FDU 泛函分析 附录 A. 常用不等式

A.1 Hölder 不等式

A.1.1 Young 不等式

> **(凸函数的 Jensen 不等式)**
> 若 $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ 是一个凸函数,
> 则对于任意 $\begin{cases}x_1\neq x_2\in\text{dom}(f)\\ \alpha\in(0,1)\end{cases}$ 都有 $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)<\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$ 成立.
>
> 很多著名的不等式都可以通过将 Jensen 不等式应用于具体的凸函数得到.
> (事实上，凸函数和 Jensen 不等式可以构成不等式理论的基础)

对凸函数 $\begin{cases}f(x)=-\log(x)\\ \text{dom}(f)=\mathbb{R}_{++}\end{cases}$ 应用 Jensen 不等式可得:

$$-\log(\theta a+(1-\theta)b)\leq-\theta\log(a)-(1-\theta)\log(b)=-\log\left(a^{\theta}b^{1-\theta}\right)\quad(\forall\, a,b\in\mathbb{R}_{++})$$

不等式两边取指数，则有 $\theta a+(1-\theta)b\geq a^{\theta}b^{(1-\theta)}$ (当 $\theta=\frac{1}{2}$ 时即为**算术-几何平均不等式** $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$)

对于任意 $x,y\geq 0$ 和共轭子标 $p,q>1$ (满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)

取 $\begin{cases}\theta=\frac{1}{p}\\ a=x^p\text{ (于是有 }1-\theta=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}\text{)}\\ b=y^q\end{cases}$，则我们有:

$$\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q\geq(x^p)^{\frac{1}{p}}(y^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$xy\leq\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

这就是 **Young 不等式**，其取等条件为 $x^p=y^q$

A.1.2 级数形式

(Hölder 不等式)

- 设 $x,y\in\mathbb{C}^n$，则我们有:

  $$|x^{\text{H}}y|=\left|\sum_{k=1}^n\bar{x}_ky_k\right|\leq\sum_{k=1}^n|\bar{x}_ky_k|=\sum_{k=1}^n|x_k||y_k|\leq\left(\sum_{k=1}^n|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|x\|_p\|y\|_q$$

  当且仅当 $|x|^p,|y|^q$ 线性相关时取等.
  其中 $p,q>1$ 为共轭子标，满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

- 进一步，令 $n\to\infty$ 即得到如下的直接推论:
  (级数形式的 Hölder 不等式)
  设 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\in l^p$ 和 $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}\in l^q$ (这保证了右式的两个级数收敛, 注意, 有限的正项级数一定收敛)，则我们有:

  $$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\bar{x}_ky_k\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}|\bar{x}_ky_k|=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k||y_k|\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

  其中 (l^p,d_p) 代表 p 次幂可和序列空间 (实数 $p\geq 1$)，其定义如下:

  $$l^p:=\{\{x_k\}_{k=1}^{\infty}:x_k\in\mathbb{C}\text{ for all }k\in\mathbb{Z}_+,\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty\}$$

  $$d_p(x,y):=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Hölder 不等式的证明:
任意给定正整数 n
对凸函数 $\begin{cases} f(x) = -\log(x) \\ \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}_{++} \end{cases}$ 应用 Jensen 不等式可得:

$$-\log(\theta a + (1-\theta) b) \leq -\theta \log(a) - (1-\theta)\log(b) = -\log\left(a^{\theta} b^{1-\theta}\right) \quad (\forall\, a, b \in \mathbb{R}_{++})$$

不等式两边取指数，则有 $\theta a + (1-\theta) b \geq a^{\theta} b^{(1-\theta)}$ (当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时即为**算术-几何平均不等式** $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$)

任意给定 $\begin{cases} x, y \in \mathbb{R}^n \\ p, q > 1 \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{cases}$ 令 $\begin{cases} a = \frac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} \\ b = \frac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^q} \\ \theta = \frac{1}{p} \quad (\text{then } 1 - \theta = \frac{1}{q}) \end{cases}$ $(i = 1, \ldots, n)$ 则有:

$$\left(\frac{|x_i|^p}{\sum\limits_{j=1}^n |x_j|^p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|y_i|^q}{\sum\limits_{j=1}^n |y_j|^q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\sum\limits_{j=1}^n |x_j|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\sum\limits_{j=1}^n |y_j|^q} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

