泛函分析 Homework 04

姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 01

设 $\{x_n\}$ 为内积空间 X 中的点列, $x \in X$, 满足 $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$ $(\forall\, y \in X)$ 且 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$
试证明 $\{x_n\}$ 强收敛到 x

- 实际上本题的结论有更强的形式:
  (工科泛函分析基础 定理 $4.4.5$**, 泛函分析讲义 定理** $4.4.3$**)**
  设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为 Hilbert 空间，$\{x_n\} \subset X, x \in X$，则下列命题成立:
  - ① $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 当且仅当对于任意 $y \in X$ 都有 $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$ 成立.
  - ② $\{x_n\}$ 强收敛于 x 当且仅当 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 且 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$

Proof:
若 $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$ $(\forall\, y \in X)$ 且 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$，则我们有:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|^2 &= \lim_{n\to\infty}\langle x_n - x, x_n - x\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty}\langle x_n, x_n\rangle - \lim_{n\to\infty}\langle x_n, x\rangle - \lim_{n\to\infty}\langle x, x_n\rangle + \langle x, x\rangle \\
&= \|x\|^2 - \langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle + \|x\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

因此 $\{x_n\}$ 强收敛于 x (即 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$)，命题得证.

Problem 02

试证明内积空间的不含零元的正交系是线性无关的.

Proof:
设 S 为域 $\mathbb{F}$ 上的内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$的不含零元的正交系.
值得注意的是，S 可能是不可数的.
(反证法) 假设 S 是线性相关的，则存在一个有限支持的标量序列 $\{a_x\}_{x\in S}$ 使得 $\sum_{x\in S}\alpha_x x = 0_X$
其中使得 $\alpha_x \neq 0$ 的 x 仅为有限个 (基于线性相关的定义)
记 $I = \{x \in S : \alpha_x \neq 0\}$，则我们有 $\sum_{x\in S}\alpha_x x = \sum_{x\in I}\alpha_x x = 0_X$
于是我们有:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle 0_X, y\rangle \\
&= \left\langle \sum_{x\in I}\alpha_x x, y\right\rangle \\
&= \sum_{x\in I}\alpha_x\langle x, y\rangle \qquad\qquad (\forall\, y \in I) \\
&= \sum_{x\in I}\alpha_x \cdot \mathbb{1}\{x = y\} \\
&= \alpha_y
\end{aligned}$$

这与 I 的定义相矛盾，因此 S 是线性无关的.

Problem 03

设 H 是内积空间, E 是 H 的稠密子集.
证明: 若 $x \perp E$, 则 $x = 0_H$.

- 实际上本题的结论有更强的形式:
  (泛函分析讲义, 定理 $4.3.4$)
  设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为 Hilbert 空间，S 是 X 的子空间，则下列命题成立:
  - ① $S^{\perp\perp} = \text{cl}(S)$
  - ② S 在 X 中稠密 (即 $\text{cl}(S) = X$) 当且仅当 $S^{\perp} = \{0_X\}$
  - ③ 若 S 是 X 的真闭子空间，则 $S^{\perp}$ 中必有非零元素 (即 $S^{\perp} \setminus \{0_X\} \neq \emptyset$)

Proof:
由于 E 是 H 的稠密子集，故我们有 $\text{cl}(E) = H$
对于任意 $x \in X$ 都存在 $\{x_n\} \subset E$ 使得 $x_n \to x \ (n \to \infty)$
若 $x \perp E$，则我们有:

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \langle x, x\rangle \\
&= \langle \lim_{n\to\infty} x_n, x\rangle \quad (\text{use contiuity of inner product}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle \quad (\text{note that } x_n \in E \text{ and } x \perp E) \\
&= \lim_{n\to\infty} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

因此 $x = 0_H$

Problem 04 $(\star)$

设 $M = \{x = \{x_k\} \in l^2 : x_{2k} = 0, \forall\, k \in \mathbb{Z}_+\}$

- ① 试证明 M 是 l^2 的闭子空间
- ② 试求 $M^{\perp}$

Proof:

