FDU 高等线性代数 6. 非负矩阵

本文根据邵老师授课内容整理而成，并参考了以下资料：

- Matrix Analysis (R. Horn & C. Johnson) Chapter 8
- 矩阵分析 (R. Horn & C. Johnson) 第 8 章

欢迎批评指正!

6.1 基础知识

首先我们给出下列定义:

- 设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 和 $B=[b_{ij}]\in\mathbb{C}^{m\times n}$
  我们定义 $|A|=[|a_{ij}|]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $|B|=[|b_{ij}|]\in\mathbb{R}^{m\times n}$
- 设 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$
  - 若所有 a_{ij} 均为非负数，则我们称实矩阵 A 是**非负的** (nonnegative)，记为 $A\geq 0$ (等价于 $|A|=A$)
  - 若所有 a_{ij} 均为正数，则我们称实矩阵 A 是**正的** (positive)，记为 $A>0$
  - 若 $A-B$ 是非负矩阵 (即 $A-B\geq 0$)，则我们记 $A\geq B$
  - 若 $A-B$ 是非负矩阵 (即 $A-B>0$)，则我们记 $A>B$

  反向的关系 $\leq$ 和 $<$ 可以用类似的方法定义.

(Matrix Analysis 命题 $8.1.8$**)**
给定 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $x=[x_i]\in\mathbb{C}^n$，我们有下列命题成立:

- ① $|Ax|\leq|A||x|$
  Proof:

$$\begin{aligned}|Ax|_k&=\left|\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j\right|\\&\leq\sum_{j=1}^n|a_{kj}x_j|\quad\quad(k=1,\dots,n)\\&=\sum_{j=1}^n|a_{kj}||x_j|\\&=(|A||x|)_k\end{aligned}$$

- ② 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是非负的且有一行全为正数.
  若 $|Ax|=A|x|$，则存在实数 $\theta\in[0,2\pi)$ 使得 $e^{-i\theta}x=|x|$
  Proof:
  $|Ax|=Ax$ 说明对于任意 $k=1,\dots,n$，① 的证明中的三角不等式都取等.
  因此对于任意 $k=1,\dots,n$，复数 $a_{kj}x_j$ $(j=1,\dots,n)$ 一定具有相同的辐角.
  由于 A 有一行全为正数，故复数 x_j $(j=1,\dots,n)$ 一定具有相同的辐角.
  于是存在实数 $\theta\in[0,2\pi)$ 使得 $e^{-i\theta}x=|x|$
- ③ 设 $x\in\mathbb{R}^n$ 是正的.
  $Ax=|A|x$ 当且仅当 $A=|A|$ (即 A 是非负矩阵)

设 $A,B,C,D\in\mathbb{C}^{n\times n},x,y\in\mathbb{C}^n$，又设 $m\in\mathbb{Z}_+$，则我们有下列命题成立:

- ① $|AB| \le |A||B|$
  特殊地，$|A^m| \le |A|^m$
- ② 若 $0 \le A \le B$ 且 $0 \le C \le D$，则 $0 \le AC \le BD$
  特殊地，若 $0 \le A \le B$，则 $0 \le A^m \le B^m$
- ③ 若 $A \ge 0$，则 $A^m \ge 0$;
  若 $A > 0$，则 $A^m > 0$
- ④ 若 $A > 0$，则对于任意非零的非负向量 $x \ge 0$ (满足 $x \ne 0_n$) 都有 $Ax > 0$ 成立

Horn 的书上的两道习题有错误:

- $\||A|\|_2 = \|A\|_2$ 的反例:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad |A| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  注意到 A 的特征值是 $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$，奇异值是 $1, 1$，因此 $\|A\|_2 = 1$
  而 $|A|$ 的特征值是 $0, \sqrt{2}$，奇异值是 $0, \sqrt{2}$，因此 $\||A|\|_2 = \sqrt{2}$
  两者并不相等.

