实变第四章总结

Author: Tony Xiang
Full Document can be acquired here:
https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%204/Chapter4.pdf
Full Source code can be downloaded here:
https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%204/Chapter4.tex

1 Lebesgue 积分的定义

分三步定义：

1.1 非负简单函数的积分：

定义：设 $f(x)=\sum_{i=1}^{k} a_i\chi_{A_i}(x)$ 是 E 上的非负简单函数，其中 $\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 是 E 的一个可测分割，$a_i\in\mathbb{R}^n, i=1,2,\cdots,k$. 定义 f 在 E 上的积分为：

$$\int_E f\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i)$$

$$0\leqslant\int_E f\,\mathrm{d}x\leqslant\infty, \text{若}\int_E f\,\mathrm{d}x<\infty, \text{则} f\in L(E).$$

注意，该积分的值不依赖 f 的表达式的选取. 证明可取另一个可测分割 $\{B_i\}$，则有 $m(A_i)=\sum_{j=1}^{l} m(A_i\cap B_j),(i=1,2,\cdots,k), m(B_j)=\sum_{i=1}^{k} m(A_i\cap B_j),(j=1,2,\cdots,l)$，$A_i\cap B_j\neq\emptyset, a_i=b_j$，可得

$$\sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} a_i m(A_i\cap B_j)=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} b_j m(A_i\cap B_j)=\sum_{j=1}^{l} b_j m(B_j)$$

注意，$\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}x$ 为函数 $y=f(x)$ 的下方图形的积分.

性质（Part 1, f,g 为非负简单函数）：

- （特征函数的性质）

$$A\subset E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \int_E \chi_A(x)\,\mathrm{d}x=m(A).$$

特别地，

$$\int_E \chi_E(x)\,\mathrm{d}x=m(E).$$

- （数乘的性质）

$$\int_E cf\,\mathrm{d}x=c\int_E f\,\mathrm{d}x\quad(c\geqslant 0).$$

- （加法的性质）

$$\int_E f+g\,\mathrm{d}x=\int_E f\,\mathrm{d}x+\int_E g\,\mathrm{d}x.$$

- （单调性）

$$f\leqslant g\,\text{a.e.}\Leftarrow\int_E f\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E g\,\mathrm{d}x.$$

第一、二条性质的证明可以直接利用定义，第三条性质可以将两个函数的可测分割记为一样的，然后使用第一条性质，第四条性质有 $m(E_i)>0,a_i\leqslant b_i$，然后使用定义证明.

注意，Lebesgue 积分充分利用了零测集对于积分值没有影响的特点，所以在表示不等关系的时候，一般使用“几乎处处”的条件就足够了.

1.2 非负可测函数的积分

引理（证明略）：设 $\{f_n\}$ 是 E 上单调递增的非负简单函数列，

- 若 g 是 E 上的非负简单函数，且 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)\geqslant g(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}x\geqslant\int_E g\,\mathrm{d}x$$

- 若 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),x\in E$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}x=\sup\{\int_E g\,\mathrm{d}x:g\in S^+E,g\geqslant f\}$$

，S+(E) 表示 E 上的非负简单函数的全体.

定义：设 f 是 E 上的非负可测函数，f_n 是 E 上的非负可测函数列，且 $f_n\nearrow f$，定义 f 在 E 上的积分为：

$$\int_E f\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}x$$

$$0\leqslant\int_E f\,\mathrm{d}x\leqslant\infty,若\int_E f\,\mathrm{d}x<\infty,则f\in L(E).$$

同样，f 在 E 上的积分值不依赖与 $\{f_n\}$ 的选取.

性质（Part 2, f,g 为非负可测函数）：

- （数乘的性质）

$$\int_E cf\,\mathrm{d}x=c\int_E f\,\mathrm{d}x\quad(c\geqslant 0).$$

- （加法的性质）

$$\int_E f+g\,\mathrm{d}x=\int_E f\,\mathrm{d}x+\int_E g\,\mathrm{d}x.$$

- （单调性）

$$f\leqslant g\,\text{a.e.}\Rightarrow\int_E f\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E g\,\mathrm{d}x.$$

证明：第一条性质显然成立，第二条性质可以用两个非负函数列分别逼近 f 和 g，第三条性质可以选取适当的 $\{f_n\},\{g_n\},f_n\leqslant g_n,n\geqslant 1$，且有 $f_n\nearrow f,g_n\nearrow g$，则有

$$\int_E f\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}x\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_E g_n\,\mathrm{d}x=\int_E g\,\mathrm{d}x.$$

