高等线性代数 Homework 04

Due: Sept. 30, 2024
姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 1

给定正整数 m,n 和向量 $u \in \mathbb{C}^m, v \in \mathbb{C}^n$
试证明 $\|uv^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}} = \|vu^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}} = \|u\|_2 \|v\|_2$

Proof:

$$\begin{aligned}
\|uv^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}} &= \sqrt{\mathrm{tr}\{(uv^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}(uv^{\mathrm{H}})\}} \\
&= \sqrt{\mathrm{tr}\{vu^{\mathrm{H}}uv^{\mathrm{H}}\}} \\
&= \sqrt{\mathrm{tr}\{vu^{\mathrm{H}}(vu^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}\}} \\
&= \sqrt{\mathrm{tr}\{(vu^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}vu^{\mathrm{H}}\}} \\
&= \|vu^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|uv^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}} &= \sqrt{\mathrm{tr}\{(uv^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}(uv^{\mathrm{H}})\}} \\
&= \sqrt{\mathrm{tr}\{vu^{\mathrm{H}}uv^{\mathrm{H}}\}} \\
&= \sqrt{\mathrm{tr}\{u^{\mathrm{H}}uv^{\mathrm{H}}v\}} \\
&= \sqrt{u^{\mathrm{H}}uv^{\mathrm{H}}v} \\
&= \|u\|_2\|v\|_2
\end{aligned}$$

Problem 2

给定正整数 n，设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是非奇异矩阵，$E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $\|A^{-1}E\|_p < 1$
试证明 $A+E$ 非奇异，且当 $1 \leq p \leq \infty$ 时有:

$$\|(A+E)^{-1} - A^{-1}\|_p \leq \frac{\|A^{-1}\|_p^2 \|E\|_p}{1 - \|A^{-1}E\|_p}$$

Proof:
首先需要说明的是，对于任意 $1 \leq p \leq \infty$，$\|\cdot\|_p$ 作为 l_p 范数的诱导范数，一定是相容范数.

因此 $\|A^{-1}E\|_p \leq 1$ 确保了 $A+E$ 是非奇异的.
这是因为它保证了 $\rho(A^{-1}E) \leq \|A^{-1}E\|_p \leq 1$ (根据**谱半径定理**)，因而 $I - A^{-1}E$ 不可能有零特征值，
从而确保了 $A+E = A(I - A^{-1}E)$ 非奇异.

注意到 $A^{-1} - (A+E)^{-1} = A^{-1}[(A+E)-A](A+E)^{-1} = A^{-1}E(A+E)^{-1}$，因此我们有:

$$\|A^{-1} - (A+E)^{-1}\|_p = \|A^{-1}E(A+E)^{-1}\|_p \leq \|A^{-1}\|_p \|E\|_p \|(A+E)^{-1}\|_p \tag{2.1}$$

又注意到 $(A+E)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}E(A+E)^{-1}$，因此我们有:

$$\begin{gathered}
\|(A+E)^{-1}\|_p = \|A^{-1} - A^{-1}E(A+E)^{-1}\|_p \leq \|A^{-1}\|_p + \|A^{-1}E\|_p \|(A+E)^{-1}\|_p \\
\Leftrightarrow \\
\|(A+E)^{-1}\|_p \leq \frac{\|A^{-1}\|_p}{1 - \|A^{-1}E\|_p}
\end{gathered} \tag{2.2}$$

将 (2.2) 代入 (2.1) 中便得到:

$$\begin{aligned}
\|A^{-1} - (A+E)^{-1}\|_p &\leq \|A^{-1}\|_p \|E\|_p \|(A+E)^{-1}\|_p \\
&\leq \|A^{-1}\|_p \|E\|_p \frac{\|A^{-1}\|_p}{1 - \|A^{-1}E\|_p} \\
&= \frac{\|A^{-1}\|_p^2 \|E\|_p}{1 - \|A^{-1}E\|_p}
\end{aligned}$$

Problem 3

(不存在介于实数域和复数域之间的域)
若 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子域，且 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{F}$ 的子域，试证明: $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$

Proof:
默认 $\mathbb{F}$ 上的加法和乘法分别是复数加法和复数乘法.

