

# FDU 数字图像处理 4. 图像复原

本文参考以下教材:

- Digital Image Processing (4th Edition, R. Gonzalez, R. Woods) Chapter 5
- 数字图像处理 (第四版, R. Gonzalez, R. Woods) 第 5 章

欢迎批评指正!

## 4.1 基础知识

### 4.1.1 线性空间不变退化模型

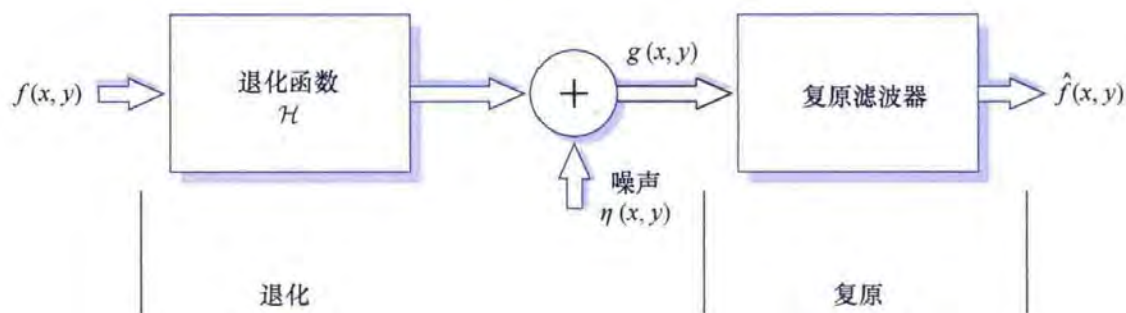


图 5.1 图像退化/复原处理的一个模型

我们将图像退化视为一个算子  $\mathcal{H}$

这个算子与一个加性噪声项  $\eta(x, y)$  共同对输入图像  $f(x, y)$  进行运算, 生成一幅退化图像  $g(x, y)$

图像复原的目的就是得到原图像  $f(x, y)$  的一个估计  $\hat{f}(x, y)$ , 并尽可能地接近原图像.

一般来说关于  $\mathcal{H}$  和  $\eta(x, y)$  的信息知道得越多, 得到的  $\hat{f}(x, y)$  就越接近  $f(x, y)$

若  $\mathcal{H}$  是一个位置不变 (position-invariant) 的线性算子, 空间函数为  $h(x, y)$ ,

则可以证明空间域中的退化图像为  $g(x, y) = (h \star f)(x, y) + \eta(x, y)$

由卷积定理可知, 上式在频率域中的等效公式是  $\tilde{g}(\mu, \nu) = \tilde{h}(\mu, \nu)\tilde{f}(\mu, \nu) + \tilde{\eta}(\mu, \nu)$

其中  $\tilde{g}(\mu, \nu)$ ,  $\tilde{h}(\mu, \nu)$ ,  $\tilde{f}(\mu, \nu)$ ,  $\tilde{\eta}(\mu, \nu)$  分别为  $g(x, y)$ ,  $h(x, y)$ ,  $f(x, y)$ ,  $\eta(x, y)$  的二维离散 Fourier 变换.

除空间周期噪声外, 本章假设噪声与空间坐标无关, 并且与图像本身也不相关 (即像素值与噪声值之间没有相关性) 尽管这些假设在某些应用 (例如医学图像) 中不成立, 但处理空间相关噪声的复杂度超出了本课程的范畴.

若退化算子  $\mathcal{H}$  满足:

- 可加性:  $\mathcal{H}[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = \mathcal{H}[f_1(x, y)] + \mathcal{H}[f_2(x, y)]$  (其中  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  为任意两幅输入图像)
- 齐次性:  $\mathcal{H}[\alpha f_1(x, y)] = \alpha \mathcal{H}[f_1(x, y)]$  (其中  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 而  $f_1(x, y)$  为任意输入图像)
- 空间不变性: 图像中任意一点的退化仅与该点处的输入值有关, 而与该点的位置无关.  
具体来说, 对于任意给定的输入图像  $f(x, y)$ , 记  $g(x, y) := \mathcal{H}[f(x, y)]$   
空间不变性是指对于任意  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  都有  $\mathcal{H}[f(x - \alpha, y - \beta)] = g(x - \alpha, y - \beta)$  成立.

则我们称  $\mathcal{H}$  为**线性空间不变退化算子**.

设退化算子  $\mathcal{H}$  是线性空间不变的.

此时可记  $\mathcal{H}$  对冲激  $\delta(x - \alpha, y - \alpha)$  的响应为  $h(x - \alpha, y - \beta)$  (利用了空间不变性, 不然只能记为  $h(x, \alpha, y, \beta)$ )

则我们有:

$$\begin{aligned}
g(x, y) &= \mathcal{H}[f(x, y)] + \eta(x, y) \\
&= \mathcal{H}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta\right] + \eta(x, y) \quad (\text{use additivity of } \mathcal{H}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}[f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta + \eta(x, y) \quad (\text{use homogeneity of } \mathcal{H}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \mathcal{H}[\delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta + \eta(x, y) \quad (\text{note that } \mathcal{H}[\delta(x - \alpha, y - \beta)] = \mathcal{H}[\delta(x - \alpha, y - \beta)]) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \alpha) d\alpha d\beta + \eta(x, y) \\
&= (h \star f)(x, y) + \eta(x, y)
\end{aligned}$$

频域中的等效表达式为  $\tilde{g}(\mu, \nu) = \tilde{h}(\mu, \nu) \tilde{f}(\mu, \nu) + \tilde{\eta}(\mu, \nu)$

这与我们在本文开头给出的退化模型一致:

带有加性噪声的线性空间不变退化系统,

可在空间域中建模为图像  $f(x, y)$  与该系统的退化函数  $h(x, y)$  的卷积, 再加上一个噪声项  $\eta(x, y)$

许多类型的退化可近似为线性位置不变过程, 这让我们可以使用线性系统理论的工具来解决图像复原问题.

与位置有关的非线性技术虽然更通用 (并且更精确), 但它们在计算上通常难以求解.

与上一篇笔记介绍的频域滤波不同的是, 在实现任何频率域复原滤波器时, 我们不对图像进行填充.

这是因为我们通常只访问退化的图像, 而要使填充有效, 就必须在图像退化之前对其进行填充.

实践中显然无法满足这一条件 (如果我们能够访问原图像, 那么就无需恢复了)

## 4.1.2 白噪声

关于连续变量  $t, s$  的二维 Dirac 函数定义为:

$$\begin{aligned}
\delta(t, s) &:= \begin{cases} \infty & \text{if } t = s = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \text{ such that } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, s) dt ds = 1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i2\pi(\mu t + \nu s)\} dt ds
\end{aligned}$$

对于任意给定的  $t_0, s_0 \in \mathbb{R}$ , 我们有:

$$\delta(t - t_0, s - s_0) := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i2\pi(\mu(t - t_0) + \nu(s - s_0))\} dt ds$$

其取样性质为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) \delta(t - t_0, s - s_0) dt ds = f(t_0, s_0)$$

因此其 Fourier 变换为:

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}(\mu, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0, s - s_0) \exp\{-i2\pi(\mu t + \nu s)\} dt ds \quad (\text{Sampling property of the Dirac delta function}) \\
&= \exp\{-i2\pi(\mu t_0 + \nu s_0)\}
\end{aligned}$$

可以发现  $\delta(t - t_0, s - s_0)$  的功率谱  $|\tilde{\delta}(\mu, \nu)| = |\exp\{-i2\pi(\mu t_0 + \nu s_0)\}| \equiv 1$  为常数函数.

当噪声的 Fourier 频谱  $|\tilde{\eta}(\mu, \nu)|$  是常数函数时, 我们称  $\eta(x, y)$  为**白噪声** (white noise)

**(我尝试导出 Gauss 白噪声的生成方式, 但失败了)**

正态随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  有  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ )

考虑标准正态随机向量  $Z \sim N(0, 1)$ , 其 Fourier 变换为:

$$\begin{aligned}
E[e^{-itZ}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-itz)^n}{n!} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^n \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} E[Z^n] \quad (\text{note that } E[Z^n] = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is odd} \\ (n-1)!! & \text{if } n \text{ is even} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 2m-1 \\ \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} & \text{if } n = 2m \end{cases}) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-it)^{2m}}{(2m)!} \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{t^2}{2}\right)^m \frac{1}{m!} \\
&= \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}
\end{aligned}$$

则  $X = \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$  的 Fourier 变换为:

$$\begin{aligned}
E[e^{-itX}] &= E[e^{-it(\sigma Z + \mu)}] \\
&= e^{-it\mu} E[e^{-it\sigma Z}] \\
&= \exp\left\{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} - i\mu t\right\}
\end{aligned}$$

### 4.1.3 典型分布

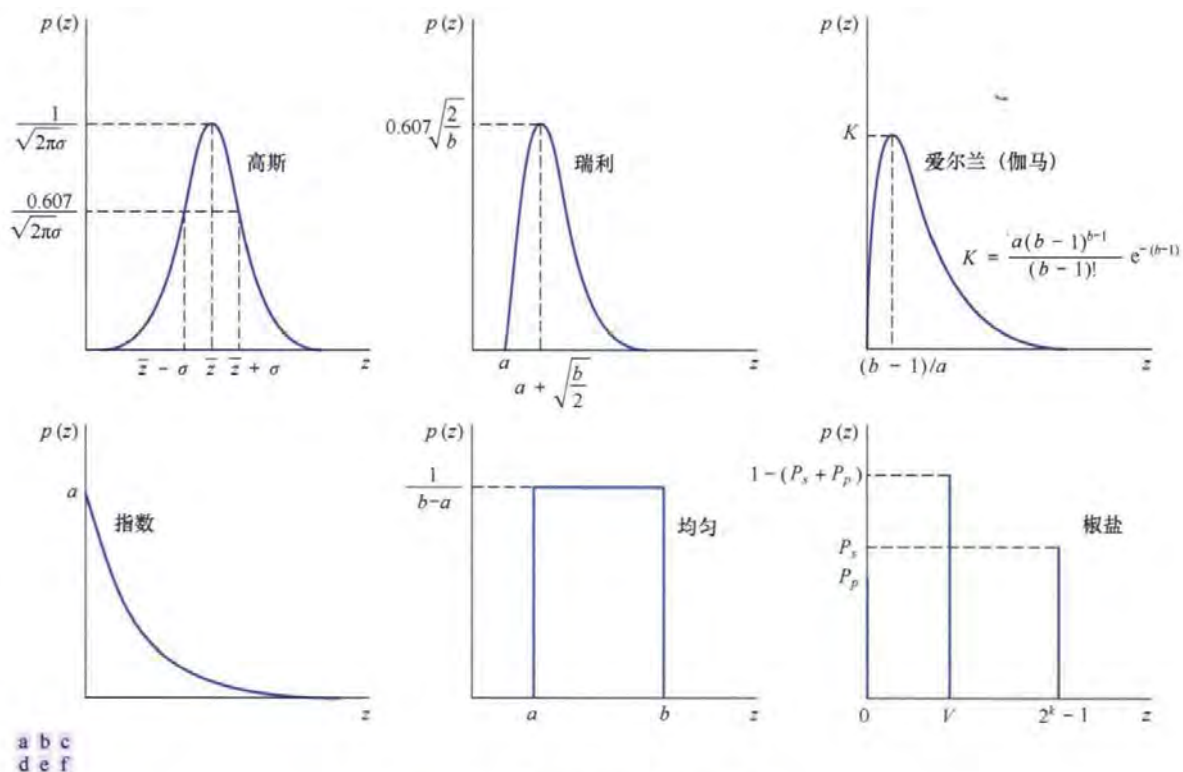


图 5.2 一些重要的概率密度函数

我们用  $z$  表示灰度.