- "若 $|A| \le |B|$，则 $\|A\|_2 \le \|B\|_2$" 的反例:

$$A_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1-\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

  显然当 $\varepsilon \in (0, 2)$ 时我们都有 $|A_\varepsilon| \le |B|$
  根据之前的结论我们有 $\|B\|_2 = 1$
  当 $\varepsilon \to 0_+$ 时，我们有 $\|A_\varepsilon\|_2 \to \sqrt{2}$，因此存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\|A_\varepsilon\|_2 > \|B\|_2$

  事实上，这个命题可以改为:
  "若 $0 \le A \le B$，则我们有 $0 \le A^{\mathrm{T}}A \le B^{\mathrm{T}}B$，进而有 $\rho(A^{\mathrm{T}}A) \le \rho(B^{\mathrm{T}}B)$，即有 $\|A\|_2 \le \|B\|_2$"

(Matrix Analysis 定理 $8.1.18$**)**
设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$，并假设 $B \ge 0$
若 $|A| \le |B| = B$，则我们有 $\rho(A) \le \rho(|A|) \le \rho(B)$

- **(Matrix Analysis 推论** $8.1.19$**)**
  若 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $0 \le A \le B$，则 $0 \le \rho(A) \le \rho(B)$

  证明: 根据 Gelfand 谱半径公式我们有:

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|_\infty^{\frac{1}{k}} \le \lim_{k\to\infty} \|B^k\|_\infty^{\frac{1}{k}} = \rho(B)$$

- **(邵老师的补充)**
  若 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $0 < A < B$，则 $0 < \rho(A) < \rho(B)$

  证明: 对于 $A > B > 0$ 的情况直接应用 Gelfand 谱半径公式是不行的，因为严格大于号取极限是非严格大于号.
  我们得从另一条路走.
  根据 $0 < A < B$ 可知存在 $\theta > 1$ 使得 $\theta A \le B$
  应用 **Matrix Analysis 推论** $8.1.19$ 可知 $\rho(A) < \rho(\theta A) \le \rho(B)$

- **(Matrix Analysis 推论** $8.1.20$**)**
  设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是非负矩阵.
  ① 若 A_1 是 A 的主子阵，则 $\rho(A_1) \le \rho(A)$
  ② $\min_{1\le i\le n} a_{ii} \le \rho(A)$ (即 ① 的一阶情况)

特殊地，若 A 的主对角元都是正实数，则 $\rho(A) > 0$

> "A 是非负矩阵" 的假设是十分重要的
> 例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ (其特征值均为 0) 就不满足 $\rho(A) \geq 1$

(Matrix Analysis 引理 $8.1.21$**)**
若 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是非负矩阵，则我们有:

$$
\begin{aligned}
\rho(A) &\leq \|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \\
\rho(A) &\leq \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}
\end{aligned}
$$

前者当且仅当 A 所有列和相等时取等，后者当且仅当 A 所有行和相等时取等.

非负矩阵的最大行(列)和是其谱半径的一个上界，这是显然的.
但令人惊讶的是，非负矩阵的最小行(列)和是其谱半径的一个下界.
(Matrix Analysis 定理 $8.1.22$**)**
设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是非负矩阵，则我们有:

$$
\begin{aligned}
\min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \\
\min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij}
\end{aligned}
$$

- **证明:**
  我们可以取一个正定对角阵 D_1 将 A 的所有行和都配成 A 的最小行和 $\min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$
  同时取一个正定对角阵 D_2 将 A 的所有行和都配成 A 的最大行和 $\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$
  显然有 $0 \leq D_1 A \leq A \leq D_2 A$ 成立
  根据 **Matrix Analysis 推论** $8.1.19$ 我们有 $0 \leq \rho(D_1 A) \leq \rho(A) \leq \rho(D_2 A)$ 成立

  根据**关于行的 Gershgorin 圆盘定理**我们知道所有行和相同的非负矩阵的谱半径就等于行和.
  因此 $\rho(D_1 A) = \min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$ 而 $\rho(D_2 A) = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$
  所以我们有 $\min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} = \rho(D_1 A) \leq \rho(A) \leq \rho(D_2 A) = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$ 成立.

