

泛函分析 Homework 04

姓名: 雍崔扬

学号: 21307140051

Problem 01

设 $\{x_n\}$ 为内积空间 X 中的点列, $x \in X$, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$ ($\forall y \in X$) 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$
试证明 $\{x_n\}$ 强收敛到 x

- 实际上本题的结论有更强的形式:

(工科泛函分析基础 定理 4.4.5, 泛函分析讲义 定理 4.4.3)

设 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 为 Hilbert 空间, $\{x_n\} \subset X, x \in X$, 则下列命题成立:

- ① $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 当且仅当对于任意 $y \in X$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$ 成立.
- ② $\{x_n\}$ 强收敛于 x 当且仅当 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$

Proof:

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$ ($\forall y \in X$) 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$, 则我们有:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, x_n - x \rangle \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x_n \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, x_n \rangle + \langle x, x \rangle \\&= \|x\|^2 - \langle x, x \rangle - \langle x, x \rangle + \|x\|^2 \\&= 0\end{aligned}$$

因此 $\{x_n\}$ 强收敛于 x (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$), 命题得证.

Problem 02

试证明内积空间的不含零元的正交系是线性无关的.

Proof:

设 S 为域 \mathbb{F} 上的内积空间 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 的不含零元的正交系.

值得注意的是, S 可能是不可数的.

(反证法) 假设 S 是线性相关的, 则存在一个有限支持的标量序列 $\{\alpha_x\}_{x \in S}$ 使得 $\sum_{x \in S} \alpha_x x = 0_X$

其中使得 $\alpha_x \neq 0$ 的 x 仅为有限个 (基于线性相关的定义)

记 $I = \{x \in S : \alpha_x \neq 0\}$, 则我们有 $\sum_{x \in S} \alpha_x x = \sum_{x \in I} \alpha_x x = 0_X$

于是我们有:

$$\begin{aligned}0 &= \langle 0_X, y \rangle \\&= \left\langle \sum_{x \in I} \alpha_x x, y \right\rangle \\&= \sum_{x \in I} \alpha_x \langle x, y \rangle \quad (\forall y \in I) \\&= \sum_{x \in I} \alpha_x \cdot \mathbb{1}\{x = y\} \\&= \alpha_y\end{aligned}$$

这与 I 的定义相矛盾, 因此 S 是线性无关的.

Problem 03

设 H 是内积空间, E 是 H 的稠密子集.

证明: 若 $x \perp E$, 则 $x = 0_H$.

- 实际上本题的结论有更强的形式:

(泛函分析讲义, 定理 4.3.4)

设 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 为 Hilbert 空间, S 是 X 的子空间, 则下列命题成立:

- ① $S^{\perp\perp} = \text{cl}(S)$
- ② S 在 X 中稠密 (即 $\text{cl}(S) = X$) 当且仅当 $S^\perp = \{0_X\}$
- ③ 若 S 是 X 的真闭子空间, 则 S^\perp 中必有非零元素 (即 $S^\perp \setminus \{0_X\} \neq \emptyset$)

Proof:

由于 E 是 H 的稠密子集, 故我们有 $\text{cl}(E) = H$

对于任意 $x \in X$ 都存在 $\{x_n\} \subset E$ 使得 $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$)

若 $x \perp E$, 则我们有:

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \langle x, x \rangle \\ &= \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x \right\rangle \quad (\text{use continuity of inner product}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x \rangle \quad (\text{note that } x_n \in E \text{ and } x \perp E) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

因此 $x = 0_H$

Problem 04 (★)

设 $M = \{x = \{x_k\} \in l^2 : x_{2k} = 0, \forall k \in \mathbb{Z}_+\}$

- ① 试证明 M 是 l^2 的闭子空间
- ② 试求 M^\perp

Proof:

- ① 对于任意 $x, y \in M, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha x + \beta y$ 的偶数下标的元素显然仍为零
这表明 M 对加法和数乘封闭, 因而是 l^2 的子空间.