- ① Gauss 噪声:

$$p(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z - \mu)^2\right\}$$

灰度值  $z$  落在区间  $\bar{z} \pm \sigma$  内的概率约为 0.68, 灰度值  $z$  落在区间  $\bar{z} \pm 2\sigma$  内的概率约为 0.95

- ② Rayleigh 噪声:

$$p(z) := \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a) \exp\{-\frac{1}{b}(z-a)^2\} & \text{if } z \geq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu = a + \frac{1}{2}\sqrt{\pi b}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}b(4 - \pi)$$

Rayleigh 分布对倾斜形状直方图的建模非常有用.

- ③ Gamma 噪声:

$$p(z) := \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\lambda z) & \text{if } z \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

取  $\alpha = 1$ , 便得到指数噪声:

$$p(z) := \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda z) & \text{if } z \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

- ④ 均匀噪声:

$$p(z) := \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } a \leq z \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

- ⑤ 椒盐噪声:

$$p(z) := \begin{cases} p_{\text{salt}} & \text{if } z = 255 \\ p_{\text{pepper}} & \text{if } z = 0 \\ 1 - p_{\text{salt}} - p_{\text{pepper}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

我们称  $p_{\text{salt}} + p_{\text{pepper}}$  为噪声密度.

若仅有盐粒 (灰度为 255 的白点), 则称为**盐粒噪声** (单纯盐粒噪声并不常见)

若仅有胡椒 (灰度为 0 的黑点), 则称为**胡椒噪声** (与盐粒噪声相对)

### 例 5.1 带噪图像及其直方图。

图 5.3 显示了一幅用于说明刚刚讨论的噪声模型的测试模式。这是一幅适用的模式，因为它由三个简单的恒定区域组成，即黑色区域、灰色区域和近白色区域，因此有助于对图像中添加的各种噪声分量的特性进行视觉分析。

图 5.4 显示了图 5.2 中添加了 6 种噪声后的测试模式。每幅图像的下方是根据该图像计算得到的直方图。为每种情况选择了噪声的参数，以便合并对应于测试模式中的三个灰度级的直方图。这样做可使噪声变得非常明显，但不会模糊下方图像的基本结构。

比较图 5.4 中的直方图和图 5.2 中的概率密度函数，会发现一种接近的对应性。椒盐噪声例子的直方图不包含  $V$  的规定峰值，因为  $V$  只在创建噪声图像而保持原图像的值不变时使用。当然，除椒盐噪声的峰值外，还存在图像中其他灰度的许多峰值。除整体灰度稍有不同外，图 5.4 中的前五幅图像视觉上很难区分，即使它们的直方图明显不同。图 5.4(i) 中的椒盐噪声图像是导致退化的这类噪声的唯一视觉指示。



图 5.3 用于说明图 5.2 中 PDF 的特性的测试模式

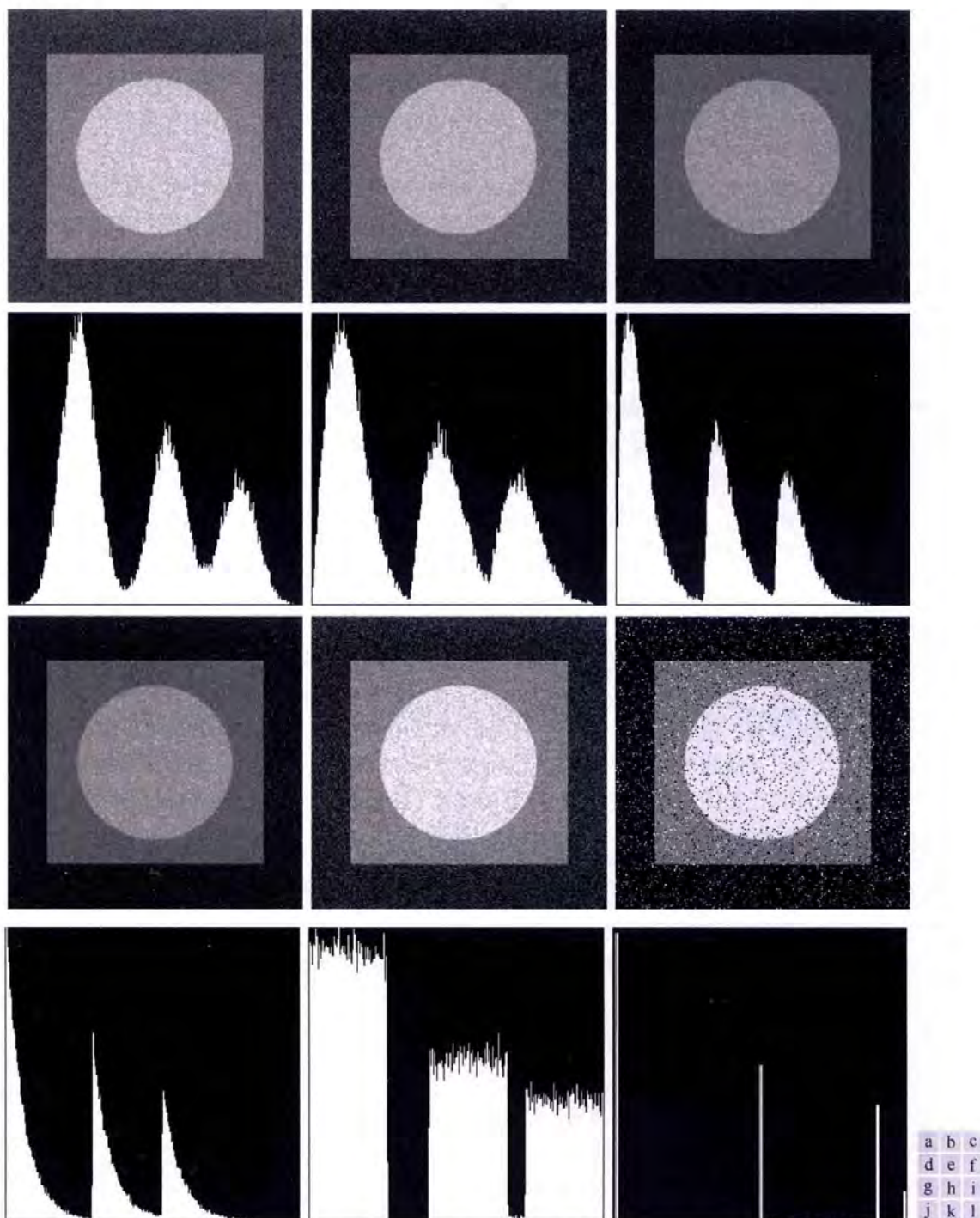


图 5.4 显示了图 5.2 中添加了 6 种噪声后的测试模式。每幅图像的下方是根据该图像计算得到的直方图。为每种情况选择了噪声的参数，以便合并对应于测试模式中的三个灰度级的直方图。这样做可使噪声变得非常明显，但不会模糊下方图像的基本结构。



## 4.1.4 周期噪声

图像中的周期噪声通常是在获取图像期间由电磁干扰产生的，可通过频率域滤波来明显降低。

例如，考虑图 5.5(a)中的图像。这幅图像已被（空间）正弦噪声污染。纯正弦波的傅里叶变换是位于正弦波共轭频率处的一对共轭冲激<sup>①</sup>（见表 4.4）。因此，若空间域中正弦波的幅度很强，则我们会在图像的谱中看到每个正弦波的一对冲激。如图 5.5(b)所示，事实确实如此。在频率域中消除或减少这些冲激，将消除或减少空间域中的正弦噪声。5.4 节将给出关于周期噪声的其他例子。



图 5.5 (a)被加性正弦噪声污染的图像；(b)显示了由正弦波引起的两个共轭冲激的谱（原图像由 NASA 提供）

## 4.2 空间滤波

当图像  $f(x, y)$  仅被加性噪声退化时，退化图像及其二维离散 Fourier 变换为：

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

$$\tilde{g}(\mu, \nu) = \tilde{f}(\mu, \nu) + \tilde{\eta}(\mu, \nu)$$

其中  $\eta(x, y)$  是加性噪声项。

此时我们可用空间滤波的方法来估计  $f(x, y)$

### 4.2.1 均值滤波器

均值滤波器有以下几种：

（记  $g(x, y)$  为退化图像）

- ① 算术平均滤波器（盒式滤波器）

记  $N_{xy}$  为以  $(x, y)$  为中心，大小为  $m \times n$ （设  $m, n$  均为奇数）的矩形窗口中的坐标集合。

基于算术平均滤波器的复原图像  $\hat{f}(x, y)$  的定义为：

$$\hat{f}(x, y) := \frac{1}{mn} \sum_{(s, t) \in N_{xy}} g(s, t)$$

这种滤波器可以降低图像中的噪声，但会模糊图像。

- ② 几何均值滤波器

记  $N_{xy}$  为以  $(x, y)$  为中心，大小为  $m \times n$ （设  $m, n$  均为奇数）的矩形窗口中的坐标集合。

基于几何平均滤波器的复原图像  $\hat{f}(x, y)$  的定义为：

$$\hat{f}(x, y) := \left[ \prod_{(s, t) \in N_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}}$$

几何平均滤波器的去噪效果和算术平均滤波器相当，但损失的图像细节更少。

- ③ 调和均值滤波器

记  $N_{xy}$  为以  $(x, y)$  为中心，大小为  $m \times n$  (设  $m, n$  均为奇数) 的矩形窗口中的坐标集合。

基于调和平均滤波器的复原图像  $\hat{f}(x, y)$  的定义为:

$$\hat{f}(x, y) := \frac{mn}{\sum_{(s,t) \in N_{xy}} \frac{1}{g(s,t)}}$$

调和均值滤波器既能处理盐粒噪声 (但不能处理胡椒噪声)，又能处理类似于 Gauss 噪声的其他噪声。

- ④ 反调和均值滤波器

记  $N_{xy}$  为以  $(x, y)$  为中心，大小为  $m \times n$  (设  $m, n$  均为奇数) 的矩形窗口中的坐标集合。

基于反调和平均滤波器的复原图像  $\hat{f}(x, y)$  的定义为:

$$\hat{f}(x, y) := \frac{\sum_{(s,t) \in N_{xy}} g(s, t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t) \in N_{xy}} g(s, t)^Q}$$

其中  $Q$  为阶数。

当  $Q > 0$  时，该滤波器可消除胡椒噪声。

当  $Q = 0$  时，该滤波器即算术平均滤波器 (并不适合用来消除椒盐噪声)

当  $Q < 0$  时，该滤波器可消除盐粒噪声 (特殊地，当  $Q = -1$  时该滤波器即调和均值滤波器)

值得注意的是，该滤波器不能同时消除胡椒噪声和盐粒噪声，因此选对  $Q$  的符号至关重要。

(也就是说，反调和均值滤波器只能消除单极冲激噪声，不能消除双极冲激噪声)

