泛函分析 Homework 05

姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 1

设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范空间.
设 X 中的点列 $\{x_n\}$ 满足 $\|x_n\|\leq 1\ (\forall\ n\in\mathbb{Z}_+)$ 且弱收敛于 $x_0\in X$
试证明 $\|x_0\|\leq 1$

- **Lemma: (泛函分析讲义, 定理 $5.1.5$)**
  设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范空间.
  对于任意 $x_0\in X\backslash\{0_X\}$，都存在 X 上的有界线性泛函 f 满足 $\|f\|=1$ 且 $f(x_0)=\|x_0\|$

  证明:
  任意给定 $x_0\in X\backslash\{0_X\}$
  在一维子空间 $X_0:=\{\alpha x_0:\alpha\in\mathbb{R}\}$ 上定义线性泛函:

  $$f_0(x)=f_0(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|\quad (\text{where } x=\alpha x_0 \text{ for some } \alpha\in\mathbb{R})$$

  显然 $f_0(\cdot)$ 是 X_0 上的有界线性泛函，且有:

  $$\|f_0\|_{X_0}=\sup_{x\neq 0_X\in X_0}\frac{|f_0(x)|}{\|x\|}=\sup_{\alpha\neq 0\in\mathbb{R}}\frac{|\alpha|\|x_0\||}{\|\alpha x_0\|}=1$$

  根据 Hahn-Banach 延拓定理可知:
  存在 X 上的有界线性泛函 f 满足 $\|f\|_X=\|f_0\|_{X_0}=1$ 且 $f(x)=f_0(x)\ (\forall\ x\in X_0)$
  取 $x=x_0$ 即得 $f(x_0)=f_0(x_0)=1\cdot\|x_0\|=\|x_0\|$

Proof:
当 $x_0=0_X$ 时，$\|x\|\leq 1$ 显然成立.
当 $x_0\neq 0_X$ 时，根据 **Lemma** 可知存在 X 上的有界线性泛函 $f\in X_*$ 满足 $\|f\|=1$ 且 $f(x_0)=\|x_0\|$
注意到 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，即对于任意有界线性泛函 $g\in X_*$ 都有 $\lim_{n\to\infty}g(x_n)=g(x_0)$
于是我们有 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$ 成立.
因此我们有:

$$\begin{aligned}
\|x_0\|&=f(x_0)\\
&=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\\
&\leq\lim_{n\to\infty}\{\|f\|\cdot\|x_n\|\}\quad (\text{note that } \|f\|=1 \text{ and } \|x_n\|\leq 1 \text{ for all } n\in\mathbb{Z}_+)\\
&\leq 1
\end{aligned}$$

命题得证.

Problem 3

设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范空间，S 是 X 的子空间，$x_0\in X$
试证明 $x_0\in\mathrm{cl}(S)$ 当且仅当对于 X 上任意满足 $f(x)=0\ (\forall\ x\in S)$ 的有界线性泛函 $f\in X_*$ 都有 $f(x_0)=0$ 成立.

- **Lemma (泛函分析讲义, 定理 $5.1.8$)**
  设 $(X,\|\cdot\|)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的赋范空间，S 是 X 的子空间.
  若 $x_0\in X$ 且 $d:=d(x_0,S)=\inf_{x\in S}\|x_0-x\|>0$，
  则必然存在有界线性泛函 f 满足:
  - ① $f(x)=0\ (\forall\, x\in S)$
  - ② $f(x_0)=d$ (或等价地, $f(x_0)=1$)
  - ③ $\|f\|=1$ (或等价地, $\|f\|=\frac{1}{d}$)

  通俗来说，根据一个子空间 S 和落在其外的一个点 x_0，
  可以构造一个有界线性泛函 f，其在子空间 S 上恒为 0，在 x_0 处取到间距 d

  证明:
  设 $X_0:=x_0+S=\{x+\alpha x_0: x\in S,\alpha\in\mathbb{F}\}$
  在 X_0 上定义 $f_0(x+\alpha x_0)=\alpha d\ (\forall\, x\in S,\alpha\in\mathbb{F})$
  显然 f_0 是 X_0 上的线性泛函，且满足 $\begin{cases} f_0(x_0)=d \\ f_0(x)=0\ (\forall\, x\in S)\end{cases}$

  注意到对于任意 $x\in S$ 和 $\alpha\in\mathbb{F}$ 都有:

$$\begin{aligned}|f_0(x+\alpha x_0)|&=|\alpha d|\quad(\text{note that } d=\inf_{x\in S}\|x_0-x\|\le\|x_0-x\| \text{ for all } x\in S)\\&\le|\alpha|\cdot\left\|x_0+\frac{x}{\alpha}\right\|\\&=\|\alpha x_0+x\|\end{aligned}$$

  因此我们有:

$$\begin{aligned}\|f_0\|_{X_0}&=\sup_{y\neq 0_X\in X_0}\frac{|f_0(y)|}{\|y\|}\quad(\text{note that } X_0:=x_0+S=\{x+\alpha x_0: x\in S,\alpha\in\mathbb{F}\})\\&=\sup_{x\in S,\alpha\in\mathbb{F}}\frac{|f_0(x+\alpha x_0)|}{\|x+\alpha x_0\|}\\&\le 1\end{aligned}$$

