

高等线性代数 Homework 13

Due: Dec. 16, 2024

姓名: 雍崔扬

学号: 21307140051

Problem 1

给定正整数 m, n , 设 $F(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ 上的仿射映射.

试证明由 $G(x) := F(x) - F(0_n)$ 定义的映射 $G(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ 的线性映射.

- Definition:** 保持仿射性的映射 $F: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ 称为**仿射映射**.

$$F(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \alpha F(x) + (1 - \alpha)F(y) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R})$$

事实上, 每个仿射映射都可唯一地表示为 $F(x) = Ax + b$ (其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$)

于是 $G(x) = F(x) - F(0_n) = (Ax + b) - b = Ax$ 显然是线性映射.

因此本题的结论直观上是成立的.

Proof:

取 $y = 0_n$ 可得:

$$F(\alpha x) = \alpha F(x) + (1 - \alpha)F(0_n) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

于是我们有:

$$\begin{aligned} G(\alpha x) &= F(\alpha x) - F(0_n) \quad (\text{utilize (1)}) \\ &= \alpha F(x) + (1 - \alpha)F(0_n) - F(0_n) \\ &= \alpha F(x) - \alpha F(0_n) \\ &= \alpha G(x) \end{aligned} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R})$$

取 $\alpha = \frac{1}{2}$ 可得:

$$F\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(y) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

结合 (1)(2) 可知, 对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 都有:

$$\begin{aligned} F(x + y) &= F\left(2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right) \quad (\text{utilize (1)}) \\ &= 2F\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) - F(0_n) \quad (\text{utilize (2)}) \\ &= 2\left[\frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(y)\right] - F(0_n) \\ &= F(x) + F(y) - F(0_n) \\ &= [F(x) - F(0_n)] + [F(y) - F(0_n)] + F(0_n) \\ &= G(x) + G(y) + F(0_n) \end{aligned}$$

因此我们有:

$$\begin{aligned} G(x + y) &= F(x + y) - F(0_n) \\ &= G(x) + G(y) + F(0_n) - F(0_n) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n) \\ &= G(x) + G(y) \end{aligned}$$

综上所述, $G(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ 的线性映射.

Problem 2

(仿射映射的保凸性)

试证明凸集在仿射变换下的像和原像都是凸集.

Proof:

- 一方面, 给定凸集 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 和仿射映射 $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$
考虑凸集 C 在 f 下的像 $f(C) = \{f(x) : x \in C\}$

$$\text{对于任意 } \begin{cases} x_1, x_2 \in C \\ f(x_1), f(x_2) \in f(C) \\ \alpha \in [0, 1] \end{cases}$$

根据仿射映射的仿射性, 我们有 $\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) = f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)$ 成立.

由于 C 是凸集, 故有 $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$ 成立.

进而有 $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \in f(C)$

于是有 $\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \in f(C)$

说明 $f(C)$ 也是一个凸集.

- 另一方面, 给定凸集 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 和仿射映射 $f: \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$,
考虑凸集 C 在 f 下的原像 $f^{-1}(C) = \{x : f(x) \in C\}$:
(尽管逆映射 f^{-1} 不一定存在, 但我们总能定义原像 $f^{-1}(C)$)

$$\text{对于任意 } \begin{cases} x_1, x_2 \in f^{-1}(C) \\ f(x_1), f(x_2) \in C \\ \alpha \in [0, 1] \end{cases}$$

根据仿射映射的仿射性, 我们有 $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$ 成立.

由于 C 是凸集, 故有 $\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \in C$

进而有 $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \in C$

于是有 $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in f^{-1}(C)$

说明 $f^{-1}(C)$ 也是一个凸集.

Problem 3

给定正整数 n , 设 $\|\cdot\|$ 是 \mathbb{R}^n 上的范数.

试证明对于给定的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $r \in (0, \infty)$,

开范数球 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$ 和闭范数球 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$ 都是凸集.

Proof:

记开范数球和闭范数球为:

$$B(x_0, r, \|\cdot\|) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\} = \{x_0 + ru : \|u\| < 1\}$$

$$\bar{B}(x_0, r, \|\cdot\|) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\} = \{x_0 + ru : \|u\| \leq 1\}$$

- 首先考虑闭范数球:

$$\begin{aligned} \|\alpha x + (1 - \alpha)y\| &\leq \|\alpha x\| + \|(1 - \alpha)y\| \\ &= \alpha\|x\| + (1 - \alpha)\|y\| \quad (\forall x, y \in \bar{B}(x_0, r, \|\cdot\|), \alpha \in [0, 1]) \\ &\leq \alpha r + (1 - \alpha)r \\ &= r \end{aligned}$$

因此 $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \bar{B}(x_0, r, \|\cdot\|)$

这说明闭范数球 $\bar{B}(x_0, r, \|\cdot\|)$ 是凸集.