- **Case 1:** 若任意 $z\in\mathbb{F}$ 都满足虚部 $\mathrm{Im}(z)=0$，则显然 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$
- **Case 2:** 若存在 $z_0\in\mathbb{F}$ 满足虚部 $\mathrm{Im}(z_0)\neq 0$
  则根据 $\begin{cases}\mathrm{Re}(z_0)\in\mathbb{R}\subset\mathbb{F}\\ \mathrm{Im}(z_0)\neq 0\in\mathbb{R}\subset\mathbb{F}\end{cases}$ 可知虚数单位 $i=(z_0-\mathrm{Re}(z_0))/\mathrm{Im}(z_0)=(z_0-\mathrm{Re}(z_0))\times[\mathrm{Im}(z_0)]^{-1}\in\mathbb{F}$
  根据域对加法的封闭性可知，对于任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，我们都有 $\alpha+\beta i\in\mathbb{F}$ 成立，表明 $\mathbb{C}\subseteq\mathbb{F}$
  又根据 "$\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子域" 可知 $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{C}$，因此我们有 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 成立.

综上所述，$\mathbb{F}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$

Problem 4

假定四则运算均为实数域上的运算，求出包含 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的最小的域.
即求域 $\mathbb{F}_0$ 使得:

- ① $\alpha\in\mathbb{F}_0$
- ② 对于任意满足 $\alpha\in\mathbb{F}$ 的域 $\mathbb{F}$ 都有 $\mathbb{F}_0\subset\mathbb{F}$

Solution:
首先我们证明有理数域 $\mathbb{Q}$ 加上 $\sqrt{2},\sqrt{3}$ 的扩张 $\mathbb{F}_0:=\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]=\{q_1+q_2\sqrt{2}+q_3\sqrt{3}+q_4\sqrt{6}:q_1,q_2,q_3,q_4\in\mathbb{Q}\}$
是一个包含 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的数域.
对于任意 $\begin{cases}a=a_1+a_2\sqrt{2}+a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6}\\ b=b_1+b_2\sqrt{2}+b_3\sqrt{3}+b_4\sqrt{6}\\ c=c_1+c_2\sqrt{2}+c_3\sqrt{3}+c_4\sqrt{6}\end{cases}\in\mathbb{F}_0$ (其中 $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4,c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{Q}$)
我们都有:

- **封闭:**

$$\begin{aligned}a+b&=(a_1+a_2\sqrt{2}+a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6})+(b_1+b_2\sqrt{2}+b_3\sqrt{3}+b_4\sqrt{6})\\&=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)\sqrt{2}+(a_3+b_3)\sqrt{3}+(a_4+b_4)\sqrt{6}\\&\in\mathbb{F}_0\\ a\times b&=(a_1+a_2\sqrt{2}+a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6})\times(b_1+b_2\sqrt{2}+b_3\sqrt{3}+b_4\sqrt{6})\\&=(a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3+6a_4b_4)+(a_2b_1+a_1b_2+3a_3b_4+3a_4b_3)\sqrt{2}\\&\quad+(a_3b_1+a_1b_3+2a_2b_4+2a_4b_2)\sqrt{3}+(a_4b_1+a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2)\sqrt{6}\\&\in\mathbb{F}_0\end{aligned}$$

- **可交换:** $\begin{cases}b+a=a+b\\ b\times a=a\times b\end{cases}$ (显然成立)
- **可结合:** $\begin{cases}(a+b)+c=a+(b+c)\\ (a\times b)\times c=a\times(b\times c)\end{cases}$ (显然成立)
- **可分配:** $\begin{cases}(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)\\ c\times(a+b)=(c\times a)+(c\times a)\end{cases}$ (显然成立)
- **单位元 (不动点):** $\exists\, 0,1\in\mathbb{F}_0$ such that $\begin{cases}0\neq 1\\ a+0=a\\ a\times 1=a\end{cases}$
- **逆元:**
  对于 $a\in\mathbb{F}_0$，我们可取 $(-a)=(-a_1)+(-a_2)\sqrt{2}+(-a_3)\sqrt{3}+(-a_4)\sqrt{6}\in\mathbb{F}_0$
  它可使得 $(-a)+a=0$

  对于 $a\neq 0\in\mathbb{F}_0$ (即有理数 a_1,a_2,a_3,a_4 不同时为零)
  要找到一个逆元 $x=x_1+x_2\sqrt{2}+x_3\sqrt{3}+x_4\sqrt{6}\in\mathbb{F}_0$ 使得 $a\times x=1$，我们只需求解以下线性方程组:

$$\begin{cases} a_1x_1+2a_2x_2+3a_3x_3+6a_4x_4=1 \\ a_2x_1+a_1x_2+3a_3x_4+3a_4x_3=0 \\ a_3x_1+a_1x_3+2a_2x_4+2a_4x_2=0 \\ a_4x_1+a_1x_4+a_2x_3+a_3x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad Ax=\begin{bmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 6a_4 \\ a_2 & a_1 & 3a_4 & 3a_3 \\ a_3 & 2a_4 & a_1 & 2a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=e_1$$