- ① 对于任意 $x, y \in M, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\alpha x + \beta y$ 的偶数下标的元素显然仍为零
  这表明 M 对加法和数乘封闭，因而是 l^2 的子空间.
  对于 M 中的任意收敛序列 $\{x^{(n)}\}$，根据 l^2 的完备性可知极限 $x \in l^2$
  (反证法) 假设 $x \notin M$，则存在 $k \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $x_{2k} \neq 0$
  因此 $\|x^{(n)} - x\|_2 \geq |x_{2k} - 0| > 0 \ (\forall\, n \in \mathbb{Z}_+)$，这与 $x^{(n)} \to x \ (n \to \infty)$ 矛盾.
  这表明 M 是闭的.
  总之，M 是 l^2 的闭子空间.
- ② 设 $y \perp M$，则它满足:

  $$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1} y_{2k-1} = 0 \quad (\forall\, x \in M)$$

  若存在 $k \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $y_{2k-1} \neq 0$，则取 $x = e_{2k-1} \in M$ 即有 $\langle e_{2k-1}, y\rangle = y_{2k-1} \neq 0$
  这与 $y \perp M$ 矛盾，因此 $y_{2k-1} = 0 \ (\forall\, k \in \mathbb{Z}_+)$

  当 y 满足 $y_{2k-1} = 0 \ (\forall\, k \in \mathbb{Z}_+)$ 时，必然有:

  $$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1} y_{2k-1} = 0 \quad (\forall\, x \in M)$$

  因此 $y \perp M$
  综上所述，$y \perp M$ 当且仅当 $y_{2k-1} = 0 \ (\forall\, k \in \mathbb{Z}_+)$
  因此 $M^{\perp} = \{x = \{x_k\} \in l^2 : x_{2k-1} = 0, \forall\, k \in \mathbb{Z}_+\}$

Problem 05

设 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系.
试证明: 任意 $x\in X$ 在 $\text{span}(E)$ 上的投影都存在, 且为 $\sum_{k=1}^n\langle x,e_k\rangle e_k$

- 设 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间.
  设 $S\subseteq X$ 是 X 的子空间，且 $x\in X$.
  若存在 $p\in S$ 和 $p_\perp\in S^\perp$ 使得 $x=p+p_\perp$，则称 p 是 x 在 S 上的**正交投影** (简称投影)

Proof:
任意给定 $x\in X$
记 $p:=\sum_{k=1}^n\langle x,e_k\rangle e_k$ 和 $p_\perp:=x-\sum_{k=1}^n\langle x,e_k\rangle e_k$
我们有:

- ① $p+p_\perp=\sum_{k=1}^n\langle x,e_k\rangle e_k+(x-\sum_{k=1}^n\langle x,e_k\rangle e_k)=x$
- ② $p=\sum_{k=1}^n\langle x,e_k\rangle e_k\in\text{span}(E)$
- ③ $p_\perp\perp\text{span}(E)$:
  对于任意 $i=1,\dots,n$ 我们都有:

$$\begin{aligned}\langle p_\perp,e_i\rangle&=\left\langle x-\sum_{k=1}^n\langle x,e_k\rangle e_k,e_i\right\rangle\\&=\langle x,e_i\rangle-\sum_{k=1}^n\langle x,e_k\rangle\langle e_k,e_i\rangle\\&=\langle x,e_i\rangle-\sum_{k=1}^n\langle x,e_k\rangle\delta_{i,k}\\&=\langle x,e_i\rangle-\langle x,e_i\rangle\\&=0\end{aligned}$$

  因此 $p_\perp\perp\text{span}(e_1,\dots,e_n)=\text{span}(E)$

根据正交投影可知任意 $x\in X$ 在 $\text{span}(E)$ 上的投影都存在, 且为 $\sum_{k=1}^n\langle x,e_k\rangle e_k$

正交投影存在时一定是唯一的.
设 p_1,p_2 都是 x 在 S 上的投影，记 $p_1^\perp=x-p_1$ 和 $p_2^\perp=x-p_2$，则我们有 $p_1^\perp,p_2^\perp\in S^\perp$
注意到 $p_1-p_2=(x-p_2)-(x-p_1)=p_2^\perp-p_1^\perp\in S^\perp$
因此我们有 $p_1-p_2\in S\cap S^\perp=\{0_X\}$ 成立，说明 $p_1=p_2$

Problem 06

设 M 是 Hilbert 空间 X 的闭子空间, $\{e_n\}$ 和 $\{e_n'\}$ 分别是 M 和 $M^\perp$ 的标准正交基.
试证明: $\{e_n\}\cup\{e_n'\}$ 是 X 的标准正交基.

