

FDU 脑科学 5. 脑网络

本文参考以下教材:

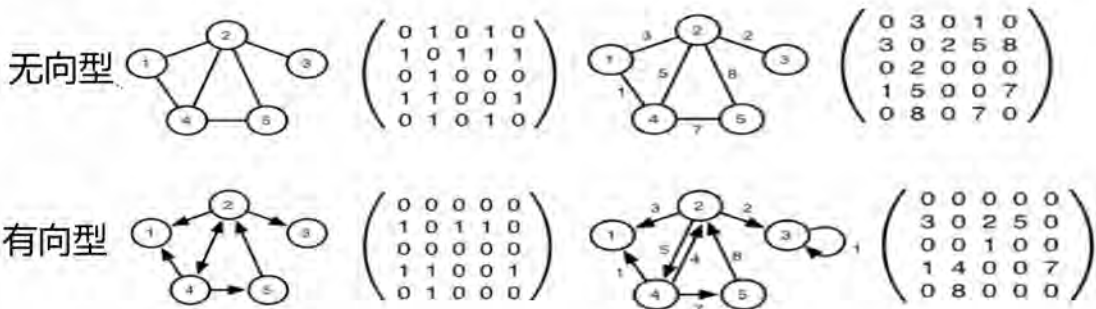
- Fundamentals of Computational Neuroscience (2nd Edition T. Trappenberg) Chapter 5, 6, 7, 8
- Theoretical Neuroscience (Dayan & Abbott) Chapter 7
- Mathematical Foundations of Neuroscience (G. Ermentrout, D. Terman) Chapter 9
- 神经科学的数学基础 (G. Ermentrout, D. Terman) 第 9 章
- 神经科学: 探索脑 (4th Edition) 第 9, 10 章

欢迎批评指正!

5.3 神经网络图论

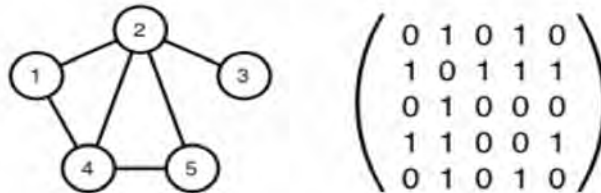
复杂网络是指在图论的框架下, 用于描述和分析由大量节点和连接它们的边构成的网络结构.

- N 个点之间最多可连接的边数为 $\frac{1}{2} N(N-1)$
- 描述一个网络的最简便的方法就是通过邻接矩阵, 其中无向图对应的邻接矩阵一定是对称阵. 我们还可向邻接矩阵引入权重来区分不同连接的重要程度.



- 一个节点的**连通度** (connectivity) 指的是与该节点连接的边数.

$$k_i = \sum_j a_{ij} = \sum_j a_{ji}$$



$$k_1 = 2, k_2 = 4, k_3 = 1, k_4 = 3 \text{ and } k_5 = 2$$

连通度分布指的是一个节点连通度 k 的概率分布, 其概率质量函数通常有以下形式:

- ① $P(k) = c \exp(-rk)$ (其中 c 为归一化系数, r 为控制衰减速率的参数)
- ② $P(k) = ck^{-r}$ (其中 c 为归一化系数, $r > 1$ 为幂律指数)

通常高连通度的节点数较少, 低连通度的节点数较多.

在社交网络或信息网络中, 连通度分布影响信息传播的效率和方式.

不同速率参数 r 的网络, 其动力学性质也不同.