1.3 一般可测函数的积分

定义：设 f 是 E 上的可测函数，若 $\int_E f^+\,\mathrm{d}x,\int_E f^-\,\mathrm{d}x$ 至少有一个是有限值，则 f 在 E 上的积分存在，且定义为：

$$\int_E f\,\mathrm{d}x=\int_E f^+\,\mathrm{d}x-\int_E F^-\,\mathrm{d}x.$$

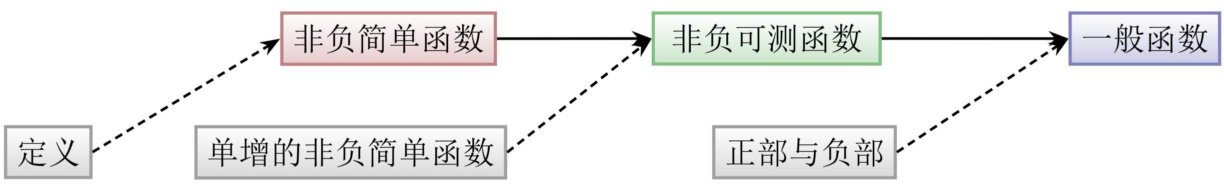
若 $\int_E f^+\,\mathrm{d}x,\int_E f^-\,\mathrm{d}x$ 都是有限值，则 $f\in L(E)$. 将 $[a,b]$ 区间上的 Lebesgue 积分记为 $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.

基本的可积条件（Part 3, f,g 为一般函数）：

- $g\in L(E),f(x)\leqslant g(x),\text{a.e.}x\in E$或$f(x)\geqslant g(x),\text{a.e.}x\in E$，$f$ 在 E 上的积分存在.
- $g\in L(E),|f(x)|\leqslant g(x),\text{a.e.}x\in E$，则 $f\in L(E)$.
- $f\in L(E)\Leftrightarrow |f|\in L(E)$.
- $m(E)<\infty,\exists M,|f|\leqslant M,f\in L(E)$.

证明：第一条性质有 $f^+(x)\leqslant g^+(x)\,\text{a.e.}x\in E$或$f^-(x)\leqslant g^-(x)\,\text{a.e.}x\in E$.，然后用积分的单调性可得 $\int_E f^+\,\mathrm{d}x,\int_E f^-\,\mathrm{d}x$ 至少有一个是有限值. 第二条性质兼具第一条性质的条件，故有可积性. 第三条性质 $|f|=f^++f^-$，可得 $\int_E|f|\,\mathrm{d}x$是有限值 $\Leftrightarrow$ $\int_E f^+\,\mathrm{d}x,\int_E f^-\,\mathrm{d}x$都是有限值. 第四条性质将 $g(x)=M,x\in E$ 作为控制函数即可证明.

一个通用的证明过程：从非负简单函数到非负可测函数再到一般函数的证明方法.



积分区域的变化与特征函数的关系：设 f 在 E 上的积分存在，A 是 E 的可测子集，则 f 在 A 上的积分存在，且

$$\int_A f\,\mathrm{d}x=\int_E f\chi_A\,\mathrm{d}x$$

同样有 $f\in L(E)\Rightarrow f\in L(A)$.（证明方法为以上的分三个步骤的方法，第一步按定义证明，将 E 上的可测分割限定到 A 上；第二步取 $f_n\chi_A\nearrow f\chi_A$；第三步利用正部和负部处理一般函数）

以上的定理常常用在证明**多个积分区域不统一**的问题中.

积分的平移不变性：$f(x)\in L(\mathbb{R}^n), h\in\mathbb{R}^n,$ 则$f(x+h)\in L(\mathbb{R}^n)$，且有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+h)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

同样可以分三步证明，其中第一步用到测度的平移不变性. 后面两步类似.