  对 A^{T} 应用上述结论就得到 $\min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \rho(A^{\mathrm{T}}) \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij}$
  注意到 A^{T} 与 A 是相似的，因此 $\rho(A^{\mathrm{T}}) = \rho(A)$
  于是我们有 $\min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij}$
- **(Matrix Analysis 推论** $8.1.25$**)**
  设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ 是非负矩阵.
  若 A 的所有行(列)和均为正实数，则我们有 $\rho(A) > 0$ 成立，且 A 是不可约的.
  (即不存在排列矩阵 P 使得 $P^{\mathrm{T}} A P$ 为分块上三角阵)

通过引进某些自由参数可以推广上面的定理.
设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是非负矩阵，$x = [x_i] \in \mathbb{R}^n$ 是正向量.
记 $D = \mathrm{diag}\{x_1, \ldots, x_n\}$，则 $D^{-1} A D = [a_{ij} \frac{x_j}{x_i}]$ 也是非负矩阵，且与 A 具有相同特征值.
对 $D^{-1} A D$ 应用 **Matrix Analysis 定理** $8.1.22$ 就得到:
(Matrix Analysis 定理 $8.1.26$**)**
设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是非负矩阵.
对于任意正向量 $x = [x_i] \in \mathbb{R}^n$ 我们都有:

$$\min_{1\le i\le n}\frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\le\rho(A)\le\max_{1\le i\le n}\frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$
$$\min_{1\le j\le n}x_j\sum_{i=1}^n\frac{a_{ij}}{x_i}\le\rho(A)\le\max_{1\le j\le n}x_j\sum_{i=1}^n\frac{a_{ij}}{x_i}$$

- **(Matrix Analysis 推论** $8.1.29$**)**
  设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是非负矩阵，$x=[x_i]\in\mathbb{R}^n$ 是正向量.
  若 $\alpha,\beta\ge 0$ 满足 $\alpha x\le Ax\le\beta x$，则 $\alpha\le\rho(A)\le\beta$
  若 $\alpha x<Ax$，则 $\alpha<\rho(A)$
  若 $Ax<\beta x$，则 $\rho(A)<\beta$
- **(Matrix Analysis 推论** $8.1.30$**)**
  设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是非负矩阵.
  若 x 是 A 的一个正的特征向量，则 $(\rho(A),x)$ 是 A 的一个特征对.
  换言之，若 A,x,λ 满足 $A\ge 0,x>0,Ax=x\lambda$，则 $\lambda=\rho(A)$
- **(Collatz-Wielandt 定理, Matrix Analysis 推论** $8.1.31$**)**
  设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是非负矩阵.
  若 A 有一个正的特征向量 **(邵老师: 若 A 是不可约非负矩阵)**，则我们有:

$$\begin{aligned}\rho(A)&=\max_{x>0}\min_{1\le i\le n}\frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\\&=\min_{x>0}\max_{1\le i\le n}\frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\end{aligned}$$

  对于一般的非负矩阵，只有第一个等式成立 (其形式略微不同) **(Matrix Analysis 推论** $8.3.3$**)**

我们知道 Hermite 正定阵 A 的 Hermite 正定 p 次根 $A^{\frac{1}{p}}$ 是唯一的.
但在随机过程中，我们通常研究的是对非负矩阵 A 开非负 p 次根 X
(因为概率转移矩阵一定是非负的，即所有元素都是非负实数)
这种情况下，非负 p 次根 X 不一定存在，即使存在也不定唯一.

- 考虑非负矩阵的方程 $\begin{bmatrix}0&1&\\&0&1\\&&0\end{bmatrix}=X^2$
  若 X 存在，则 X 的特征值均为零，因此它的 Jordan 块只有如下三种可能:

$$J_X=\begin{bmatrix}0&1&\\&0&1\\&&0\end{bmatrix}\text{ or }\begin{bmatrix}0&1&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\text{ or }\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$$

  我们发现 J_X^2 的秩至多是 1，因此不存在 X 使得 $X^2=\begin{bmatrix}0&1&\\&0&1\\&&0\end{bmatrix}$
- 考虑非负矩阵的方程 $\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}=X^2$
  方程的解 X 可以是 $\pm I$ 或 $P\begin{bmatrix}1&\\&-1\end{bmatrix}P^{-1}$ (例如 $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$)
  邵老师提供了一个形象的说明:
  通过 2 步转移概率矩阵并不一定能够唯一确定 1 步转移概率矩阵.

