高等线性代数 Homework 09

Due: Nov. 18, 2024
姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 1

设:

$$A=\begin{bmatrix}16&16&0&0\\4&16&12&0\\0&3&16&16\\0&0&4&16\end{bmatrix}$$

利用 Gershgorin 圆盘定理证明 A 的特征值的实部都严格大于 0

- **Lemma 1: (关于行的 Gershgorin 圆盘定理, Matrix Analysis 定理 $6.1.1$)**
  记 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 第 i 行的**去心绝对行和** (deleted absolute row sums) 为 $\operatorname{Row}_i'(A)=\sum_{j\neq i}^n|a_{ij}|$
  记 A 关于第 i 行的 **Gershgorin 圆盘**为 $G_i(A):=\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{ii}|\leq\operatorname{Row}_i'(A)\}$
  则我们有以下命题成立:
  - ① A 的 n 个特征值一定落在这 n 个关于行的 Gershgorin 圆盘的并集 $G(A):=\bigcup_{i=1}^nG_i(A)$ 中.
  - ② 进一步，若 $S\subset\mathbb{C}$ 是 A 的 k 个关于行的 Gershgorin 圆盘的并集，
    且与剩下的 $n-k$ 个关于行的 Gershgorin 圆盘不相交，
    则 S 恰好包含 A 的 k 个特征值 (按照它们的代数重数计算)
  - ③ 特殊地，若某个关于行的 Gershgorin 圆盘与其余 $n-1$ 个关于行的 Gershgorin 圆盘不相交，
    则它恰好包含 A 的 1 个特征值，且该特征值一定是单重的.
  - ④ 考虑第 i 行的 Gershgorin 圆盘 $G_i(A)$ 的元素到原点的最远距离
    即为 $\operatorname{Row}_i'(A)+|a_{ii}|=\sum_{j\neq i}^n|a_{ij}|+|a_{ii}|=\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$，即 A 第 i 行的绝对行和.
    注意到 A 的模最大特征值落在 $G(A):=\bigcup_{i=1}^nG_i(A)$ 中，因此我们有:

    $$\rho(A)=\max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i(A)|\leq\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|=\|A\|_\infty$$

    这与谱半径定理的结论 $\rho(A)\leq\|A\|_\infty$ 是吻合的.
- 对 $D^{-1}AD$ 及其转置 $DA^{-1}D^{-1}$ 应用 Gershgorin 圆盘定理就得到如下结果:
  Lemma 2: (Matrix Analysis 推论 $6.1.6$)
  任意给定 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $D=\operatorname{diag}\{d_1,\dots,d_n\}$ $(d_i>0\text{ for all }i=1,\dots,n)$
  我们都有以下命题成立:
  - ① A 的 n 个特征值一定落在 $G(D^{-1}AD)=\bigcup_{i=1}^nG_i(D^{-1}AD)=\bigcup_{i=1}^n\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{ii}|\leq\frac{1}{d_i}\sum_{j\neq i}^nd_j|a_{ij}|\}$ 中
    此外，若这些圆盘中有 k 个的并集与剩下的 $n-k$ 个都不相交，
    则这个并集恰好包含 A 的 k 个特征值 (按照它们的代数重数计算)
  - ② A 的 n 个特征值一定落在
    $G(DA^TD^{-1})=\bigcup_{j=1}^nG_j(DA^TD^{-1})=\bigcup_{j=1}^n\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{jj}|\leq d_j\sum_{i\neq j}^n\frac{1}{d_i}|a_{ij}|\}$ 中
    此外，若这些圆盘中有 k 个的并集与剩下的 $n-k$ 个都不相交，
    则这个并集恰好包含 A 的 k 个特征值 (按照它们的代数重数计算)
  - ③ $\rho(A)\leq\min\{\|D^{-1}AD\|_\infty,\|DA^TD^{-1}\|_\infty\}=\min\{\|D^{-1}AD\|_\infty,\|D^{-1}AD\|_1\}$

  记忆这些结论的诀窍是 "行变换是左乘的，列变换是右乘的"
  因此 $D^{-1}AD=[\frac{1}{d_i}a_{ij}d_j]$ 而 $DA^{\mathrm{T}}D^{-1}=[d_ia_{ji}\frac{1}{d_j}]$ (方括号中都是对应矩阵 (i,j) 位置上的元素)
  额外的参数 $d_1,\dots,d_n>0$ 让我们有足够的灵活性对特征值进行任意好的估计.