- 其次考虑开范数球:

$$\begin{aligned}
\|\alpha x + (1 - \alpha)y\| &\leq \|\alpha x\| + \|(1 - \alpha)y\| \\
&= \alpha\|x\| + (1 - \alpha)\|y\| \\
&< \alpha r + (1 - \alpha)r \\
&= r
\end{aligned}
\quad (\forall x, y \in B(x_0, r, \|\cdot\|), \alpha \in [0, 1])$$

因此 $\alpha x + (1 - \alpha)y \in B(x_0, r, \|\cdot\|)$
这说明开范数球 $B(x_0, r, \|\cdot\|)$ 是凸集.

Problem 4

给定正整数 n , 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为正规矩阵.

试证明 A 的数值域 $w(A) := \{x^H A x : \|x\|_2 = 1\}$ 是 A 的特征值的凸包.

• **Definition:**

给定集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$

我们称 S 中的点的所有凸组合构成的集合为 S 的凸包 (convex hull), 记为 $\text{conv}(S)$

易知 $\text{conv}(S)$ 是包含 S 的最小的凸集,

且 S 为凸集当且仅当 $\text{conv}(S) = S$.

Proof:

注意到正规矩阵一定可以酉对角化.

因此 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 存在谱分解 $A = U \Lambda U^H$

其中 $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为酉矩阵, 而 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 的对角元为 A 的特征值.

于是我们有:

$$\begin{aligned}
w(A) &:= \left\{ \frac{x^H A x}{x^H x} : x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \right\} \\
&= \{x^H A x : \|x\|_2 = 1\} \\
&= \{x^H U \Lambda U^H x : \|x\|_2 = 1\} \quad (\text{denote } y := U^H x \text{ and note that } \|y\|_2 = \|U^H x\|_2 = \|x\|_2) \\
&= \{y^H \Lambda y : \|y\|_2 = 1\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^n y_i^2 \lambda_i : \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1 \right\} \\
&= \text{conv}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\})
\end{aligned}$$

Problem 5

给定正整数 n , 设 $w \neq 0_n \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$

试求 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 到超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^T x + \alpha = 0\}$ 的距离.

Solution:

设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 关于超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^T x + \alpha = 0\}$ 的正交分解为:

$$x_0 = p + \lambda w$$

其中 p 是 x_0 在超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^T x + \alpha = 0\}$ 上的正交投影.

于是我们有:

$$\begin{cases} w^T p + \alpha = 0 \\ x_0 = p + \lambda w \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{|w^T x_0 + \alpha|}{\|w\|_2^2} \\ p = x_0 - \frac{|w^T x_0 + \alpha|}{\|w\|_2^2} w \end{cases}$$

x_0 到超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^T x + \alpha = 0\}$ 的距离即为 $x_0 - p$ 的长度:
(正交投影点是最近点, 这个性质通过反证法容易证明)

$$\begin{aligned} d &:= \min_{w^T x + \alpha = 0} \|x_0 - x\|_2 \\ &= \|x_0 - p\|_2 \\ &= \left\| \frac{|w^T x_0 + \alpha|}{\|w\|_2^2} w \right\| \\ &= \frac{|w^T x_0 + \alpha|}{\|w\|_2^2} \|w\| \\ &= \frac{|w^T x_0 + \alpha|}{\|w\|_2} \end{aligned}$$

Alternative Solution:

- ① 首先考虑 $\alpha = 0$ 的特殊情况.

此时超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^T x = 0\} = \text{Range}(w)^\perp$ 是 \mathbb{R}^n 的子空间.

因此根据正交分解定理可知 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 与它之间的距离就是 x_0 在 $\text{Range}(w)$ 上的投影的长度:

$$\begin{aligned} d &:= \min_{w^T x = 0} \|x_0 - y\|_2 \\ &= \left\| \frac{ww^T}{w^T w} x_0 \right\|_2 \\ &= \frac{|w^T x_0|}{\|w\|_2} \end{aligned}$$

- ② 其次考虑 $\alpha \in \mathbb{R}$ 的一般情况.