5.3.1 平均路径长度

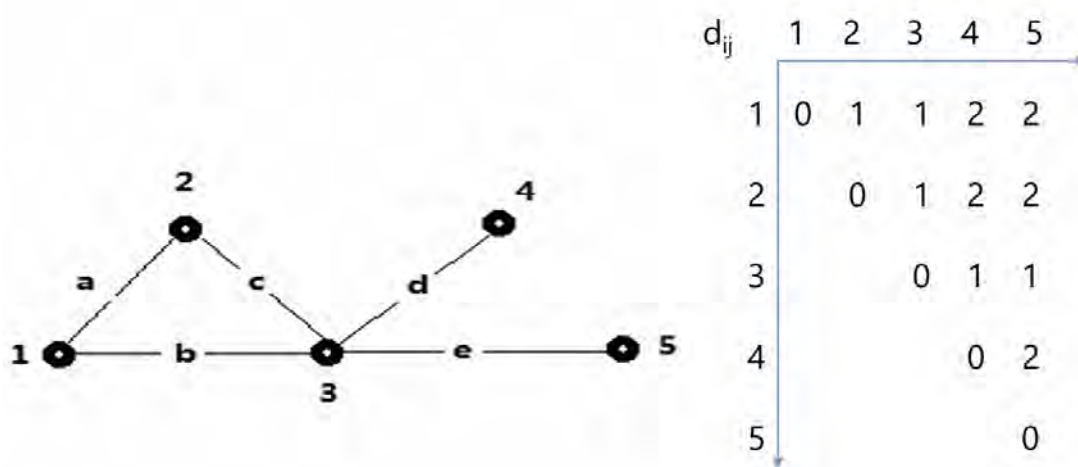
最短路径 (shortest path): 两个节点之间边数最少的路径。

最短路径的长度称为两点间的距离，记为 $\text{dist}(i, j)$

平均最短路径 (特征路径长度): 一个网络中两点之间最短路径长度 (距离) 的平均值 (不计算自连接):

$$\begin{aligned}\overline{\text{dist}} &:= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \text{dist}(i, j) \\ &= \frac{2}{N(N-1)} \sum_{j > i} \text{dist}(i, j)\end{aligned}$$

示例:



我们首先计算 1, 2, 3, 4, 5 节点之间的最短路径 $\text{dist}(i, j)$ ($j > i$) (无须重复计量)，填写至矩阵的上三角部分中。

平均最短路径即为:

$$\begin{aligned}\overline{\text{dist}} &= \frac{2}{5(5-1)} [(1+1+2+2) + (1+2+2) + (1+1) + 2] \\ &= \frac{2}{20} \cdot 15 \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

5.3.2 集聚系数

集聚系数 (Clustering Coefficient)

如网络中的一个节点 i 有 k_i 条边与 k_i 个节点相连，这 k_i 个节点之间最多可能有 $\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)$ 条边。设这 k_i 个节点之间实际存在的边数 E_i 和最大可能边数 $\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)$ 之比就定义为节点 i 的集聚系数 C_i

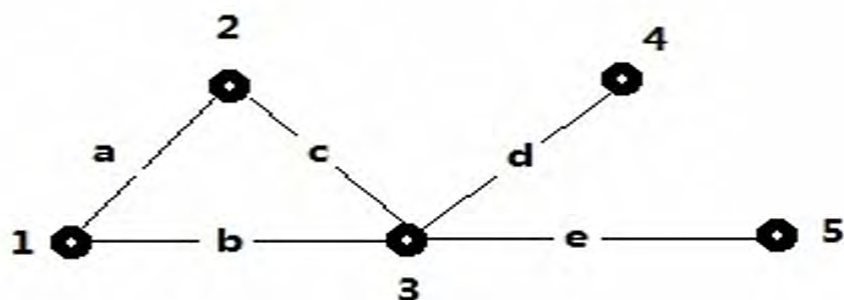
$$C_i := \frac{E_i}{\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)} = \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)}$$

整个网络的集聚系数 CC 就是所有节点的集聚系数的平均值:

$$\text{CC} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i$$

它用于衡量网络中信息的扩散性.

示例:



节点 1, 2, 3, 4, 5 的集聚系数为:

$$C_1 = \frac{1}{\frac{1}{2}2(2-1)} = 1$$

$$C_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}2(2-1)} = 1$$

$$C_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}4(4-1)} = \frac{1}{6}$$