6.2 正矩阵

首先我们讨论与模最大特征值相伴的特征向量的性质.
(Matrix Analysis 引理 $8.2.1$**)**
设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正矩阵.
若 (λ, x) 是 A 的一组特征对，且 $|\lambda| = \rho(A)$，
则我们有 $|x| > 0$ 且 $A|x| = \rho(A)|x|$

(Matrix Analysis 引理 $8.2.3$**)**
设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正矩阵.
若 (λ, x) 是 A 的一组特征对，且 $|\lambda| = \rho(A)$，
则存在一个实数 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得 $e^{-i\theta}x = |x| > 0$

于是我们可得出有关正矩阵的一个基本事实:
(Matrix Analysis 定理 $8.2.2$**)**
若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正矩阵，则存在正向量 x, y 使得 $Ax = x\rho(A)$ 和 $y^{\mathrm{T}}A = \rho(A)y^{\mathrm{T}}$

接下来我们就可以证明: 正矩阵仅有的模最大特征值就是它的谱半径.
(Matrix Analysis 定理 $8.2.4$**)**
设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正矩阵.
若 λ 是 A 的一个特征值，且 $|\lambda| \neq \rho(A)$，则 $|\lambda| < \rho(A)$

那么关于 $\rho(A)$ 的几何重数我们有什么结论?
(Matrix Analysis 定理 $8.2.5$**)**
若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正矩阵，则 $\rho(A)$ 作为 A 的特征值的几何重数为 1

- **(Matrix Analysis 推论** $8.2.6$**)**
  若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正矩阵，则 A 关于特征值 $\rho(A)$ 存在唯一的特征向量 x 满足 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$，且这个向量必然是正的.
  我们称上述 x 为 A 的**右 Perron 向量**，称 $\rho(A)$ 为 A 的 **Perron 根**
- 将上述结果应用于 A^{T}，其与特征值 $\rho(A)$ 对应的满足 $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1$ 的特征向量 y 是正的，且是唯一的.
  我们称它为 A 的**左 Perron 向量**

正矩阵 A 的 Perron 根 $\rho(A)$ 的代数重数也是 1.
(Matrix Analysis 定理 $8.2.7$**)**
若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正矩阵，则 Perron 根 $\rho(A)$ 作为 A 的特征值的代数重数是 1
若 y 和 x 分别是 A 的左、右 Perron 向量，则 $\lim_{m\to\infty}(\rho^{-1}(A)A)^m = xy^{\mathrm{T}}$ (这是一个正的秩 1 矩阵)

我们将本节的结果总结如下:
(Perron 定理, Matrix Analysis 定理 $8.2.8$**)**
若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正矩阵，则下列命题成立:

- ① $\rho(A) > 0$
- ② $\rho(A)$ 是 A 的单重特征值
- ③ 对 A 的每个满足 $\lambda \neq \rho(A)$ 的特征值都有 $|\lambda| < \rho(A)$ 成立
- ④ 存在唯一的实向量 $x = [x_i] \in \mathbb{R}^n$ 使得 $Ax = \rho(A)x$ 且 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$，这个向量是正的
- ⑤ 存在唯一的实向量 $y = [y_i] \in \mathbb{R}^n$ 使得 $y^{\mathrm{T}}A = \rho(A)y^{\mathrm{T}}$ 且 $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1$，这个向量是正的
- ⑥ $\lim_{m\to\infty}(\rho^{-1}(A)A)^m = xy^{\mathrm{T}}$ (这是一个正的秩 1 矩阵)

邵老师利用 Brouwer 不动点定理提供了一个形象的说明.

