

# 泛函分析 Homework 02

姓名: 雍崔扬

学号: 21307140051

## Problem 1

在  $\mathbb{R}$  上定义  $d(x, y) := \arctan|x - y|$   
试证明  $(\mathbb{R}, d)$  是度量空间.

**Proof:**

- ① 正定性:

$$d(x, y) = \arctan|x - y| \geq \arctan(0) = 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

当且仅当  $x = y$  时取等.

- ② 对称性:

$$d(y, x) = \arctan|y - x| = \arctan|x - y| = d(x, y)$$

- ③ 三角不等式:

任意给定  $x, y, z \in \mathbb{R}$

- 若  $\arctan|x - y| + \arctan|y - z| \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 则我们有:

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \arctan|x - z| \\ &< \frac{\pi}{2} \\ &\leq \arctan|x - y| + \arctan|y - z| \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

- 若  $\arctan|x - y| + \arctan|y - z| \in [0, \frac{\pi}{2})$ ,

则我们有  $0 \leq |x - y||y - z| < 1$  成立 (右侧的小于号基于  $\tan(\theta) \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1 \quad (\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}))$  的事实)

因此我们有:

$$\begin{aligned} \tan(d(x, z)) &= \tan(\arctan|x - z|) \\ &= |x - z| \\ &\leq |x - y| + |y - z| \quad (\text{note that } 0 \leq |x - y||y - z| < 1) \\ &\leq \frac{|x - y| + |y - z|}{1 - |x - y||y - z|} \\ &= \frac{\tan(\arctan|x - y|) + \tan(\arctan|y - z|)}{1 - \tan(\arctan|x - y|)\tan(\arctan|y - z|)} \\ &= \tan(\arctan|x - y| + \arctan|y - z|) \\ &= \tan(d(x, y) + d(y, z)) \\ \Rightarrow d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

综上所述, 度量  $d$  满足三角不等式.

## Problem 5

设  $d_1, d_2, \dots, d_m, \dots$  都是集合  $X$  上的度量, 试证明以下定义的  $d$  也是  $X$  上的度量:

- ①  $d = \sup_{1 \leq i \leq m} d_i$
- ②  $d = \sqrt{d_1^2 + \dots + d_m^2}$
- ③  $d = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k}{1+d_k}$

**Proof:**

这三个度量的正定性和对称性都是显然的，我们只需证明它们满足三角不等式即可：

- ① 考虑  $d = \sup_{1 \leq i \leq m} d_i$   
对于任意  $x, y, z \in X$  都有：

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \sup_{1 \leq i \leq m} d_i(x, z) \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq m} \{d_i(x, y) + d_i(y, z)\} \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq m} d_i(x, y) + \sup_{1 \leq i \leq m} d_i(y, z) \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

- ② 考虑  $d = \sqrt{d_1^2 + \cdots + d_m^2}$

**(Minkowsik 不等式)**

任意给定实数  $p \geq 1$  和正整数  $n \in \mathbb{Z}_+$ ，对于任意  $x, y \in \mathbb{C}^n$  我们都有：

$$\|x + y\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

当且仅当  $x, y$  线性相关时取等。

根据  $p = 2$  情形的 Minkowsik 不等式可知  $\|\cdot\|_2$  具有次可加性。

于是对于任意  $x, y, z \in X$  都有：

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \sqrt{d_1^2(x, z) + \cdots + d_m^2(x, z)} \\ &= \left\| \begin{bmatrix} d_1(x, z) \\ \vdots \\ d_m(x, z) \end{bmatrix} \right\|_2 \\ &\leq \left\| \begin{bmatrix} d_1(x, y) + d_1(y, z) \\ \vdots \\ d_m(x, z) + d_m(y, z) \end{bmatrix} \right\|_2 \\ &\leq \left\| \begin{bmatrix} d_1(x, y) \\ \vdots \\ d_m(x, y) \end{bmatrix} \right\|_2 + \left\| \begin{bmatrix} d_1(y, z) \\ \vdots \\ d_m(y, z) \end{bmatrix} \right\|_2 \\ &= \sqrt{d_1^2(x, y) + \cdots + d_m^2(x, y)} + \sqrt{d_1^2(y, z) + \cdots + d_m^2(y, z)} \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