Proof:
考虑方阵:

$$A=\begin{bmatrix}16&16&&\\4&16&12&\\&3&16&16\\&&4&16\end{bmatrix}$$

注意到:

$$
\begin{aligned}
a_{12} &= 16 = 4 \times 4 = 4a_{21} \\
a_{23} &= 12 = 4 \times 3 = 4a_{32} \\
a_{34} &= 16 = 4 \times 4 = 4a_{43}
\end{aligned}
$$

故可取 $D := \operatorname{diag}\{8,4,2,1\}$ (后一项是前一项的 $\frac{1}{2}$)
则我们有:

$$
D^{-1}AD = \begin{bmatrix} 16 & 8 & & \\ 8 & 16 & 6 & \\ & 6 & 16 & 8 \\ & & 8 & 16 \end{bmatrix}
$$

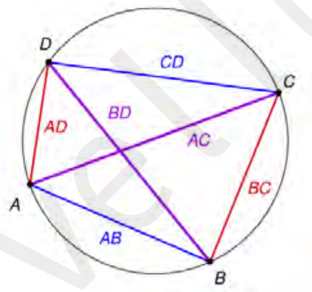
我们发现它严格对角占优，故它的所有关于行的 Gershgorin 圆盘都不包含 0 (复平面原点)
同时注意到 $D^{-1}AD$ 是对称阵，故 A 的特征值均为实数.
综上所述，A 的特征值均为正实数.

Problem 2

给定正整数 n
试证明对于任意 $a,b,c,d \in \mathbb{R}^n$ 都有:

$$
\|a-b\|_2^2 + \|b-c\|_2^2 + \|c-d\|_2^2 + \|d-a\|_2^2 \geq \|a-c\|_2^2 + \|b-d\|_2^2
$$

- **(一个更难的问题: Ptolemy 定理)**
  对于任意 $a,b,c,d \in \mathbb{R}^n$ 都有 $\|a-c\|_2\|b-d\|_2 \leq \|a-b\|_2\|c-d\|_2 + \|a-d\|_2\|b-c\|_2$
  取等条件是 a,b,c,d 共面且端点共圆，即四边形 $ABCD$ 是圆内接的:



Proof:
记 $\mathbb{R}^n$ 的 Euclid 内积为 $\langle \cdot,\cdot \rangle$，则我们有:

$$
\begin{aligned}
&\|a-b\|_2^2 + \|b-c\|_2^2 + \|c-d\|_2^2 + \|d-a\|_2^2 \\
&= \langle a-b,a-b\rangle + \langle b-c,b-c\rangle + \langle c-d,c-d\rangle + \langle d-a,d-a\rangle \\
&= 2\langle a,a\rangle + 2\langle b,b\rangle + 2\langle c,c\rangle + 2\langle d,d\rangle - 2\langle a,b\rangle - 2\langle b,c\rangle - 2\langle c,d\rangle - 2\langle d,a\rangle \\
&= 2\langle a,a\rangle + 2\langle b,b\rangle + 2\langle c,c\rangle + 2\langle d,d\rangle - 2\langle a+c,b+d\rangle \\
&= (\langle a,a\rangle + \langle b,b\rangle + \langle c,c\rangle + \langle d,d\rangle - 2\langle a,c\rangle - 2\langle b,d\rangle) + (\langle a,a\rangle + \langle b,b\rangle + \langle c,c\rangle + \langle d,d\rangle + 2\langle a,c\rangle + 2\langle b,d\rangle) - 2\langle a+c,b+d\rangle \\
&= (\langle a-c,a-c\rangle + \langle b-d,b-d\rangle) + (\langle a+c,a+c\rangle + \langle b+d,b+d\rangle) - 2\langle a+c,b+d\rangle \\
&= \|a-c\|_2^2 + \|b-d\|_2^2 + \|(a+c)-(b+d)\|_2^2 \\
&\geq \|a-c\|_2^2 + \|b-d\|_2^2
\end{aligned}
$$

取等条件是 $a+c=b+d$
这意味着 $ABCD$ 是平行四边形 (它一定是圆内接的)
此时就是平行四边形恒等式 $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \ \ (\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n)$

命题得证.