计算系数矩阵 $A\in\mathbb{Q}^{4\times 4}$ 的行列式 $\det(A)$ 如下:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_1\begin{vmatrix} a_1 & 3a_4 & 3a_3 \\ 2a_4 & a_1 & 2a_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} - 2a_2\begin{vmatrix} a_2 & 3a_4 & 3a_3 \\ a_3 & a_1 & 2a_2 \\ a_4 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} + 3a_3\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 3a_3 \\ a_3 & 2a_4 & 2a_2 \\ a_4 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} - 6a_4\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 3a_4 \\ a_3 & 2a_4 & a_1 \\ a_4 & a_3 & a_2 \end{vmatrix} \\
&= a_1(a_1^3-2a_1a_2^2-3a_1a_3^2-6a_1a_4^2+12a_2a_3a_4) \\
&\quad -2a_2(a_1^2a_2-2a_2^3+3a_2a_3^2+6a_2a_4^2-6a_1a_3a_4) \\
&\quad +3a_3(-a_1^2a_3-2a_2^2a_3+3a_3^3-6a_3a_4^2+4a_1a_2a_4) \\
&\quad -6a_4(a_1^2a_4+2a_2^2a_4+3a_3^2a_4-6a_4^3-2a_1a_2a_3) \\
&= 48a_1a_2a_3a_4+(a_1^4+4a_2^4+9a_3^4+36a_4^4)-(4a_1^2a_2^2+6a_1^2a_3^2+12a_1^2a_4^2+12a_2^2a_3^2+24a_2^2a_4^2+36a_3^2a_4^2) \\
&= (a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)^2-8(a_1a_2-3a_3a_4)^2
\end{aligned}$$

下面我们证明当有理数 a_1,a_2,a_3,a_4 不同时为零时，我们有 $\det(A)\neq 0$ 成立:

$$\begin{gathered}
\det(A)=(a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)^2-8(a_1a_2-3a_3a_4)^2=0 \\
\Leftrightarrow \\
a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2=\pm 2\sqrt{2}(a_1a_2-3a_3a_4) \\
\Leftrightarrow \\
(a_1\pm\sqrt{2}a_2)^2=3(a_3\pm\sqrt{2}a_4)^2 \\
\Leftrightarrow \\
a_1\pm_{(1)}\sqrt{2}a_2=\pm_{(2)}\sqrt{3}(a_3\pm_{(1)}\sqrt{2}a_4) \quad (\text{where } \pm_{(1)},\pm_{(2)} \text{ are independent}) \\
\Leftrightarrow \\
\text{rational numbers } a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{Q} \text{ satisfy } a_1=a_2=a_3=a_4=0
\end{gathered}$$

因此当有理数 a_1,a_2,a_3,a_4 不同时为零时，系数矩阵的行列式 $\det(A)\neq 0$，即 A 非奇异.
这样就可以根据 **Cramer 法则**计算线性方程组 $Ax=e_1$ 的解
而且因为 Cramer 法则中的运算只有加减乘除 (除数不为零)，因此 Cramer 法则给出的解一定是有理数解.
(这是因为有理数域 $\mathbb{Q}$ 对加减乘除 (除数不为零) 是封闭的)

或者使用经典的做法——**分母有理化**来得到线性方程组 $Ax=e_1$ 的解:

$$\begin{aligned}
(a^{-1}) &= \frac{1}{a_1+a_2\sqrt{2}+a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6}} \\
&= \frac{(a_1+a_2\sqrt{2})-(a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6})}{(a_1+a_2\sqrt{2})^2-(a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6})^2} \\
&= \frac{(a_1+a_2\sqrt{2}-a_3\sqrt{3}-a_4\sqrt{6})}{a_1^2+2a_1a_2\sqrt{2}+2a_2^2-3a_3^2-6a_3a_4\sqrt{2}-6a_4^2} \\
&= \frac{(a_1+a_2\sqrt{2}-a_3\sqrt{3}-a_4\sqrt{6})[(a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)-(2a_1a_2-6a_3a_4)\sqrt{2}]}{(a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)^2-[(2a_1a_2-6a_3a_4)\sqrt{2}]^2} \\
&= \frac{1}{(a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)^2-8(a_1a_2-3a_3a_4)^2} \\
&\quad \times\{[a_1(a_1^2-2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)+12a_2a_3a_4] \\
&\quad\quad +[a_2(-a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)+6a_1a_3a_4]\sqrt{2} \\
&\quad\quad +[a_3(-a_1^2-2a_2^2+3a_3^2-6a_4^2)+4a_1a_2a_4]\sqrt{3} \\
&\quad\quad +[a_4(-a_1^2-2a_2^2-3a_3^2+6a_4^2)+2a_1a_2a_3]\sqrt{6}\}
\end{aligned}$$