对于 M 中的任意收敛序列 $\{x^{(n)}\}$, 根据 l^2 的完备性可知极限 $x \in l^2$

(反证法) 假设 $x \notin M$, 则存在 $k \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $x_{2k} \neq 0$

因此 $\|x^{(n)} - x\|_2 \geq |x_{2k} - 0| > 0$ ($\forall n \in \mathbb{Z}_+$), 这与 $x^{(n)} \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) 矛盾.

这表明 M 是闭的.

总之, M 是 l^2 的闭子空间.

- ② 设 $y \perp M$, 则它满足:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1} y_{2k-1} = 0 \quad (\forall x \in M)$$

若存在 $k \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $y_{2k-1} \neq 0$, 则取 $x = e_{2k-1} \in M$ 即有 $\langle e_{2k-1}, y \rangle = y_{2k-1} \neq 0$
这与 $y \perp M$ 矛盾, 因此 $y_{2k-1} = 0$ ($\forall k \in \mathbb{Z}_+$)

当 y 满足 $y_{2k-1} = 0$ ($\forall k \in \mathbb{Z}_+$) 时, 必然有:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1} y_{2k-1} = 0 \quad (\forall x \in M)$$

因此 $y \perp M$

综上所述, $y \perp M$ 当且仅当 $y_{2k-1} = 0$ ($\forall k \in \mathbb{Z}_+$)

因此 $M^\perp = \{x = \{x_k\} \in l^2 : x_{2k-1} = 0, \forall k \in \mathbb{Z}_+\}$

Problem 05

设 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系.

试证明: 任意 $x \in X$ 在 $\text{span}(E)$ 上的投影都存在, 且为 $\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$

- 设 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间.

设 $S \subseteq X$ 是 X 的子空间, 且 $x \in X$.

若存在 $p \in S$ 和 $p_\perp \in S^\perp$ 使得 $x = p + p_\perp$, 则称 p 是 x 在 S 上的**正交投影** (简称投影)

Proof:

任意给定 $x \in X$

记 $p := \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ 和 $p_\perp := x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$

我们有:

- ① $p + p_\perp = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k + (x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k) = x$
- ② $p = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \in \text{span}(E)$
- ③ $p_\perp \perp \text{span}(E)$:
对于任意 $i = 1, \dots, n$ 我们都有:

$$\begin{aligned}\langle p_\perp, e_i \rangle &= \left\langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, e_i \right\rangle \\&= \langle x, e_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle \\&= \langle x, e_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \delta_{i,k} \\&= \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle \\&= 0\end{aligned}$$

因此 $p_\perp \perp \text{span}(e_1, \dots, e_n) = \text{span}(E)$

根据正交投影可知任意 $x \in X$ 在 $\text{span}(E)$ 上的投影都存在, 且为 $\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$

正交投影存在时一定是唯一的.

设 p_1, p_2 都是 x 在 S 上的投影, 记 $p_1^\perp = x - p_1$ 和 $p_2^\perp = x - p_2$, 则我们有 $p_1^\perp, p_2^\perp \in S^\perp$

注意到 $p_1 - p_2 = (x - p_2) - (x - p_1) = p_2^\perp - p_1^\perp \in S^\perp$

因此我们有 $p_1 - p_2 \in S \cap S^\perp = \{0_X\}$ 成立, 说明 $p_1 = p_2$

Problem 06

设 M 是 Hilbert 空间 X 的闭子空间, $\{e_n\}$ 和 $\{e'_n\}$ 分别是 M 和 M^\perp 的标准正交基.

试证明: $\{e_n\} \cup \{e'_n\}$ 是 X 的标准正交基.

Proof:

由于 $\{e_n\}$ 和 $\{e'_n\}$ 分别是 M 和 M^\perp 的标准正交基, 故 $\{e_n\} \cup \{e'_n\}$ 也是标准正交的.