事实上，上述命题可以推广到 $\mathbb{C}^n$:

$$
\begin{aligned}
&\|a-b\|_2^2+\|b-c\|_2^2+\|c-d\|_2^2+\|d-a\|_2^2 \\
&=\langle a-b,a-b\rangle+\langle b-c,b-c\rangle+\langle c-d,c-d\rangle+\langle d-a,d-a\rangle \\
&=2\langle a,a\rangle+2\langle b,b\rangle+2\langle c,c\rangle+2\langle d,d\rangle-2\mathrm{Re}\langle a,b\rangle-2\mathrm{Re}\langle b,c\rangle-2\mathrm{Re}\langle c,d\rangle-2\mathrm{Re}\langle d,a\rangle \\
&=2\langle a,a\rangle+2\langle b,b\rangle+2\langle c,c\rangle+2\langle d,d\rangle-2\mathrm{Re}\langle a+c,b+d\rangle \\
&=(\langle a,a\rangle+\langle b,b\rangle+\langle c,c\rangle+\langle d,d\rangle-2\mathrm{Re}\langle a,c\rangle-2\mathrm{Re}\langle b,d\rangle) \\
&\quad\quad+(\langle a,a\rangle+\langle b,b\rangle+\langle c,c\rangle+\langle d,d\rangle+2\mathrm{Re}\langle a,c\rangle+2\mathrm{Re}\langle b,d\rangle)-2\mathrm{Re}\langle a+c,b+d\rangle \\
&=(\langle a-c,a-c\rangle+\langle b-d,b-d\rangle)+(\langle a+c,a+c\rangle+\langle b+d,b+d\rangle)-2\langle a+c,b+d\rangle \\
&=\|a-c\|_2^2+\|b-d\|_2^2+\|(a+c)-(b+d)\|_2^2 \\
&\geq\|a-c\|_2^2+\|b-d\|_2^2
\end{aligned}
$$

Problem 3

给定正整数 n，设 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是 n 维内积空间.
若 V 中的向量 x 与 V 的一组基 $v_1,\dots,v_n$ 的每个向量都正交，试证明 $x=0_V$
其中 0_V 代表 V 的加法单位元.

Proof:
我们可以使用经典 Gram-Schmidt 过程将 $v_1,\dots,v_n$ 标准正交化得到 $q_1,\dots,q_n$:
(由于 $v_1,\dots,v_n$ 线性无关，故这个过程可以完整进行)

$$
\begin{gathered}
v_1=q_1r_{11} \\
\Rightarrow \\
\begin{cases} r_{11}=\|v_1\|_2 \\ q_1=\frac{v_1}{\|v_1\|_2}=\frac{v_1}{r_{11}} \end{cases} \\
v_k=\sum_{i=1}^k q_ir_{ik}=\sum_{i=1}^k q_i\langle q_i,v_k\rangle=q_kr_{kk}+\sum_{i=1}^{k-1}q_i\langle q_i,v_k\rangle\ (k=2,\dots,n) \\
\Rightarrow \\
\text{for } k=2,\dots,n\ \begin{cases} r_{ik}=\langle q_i,v_k\rangle\ (i=1,\dots,k-1) \\ r_{kk}=\|v_k-\sum_{i=1}^{k-1}q_ir_{ik}\|_2 \\ q_k=\frac{1}{r_{kk}}(v_k-\sum_{i=1}^{k-1}q_ir_{ik}) \end{cases}
\end{gathered}
$$

可以证明 $q_1,\dots,q_n$ 是 V 的一组基.
否则必然存在某个 $q_i=0_V$，这与 $\|q_i\|=\langle q_i,q_i\rangle=1$ 的事实矛盾.
于是可设 x 在 $q_1,\dots,q_n$ 下的表示为 $x=\alpha_1q_1+\cdots+\alpha_nq_n$
(其中 $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$，而 $\mathbb{F}$ 是内积空间 V 对应的数域，注意内积空间一定是线性空间)

注意到 $v_1,\dots,v_n$ 可以表示为 $q_1,\dots,q_n$ 的线性组合: $v_k=\sum_{i=1}^k q_ir_{ik}\ (k=1,\dots,n)$
因此根据 x 与 $v_1,\dots,v_n$ 都正交可以推出 x 与 $q_1,\dots,q_n$ 都正交.
于是我们有:

$$
\alpha_i=\langle x,q_i\rangle=0\ (\forall\ i=1,\dots,n)
$$

这表明 $x=0_V$，命题得证.

