泛函分析 Homework 05

姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 1

设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范空间.
设 X 中的点列 $\{x_n\}$ 满足 $\|x_n\|\leq 1\ (\forall\ n\in\mathbb{Z}_+)$ 且弱收敛于 $x_0\in X$
试证明 $\|x_0\|\leq 1$

- **Lemma: (泛函分析讲义, 定理 $5.1.5$)**
  设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范空间.
  对于任意 $x_0\in X\backslash\{0_X\}$，都存在 X 上的有界线性泛函 f 满足 $\|f\|=1$ 且 $f(x_0)=\|x_0\|$

  证明:
  任意给定 $x_0\in X\backslash\{0_X\}$
  在一维子空间 $X_0:=\{\alpha x_0:\alpha\in\mathbb{R}\}$ 上定义线性泛函:

$$f_0(x)=f_0(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|\quad(\text{where } x=\alpha x_0 \text{ for some } \alpha\in\mathbb{R})$$

  显然 $f_0(\cdot)$ 是 X_0 上的有界线性泛函，且有:

$$\|f_0\|_{X_0}=\sup_{x\neq 0_X\in X_0}\frac{|f_0(x)|}{\|x\|}=\sup_{\alpha\neq 0\in\mathbb{R}}\frac{|\alpha|\|x_0\||}{\|\alpha x_0\|}=1$$

  根据 Hahn-Banach 延拓定理可知:
  存在 X 上的有界线性泛函 f 满足 $\|f\|_X=\|f_0\|_{X_0}=1$ 且 $f(x)=f_0(x)\ (\forall\ x\in X_0)$
  取 $x=x_0$ 即得 $f(x_0)=f_0(x_0)=1\cdot\|x_0\|=\|x_0\|$

Proof:
当 $x_0=0_X$ 时，$\|x\|\leq 1$ 显然成立.
当 $x_0\neq 0_X$ 时，根据 **Lemma** 可知存在 X 上的有界线性泛函 $f\in X_*$ 满足 $\|f\|=1$ 且 $f(x_0)=\|x_0\|$
注意到 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，即对于任意有界线性泛函 $g\in X_*$ 都有 $\lim_{n\to\infty}g(x_n)=g(x_0)$
于是我们有 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$ 成立.
因此我们有:

$$\begin{aligned}\|x_0\|&=f(x_0)\\&=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\\&\leq\lim_{n\to\infty}\{\|f\|\cdot\|x_n\|\}\quad(\text{note that }\|f\|=1\text{ and }\|x_n\|\leq 1\text{ for all }n\in\mathbb{Z}_+)\\&\leq 1\end{aligned}$$

命题得证.

Problem 3

设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范空间，S 是 X 的子空间，$x_0\in X$
试证明 $x_0\in\text{cl}(S)$ 当且仅当对于 X 上任意满足 $f(x)=0\ (\forall\ x\in S)$ 的有界线性泛函 $f\in X_*$ 都有 $f(x_0)=0$ 成立.

- **Lemma (泛函分析讲义, 定理 $5.1.8$)**
  设 $(X, \|\cdot\|)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的赋范空间，S 是 X 的子空间.
  若 $x_0 \in X$ 且 $d := d(x_0, S) = \inf_{x \in S} \|x_0 - x\| > 0$，
  则必然存在有界线性泛函 f 满足:
  - ① $f(x) = 0\ (\forall\, x \in S)$
  - ② $f(x_0) = d$ (或等价地, $f(x_0) = 1$)
  - ③ $\|f\| = 1$ (或等价地, $\|f\| = \frac{1}{d}$)

  通俗来说，根据一个子空间 S 和落在其外的一个点 x_0，
  可以构造一个有界线性泛函 f，其在子空间 S 上恒为 0，在 x_0 处取到间距 d

  证明:
  设 $X_0 := x_0 + S = \{x + \alpha x_0 : x \in S, \alpha \in \mathbb{F}\}$
  在 X_0 上定义 $f_0(x + \alpha x_0) = \alpha d\ (\forall\, x \in S, \alpha \in \mathbb{F})$
  显然 f_0 是 X_0 上的线性泛函，且满足 $\begin{cases} f_0(x_0) = d \\ f_0(x) = 0\ (\forall\, x \in S) \end{cases}$

  注意到对于任意 $x \in S$ 和 $\alpha \in \mathbb{F}$ 都有:

$$
\begin{aligned}
|f_0(x + \alpha x_0)| &= |\alpha d| \quad (\text{note that } d = \inf_{x \in S} \|x_0 - x\| \leq \|x_0 - x\| \text{ for all } x \in S) \\
&\leq |\alpha| \cdot \left\| x_0 + \frac{x}{\alpha} \right\| \\
&= \|\alpha x_0 + x\|
\end{aligned}
$$

  因此我们有:

$$
\begin{aligned}
\|f_0\|_{X_0} &= \sup_{y \neq 0_X \in X_0} \frac{|f_0(y)|}{\|y\|} \quad (\text{note that } X_0 := x_0 + S = \{x + \alpha x_0 : x \in S, \alpha \in \mathbb{F}\}) \\
&= \sup_{x \in S, \alpha \in \mathbb{F}} \frac{|f_0(x + \alpha x_0)|}{\|x + \alpha x_0\|} \\
&\leq 1
\end{aligned}
$$