2 积分的初等性质

2.1 线性性

若 $f,g\in L(E)$，则 $cf, f+g\in L(E)$,

$$\int_E cf\,\mathrm{d}x=c\int_E f\,\mathrm{d}x$$

$$\int_E (f+g)\,\mathrm{d}x=\int_E f\,\mathrm{d}x+\int_E g\,\mathrm{d}x$$

证明：$f\in L(E)\Rightarrow |f|\in L(E)$，则

$$\int_E |cf|\,\mathrm{d}x=\int_E |c||f|\,\mathrm{d}x=|c|\int_E |f|\,\mathrm{d}x<\infty.$$

故 $|cf|\in L(E)$，$cf\in L(E)$，类似有 $|f+g|\leqslant |f|+|g|\Rightarrow f+g\in L(E)$. 利用

$$(cf)^+=\begin{cases} cf^+ & c\geqslant 0\\ -cf^- & c\geqslant 0\end{cases}$$

$$(cf)^-=\begin{cases} cf^- & c\geqslant 0\\ -cf^+ & c\geqslant 0\end{cases}$$

$$\int_E cf\,\mathrm{d}x=\int_E cf^+\,\mathrm{d}x-\int_E cf^-\,\mathrm{d}x=c\int_E f^+\,\mathrm{d}x-c\int_E f^-\,\mathrm{d}x=c\int_E f\,\mathrm{d}x.$$

$$(f+g)^+-(f+g)^-=f+g=f^+-f^-+g^+-g^-\Rightarrow (f+g)^++f^-+g^-=f^++g^++(f+g)^-$$

$$\begin{aligned}\int_E (f+g)\,\mathrm{d}x&=\int_E (f+g)^+\,\mathrm{d}x-\int_E (f+g)^-\,\mathrm{d}x\\&=\int_E f^+\,\mathrm{d}x-\int_E f^-\,\mathrm{d}x+\int_E g^+\,\mathrm{d}x-\int_E g^-\,\mathrm{d}x\\&=\int_E f\,\mathrm{d}x+\int_E g\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2.2 对积分域的有限可加性

设 $f \in L(E), A_1 \cap A_2 = \emptyset, E = A_1 \cup A_2$, 则

$$\int_E f\,\mathrm{d}x = \int_{A_1} f\,\mathrm{d}x + \int_{A_2} f\,\mathrm{d}x$$

证明：$f \in L(A_1), f \in L(A_2)$，得到 $f\chi_{A_1}, F\chi_{A_2} \in L(E)$，有

$$\int_{A_1} f\,\mathrm{d}x + \int_{A_2} f\,\mathrm{d}x = \int_E f\chi_{A_1}\,\mathrm{d}x + \int_E f\chi_{A_2} = \int_E (f\chi_{A_1} + f\chi_{A_2})\,\mathrm{d}x = \int_E f\,\mathrm{d}x.$$

同样可证有限情况：$f \in L(E)$，$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 为 E 的一个可测分割，则有：

$$\int_E f\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \inf_{A_k} f\,\mathrm{d}x$$

2.3 积分的单调性与不等关系

设 f, g 在 E 上的积分存在，则：

- $f \leqslant g \Rightarrow \int_E f\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E g\,\mathrm{d}x$.
- $f = g$ a.e. $\Rightarrow \int_E f\,\mathrm{d}x = \int_E g\,\mathrm{d}x$.
- $f \geqslant 0$ a.e.$A, B \subset E, A \subset B \Rightarrow \int_A f\,\mathrm{d}x \leqslant \int_B f\,\mathrm{d}x$.
- $f = 0$ a.e. $\Rightarrow \int_E f\,\mathrm{d}x = 0$.
- $m(E) = 0, \forall f(x), x \in E \Rightarrow \int_E f\,\mathrm{d}x = 0$
- $f \in L(E), |\int_E f\,\mathrm{d}x| \leqslant \int_E |f|\,\mathrm{d}x$.

证明：（1）若在 E 上，$f \leqslant g$ a.e.，则 $f^+ \leqslant g^+, f^- \geqslant g^-$ a.e. 则

$$\int_E f^+\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E g^+\,\mathrm{d}x, \int_E f^-\,\mathrm{d}x \geqslant \int_E g^+\,\mathrm{d}x$$

$$\int_E f\,\mathrm{d}x = \int_E f^+\,\mathrm{d}x - \int_E f^-\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E g^+\,\mathrm{d}x - \int_E g^-\,\mathrm{d}x = \int_E g\,\mathrm{d}x.$$

（2）由（1）的对偶性可得.

（3）由 $f\chi_A(x) \leqslant f\chi_B(x), x \in E$ 使用（1）的结论即可.

（4）由（2）可得.

（5）利用 $\int_E f = 0$ 推出 $f = 0$ a.e. 由（4）可得.

（6）对 $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ 积分即可.