Problem 4

给定正整数 n，设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称正定阵.
试证明对于任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 都有:

$$
y^{\mathrm{T}}A^{-1}y+x^{\mathrm{T}}Ax\geq 2y^{\mathrm{T}}x
$$

试探究等号成立的充要条件.

Proof:
注意到 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称正定阵 (自然是正规矩阵)
因此其存在谱分解 $A=Q^{\mathrm{T}}\Lambda Q$
其中 $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为正交阵，而 $\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ 是具有正实数对角元的对角阵.
我们定义:

$$
\begin{gathered}
\Lambda^{\frac{1}{2}}:=\mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n}\} \\
A^{\frac{1}{2}}:=Q^{\mathrm{T}}\Lambda^{\frac{1}{2}}Q \\
A^{-\frac{1}{2}}:=(A^{\frac{1}{2}})^{-1}=Q^{\mathrm{T}}\Lambda^{-\frac{1}{2}}Q
\end{gathered}
$$

显然 $A^{\frac{1}{2}}$ 也是对称正定阵.
因此我们有:

$$\begin{aligned} y^{\mathrm{T}}A^{-1}y+x^{\mathrm{T}}Ax-2y^{\mathrm{T}}x &= (A^{-\frac{1}{2}}y)^{\mathrm{T}}(A^{-\frac{1}{2}}y)+(A^{\frac{1}{2}}x)^{\mathrm{T}}(A^{\frac{1}{2}}x)-2(A^{-\frac{1}{2}}y)^{\mathrm{T}}(A^{\frac{1}{2}}x) \\ &= \|A^{-\frac{1}{2}}y-A^{\frac{1}{2}}x\|_2^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

当且仅当 $A^{-\frac{1}{2}}y=A^{\frac{1}{2}}x$ 时取等，即 $y=Ax$ 时取等.
命题得证.

事实上，上述命题可以推广到复数域:
给定正整数 n，设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是 Hermite 正定阵 (自然是正规矩阵)
因此其存在谱分解 $A=U^{\mathrm{H}}\Lambda U$
其中 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉矩阵，而 $\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ 是具有正实数对角元的对角阵.
可以类似定义:

$$\begin{aligned} \Lambda^{\frac{1}{2}} &:= \mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n}\} \\ A^{\frac{1}{2}} &:= U^{\mathrm{H}}\Lambda^{\frac{1}{2}}U \\ A^{-\frac{1}{2}} &:= (A^{\frac{1}{2}})^{-1}=U^{\mathrm{H}}\Lambda^{-\frac{1}{2}}U \end{aligned}$$

对于任意 $x,y\in\mathbb{C}^n$ 都有:

$$\begin{aligned} y^{\mathrm{H}}A^{-1}y+x^{\mathrm{H}}Ax-2\mathrm{Re}(y^{\mathrm{T}}x) &= (A^{-\frac{1}{2}}y)^{\mathrm{H}}(A^{-\frac{1}{2}}y)+(A^{\frac{1}{2}}x)^{\mathrm{H}}(A^{\frac{1}{2}}x)-2\mathrm{Re}((A^{-\frac{1}{2}}y)^{\mathrm{H}}(A^{-\frac{1}{2}}x)) \\ &= \|A^{-\frac{1}{2}}y-A^{\frac{1}{2}}x\|_2^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

当且仅当 $A^{-\frac{1}{2}}y=A^{\frac{1}{2}}x$ 时取等，即 $y=Ax$ 时取等.

邵老师提供的证明:
给定 Hermite 正定阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$
定义内积 $\langle x,y\rangle_A:=y^{\mathrm{H}}Ax$ $(\forall\, x,y\in\mathbb{C}^n)$ (记其诱导的范数为 $\|\cdot\|_A$)，则我们有:

$$\begin{aligned} y^{\mathrm{H}}A^{-1}y+x^{\mathrm{H}}Ax &= \langle A^{-1}y,A^{-1}y\rangle_A+\langle x,x\rangle_A \\ &= \|A^{-1}y\|_A^2+\|x\|_A^2 \\ &\geq 2\|A^{-1}y\|_A\|x\|_A \quad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\ &\geq 2|\langle x,A^{-1}y\rangle_A| \\ &\geq 2\langle x,A^{-1}y\rangle_A \\ &= 2y^{\mathrm{H}}x \end{aligned} \quad (\forall\, x,y\in\mathbb{C}^n)$$

Problem 5

若 T 是内积空间上的保持内积的变换，试证明 T 一定是线性变换.