  根据 $d = \inf_{x \in S} \|x_0 - x\|$ 可知存在序列 $\{x_n\} \in S \subset X_0$ 使得 $\|x_n - x_0\| \to d\ (n \to \infty)$
  于是我们有:

$$
\|f_0\|_{X_0} \geq \frac{|f_0(x_n - x_0)|}{\|x_n - x_0\|} = \frac{|-d|}{\|x_n - x_0\|} \to \frac{d}{d} = 1 \quad (n \to \infty)
$$

  因此 $\|f_0\|_{X_0} = 1$
  根据 Hahn-Banach 延拓定理可知，存在 X 上的线性泛函 f 满足:
  - ① 对于任意 $x \in S \subset X_0$ 都有 $f(x) = f_0(x) = 0$ 成立
  - ② $f(x_0) = f_0(x_0) = d$
  - ③ $\|f\|_X = \|f_0\|_{X_0} = 1$

Proof:

- **必要性:**
  若 $x_0 \in \mathrm{cl}(S)$，则存在 $\{x_n\} \subset S$ 满足 $\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = 0$
  设 f 是 X 上任一满足 $f(x) = 0\ (\forall\, x \in S)$ 的有界线性泛函.
  根据 f 的连续性 (赋范空间上的有界线性泛函必然是连续线性泛函) 可知:

$$
f(x_0) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n \right) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0
$$

- **充分性:**
  设对于 X 上任意满足 $f(x)=0\ (\forall\, x\in S)$ 的有界线性泛函 $f\in X_*$ 都有 $f(x_0)=0$ 成立.
  (反证法) 假设 $x_0\notin \mathrm{cl}(S)$，则 $d(x_0,S)>0$
  根据 **Lemma** 可知存在 X 上的有界线性泛函 f 满足:
  - ① $f(x)=0\ (\forall\, x\in S)$
  - ② $f(x_0)=d(x_0,S)$
  - ③ $\|f\|=1$

  这与 "对于 X 上任意满足 $f(x)=0\ (\forall\, x\in S)$ 的有界线性泛函 $f\in X_*$ 都有 $f(x_0)=0$ 成立" 相矛盾.
  因此 $x_0\notin \mathrm{cl}(S)$

Problem 4

设实数列 $\{a_k\}$ 对于任意满足 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2<\infty$ 的实数列 $\{b_n\}$ 都有 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_kb_k|<\infty$ 成立.
试证明 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2<\infty$

- **(一致有界定理, 泛函分析讲义, 定理 $5.3.1$)**
  设 $(X,\|\cdot\|_X)$ 是 Banach 空间，$(Y,\|\cdot\|_Y)$ 是赋范空间.
  若有界线性算子集合 $\mathcal{F}\subset B(X,Y)$ 中的算子是逐点有界的，即:
  $$\sup_{T\in\mathcal{F}}\|Tx\|_Y<\infty\quad(\forall\, x\in X)$$
  则 $\mathcal{F}$ 中的算子一致有界，即存在与 $x\in X$ 无关的常数 $M>0$ 使得:
  $$\sup_{T\in\mathcal{F}}\|T\|=\sup_{T\in\mathcal{F}}\left\{\sup_{x\neq 0_X\in X}\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}\right\}\le M$$

Proof:
设 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots)$ 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2<\infty$，即 $x\in l^2$ (其中 l^2 是二次幂可和序列空间)
定义算子 $T_n: l^2\mapsto l_1$ 如下:

$$T_n(x):=(a_1x_1,a_2x_2,\ldots,a_nx_n,0,0,\ldots)$$

显然 T_n 是有界线性算子.
则根据题设中 $\{a_k\}$ 的性质我们有:

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\|T_nx\|_1=\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=1}^{n}|a_kx_k|=\sum_{k=1}^{\infty}|a_kx_k|<\infty$$

这说明有界线性算子序列 $\{T_n\}$ 在 l^2 上逐点有界.
注意到 $(l^2,\|\cdot\|_2)$ 是 Banach 空间.
根据一致有界定理可知 $\{T_n\}$ 在 l^2 上一致有界，即 $\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\|T_n\|<\infty$

下面证明 $\|T_n\|=(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2)^{\frac{1}{2}}$:
对于任意 $x\in l^2$ 我们都有:

$$
\begin{aligned}
\|T_n x\|_1 &= \sum_{k=1}^{n} |a_k x_k| \quad \text{(use Cauchy-Schwarz inequality)} \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2
\end{aligned}
$$

注意到上述不等号当 $x = (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{\frac{1}{2}}(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ 时同时取等.
因此我们有:

$$
\|T_n\| = \sup_{x \neq 0_X \in X} \frac{\|T_n x\|_1}{\|x\|_2} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall\, n \in \mathbb{Z}_+)
$$

于是我们有:

$$
\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|T_n\| < \infty
$$

命题得证.