泛函分析 Homewo01

姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 01

设实数列 $\{|x_n|\},\{|y_n|\},\{|z_n|\}$ 的上确界均有限，试证明:

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|x_n-y_n|\le\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|x_n-z_n|+\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|z_n-y_n|$$

Solution:
$\{|x_n|\},\{|y_n|\},\{|z_n|\}$ 的上确界均有限保证了 $\{|x_n-y_n|\},\{|x_n-z_n|\},\{|z_n-y_n|\}$ 的上确界也均有限
这一点容易根据三角不等式得出:

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|x_n-y_n|&\le\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\{|x_n|+|y_n|\}\le\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|x_n|+\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|y_n|<\infty\\
\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|x_n-z_n|&\le\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\{|x_n|+|z_n|\}\le\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|x_n|+\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|z_n|<\infty\\
\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|z_n-y_n|&\le\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\{|z_n|+|y_n|\}\le\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|z_n|+\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|y_n|<\infty
\end{aligned}$$

根据三角不等式我们有:

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|x_n-y_n|&=\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|(x_n-z_n)+(z_n-y_n)|\\
&\le\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\{|x_n-z_n|+|z_n-y_n|\}\\
&\le\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|x_n-z_n|+\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|z_n-y_n|\\
&<\infty
\end{aligned}$$

Problem 02

试证明: 在实数域上，若序列收敛，则极限唯一.

Solution:
(反证法) 对于实数域上任意给定的收敛序列 $\{x_n\}$
假设它收敛于 a,b 两点 (其中 $a\neq b$)
则对于某一 $\varepsilon\in(0,\frac{|a-b|}{2})$ (例如可取 $\varepsilon=\frac{|a-b|}{4}$)，存在正整数 N_1,N_2 使得:

$$\begin{aligned}
|x_n-a|<\varepsilon\ \ (\forall\,n>N_1)\\
|x_n-b|<\varepsilon\ \ (\forall\,n>N_2)
\end{aligned}$$

因此对于任意 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 我们都可导出以下矛盾:

$$\begin{aligned}
|a-b|&=|a-x_n+x_n-b|\\
&\le|x_n-a|+|x_n-b|\\
&<\varepsilon+\varepsilon\\
&<2\cdot\frac{|a-b|}{2}\\
&=|a-b|
\end{aligned}$$

故假设不成立，原命题得证.

Problem 03

试证明: 在实数域上，若序列收敛，则它有界.

Solution:
对于实数域上任意给定的收敛序列 $\{x_n\}$，设其极限为 a
对于任意 $\varepsilon>0$，都存在正整数 N 使得 $|x_n-a|<\varepsilon$ $(\forall\,n>N)$
意味着对于任意 $n>N$ 都有 $|x_n|=|x_n-a+a|\le|x_n-a|+|a|<\varepsilon+|a|$

取 $M=\max\{\max\limits_{n=1,...,N}|x_n|,|a|+\varepsilon\}$，则我们有 $|x_n|\leq M\ (\forall\ n\in\mathbb{Z}_+)$
表明 $\{x_n\}$ 是有界序列.

Problem 04

设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的函数，且存在常数 $M>0$ 使得 $|f'(x)|\leq M\ (\forall\ x\in\mathbb{R})$
试证明: 函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

Solution:

> **(Rolle 定理, 陶哲轩 实分析, 命题** $10.2.7$**)**
> 设 $a<b$ 都是实数，$f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ 是连续函数，且它在 (a,b) 上可微.
> 若 $f(a)=f(b)$，则存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $g'(x_0)=0$
>
> - **(Lagrange 中值定理, 陶哲轩 实分析, 推论** $10.2.9$**)**
>   设 $a<b$ 都是实数，$f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ 是连续函数，且它在 (a,b) 上可微.
>   则存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

对于任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}>0$
对于任意给定的满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 的 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$

- 若 $x_1=x_2$，则 $|f(x_1)-f(x_2)|=0<\varepsilon$ 显然成立.
- 若 $x_1\neq x_2$ (不妨设 $x_1<x_2$)，则根据 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$
  于是我们有:

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|&=|f'(\xi)(x_1-x_2)|\\&=|f'(\xi)||x_1-x_2|\\&<M\cdot\delta\\&=M\cdot\frac{\varepsilon}{M}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

综上所述，对于任意给定的满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 的 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 成立.
这表明 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