因此线性方程组 $Ax=e_1$ 的有理数解为:

$$x=\frac{1}{(a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)^2-8(a_1a_2-3a_3a_4)^2}\begin{bmatrix} a_1(a_1^2-2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)+12a_2a_3a_4 \\ a_2(-a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)+6a_1a_3a_4 \\ a_3(-a_1^2-2a_2^2+3a_3^2-6a_4^2)+4a_1a_2a_4 \\ a_4(-a_1^2-2a_2^2-3a_3^2+6a_4^2)+2a_1a_2a_3 \end{bmatrix}$$

这表明对于 $a\neq 0\in\mathbb{F}_0$，$\mathbb{F}_0$ 中都存在一个逆元 (a^{-1}) 使得 $a\times(a^{-1})=(a^{-1})\times a=1$

综上所述，$\mathbb{F}_0 := \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \{q_1 + q_2\sqrt{2} + q_3\sqrt{3} + q_4\sqrt{6} : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Q}\}$ 是一个域.

要证明 $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ 是包含 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 的最小的域，
只要证明任何一个包含 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 的域 $\mathbb{F}$ 都包含 $\mathbb{Q}$ 和 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 即可.

$$
\begin{array}{rcl}
0, 1 \in \mathbb{F} & \Rightarrow & \mathbb{Z} \in \mathbb{F} \\
 & \Rightarrow & \mathbb{Q} \in \mathbb{F} \\
\hline
\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{F} & \Rightarrow & (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{F} \\
 & \Rightarrow & \sqrt{6} \in \mathbb{F} \\
 & \Rightarrow & (\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{6} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \in \mathbb{F} \\
 & \Rightarrow & \sqrt{2} = (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \in \mathbb{F} \\
 & \Rightarrow & \sqrt{3} = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{2} \in \mathbb{F}
\end{array}
$$

因此包含 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 的最小的域为 $\mathbb{F}_0 := \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \{q_1 + q_2\sqrt{2} + q_3\sqrt{3} + q_4\sqrt{6} : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Q}\}$

Problem 5

若 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子域，定义运算 $\oplus : \mathbb{F}^2 \times \mathbb{F}^2 \mapsto \mathbb{F}^2$ 和 $\otimes : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^2 \mapsto \mathbb{F}^2$ 如下:

$$
\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix}
$$
$$
k \otimes \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ kb + \frac{k(k-1)}{2} a^2 \end{bmatrix}
$$

试证明 $\mathbb{F}^2$ 在加法 $\oplus$ 和数乘 $\otimes$ 下构成 $\mathbb{F}$ 上的向量空间.

Proof:
记 $+, \times$ 为复数加法和复数乘法.
对于任意 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^2$ 和标量 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ 我们都有:

- **加法可交换:**

$$
\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + a_1 \\ b_2 + b_1 + a_2 a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}
$$

- **可结合:**

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \right) \oplus \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 + a_1 a_2 + (a_1 + a_2) a_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 + a_3 \\ b_2 + b_3 + a_2 a_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \left(\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha \otimes (\beta \otimes \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}) &= \alpha \otimes \begin{bmatrix} \beta a_1 \\ \beta b_1 + \frac{\beta(\beta-1)}{2} a_1^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha\beta a_1 \\ \alpha[\beta b_1 + \frac{\beta(\beta-1)}{2} a_1^2] + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} (\beta a_1)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha\beta a_1 \\ \alpha\beta b_1 + \frac{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}{2} a_1^2 \end{bmatrix} \\
&= \alpha\beta \otimes \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- **可分配:**

$$
\begin{aligned}
\alpha \otimes \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) &= \alpha \otimes \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha(a_1 + a_2) \\ \alpha(b_1 + b_2 + a_1 a_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(a_1 + a_2)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha b_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} a_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha a_2 \\ \alpha b_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} a_2^2 \end{bmatrix} \\
&= \alpha \otimes \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \alpha \otimes \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- **单位元:**

$$
\frac{\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 0 \\ b_1 + 0 + a_1 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}}{1 \otimes \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a_1 \\ 1 \cdot b_1 + \frac{1(1-1)}{2} a_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}}
$$

- **加法逆元:**

$$
\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -a_1 \\ -b_1 + a_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + (-a_1) \\ b_1 + (-b_1 + a_1^2) + a_1(-a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

因此 $\mathbb{F}^2$ 在加法 $\oplus$ 和数乘 $\otimes$ 下构成 $\mathbb{F}$ 上的向量空间.

