FDU 回归分析 4. Logistic 回归

本文根据王勤文老师课堂笔记整理而成，并参考以下教材:

- 应用回归分析 (第 5 版, 何晓群, 刘文卿) 第 10 章

欢迎批评指正!

4.1 An Introduction

多元线性回归模型 $y = X\beta + \varepsilon$ 中无论是响应变量还是解释变量都是连续变量.
但在实际问题中我们会遇到离散变量，也称为定性变量 (例如性别、年份、成功与失败、战争与和平)
此时多元线性回归模型就不适用了.

本章我们假设响应变量 Y 为 0-1 取值的离散型随机变量 (代表类别标签)
而解释变量 $x_1, \ldots, x_d$ 都是连续变量.
我们记:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$$

此时建立回归方程的基本想法如下:

- ① 响应变量 Y 只有 0 和 1 两个取值，不适合作为连续的回归函数的因变量.
  我们可以将**条件期望** $\mathrm{E}[Y|x]$ (即**后验概率** $p\{Y=1|x\}$) 作为回归函数的因变量.
- ② 为了解决连续的线性函数不适合进行分类的问题，
  我们引入非线性函数 $g : \mathbb{R} \to (0,1)$ 来预测类别标签的后验概率 $\mathrm{P}\{Y=1|x\}$:

  $$\mathrm{P}\{Y=1|x\} = g(\beta^{\mathrm{T}} x)$$

  其中 $g(\cdot)$ 称为**激活函数** (activation function)，作用是将线性函数的值域 (实数域) 压缩到区间 $(0,1)$
  值域为 $[0,1]$ 的连续函数有很多，例如所有连续型随机变量的概率密度函数都符合要求.
  最常用的是 **Logistic 函数** (又称 Sigmoid 函数) $\sigma(x) := \frac{1}{1+\exp(-x)}$ $(\forall\ x \in \mathbb{R})$

4.2 Logistic 回归

4.2.1 基本概念

我们首先介绍 Logistic 回归模型中的一些基本概念:

- **① 赔率 (odds):**
  事件 E 发生与不发生的概率的比值称为赔率，记为 $\mathrm{odds}(E) := \frac{\mathrm{P}(E)}{\mathrm{P}(E^c)} = \frac{\mathrm{P}(E)}{1-\mathrm{P}(E)}$
- **② 对数赔率函数 (Logit 函数):**

  $$\mathrm{Logit}(p) := \log\left(\frac{p}{1-p}\right) \quad (p \in (0,1))$$

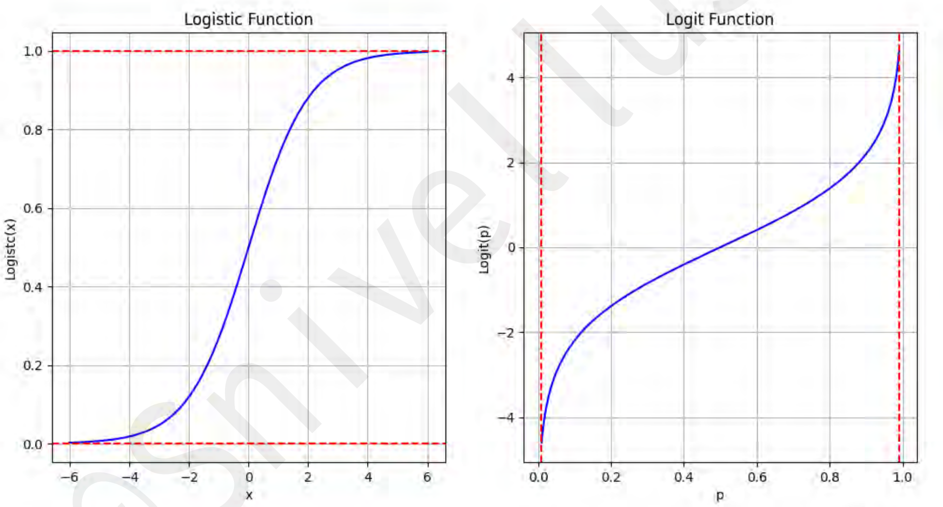
- **③ Logistic 函数 (Sigmoid 函数/逆 Logit 函数):**

  $$\sigma(x) := \frac{1}{1+\exp(-x)} = \frac{\exp(x)}{1+\exp(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Logistic 函数 $\sigma(\cdot)$ 的性质:
它把实数域的输入挤压到 $(0,1)$
当输入值在 0 附近时，Logistic 函数近似为线性函数 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ (一阶 Taylor 近似);
当输入值靠近两端 $(\pm\infty)$ 时，Logistic 函数对输入进行挤压.