Problem 05

试证明函数列 $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于函数 $f\equiv 0$，并计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$

Solution:
对于任意 $\varepsilon>0$，取 $N=\lceil\frac{1}{2\varepsilon}\rceil$，则对于任意 $x\in[0,1]$ 和 $n>N$ 我们都有:

$$\begin{aligned}\left|\frac{x}{1+n^2x^2}-0\right|&=\frac{x}{1+n^2x^2}\\&=\frac{1}{\frac{1}{x}+n^2x}\quad(\text{AM-GM inequality})\\&\leq\frac{1}{2n}\\&<\frac{1}{2N}\\&=\frac{1}{2\cdot\lceil\frac{1}{2\varepsilon}\rceil}\\&\leq\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2\varepsilon}}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

因此函数列 $\{f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}\}$ 在在 $[0,1]$ 上一致收敛于函数 $f\equiv 0$

> **(陶哲轩 实分析, 定理** $14.6.1$**)**
> 设 $[a,b]$ 是一个区间.
> 对于每一个正整数 n，设 $f^{(n)}:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ 是一个 Riemann 可积的函数.
> 若 $\{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$,

> 则 f 也是 Riemann 可积的，且 $\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f^{(n)}(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]}\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$
> 换言之，若收敛是一致的，则我们可以交换极限和紧致区间 $[a,b]$ 上的积分运算的次序.
>
> - **(关于级数的类比结论, 陶哲轩 实分析, 推论** $14.6.2$**)**
>   设 $[a,b]$ 是一个区间，$\{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ 的 Riemann 可积函数的序列.
>   若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$ 一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[a,b]} f^{(n)}(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]}\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x)\mathrm{d}x$

下面我们计算积分极限:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 0\cdot\mathrm{d}x \\ &= 0\end{aligned}$$

Problem 06

试计算 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(x))^n\mathrm{d}x$

Solution:

> **(Lebesgue 控制收敛定理, 陶哲轩 实分析, 定理** $19.3.4$**)**
> 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测子集，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\Omega\mapsto\mathbb{R}^*$ 的逐点收敛的可测函数序列 (其中 $\mathbb{R}^*$ 为广义实数集 $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$)
> 若存在一个绝对可积函数 $F:\Omega\mapsto[0,\infty]$ 使得 $|f_n(x)|\leq F(x)$ $(\forall\ n\in\mathbb{N}_+, x\in\Omega)$，
> 则我们有 $\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\mathrm{d}m$

显然 $\{f_n(x) = (\sin(x))^n\}$ 是可测集 $\Omega = (0,\frac{\pi}{2})$ 上逐点收敛于 $f\equiv 0$ 的可测函数序列.
(其中 "逐点收敛" 由 $\sin(x)\in(0,1)$ $(\forall\ x\in(0,\frac{\pi}{2}))$ 和幂函数的性质得到)
而且 $\{f_n(x) = (\sin(x))^n\}$ 可被 Lebesgue 可积函数 $F\equiv 1$ 从上方控制.
因此我们有:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\mathrm{d}m &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}m \\ &= \int_\Omega f\mathrm{d}m \qquad \text{(this is a Lebesgue integal)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\cdot\mathrm{d}x \quad \text{(this is a Riemann integal)} \\ &= 0\end{aligned}$$

Problem 07

考虑函数列 $\{f_n(x) = \frac{1}{(1+x/n)^n\sqrt[n]{x}}\}$
利用 Lebesgue 控制收敛定理计算 $\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)} f_n\mathrm{d}m$

Solution:
显然 $\{f_n(x) = \frac{1}{(1+x/n)^n\sqrt[n]{x}}\}$ 是可测集 $\Omega = (0,\infty)$ 上的可测函数序列.
对于任意给定的 $x\in(0,\infty)$，我们都有:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n\sqrt[n]{x}} \\ &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}} \\ &= \frac{1}{e^x\cdot 1} \\ &= e^{-x}\end{aligned}$$

这表明 $\{f_n\}$ 在可测集 $\Omega = (0,\infty)$ 上逐点收敛到 $f(x) = e^{-x}$

考虑函数 $F(x) = \begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x < 1 \\ \frac{4}{x^2} & x\geq 1\end{cases}$ 它在可测集 $\Omega = (0,\infty)$ 上显然是 Lebesgue 可积的.