### 例 5.2 使用空间平均滤波器降低图像的噪声。

图 5.7(a)显示了电路板的 8 比特 X 射线图像，图 5.7(b)显示了已被均值为 0、方差为 400 的加性高斯噪声污染的同一幅图像。对于这类图像来说，这种噪声相当严重。图 5.7(c)和图 5.7(d)分别是用大小为  $3 \times 3$  的算术平均滤波器和几何均值滤波器对噪声图像滤波后的结果。尽管两个滤波器都降低了图像中的噪声，但几何均值滤波器对图像的模糊要少一些。例如，图 5.7(d)中顶部的指状连接片要比图 5.7(c)更为清晰。图像的其他部分同样如此。

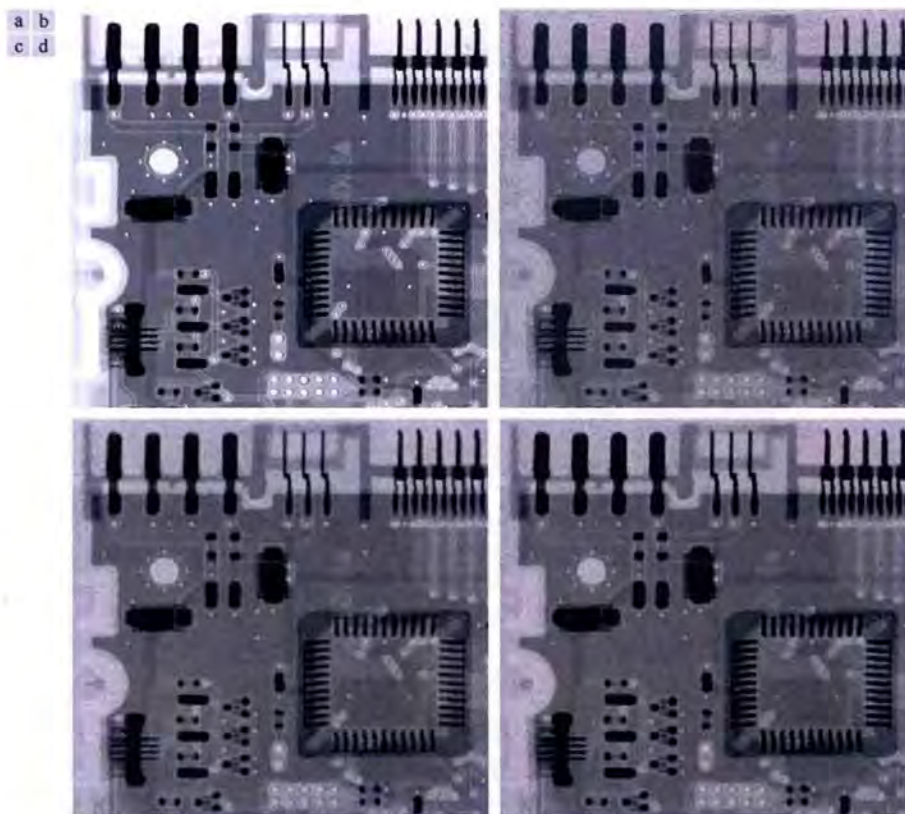


图 5.7 (a)电路板的 X 射线图像；(b)被加性高斯噪声污染的图像；(c)使用大小为  $3 \times 3$  的算术平均滤波器对图像滤波后的结果；(d)使用相同大小的几何均值滤波器对图像滤波后的结果（原图像由 Lixi 公司的 Joseph E. Pascente 先生提供）

图 5.8(a)显示了电路的同一幅图像，但该图像已被概率为 0.1 的胡椒噪声污染。类似地，图 5.8(b)显示了已被概率为 0.1 的盐粒噪声污染的图像。图 5.8(c)显示了用  $Q=1.5$  的反谐波平均滤波器对图 5.8(a)滤波后的结果。

图 5.8(d)显示了用  $Q=-1.5$  的反谐波平均滤波器对图 5.8(b)滤波后的结果。两个滤波器都降低了噪声。在清理背景方面，正阶数滤波器的效果更好，但稍微细化和模糊了暗色区域。负阶数滤波器的作用与此正好相反。

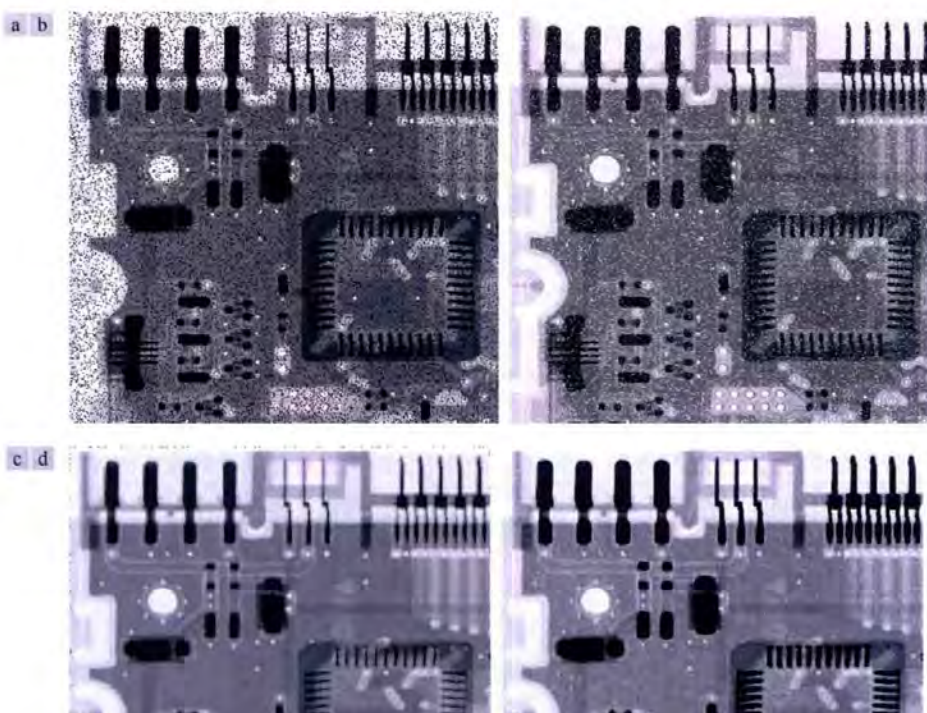






图 5.8 (a)被概率为 0.1 的胡椒噪声污染的图像；(b)被相同概率的盐粒噪声污染的图像；(c)使用大小为  $3 \times 3$ 、 $Q=1.5$  的反谐波平均滤波器对图(a)滤波后的结果；(d)使用  $Q=-1.5$  的反谐波平均滤波器对图(b)滤波后的结果（续）

总之，算术平均滤波器和几何均值滤波器（尤其是后者）更适合于处理高斯噪声或均匀随机噪声。反谐波平均滤波器更适合于处理冲激噪声，但存在一个缺点，即必须要知道噪声是暗噪声还是亮噪声，以便为  $Q$  选择合适的符号。若选错了  $Q$  的符号，则会导致灾难性的后果，如图 5.9 所示。下面几节讨论一些能够克服这一缺点的滤波器。

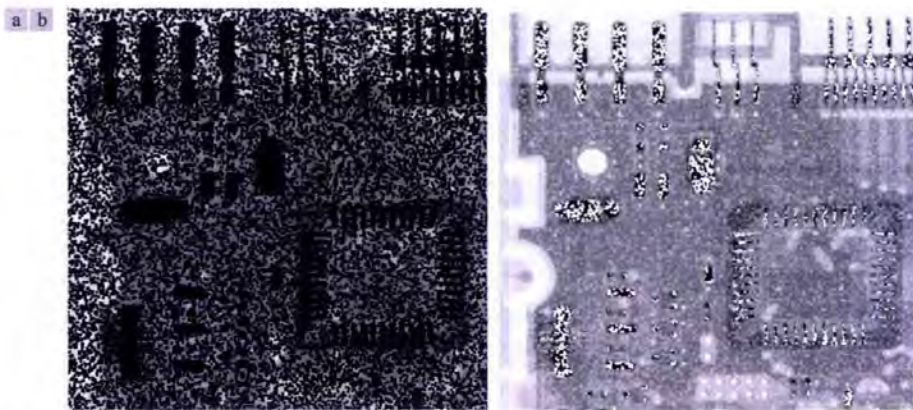


图 5.9 在反谐波滤波中错误选择符号的结果：(a)用大小为  $3 \times 3$ 、 $Q=-1.5$  的反谐波滤波器对图 5.8(a)滤波后的结果；(b)用  $Q=1.5$  对图 5.8(b)滤波后的结果

## 4.2.2 次序滤波器

次序滤波器的响应基于滤波器所围邻域中的像素值的次序，主要分为以下几种：

(记  $g(x, y)$  为退化图像)

### • ① 中值滤波器

记  $N_{xy}$  为以  $(x, y)$  为中心，大小为  $m \times n$  (设  $m, n$  均为奇数) 的矩形窗口中的坐标集合。

基于中值滤波器的复原图像  $\hat{f}(x, y)$  的定义为：

$$\hat{f}(x, y) := \text{median}\{g(s, t)\}_{(s, t) \in N_{xy}}$$

与大小相同的线性平滑滤波器相比，它能有效地降低某些随机噪声，且模糊度要小得多。

而且它可以很好地消除椒盐噪声 (无论是单极冲激噪声还是双极冲激噪声)

(不过这要求椒盐噪声的空间密度比较低，具体来说  $p_{\text{pepper}}, p_{\text{salt}} < 0.2$ )

它是在图像处理中最常使用的次序滤波器。

中值可以从一个位置到下一个位置迭代地更新，从而减少计算开销。

### • ② 最大值滤波器

记  $N_{xy}$  为以  $(x, y)$  为中心，大小为  $m \times n$  (设  $m, n$  均为奇数) 的矩形窗口中的坐标集合。

基于最大值滤波器的复原图像  $\hat{f}(x, y)$  的定义为：

$$\hat{f}(x, y) := \max_{(s, t) \in N_{xy}} \{g(s, t)\}$$

这种滤波器可用于找到图像中的最亮点，或用于削弱与明亮区域相邻的暗色区域，或用于去除胡椒噪声。

最大值可以从一个位置到下一个位置迭代地更新，从而减少计算开销。

基于最小值滤波器的复原图像  $\hat{f}(x, y)$  的定义为：

$$\hat{f}(x, y) := \min_{(s, t) \in N_{xy}} \{g(s, t)\}$$

这种滤波器可用于找到图像中的最暗点，或用于削弱与暗色区域相邻的明亮区域，或用于去除盐粒噪声。

最小值可以从一个位置到下一个位置迭代地更新，从而减少计算开销。

- ③ 最值中点滤波器

记  $N_{xy}$  为以  $(x, y)$  为中心, 大小为  $m \times n$  (设  $m, n$  均为奇数) 的矩形窗口中的坐标集合.

基于最值中点滤波器的复原图像  $\hat{f}(x, y)$  的定义为:

$$\hat{f}(x, y) := \frac{1}{2} \left[ \min_{(s,t) \in N_{xy}} \{g(s, t)\} + \max_{(s,t) \in N_{xy}} \{g(s, t)\} \right]$$

它非常适合处理随机分布的噪声, 如 Gauss 噪声或均匀噪声.

最值可以从一个位置到下一个位置迭代地更新, 从而减少计算开销.

- ④ 修正算术均值滤波器

记  $N_{xy}$  为以  $(x, y)$  为中心, 大小为  $m \times n$  (设  $m, n$  均为奇数) 的矩形窗口中的坐标集合.