Proof:
由于 $\{e_n\}$ 和 $\{e_n'\}$ 分别是 M 和 $M^\perp$ 的标准正交基，故 $\{e_n\}\cup\{e_n'\}$ 也是标准正交的.
对于任意 $x\in X$，由于 M 是 Hilbert 空间 X 的闭子空间，故 x 在 M 上的正交投影一定存在.
记 $x=p+p_\perp$，其中 $p\in M,p_\perp\in M^\perp$
于是存在序列 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 使得 $p=\sum_{k=1}^{|\{e_n\}|}a_ke_k$ 和 $p_\perp=\sum_{k=1}^{\{e_n'\}}b_ke_k'$
因此我们有:

$$\begin{aligned}x&=p+p_\perp\\&=\sum_{k=1}^{|\{e_n\}|}a_ke_k+\sum_{k=1}^{\{e_n'\}}b_ke_k'\end{aligned}$$

因此 $\{e_n\}\cup\{e_n'\}$ 是 X 的标准正交基.

Problem 07

设 $X = C([-1,1])$, 在其上定义内积 $\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$.
令:

- ① $M_1 := \{f \in X : f(x) = 0, \forall\, x < 0\}$
- ② $M_2 := \{f \in X : f(0) = 0\}$

计算 M_1, M_2 在 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的正交补空间.

Solution:

- ① 若 g 满足 $g(x) = 0\ (\forall\, x \in [0,1])$，显然有 $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = 0\ (\forall\, x \in M_1)$，因而有 $g \perp M_1$
  若 $g \perp M_1$，则 $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = 0\ (\forall\, x \in M_1)$
  (反证法) 假设 g 在 $(0,1]$ 上的某个区间 I 中非零，我们总可以取 $f_0(t) := \begin{cases} g(x) & \text{if } x \in I \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
  显然我们有 $f_0 \in M_1$
  但我们有 $\langle f_0, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int_I |g(x)|^2\mathrm{d}x > 0$
  这与 $g \perp M_1$ 矛盾，因此 g 满足 $g(x) = 0\ (\forall\, x \in (0,1])$
  根据 g 的连续性我们有 $g(0) = 0$
  综上所述，$M_1^{\perp} = \{g \in X : g(x) = 0, \forall\, x \in [0,1]\}$
- ② 若 $g \equiv 0$，则显然有 $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = 0\ (\forall\, x \in M_2)$，因而有 $g \perp M_1$
  若 $g \perp M_2$，则 $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = 0\ (\forall\, x \in M_2)$
  (反证法) 假设 g 在 $[-1,0) \cup (0,1]$ 上的某个区间 I 中非零，我们总可以取
  $f_0(t) := \begin{cases} g(x) & \text{if } x \in I \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
  显然我们有 $f_0 \in M_2$
  但我们有 $\langle f_0, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int_I |g(x)|^2 dx > 0$
  这与 $g \perp M_2$ 矛盾，因此 g 满足 $g(x) = 0\ (\forall\, x \in [1,0) \cup (0,1])$
  根据 g 的连续性我们有 $g(0) = 0$
  综上所述，$M_2^{\perp} = \{g \in X : g \equiv 0\} = \{0_X\}$

Problem 08

设 X 是内积空间, $M, N \subset X$, 试证明:

- ① 若 $M \perp N$, 则 $M \subset N^{\perp}$, $N \subset M^{\perp}$
- ② $M^{\perp} = (\mathrm{cl}(M))^{\perp}$

Proof:

- ① 若 $M \perp N$，则对于任意 $y \in M$ 都有 $y \in N^{\perp}$ 成立，因此 $M \subseteq N^{\perp}$
  对 N 应用上述结论即得 $N \subseteq M^{\perp}$
- ② 若 $y \in (\mathrm{cl}(M))^{\perp}$，则 $\langle x, y\rangle = 0\ (\forall\, x \in \mathrm{cl}(M))$
  注意到 $M \subseteq \mathrm{cl}(M)$，故 $\langle x, y\rangle = 0\ (\forall\, x \in M)$，表明 $y \in M^{\perp}$
  因此 $(\mathrm{cl}(M))^{\perp} \subseteq M^{\perp}$