- ③ 考虑  $d = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k}{1+d_k}$

注意到  $f(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$  在  $[0, \infty)$  上递增，因此我们有：

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &= f(|a+b|) \\ &\leq f(|a|+|b|) \\ &= \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \quad (\forall a, b \in \mathbb{R}) \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \end{aligned}$$

于是对于任意  $x, y, z \in X$  都有：

$$\begin{aligned}
d(x, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x, z)}{1 + d_k(x, z)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x, y) + d_k(y, z)}{1 + d_k(x, z) + d_k(y, z)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x, y)}{1 + d_k(x, y)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(y, z)}{1 + d_k(y, z)} \\
&= d(x, y) + d(y, z)
\end{aligned}$$

## Problem 7

设  $(X, d)$  为离散度量空间, 试证明  $(X, d)$  可分的充要条件是  $X$  为可数集.

**Proof:**

离散度量空间  $(X, d)$  中  $d$  的定义为:

$$d(x, y) := \mathbb{1}(x \neq y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases} (\forall x, y \in X)$$

- **充分性:**

若  $X$  为可数集, 则它自身就是稠密子集, 故  $(X, d)$  可分.

- **必要性:**

若  $(X, d)$  可分, 则存在可数稠密子集  $S := \{x_1, x_2, \dots\}$

**(反证法)** 假设  $X$  不是可数集, 则一定有  $X \setminus S \neq \emptyset$

因此存在  $x_0 \in X \setminus S$ , 当  $r < 1$  时我们有  $B_{(X, d)}(x_0, r) \cap S = \emptyset$ , 这与 " $S$  在  $X$  中稠密" 的假定矛盾.

故  $X$  是可数集.

综上所述, 命题得证.

## Problem 8

设  $(X, d)$  为度量空间,  $S \subset X$  非空, 定义  $f(x) := d(x, S) = \inf_{y \in S} d(x, y)$  ( $\forall x \in X$ )

试证明  $f(x)$  是  $X$  上的连续函数.

**Proof:**

任意给定  $x \in X$  和  $\varepsilon > 0$ , 考虑所有满足  $d(x, z) < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$  的  $z \in X$ :

- 一方面, 根据下确界的性质可知存在  $y_1 \in S$  使得:

$$d(x, y_1) < \inf_{y \in S} d(x, y) + \frac{\varepsilon}{2} = f(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

于是我们有:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \inf_{y \in S} d(z, y) \\
&\leq d(z, y_1) \\
&\leq d(z, x) + d(x, y_1) \quad (\text{note that } d(x, y_1) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ and } d(z, x) < \delta) \\
&< \delta + (f(x) + \frac{\varepsilon}{2}) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= f(x) + \varepsilon
\end{aligned}$$

因此我们有  $f(z) < f(x) + \varepsilon$  成立.

- 另一方面, 根据下确界的性质可知存在  $y_2 \in S$  使得:

$$d(z, y_2) < \inf_{y \in S} d(z, y) + \frac{\varepsilon}{2} = f(z) + \frac{\varepsilon}{2}$$

于是我们有:

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf_{y \in S} d(x, y) \\ &\leq d(x, y_2) \\ &\leq d(x, z) + d(z, y_2) \quad (\text{note that } d(z, y_2) < f(z) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ and } d(x, z) < \delta) \\ &< \delta + (f(z) + \frac{\varepsilon}{2}) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + f(z) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= f(z) + \varepsilon \end{aligned}$$

因此我们有  $f(x) < f(z) + \varepsilon$  成立.

综上所述, 我们有  $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$  成立.