> **(Brouwer 不动点定理)**
> 若 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是非空有界闭凸集，$f : C \mapsto C$ 是连续映射，
> 则存在 $x \in C$ 使得 $f(x) = x$

记 $\mathbb{R}^n$ 中的概率单纯形为 $C := \{x : x \succeq 0_n, \|x\|_1 = 1\}$
(例如在 $\mathbb{R}^3$ 中 C 就是平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标平面截成的正三角形)
我们定义 $C \mapsto C$ 的映射 $u \mapsto \frac{Au}{\|Au\|_1}$
根据 Brouwer 不动点定理可知存在 $u_0 \in C$ 使得 $\frac{Au_0}{\|Au_0\|_1} = u_0$，即 $Au_0 = u_0\|Au_0\|_1$
(存疑) 其中 $\|Au_0\|_1$ 就是 A 的 Perron 根，u_0 就是 A 的右 Perron 向量.

Perron 定理的一个应用:
(樊畿, Matrix Analysis 定理 $8.2.9$**)**
设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$
若 $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是非负矩阵，且对于任意 $i \neq j$ 都有 $b_{ij} \geq |a_{ij}|$，
则 A 的每个特征值都在 n 个圆盘的并集中:

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \rho(B) - b_{ii}\}$$

特别地，若对于任意 $i = 1, \ldots, n$ 都有 $|a_{ii}| > \rho(B) - b_{ii}$，则 A 是非奇异的.

6.3 非负矩阵

6.3.1 一般情形

非负矩阵的结论要比正矩阵的结论弱很多.
例如非负矩阵 A 的模最大特征值不一定是 $\rho(A)$ (即使是 $\rho(A)$，其代数重数也不一定为 1)

> 例如 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征值为 $1, \omega, \omega^2$ (其中 $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$)，它们都是模最大特征值.
> 例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值为 $1, 1, 1$，它们都是模最大特征值，且等于 $\rho(A)$，但其代数重数不是 1

我们可以通过取极限来将 Perron 定理的部分结论推广到非负矩阵.
(一般非负矩阵的 Perron 定理, Matrix Analysis 定理 $8.3.1$**)**
若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是非负矩阵，则 $\rho(A)$ 是 A 的一个特征值 (称为 **Perron 根**)，
且存在一个非负的非零向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $Ax = \rho(A)x$

- 非负矩阵的 Perron 根相伴的特征向量 (即使它是标准化的) 不一定是唯一的.
  因此对于非负矩阵，我们不能定义 "Perron 向量" 的概念.
  例如每个非零的非负向量都是非负矩阵 I_n 关于其 Perron 根 $\rho(A) = 1$ 的特征向量.

(Matrix Analysis 定理 $8.3.2$**)**
设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是非负矩阵，而 $x \in \mathbb{R}^n$ 是非负且非零的向量.
给定 $\alpha \in \mathbb{R}$，若 $Ax \geq \alpha x$，则 $\rho(A) \geq \alpha$

- **(Matrix Analysis 推论** $8.3.3$**)**
  若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是非负矩阵，则我们有:

$$\rho(A) = \max_{\substack{x \geq 0 \\ x \neq 0_n}} \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

具有正的左特征向量或右特征向量的非负矩阵有着某些特殊的性质:

(Matrix Analysis 定理 $8.3.4$)
设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是非负矩阵.
若存在一个正向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 和一个非负实数 $\lambda \geq 0$ 使得 $Ax = x\lambda$ 或 $x^{\mathrm{T}}A = \lambda x^{\mathrm{T}}$,
则我们有 $\lambda = \rho(A)$

(Matrix Analysis 定理 $8.3.5$)
设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是非负矩阵，且有一个正的左特征向量.

- ① 若 $x \in \mathbb{R}^n$ 非零且满足 $Ax \geq \rho(A)x$，则 x 是 A 关于 $\rho(A)$ 的特征向量.
- ② 若 A 不是零矩阵，且 $\rho(A) > 0$，
  则 A 的每个满足 $|\lambda| = \rho(A)$ 的特征值 λ 都是半简单的 (即几何重数等于代数重数)

6.3.2 不可约情形

(可约性 & 不可约性, Matrix Analysis 定义 $6.2.21$ & $6.2.22$)
我们称 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是**可约的** (reducible)
如果存在一个置换矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得:

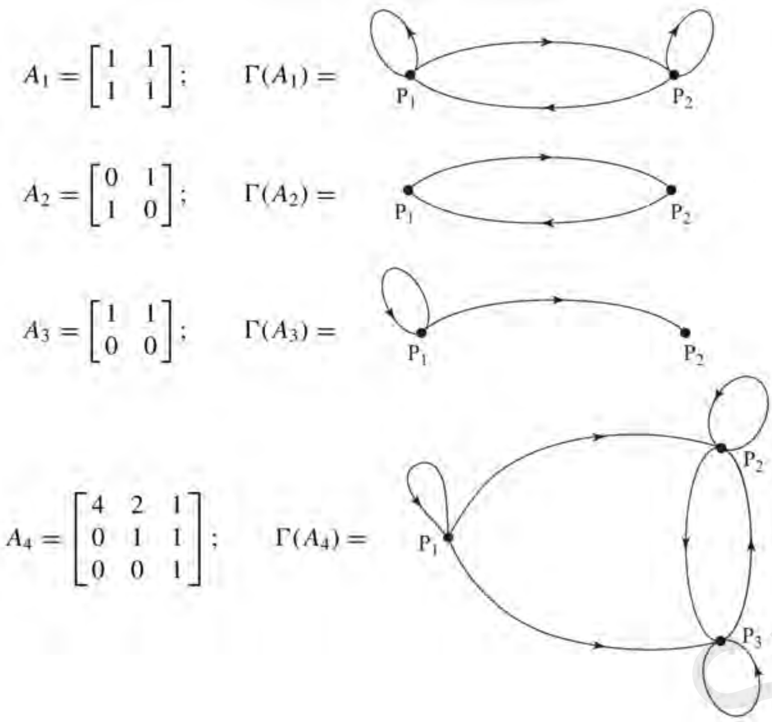
$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} B & C \\ 0_{n-r,r} & D \end{bmatrix} \text{ where } 1 \leq r \leq n-1$$

换言之，我们只要求 A 通过对称行列变换产生左下方的全零分块，
且 B, D 的阶至少是 1 (并不要求 B, C, D 有非零元素)

- 若 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是可约的，则它至少含有 $n-1$ 个非零元素.
- 若 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 不是可约的，则我们称 A 是**不可约的** (irreducible)

(强连通, Matrix Analysis 定义 $6.2.13$)
我们称一个有向图 Γ 是**强连通的** (strongly connected)
如果在 Γ 的每一对不同节点 P_i, P_j 都存在一条长度有限的有向路径.

(有向图, Matrix Analysis 定义 $6.2.11$)
$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的有向图 $\Gamma(A)$ 是 n 个节点 $P_1, \ldots, P_n$ 上的这样一个有向图:
当且仅当 $a_{ij} \neq 0$ 时，$\Gamma(A)$ 中存在一条从 P_i 到 P_j 中的有向弧.



(Matrix Analysis 定理 $6.2.24$)
给定 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，定义绝对值矩阵 $|A| := [|a_{ij}|] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和指标矩阵
$\mathrm{M}(A) = [\mathbb{1}\{a_{ij} \neq 0\}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$
则下列命题是等价:

- ① A 是不可约的
- ② $(I + |A|)^{n-1} > 0$
- ③ $(I + \mathrm{M}(A))^{n-1} > 0$
- ④ 有向图 $\Gamma(A)$ 是强连通的

不可约的非负矩阵可以多继承正矩阵的一些性质.
(Matrix Analysis 引理 $8.4.2$)
若 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征值是 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$，
则 $I + A$ 的特征值是 $\lambda_1 + 1, \ldots, \lambda_n + 1$ 且 $\rho(I + A) \leq \rho(A) + 1$
进一步，若 A 是非负矩阵，则 $\rho(I + A) = \rho(A) + 1$

(Matrix Analysis 引理 $8.4.3$)
若 A 是非负矩阵，且对于某个正整数 $m \geq 1$，A^m 是正矩阵，
则 $\rho(A) > 0$，且是 A 仅有的模最大特征值 (其代数重数为 1)