Problem 6 (optional)

[Is the Frobenius Matrix Norm Induced?]
若 m, n 是大于 1 的正整数，试证明 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的 Frobenius 范数不能由任何向量范数诱导.

证明前的准备工作:

- **(对偶范数的定义)**
给定 $\mathbb{C}^n$ 上的一个范数 $\|\cdot\|$，我们定义 $\mathbb{C}^n$ 上的函数 $\|\cdot\|^D$ 为 $\|y\|^D := \max\limits_{\|x\|=1} |y^{\mathrm{H}}x| = \max\limits_{x\neq 0_n} \frac{|y^{\mathrm{H}}x|}{\|x\|}$
首先证明 $\|\cdot\|^D$ 是一个范数:
    - $\|\cdot\|^D$ 的非负性、正定性和齐次性都是显然的.
    - 下面证明 $\|\cdot\|^D$ 满足三角不等式:

$$
\begin{aligned}
\|y+z\|^D &= \max_{\|x\|=1} |(y+z)^{\mathrm{H}}x| \\
&\leq \max_{\|x\|=1} (|y^{\mathrm{H}}x| + |z^{\mathrm{H}}x|) \\
&\leq \max_{\|x\|=1} |y^{\mathrm{H}}x| + \max_{\|x\|=1} |z^{\mathrm{H}}x| \\
&= \|y\|^D + \|z\|^D
\end{aligned}
\quad (y, z \in \mathbb{C}^n)
$$

因此 $\|\cdot\|^D$ 是一个范数，我们称其为 $\|\cdot\|$ 的**对偶范数** (dual norm)

- **Lemma** 1:
给定正整数 m, n，设 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 分别为 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ 上的范数
而 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 是由 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 诱导的范数，则我们有 $\|xy^{\mathrm{H}}\| = \|x\|_\beta \|y\|_\alpha^D \quad (\forall\, x \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^n)$
Proof:

$$
\begin{aligned}
\|xy^{\mathrm{H}}\| &= \max_{\|z\|_\alpha=1} \|xy^{\mathrm{H}}z\|_\beta \\
&= \max_{\|z\|_\alpha=1} \{|y^{\mathrm{H}}z| \|x\|_\beta\} \\
&= \|x\|_\beta \max_{\|z\|_\alpha=1} |y^{\mathrm{H}}z| \\
&= \|x\|_\beta \|y\|_\alpha^D
\end{aligned}
\quad (\forall\, x \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^n)
$$

- **Lemma 2:**
给定正整数 m, n，设 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的酉不变范数，
则对于任意秩一矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 都有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)\|E_{11}\|$
其中 $E_{11} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 为 $(1,1)$ 位置上元素为 1，其余元素为零的矩阵.

Proof:
对于任意秩一矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，我们都可写出其奇异值分解 $A = U(\sigma_{\max}(A)E_{11})V^{\mathrm{H}}$
其中 $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉矩阵.
于是根据 $\|\cdot\|$ 的酉不变性，我们有 $\|A\| = \|U(\sigma_{\max}(A)E_{11})V^{\mathrm{H}}\| = \sigma_{\max}(A)\|E_{11}\|$ 成立.

- **Lemma 3:**
  给定正整数 m, n，设 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的酉不变范数，
  则当且仅当 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)\|E_{11}\|\ (\forall\ A \in \mathbb{C}^{m\times n})$ 时 $\|\cdot\|$ 为诱导范数，
  即存在 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 使得 $\|A\| = \max\limits_{\|x\|_\alpha=1}\|Ax\|_\beta\ (\forall\ A \in \mathbb{C}^{m\times n})$ 成立.