2.4 Lebesgue 积分的原始定义

设 $m(E) < \infty$，f 是 E 上可测函数，$c \leqslant f(x) < d, (x \in E), \forall n \in \mathbb{N}^+$，设 $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ 为 $[c, d]$ 的一个分割，令 $\lambda = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i - y_{i-1}$. 则

$$\int_E f\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \cdot m(E(y_{i-1} \leqslant f < y)).$$

证明：f 是有限测度集上的有界可测函数，则 $f \in L(E)$，令 $E_i = E(y_{i-1} - yi), (i = 1, 2, \cdots, n)$，则 $\{E_i\}$ 为 E 的一个可测分割，利用积分的单调性与对积分域的有限可加性，有

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} y_{i-1} \, \mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f \, \mathrm{d}x = \int_E f \, \mathrm{d}x.$$

$$\int_E f \, \mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i m(E_i)$$

所以有

$$0 \leqslant \int_E f \, \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i m(E_i) - \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - y_{i-1} m(E_i) \leqslant \lambda m(E) \to 0.$$

picture here...

2.5 Chebyshev 不等式与应用

Chebyshev 不等式： 设 f 是 E 上的可测函数，则 $\forall \lambda > 0, m(E(|f| \geqslant \lambda)) = \frac{1}{k} \int_E |f| \, \mathrm{d}x$.

证明：$x \in E(|f| \geqslant \lambda)$，有 $\frac{1}{\lambda}|f(x)| \geqslant 1$.

$$m(E(|f| \geqslant \lambda)) = \int_{E(|f| \geqslant \lambda)} 1 \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k} \int_{E(|f| \geqslant \lambda)} |f| \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_E |f| \, \mathrm{d}x$$

注意，有时候我们需要使用以下减弱的不等式:

$$m(E(|f| \geqslant \lambda)) \leqslant \frac{1}{k} \int_{E(|f| \geqslant \lambda)} |f| \, \mathrm{d}x.$$

应用 1：$f \in L(E) \Rightarrow f$ 在 E 上几乎处处有限.

$f \in L(E), |f| \in L(E)$，$A = E(|f| = \infty), A_k = E(|f| \geqslant k), k = 1, 2, \cdots$. 则 $A \subset A_k$. 利用 Chebyshev 不等式得到：$0 \leqslant m(A) \leqslant m(A_k) \leqslant \frac{1}{k} \int_E |f| \, \mathrm{d}x \to 0, (k \to \infty)$，$m(A) = 0$.

[另外也可以用测度的上连续性，在 $n = 1$ 的情况下使用 Chebyshev 不等式.]

应用 2：$f \geqslant 0$ a.e., $\int_E f \, \mathrm{d}x \Rightarrow f = 0$ a.e.

$f \geqslant 0$ a.e.，故 $m(E(f < 0)) = 0. A = E(f > 0), A_k = E(f > \frac{1}{k}), A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 利用 Chebyshev 不等式得到：$0 \leqslant m(A_k) \leqslant k \int_E f \, \mathrm{d}x = 0$. $m(A_k) = 0$，由测度的次可列可加性 $m(A) = 0$，则 $f = 0$ a.e.

[另外也可以用测度的下连续性.]

2.6 积分的绝对连续性

设 $f \in L(E)$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \quad A \subset E, m(A) < \delta, \int_A |f| \, \mathrm{d}x < \varepsilon.$

用泛函的方式理解：

$$\lim_{m(A)\to 0} \int_A |f| \, \mathrm{d}x = 0.$$

证明：设 $f \in L(E)$，则 $|f| \in L(E).\{g_k\}$ 为非负简单函数列，$g_k \nearrow |f|$. 由积分定义，

$$\lim_{k\to\infty} \int_E g_k \, \mathrm{d}x = \int_E |f| \, \mathrm{d}x < \infty.$$

于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0, s.t.$

$$0 \leqslant \int_E (|f| - g_{k_0}) \, \mathrm{d}x = \int_E |f| \, \mathrm{d}x - \int_E g_{k_0} \, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$$

令 $0 \leqslant M = \max_{x\in E} g_{k_0}(x) < \infty$，不妨设 $M > 0$（$M = 0$ 时显然），取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$，再取 $A \subset E, m(A) < \delta$，则有

$$\int_E |f| \, \mathrm{d}x = \int_A (|f| - g_{k_0}) \, \mathrm{d}x + \int_A g_{k_0} \, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} + \int_A M \, \mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{2} + Mm(A) < \varepsilon$$

注意，复值可测函数的积分，除序关系以外与实值可测函数的性质一致.