左右两式同时对 i 求和则有:

$$\begin{cases} \mathrm{LHS} = \sum\limits_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^q}\right)^{\frac{1}{q}} \right\} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |y_i|}{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \\ \mathrm{RHS} = \sum\limits_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^q} \right\} = \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{cases}$$

因此有 $\sum\limits_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq (\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum\limits_{i=1}^n |y_i|^q)^{\frac{1}{q}} \quad (\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n)$
于是对于任意 $x, y \in \mathbb{C}^n$ 都有:

$$\begin{aligned} |x^{\mathrm{H}} y| &= \left|\sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i\right| && (\text{triangle inequality}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\bar{x}_i y_i| && (\text{note that } |\bar{a}b| = |\bar{a}||b| = |a||b| \text{ for all } a, b \in \mathbb{C}) \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i||y_i| && (\text{use the conclusion above}) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|x\|_p \|y\|_q \end{aligned}$$

上述不等号都当且仅当 $|x|^p, |y|^q$ 线性相关时取等.
Hölder 不等式得证.

A.1.3 级数形式 (推广)

(Hölder 不等式的推广)

- 设 m, n 为正整数，$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$，且 $p_1, \ldots, p_m \in [1, +\infty]$ 满足 $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$
  则我们有:

$$\left|\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m a_{ij}\right| \leq \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m |a_{ij}| \leq \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}$$

- 进一步，令 $n \to \infty$，则我们得到如下的直接推论:
  设 $\{x_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}, \ldots, \{x_k^{(m)}\}_{k=1}^{\infty}$ 分别为 $l^{p_1}, \ldots, l^{p_m}$ 中的序列 (这保证了右式的 m 个级数都是收敛的)，则我们有:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}a_{ik}\right|\le\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}|a_{ik}|\le\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}$$

其中 (l^p,d_p) 代表 p 次幂可和序列空间 (实数 $p\ge 1$)，其定义如下:

$$l^p:=\{\{x_k\}_{k=1}^{\infty}:x_k\in\mathbb{C}\text{ for all }k\in\mathbb{Z}_+,\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty\}$$

$$d_p(x,y):=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

证明:

对于任意给定的正整数 n

对凸函数 $\begin{cases}f(x)=-\log(x)\\ \operatorname{dom}(f)=\mathbb{R}_{++}\end{cases}$ 应用 Jensen 不等式可得:

$$-\log\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}x_i\right)\le-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}\log(x_i)=-\log\left(\prod_{i=1}^{m}x_i^{\frac{1}{p_i}}\right)$$

不等式两边取指数，则有:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}x_i\ge\prod_{i=1}^{m}x_i^{\frac{1}{p_i}}$$

给定 $j\in\{1,\dots,n\}$，令 $x_i=\frac{|a_{ij}|^{p_i}}{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p_i}}$，则我们有:

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{1}{p_i}\frac{|a_{ij}|^{p_i}}{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p_i}}\right\}\ge\prod_{i=1}^{m}\left\{\left(\frac{|a_{ij}|^{p_i}}{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p_i}}\right)^{\frac{1}{p_i}}\right\}$$

左右两式对 $j=1,\dots,n$ 求和，则我们有:

$$\begin{aligned}\text{LHS}&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{1}{p_i}\frac{|a_{ij}|^{p_i}}{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p_i}}\right\}\\&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{p_i}\frac{|a_{ij}|^{p_i}}{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p_i}}\right\}\\&=\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{1}{p_i}\frac{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p_i}}{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p_i}}\right\}\\&=\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{1}{p_i}\cdot 1\right\}\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{RHS}&=\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\left\{\left(\frac{|a_{ij}|^{p_i}}{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p_i}}\right)^{\frac{1}{p_i}}\right\}\\&=\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\left\{\frac{|a_{ij}|}{(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p_i})^{\frac{1}{p_i}}}\right\}\\&=\frac{\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}|a_{ij}|}{\prod_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p_i})^{\frac{1}{p_i}}}\end{aligned}$$