  Proof:
  - **充分性:**
    若 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)\|E_{11}\|\ (\forall\ A \in \mathbb{C}^{m\times n})$，
    则我们可取 $\mathbb{C}^n$ 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_2$ 和 $\mathbb{C}^m$ 上的范数 $\|\cdot\|_\beta = \|E_{11}\|\|\cdot\|_2$，即有:
    $$\left.\begin{aligned}\max_{\|x\|_\alpha=1}\|Ax\|_\beta &= \max_{\|x\|_2=1}\{\|E_{11}\|\|Ax\|_2\}\\ &= \|E_{11}\|\max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2\\ &= \|E_{11}\|\|A\|_2\\ &= \|E_{11}\|\sigma_{\max}(A)\\ &= \|A\|\end{aligned}\right.\quad(\forall\ A \in \mathbb{C}^{m\times n})$$
    表明酉不变范数 $\|\cdot\|$ 可由 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 诱导.
  - **必要性:**
    若酉不变范数 $\|\cdot\|$ 可由 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 诱导，则对于任意 $x \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^n$ 我们都有:
    $$\begin{aligned}\|xy^{\mathrm{H}}\| &= \sigma_{\max}(xy^{\mathrm{H}})\|E_{11}\| \quad (\text{utilize Lemma 2})\\ &= \|x\|_2\|y\|_2\|E_{11}\|\\ &(\sigma_{\max}(xy^{\mathrm{H}}) = \sqrt{\lambda_{\max}\{(xy^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}(xy^{\mathrm{H}})\}} = \sqrt{\lambda_{\max}(yx^{\mathrm{H}}xy^{\mathrm{H}})} = \sqrt{x^{\mathrm{H}}x\lambda_{\max}(yy^{\mathrm{H}})} = \sqrt{x^{\mathrm{H}}xy^{\mathrm{H}}y} = \|x\|_2\|y\|_2)\\ &= \|x\|_\beta\|y\|_\alpha^D \quad (\text{utilize Lemma 1})\end{aligned}$$
    因此我们有 $\|E_{11}\|\|x\|_2\|y\|_2 = \|x\|_\beta\|y\|_\alpha^D\ (\forall\ x \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^n)$
    固定 y，我们知道存在 $c_1 > 0$ 使得 $\|x\|_\beta = c_1\|x\|_2\ (\forall\ x \in \mathbb{C}^m)$
    固定 x，我们知道存在 $c_2 > 0$ 使得 $\|y\|_\alpha^D = c_2\|y\|_2\ (\forall\ y \in \mathbb{C}^n)$，则我们有:
    $$\left.\begin{aligned}\|y\|_\alpha &= \|y\|_\alpha^{DD} && (\text{note that } \|\cdot\|_\alpha^{DD} = \|\cdot\|_\alpha)\\ &= \|c_2y\|_2^D && (\text{use the conclusion above})\\ &= \|c_2y\|_2 && (\text{note that } \|\cdot\|_2^D = \|\cdot\|_2, \text{i.e. Euclidean norm is self-dual})\\ &= c_2\|y\|_2\end{aligned}\right.(\forall\ y \in \mathbb{C}^n)$$
    于是我们有:
    $$\left.\begin{aligned}\|A\| &= \max_{\|x\|_\alpha=c_1}\frac{\|Ax\|_\beta}{c_1} \quad (\text{use the conclusion above})\\ &= \frac{1}{c_1}\max_{c_1\|x\|_2=c_1}\{c_2\|Ax\|_2\}\\ &= \frac{c_2}{c_1}\max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2\\ &= \frac{c_2}{c_1}\|A\|_2\\ &= \frac{c_2}{c_1}\sigma_{\max}(A) \quad (\text{consider the cases where } A \text{ is rank-one matrix and utilize Lemma 2})\\ &= \|E\|_{11}\sigma_{\max}(A)\end{aligned}\right.\quad(\forall\ A \in \mathbb{C}^{m\times n})$$
    因此我们有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)\|E_{11}\|\ (\forall\ A \in \mathbb{C}^{m\times n})$ 成立.

最终的证明:
我们称 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的一个酉不变范数 $\|\cdot\|$ 是归一化的，如果对于任意秩一矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 都有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)$ 成立.
可以证明:
一个归一化的酉不变范数是诱导范数，当且仅当它是谱范数 $\|\cdot\|_2$ (即 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)\ (\forall\ A \in \mathbb{C}^{m\times n})$)

- **必要性显然成立.**
- **下证充分性:**
  若 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上归一化的酉不变范数 $\|\cdot\|$ 是诱导范数，则:

- ① 根据酉不变范数 $\|\cdot\|$ 是诱导范数，结合 **Lemma 3** 可知 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)\|E_{11}\|$ $(\forall\ A \in \mathbb{C}^{m\times n})$
- ② 根据归一化可知: 对于任意秩一矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 都有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)$ 成立.

结合 ①② 可知 $\|E_{11}\| = 1$，因此有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)$ $(\forall\ A \in \mathbb{C}^{m\times n})$ 成立，即 $\|\cdot\|$ 为谱范数 $\|\cdot\|_2$

任意给定 $p \geq 1$，我们定义 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的 σp-范数 $\|\cdot\|_{\sigma p}$ 为:

$$\|A\|_{\sigma p} := \left\| \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{\min\{m,n\}} \end{bmatrix} \right\|_p \quad \text{for all } A \in \mathbb{C}^{m\times n}, \text{whose singular values are denoted by } \sigma_1, \ldots, \sigma_{\min\{m,n\}}$$

