脑科学与类脑系统 Homework 03

姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 1

把 10 枚相同的硬币抛在地面上，每枚硬币有正反两种可能.
试求观察前后获取的信息量?

Solution:
由于硬币是相同的，故我们只关心有多少个硬币朝上 (具体哪些硬币朝上，我们并不关心)
硬币朝上的数量 $X \sim \mathrm{B}(10, 0.5)$ (二项分布)
因此观察前的信息熵为:

$$\begin{aligned}
H_{\text{before}} &= -\sum_{k=0}^{10} \mathrm{P}\{X=k\} \log\left(\mathrm{P}\{X=k\}\right) \\
&= -\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 0.5^k (1-0.5)^{10-k} \log_2\left(\binom{10}{k} 0.5^k (1-0.5)^{10-k}\right) \\
&= -\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 0.5^{10} \log_2\left(\binom{10}{k} 0.5^{10}\right) \\
&\approx 2.7064 \text{ bits}
\end{aligned}$$

而观察后的信息熵为:

$$H_{\text{after}} = 0$$

因此观察前后获取的信息量为:

$$\Delta I := H_{\text{before}} - H_{\text{after}} = 2.7064 \text{ bits}$$

Problem 2

有一同学，考试成绩数学不及格的概率是 0.15，语文不及格的概率是 0.05，两者都不及格的概率为 0.03
在一次考试中，已知他数学不及格，那么他语文不及格的概率是多少?

Solution:
记该同学数学不及格和语文不及格的事件分别为 A, B，则根据题设我们有:

$$\begin{aligned}
P(A) &= 0.15 \\
P(B) &= 0.05 \\
P(A, B) &= 0.03
\end{aligned}$$

因此在给定他数学不及格的条件下，他语文不及格的概率为:

$$P(B|A) = \frac{P(A,B)}{P(A)} = \frac{0.03}{0.15} = 0.2$$

Problem 3

Monty Hall 问题，它是一个概率论中的经典问题，通常用来说明直觉在概率判断中的不足.
问题背景如下:
有三个房间，其中两个是陷阱，一个是大奖. 你不知道每个房间后面是什么.
你首先选择一个房间 (例如，房间 A)
主持人知道每个房间后面的内容，故意打开一个没有大奖的房间 (例如，房间 B)，并告诉你这是一个陷阱.
现在你有两个选择: 坚持你原来的选择 (房间 A)，或者换到未选择的房间 (房间 C)

在做出选择后，许多人可能会认为坚持或换的机会是相等的，即每个房间都有 $\frac{1}{2}$ 的概率
实际上这个问题的概率并不对称.

- 选择房间 A 后，大奖有 $\frac{1}{3}$ 的概率在房间 A 中.
- 不论你选择哪个房间，主持人总是会打开一个没有大奖的房间.
  若你的初始选择是正确的 ($\frac{1}{3}$ 的概率)，换房间将失去大奖.
  若你的初始选择是错误的 ($\frac{2}{3}$ 的概率)，换房间会得到大奖.

因此从概率的角度来看，换房间是更有利的选择，成功获得大奖的概率为 $\frac{2}{3}$，而坚持原选择的成功概率只有 $\frac{1}{3}$

计算信息量:

- ① 主持人提供信息前:

$$\begin{aligned} H_{\text{before}} &= -(\frac{1}{3}\log_2(\frac{1}{3}) + \frac{1}{3}\log_2(\frac{1}{3}) + \frac{1}{3}\log_2(\frac{1}{3})) \\ &= -\log_2(\frac{1}{3}) \\ &= \log_2 3 \\ &\approx 1.585 \text{ bit} \end{aligned}$$

- ② 主持人提供信息后:

$$\begin{aligned} H_{\text{after}} &= -(\frac{1}{3}\log_2(\frac{1}{3}) + 0\log_2(0) + \frac{2}{3}\log_2(\frac{2}{3})) \\ &= \frac{1}{3}\log_2 3 + \frac{2}{3}\log_2(\frac{3}{2}) \\ &= \log_2 3 - \frac{2}{3} \\ &\approx 0.918 \text{ bit} \end{aligned}$$

- ③ 获得的信息量:

$$\Delta I := H_{\text{before}} - H_{\text{after}} = \frac{2}{3} = 0.667 \text{ bit}$$