根据 $\text{LHS}\ge\text{RHS}$ 可知:

$$1=\text{LHS}\ge\text{RHS}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}|a_{ij}|}{\prod_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p_i})^{\frac{1}{p_i}}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}|a_{ij}|\le\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}$$

因此我们有:

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}a_{ij}\right| &\le \sum_{j=1}^{n}\left|\prod_{i=1}^{m}a_{ij}\right| \quad (\text{triangle inequality; and note that } |ab|=|a||b| \text{ for all } a,b\in\mathbb{C}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}|a_{ij}| \quad (\text{use the conclusion above}) \\
&\le \prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}
\end{aligned}
$$

A.1.4 积分形式

(积分形式的 Hölder 不等式)
设实数 $p,q>1$ 为共轭子标，满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\Omega$ 为给定的 Lebesgue 可测集
设 $x\in L^p(\Omega)$ 和 $y\in L^q(\Omega)$ (这保证了右式的两个积分收敛, 注意, 有限的非负积分一定收敛)，则我们有:

$$
\left|\int_\Omega xy\right| \le \int_\Omega |xy| = \int_\Omega |x||y| \le \left(\int_\Omega |x|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |y|^q\right)^{\frac{1}{q}}
$$

其中 $(L^p(\Omega),d_p)$ 代表 Ω 上的 p 次幂可积函数空间 (实数 $p\ge 1$)，其定义如下:

$$
L^p(\Omega) := \{x:\Omega\mapsto\mathbb{R}: \int_\Omega |x|^p<\infty\}
$$

$$
d_p(x,y) := \left(\int_\Omega |x-y|^p\right)^{\frac{1}{p}}
$$

证明:
对凸函数 $\begin{cases} f(x)=-\log(x) \\ \operatorname{dom}(f)=\mathbb{R}_{++} \end{cases}$ 应用 Jensen 不等式可得:

$$
-\log(\theta a+(1-\theta)b) \le -\theta\log(a)-(1-\theta)\log(b) = -\log\left(a^\theta b^{1-\theta}\right) \quad (\forall\, a,b\in\mathbb{R}_{++})
$$

不等式两边取指数，则有 $\theta a+(1-\theta)b\ge a^\theta b^{(1-\theta)}$ (当 $\theta=\frac{1}{2}$ 时即为**算术-几何平均不等式** $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$)

任意给定 $\begin{cases} p,q>1 \\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \\ x\in L^p(\Omega) \\ y\in L^q(\Omega) \end{cases}$ 令 $\begin{cases} a=\frac{|x(t)|^p}{\int_\Omega |x|^p} \\ b=\frac{|y(t)|^q}{\int_\Omega |y|^q} \\ \theta=\frac{1}{p} \quad (\text{then } 1-\theta=\frac{1}{q}) \end{cases}$ $(t\in\Omega)$ 则有:

$$
\left(\frac{|x(t)|^p}{\int_\Omega |x|^p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|y(t)|^q}{\int_\Omega |y|^q}\right)^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p}\frac{|x(t)|^p}{\int_\Omega |x|^p}+\frac{1}{q}\frac{|y(t)|^q}{\int_\Omega |y|^q} \quad (t\in\Omega)
$$

左右两式同时对 $t\in\Omega$ 进行 Lebesgue 积分则有:

$$
\begin{cases}
\text{LHS} = \int_\Omega\{(\frac{|x|^p}{\int_\Omega |x|^p})^{\frac{1}{p}}(\frac{|y|^q}{\int_\Omega |y|^q})^{\frac{1}{q}}\} = \frac{\int_\Omega |x||y|}{(\int_\Omega |x|^p)^{\frac{1}{p}}(\int_\Omega |y|^q)^{\frac{1}{q}}} \\
\text{RHS} = \int_\Omega\{\frac{1}{p}\frac{|x|^p}{\int_\Omega |x|^p}+\frac{1}{q}\frac{|y|^q}{\int_\Omega |y|^q}\} = \frac{1}{p}\frac{\int_\Omega |x|^p}{\int_\Omega |x|^p}+\frac{1}{q}\frac{\int_\Omega |y|^q}{\int_\Omega |y|^q} = 1
\end{cases}
$$

因此有 $\int_\Omega |x||y| \le (\int_\Omega |x|^p)^{\frac{1}{p}}(\int_\Omega |y|^q)^{\frac{1}{q}}$
于是对于任意 $x\in L^p(\Omega), y\in L^q(\Omega)$ 都有:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega xy\right| &\le \int_\Omega |xy| \quad (\text{triangle inequality}) \\
&= \int_\Omega |x||y| \quad (\text{use the conclusion above}) \\
&\le \left(\int_\Omega |x|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |y|^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

命题得证.