$$\begin{aligned}
\sigma(-x) &= \frac{1}{1+\exp(x)} \\
&= \frac{\exp(-x)}{\exp(-x)+1} \\
&= 1-\frac{1}{1+\exp(-x)} \\
&= 1-\sigma(x) \\
\hline
\sigma'(x) &= \frac{\exp(-x)}{(1+\exp(-x))^2} \\
&= \frac{\exp(-x)}{1+\exp(-x)}\cdot\frac{1}{1+\exp(-x)} \\
&= \frac{1}{\exp(x)+1}\cdot\frac{1}{1+\exp(-x)} \\
&= \sigma(-x)\cdot\sigma(x) \\
&= (1-\sigma(x))\sigma(x)
\end{aligned}$$

Logistic 函数的反函数称为 Logit 函数 $\text{Logit}(p)=\log\left(\frac{p}{1-p}\right)\quad(p\in[0,1])$



4.2.2 模型假设

给定 d 个连续的解释变量 $x_1,\dots,x_d$ 和 0-1 取值的响应变量 Y (代表类别标签)
我们记:

$$x=\begin{bmatrix}1\\x_1\\\vdots\\x_d\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{d+1}\quad\beta=\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\vdots\\\beta_d\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{d+1}$$

假设标签 $Y=1$ 的后验概率为:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{Y=1|x\} &= \sigma(\beta^{\mathrm{T}}x) \\
&= \frac{1}{1+\exp\left(-\beta^{\mathrm{T}}x\right)} \\
&= \frac{\exp\left(\beta^{\mathrm{T}}x\right)}{1+\exp\left(\beta^{\mathrm{T}}x\right)}
\end{aligned}
$$

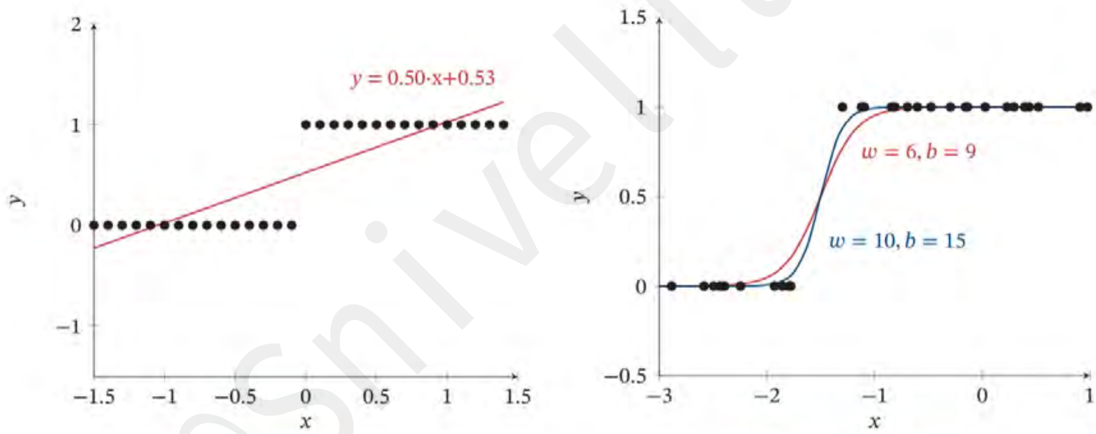
则标签 $Y=0$ 的后验概率为:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{Y=0|x\} &= 1-\mathrm{P}\{Y=1|x\} \\
&= 1-\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x) \\
&= \sigma(-\beta^{\mathrm{T}}x) \\
&= \frac{\exp\left(-\beta^{\mathrm{T}}x\right)}{1+\exp\left(-\beta^{\mathrm{T}}x\right)}
\end{aligned}
$$

于是我们有:

$$
\begin{aligned}
\beta^{\mathrm{T}}x &= \log\left(\frac{\mathrm{P}\{Y=1|x\}}{1-\mathrm{P}\{Y=1|x\}}\right) \\
&= \log\left(\frac{\mathrm{P}\{Y=1|x\}}{\mathrm{P}\{Y=0|x\}}\right) \\
&= \log\left(\mathrm{odds}(Y=1|x)\right) \\
&= \mathrm{Logit}(x)
\end{aligned}
$$