其中 σ_1 即为 $\sigma_{\max}(A)$
显而易见，σp-范数 $\|\cdot\|_{\sigma p}$ 满足 $\|A\|_{\sigma p} = \sigma_{\max}(A)$ $(\forall\ A \in \mathbb{C}^{m\times n})$ 当且仅当以下命题至少有一个成立:

- ① $m = 1$
- ② $n = 1$
- ③ $p = \infty$ (此时 σp-范数 $\|\cdot\|_{\sigma p}$ 即为谱范数 $\|\cdot\|_2$)

注意到 $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ 即为 $\|\cdot\|_{\sigma 2}$: (不妨假设 $m \geq n$)

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\mathrm{F}} &= \sqrt{\operatorname{tr}(A^{\mathrm{H}}A)} \\
&\quad (\text{Note that } A^{\mathrm{H}}A \text{ is positive semi-definite, so its spectral decomposition } A^{\mathrm{H}}A = U^{\mathrm{H}}\Lambda U \text{ does exists}) \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}(U^{\mathrm{H}}\Lambda U)} \quad (\text{where } U \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ is unitary and } \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1(A^{\mathrm{H}}A), \ldots, \lambda_n(A^{\mathrm{H}}A)\}) \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}(\Lambda U U^{\mathrm{H}})} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}(\Lambda)} \\
&= \sqrt{\lambda_1(A^{\mathrm{H}}A) + \cdots + \lambda_n(A^{\mathrm{H}}A)} \\
&= \sqrt{\sigma_1^2(A) + \cdots + \sigma_n^2(A^{\mathrm{H}}A)} \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \sigma_1(A) \\ \vdots \\ \sigma_n(A) \end{bmatrix} \right\|_2 \\
&= \|A\|_{\sigma 2}
\end{aligned} \tag{$\forall\ A \in \mathbb{C}^{m\times n}$}$$

因此 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的 Frobenius 范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ 是诱导范数，当且仅当 $m = 1$ 或 $n = 1$.
命题得证.

Problem 7 (optional)

(不存在三元数域)
试证明: 不存在一个包含 $\mathbb{R}$ 的域 $\mathbb{F}$ 可以视为 $\mathbb{R}$ 上的 3 维向量空间.

Proof: (伪证, 额外增加条件时的证明)
设 $\mathbb{F}$ 为包含 $\mathbb{R}$ 的域，且 $\mathbb{F}$ 可视为 $\mathbb{R}$ 上的 $n \geq 2$ 维向量空间.
额外假设 $\mathbb{F}$ 上的乘法是 $\mathbb{C}$ 上的乘法的扩张，则 $\mathbb{F}$ 中存在一个子代数同构于 $\mathbb{C}$
因此 $\mathbb{F}$ 可视作 $\mathbb{C}$ 上的向量空间.
由于 $\mathbb{F}$ 具有有限维度 n，因此 n 一定是一个偶数，故而不可能为 3

Lemma: [(division algebra.pdf)]
若 D 是中心为域 $\mathbb{K}$ 的有限维除环 (division algebra)
则其维数 $[D : \mathbb{K}]$ (即 D 作为域 $\mathbb{K}$ 上向量空间的维数) 一定是一个平方数.

Frobenius Theorem:
若 D 是中心为域 $\mathbb{R}$ 的有限维除环，则 $D = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$ (其中 $\mathbb{H}$ 代表四元数域)

抽象代数的证明:
设 $\mathbb{F}$ 为包含 $\mathbb{R}$ 的域，且 $\mathbb{F}$ 可视为 $\mathbb{R}$ 上的 n 维向量空间，则它是中心为域 $\mathbb{R}$ 的 n 维除环
根据 Frobenius 定理可知 $n = 1$ or 2 or 4，命题得证.

邵老师提供的初等证明:
设 $\mathbb{F}$ 为包含 $\mathbb{R}$ 的域，且 $\mathbb{F}$ 可视为 $\mathbb{R}$ 上的 3 维向量空间.
设 $\mathbb{F}$ 的一组基为 $\{1,i,j\}$ (其中我们暂时认为 i,j 不是虚数单位)

- 注意到 $1,i,j$ 一定是线性无关的，因此 i,j 一定不是实数.
- 注意到 $1,i,i^2,i^3$ 一定是线性相关的，故存在不全为零的 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 使得 $ai^3+bi^2+ci+d=0$
  (其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 是因为 $\mathbb{F}$ 可视为 $\mathbb{R}$ 上的 3 维向量空间)
  若 $a=b=c=0$，则 $d=0$，与假设矛盾.
  若 $a=b=0,c\neq 0$，则 i 是一次方程 $ci+d=0$ 的根，这与 "i 不为实数" 的结论矛盾.
  若 $a=0,b\neq 0$，则 i 是二次方程 $bi^2+ci+d=0$ 的根，由于 i 不为实数，故 i 一定为复数 (且虚部非零)
  若 $a\neq 0$，则 i 是三次方程 $ai^3+bi^2+ci+d=0$ 的根 (根据代数基本定理可知此方程有一个实根和一对共轭复根)
  由于 i 不为实数，故 i 一定为复数 (且虚部非零)