根据  $x \in X$  和  $\varepsilon > 0$  的任意性可知  $f(x)$  是  $X$  上的连续函数.

## Problem 9

(Urysohn 引理的特殊情况)

设  $(X, d)$  是度量空间,  $F_1, F_2$  是  $X$  中不相交的闭集.

试证明存在  $X$  上的连续函数  $f(x)$  使得  $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{if } x \in F_1 \\ f(x) = 1 & \text{if } x \in F_2 \end{cases}$

**Proof:**

我们定义:

$$\begin{aligned} d(x, F_1) &:= \inf_{y \in F_1} d(x, y) = \min_{y \in F_1} d(x, y) \\ d(x, F_2) &:= \inf_{y \in F_2} d(x, y) = \min_{y \in F_2} d(x, y) \\ f(x) &:= \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)} \end{aligned}$$

根据 **Problem 8** 的结论可知  $d(x, F_1)$  和  $d(x, F_2)$  都是  $X$  上的连续函数.

其中  $\inf$  变为  $\min$  是由  $F_1, F_2$  的闭性保证的,

因为连续函数在非空闭集上一定可以取到下确界, 即最小值存在.

因此  $d(x, F_1) = 0$  当且仅当  $x \in F_1$ ,  $d(x, F_2) = 0$  当且仅当  $x \in F_2$

根据  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  可知  $d(x, F_1)$  和  $d(x, F_2)$  不能同时为零, 表明  $f(x)$  在  $X$  上是定义良好的.

由于函数的四则运算保持连续性, 故  $f(x) := \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$  是  $X$  上的连续函数.

显然它满足  $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{if } x \in F_1 \\ f(x) = 1 & \text{if } x \in F_2 \end{cases}$

## Problem 11

设  $f(x)$  是度量空间  $(X, d_X)$  到度量空间  $(Y, d_Y)$  的连续映射,  $A$  在  $X$  中稠密.

试证明  $f(A)$  在  $f(X)$  中稠密.

**Proof:**

由于  $A$  在  $(X, d_X)$  中稠密, 故  $X \subseteq \text{cl}(A)$  (其中  $\text{cl}(A)$  代表  $A$  的闭包)

换言之, 任意给定  $x \in X$ , 要么有  $x \in A$ , 要么  $x$  是  $A$  的极限点

- 若  $x \in A$ , 则  $f(x) \in f(A)$
- 若  $x$  是  $A$  的极限点, 即存在  $A$  中的序列  $\{x_n\}$  依度量  $d_X$  收敛于  $x$ , 则根据映射  $f$  的连续性可知  $f(A)$  中的序列  $\{f(x_n)\}$  依度量  $d_Y$  收敛于  $f(x)$  因此  $f(x)$  也是  $f(A)$  的极限点.

因此任意给定  $x \in X$ , 要么有  $f(x) \in f(A)$ , 要么  $f(x)$  是  $f(A)$  的极限点.

这表明  $f(X) \subseteq \text{cl}(f(A))$ , 故  $f(A)$  在  $f(X)$  中稠密.

## Problem 13

设  $M$  是  $(C([a, b]), d_\infty)$  中的有界集.

试证明  $S := \{F(x) = \int_a^x f(t)dt : f \in M\}$  是列紧集.

- (有界集合)

设  $(X, d)$  是一个度量空间,  $S$  是  $X$  的子集.

我们称  $S$  是**有界的** (bounded), 当且仅当  $X$  中存在一个包含  $S$  的球  $B(x, r)$ .

我们称  $(X, d)$  是有界的, 当且仅当存在一个包含  $X$  的球  $B(x, r)$ .

- (Arzela-Ascoli 定理, 工科泛函分析基础, 定理 2.2.18, 泛函分析讲义, 定理 2.2.8)

闭区间  $[a, b]$  上的连续实值函数空间  $(C([a, b]), d_\infty)$  的子集  $S$  列紧的充要条件是:

①  $S$  一致有界, 即存在  $M > 0$  使得对于任意  $x \in S$  都有  $|x(t)| < M$  ( $\forall t \in [a, b]$ ) 成立.