对于任意 $x \in X$, 由于 M 是 Hilbert 空间 X 的闭子空间, 故 x 在 M 上的正交投影一定存在.

记 $x = p + p_\perp$, 其中 $p \in M, p_\perp \in M^\perp$

于是存在序列 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 使得 $p = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ 和 $p_\perp = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e'_k$

因此我们有:

$$\begin{aligned}x &= p + p_\perp \\&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e'_k\end{aligned}$$

因此 $\{e_n\} \cup \{e'_n\}$ 是 X 的标准正交基.

Problem 07

设 $X = C([-1, 1])$, 在其上定义内积 $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$.

令:

- ① $M_1 := \{f \in X : f(x) = 0, \forall x < 0\}$
- ② $M_2 := \{f \in X : f(0) = 0\}$

计算 M_1, M_2 在 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 中的正交补空间.

Solution:

- ① 若 g 满足 $g(x) = 0 (\forall x \in [0, 1])$, 显然有 $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx = 0 (\forall x \in M_1)$, 因而有 $g \perp M_1$

若 $g \perp M_1$, 则 $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx = 0 (\forall x \in M_1)$

(反证法) 假设 g 在 $(0, 1]$ 上的某个区间 I 中非零, 我们总可以取 $f_0(t) := \begin{cases} g(x) & \text{if } x \in I \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

显然我们有 $f_0 \in M_1$

但我们有 $\langle f_0, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx = \int_I |g(x)|^2 dx > 0$

这与 $g \perp M_1$ 矛盾, 因此 g 满足 $g(x) = 0 (\forall x \in (0, 1])$

根据 g 的连续性我们有 $g(0) = 0$

综上所述, $M_1^\perp = \{g \in X : g(x) = 0, \forall x \in [0, 1]\}$

- ② 若 $g \equiv 0$, 则显然有 $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx = 0 (\forall x \in M_2)$, 因而有 $g \perp M_2$

若 $g \perp M_2$, 则 $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx = 0 (\forall x \in M_2)$

(反证法) 假设 g 在 $[-1, 0) \cup (0, 1]$ 上的某个区间 I 中非零, 我们总可以取

$f_0(t) := \begin{cases} g(x) & \text{if } x \in I \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

显然我们有 $f_0 \in M_2$

但我们有 $\langle f_0, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx = \int_I |g(x)|^2 dx > 0$

这与 $g \perp M_2$ 矛盾, 因此 g 满足 $g(x) = 0 (\forall x \in [1, 0) \cup (0, 1])$

根据 g 的连续性我们有 $g(0) = 0$

综上所述, $M_2^\perp = \{g \in X : g \equiv 0\} = \{0_X\}$

Problem 08

设 X 是内积空间, $M, N \subset X$, 试证明:

- ① 若 $M \perp N$, 则 $M \subset N^\perp, N \subset M^\perp$
- ② $M^\perp = (\text{cl}(M))^\perp$

Proof:

- ① 若 $M \perp N$, 则对于任意 $y \in M$ 都有 $y \in N^\perp$ 成立, 因此 $M \subseteq N^\perp$
对 N 应用上述结论即得 $N \subseteq M^\perp$

- ② 若 $y \in (\text{cl}(M))^\perp$, 则 $\langle x, y \rangle = 0 (\forall x \in \text{cl}(M))$
注意到 $M \subseteq \text{cl}(M)$, 故 $\langle x, y \rangle = 0 (\forall x \in M)$, 表明 $y \in M^\perp$
因此 $(\text{cl}(M))^\perp \subseteq M^\perp$

若 $y \in M^\perp$, 则 $\langle x, y \rangle = 0 (\forall x \in M)$

对于任意 $x \in \text{cl}(M)$, 都存在 M 中的任意收敛序列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$

于是我们有:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, y \rangle \quad (\text{use continuity of inner product}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此 $\langle x, y \rangle = 0 \ (\forall x \in \text{cl}(M))$, 表明 $y \in (\text{cl}(M))^\perp$

于是有 $M^\perp \subseteq (\text{cl}(M))^\perp$

综上所述, 我们有 $M^\perp = (\text{cl}(M))^\perp$

Problem 09

设 X 是内积空间, $x, y \in X$.