A.2 Minkowski 不等式

A.2.1 级数形式

- 任意给定实数 $p \geq 1$ 和正整数 $n \in \mathbb{Z}_+$，对于任意 $x, y \in \mathbb{C}^n$ 我们都有:

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

  当且仅当 x, y 线性相关时取等.

- 进一步，令 $n \to \infty$ 可得到如下的直接推论:
  (级数形式的 Minkowski 不等式)
  设 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$ (这保证了右式的两个级数收敛, 注意, 有限的正项级数一定收敛)，则我们有:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

  其中 (l^p, d_p) 代表 p 次幂可和序列空间 (实数 $p \geq 1$)，其定义如下:

$$l^p := \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} : x_k \in \mathbb{C} \text{ for all } k \in \mathbb{Z}_+, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$$

$$d_p(x,y) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Minkowski 不等式的证明:
任意给定正整数 n 和 $x, y \in \mathbb{C}^n$
当 $p = 1$ 时我们有:

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

当且仅当 x, y 线性相关时取等.
因此命题对 $p = 1$ 的情况成立.

当 $p > 1$ 时，令 $q > 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则对于任意 $x, y \in \mathbb{C}^n$ 都有:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1} \quad \text{(triangle inequality)} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \quad \text{(Holder inequality)} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p) \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \quad \text{(note that } (p-1)q = p \text{ and } \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}) \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p) \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{p}\right]^{1-\frac{1}{p}} \\
&\Rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p \\
&\Rightarrow \|x+y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p
\end{aligned}$$

上述不等号都当且仅当 x, y 线性相关时取等.
因此命题对 $p > 1$ 的情况也成立.
综上所述，Minkowski 不等式得证.

A.2.2 积分形式

(积分形式的 Hölder 不等式)
设实数 $p \geq 1$，Ω 为给定的 Lebesgue 可测集
设 $x, y \in L^p(\Omega)$ (这保证了右式的两个积分收敛, 注意, 有限的非负积分一定收敛)，则我们有:

$$\left(\int_{\Omega}|x+y|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega}|x|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega}|y|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中 (L^p, d_p) 代表 p 次幂可积函数空间 (实数 $p \geq 1$)，其定义如下:

$$L^p(\Omega) := \{x : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \int_{\Omega}|x|^p < \infty\}$$

$$d_p(x,y) := \left(\int_{\Omega}|x-y|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

证明:
当 $p=1$ 时，对于任意 $x, y \in L^p(\Omega)$ 我们都有:

$$\int_{\Omega}|x+y| \leq \int_{\Omega}\{|x|+|y|\} = \int_{\Omega}|x| + \int_{\Omega}|y|$$

因此命题对 $p=1$ 的情况成立.

当 $p>1$ 时，令 $q>1$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则对于任意 $x, y \in L^p(\Omega)$ 我们都有:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}|x+y|^p &\leq \int_{\Omega}|x||x+y|^{p-1} + \int_{\Omega}|y||x+y|^{p-1} \quad \text{(triangle inequality)} \\
&\leq \left(\int_{\Omega}|x|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Omega}|x+y|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{\Omega}|y|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Omega}|x+y|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{(Holder inequality)} \\
&= \left\{\left(\int_{\Omega}|x|\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega}|y|\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\left(\int_{\Omega}|x+y|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{(note that } (p-1)q=p \text{ and } \frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}) \\
&= \left\{\left(\int_{\Omega}|x|\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega}|y|\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\left(\int_{\Omega}|x+y|^{p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\Rightarrow \left(\int_{\Omega}|x+y|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega}|x|\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega}|y|\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

因此命题对 $p>1$ 的情况也成立.
综上所述，积分形式的 Minkowski 不等式得证.

The End