画特征值 λ 对应的 Jordan 块的个数.

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$，我们定义:

$$r_k(A,\lambda) := \begin{cases} n & \text{if } k = 0 \\ \operatorname{rank}((A-\lambda I_n)^k) & \text{if } k \geq 1 \end{cases}$$

$$w_k(A,\lambda) := \begin{cases} n - r_1(A,\lambda) & \text{if } k = 1 \\ r_{k-1}(A,\lambda) - r_k(A,\lambda) & \text{if } k \geq 2 \end{cases}$$

我们定义 A 关于特征值 λ (设代数重数为 n_λ) 的 **Weyr 特征**为 $w(A,\lambda) := (w_1(A,\lambda),\dots,w_{n_\lambda}(A,\lambda))$

设 J 是一个与 A 相似的 Jordan 矩阵，显而易见 $w(J,\lambda) = w(A,\lambda)$
因此我们可以看出 $w_k(A,\lambda)$ 等于与特征值 λ 对应的 Jordan 块中阶数 $\geq k$ 的个数.
于是 $w_k(A,\lambda) - w_{k+1}(A,\lambda)$ 即为与特征值 λ 对应的 Jordan 块中阶数 $= k$ 的个数.
这表明一个与 A 相似的 Jordan 矩阵 J 的构造完全由 A 关于不同特征值的 Weyr 特征所决定.
我们将上述讨论总结为以下引理:

(Matrix Analysis 引理 3.1.18**)**

- 设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的一个给定的特征值，代数重数是 n_λ
  若 $w_1(A,\lambda),\dots,w_{n_\lambda}(A,\lambda)$ 的与 $\lambda \in \mathbb{C}$ 相关的 Weyr 特征，
  则一个与 A 相似的 Jordan 矩阵 J 中与 λ 相关的 k 阶 Jordan 块 $J_k(\lambda)$ 的个数为
  $w_k(A,\lambda) - w_{k+1}(A,\lambda)\ (k = 1,\dots,n_\lambda)$
- 两个复方阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 相似，当且仅当:
  - ① 它们具有相同的特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_d$ 及其代数重数 (这 d 个特征值之间互不相同)
  - ② 每一个与特征值相关的 Weyr 特征都是相同的.
    即 $w_k(A,\lambda_i) = w_k(B,\lambda_i)\ (\forall\ i = 1,\dots,d, k = 1,\dots,n_i)$

如果 A 可相似变换为两个 Jordan 矩阵 $J, \tilde{J}$ (其中 $\tilde{J} \neq J$),
那么它们关于任意特征值的 Weyr 特征都是相同的，即关于任意特征值的 Jordan 块都是相同的 (不考虑排列)
Jordan 标准型的唯一性得证.

Problem 8 (optional)

给定正整数 k 和复数 $\xi_1, \ldots, \xi_k$
设关于 λ 的方程 $\lambda^k = \xi_1\lambda^{k-1} + \cdots + \xi_{k-1}\lambda + \xi_k$ 所有互不相同的复根是 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$，代数重数分别为 $m_1, \ldots, m_d$
试证明存在一组常数 β_{ij} 使得线性递归数列 $a_n = \xi_1 a_{n-1} + \cdots + \xi_{k-1}a_{n-k+1} + \xi_k a_{n-k}$ 的通项公式为:

$$a_n = \sum_{i=1}^{d}\left(\sum_{j=0}^{m_i-1}\beta_{ij}n^j\right)\lambda_i^n$$

- **Background: (Frobenius 西型及其性质)**
  给定一个 n 次首 1多项式 $m(t) := t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$,
  是否存在一个 n 阶矩阵 A 使它以 $m(t)$ 为极小多项式?

  答案是肯定的:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

  记 $e_1, \ldots, e_n$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的单位标准正交基向量.
  观察 A 的前 $n-1$ 列，我们有:

$$\begin{cases} e_2 = Ae_1 \\ e_3 = Ae_2 = A^2 e_1 \\ e_4 = Ae_3 = A^3 e_1 \\ \quad\cdots \\ e_n = Ae_{n-1} = A^{n-1}e_1 \end{cases}$$

  至于 A 的第 n 列，我们有:

$$\begin{aligned} Ae_n &= -a_{n-1}e_n - a_{n-2}e_{n-1} - \cdots - a_1 e_2 - a_0 e_1 \\ &= -a_{n-1}A^{n-1}e_1 - a_{n-2}A^{n-2}e_1 - \cdots - a_1 Ae_1 - a_0 e_1 \\ &= (A^n - m(A))e_1 \end{aligned}$$

  根据 $e_n = A^{n-1}e_1$ 还有 $Ae_n = A^n e_1$
  因此我们有 $(A^n - m(A))e_1 = A^n e_1$
  于是有 $m(A)e_1 = 0_n$
  进而有:

$$\begin{aligned} m(A)e_k &= m(A)(A^{k-1}e_1) \\ &= A^{k-1}m(A)e_1 \\ &= A^{k-1}0_n \\ &= 0_n \end{aligned} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

  这表明 $m(A)$ 的第 $1, \ldots, n$ 列均为零向量 0_n，因此 $m(A) = 0_{n\times n}$
  即 $m(t)$ 是 A 的零化多项式.