试证明下列命题等价:

- ① $x \perp y$
- ② $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{C}$
- ③ $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|, \forall \alpha \in \mathbb{C}$

Proof:

- ① \Rightarrow ②③

若 $x \perp y$, 则根据勾股定理我们有:

$$\begin{aligned}\|x + \alpha y\|^2 &= \|x\|^2 + \|\alpha y\|^2 \\ &\geq \|x\|^2 \\ \frac{\|x + \alpha y\|^2}{\|x + \alpha y\|^2} &= \frac{\|x\|^2 + \|\alpha y\|^2}{\|x + \alpha y\|^2} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{C}) \\ &= \frac{\|x\|^2 + \|- \alpha y\|^2}{\|x + \alpha y\|^2} \\ &= \frac{\|x\|^2 + \|\alpha y\|^2}{\|x - \alpha y\|^2}\end{aligned}$$

- ② \Rightarrow ①

注意到 x 在 y 方向上的投影为 $\langle x, y \rangle \frac{y}{\|y\|}$

根据 $x - \langle x, y \rangle \frac{y}{\|y\|} \perp y$ 可知:

$$\left\| x - \langle x, y \rangle \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \|x\|^2 - \left\| \langle x, y \rangle \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \leq \|x\|^2$$

当且仅当 $\langle x, y \rangle \frac{y}{\|y\|} = 0$ 时取等.

若 $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{C}$, 则我们有 $\langle x, y \rangle \frac{y}{\|y\|} = 0$

当 $y = 0_X$ 时是平凡的, 一定有 $x \perp y$

当 $y \neq 0_X$ 时我们有 $\langle x, y \rangle = 0$, 即 $x \perp y$

- ③ \Rightarrow ①

若 $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|, \forall \alpha \in \mathbb{C}$, 则我们有:

$$\|x\|^2 + 2\text{Re}(\alpha \langle x, y \rangle) + \|\alpha y\|^2 = \|x + \alpha y\|^2 = \|x - \alpha y\|^2 = \|x\|^2 - 2\text{Re}(\alpha \langle x, y \rangle) + \|\alpha y\|^2 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{C})$$

因此 $\text{Re}(\alpha \langle x, y \rangle) = 0 \ (\forall \alpha \in \mathbb{C})$

分别取 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = i$ 可知 $\langle x, y \rangle$ 的实部和虚部均为零, 因此 $\langle x, y \rangle = 0$

即有 $x \perp y$ 成立.

Problem 10 (★)

(tedious, time-wasting, and definitely won't come up in exam)

(More unfortunately, there is an idiot sitting next to me who hits his keyboard in a very noisy way)

(I want to strangle him)

设 x, y 是复内积空间 X 中的两个非零向量, 试证明:

- ① $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ 当且仅当 $y = \alpha x$, 其中 $\alpha > 0$
- ② $\|x - y\| = \left| \|x\| - \|y\| \right|$ 当且仅当 $y = \alpha x$, 其中 $\alpha > 0$
- ③ 设 $z \in X$, 则 $\|x - y\| = \|x - z\| + \|z - y\|$ 当且仅当存在 $\alpha \in [0, 1]$, 使得 $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$

- **助教:** 复内积注意交叉项取实部.
用 Cauchy-Schwarz 不等式的取等条件也挺麻烦的.

$$\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Proof:

- ① 充分性显然, 下证必要性:

设 $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, 则我们有:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) &= \|x + y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| \end{aligned}$$