(不可约非负矩阵的 Perron-Frobenius 定理, Matrix Analysis 定理 $8.4.4$)
设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ 是不可约的非负矩阵，则下列命题成立:

- ① $\rho(A) > 0$
- ② $\rho(A)$ 是 A 的单重特征值 **(Perron 根)**
- ③ 存在唯一的实向量 $x = [x_i] \in \mathbb{R}^n$ 使得 $Ax = \rho(A)x$ 且 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$，这个向量是正的 **(右 Perron 向量)**
- ④ 存在唯一的实向量 $y = [y_i] \in \mathbb{R}^n$ 使得 $y^{\mathrm{T}}A = \rho(A)y^{\mathrm{T}}$ 且 $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1$，这个向量是正的 **(左 Perron 向量)**

Perron 根满足

- Gelfand 公式: $\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k}$.
- 单调性: 若 $A \geq B \geq 0$ 则 $\rho(A) \geq \rho(B) \geq 0$;
  若 $A > B > 0$ 则 $\rho(A) > \rho(B) > 0$.
- 行和/列和估计

$$
\begin{aligned}
\min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}, \\
\min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij}.
\end{aligned}
$$

- Collatz–Wielandt 定理: 若 A 非负且不可约, 那么

$$\rho(A) = \max_{x>0} \min_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \min_{x>0} \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

- 若 A 非负, 那么

$$\rho(A) = \max_{\substack{x\geq 0\\ x\neq 0}} \min_{\substack{1\leq i\leq n\\ x_i\neq 0}} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