  若 $y \in M^{\perp}$，则 $\langle x, y\rangle = 0\ (\forall\, x \in M)$
  对于任意 $x \in \mathrm{cl}(M)$，都存在 M 中的任意收敛序列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n \to x\ (n \to \infty)$
  于是我们有:

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle \lim_{n\to\infty} x_n, y\rangle \quad (\text{use continuity of inner product}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

因此 $\langle x,y\rangle = 0\ (\forall\, x \in \mathrm{cl}(M))$，表明 $y \in (\mathrm{cl}(M))^{\perp}$
于是有 $M^{\perp} \subseteq (\mathrm{cl}(M))^{\perp}$

综上所述，我们有 $M^{\perp} = (\mathrm{cl}(M))^{\perp}$

Problem 09

设 X 是内积空间, $x, y \in X$.
试证明下列命题等价:

- ① $x \perp y$
- ② $\|x+\alpha y\| \geq \|x\|, \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$
- ③ $\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|, \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$

Proof:

- ① $\Rightarrow$ ②③
  若 $x \perp y$，则根据勾股定理我们有:

$$\begin{array}{c} \begin{aligned} \|x+\alpha y\|^2 &= \|x\|^2 + \|\alpha y\|^2 \\ &\geq \|x\|^2 \end{aligned} \\ \hline \begin{aligned} \|x+\alpha y\|^2 &= \|x\|^2 + \|\alpha y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|-\alpha y\|^2 \\ &= \|x-\alpha y\|^2 \end{aligned} \end{array} \quad (\forall\, \alpha \in \mathbb{C})$$

- ② $\Rightarrow$ ①
  注意到 x 在 y 方向上的投影为 $\langle x,y\rangle \frac{y}{\|y\|}$
  根据 $x - \langle x,y\rangle \frac{y}{\|y\|} \perp y$ 可知:

$$\left\| x - \langle x,y\rangle \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \|x\|^2 - \left\| \langle x,y\rangle \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \leq \|x\|^2$$

  当且仅当 $\langle x,y\rangle \frac{y}{\|y\|} = 0$ 时取等.

  若 $\|x+\alpha y\| \geq \|x\|, \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$，则我们有 $\langle x,y\rangle \frac{y}{\|y\|} = 0$
  当 $y = 0_X$ 时是平凡的，一定有 $x \perp y$
  当 $y \neq 0_X$ 时我们有 $\langle x,y\rangle = 0$，即 $x \perp y$

- ③ $\Rightarrow$ ①
  若 $\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|, \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$，则我们有:

$$\|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\alpha\langle x,y\rangle) + \|\alpha y\|^2 = \|x+\alpha y\|^2 = \|x-\alpha y\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha\langle x,y\rangle) + \|\alpha y\|^2 \quad (\forall\, \alpha \in \mathbb{C})$$

  因此 $\mathrm{Re}(\alpha\langle x,y\rangle) = 0\ (\forall\, \alpha \in \mathbb{C})$
  分别取 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = i$ 可知 $\langle x,y\rangle$ 的实部和虚部均为零，因此 $\langle x,y\rangle = 0$
  即有 $x \perp y$ 成立.

Problem 10 $(\star)$

(tedious, time-wasting, and definitely won't come up in exam)
(More unfortunately, there is an idiot sitting next to me who hits his keyboard in a very noisy way)
(I want to strangle him)
设 x, y 是复内积空间 X 中的两个非零向量, 试证明:

- ① $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ 当且仅当 $y = \alpha x$, 其中 $\alpha > 0$
- ② $\|x-y\| = |\|x\| - \|y\||$ 当且仅当 $y = \alpha x$, 其中 $\alpha > 0$
- ③ 设 $z \in X$, 则 $\|x-y\| = \|x-z\| + \|z-y\|$ 当且仅当存在 $\alpha \in [0,1]$, 使得 $z = \alpha x + (1-\alpha)y$

- **助教:** 复内积注意交叉项取实部.
  用 Cauchy-Schwarz 不等式的取等条件也挺麻烦的.

$$\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)\le|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\|$$

Proof:

- ① 充分性显然，下证必要性:
  设 $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$，则我们有:

$$\begin{aligned}\|x\|^2+\|y\|^2+2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)&=\|x+y\|^2\\&=(\|x\|+\|y\|)^2\\&=\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|\end{aligned}$$