给定整数  $d \in \{0, \dots, mn - 1\}$

记删除  $N_{xy}$  中  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  个最低灰度值和  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  个最高灰度值得到的邻域为  $N_{xy}^{\text{trimmed}}$

则基于修正算术均值滤波器的复原图像  $\hat{f}(x, y)$  的定义为:

$$\hat{f}(x, y) := \frac{1}{mn - d} \sum_{(s,t) \in N_{xy}^{\text{trimmed}}} g(s, t)$$

当  $d = 0$  时, 这种滤波器即为算术平均滤波器.

当  $d = mn - 1$  时, 这种滤波器即为中值滤波器.

当  $d$  取其他值时, 修正算术均值滤波器适合处理混合噪声 (例如 Gauss 噪声和椒盐噪声构成的混合噪声)



### 例 5.3 使用统计排序滤波器的图像降噪。

图 5.10(a)是被概率为  $P_s = P_p = 0.1$  的椒盐噪声污染的电路板图像。图 5.10(b)是用大小为  $3 \times 3$  的中值滤波器对图像滤波后的结果。对图 5.10(a)的改进显而易见,但有些噪声点仍然清晰可见。使用中值滤波器[对图 5.10(b)中的图像]再次滤波后,消除了大部分噪声点,只剩下很少的一些几乎看不见的噪声点。图像经过第三次中值滤波后,完全消除了这些噪声点。这些结果很好地说明了中值滤波器处理类冲激加性噪声的性能。记住,使用中值滤波器对图像反复滤波会使图像变模糊,因此滤波次数不能太多。

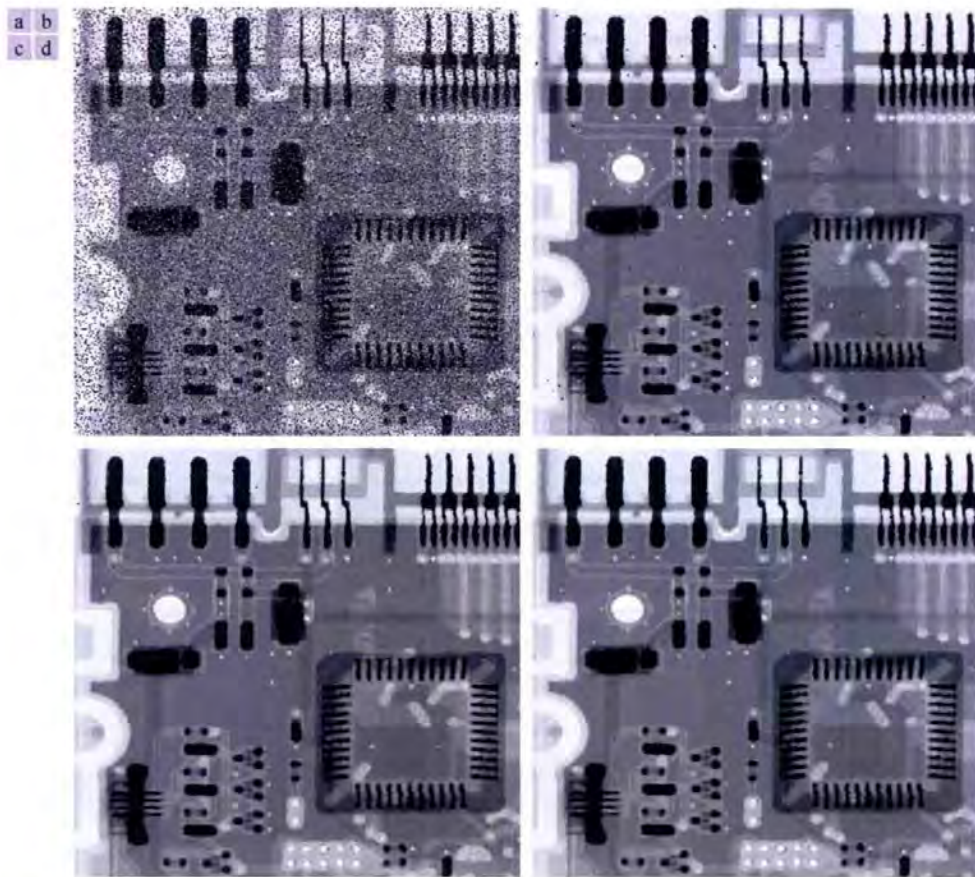


图 5.10 (a)被概率为  $P_s = P_p = 0.1$  的椒盐噪声污染的图像; (b)使用大小为  $3 \times 3$  的中值滤波器对图像滤波一次后的结果; (c)使用该滤波器对图(b)滤波后的结果; (d)使用相同的滤波器对图(c)滤波后的结果

图 5.11(a)是用最大值滤波器对图 5.8(a)所示“胡椒”噪声图像滤波后的结果。这种滤波器非常适合于去除图像中的“胡椒”噪声,但同时也去除了暗色物体边框中的一些黑色像素(即把这些像素设置成了亮灰度)。图 5.11(b)是用最小值滤波器对图 5.8(b)滤波后的结果。此时,最小值滤波器的降噪性能要好于最大值滤波器,但它同时也去除了明亮物体边框中的一些白色像素,使得明亮物体变小,某些暗色物体变大(如图像顶部的指状连接片),因为围绕这些物体的白点被设置成了暗灰度。

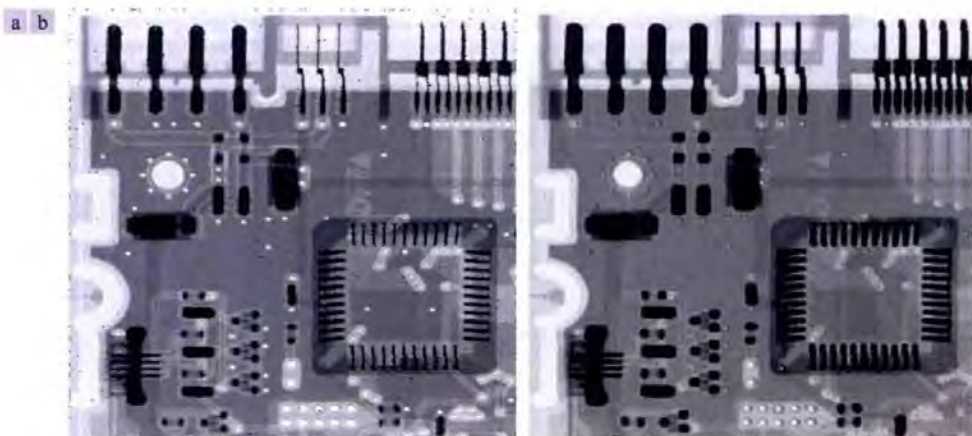


图 5.11 (a)使用大小为  $3 \times 3$  的最大值滤波器对图 5.8(a)滤波后的结果; (b)使用相同大小的最小值滤波器对图 5.8(b)滤波后的结果

下面说明修正阿尔法滤波器。图 5.12(a)这次是被均值为 0、方差为 800 的加性均匀噪声污染的图像。如图 5.12(b)所示,这种噪声污染较为严重,因为它上叠加了概率为  $P_s = P_p = 0.1$  的椒盐噪声。使用更大的滤



图 5.12(a)为原图，它并未受到任何噪声污染，且为灰度且加上噪声为  $4_s + 4_p = 0.1$  的椒盐噪声。

滤波器对这幅被严重污染的图像滤波是合适的。图 5.12(c)到图 5.12(f)分别是用大小为  $5 \times 5$  的算术平均、几何均值、中值和修正 ( $d = 6$ ) 阿尔法均值滤波器对原图像滤波后的结果。不出所料，由于存在冲激噪声，算术平均滤波器和几何均值滤波器（尤其是后者）并未起到良好的作用。中值滤波器和修正阿尔法滤波器的降噪效果要好得多，其中修正阿尔法滤波器的效果最好。例如，使用修正阿尔法滤波器滤波后，图 5.12(f) 左上角的第 4 个指状连接片更平滑。这并不令人意外，因为  $d$  值越大，修正阿尔法滤波器的性能越接近于中值滤波器，但仍然保留了一些平滑性能。

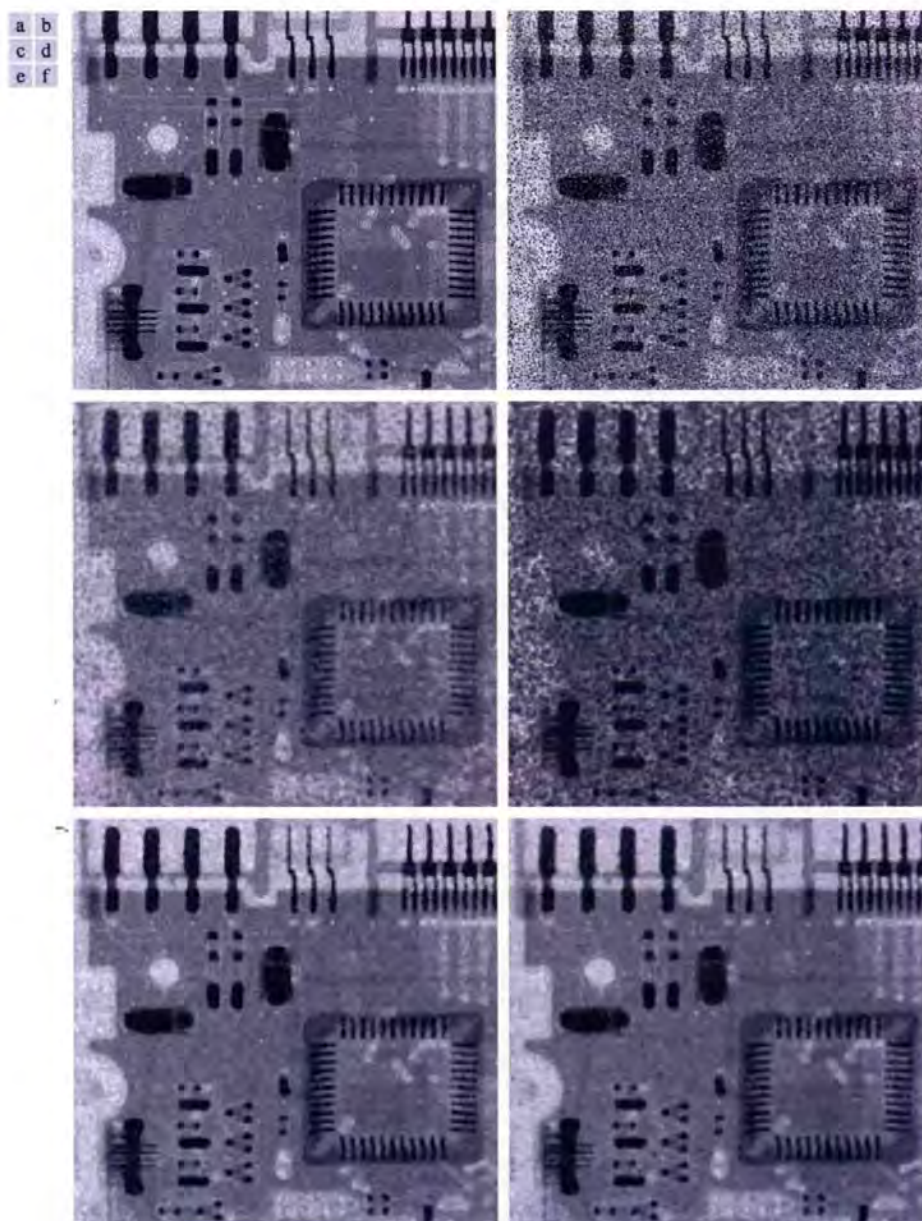


图 5.12 (a)被加性均匀噪声污染的图像；(b)再被加性椒盐噪声污染的图像；(c)~(f)使用大小为  $5 \times 5$  的如下滤波器对图(b)滤波后的结果：(c)算术平均滤波器，(d)几何均值滤波器，(e)中值滤波器，(f)  $d = 6$  的修正阿尔法均值滤波器