在超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^T x + \alpha = 0\}$ 中任取一点 b (满足 $w^T b + \alpha = 0$)

则对于任意 $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : w^T x + \alpha = 0\}$ 我们都有:

$$\begin{aligned} w^T(x - b) &= w^T x - w^T b \\ &= (w^T x + \alpha) - (w^T b + \alpha) \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此 $\{x - b : w^T x + \alpha = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^n : w^T y = 0\} = \text{Range}(w)^\perp$

利用 ① 的结论可知 $x_0 - b$ 与 $\{x - b : w^T x + \alpha = 0\}$ 之间的距离为:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|w^T(x_0 - b)|}{\|w\|_2} \\ &= \frac{|w^T x_0 - w^T b|}{\|w\|_2} \quad (\text{note that } w^T b + \alpha = 0) \\ &= \frac{|w^T x_0 + \alpha|}{\|w\|_2} \end{aligned}$$

于是 x_0 与超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^T x + \alpha = 0\}$ 之间的距离就是 $d = \frac{|w^T x_0 + \alpha|}{\|w\|_2}$

综上所述, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 到超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^T x + \alpha = 0\}$ 的距离为 $d = \frac{|w^T x_0 + \alpha|}{\|w\|_2}$

Problem 6 (optional)

给定正整数 n

记 \mathbb{S}^n 是所有 n 阶 Hermite 阵构成的集合, 而 \mathbb{S}_{++}^n 是所有 n 阶 Hermite 正定阵构成的集合.
试证明 $f(X) := \log(\det(X))$ 是 \mathbb{S}_{++}^n 上的凹函数.

Proof:

对数-行列式函数 (Log-determinant) $\begin{cases} f(X) = \log(\det(X)) \\ \text{dom}(f) = \mathbb{S}_{++}^n \end{cases}$ 是凹函数.

我们证明其凹性的方法是将其转化为任意 "直线" 上的单变量函数:

对于任意给定的 $\begin{cases} X \in \mathbb{S}_{++}^n \\ V \in \mathbb{S}^n \end{cases}$ 考虑关于 t 的函数 $\begin{cases} g(t) = f(X + tV) \\ \text{dom}(g) = \{t \in \mathbb{R} : X + tV \in \text{dom}(f) = \mathbb{S}_{++}^n\} \end{cases}$

记 $X^{-\frac{1}{2}} V X^{-\frac{1}{2}}$ 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

则对于任意 $t \in \text{dom}(g)$ 都有:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(X + tV) \\ &= \log(\det(X + tV)) \\ &= \log\{\det(X^{\frac{1}{2}}(I_n + tX^{-\frac{1}{2}} V X^{-\frac{1}{2}})X^{\frac{1}{2}})\} \\ &= \log\{\det((I_n + tX^{-\frac{1}{2}} V X^{-\frac{1}{2}})X)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \log(1 + t\lambda_i) + \log(\det(X)) \end{aligned}$$

$$\text{故有 } \begin{cases} g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1+t\lambda_i} \\ g''(t) = -\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{(1+t\lambda_i)^2} \leq 0 \end{cases}$$

说明任意 "直线" 上的单变量函数 $g(t)$ 都是凹函数, 因此 $f(X)$ 为凹函数.

Problem 7 (optional)

给定 \mathbb{R}^3 中的四面体 $ABCD$

设 $P, Q, R, S \in \mathbb{R}^3$ 关于四面体 $ABCD$ 的重心坐标分别为:

$(p_1 : p_2 : p_3 : p_4), (q_1 : q_2 : q_3 : q_4), (r_1 : r_2 : r_3 : r_4), (s_1 : s_2 : s_3 : s_4)$

试证明 P, Q, R, S 共面的充要条件是:

$$\det \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{bmatrix} = 0$$

- **Definition:** [Barycentric coordinate system - Wikipedia](#)

若 x_0, x_1, \dots, x_n 是 \mathbb{R}^n 中某个单纯形的顶点,

则对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 都存在唯一的一组常数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 使得:

$$x = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

我们称 $[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$ 为 x 关于 x_0, x_1, \dots, x_n 的**重心坐标** (barycentric coordinate)

(与 $[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$ 有着相同比例的坐标也可称为重心坐标, 即用比例关系代表一个点)

Solution: (可能是伪证)

注意到:

$$\begin{bmatrix} p_x & q_x & r_x & s_x \\ p_y & q_y & r_y & s_y \\ p_z & q_z & r_z & s_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{bmatrix}$$

重心坐标的定义默认 A, B, C, D 仿射无关, 因此 A, B, C, D 的齐次坐标构成的系数矩阵一定非奇异. 根据行列式的几何意义, P, Q, R, S 共面的充要条件是:

$$\det \begin{bmatrix} p_x & q_x & r_x & s_x \\ p_y & q_y & r_y & s_y \\ p_z & q_z & r_z & s_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

\Leftrightarrow

$$\det \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{bmatrix} = 0$$

Problem 8 (optional)