  因此我们有 $\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)=\|x\|\|y\|$
  从而有:

$$\begin{aligned}\left\|y-\frac{\|y\|}{\|x\|}x\right\|&=2\|y\|^2-2\frac{\|y\|}{\|x\|}\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)\\&=2\|y\|^2-2\frac{\|y\|}{\|x\|}\|x\|\|y\|\\&=0\end{aligned}$$

- ② 充分性显然，下证必要性:
  设 $\|x-y\|=|\|x\|-\|y\||$，则我们有:

$$\begin{aligned}\|x\|^2+\|y\|^2-2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)&=\|x-y\|^2\\&=(\|x\|-\|y\|)^2\\&=\|x\|^2+\|y\|^2-2\|x\|\|y\|\end{aligned}$$

  因此我们有 $\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)=\|x\|\|y\|$
  从而有:

$$\begin{aligned}\left\|y-\frac{\|y\|}{\|x\|}x\right\|&=2\|y\|^2-2\frac{\|y\|}{\|x\|}\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)\\&=2\|y\|^2-2\frac{\|y\|}{\|x\|}\|x\|\|y\|\\&=0\end{aligned}$$

- ③ 充分性:

$$\begin{aligned}\|x-z\|+\|z-y\|&=\|x-\alpha x-(1-\alpha)y\|+\|\alpha x+(1-\alpha)y-y\|\\&=(1-\alpha)\|x-y\|+\alpha\|x-y\|\\&=\|x-y\|\end{aligned}$$

  下证必要性:
  当 $z\neq x,y$ 时，命题 ③ 退化为 ①②
  因此存在 $\lambda>0$ 使得 $(z-y)=\lambda(x-z)$，于是有 $\alpha=\frac{\lambda}{1+\lambda}\in(0,1)$ 满足:

$$z=\frac{1}{\lambda+1}(\lambda x+y)=\alpha x+(1-\alpha)y$$

  当 $z=x$ 时，取 $\alpha=1$ 即可.
  当 $z=y$ 时，取 $\alpha=0$ 即可.

Problem 11

设 X 是内积空间, $x,y\in X$. 假定:

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|=\|x\|\quad(\forall\,\lambda\in[0,1])$$

- ① 证明: $x = y$
- ② 若 X 只是赋范空间而非内积空间, 则 ① 的结论还成立吗?

Solution:

- ① 分别取 $\lambda = 0$ 和 $\lambda = \frac{1}{2}$ 就得到:

$$
\begin{aligned}
\|y\| &= \|x\| \\
\|x+y\| &= 2\|x\|
\end{aligned}
$$

  根据平行四边形法则我们有:

$$\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x+y\|^2 = 4\|x\|^2 - 4\|x\|^2 = 0$$

  因此 $x = y$

- ② 不一定成立.
  考虑 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\max})$ 中的单位圆 (即一个边长为 2，中心为原点的正方形)
  取 $x = (1,1), y = (-1,1)$
  则 $\|\lambda x + (1-\lambda)y\|_\infty = \|(2\lambda - 1, 1)\|_\infty = 1 = \|x\|_\infty$
  但 $x \neq y$

Problem 12

设 H 是 Hilbert 空间, $\{x_n\} \subset H$, 满足:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 在 H 中收敛.

Proof:
根据 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ 可知 $\{\|x_k\|\}$ 是 Cauchy 序列,
因此对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $N \in \mathbb{Z}_+$ 使得对于任意 $m > n > N$ 都有 $\sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$

记部分和为 $S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$
我们有:

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$$

因此 $\{S_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 序列.
根据 Hilbert 空间的完备性可知: 存在 $s \in H$ 使得:

$$s = \lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Problem 13

设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间, P 为从 H 到 M 的正交投影算子.
试证明 $\|Px\|^2 = \langle Px, x \rangle$

Proof:

$$
\begin{aligned}
\|Px\|^2 &= \langle Px, Px \rangle \\
&= \langle Px, x + (Px - x) \rangle \\
&= \langle Px, Px \rangle - \langle Px, x - Px \rangle \quad (\text{note that } Px \perp (x - Px)) \\
&= \langle Px, Px \rangle
\end{aligned}
$$