因此我们有 $\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) = \|x\| \|y\|$

从而有:

$$\begin{aligned} \left\| y - \frac{\|y\|}{\|x\|} x \right\|^2 &= 2\|y\|^2 - 2\frac{\|y\|}{\|x\|} \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) \\ &= 2\|y\|^2 - 2\frac{\|y\|}{\|x\|} \|x\| \|y\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

- ② 充分性显然, 下证必要性:

设 $\|x - y\| = \left| \|x\| - \|y\| \right|$, 则我们有:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) &= \|x - y\|^2 \\ &= (\|x\| - \|y\|)^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \|y\| \end{aligned}$$

因此我们有 $\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) = \|x\| \|y\|$

从而有:

$$\begin{aligned} \left\| y - \frac{\|y\|}{\|x\|} x \right\|^2 &= 2\|y\|^2 - 2\frac{\|y\|}{\|x\|} \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) \\ &= 2\|y\|^2 - 2\frac{\|y\|}{\|x\|} \|x\| \|y\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

- ③ 充分性:

$$\begin{aligned} \|x - z\| + \|z - y\| &= \|x - \alpha x - (1 - \alpha)y\| + \|\alpha x + (1 - \alpha)y - y\| \\ &= (1 - \alpha)\|x - y\| + \alpha\|x - y\| \\ &= \|x - y\| \end{aligned}$$

下证必要性:

当 $z \neq x, y$ 时, 命题 ③ 退化为 ①②

因此存在 $\lambda > 0$ 使得 $(z - y) = \lambda(x - z)$, 于是有 $\alpha = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \in (0, 1)$ 满足:

$$z = \frac{1}{\lambda + 1}(\lambda x + y) = \alpha x + (1 - \alpha)y$$

当 $z = x$ 时, 取 $\alpha = 1$ 即可.

当 $z = y$ 时, 取 $\alpha = 0$ 即可.

Problem 11

设 X 是内积空间, $x, y \in X$. 假定:

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| = \|x\| \quad (\forall \lambda \in [0, 1])$$

- ① 证明: $x = y$
- ② 若 X 只是赋范空间而非内积空间, 则 ① 的结论还成立吗?

Solution:

- ① 分别取 $\lambda = 0$ 和 $\lambda = \frac{1}{2}$ 就得到:

$$\begin{aligned}\|y\| &= \|x\| \\ \|x + y\| &= 2\|x\|\end{aligned}$$

根据平行四边形法则我们有:

$$\|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x + y\|^2 = 4\|x\|^2 - 4\|x\|^2 = 0$$

因此 $x = y$

- ② 不一定成立.
考虑 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\max})$ 中的单位圆 (即一个边长为 2, 中心为原点的正方形)
取 $x = (1, 1), y = (-1, 1)$
则 $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|_{\infty} = \|(2\lambda - 1, 1)\|_{\infty} = 1 = \|x\|_{\infty}$
但 $x \neq y$

Problem 12

设 H 是 Hilbert 空间, $\{x_n\} \subset H$, 满足:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 在 H 中收敛.

Proof:

根据 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ 可知 $\{\|x_k\|\}$ 是 Cauchy 序列,
因此对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{Z}_+$ 使得对于任意 $m > n > N$ 都有 $\sum_{k=n+1}^m \|x_k\| < \varepsilon$

记部分和为 $S_n := \sum_{k=1}^n x_k$

我们有:

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| < \varepsilon$$

因此 $\{S_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 序列.

根据 Hilbert 空间的完备性可知: 存在 $s \in H$ 使得:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Problem 13

设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间, P 为从 H 到 M 的正交投影算子.

试证明 $\|Px\|^2 = \langle Px, x \rangle$

Proof:

$$\begin{aligned}\|Px\|^2 &= \langle Px, Px \rangle \\ &= \langle Px, x + (Px - x) \rangle \\ &= \langle Px, Px \rangle - \langle Px, x - Px \rangle \quad (\text{note that } Px \perp (x - Px)) \\ &= \langle Px, Px \rangle\end{aligned}$$