②  $S$  **等度连续**, 即对于任意  $\varepsilon > 0$  都存在  $\delta > 0$  使得只要  $|t_1 - t_2| < \delta$  就有  $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$  ( $\forall x \in S$ ) 成立.

**Proof:**

由于  $M$  是  $(C([a, b]), d_\infty)$  中的有界集,

故存在  $K > 0$  使得对于任意  $f \in M$  都有  $|f(x)| \leq K$  ( $\forall x \in [a, b]$ )

任意给定  $f \in M$ , 现考虑  $S$  中的函数  $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ :

- ① 一致有界:

$$\begin{aligned}|F(x)| &= \left| \int_a^x f(t)dt \right| \\ &\leq \int_a^x |f(t)|dt \\ &\leq \int_a^x Kdt \quad (\forall x \in [a, b]) \\ &\leq \int_a^b Kdt \\ &= K(b-a)\end{aligned}$$

故  $S := \{F(x) = \int_a^x f(t)dt : f \in M\}$  一致有界.

- ② 等度连续:

对于任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$

只要  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 我们就有:

$$\begin{aligned}|F(x_2) - F(x_1)| &= \left| \int_a^{x_2} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt \right| \\ &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| \\ &\leq K|x_2 - x_1| \\ &< K\delta \\ &= K \cdot \frac{\varepsilon}{K} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

因此  $S := \{F(x) = \int_a^x f(t)dt : f \in M\}$  等度连续

综合①②, 根据 **Arzela-Ascoli 定理**可知  $S$  是闭区间  $[a, b]$  上的连续实值函数空间  $(C([a, b]), d_\infty)$  中的列紧集.

## Problem 16

设  $D$  是区间  $[0, 1]$  上具有连续导数 (在端点  $t = 1, t = 0$  处分别具有左、右导数) 的实函数全体.

在  $D$  上定义  $d(x, y) := \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |x'(t) - y'(t)|$

试证明:

- ①  $(D, d)$  是度量空间
- ②  $D$  中序列  $\{x_n\}$  按度量  $d$  收敛于  $x$  的充要条件是  $\{x_n\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛于  $x$  且  $\{x'_n\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛于  $x'$
- ③  $D$  是完备的

## Part (1)

试证明  $(D, d)$  是度量空间.

**Proof:**

- ① 正定性:

$$d(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |x'(t) - y'(t)| \geq 0 \quad (\forall x, y \in D)$$

当且仅当  $x = y$  时取等.

- ② 对称性:

$$\begin{aligned} d(y, x) &= \sup_{0 \leq t \leq 1} |y(t) - x(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |y'(t) - x'(t)| \\ &= \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |x'(t) - y'(t)| \quad (\forall x, y \in D) \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

- ③ 三角不等式:

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - z(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |x'(t) - z'(t)| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \{|x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)|\} + \sup_{0 \leq t \leq 1} \{|x'(t) - y'(t)| + |y'(t) - z'(t)|\} \quad (\forall x, y, z \in D) \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |y(t) - z(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |x'(t) - y'(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |y'(t) - z'(t)| \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

综上所述,  $(D, d)$  是度量空间.