这样我们就建立了二分类问题和多元线性回归的关系.
下图给出了使用线性回归和 Logistic 回归来拟合一维数据的二分类问题的示例:



(a) 线性回归　　(b) Logistic 回归

图 3.4　一维数据的二分类问题示例

4.2.3 模型推导

给定 n 个样本观测: $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$
其中 $x_1, \ldots, x_n \in \{1\} \times \mathbb{R}^d$ (已经添加了对应于截距项的 1)，而 $y_1, \ldots, y_n \in \{0,1\}$
我们记:

$$
y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \{0,1\}^n \quad X = \begin{bmatrix} x_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ x_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(d+1)}
$$

我们将 $y_1, \ldots, y_n$ 视为随机变量 $Y_1, \ldots, Y_n$ 的实现.
假设 Y_i $(i=1,\ldots,n)$ 服从以下 Bernoulli 分布:

$$
\begin{gathered}
Y_i \sim \mathrm{B}(1, p_i) \text{ i.e. } Y_i = \begin{cases} 1, & p_i \\ 0, & 1 - p_i \end{cases} \\
\text{where } p_i := \mathrm{P}\{Y = 1 | x_i\} = \sigma(\beta^{\mathrm{T}} x_i)
\end{gathered}
$$

因此 $Y = [Y_1, \ldots, Y_n]^{\mathrm{T}}$ 的联合概率密度函数为:

$$
\begin{aligned}
f(Y) &:= \prod_{i=1}^{n} p_i^{Y_i} (1 - p_i)^{1 - Y_i} \\
&= \prod_{i=1}^{n} (\sigma(\beta^{\mathrm{T}} x_i))^{Y_i} (1 - \sigma(\beta^{\mathrm{T}} x_i))^{1 - Y_i}
\end{aligned}
$$

对数似然函数为:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(y | X, \beta) &= \log \left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1 - y_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{ y_i \log (p_i) + (1 - y_i) \log (1 - p_i) \} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i \log \left(\sigma(\beta^{\mathrm{T}} x_i) \right) + (1 - y_i) \log \left(1 - \sigma(\beta^{\mathrm{T}} x_i) \right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i \log \left(\sigma(\beta^{\mathrm{T}} x_i) \right) + (1 - y_i) \log \left(\sigma(-\beta^{\mathrm{T}} x_i) \right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i \log \left(\frac{1}{1 + \exp\left(-\beta^{\mathrm{T}} x_i\right)} \right) - y_i \log \left(\frac{1}{1 + \exp\left(\beta^{\mathrm{T}} x_i\right)} \right) + \log \left(\sigma(-\beta^{\mathrm{T}} x_i) \right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i \log \left(\frac{1 + \exp\left(\beta^{\mathrm{T}} x_i\right)}{1 + \exp\left(-\beta^{\mathrm{T}} x_i\right)} \right) + \log \left(\sigma(-\beta^{\mathrm{T}} x_i) \right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i \log \left(\exp\left(\beta^{\mathrm{T}} x_i\right) \right) + \log \left(\sigma(-\beta^{\mathrm{T}} x_i) \right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i (\beta^{\mathrm{T}} x_i) + \log \left(\sigma(-\beta^{\mathrm{T}} x_i) \right) \right\} \\
&= y^{\mathrm{T}} X \beta + 1_n^{\mathrm{T}} \log \left(\sigma(-X\beta) \right)
\end{aligned}
$$

这就是所谓的**交叉熵损失函数**，我们将其视为 $\beta \in \mathbb{R}^{d+1}$ 的函数:

$$
\begin{aligned}
L(\beta) &:= -\sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i \log \left(\sigma(\beta^{\mathrm{T}} x_i) \right) + (1 - y_i) \log \left(1 - \sigma(\beta^{\mathrm{T}} x_i) \right) \right\} \\
&= -y^{\mathrm{T}} X \beta - 1_n^{\mathrm{T}} \log \left(\sigma(-X\beta) \right)
\end{aligned}
$$

我们的目标是求解优化问题:

$$
\min_{\beta \in \mathbb{R}^{d+1}} L(\beta) := -\sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i \log \left(\sigma(\beta^{\mathrm{T}} x_i) \right) + (1 - y_i) \log \left(1 - \sigma(\beta^{\mathrm{T}} x_i) \right) \right\}
$$

但上述问题一般没有解析解，因此我们使用迭代法求解.
为提供模型的泛化能力，我们还可以引入正则化项 $\lambda \|\beta\|$
其中 $\lambda > 0$ 为正则化系数，而 $\| \cdot \|$ 为 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上的某个范数.