### 4.2.3 自适应滤波器

本节介绍两个自适应滤波器，它们的特性会根据  $m \times n$  矩形邻域  $N_{xy}$  内图像的统计特性变化。自适应滤波器的性能要优于前面讨论的所有滤波器，但代价就是增大了滤波器复杂度。

#### (1) 自适应局部降噪滤波器

记噪声的方差为  $\sigma_n^2$  (可通过选择图像中的平坦区域计算噪声的方差)

记矩形邻域  $N_{xy}$  的归一化局部灰度直方图为  $p_{xy}$  (灰度范围为  $[0, L - 1]$ , 灰度值为  $r_0, \dots, r_{L-1}$ )

则局部均值和局部方差为  $\mu_{xy}$  和  $\sigma_{xy}^2$ ：



$$\mu_{xy} := \sum_{i=0}^{L-1} r_i p_{xy}(r_i)$$

$$\sigma_{xy}^2 := \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - \mu_{xy})^2 p_{xy}(r_i)$$

简单起见，我们合理假设局部方差  $\sigma_{xy}^2$  总是大于等于噪声方差  $\sigma_\eta^2$  (尽管在实际应用中这个假设可能会被违反)  
我们希望自适应局部降噪滤波器具有以下性能:

- ① 若  $\sigma_\eta^2 = 0$ , 则滤波器仅返回  $g(x, y)$   
(噪声方差为零时图像在该点处并未退化)
- ② 若局部方差  $\sigma_{xy}^2$  远大于噪声方差  $\sigma_\eta^2$ , 则滤波器返回一个接近于  $g(x, y)$  的值.  
(高局部方差通常与边缘有关, 应当保留这些边缘)
- ③ 若局部方差  $\sigma_{xy}^2$  约等于噪声方差  $\sigma_\eta^2$ , 则滤波器返回局部均值  $\mu_{xy}$

现在我们给出自适应局部降噪滤波器的表达式:

$$\hat{f}(x, y) := g(x, y) - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_{xy}^2} [g(x, y) - \mu_{xy}]$$

#### 例 5.4 使用自适应局部降噪滤波器降低图像的噪声。

图 5.13(a)是被均值为 0、方差为 1000 的加性高斯噪声污染的电路板图像。虽然图像中的噪声污染很严重，但它却是比较相对滤波器性能的一个理想测试平台。图 5.13(b)是用大小为  $7 \times 7$  的算术平均滤波器对原图像滤波后的结果。噪声被平滑，但代价是图像被严重模糊。类似的说明适用于图 5.13(c)，它是用大小仍为  $7 \times 7$  的几何均值滤波器对噪声图像滤波后的结果。两幅滤波后的图像之间的不同类似于例 5.2 中的讨论，即只存在模糊程度的不同。

图 5.13(d)是用  $\sigma_\eta^2 = 1000$  的自适应滤波器 [见式(5.32)] 对图像滤波后的结果。与前两个滤波器相比，这个结果的改进非常明显。在整体降噪方面，自适应滤波器的滤波效果类似于算术平均滤波器和几何均值滤波器，但使用自适应滤波器滤波后的图像要清晰得多。例如，在图 5.13(d)中，图像顶部的指状连接片就更为清晰。其他特征，如各个小孔和左下方较暗元件的 8 根引脚等，在图 5.13(d)中更加清楚。这些结果是使用自适应滤波器所能得到的典型结果。如前所述，性能得到提升的代价是增大了滤波器的复杂度。

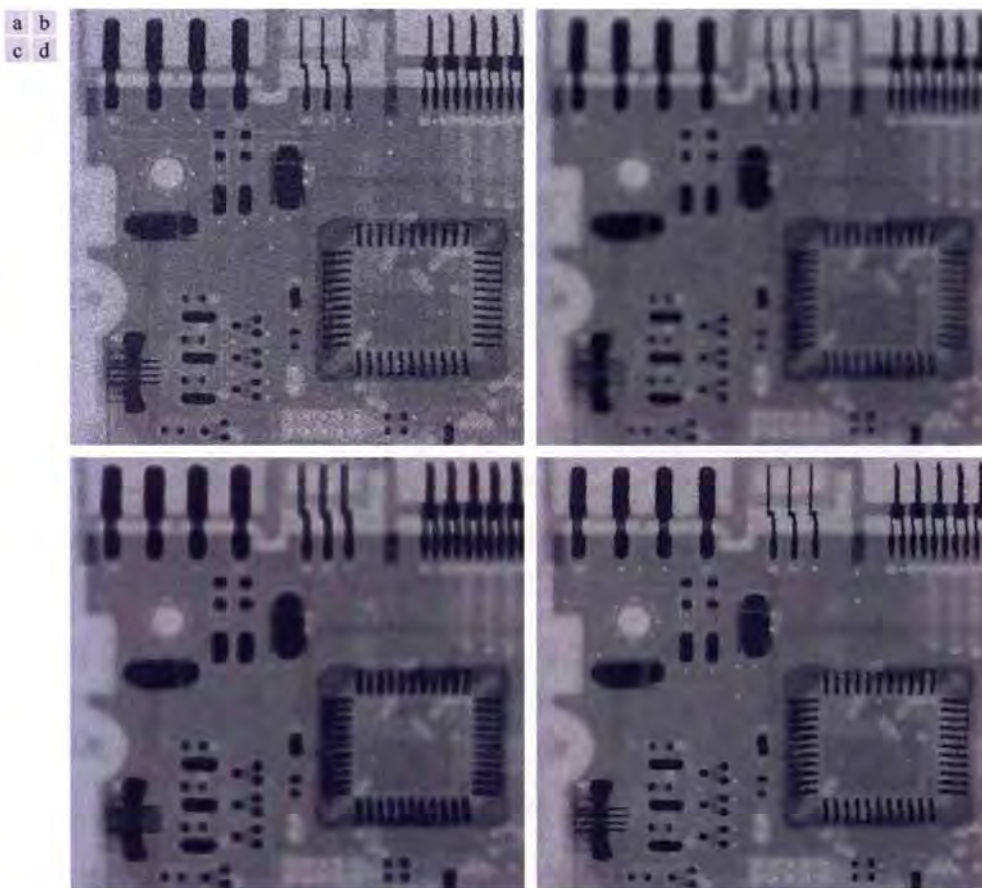


图 5.13 (a)被均值为 0、方差为 1000 的加性高斯噪声污染的图像；(b)算术平均滤波后的结果；(c)几何均值滤波后的结果；(d)自适应降噪滤波后的结果。所有滤波器的大小均为  $7 \times 7$

上面的结果使用了与噪声完全匹配的  $\sigma_\eta^2$  值。 $\sigma_\eta^2$  未知且使用的估计值太低时，算法会因校正量小于应有的值而返回与原图像非常接近的图像。估计值太高会使得方差的比率在 1.0 处被削平，与正常情况相比，算法会更频繁地从图像中减去平均值。若允许为负值，且最后重新标定图像，则如前所述，结果将损失图像的动态范围。 ■

## (2) 自适应中值滤波器

记矩形邻域  $N_{xy}$  的最小灰度值为  $z_{\min}$ ，最大灰度值为  $z_{\max}$ ，灰度中值为  $z_{\text{med}}$ 。

- ① 若  $z_{\min} < z_{\text{med}} < z_{\max}$ ，则移步 ②  
否则增大  $N_{xy}$  的尺寸，再进行 ①，直至移步 ② 或达到最大尺寸。  
达到最大尺寸时输出  $z_{\text{med}}$   
(也可以输出  $z_{xy}$ ，这样做的结果更清晰，但无法检测到常数背景中嵌入的盐粒或胡椒噪声)



- ② 若  $z_{\min} < z_{xy} < z_{\max}$ , 则输出  $z_{xy}$   
否则输出  $z_{\text{med}}$

最值和中值可以从一个位置到下一个位置迭代地更新, 从而减少计算开销。

#### 例 5.5 使用自适应中值滤波器降低图像的噪声。

图 5.14(a)是被概率为  $P_s = P_p = 0.25$  的椒盐噪声污染的电路板图像, 这一概率是图 5.10(a)中所用噪声概率的 2.5 倍。图像中的噪声水平非常高, 它模糊了图像中的大部分细节。为便于比较, 我们首先使用一个大小为  $7 \times 7$  的中值滤波器对图像进行滤波, 此时要求使用最小滤波器消除大部分可见冲激噪声。图 5.14(b)显示了滤波后的结果。虽然有效地消除了噪声, 但该滤波器明显损失了图像中的细节。例如, 图像顶部的一些指状连接片出现了失真或断裂, 其他图像细节也同样出现了失真。

图 5.14(c)是用  $S_{\max} = 7$  的自适应中值滤波器对图像滤波后的结果。自适应中值滤波器的降噪性能类似于中值滤波器, 但在保留清晰度和细节方面做得更好。指状连接片几乎没有失真, 使用中值滤波器后被模糊或失真而无法识别的一些特征, 在图 5.14(c)中要好得多和清晰得多。两个明显的例子是穿透主板的白色小孔洞及图像左下象限中有着 8 根引脚的黑色元件。

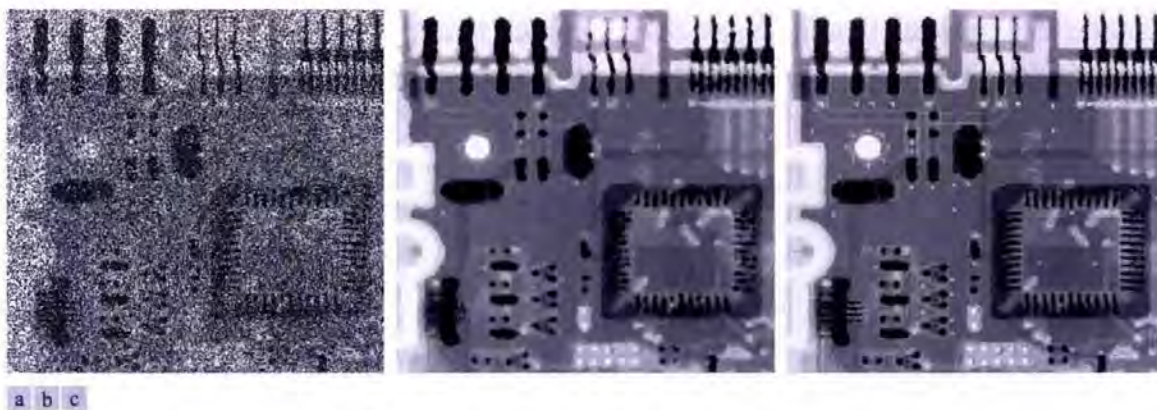


图 5.14 (a)被概率为  $P_s = P_p = 0.25$  的椒盐噪声污染的图像; (b)使用大小为  $7 \times 7$  的中值滤波器对图像滤波后的结果; (c)使用  $S_{\max} = 7$  的自适应中值滤波器对图像滤波后的结果