## Part (2)

试证明  $D$  中序列  $\{x_n\}$  按度量  $d$  收敛于  $x$  的充要条件是  $\{x_n\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛于  $x$  且  $\{x'_n\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛于  $x'$

**Proof:**

- ① 充分性:

若  $\{x_n\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛于  $x$  且  $\{x'_n\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛于  $x'$ ,  
则对于任意  $\varepsilon > 0$  都存在  $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}_+$  使得:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x(t)| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n > N_1) \\ \sup_{0 \leq t \leq 1} |x'_n(t) - x'(t)| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n > N_2) \end{aligned}$$

因此对于任意  $n > \max\{N_1, N_2\}$  都有:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \sup_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |x'_n(t) - x'(t)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

这表明  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ , 即  $\{x_n\}$  依度量  $d$  收敛于  $x$

- ② 必要性:

若  $D$  中序列  $\{x_n\}$  按度量  $d$  收敛于  $x$ ,  
则对于任意  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $N \in \mathbb{Z}_+$  使得:

$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad (\forall n > N)$$

这意味着:

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x(t)| \leq d(x_n, x) < \varepsilon \quad (\forall n > N)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |x'_n(t) - x'(t)| \leq d(x_n, x) < \varepsilon \quad (\forall n > N)$$

这表明  $\{x_n\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛于  $x$  且  $\{x'_n\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛于  $x'$

### Part (3)

试证明  $(D, d)$  是完备度量空间.

• **Lemma (陶哲轩实分析, 定理 14.7.1)**

设  $[a, b]$  是一个区间.

对于任意正整数  $n$ , 设  $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  是一个可微函数, 其导函数  $f'_n$  是连续函数.

若导函数序列  $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$  一致收敛于函数  $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ ,

且存在一点  $x_0$  使得极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$  存在,

则函数序列  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  一致收敛于一个可微函数  $f$ , 且  $f$  的导函数  $f' = g$ .

通俗地说, 如果  $f'_n$  是一致收敛的, 且对于某个  $x_0$ ,  $f_n(x_0)$  收敛,

则  $f_n$  也是一致收敛的, 且  $\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$

**Proof:**

考虑  $D$  中的 Cauchy 序列  $\{x_n\}$

对于任意  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $N \in \mathbb{Z}_+$  使得  $d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad (\forall m, n > N)$

因此我们有:

$$d_\infty(x_m, x_n) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \quad (\forall m, n > N)$$

$$d_\infty(x_m, x_n) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x'_m(t) - x'_n(t)| < \varepsilon \quad (\forall m, n > N)$$

因此  $\{x_n\}$  和  $\{x'_n\}$  都是  $C([0, 1], d_\infty)$  中的 Cauchy 序列.

由于  $C([0, 1], d_\infty)$  是完备度量空间,

故存在  $x, y \in C([0, 1])$  使得  $\{x_n\}$  依度量收敛于  $x$ , 而  $\{x'_n\}$  依度量收敛于  $y$ ,

即  $\{x_n\}$  一致收敛于  $x$ , 而  $\{x'_n\}$  一致收敛于  $y$ .

根据 Lemma 可知  $y = x'$

因此  $\{x_n\}$  一致收敛于  $x'$ , 而  $\{x'_n\}$  一致收敛于  $x'$ .

结合 Part (2) 的结论可知序列  $\{x_n\}$  按度量  $d$  收敛于  $x$

这表明  $(D, d)$  是完备度量空间.

## Problem 18

设  $(X, d)$  是度量空间.

试证明 Cauchy 列收敛当且仅当其存在收敛子列.

**Proof:**

考虑  $(X, d)$  中的任意 Cauchy 列  $\{x_n\}$

• **必要性显然.**

若 Cauchy 列  $\{x_n\}$  收敛, 则其每个子列都是收敛的.

(度量空间中依度量收敛的序列的任意子列也收敛于同一极限)

• **充分性:**

若 Cauchy 列  $\{x_n\}$  存在收敛子列  $\{x_{n_k}\}$ , 极限为  $x$ ,

则对于任意  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $K, N \in \mathbb{Z}_+$  使得:

$$d(x_{n_k} - x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall k > K)$$

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall m, n > N)$$

因此对于任意满足  $n_k > N$  的  $k > K$  和  $n > N$  都有:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

这表明  $\{x_n\}$  依度量  $d$  收敛到  $x$

## Problem 19

设  $P([0, 1])$  是  $[0, 1]$  上的实系数多项式全体, 定义  $d(p, q) := \int_0^1 |p(x) - q(x)| dx \quad (\forall p, q \in P([0, 1]))$   
试证明  $(P([0, 1]), d)$  不完备, 并指出其完备化空间.