4.2.4 梯度法

考虑交叉熵损失函数:

$$
\begin{aligned}
L(\beta) &= -\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i \log\left(\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i)\right) + (1-y_i)\log\left(1-\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i)\right)\right\} \quad (\text{denote } p_i := \sigma(\beta^{\mathrm{T}}x)) \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i \log(p_i) + (1-y_i)\log(1-p_i)\right\}
\end{aligned}
$$

注意到:

$$
\begin{aligned}
\nabla_\beta \log(p_i) &= \nabla_\beta \log\left(\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i)\right) \\
&= \frac{1}{\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i)}\nabla_\beta\{\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i)\} \quad \left(\text{note that } \frac{d}{dt}\sigma(t) = (1-\sigma(t))\sigma(t)\right) \\
&= \frac{1}{\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i)}(1-\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i))\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i)\nabla_\beta\{\beta^{\mathrm{T}}x_i\} \\
&= (1-\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i))x_i \\
&= (1-p_i)x_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_\beta \log(1-p_i) &= \nabla_\beta \log\left(1-\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i)\right) \quad (\text{note that } \sigma(-t) = 1-\sigma(t)) \\
&= \nabla_\beta \log\left(\sigma(-\beta^{\mathrm{T}}x_i)\right) \\
&= (1-\sigma(-\beta^{\mathrm{T}}x_i))\cdot(-x_i) \\
&= -\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i)x_i \\
&= -p_i x_i
\end{aligned}
$$

于是损失函数的梯度为:

$$
\begin{aligned}
\nabla_\beta L(\beta) &= -\nabla_\beta\left\{\sum_{i=1}^{n}\{y_i\log(p_i) + (1-y_i)\log(1-p_i)\}\right\} \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\{y_i\nabla_\beta\log(p_i) + (1-y_i)\nabla_\beta\log(1-p_i)\} \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\{y_i\cdot(1-p_i)x_i + (1-y_i)\cdot[-p_ix_i]\} \\
&= -\sum_{i=1}^{n}(y_i-p_i)x_i \\
&= -X^{\mathrm{T}}(y-p) \quad \left(\text{where } p := \sigma(X\beta) = \begin{bmatrix}\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_1) \\ \vdots \\ \sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}p_1 \\ \vdots \\ p_n\end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

使用梯度法训练模型:

- 初始化 $\beta^{(0)} = 0_{d+1}$
- 然后迭代更新参数直至达到某个预设定的停止条件:

$$
\begin{aligned}
p^{(k)} &= \sigma(X\beta^{(k)}) \\
d^{(k)} &= -\nabla_\beta L(\beta^{(k)}) = X^{\mathrm{T}}(y-p^{(k)}) \\
t_k &= \text{Armijo}(\beta^{(k)}, d^{(k)}) \\
\beta^{(k+1)} &= \beta^{(k)} + t_k d^{(k)}
\end{aligned}
$$

其中 t_k 是步长，$d^{(k)}$ 为下降方向，$p^{(k)}$ 是当参数为 $\beta^{(k)}$ 时，Logistic 回归模型的 n 维输出向量.
步长 t_k 的选择可使用 **Armijo 准则:**
固定初始步长 $\hat{t}$ 和回溯因子 $\gamma \in (0,1)$，以及尺度因子 $\alpha \in (0,1)$
我们不断试验步长 $\gamma^m\hat{t}\ \ (m = 0, 1, \ldots)$ 直至找到第一个非负整数 m，
使得 $L(\beta^{(k)} + (\gamma^m\hat{t})d^{(k)}) - L(\beta^{(k)}) \le \alpha(\gamma^m\hat{t})(\nabla_\beta L(\beta^{(k)}))^{\mathrm{T}}d^{(k)}$ 成立.
这不但保证了每步迭代有下降，还保证了下降的程度是充分大的.