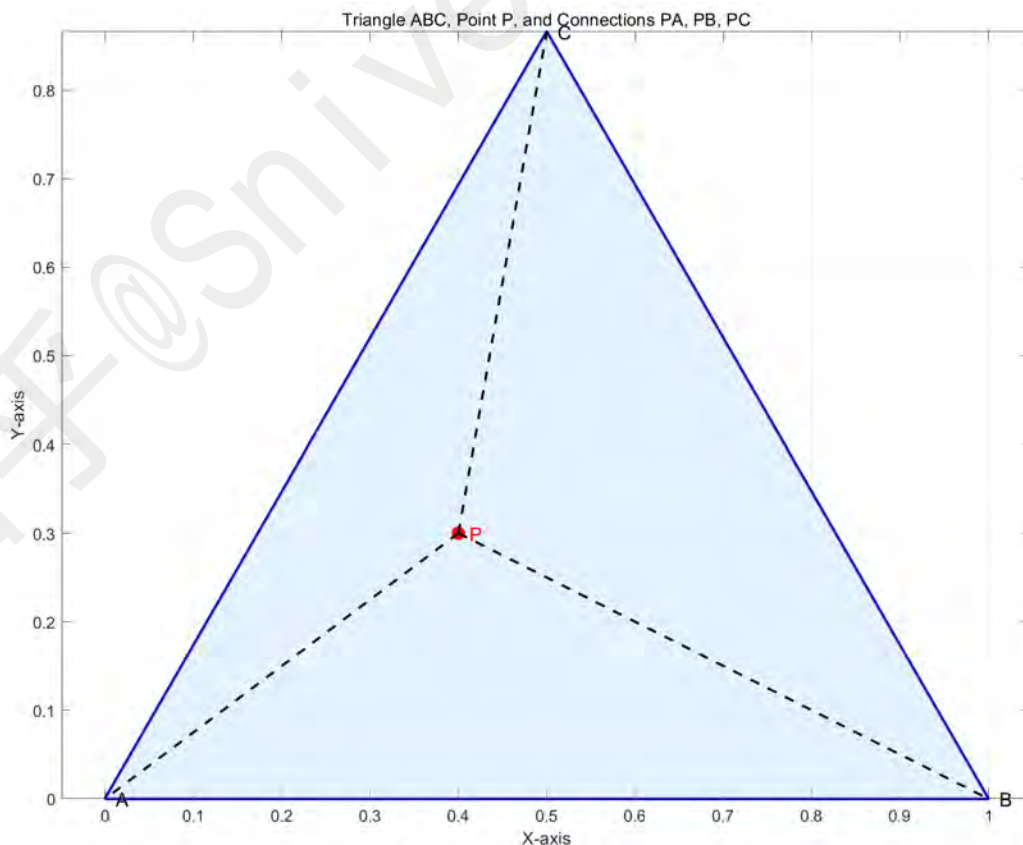
给定 \mathbb{R}^2 上的三角形 $\triangle ABC$

设 BC, CA, AB 的中点分别为 D, E, F

试求 $\triangle ABC$ 的内心关于 $\triangle DEF$ 的重心坐标.

- **Lemma:**

以 \mathbb{R}^2 为例, 考虑三角形 $\triangle ABC$ 和 \mathbb{R}^2 中的一点 P :



$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

$$\text{where } \alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

我们有如下关系:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} p_x & b_x & c_x \\ p_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}} \\ \beta &= \frac{\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} a_x & p_x & c_x \\ a_y & p_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle ABC}} \\ \gamma &= \frac{\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} a_x & b_x & p_x \\ a_y & b_y & p_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}} \end{aligned}$$

Solution:

记 $\triangle ABC$ 的内心为 I , 它是 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心, 因此到各边的距离相同.

我们使用 a, b, c 简记三角形的边 BC, AC, AB

则我们有 $S_{\triangle IBC} : S_{\triangle IAC} : S_{\triangle IAB} = a : b : c$

即内心为 I 的重心坐标为 $[a : b : c]$

$$\begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a + b + c} \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

注意到 D, E, F 的重心坐标为:

$$\begin{bmatrix} d_x & e_x & f_x \\ d_y & e_y & f_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

因此我们有:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ 1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{a+b+c} \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{a+b+c} \cdot 2 \begin{bmatrix} d_x & e_x & f_x \\ d_y & e_y & f_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\
&= \frac{2}{a+b+c} \begin{bmatrix} d_x & e_x & f_x \\ d_y & e_y & f_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{a+b+c} \begin{bmatrix} d_x & e_x & f_x \\ d_y & e_y & f_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a+b+c \\ a-b+c \\ a+b-c \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

所以 $\triangle ABC$ 的内心 I 关于 $\triangle DEF$ 的重心坐标为 $[-a+b+c : a-b+c : a+b-c]$

The End