考虑到图 5.14(a)中高水平的噪声, 自适应算法的滤波性能已非常好。允许选择的最大  $S_{xy}$  取决于具体的应用, 但通过试验各种大小的标准中值滤波器, 可合理地估计一个初值, 以便为自适应算法的期望性能奠定基础。

## 4.3 频率域滤波

使用频率域技术可以有效地分析并滤除周期噪声。

在 Fourier 变换中, 周期噪声在对应其周期的频率处表现为集中突发的能量。

我们可以使用陷波带阻/带通滤波器复原被周期噪声污染的图像。

### 4.3.1 陷波滤波器

**陷波滤波器** (notch filters) 是最有用的选择性滤波器, 它可以选择性地修改 DFT 的局部区域。

陷波滤波器阻止 (或通过) 事先定义的频率矩形邻域中的频率。

由于零相移滤波器必须中心  $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$  对称,

故中心为  $(\frac{M}{2} + \mu_0, \frac{N}{2} + \nu_0)$  的陷波滤波器传递函数在  $(\frac{M}{2} - \mu_0, \frac{N}{2} - \nu_0)$  位置必须有一个对应的陷波。

**陷波带阻滤波器** (notch reject filter) 传递函数可用中心被平移到陷波滤波中心的高通滤波器函数的乘积来产生。其一般形式为:

$$\tilde{h}_{\text{NR}}(\mu, \nu) := \prod_{k=1}^K \tilde{h}_k(\mu, \nu) \tilde{h}_{-k}(\mu, \nu)$$

其中  $\tilde{h}_k(\mu, \nu)$  和  $\tilde{h}_{-k}(\mu, \nu)$  是同形的高通滤波器传递函数, 中心分别为  $(\frac{M}{2} + \mu_k, \frac{N}{2} + \nu_k)$  和  $(\frac{M}{2} - \mu_k, \frac{N}{2} - \nu_k)$

例如包含  $K$  个陷波对的 Butterworth 陷波带阻滤波器:

$$\tilde{h}_{\text{NR}}(\mu, \nu) := \prod_{k=1}^K \left\{ \frac{1}{1 + (d(\mu - \mu_k, \nu - \nu_k)/d_k)^{2n}} \right\} \left\{ \frac{1}{1 + (d(\mu + \mu_k, \nu + \nu_k)/d_k)^{2n}} \right\}$$

其中  $d_k$  为第  $k$  个陷波对的截止频率,  $d(\mu - \mu_k, \nu - \nu_k)$  和  $d(\mu + \mu_k, \nu + \nu_k)$  为距离函数:

$$d(\mu - \mu_k, \nu - \nu_k) = \sqrt{\left(\mu - \frac{M}{2} - \mu_k\right)^2 + \left(\nu - \frac{N}{2} - \nu_k\right)^2}$$

$$d(\mu + \mu_k, \nu + \nu_k) = \sqrt{\left(\mu - \frac{M}{2} + \mu_k\right)^2 + \left(\nu - \frac{N}{2} + \nu_k\right)^2}$$

**陷波带通滤波器** (notch pass filter) 可由  $\tilde{h}_{\text{NP}}(\mu, \nu) := 1 - \tilde{h}_{\text{NR}}(\mu, \nu)$  简单得到.

通常来说这种类型的处理是交互完成的, 它直接对得到的 DFT 处理, 而不需要进行填充. 交互处理实际 DFT (相对于必须从填充后的频率值 "平移" 到实际频率值来说) 的优点是, 通常不会出现在滤波处理过程中因未使用填充而导致的任何交叠 (wraparound) 错误.

图 5.15

显示了只有一个陷波对的理想高斯和巴特沃斯陷波带阻滤波器的透视图。如第 4 章所述的那样, 巴特沃斯传递函数的形状再次出现了过渡, 即从理想函数的陡峭形状过渡到高斯传递函数的宽且平滑的形状。

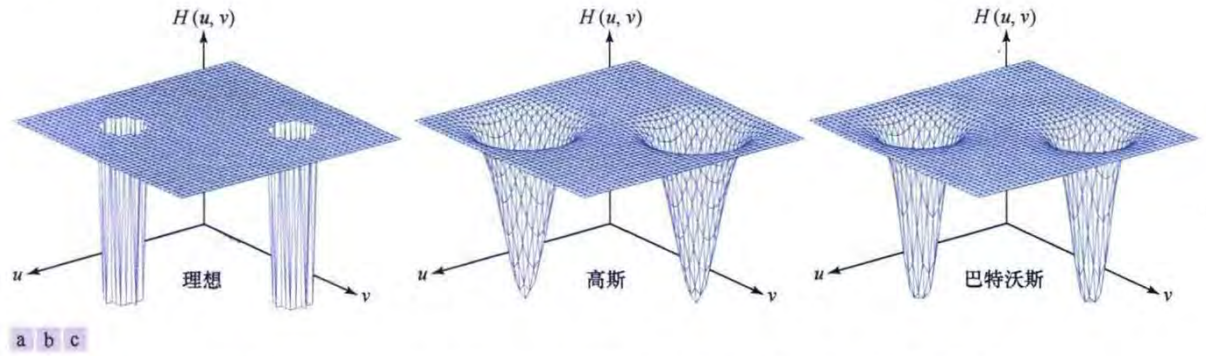


图 5.15 (a)理想、(b)高斯和(c)巴特沃斯陷波带阻滤波器传递函数的透视图



### 例 5.6 使用陷波滤波器降低图像的噪声（消除干扰）。

图 5.16(a)与图 2.45(a)一样，2.6 节中曾用这幅图像介绍了频率域滤波的概念。下面详细介绍对这幅被二维加性正弦波污染的图像进行去噪处理的过程。由表 4.4 可知，纯正弦波的傅里叶变换是一对复共轭冲激，因此我们认为图像的谱在正弦波的两个频率处都有一对亮点。如图 5.16(b)所示，事实的确如此。由于我们能精确地确定这些冲激的位置，因此消除它们非常简单：使用一个陷波滤波器函数对图像滤波即可，但陷波滤波器函数的陷波要与冲激的位置重合。



图 5.16 (a)被正弦干扰污染的图像；(b)显示了干扰导致的突发能量的谱（为便于显示，能量突发已被放大）；(c)用于消除突发能量的陷波滤波器（圆的半径为 2 像素）（细边框不是数据的一部分）；(d)陷波带阻滤波后的结果（原图像由 NASA 提供）

图 5.16(c)显示了一个理想陷波带阻滤波器传递函数，它是一个值为 1 的阵列（显示为白色）和两个值为 0 的小圆形区域（显示为黑色）。图 5.16(d)显示了用这个传递函数对噪声图像滤波后的结果。滤波后的图像中消除了正弦噪声，此前被干扰模糊的一些细节现在清晰可见（如细细的基准点标记及地形和岩层中的细节）。如例 4.25 中说明的那样，获取干扰模式的图像非常简单——只需用 1 减去这个带阻滤波器，将其转换为带通滤波器，然后用得到的带通滤波器对输入图像滤波。图 5.17 显示了滤波后的结果。



图 5.17 使用陷波带通滤波器从图 5.16(a)的 DFT 中提取的正弦模式

图 5.18(a)显示了与图 4.50(a)相同的图像，但覆盖的区域更大（干扰模式相同）。第 4 章中在讨论该图像的低通滤波时，曾指出消除扫描线的影响有更好的方法。随后的陷波滤波方法可在不引入模糊的情况下，明显减少扫描线。不考虑 4.9 节中讨论的原因时，陷波滤波通常会给出更好的结果。



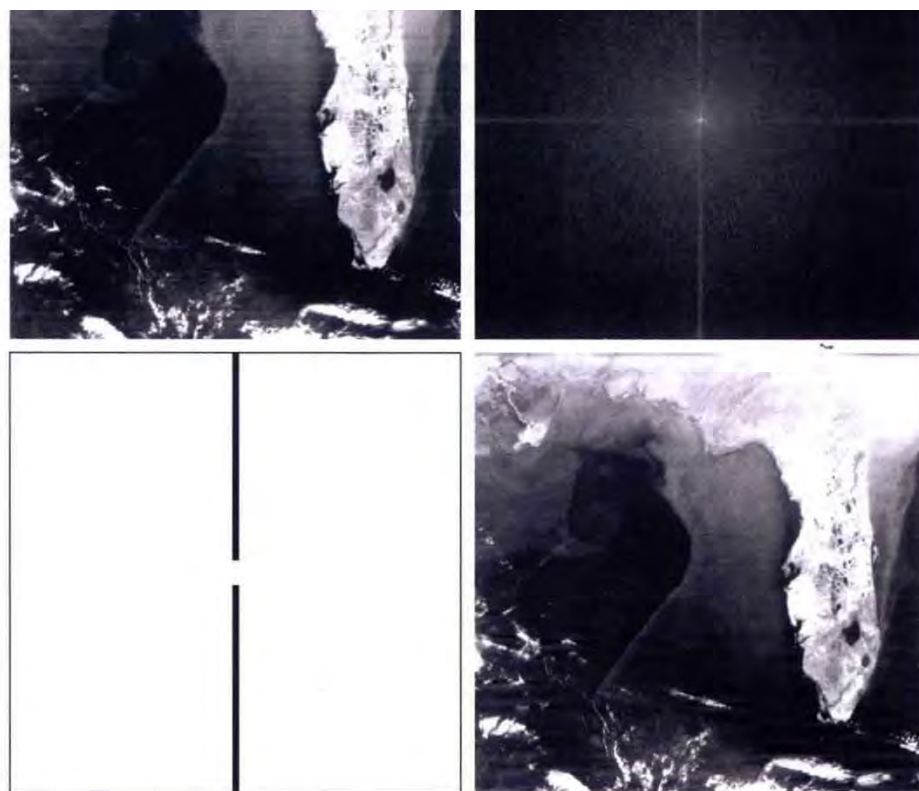


图 5.18 (a)佛罗里达和墨西哥湾的卫星图像（注意水平的传感器扫描线）；(b)图像(a)的谱；(c)陷波带阻滤波器传递函数（黑色细边框不是数据的一部分）；(d)滤波后的图像（原图像由 NOAA 提供）

观察图 5.18(a)中近似水平的噪声模式，我们认为其在频率域中的贡献将集中在 DFT 的纵轴上。然而，这一噪声不足以在纵轴上产生清晰的模式，这在图 5.18(b)所示的谱中非常明显。此时，采用的方法是使用沿纵轴延伸的一个窄矩形陷波滤波器函数，来消除沿纵轴分布的所有干扰分量。在接近原点的位置不进行滤波，以避免消除直流项和低频项，第 4 章曾述及消除直流项和低频项是使得平滑区域之间存在灰度差异的原因。图 5.18(c)显示了我们所用的滤波器传递函数，图 5.18(d)显示了滤波后的结果。大部分细扫描线被消除或明显减弱。为得到噪声模式的图像，我们照例首先将带阻滤波器转换为带通滤波器，然后用带通滤波器对输入图像进行滤波。图 5.19 显示了滤波后的结果。



图 5.19 陷波滤波从图 5.18(a)中提取的噪声模式

### 4.3.2 最佳陷波滤波

#### (Homework 05 Problem 02)

在迄今为止给出的陷波滤波例子中，干扰模式在频率域中的识别和表征都很简单。因此定义陷波滤波器传递函数的启发式规格也很简单。



但当存在多个干扰分量时，滤波器传递函数的启发式规格并不总能被我们接受，因为它们它们在滤波过程中可能会过多地滤除图像信息（当图像没有副本或获取的费用很高时，过多地滤除图像信息就非常不可取）