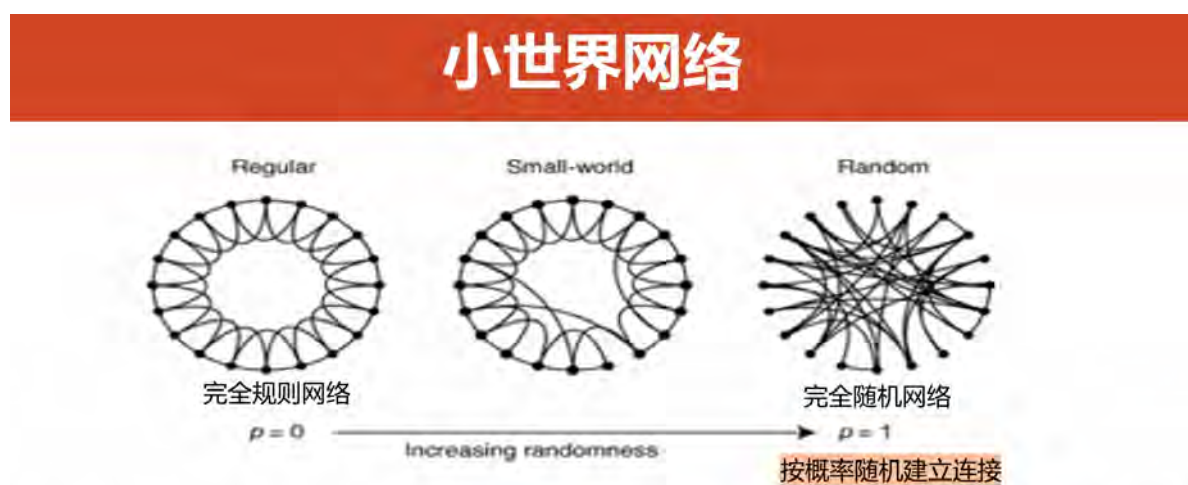
$$C_4 = 0$$

$$C_5 = 0$$

因此整个网络的集聚系数为:

$$\begin{aligned} CC &= \frac{1}{5}(C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5) \\ &= \frac{1}{5}(1 + 1 + \frac{1}{6} + 0 + 0) \\ &= \frac{13}{30} \end{aligned}$$

5.3.3 小世界网络



在网络理论中, 小世界网络是一类特殊的[复杂网络](#)结构, 在这种网络中大部分的节点彼此并不相互连接, 但绝大部分节点之间经过少数几条边就可到达。

小世界特征:

网络中任意两个节点之间的平均最短路径长度相对较短, 而网络的聚类系数 (即节点之间的连接程度) 相对较高.

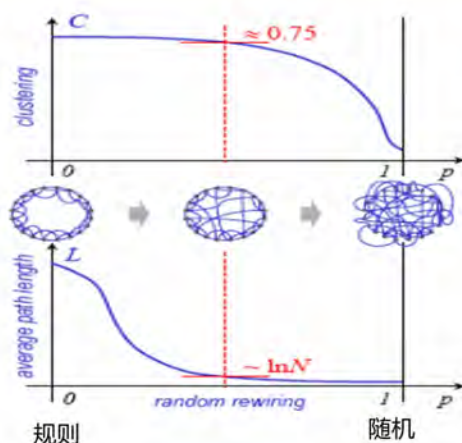
这意味着, 尽管网络可能是大规模的, 但通过少量的中间节点, 任意两个节点可以快速相互到达.

- 规则网络: 集聚系数和平均最短路径具有最大值
- 小世界网络: 大的集聚系数和小的平均最短路径
- 随机网络: 小的集聚系数和小的平均最短路径

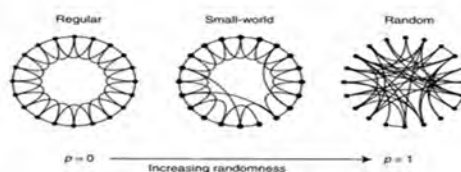
Watts-Strogatz 模型的主要步骤如下:

1. 从一个环形网络开始, 所有节点按顺序连接.
2. 对每条边以概率 p 进行重连, 重新连接到网络中的任意其他节点.
3. 随着 p 的增加, 网络将从一个高度聚类的结构转变为小世界网络.

小世界网络具有大集聚系数和小的平均最短路径



小世界网络: 大的集聚系数和小的平均最短路径
规则网络: 集聚系数和平均最短路径具有最大值
随机网络: 小的集聚系数和小的平均最短路径



$C(p)$: clustering coeff. $L(p)$: average path length

Strogatz 1998 Nature

5.3.4 无标度性质

无标度性质是指网络的度分布遵循幂律分布, 即大部分节点的连接度相对较小, 而少数节点的连接数极大.

这种特性意味着在网络中存在枢纽节点, 它们具有显著更多的连接, 形成了网络的结构基础.

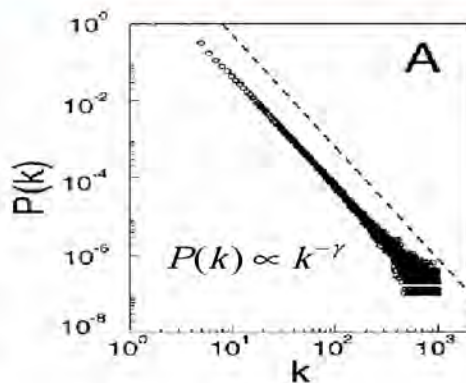
Barabási 和 Albert 的研究表明, 很多现实世界的网络 (例如互联网和社交网络) 并不是随机生成的, 而是具有无标度特性.