3 积分的极限定理

3.1 Levi 单调收敛定理

积分符号与极限符号的运算顺序的交换.

设 $\{f_n\}$ 是 E 上的单调递增的非负可测函数列，f 是 E 上的非负可测函数，且 $f_n \to f$ a.e.，则

$$\lim_E f_n \, \mathrm{d}x = \int_E f \, \mathrm{d}x.$$

证明：不妨设 $f_n(x) \to f(x)$ 处处成立（因为改变一个零测集上的函数值不影响函数的整体性质，所以可以定义不收敛处的函数值为 0)，由积分的单调性得到：

$$\int_E f_n \, \mathrm{d}x \leqslant \int_E f_{n+1} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_E f \, \mathrm{d}x.(n \geqslant 1)$$

因此 $\lim_{n\to\infty} f_n$ 存在，并且 $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}x \leqslant \int_E f \, \mathrm{d}x.$

反过来，设 $\{g_n\}$ 是非负可测函数列，且 $g_n \nearrow f$.

$\forall k \geqslant 1$，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \geqslant g_k(x), x \in E.$

由于 $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}x \geqslant \int_E g_k \, \mathrm{d}x$. 令 $k \to \infty$，可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}x \geqslant \int_E f\,\mathrm{d}x.$$

推论 1（逐项积分定理）：$\{f_n\}$ 是 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E\sum_{n=1}^{\infty} f_n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\inf_E f\,\mathrm{d}x.$$

积分符号与求和符号的运算顺序的交换.

证明：令 $g_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x),(n\geqslant 1)$，$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$，则 $g_n\geqslant 0$，$g_n\nearrow f$，f 是可测的. 利用 Levi 定理，数列的替换与取极限过程，可得：

$$\int_E\sum_{n=1}^{\infty} f_n\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_i\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty}\int_E f_i\,\mathrm{d}x.$$

推论 2（积分对积分域的可列可加性）：f 在 E 上的积分存在，$\{E_n\}$ 为 E 的可测分割，则

$$\int_E f\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f\,\mathrm{d}x.$$

证明：

$$\int_E f^+\,\mathrm{d}x = \int_E\sum_{n=1}^{\infty} f^+\chi_{E_n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f^+\chi_{E_n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^+\,\mathrm{d}x.$$

对负部可证类似结论，由于 f 的积分存在，$\int_E f^+\,\mathrm{d}x, \int_E f^-\,\mathrm{d}x$ 至少有一个是有限的，即原命题得证.

3.2 Fatou 引理

设 $\{f_n\}$ 是 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}x.$$

单增条件减弱，结论随之减弱为不等关系，同时极限的顺序交换变成下极限的顺序交换.（“入不敷出”）

证明：对每个 $n\geqslant 1$，令 $g_n=\inf_{k\geqslant n} f_k(x),(x\in E)$. 则 $\{g_n\}\nearrow$，且 $0\leqslant g_n\leqslant f_n, \lim_{n\to\infty} g_n=\varliminf_{n\to\infty} f_n$. 由 Levi 定理得到：

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}x.$$

推论 1：（一致有界的可积性）$f, f_n(n\geqslant 1)$ 是 E 上的可测函数，$f_n\to f$ a.e.，若 $\sup_{n\geqslant 1}\int_E |f_n|\,\mathrm{d}x<\infty$，则 $f\in L(E)$.

证明：利用 Fatou 引理：

$$\int_E |f|\,\mathrm{d}x = \int_E \lim_{n\to\infty}|f_n|\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E |f_n|\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{n\geqslant 1}\int_E |f_n|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

3.3 控制收敛定理

设 $f, f_n(n \geqslant 1)$ 是 E 上的可测函数，且 $\exists g \in L(E), s.t. \quad |f_n| \leqslant g$ a.e.$(n \geqslant 1)$. 若在 E 上 $f_n \to f$ a.e. 或 $f_n \xrightarrow{m} f$，则 $f, f_n \in L(E)$，并且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}x = \int_E f \, \mathrm{d}x.$$