4.2.5 Newton 法

我们已经得到了损失函数的梯度:

$$
\begin{aligned}
\nabla_\beta L(\beta) &= -X^{\mathrm{T}}(y-p) \\
&= -\sum_{i=1}^n (y_i - p_i)x_i \\
&= -\sum_{i=1}^n (y_i - \sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i))x_i
\end{aligned}
$$

其中 $p=\sigma(X\beta)=[\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_1),\dots,\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_n)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$，而 $X=[x_1,\dots,x_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times(d+1)}$
注意到:

$$
\begin{aligned}
\nabla_\beta\{p_i\} &= \nabla_\beta\{\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i)\} \\
&= (1-\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i))\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i)\nabla_\beta\{\beta^{\mathrm{T}}x_i\} \\
&= (1-\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i))\sigma(\beta^{\mathrm{T}}x_i)x_i \\
&= (1-p_i)p_i x_i
\end{aligned}
$$

于是损失函数的 Hesse 矩阵为:

$$
\begin{aligned}
\nabla_\beta^2 L(\beta) &= \frac{\partial}{\partial\beta}\nabla_\beta L(\beta) \\
&= \frac{\partial}{\partial\beta}\{-X^{\mathrm{T}}(y-p)\} \\
&= \frac{\partial}{\partial\beta}\left\{-\sum_{i=1}^n (y_i-p_i)x_i\right\} \\
&= -\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial}{\partial\beta}\{y_i-p_i\} \quad (\text{note that } \frac{\partial}{\partial\beta}p_i = \nabla_\beta^{\mathrm{T}}\{p_i\} = (1-p_i)p_i x_i^{\mathrm{T}}) \\
&= -\sum_{i=1}^n x_i\cdot[0_{d+1} - (1-p_i)p_i x_i^{\mathrm{T}}] \\
&= \sum_{i=1}^n (1-p_i)p_i x_i x_i^{\mathrm{T}} \\
&= X^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{diag}\{(1_n - p)\odot p\}\cdot X
\end{aligned}
$$

其中 $\odot$ 代表 Hadamard 乘积，即逐元素乘积.

使用 Newton 法训练模型:

- 初始化 $\beta^{(0)}=0_{d+1}$
- 然后迭代更新参数直至达到某个预设定的停止条件:

$$
\begin{aligned}
p^{(k)} &= \sigma(X\beta^{(k)}) \\
\nabla_\beta L(\beta^{(k)}) &= -X^{\mathrm{T}}(y-p^{(k)}) \\
\nabla_\beta^2 L(\beta^{(k)}) &= X^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{diag}\{(1_n-p^{(k)})\odot p^{(k)}\}\cdot X \\
d^{(k)} &= -(\nabla_\beta^2 L(\beta^{(k)}))^{-1}\nabla_\beta L(\beta^{(k)}) \\
t_k &= \mathrm{Armijo}(\beta^{(k)}, d^{(k)}) \\
\beta^{(k+1)} &= \beta^{(k)} + t_k d^{(k)}
\end{aligned}
$$

其中 t_k 是学习率，$d^{(k)}$ 为下降方向，$p^{(k)}$ 是当参数为 $\beta^{(k)}$ 时 Logistic 回归模型的 n 维输出向量.
步长 t_k 的选择可使用 **Armijo 准则:**
固定初始步长 $\hat{t}$ 和回溯因子 $\gamma\in(0,1)$，以及尺度因子 $\alpha\in(0,1)$
我们不断试验步长 $\gamma^m\hat{t}\ \ (m=0,1,\dots)$ 直至找到第一个非负整数 m，
使得 $L(\beta^{(k)}+(\gamma^m\hat{t})d^{(k)})-L(\beta^{(k)})\le\alpha(\gamma^m\hat{t})(\nabla_\beta L(\beta^{(k)}))^{\mathrm{T}}d^{(k)}$ 成立.
这不但保证了每步迭代有下降，还保证了下降的程度是充分大的.

4.2.6 另一种视角

求解 Logistic 回归的 Newton 法的每步迭代相当于进行一次加权最小二乘:

$$
\begin{aligned}
\beta^{(k+1)} &= \beta^{(k)} + t_k d^{(k)} \\
&= \beta^{(k)} + t_k \left[-(X^{\mathrm{T}} \mathrm{diag}\{p^{(k)} \odot (1_n - p^{(k)})\} X)^{-1} (-X^{\mathrm{T}}(y - p^{(k)})) \right] \\
&= \beta^{(k)} + t_k (X^{\mathrm{T}} \mathrm{diag}\{p^{(k)} \odot (1_n - p^{(k)})\} X)^{-1} X^{\mathrm{T}}(y - p^{(k)}) \quad (\text{denote } W_k := \mathrm{diag}\{p^{(k)} \odot (1_n - p^{(k)})\}) \\
&= \beta^{(k)} + t_k (X^{\mathrm{T}} W_k X)^{-1} X^{\mathrm{T}}(y - p^{(k)}) \\
&= (X^{\mathrm{T}} W_k X)^{-1} X^{\mathrm{T}} W_k [X\beta^{(k)} - t_k W_k^{-1}(y - p^{(k)})] \quad (\text{denote } z^{(k)} := X\beta^{(k)} - t_k W_k^{-1}(y - p^{(k)})) \\
&= (X^{\mathrm{T}} W_k X)^{-1} X^{\mathrm{T}} W_k z^{(k)}
\end{aligned}
$$

因此迭代中的每一个 $\beta^{(k+1)}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ 都能视为一个加权最小二乘估计量.