**Proof:**

- **举例说明  $(P([0, 1]), d)$  不完备:**

考虑  $P([0, 1])$  中的序列  $\{p_n(x) := x^n\}$

对于任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $N = \lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil$ , 则对于任意  $m, n > N$  都有:

$$\begin{aligned} d(p_m, p_n) &= \int_0^1 |x^m - x^n| dx \\ &\leq \int_0^1 (x^m + x^n) dx \\ &= \left\{ \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^{n+1}}{n+1} \right\} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \\ &< 1/\frac{2}{\varepsilon} + 1/\frac{2}{\varepsilon} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

因此  $\{p_n\}$  为  $(P([0, 1]), d)$  中的 Cauchy 序列.

这个序列的依度量  $d$  收敛的极限为  $f(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

但  $f \notin P([0, 1])$ , 故  $P([0, 1])$  在度量  $d$  下是不完备的.

- $(P([0, 1]), d)$  的完备化空间是  $(L^1([0, 1]), d)$ , 即  $[0, 1]$  上的 **Lebesgue 可积函数空间**.  
(回忆起结论: 连续实值函数空间  $C([a, b])$  按度量  $d_p$  的完备化空间是  $p$  次幂可积函数空间  $(L^p([a, b]), d_p)$ )

## Problem 21

已知  $\phi \in C([0, 1]), r \in (0, 1)$

试证明方程  $x(t) = r \sin(x(t)) + \phi(t)$  在  $[0, 1]$  上存在唯一的连续解.

- **(不动点)**

设  $(X, d)$  是度量空间,  $T: X \mapsto X$  是一个算子.

若  $x_0 \in X$  满足  $T(x_0) = x_0$ , 则我们称  $x_0$  为算子  $T$  的不动点.

- **(压缩映射)**

设  $(X, d)$  是度量空间,  $T: X \mapsto X$  是一个算子.

若存在常数  $\lambda \in (0, 1)$  使得  $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad (\forall x, y \in X)$

则我们称  $T$  为  $X$  上的压缩映射.

显然压缩映射必定为连续映射.



- (压缩映射定理, 又称 Banach 不动点定理, 工科泛函分析基础, 定理 2.5.3, 泛函分析讲义 定理 2.5.1)

设  $(X, d)$  为完备度量空间.

若  $T : X \mapsto X$  是一个压缩映射, 则  $T$  在  $X$  中有唯一的不动点.

**Proof:**

定义映射  $T : C([0, 1]) \mapsto C([0, 1])$  为:

$$T(x)(t) = r \sin(x(t)) + \phi(t)$$

则我们有:

$$\begin{aligned} d_{\infty}(T(x), T(y)) &= \sup_{0 \leq t \leq 1} |r \sin(x(t)) + \phi(t) - r \sin(y(t)) - \phi(t)| \\ &= r \sup_{0 \leq t \leq 1} |\sin(x(t)) - \sin(y(t))| \quad (\text{note that } \frac{d}{du} \sin(u) = \cos(u) \in [-1, 1] \text{ for all } u \in \mathbb{R}) \\ &\leq r \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| \\ &= r \cdot d_{\infty}(x, y) \end{aligned}$$

由于  $r \in (0, 1)$ , 故  $T$  是一个压缩映射.

注意到  $(C[0, 1], d_{\infty})$  是完备度量空间,

根据压缩映射定理可知存在唯一的  $x_{\star} \in C([0, 1])$  使得  $T(x_{\star}) = x_{\star}$

也就是说, 方程  $x(t) = T(x)(t) = r \sin(x(t)) + \phi(t)$  在  $C([0, 1])$  中存在唯一解.

命题得证.