Proof:
考虑域 $\mathbb{F}$ 上的内积空间 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$
若 T 是内积空间上的保持内积的变换，则我们有:

$$\langle T(x),T(y)\rangle=\langle x,y\rangle\ (\forall\, x,y\in V)$$

- ① 对于任意 $x_1,x_2\in V$ 我们都有:

$$\begin{aligned} &\langle T(x_1+x_2)-T(x_1)-T(x_2),T(x_1+x_2)-T(x_1)-T(x_2)\rangle \\ &=\langle T(x_1+x_2),T(x_1+x_2)\rangle-\langle T(x_1),T(x_1+x_2)\rangle-\langle T(x_2),T(x_1+x_2)\rangle \\ &\quad -\langle T(x_1+x_2),T(x_1)\rangle+\langle T(x_1),T(x_1)\rangle+\langle T(x_2),T(x_1)\rangle \\ &\quad -\langle T(x_1+x_2),T(x_2)\rangle+\langle T(x_1),T(x_2)\rangle+\langle T(x_2),T(x_2)\rangle \\ &=\langle x_1+x_2,x_1+x_2\rangle-\langle x_1,x_1+x_2\rangle-\langle x_2,x_1+x_2\rangle \\ &\quad -\langle x_1+x_2,x_1\rangle+\langle x_1,x_1\rangle+\langle x_2,x_1\rangle \\ &\quad -\langle x_1+x_2,x_2\rangle+\langle x_1,x_2\rangle+\langle x_2,x_2\rangle \\ &=\langle x_1,x_1+x_2\rangle+\langle x_2,x_1+x_2\rangle-\langle x_1,x_1+x_2\rangle-\langle x_2,x_1+x_2\rangle \\ &\quad -\langle x_1,x_1\rangle-\langle x_2,x_1\rangle+\langle x_1,x_1\rangle+\langle x_2,x_1\rangle \\ &\quad -\langle x_1,x_2\rangle-\langle x_2,x_2\rangle+\langle x_1,x_2\rangle+\langle x_2,x_2\rangle \\ &=0 \end{aligned}$$

因此 $T(x_1+x_2)=T(x_1)+T(x_2)$ $(\forall\, x_1,x_2\in V)$

- ② 对于任意 $x\in V$ 和 $\alpha\in\mathbb{F}$ 我们都有:

$$\begin{aligned}&\langle T(\alpha x)-\alpha T(x),T(\alpha x)-\alpha T(x)\rangle\\&=\langle T(\alpha x),T(\alpha x)\rangle-\langle\alpha T(x),T(\alpha x)\rangle-\langle T(\alpha x),\alpha T(x)\rangle+\langle\alpha T(x),\alpha T(x)\rangle\\&=\langle\alpha x,\alpha x\rangle-\alpha\langle x,\alpha x\rangle-\bar{\alpha}\langle\alpha x,x\rangle+|\alpha|^2\langle x,x\rangle\\&=|\alpha|^2\langle x,x\rangle-|\alpha|^2\langle x,x\rangle-|\alpha|^2\langle x,x\rangle+|\alpha|^2\langle x,x\rangle\\&=0\end{aligned}$$

综合①②可知 T 是 V 上的线性变换.

进一步，根据 T 保持内积的性质可知 T 保持范数:

$$\|T(x)\|=\sqrt{\langle T(x),T(x)\rangle}=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\|x\|\quad(\forall\, x\in V)$$

由于 T 是 V 上的线性变换，故 $\|T(x)-T(y)\|=\|T(x-y)\|=\|x-y\|$ $(\forall\, x,y\in V)$
因此 $T(x)=T(y)$ 当且仅当 $x=y$，这表明 T 是一个单射.
在有限维空间中，任何线性单射算子必定是满射，因此 T 还是一个满射.
于是 T 是 V 上的保同构.