> 或者我们也可以将 $(X^{\mathrm{T}} W_k X)^{-1} X^{\mathrm{T}}(y - p^{(k)})$ 视为一个加权最小二乘估计量.
> 每次迭代 $\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} + t_k (X^{\mathrm{T}} W_k X)^{-1} X^{\mathrm{T}}(y - p^{(k)})$
> 都相当于在当前解的基础上加上一个加权最小二乘估计量 $t_k \cdot (X^{\mathrm{T}} W_k X)^{-1} X^{\mathrm{T}}(y - p^{(k)})$

当样本量 $n \to \infty$ 时，对于任意 $k = 0, 1, \ldots$ 我们都有:
(王勤文老师: 也许可以回到 β 原本满足的方程，使用一阶 Taylor 展开来证明这个式子)

$$
(X^{\mathrm{T}} W_k X)^{-\frac{1}{2}} \beta^{(k+1)} \to N(\beta_{\text{true}}, I_{d+1})
$$

因而当 $n, k \to \infty$ 时有: **(存疑: 但是 W_{true} 的计算公式包含 n 怎么办?)**

$$
\beta^{(k)} \to N(\beta_{\text{true}}, (X^{\mathrm{T}} W_{\text{true}} X)^{-1}) \text{ where } \begin{cases} p_{\text{true}} = \sigma(X\beta_{\text{true}}) \\ W_{\text{true}} = \mathrm{diag}\{p_{\text{true}} \odot (1_n - p_{\text{true}})\} \end{cases}
$$

4.2.7 似然比检验

在 Logistic 回归的背景下，
似然比检验 (likelihood ratio test) 可以用来检验某一组回归系数是否为零 (即对应的解释变量是否对模型有显著贡献)
我们将 $\beta \in \mathbb{R}^{d+1}$ 分为两个部分，$\beta^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\beta^{(1)} \in \mathbb{R}^{d+1-m}$，其中前者是我们感兴趣的解释变量的回归系数.
我们相应地将 $X \in \mathbb{R}^{n \times (d+1)}$ 分为两个部分，$X^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 和 $X^{(1)} \in \mathbb{R}^{n \times (d+1-m)}$
考虑检验问题:

$$
H_0 : \beta^{(0)} = 0_m \ \leftrightarrow \ H_1 : \beta^{(0)} \neq 0_m
$$

我们构造如下的似然比检验统计量:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LR} := &-2 \max_{\beta^{(1)} \in \mathbb{R}^{d+1-m}} \text{loglikelihood(reduced model)} + 2 \max_{\beta \in \mathbb{R}^{d+1}} \text{loglikelihood(full model)} \\
&= -2 \max_{\beta^{(1)} \in \mathbb{R}^{d+1-m}} \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i \log \left(\sigma((\beta^{(1)})^{\mathrm{T}} x_i^{(1)}) \right) + (1 - y_i) \log \left(1 - \sigma((\beta^{(1)})^{\mathrm{T}} x_i^{(1)}) \right) \right\} \\
&\quad + 2 \max_{\beta \in \mathbb{R}^{d+1-m}} \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i \log \left(\sigma(\beta^{\mathrm{T}} x_i) \right) + (1 - y_i) \log \left(1 - \sigma(\beta^{\mathrm{T}} x_i) \right) \right\} \\
&\overset{H_0}{\sim} \chi^2_{(m)}
\end{aligned}
$$

设因子水平为 α
当 $\mathrm{LR} > \chi^2_{(m),\alpha}$ 时我们拒绝零假设 $H_0 : \beta^{(0)} = 0_m$，认为 $\beta^{(0)}$ 中回归系数对应的解释变量是显著的.
其中 $\chi^2_{(m),\alpha}$ 为自由度 m 的卡方分布的 $1 - \alpha$ 分位数.

The End