  根据 $d=\inf_{x\in S}\|x_0-x\|$ 可知存在序列 $\{x_n\}\in S\subset X_0$ 使得 $\|x_n-x_0\|\to d\ (n\to\infty)$
  于是我们有:

$$\|f_0\|_{X_0}\ge\frac{|f_0(x_n-x_0)|}{\|x_n-x_0\|}=\frac{|-d|}{\|x_n-x_0\|}\to\frac{d}{d}=1\quad(n\to\infty)$$

  因此 $\|f_0\|_{X_0}=1$
  根据 Hahn-Banach 延拓定理可知，存在 X 上的线性泛函 f 满足:
  - ① 对于任意 $x\in S\subset X_0$ 都有 $f(x)=f_0(x)=0$ 成立
  - ② $f(x_0)=f_0(x_0)=d$
  - ③ $\|f\|_X=\|f_0\|_{X_0}=1$

Proof:

- **必要性:**
  若 $x_0\in\mathrm{cl}(S)$，则存在 $\{x_n\}\subset S$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$
  设 f 是 X 上任一满足 $f(x)=0\ (\forall\, x\in S)$ 的有界线性泛函.
  根据 f 的连续性 (赋范空间上的有界线性泛函必然是连续线性泛函) 可知:

$$f(x_0)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0$$

- **充分性:**
设对于 X 上任意满足 $f(x)=0\ (\forall\ x\in S)$ 的有界线性泛函 $f\in X_*$ 都有 $f(x_0)=0$ 成立.
(反证法) 假设 $x_0\notin \text{cl}(S)$，则 $d(x_0,S)>0$
根据 **Lemma** 可知存在 X 上的有界线性泛函 f 满足:
    - ① $f(x)=0\ (\forall\ x\in S)$
    - ② $f(x_0)=d(x_0,S)$
    - ③ $\|f\|=1$

  这与 "对于 X 上任意满足 $f(x)=0\ (\forall\ x\in S)$ 的有界线性泛函 $f\in X_*$ 都有 $f(x_0)=0$ 成立" 相矛盾.
因此 $x_0\notin \text{cl}(S)$

Problem 4

设实数列 $\{a_k\}$ 对于任意满足 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2<\infty$ 的实数列 $\{b_n\}$ 都有 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_kb_k|<\infty$ 成立.
试证明 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2<\infty$

- **(一致有界定理, 泛函分析讲义, 定理 $5.3.1$)**
设 $(X,\|\cdot\|_X)$ 是 Banach 空间，$(Y,\|\cdot\|_Y)$ 是赋范空间.
若有界线性算子集合 $\mathcal{F}\subset B(X,Y)$ 中的算子是逐点有界的，即:

$$\sup_{T\in\mathcal{F}}\|Tx\|_Y<\infty\quad(\forall\ x\in X)$$

  则 $\mathcal{F}$ 中的算子一致有界，即存在与 $x\in X$ 无关的常数 $M>0$ 使得:

$$\sup_{T\in\mathcal{F}}\|T\|=\sup_{T\in\mathcal{F}}\left\{\sup_{x\neq 0_X\in X}\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}\right\}\leq M$$

Proof:
设 $x=(x_1,x_2,\dots,x_k,\dots)$ 满足 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$，即 $x\in l^2$ (其中 l^2 是二次幂可和序列空间)
定义算子 $T_n:l^2\mapsto l_1$ 如下:

$$T_n(x):=(a_1x_1,a_2x_2,\dots,a_nx_n,0,0,\dots)$$

显然 T_n 是有界线性算子.
则根据题设中 $\{a_k\}$ 的性质我们有:

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\|T_nx\|_1=\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=1}^{n}|a_kx_k|=\sum_{k=1}^{\infty}|a_kx_k|<\infty$$

这说明有界线性算子序列 $\{T_n\}$ 在 l^2 上逐点有界.
注意到 $(l^2,\|\cdot\|_2)$ 是 Banach 空间.
根据一致有界定理可知 $\{T_n\}$ 在 l^2 上一致有界，即 $\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\|T_n\|<\infty$

下面证明 $\|T_n\|=(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2)^{\frac{1}{2}}$:
对于任意 $x\in l^2$ 我们都有:

$$
\begin{aligned}
\|T_n x\|_1 &= \sum_{k=1}^{n} |a_k x_k| \quad \text{(use Cauchy-Schwarz inequality)} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2
\end{aligned}
$$

注意到上述不等号当 $x = (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{\frac{1}{2}}(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ 时同时取等.
因此我们有:

$$
\|T_n\| = \sup_{x \neq 0_X \in X} \frac{\|T_n x\|_1}{\|x\|_2} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall\, n \in \mathbb{Z}_+)
$$

于是我们有:

$$
\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|T_n\| < \infty
$$

命题得证.