此外，干扰分量通常不是单频率突发能量，而是携带干扰模式信息的宽裙摆。

有时在正常的变换背景中检测到这些宽裙摆并不容易。

实践中通常使用另一种滤波方法来降低这些退化的影响。

这种方法在最小化复原估计  $\hat{f}(x, y)$  的局部方差方面是最优的。

这种滤波方法的过程如下：

首先分离干扰模式的各个主要贡献，然后从被污染图像中减去该模式的一个可变加权部分。

尽管这一过程是针对特定应用开发的，但基本方法是通用的，并且适用于存在多周期干扰的其他复原任务。

- ① 首先提取干扰模式的主频率分量。

提取方法照例是在每个尖峰位置放一个陷波带通滤波器传递函数  $\tilde{h}_{\text{NP}}(\mu, \nu)$

若将该滤波器构建为只通过与干扰模式相关联的分量，则加性噪声项的二维离散 Fourier 变换为：

$$\tilde{\eta}(\mu, \nu) = \tilde{h}_{\text{NP}}(\mu, \nu) \tilde{g}(\mu, \nu)$$

其中  $\tilde{g}(\mu, \nu)$  是退化图像  $g(x, y)$  的二维离散 Fourier 变换。

而陷波带通滤波器传递函数  $\tilde{h}_{\text{NP}}(\mu, \nu)$  通常是通过观察频谱  $\tilde{g}(\mu, \nu)$  来交互地构建的。

- ② 计算加性噪声项的空间表示。

$$\eta(x, y) = \text{Re}\{\mathcal{F}^{-1}(\tilde{h}_{\text{NP}}(\mu, \nu) \tilde{g}(\mu, \nu))\}$$

- ③ 通过减去  $\eta(x, y)$  的某个加权项来得到  $f(x, y)$  的估计。

$$\hat{f}(x, y) := g(x, y) - w(x, y)\eta(x, y)$$

其中加权函数  $w(x, y)$  待定。

我们通常选取  $w(x, y)$  使  $\hat{f}(x, y)$  在每点  $(x, y)$  的规定邻域上方差最小。

考虑一个中心为  $(x, y)$ ，尺寸为  $m \times n$  (均为奇数) 的邻域  $N_{xy}$ ，假设  $w(x, y)$  在  $N_{xy}$  中为常数。

我们定义：

$$\begin{aligned}\bar{g} &:= \frac{1}{mn} \sum_{(x', y') \in N_{xy}} g(x', y') \\ \bar{\eta} &:= \frac{1}{mn} \sum_{(x', y') \in N_{xy}} \eta(x', y') \\ \sigma_{xy}^2 &:= \frac{1}{mn} \sum_{(x', y') \in N_{xy}} \{[g(x', y') - w(x, y)\eta(x', y')] - (\bar{g} - w(x, y)\bar{\eta})\}^2\end{aligned}$$

以  $w(x, y)$  为优化变量最小化  $\sigma_{xy}^2$  即得：

$$w(x, y) := \frac{\overline{g\eta} - \bar{g}\bar{\eta}}{\bar{\eta}^2 - \bar{\eta}^2}$$

$$\text{where } \begin{cases} \bar{g} := \frac{1}{mn} \sum_{(x', y') \in N_{xy}} g(x', y') \\ \bar{\eta} := \frac{1}{mn} \sum_{(x', y') \in N_{xy}} \eta(x', y') \\ \overline{g\eta} := \frac{1}{mn} \sum_{(x', y') \in N_{xy}} g(x', y')\eta(x', y') \\ \bar{\eta}^2 := \frac{1}{mn} \sum_{(x', y') \in N_{xy}} \eta^2(x', y') \end{cases}$$

### 例 5.7 使用最优陷波滤波器去噪（消除干扰）。

图 5.20(a)是水手 6 号航天器拍摄的火星地形数字图像。这幅图像已被一种半周期的干扰模式污染，因此要比我们前面研究的图像复杂得多。如图 5.20(b)所示，图像的傅里叶谱中有许多由干扰引起的“星状”能量突发。不出所料，这些分量要比我们以前看到的分量更难检测。图 5.21 再次显示了该图像的傅里叶谱，但这次未中心化傅里叶谱。这幅图像清晰地显示了一些干扰分量，因为更为突出的直流项和低频项都移到了谱的左上角。



图 5.20 (a)水手 6 号航天器拍摄的火星地形图像；(b)显示了周期性干扰的傅里叶谱（原图像由 NASA 提供）



图 5.21 图 5.20(a)中图像未中心化的傅里叶谱（原图像由 NASA 提供）

图 5.22(a)显示了由经验丰富的图像分析人员判断后，与干扰相关的各个频谱分量。对这些分量应用一个陷波带通滤波器并且使用式(5.39)后，得到了空间噪声模式  $\eta(x, y)$ ，如图 5.22(b)所示。注意这个模式与图 5.20(a)中噪声结构之间的相似性。



图 5.22 (a) $N(u, v)$ 的傅里叶谱；(b)对应的空间噪声干扰模式  $\eta(x, y)$ （原图像由 NASA 提供）

最后，图 5.23 显示了复原后的图像，它是使用式(5.40)和刚才讨论的干扰模式得到的。函数  $w(x, y)$  是用前几段中说明的步骤计算得到的。如我们看到的那样，周期干扰已从图 5.20(a)中的噪声图像中删除。



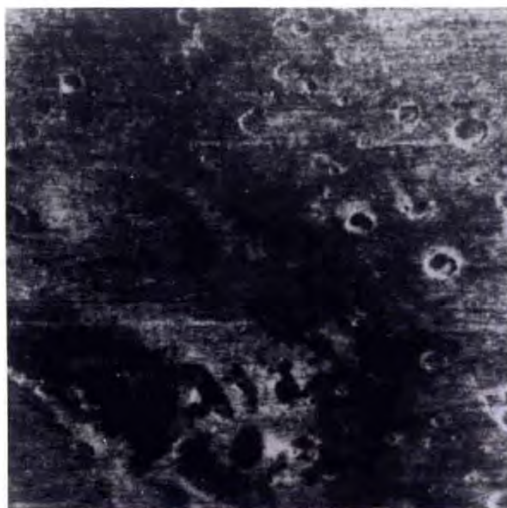


图 5.23 复原后的图像（原图像由 NASA 提供）

## 4.4 估计退化函数

### 4.4.1 试验法

当可用的设备与获取退化图像的设备相似时，原理上是可能获得退化的精确估计的。我们可以获取类似于退化图像的图像，直到获取的图像尽可能接近所要复原的图像为止。然后对一个冲激（小光点）成像，得到退化的冲激响应。（冲激可由一个亮点来模拟，这个点应亮到能降低噪声对可忽略值的影响）

在线性空间不变退化系统的假设下，退化函数可完全由其冲激响应表征：

$$\tilde{h}(\mu, \nu) = \frac{1}{A} \tilde{g}(\mu, \nu)$$

其中  $\tilde{g}(\mu, \nu)$  为退化图像的二维离散 Fourier 变换， $A$  是描述冲激强度的常量（注意冲激函数的二维离散 Fourier 变换是常量）



图 5.24 根据冲激特性估计退化：(a)一个亮冲激（已放大）；(b)退化的冲激

### 4.4.2 建模法

由于在图像复原中的性能较好，退化建模已被人们使用了多年。在某些情况下，模型甚至可以考虑导致退化的环境条件。例如，Hufnagel and Stanley[1964]根据大气湍流的物理特性提出了一个退化模型，这个模型的形式对我们来说很熟悉：

$$H(u, v) = e^{-k(u^2 + v^2)^{5/6}} \quad (5.68)$$

式中， $k$  是与湍流性质有关的常数。除了指数中的  $5/6$  次幂，该式与 4.8 节讨论的高斯低通滤波器传递函数的形式相同。事实上，高斯 LPF 有时用于模拟轻度的均匀模糊。图 5.25 是用式(5.68)并取  $k = 0.0025$ （剧烈湍流）、 $k = 0.001$ （中等湍流）和  $k = 0.00025$ （轻微湍流）来模拟模糊一幅图像时得到的几个例子。所有图像的大小均为  $480 \times 480$  像素。

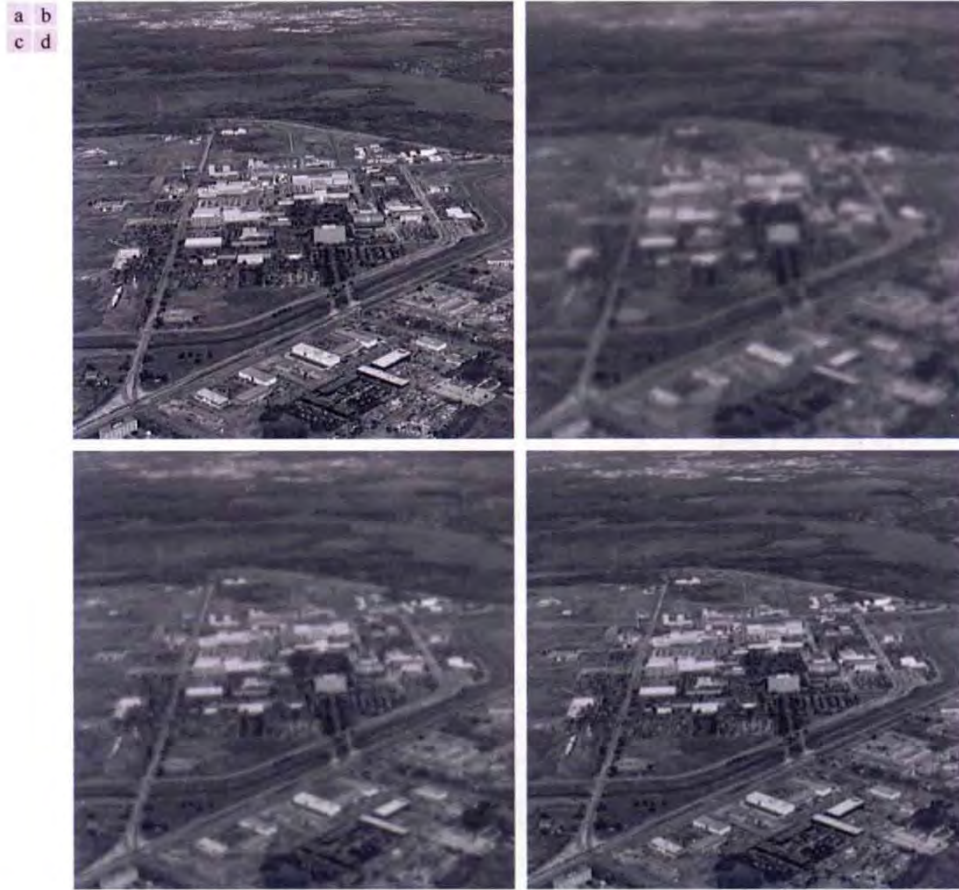


图 5.25 湍流建模：(a) 不可见湍流；(b) 剧烈湍流， $k = 0.0025$ ；(c) 中等湍流， $k = 0.001$ ；(d) 轻微湍流， $k = 0.00025$ 。所有图像的大小均为  $480 \times 480$  像素（原图像由 NASA 提供）