为证明 $m(t)$ 是 A 的极小多项式,
可设存在一个次数为 $s<n$ 的首一多项式 $m_*(t)$ 满足 $m_*(A)=0_{n\times n}$
设 $m_*(t)=t^s+b_{s-1}t^{s-1}+b_{s-2}t^{s-2}+\cdots+b_1t+b_0$，则我们有:

$$\begin{aligned} m_*(A)e_1 &= A^se_1+b_{s-1}A^{s-1}e_1+\cdots+b_1Ae_1+b_0e_1 \\ &= e_{s+1}+b_{s-1}e_s+\cdots+b_1e_2+b_0e_1 \\ &= 0_n \end{aligned}$$

但 $\mathbb{C}^n$ 的单位标准正交基向量 $e_{s+1},e_s,\dots,e_2,e_1$ 是线性无关的，上式显然与之矛盾.
因此任意一个次数为 $s<n$ 的首一多项式都不能零化 A.
故 $m(t)$ 就是 A 的极小多项式.

这样我们就基于给定的 n 次首一多项式 $m(t)$ 构造了以 $m(t)$ 为极小多项式的 n 阶方阵 A:

$$A:=\begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$\text{where } m(t):=t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0$$

我们称这样的 A 为 $m(t)$ 的**友矩阵** (companion matrix)，又称为 **Frobenius 西型**
(需要注意区分的是, 方阵的伴随矩阵的英文是 Adjugate Matrix)
由于 $m(t)$ 的次数与 A 的阶数相同，因此 $m(t)$ 也正是 A 的特征多项式.

值得注意的是，任意 Frobenius 西型都是**非退化的** (nonderogatory)
(即所有特征值的几何重数都是 1，又即每个不同的特征值只对应一个 Jordan 块)
尽管非退化的方阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 不一定都是 Frobenius 西型,
但非退化的方阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 一定相似于特征多项式 $p_A(t)$ 对应的 Frobenius 西型，因为它们具有相同的 Jordan 标准型.

上面的论述可以总结为以下结论:
(Matrix Analysis 定理 $3.3.15$)
设 n 阶方阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征多项式和极小多项式分别为 $p_A(t)$ 和 $m_A(t)$
则下列命题等价:

- $m_A(t)$ 的次数为 n
- $m_A(t)\equiv p_A(t)$
- A 是非退化的 (nonderogatory)，即 A 所有特征值的几何重数都是 1 (即每个不同的特征值只对应一个 Jordan 块)
- A 相似于 $p_A(t)$ 对应的 Frobenius 西型

Proof:
$\{a_n\}$ 的线性递归公式可等价表示为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} a_{n+k-1} \\ a_{n+k-2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_k \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+k-2} \\ a_{n+k-3} \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

注意到上述递推公式的系数矩阵 $B := \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_k \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ 是一个 **Frobenius 西型**,
其特征多项式和极小多项式均为 $p_B(t) := t^k - \xi_1 t^{k-1} - \cdots - \xi_{k-1}\lambda - \xi_k$
根据题设可知 $p_B(t)$ 所有互不相同的复根是 $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$，代数重数分别为 $m_1,\ldots,m_d$
注意到 $p_B(t)$ 同时也是 B 的极小多项式,
因此 B 所有互不相同的复根是 $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$，代数重数分别为 $m_1,\ldots,m_d$，几何重数均为 1
于是其 Jordan 标准型 $J_B := J_{m_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{m_d}(\lambda_d)$ (每个不同的特征值只对应一个 Jordan 块)

根据 **Jordan 标准型定理**可知存在非奇异阵 $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $B = SJ_BS^{-1}$
则我们有:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_{n+k-1} \\ a_{n+k-2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} &= B \begin{bmatrix} a_{n+k-2} \\ a_{n+k-3} \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= B^2 \begin{bmatrix} a_{n+k-3} \\ a_{n+k-4} \\ \vdots \\ a_{n-2} \end{bmatrix} \\
&= \cdots \\
&= B^n \begin{bmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} \\
&= (S^{-1}J_BS)^n \begin{bmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} \\
&= S^{-1}J_B^nS \begin{bmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

其中我们假设迭代序列的初值 $a_0,\ldots,a_{k-1}$ 是已知的，而相似矩阵 S 的具体结构我们不需要弄清楚.
注意到 $J_B^n = (J_{m_1}(\lambda_1))^n \oplus \cdots \oplus (J_{m_d}(\lambda_d))^n$
而且:

$$J_{m_i}(\lambda_i) = \lambda_i I + J_{m_i}(0)$$

$$(J_{m_i}(\lambda_i))^n = \sum_{k=0}^{\min(n,m_i-1)} \binom{n}{k} \lambda_i^{n-k} (J_{m_i}(0))^k \quad (\text{where } J_{m_i}(0)^k = \begin{cases} I_{m_i} & \text{if } k=0 \\ \begin{bmatrix} & I_{m_i-k} \\ 0_{k\times k} & \end{bmatrix} & \text{if } 1 \le k < m_i) \\ 0_{m_i\times m_i} & \text{if } k \ge m_i \end{cases}$$

因此每个 $(J_{m_i}(\lambda_i))^n$ 元素的线性组合都可表示为 $(\sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{ij} n^j)\lambda_i^n$ (关于 n 的不超过 $m_i - 1$ 次的多项式乘以 λ_i^n)
(将 λ_i^k 放在系数上，因此 λ_i^{n-k} 变为 λ_i^n)

考虑到 $S^{-1}, S, a_0, \ldots, a_{k-1}$ 均为常值,
因此 a_n 具有形如 $a_n = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} \beta_{ij} n^j\right)\lambda_i^n$ 的通项公式.

The End