- 在构造控制函数时应当注意其 Lebesgue 可积性:
  $\frac{1}{x^\alpha}$ 当 $\alpha \in (0,1]$ 时在 $(0,1)$ 上可积，在 $(1,\infty)$ 上不可积
  当 $\alpha \in (1,\infty)$ 时在 $(0,1)$ 上不可积，则 $(1,\infty)$ 上可积.
- 任意给定 $x \in (0,1)$，对于任意正整数 $n \geq 2$ 都有:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \sqrt[n]{x}} \quad (\text{note that } (1+\frac{x}{n})^n > 1 \text{ and } \sqrt[n]{x} \geq \sqrt{x} \text{ when } n \geq 2) \\ &< \frac{1}{1 \cdot \sqrt{x}} \\ &= F(x) \end{aligned}$$

- 任意给定 $x \in [1,\infty)$，对于任意正整数 $n \geq 2$ 都有:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \sqrt[n]{x}} \ (\text{note that } (1+\frac{x}{n})^n \sqrt[n]{x} \geq (1+\frac{x}{n})^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \binom{n}{2}(\frac{x}{n})^2 \geq 1 + x + \frac{n-1}{2n}x^2 \geq \frac{x^2}{4}) \\ &< \frac{1}{\frac{x^2}{4}} \\ &= \frac{4}{x^2} \\ &= F(x) \end{aligned}$$

因此 Lebesgue 可积函数 F 在 $\Omega = (0,\infty)$ 上从上方控制函数列 $\{f_n\}$
根据 Lebesgue 控制收敛定理我们有:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}m &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f \mathrm{d}m \\ &= \int_\Omega f \mathrm{d}m \qquad (\text{this is a Lebesgue integal}) \\ &= \int_0^\infty e^{-x} \mathrm{d}x \quad (\text{this is a Riemann integal}) \\ &= -e^{-x}|_0^\infty \\ &= 0 - (-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Problem 08

试证明可测集上的连续函数都是可测函数.

- **(定义: 可测函数)**
  设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测子集，$f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ 是一个函数.
  我们称函数 f 是可测的，当且仅当对于任意开集 $V \subseteq \mathbb{R}^m$，逆象 $f^{-1}(V)$ 都是可测的.
- **Lemma1: (实分析, 定理 $13.1.5$)**
  设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 都是度量空间，$f : X \mapsto Y$ 是一个函数.
  下列四个命题在逻辑上是等价的:
  - ① f 在 X 上连续
  - ② 对于 X 中任意一个依度量 d_X 收敛于某点 $x_0 \in X$ 的序列 $\{x^{(n)}\}_{n=1}^\infty$，
    对应的序列 $\{f(x^{(n)})\}_{n=1}^\infty$ 都在 Y 中依度量 d_Y 收敛于 $f(x_0)$.
  - ③ 若 V 是 Y 中的开集，则 $f^{-1}(V) := \{x \in X : f(x) \in V\}$ 是 X 中的开集.
    (即连续性保证了开集的逆象仍是开集，但反过来不成立)
  - ④ 若 V 是 Y 中的闭集，则 $f^{-1}(V) := \{x \in X : f(x) \in V\}$ 是 X 中的闭集.
    (即连续性保证了闭集的逆象仍是闭集，但反过来不成立)
- **(定义: 相对拓扑)**
  设 (X, d) 是度量空间，$S \subseteq Y \subseteq X$，$x_0 \in X$.
  - 若 S 在度量子空间 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 中是开的，则我们称 S 是关于 Y **相对开的** (relatively open).
  - 若 S 在度量子空间 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 中是闭的，则我们称 S 是关于 Y **相对闭的** (relatively closed).
- **Lemma2: (实分析, 命题 $12.3.4$)**
  设 (X, d) 是度量空间，$S \subseteq Y \subseteq X$，$x_0 \in X$.
  - ① S 关于 Y 是相对开的，当且仅当存在 X 中的开集 $Z \subseteq X$ 使得 $S = Z \cap Y$.
  - ② S 关于 Y 是相对闭的，当且仅当存在 X 中的闭集 $Z \subseteq X$ 使得 $S = Z \cap Y$.

Proof:
设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测子集，$f:\Omega\mapsto\mathbb{R}^m$ 是一个连续函数.
任意给定 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开子集 V
根据 Lemma1①③ 可知，$f^{-1}(V)$ 都是 Ω 中的开集.
进而根据 Lemma2① 可知，总存在一个开集 $W\subseteq\mathbb{R}^n$ 使得 $W\cap\Omega=f^{-1}(V)$
由于 W 是开集，自然可测，而 Ω 是可测集，故 $f^{-1}(V)=W\cap\Omega$ 也是可测集.
这表明 f 是 Ω 上的可测函数.