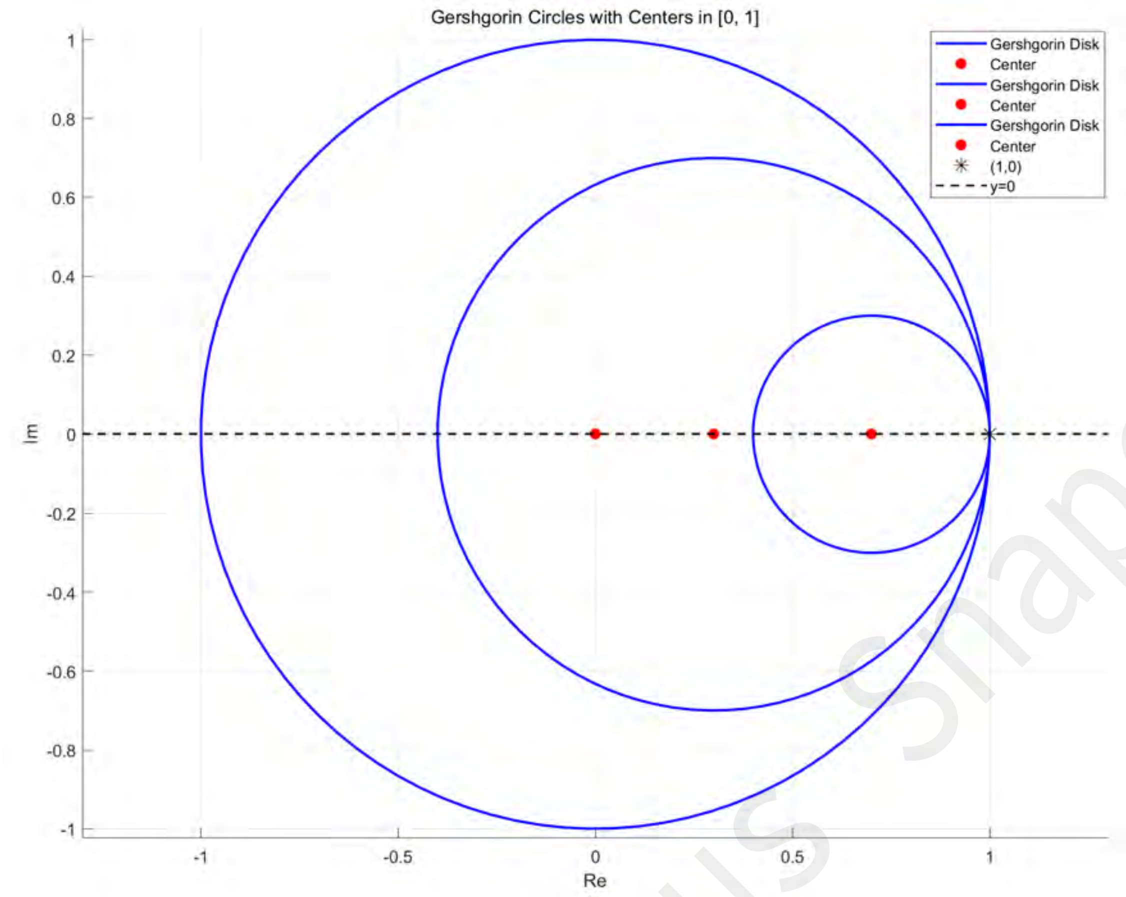
6.4 随机矩阵

所有行和均为 1 的非负矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 称为**(行)随机矩阵** ((row) stochastic matrix) (即满足 $A \geq 0$ 且 $A1_n = 1_n$)
所有列和均为 1 的非负矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 称为**列随机矩阵** (column stochastic matrix) (即满足 $A \geq 0$ 且 $A^{\mathrm{T}}1_n = 1_n$)
所有行和、列和均为 1 的非负矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 称为**双随机矩阵** (doubly stochastic matrix)

- 一个随机矩阵的例子 (四个同学传球):

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(1_3 1_3^{\mathrm{T}} - I)$$

- 根据定义可知随机矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A1_n = 1_n$
  因此 1 是 A 的一个特征值，而 1_n 是与之相伴的特征向量.
  根据关于行的 Gershgorin 圆盘定理可知，所有行和相同的非负矩阵的谱半径就等于行和.
  因此 A 的谱半径 $\rho(A) = 1$



若 $Q = [q_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $q_{ij} \geq 0 \ (i \neq j)$ (非对角元非负) 和 $Q1_n = 0_n$ (所有行和均为 0)，
则我们称 Q 是一个**生成矩阵** (generator matrix)
(通常用于描述连续时间 Marcov 链的状态转移速率)

可以证明 $\exp{(Q)}$ 是一个随机矩阵:

- ① 首先证明 $\exp{(Q)}$ 是一个非负矩阵:
  由于 Q 的非对角元都是非负的，故我们可以取一个足够大的 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $Q + \alpha I_n$ 是一个非负矩阵.
  于是我们有:

$$\begin{aligned}\exp{(Q)} &= \exp{(Q+\alpha I_n)}\exp{(-\alpha I_n)} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Q+\alpha I_n)^k}{k!}\right)\cdot e^{-\alpha}I_n \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Q+\alpha I_n)^k}{k!}\right)\cdot e^{-\alpha}\end{aligned}$$

  注意到 $\exp{(Q+\alpha I_n)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Q+\alpha I_n)^k}{k!}$ 作为非负矩阵 $Q+\alpha I_n$ 的幂级数，也一定是非负矩阵.
  同时 $e^{-\alpha}$ 是一个正实数，故 $\exp{(Q)}$ 是一个非负矩阵.
- ② 其次证明 $\exp{(Q)}$ 的所有行和均为 1:

$$
\begin{aligned}
\exp(Q)1_n &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q^k}{k!}\right)1_n \\
&= \left(I_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q^k}{k!}\right)1_n \\
&= 1_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q^k 1_n}{k!} \\
&= 1_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q^{k-1}\cdot Q1_n}{k!} \quad (\text{note that } Q1_n = 0_n) \\
&= 1_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q^{k-1}\cdot 0_n}{k!} \\
&= 1_n
\end{aligned}
$$

(Birkhoff 定理, Matrix Analysis 定理 $8.7.2$**)**
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是双随机的，当且仅当它可表示为至多 n^2-n+1 个排列矩阵的凸组合.
具体来说，$A=\sum_{i=1}^N \alpha_i P_i$
其中 $N \le n^2-n+1$，$P_1,\dots,P_N$ 为排列矩阵，$\alpha_1,\dots,\alpha_N$ 为正实数，且满足 $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$
(原书上引理的证明是错误的)

The End