证明：由于在 E 上 $|f_n| \leqslant g$ a.e.$(n \geqslant 1)$，因此当 $f_n \to f$ a.e. 或 $f_n \xrightarrow{m} f$ 时有 $|f| \geqslant g$ a.e.（依测度收敛要使用 Risez 定理）由于 $g \in L(E)$，可知 $f, f_n \in L(E)$. 由

$$|\int_E f_n \, \mathrm{d}x - \int_E f \, \mathrm{d}x| = |\int_E (f_n - f) \, \mathrm{d}x| \leqslant \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}x.$$

下面证一个更强的结论：

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}x = 0.$$

分两种情况证明. 先考虑 $f_n \to f$ a.e. 的情形. 令 $h_n = 2g - |f_n - f|$，则 $h_n \geqslant 0$ a.e.，则 $h_n \geqslant 0$ a.e.$(n \geqslant 1)$. 对函数列 $\{h_n\}$ 应用 Fatou 引理，可得：

$$\begin{aligned}\int_E 2g \, \mathrm{d}x &= \int_E \lim_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|) \, \mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E (2g - |f_n - f|) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_E 2g \, \mathrm{d}x - \varlimsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

又有:

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}x \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}x \leqslant 0$$

故可得加强结论成立.

再考虑 $f_n \xrightarrow{m} f$ 的情形，用反证法. 则 $\exists \varepsilon > 0, \{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}, s.t. \quad \int_E |f_{n_k} - f| \, \mathrm{d}x \geqslant \varepsilon \quad (k \geqslant 1)$. 由 Risez 定理，$\exists \{f_{n_{k'}}\} \subset \{f_{n_k}\}, s.t. \quad f_{n'_k} \to f$ a.e. $\quad (k' \to \infty)$，由上一种情形可得：

$$\lim_{k'\to\infty} \int_E |f_{n'_k} - f| \, \mathrm{d}x = 0.$$

这与假设矛盾，故加强结论成立.

注意：此处的 $\{h_n\}$ 的构造思路是依据 Fatou 引理与非负构造的，为了使极限值得到夹逼，从而在反方向构造函数.

注：若

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_{n_k} - f| \, \mathrm{d}x = 0.$$

成立，则称 $\{f_n\}$ 在 L^1 中收敛于 f，（或称平均收敛于 f）.

推论 1：（有界收敛定理）设 $m(E) < \infty$，$f, f_n(n \geqslant 1)$ 是 E 上的可测函数，且 $\exists M, s.t. \quad |f_n| \leqslant M$ a.e.$(n \geqslant 1)$. 若在 E 上 $f_n \to f$ a.e. 或 $f_n \xrightarrow{m} f$，则 $f, f_n \in L(E)$，并且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}x = \int_E f \, \mathrm{d}x.$$

证明：令 $g(x) = M$ 作为 $f_n(x)$ 的控制函数，结合 $m(E) < \infty$ 即可.

推论 2：（积分号下求导）设 f 是定义在 $D = [a,b] \times [c,d]$ 上的实值函数，使得 $\forall y \in [c,d], f(x,y) \in L([a,b])$，$\forall (x,y) \in D, {f_y}'$ 存在，并且存在控制函数 $g(x) \in L([a,b])$：

$$|{f_y}'(x,y)| \leqslant g(x), (x,y) \in D.$$

则函数 $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b {f_y}'(x,y)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

证明：设 $y \in [c,d]$，任取数列 $\{h_n\}$，使得 $y + h_n \subset [c,d], h_n \to 0, h_n \neq 0$. 令

$$\varphi_n(x) = \frac{f(x,y+h_n) - f(x,y)}{h_n} \quad (x \in [a,b]).$$

则 $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = {f_y}'(x,y) \quad (x \in [a,b])$.

由微分中值定理，$x \in [a,b], \forall n \geqslant 1$,

$$|\varphi_n(x)| = |\frac{f(x,y+h_n) - f(x,y)}{h_n}| = |{f_y}'(x,y+\theta h_n)| \leqslant g(x) \quad (0 < \theta < 1).$$

对 $\{\phi_n\}$ 使用控制收敛定理，可得：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{I(y+h_n) - I(y)}{h_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\int_a^b [f(x,y+h_n) - f(x,y)]\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b {f_y}'(x,y)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

则积分在 y 处可导，原命题成立.