Problem 09

设 $C^1([a,b])$ 为区间 $[a,b]$ 上连续且一阶导数也连续的函数所构成的集合
定义算子 $T:C([a,b])\mapsto C^1([a,b])$ 为:

$$[T(x)](t):=\int_a^t x(s)\mathrm{d}s\ \ (\forall\, x\in C([a,b]))$$

试证明: ① T 是线性算子; ② T 是单射; ③ T 不是满射

Proof:

- **首先证明 T 是线性算子:**
  对于任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 和 $x,y\in C([a,b])$ 我们都有:

$$\begin{aligned}[T(\alpha x+\beta y)](t)&=\int_a^t[\alpha x(s)+\beta y(s)]\mathrm{d}s\\&=\alpha\int_a^t x(s)\mathrm{d}s+\beta\int_a^t y(s)\mathrm{d}s\\&=\alpha[T(x)](t)+\beta[T(y)](t)\end{aligned}\quad(\forall\, t\in[a,b])$$

  因此我们有 $T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$ 成立，这表明 T 是线性算子.
- **其次证明 T 是单射:**
  对于任意 $x,y\in C([a,b])$，我们都有:

$$\begin{aligned}[T(x)](t)-[T(y)](t)&=\int_a^t x(s)\mathrm{d}s-\int_a^t y(s)\mathrm{d}s\\&=\int_a^t[x(s)-y(s)]\mathrm{d}s\end{aligned}\quad(\forall\, t\in[a,b])$$

  若 $T(x)=T(y)$，则 $[T(x)](t)-[T(y)](t)=\int_a^t[x(s)-y(s)]\mathrm{d}s=0$ 对任意 $t\in[a,b]$ 都成立，
  两侧同时对 t 求导可知 $x(t)-y(t)=0\ (\forall\, t\in[a,b])$，即有 $x=y$ 成立.
  这表明 T 是单射.
- **最后说明 T 不是满射:**
  考虑常数函数 $f\equiv\text{const}$，其在 $[a,b]$ 上的导函数是 $f'\equiv 0$，显然它属于 $C^1([a,b])$
  假设存在 $x\in C([a,b])$ 使得 $T(x)=f$，则必然满足:

$$[T(x)](t)=\int_a^t x(s)\mathrm{d}x=f(t)=\text{const}\ \ (\forall\, t\in[a,b])$$

  两侧同时对 t 求导可知 $x(t)=0\ \ (\forall\, t\in[a,b])$
  因此当且仅当 $\text{const}=0$ 时常数函数 $f\equiv\text{const}$ 才落在线性算子 T 的值域内.

  事实上，对于任意 $x\in C([a,b])$ 和 $\text{const}\in\mathbb{R}$，我们都有 $T(x)+\text{const}\in C^1([a,b])$
  换言之，任意给定的 $x\in C[a,b]$ 对应的等价类 $\{T(x)+\text{const}:\text{const}\in\mathbb{R}\}$ 都包含于 $C^1([a,b])$
  但这个等价类中仅有 $T(x)$ (即 $\text{const}=0$ 时) 落在线性算子 T 的值域内.
  这表明 $T:C([a,b])\mapsto C^1([a,b])$ 不是一个满射.

Problem 10 (optional)

设 f 是可测集 Ω 上的非负可测函数，g 取遍所有从下方控制 f 的非负简单函数.
试证明:

$$\int_\Omega f\mathrm{d}m=\sup_g\int_\Omega g\mathrm{d}m$$

Solution:

> **(Lebesgue 单调收敛定理, 实分析, 定理 $19.2.9$)**
> 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测子集，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\Omega \mapsto \mathbb{R}$ 上的关于 n 单调递增的非负可测函数序列
> (即满足 $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \ (\forall\ x \in \Omega)$)
> 则我们有 $0 \leq \int_{\Omega} f_1 \mathrm{d}m \leq \int_{\Omega} f_2 \mathrm{d}m \leq \cdots$ 和 $\int_{\Omega} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \mathrm{d}m = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \mathrm{d}m$
>
> - **(Levi 单调收敛定理, 实变函数与泛函分析基础 5.3 节, 定理 3)**
>   设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测子集，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\Omega \mapsto \mathbb{R}$ 上的关于 n 单调递增的非负可测函数序列
>   (即满足 $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \ (\forall\ x \in \Omega)$)
>   若 $\{f_n\}$ 在 Ω 上几乎处处 (逐点) 收敛于 f,
>   则 f 在 Ω 上几乎处处非负可测，且 $\int_{\Omega} f \mathrm{d}m = \int_{\Omega} \lim\limits_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}m = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n \mathrm{d}m$
>
> **(可测集上的连续函数是可测的, 实分析, 引理 $18.5.2$)**
> 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测子集，$f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ 是一个函数.
> 若 f 是连续函数，则 f 也是可测的.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测子集，$f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ 是一个非负可测函数.
我们定义 $\underline{\int_{\Omega}} f \mathrm{d}m := \sup\{\int_{\Omega} g \mathrm{d}m : g : \Omega \mapsto \mathbb{R} \text{ is an non-negative simple function that minorizes } f\}$
显然我们有 $\underline{\int_{\Omega}} f \mathrm{d}m \leq \int_{\Omega} f \mathrm{d}m$ 成立.
要证明 $\underline{\int_{\Omega}} f \mathrm{d}m = \int_{\Omega} f \mathrm{d}m$，只需证明 $\underline{\int_{\Omega}} f \mathrm{d}m \geq \int_{\Omega} f \mathrm{d}m$ 即可.

定义 $f_n(x) := \min\{f(x), n\}$，其值域包含在 $[0, n]$ 内，因此它非负有界.
容易知道 f_n 也是 Ω 上的可测函数 (即其值域中的任意开集的逆象都是可测集)
并且序列 $\{f_n\}$ 单调递增逐点收敛到 f
根据 **Levi 单调收敛定理**可知:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n \mathrm{d}m = \int_{\Omega} \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}m = \int_{\Omega} f \mathrm{d}m$$

对于任意给定的 n，我们对 $[0, n]$ 进行 2^k 等分，记 $f_n^{(k)}(x) = \frac{n}{2^k} \sum_{i=0}^{2^k-1} i \cdot I_{\{x\in\Omega : i\frac{n}{2^k} \leq f_n(x) \leq (i+1)\frac{n}{2^k}\}}(x)$
其中 $I_S(x) := \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 为集合 S 的指示函数.
显然 $f_n^{(k)}(x)$ 是非负简单函数，其 Lebesgue 积分计算公式为:

$$\int_{\Omega} f_n^{(k)} \mathrm{d}m = \frac{n}{2^k} \sum_{i=0}^{2^k-1} i \cdot m(\{x \in \Omega : i\frac{n}{2^k} \leq f_n(x) \leq (i+1)\frac{n}{2^k}\}) \quad (\text{where } m(\cdot) \text{ denote the Lebesgue measure})$$

注意到 $\{f_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 单调递增收敛于 f_n (因为 $f_n^{(k+1)}$ 的值域划分总是 $f_n^{(k)}$ 值域划分的加细)
因此根据 **Levi 单调收敛定理**我们有:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_n^{(k)} \mathrm{d}m = \int_{\Omega} \lim_{k\to\infty} f_n^{(k)} \mathrm{d}m = \int_{\Omega} f_n \mathrm{d}m$$

我们可取一列关于下标 n 严格单调递增的序列 $\{k_n\}$ (因而有 $k_n \to \infty\ (n \to \infty)$) 使得:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n^{(k_n)} \mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n \mathrm{d}m = \int_{\Omega} f \mathrm{d}m$$

这样我们就找到了一列从下方控制 f 的非负简单函数 $\{f_n^{(k_n)}\}$，因此我们有 $\underline{\int_{\Omega}} f \mathrm{d}m \geq \int_{\Omega} f \mathrm{d}m$ 成立.
(注意到对于任意 k, n 都有 $f_n^{(k)}(x) \leq f_n(x) \leq f(x) \ \ (\forall\ x \in \Omega)$ 成立)

综上所述，我们有 $\begin{cases} \underline{\int_{\Omega}} f \mathrm{d}m \leq \int_{\Omega} f \mathrm{d}m \\ \underline{\int_{\Omega}} f \mathrm{d}m \geq \int_{\Omega} f \mathrm{d}m \end{cases}$，即有 $\int_{\Omega} f \mathrm{d}m = \underline{\int_{\Omega}} f \mathrm{d}m$ 成立.