(错误的做法)
考虑域 $\mathbb{F}$ 上的内积空间 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$
若 T 是内积空间上的保持内积的变换，则我们有:

$$\langle T(x),T(y)\rangle=\langle x,y\rangle\ (\forall\, x,y\in V)$$

现固定 $y\in V$

- ① 对于任意 $x_1,x_2\in V$ 我们都有:

$$\begin{aligned}\langle T(x_1+x_2),T(y)\rangle&=\langle x_1+x_2,y\rangle\\&=\langle x_1,y\rangle+\langle x_2,y\rangle\\&=\langle T(x_1),T(y)\rangle+\langle T(x_2),T(y)\rangle\\&=\langle T(x_1)+T(x_2),T(y)\rangle\end{aligned}$$

即有 $\langle T(x_1+x_2)-T(x_1)-T(x_2),T(y)\rangle=0$ $(\forall\, x_1,x_2\in V)$ 成立.
根据 $y\in V$ 的任意性可知 $T(x_1+x_2)=T(x_1)+T(x_2)$ $(\forall\, x_1,x_2\in V)$

> 注意: 我们需要说明 T 是满射，即 $\text{Range}(T)=V$
> 尽管在有限维内积空间 (一定是 Hilbert 空间) 中保积算子 T 一定是满射 (因而是同构)

- ② 对于任意 $x\in V$ 和 $\alpha\in\mathbb{F}$ 我们都有:

$$\begin{aligned}\langle T(\alpha x),T(y)\rangle&=\langle\alpha x,y\rangle\\&=\alpha\langle x,y\rangle\\&=\alpha\langle T(x),T(y)\rangle\\&=\langle\alpha T(x),T(y)\rangle\end{aligned}$$

即有 $\langle T(\alpha x)-\alpha T(x),T(y)\rangle=0$ $(\forall\, x\in V,\alpha\in\mathbb{F})$ 成立.
根据 $y\in V$ 的任意性可知 $T(\alpha x)=\alpha T(x)$ $(\forall\, x\in V,\alpha\in\mathbb{F})$

> 出的问题与 ① 相同

综合①②可知 T 是 V 上的线性变换.

Problem 6 (optional)

给定正整数 $n>1$
试证明 $\mathbb{C}^n$ 上的 l_1 范数和 l_∞ 范数都不能由内积诱导.

- **Lemma: 平行四边形恒等式 (Parallelogram Identity)**
设$\{V,\langle\cdot,\cdot\rangle\}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的内积空间，$\|\cdot\|$ 为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 诱导出的范数，则我们有:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2\ \ (\forall\, x,y\in V)$$

展开消去交叉项即可证明:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle+\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle \\
&= 2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle \\
&= 2\|x\|^2+2\|y\|^2
\end{aligned}$$

平行四边形恒等式刻画了能被内积诱导出的范数所必须满足的性质.

Proof:
我们只需举出反例说明 $\mathbb{C}^n\ (n>1)$ 上的 l_1 范数和 l_∞ 范数不满足平行四边形恒等式即可.

- ① 取 $x=e_1$ 和 $y=e_2$ (其中 $e_1,\dots,e_n$ 代表 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基)
  则我们有:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_1^2+\|x-y\|_1^2-2\|x\|_1^2-2\|y\|_1^2 &= \|e_1+e_2\|_1^2+\|e_1-e_2\|_1^2-2\|e_1\|_1^2-2\|e_2\|_1^2 \\
&= 2^2+2^2-2\cdot 1^2-2\cdot 1^2 \\
&= 4 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

  因此 $\mathbb{C}^n\ (n>1)$ 上的 l_1 范数不满足平行四边形恒等式.

- ② 取 $x=e_1$ 和 $y=e_2$，则我们有:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_\infty^2+\|x-y\|_\infty^2-2\|x\|_\infty^2-2\|y\|_\infty^2 &= \|e_1+e_2\|_\infty^2+\|e_1-e_2\|_\infty^2-2\|e_1\|_\infty^2-2\|e_2\|_\infty^2 \\
&= 1^2+1^2-2\cdot 1^2-2\cdot 1^2 \\
&= -2 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

  因此 $\mathbb{C}^n\ (n>1)$ 上的 l_2 范数不满足平行四边形恒等式.

综上所述，$\mathbb{C}^n\ (n>1)$ 上的 l_1 范数和 l_∞ 范数都不能由内积诱导.

Problem 7 (optional)

设 V 是 $[-1,1]$ 上的实系数多项式全体构成的向量空间.
定义 $V\times V\mapsto\mathbb{R}$ 的泛函 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 如下:

$$\langle p,q\rangle:=\int_{-1}^{1}\frac{p(t)q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\ (\forall\, p,q\in V)$$

试证明 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 构成 V 上的一个内积，
且第一类 Chebyshev 多项式 $p_n(t)=\cos(n\arccos(t))\ (\forall\, n\in\mathbb{N})$ 在该内积下两两正交.