注意：这个问题的证明方法是一种重要的证明思路：**当遇到函数极限的问题时，可以考虑先将其转换为数列极限（归结原理），在数列的框架下使用控制收敛定理等工具，然后在将其转换回函数形式（归结原理）.**

4 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

4.1 Riemann 积分

- 分割与单调加细：$[a,b]$ 是有界闭区间，由 $[a,b]$ 上有限个点构成的序列 $\{P_n\}$ 称为 $[a,b]$ 的一个分割，若 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 如果 $\{P_n\}$ 是 $[a,b]$ 的一列分割，使得 $P_n \subset P_{n-1} (n \geqslant 1)$，则称 $\{P_n\}$ 是单调加细的.

- 相关记号与说明.f 是 $[a,b]$ 上的有界实值函数，$P=\{x_i\}_{i=0}^n$ 为一个分割，定义：

$$\begin{aligned}
&\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\\
&m_i = \inf_{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]}\\
&M_i = \sup_{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]}\\
&\lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i \text{为分割 } P \text{ 的细度.}
\end{aligned}$$

- 上积分与下积分：

$$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = \sup_{\forall P}\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i, \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = \inf_{\forall P}\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i.$$

- Riemann 可积的充要条件：**上积分等于下积分**. 且若一个函数在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则：

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x.$$

4.2 正常积分的关系

Step 1: 构造 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的桥梁.

$$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}, \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)}.$$

定义函数列 $\{u_n\},\{U_n\}$ 为：$u_n(a)=m_1^{(n)}, u_n(x)=m_i^{(n)}, x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$，$U_n(a)=M_1^{(n)}, U_n(x)=M_i^{(n)}, x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$. 则它们都是阶梯函数，且 $u_n\nearrow, U_n\searrow$，$m\leqslant u_n\leqslant f\leqslant U_n\leqslant M$. 令 $u=\lim_{n\to\infty}u_n$，$U=\lim_{n\to\infty}U_n$. 则 u,U 为**有界可测函数**，且 $u(x)\leqslant f(x)\leqslant U(x), x\in[a,b]$.

Step 2: 寻找桥梁的性质.

设 f 是 $[a,b]$ 上的有界可测函数，$\{P_n\}$ 是 $[a,b]$ 的一列单调加细的分割，且 $\lambda_n\to 0$. 若 $x_0\in[a,b]$ 且 x_0 不是任何 $\{P_n\}$ 的分点，则 $u(x_0)=U(x_0)\Leftrightarrow f$**在**$x_0$ **处连续.**

证明：（$\Rightarrow$）设 $u(x_0)=U(x_0)$. 则 $\lim_{n\to\infty}(U_n(x_0)-u_n(x_0))=U(x_0)-u(x_0)=0.\forall\varepsilon>0,\exists n_0, s.t.\quad U_{n_0}(x_0)-u_{n_0}(x_0)<\varepsilon$, 则在 $(x_{i-1}^{(n_0)},x_i^{(n_0)})$ 上 $|f(x)-f(x_0)|\leqslant U_{n_0}(x_0)-u_{n_0}(x_0)<\varepsilon$.

（$\Leftarrow$）f 在 x_0 处连续，则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, s.t.\quad x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$. 取充分大的 n 使得 $\lambda_n<\delta$，设 $x_0\in(x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)})$，则 $[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 于是 $f(x_0)-\varepsilon\leqslant m_i^{(n)}\leqslant M_i^{(n)}\leqslant f(x_0)+\varepsilon$，即 $U_n(x_0)-u_n(x_0)=M_i^{(n)}-m_i^{(n)}\leqslant 2\varepsilon$. 令 $n\to\infty$ 即得证.

Step 3: 找到关系并证明.

设 f 是 $[a,b]$ 上的有界可测函数. 则：

- $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow f$在$[a,b]$上a.e. 连续.
- 若 $f \in R([a,b])$，则 $f \in L([a,b])$，且 $(R)\int_a^b f\,\mathrm{d}x = (L)\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.

证明：（1）设 $P_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}\}(n \geqslant 1)$ 是 $[a,b]$ 上的一列单调可测的分割，且 $\lambda_n \to 0$. 由有界收敛定理和 u_n, U_n 的关系，有：

$$(L)\int_a^b U\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b U_n\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}.$$

$$(L)\int_a^b u\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b u_n\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}.$$

两式相减，可得：

$$(L)\int_a^b (U-u)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x.$$

所以 $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow (L)\int_a^b (U-u)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow U = u$ a.e.$(U-u \geqslant 0)$.