这一发现强调了网络生长和优先连接 (即新节点倾向于连接到已有的高连接度节点) 在网络形成中的重要性.

Barabási-Albert 模型描述了无标度网络的生成过程:

1. **增长**: 网络随着时间的推移逐步增加新节点.
2. **优先连接**: 新节点以概率 $\frac{k_i}{\sum_j k_j}$ 连接到现有节点 i , 其中 k_j 是节点 j 的连通度.
高连接度的节点更可能吸引新的连接.

无标度网络: 度分布呈现幂律特征



1999, Barabasi和Albert: BA无标度网络
Science, 286, 509 (1999)

度分布呈现幂律特征

$$P(k) \sim k^{-\alpha}$$

网络中大量链接数目少的节点占据绝大多数, 但总有极少数节点, 链接了网络中绝大多数节点, 这少数节点被成为核心hub节点或集散节点: 当新节点出现时, 它们更倾向于连接到核心hub节点, 使“富者逾富”

无标度网络模型由Albert-László Barabási和Réka Albert 在1999年 (Emergence of Scaling in Random Networks, Science) 首先提出, 现实网络的无标度特性源于众多网络所共有的两种生成机制:

- (i) 网络通过增添新节点而连续扩张;
- (ii) 新节点择优连接到连接较多的节点。

48

5.3.5 复杂网络

复杂网络主要特性

1) **开放性**。即与环境和其它系统进行相互作用, **交换物质、能量、信息**, 保持和发展系统内部的**有序性与结构稳定性**。在这种交换中, 系统经历着从低级向高级、从简单到复杂、从无序向有序的不断优化的动态发展过程。虽然开放性是所有真实系统的基本属性, 但这里的开放非指一般意义上的相互作用与交流, 而开放的度量、性质、强度对复杂系统的性态、演化具有决定性的意义。

➤ 例子, 人, 城市网络簇。

2) **涌现性**。即内部元素通过非线性相互作用, 在宏观层次上产生出**新的元素**, **使系统呈现出整体斑图、模式**等新的摸索。虽然**涌现**同样是所有系统都具有的, 但**这里涌现意味着新的整体属性的产生**。

➤ 例子, “整体大于部分之和”, 大脑的神经网络系统

3) **演化性**。即通过与所在环境中的其它系统的相互作用和内部的自组织, 使系统发展到新的阶段, 表现出阶段性、临界性, 完成系统演化的生命周期。

➤ 例: 社会网络中的人, 生物群体的自组织系统 (鸟群)

4) **复杂性**。包括系统的结构、行为、功能等多个方面同时具有的复杂性。

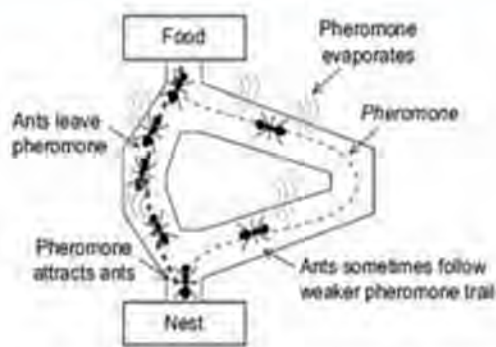
结构复杂性表现为多元性, 非对称性, 非均匀性, 非线性 (分岔 (Bifurcation), 混沌 (Chaos), 分形 Fractal); **行为复杂性**表现为学习, 自适应性, 混沌同步, 混沌边沿, 随机性等等; **认识复杂性**又称为主观复杂性, 它表现为不确定性, 描述复杂性与计算复杂性等等。

➤ 例: 神经网络中的突触有强有弱, 可抑制也可兴奋

5) **网络结构**。即系统内部和系统之间的相互作用可以看成由节点、边 (连接) 构成的体系, **出现网络复杂性、小世界特征与无标度特征等**。

❖41

群体网络：智慧的涌现



蚁群遵循简单规则：

- 1 每个蚂蚁都是随机探索。
- 2 蚂蚁在碰到食物的时候会原路返回。
- 3 每个寻找食物蚂蚁会追寻当前气味最浓地方前进

Stutzle, Marco Dorigo, Thomas.
Ant colony optimization. 2004.

Fig 5: Ant pheromone evaporations in path

蚂蚁通过散发信息素建立网络通讯联系

一只蚂蚁是没有发现寻找食物的最短路径的，但一群蚂蚁经过随机探索后，最短路径上的信息素密度会高于较长路径的密度，最终蚁群只沿着最短路径搬运食物：形成看似可以寻找最短路径的智能行为