建模就是根据基本原理推导一个数学模型。

考虑图像获取过程中因成像物体相对传感器匀速直线运动造成的模糊退化。

假设图像  $f(x, y)$  相对传感器匀速直线运动，在  $x, y$  方向上的位移函数分别为  $x_0(t)$  和  $y_0(t)$  记录介质上任何一点的总曝光量，是成像系统快门打开期间的瞬时曝光量的积分。

假设快门开关是瞬间发生的，并且光学成像过程是完美的，曝光时间为  $T$  则退化图像为：

$$g(x, y) = \int_0^T f(x - x_0(t), y - y_0(t)) dt$$

其二维连续 Fourier 变换为：

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\mu, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp\{-i2\pi(\mu x + \nu y)\} dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^T f(x - x_0(t), y - y_0(t)) dt \right] \exp\{-i2\pi(\mu x + \nu y)\} dx dy \\
&= \int_0^T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0(t), y - y_0(t)) \exp\{-i2\pi(\mu x + \nu y)\} dx dy \right\} dt \\
&= \int_0^T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0(t), y - y_0(t)) e^{-i2\pi(\mu(x-x_0(t)) + \nu(y-y_0(t)))} dx dy \right\} \cdot e^{-i2\pi(\mu x_0(t) + \nu y_0(t))} dt \\
&= \int_0^T \tilde{f}(\mu, \nu) e^{-i2\pi(\mu x_0(t) + \nu y_0(t))} dt \\
&= \tilde{f}(\mu, \nu) \int_0^T e^{-i2\pi(\mu x_0(t) + \nu y_0(t))} dt
\end{aligned}$$

因此我们可定义退化函数为  $\tilde{h}(\mu, \nu) := \int_0^T e^{-i2\pi(\mu x_0(t) + \nu y_0(t))} dt$

假设  $\begin{cases} x_0(t) := a \frac{t}{T} \\ y_0(t) := b \frac{t}{T} \end{cases}$  则退化函数为:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(\mu, \nu) &:= \int_0^T e^{-i2\pi(\mu x_0(t) + \nu y_0(t))} dt \\
&= \int_0^T \exp\{-i2\pi(\mu a \frac{t}{T} + \nu b \frac{t}{T})\} dt \\
&= \int_0^T \exp\{-\frac{1}{T} i2\pi(\mu a + \nu b)t\} dt \\
&= \frac{T}{-i2\pi(\mu a + \nu b)} \exp\{-\frac{1}{T} i2\pi(\mu a + \nu b)t\} \Big|_0^T \\
&= \frac{T}{-i2\pi(\mu a + \nu b)} [\exp\{-i2\pi(\mu a + \nu b)\} - 1] \\
&= T \frac{\sin(\pi(\mu a + \nu b))}{\pi(\mu a + \nu b)} \exp\{-i\pi(\mu a + \nu b)\}
\end{aligned}$$

为生成一个大小为  $M \times N$  的离散滤波器传递函数, 我们可以在  $\begin{cases} \mu = 0, \dots, M-1 \\ \nu = 0, \dots, N-1 \end{cases}$  处对上式取样.

#### 例 5.8 运动导致的图像模糊。

图 5.26(b) 是一幅被模糊的图像, 其模糊过程如下: 计算图 5.26(a) 中图像的傅里叶变换, 将该变换乘以式(5.77)中的  $H(u, \nu)$ , 再对结果取反变换。图像的大小都为  $688 \times 688$  像素, 并且在式(5.77)中使用的参数为  $a = b = 0.1$  和  $T = 1$ 。如 5.8 节和 5.9 节讨论的那样, 由模糊图像复原原图像存在一些有趣的挑战, 尤其是退化图像中存在噪声时。如 5.5 节末尾提到的那样, 进行所有 DFT 计算时, 我们不对图像进行填充。



图 5.26 (a) 原图像; (b) 使用式(5.77)中的函数 ( $a = b = 0.1$  和  $T = 1$ ) 模糊图像后的结果

## 4.5 复原

## 4.5.1 逆滤波

最简单的复原方法是直接逆滤波，但效果很不理想。

假设退化函数的二维离散 Fourier 变换  $\tilde{h}(\mu, \nu)$  已知，而加性噪声项的二维离散 Fourier 变换  $\tilde{\eta}(\mu, \nu)$  未知。则我们可以得到未退化的图像  $f(x, y)$  的二维离散 Fourier 变换  $\tilde{f}(\mu, \nu)$  的估计：

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{\text{estimate}}(\mu, \nu) &:= \frac{\tilde{g}(\mu, \nu)}{\tilde{h}(\mu, \nu)} \\ &= \frac{\tilde{h}(\mu, \nu)\tilde{f}(\mu, \nu) + \tilde{\eta}(\mu, \nu)}{\tilde{h}(\mu, \nu)} \\ &= \tilde{f}(\mu, \nu) + \frac{\tilde{\eta}(\mu, \nu)}{\tilde{h}(\mu, \nu)}\end{aligned}$$

即使知道退化函数的二维离散 Fourier 变换  $\tilde{h}(\mu, \nu)$ ，也不能准确地复原未退化的图像，因为加性噪声项的二维离散 Fourier 变换  $\tilde{\eta}(\mu, \nu)$  是未知的。

此外，若退化函数的二维离散 Fourier 变换  $\tilde{h}(\mu, \nu)$  是接近于零的值，则比率  $\frac{\tilde{\eta}(\mu, \nu)}{\tilde{h}(\mu, \nu)}$  很容易支配  $\tilde{f}_{\text{estimate}}(\mu, \nu)$  (这是经常出现的情况)

将频率限制到原点附近进行分析，可以减少遇到接近于零的值的的可能性。

---

直接逆滤波的性能一般来说较差：



### 例 5.9 采用逆滤波方法去除图像中的模糊。

图 5.25(b)中的图像是用式(5.78)逆滤波得到的，逆滤波使用了一个退化函数，这个函数与生成该图像时所用的退化函数完全相反。也就是说，逆滤波时所用的退化函数是

$$H(u, v) = e^{-k[(u+M/2)^2 + (v-N/2)^2]^{5/6}}$$

式中， $k = 0.0025$ 。常数  $M/2$  和  $N/2$  是偏移值；如前一章中所述，它们使函数居中，以便与居中的傅里叶变换对应（记住，我们不对这些函数进行填充）。此时， $M = N = 480$ 。我们知道，高斯函数没有零值，因此这里不必关心它。然而，尽管如此，退化值却变得非常小，以致全逆滤波的结果 [见图 5.27(a)] 毫无用处。产生这个无用结果的原因见对式(5.79)的讨论。

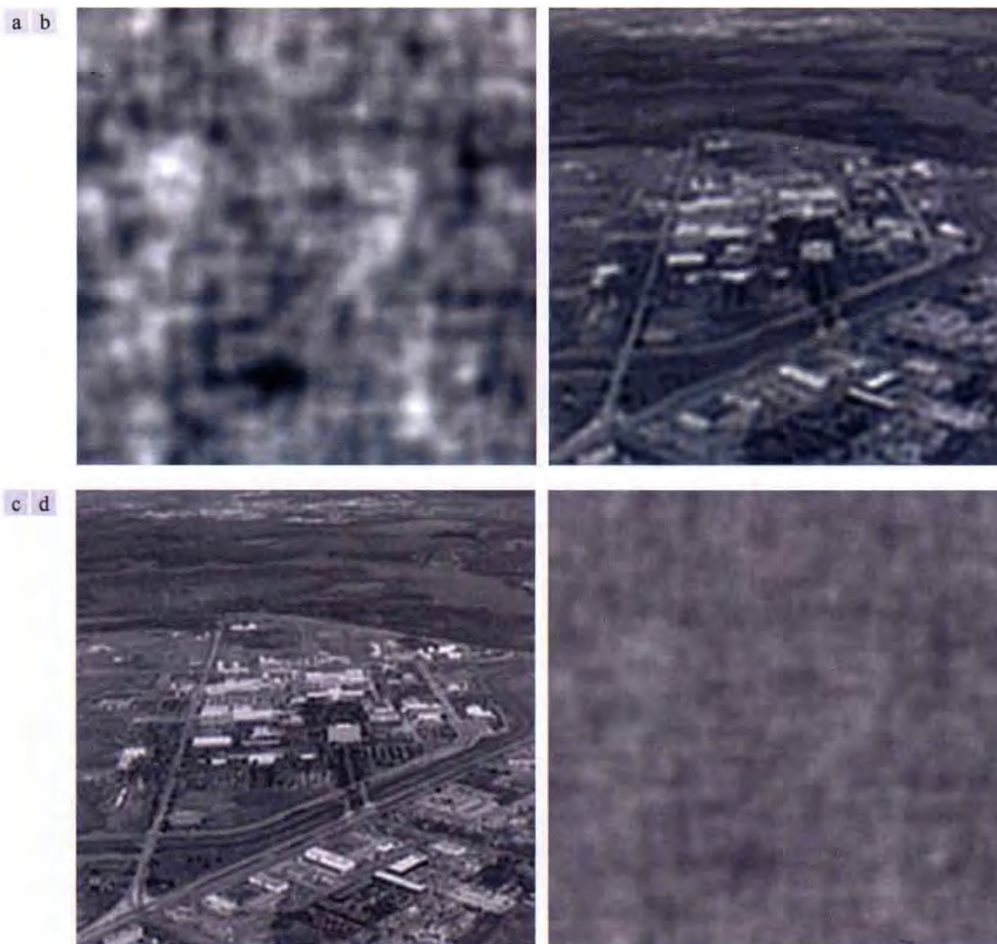


图 5.27 用式(5.78)复原图 5.25(b)：(a)使用全滤波器得到的结果；(b)在半径 40 之外  $H$  截止的结果；(c)在半径 70 之外截止的结果；(d)在半径 85 之外截止的结果

图 5.27(b)到图 5.27(d)分别显示了半径 40, 70 和 85 之外比率  $G(u, v)/H(u, v)$  的不同截止值的结果。截止是通过对这个比值应用一个阶数为 10 的巴特沃斯低通函数来实现的，因此在期望的半径处提供了急剧（但平滑）的过渡。半径为 70 左右时视觉效果最好 [见图 5.27(c)]，半径在 70 以下时图像变得模糊，如图 5.27(b)所示，它是用半径 40 得到的。半径大于 70 时，图像开始退化，如图 5.27(d)所示，它是用半径 85 得到的。在“窗帘”后面的图像中，图像的内容基本可见，但噪声明显地支配着这一结果。进一步增大半径值，会使得图像越来越像图 5.27(a)。

## 4.5.2 Wiener 滤波

Wiener 滤波又称最小均方误差滤波。

它将图像和噪声视为随机变量，

求解未退化图像  $f$  的最优估计  $f_{\text{estimate}}$  使得均方误差  $E[\|f - f_{\text{estimate}}\|_F^2]$  达到最小。

其中  $\|\cdot\|_F$  代表 Frobenius 范数。

$$\tilde{f}_{\text{estimate}}(\mu, \nu) := \left[ \frac{1}{\tilde{h}(\mu, \nu)} \frac{|\tilde{h}(\mu, \nu)|^2}{|\tilde{h}(\mu, \nu)|^2 + |\tilde{\eta}(\mu, \nu)|^2 / |\tilde{f}(\mu, \nu)|^2} \right] \tilde{g}(\mu, \nu)$$

(更多细节请参考 DIP 5.8 节)

**The End**