- **(内积的定义)**
  设 V 是建立在域 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ 上的线性空间.
  泛函 $\langle\cdot,\cdot\rangle:V\times V\mapsto\mathbb{F}$ 称为一个**内积** (inner product)，如果它满足下列五条公理:
  对于任意 $x,y,z\in V$ 和 $\alpha\in\mathbb{F}$
  - ① 非负性: $\langle x,x\rangle\geq 0$
  - ② 正定性: $\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0_V$
  - ③ 线性性: $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$
  - ④ 齐次性: $\langle\alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$
  - ⑤ 共轭对称性: $\overline{\langle x,y\rangle}=\langle y,x\rangle$

Proof:
我们逐一验证 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在 V 上满足内积定义的五条公理:

- ① 非负性:

$$\langle p,p\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{(p(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\geq 0\ (\forall\, p\in V)$$

- ② 正定性:

$$\langle p,p\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{(p(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$p(t)\equiv 0\ (\forall\, t\in[-1,1])$$

- ③ 线性性:

$$
\begin{aligned}
\langle p_1+p_2,q\rangle &= \int_{-1}^{1}\frac{(p_1(t)+p_2(t))q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{p_1(t)q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}\frac{p_2(t)q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \quad (\forall\, p_1,p_2,q\in V) \\
&= \langle p_1,q\rangle+\langle p_2,q\rangle
\end{aligned}
$$

- ④ 齐次性:

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha p,q\rangle &= \int_{-1}^{1}\frac{(\alpha p(t))q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= \alpha\int_{-1}^{1}\frac{p(t)q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \quad (\forall\, p,q\in V,\alpha\in\mathbb{F}) \\
&= \alpha\langle p,q\rangle
\end{aligned}
$$

- ⑤ (共轭) 对称性:

$$
\begin{aligned}
\langle q,p\rangle &= \int_{-1}^{1}\frac{q(t)p(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{p(t)q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \quad (\forall\, p,q\in V) \\
&= \langle p,q\rangle
\end{aligned}
$$

因此 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 构成 V 上的一个内积.

现考虑第一类 Chebyshev 多项式 $p_n(t)=\cos{(n\arccos{(t)})}\ (\forall\, n\in\mathbb{N})$
对于任意 $m,n\in\mathbb{N}$ 我们都有:

$$
\begin{aligned}
\langle p_n,p_m\rangle &= \int_{-1}^{1}\frac{p_n(t)p_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{\cos{(n\arccos{(t)})}\cos{(m\arccos{(t)})}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\ (\text{Let }\theta:=\arccos{(t)}\in[0,\pi]) \\
&= \int_{\pi}^{0}\frac{\cos{(n\theta)}\cos{(m\theta)}}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}\mathrm{d}(\cos{(\theta)}) \\
&= \int_{\pi}^{0}\frac{\frac{1}{2}[\cos{(n\theta-m\theta)}+\cos{(n\theta+m\theta)}]}{\sin{(\theta)}}(-\sin{(\theta)}\mathrm{d}\theta) \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos{((n-m)\theta)}\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos{((n+m)\theta)}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

注意到对于任意 $k\in\mathbb{Z}$ 我们都有:

$$
\int_{0}^{\pi}\cos{(k\theta)}\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\int_0^\pi 1d\theta=\pi & \text{if } k=0\\ \frac{1}{k}\sin{(k\theta)}|_{\theta=0}^{\theta=\pi}=0 & \text{if } k\neq 0\end{cases}
$$

因此我们有:

$$
\begin{aligned}
\langle p_n,p_m\rangle &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos{((n-m)\theta)}\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos{((n+m)\theta)}\mathrm{d}\theta \\
&= \begin{cases}\pi & \text{if } m=n=0\\ \frac{1}{2}\pi & \text{if } m=n\in\mathbb{Z}_+\\ 0 & \text{if } m,n\in\mathbb{N}\text{ such that } m\neq n\end{cases}
\end{aligned}
$$

这表明 $p_n(t)=\cos{(n\arccos{(t)})}\ (\forall\, n\in\mathbb{N})$ 是两两正交的.
命题得证.

The End