设 A 是分割序列 $\{P_n\}$ 的分点的全体，则 $m(A) = 0$. 再令 B 是 f 的间断点的全体.$x \notin A, U(x) = u(x) \Leftrightarrow f$在$x$ 处连续. 从而 $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow f$在$[a,b]$上a.e. 连续.

（2）首先可得 $f = u$ a.e.，f 在 $[a,b]$ 上是可测的. 由 f 的有界性可知 $f \in L([a,b])$. 故有：

$$(L)\int_a^b f\,\mathrm{d}x = (L)\int_a^b u\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)} = (R)\int_a^b f\,\mathrm{d}x.$$

注意：Lebesgue 积分的可积函数类**严格大于** Riemann 积分的可积函数类.

4.3 与广义 Riemann 积分的关系

设 $\forall b > a$，f 在 $[a,b]$ 上有界并且几乎处处连续，则 $f \in L([a,\infty)) \Leftrightarrow (R)\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 且当 $(R)\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛时，有

$$(R)\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x = (L)\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x.$$

证明：$\forall b > a$，f 在 $[a,b]$ 上有界并且几乎处处连续（正常积分），可知 $f \in R([a,b])$，$f \in L([a,b])$. 因此 f 在 $[a,\infty)$ 上是可测的，$\forall n \geqslant a, n \in \mathbb{N}^+$，构造 f 的**截尾函数列** $f_n(x) = f(x)\chi_{[a,n]}(x)$，则 f 是可测函数列，且 $f_n(x) \to f(x)(x \in [a,\infty))$，$f_n \nearrow$. 由 Levi 定理与正常积分的关系，可知

$$\begin{aligned}(R)\int_a^\infty |f|\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}(R)\int_a^n |f|\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^n |f|\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}(L)\int_{[a,\infty)} |f_n|\,\mathrm{d}x = (L)\int_a^\infty |f|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此 $f \in L[a,\infty) \Leftrightarrow (R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 注意到 $|f_n| \leqslant |f|(n \geqslant 1)$. 利用控制收敛定理与以上的类似方法，得到：

$$(R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x = (L)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x.$$

注意：非绝对收敛的 Riemann 广义积分不是 Lebesgue 可积的. 如 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

$\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ **在 Riemann 正常积分和绝对收敛的广义 Riemann 积分时与 Lebesgue 积分等价（注意** f **的有界性）.**

4.4 应用

Lebesgue 积分用于理论证明，Riemann 积分用于计算.

应用的两种形式：

- 计算积分型函数列的极限，用控制收敛定理即可，重点在于**寻找一个合适的可测函数，使得能够把原函数控制住，还要 Riemann 可积**.
- 计算原函数无法表示的积分，先用级数展开，然后用逐项积分定理，重点在于**基本级数展开式的使用与级数收敛域的控制，同时还要构造非负可测的函数列，因为逐项积分定理是由 Levi 定理推出**.

5 Fubini 定理

Fubini 定理讨论的是累次积分的换序问题.

一般形式：若 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数则对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^p, f(x,y)$ 作为 y 的函数在 $\mathbb{R}^q$ 上可测，$g(x) = \int_{\mathbb{R}^q f(x,y)\,\mathrm{d}y}$ 在 $\mathbb{R}^p$ 上可测，并且：

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^p} (\int_{\mathbb{R}^q f(x,y)} \mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x.$$

将非负可测函数这一条件改为可积函数，得到的可测结论改为可积，上述定理依然成立.

方体形式：$I \subset \mathbb{R}^p, J \subset \mathbb{R}^q$ 为方体. 若 $f(x,y)$ 是 $I \times J$ 上的非负可测函数或可积函数，则：

$$\int_{I\times J} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_I \mathrm{d}x \int_J f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_J \mathrm{d}y \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

上述定理一般不用在实际计算中，实际计算使用以下的推论. 、$I \subset \mathbb{R}^p, J \subset \mathbb{R}^q$ 为方体.

推论：$I \subset \mathbb{R}^p, J \subset \mathbb{R}^q$ 为方体. 若 $f(x,y)$ 是 $I \times J$ 上的可测函数，且以下两式中至少有一个成立：

$$\int_E \mathrm{d}x \int_J |f(x,y)|\,\mathrm{d}y < \infty, \int_J \mathrm{d}y \int_I |f(x,y)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

则下式成立：

$$\int_{I\times J} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_I \mathrm{d}x \int_J f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_J \mathrm{d}y \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$