  综上所述 i 一定为复数 (且虚部非零)
  现在我们就可以等价地将 i 视为虚数单位了，满足 $i^2=-1$
  类似地，我们可以等价地将 j 视为虚数单位 (不过是与 i 不同方向的虚数单位)，满足 $\begin{cases}j^2=-1\\ j\neq i\end{cases}$

设 ij 在基 $\{1,i,j\}$ 下的表示为 $ij=a+bi+cj$ (其中 $a,b,c\in\mathbb{R}$)
则我们有:

$$\begin{aligned}-j&=i^2j\\&=i(ij)\\&=i(a+bi+cj)\\&=ai-b+cij\\&=ai-b+c(a+bi+cj)\\&=(ac-b)+(bc+a)i+c^2j\end{aligned}\quad\Rightarrow\begin{cases}ac-b=0\\bc+a=0\\c^2=-1\end{cases}$$

显然 $c^2=-1$ 与 $c\in\mathbb{R}$ 的假设矛盾.
因此向量 $1,i,j,ij$ 是线性无关的，与 "$\mathbb{F}$ 可视为 $\mathbb{R}$ 上的 3 维向量空间" 的假设相矛盾.
这表明不存在一个包含 $\mathbb{R}$ 的域 $\mathbb{F}$，能够被视为 $\mathbb{R}$ 上的 3 维向量空间.
命题得证.

Problem 8 (optional)

> 域 $\mathbb{F}$ 上的**线性空间** (linear space) $(V,+,\cdot)$ (又称为**向量空间** vector space)
> 由一组对象 (通常称为**向量** vector) 的集合 V、向量加法 $+:V\times V\mapsto V$ 和标量乘法 $\cdot:\mathbb{F}\times V\mapsto V$ 构成.
> 对于任意向量 $u,v,w\in V$ 和标量 $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$，它满足以下性质:
>
> - **加法可交换:** $u+v=v+u$
> - **可结合:** $\begin{cases}(u+v)+w=u+(v+w)\\ \alpha\cdot(\beta\cdot v)=(\alpha\cdot\beta)\cdot v\end{cases}$
> - **可分配:** $\begin{cases}\alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v\\ (\alpha+\beta)\cdot v=\alpha\cdot v+\beta\cdot v\end{cases}$
> - **单位元:** $\begin{cases}\exists\ 0_V\in V\quad\text{such that}\ \ v+0_V=v\\ \exists\ 1_V\in\mathbb{F}\quad\text{such that}\ \ 1_V\cdot v=v\end{cases}$
> - **加法逆元:** $\exists\ (-v)\in V\ \text{such that}\ v+(-v)=0_V$
>
> 可以证明: 加法单位元 0_V、数乘单位元 1_V 和任意给定向量 $v\in V$ 的加法逆元 $-v$ 都是唯一的.
>
> 给定域 $\mathbb{F}$ 和正整数 n，由 $\mathbb{F}$ 中的元素形成的 n 元组的集合 $\mathbb{F}^n$ 在逐元素加法和数乘之下构成线性空间.
> 我们约定 $\mathbb{F}^n$ 中的元素总是列向量.
> 其中 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{R}^n$ 是本课程中最基本的线性空间.

试证明: 加法交换律可由余下的几条公理推出.

Proof: (似乎是伪证)
记 $0_{\mathbb{F}}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的加法单位元，$\times:\mathbb{F}\times\mathbb{F}\mapsto\mathbb{F}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的乘法.
(反证法) 假设存在 $u,v\in V$ 使得 $u+v\neq v+u$，则我们有:

$$
\begin{aligned}
u+v &\neq v+u \\
&\Leftrightarrow \\
0_V = (-u)+u+v+(-v) &\neq (-u)+v+u+(-v) \\
&= (-1_V)\cdot[u+(-v)]+1_V\cdot[u+(-v)] \\
&= [(-1_V)+1_V]\cdot[u+(-v)] \\
&= 0_{\mathbb{F}}\cdot[u+(-v)] \\
&= 0_V
\end{aligned}
$$

从而导出矛盾.
因此对于任意 $u, v \in V$ 都有 $u+v=v+u$ 成立.

The End