实变第三章总结

Author: Tony Xiang

Full Document can be acquired here:
https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%203/Chapter3.pdf
Full Source code can be downloaded here:
https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%203/Chapter3.tex

1 关于无穷的运算

$a \in \mathbb{R}^1$，则：

- 序关系：$-\infty < a < +\infty$.
- 加法：$a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = (\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty)$.
- 减法：$a - (\mp\infty) = (\pm\infty) - (\mp\infty) = (\pm\infty)$.
- 乘法：

$$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} (\pm\infty), & 0 < a < +\infty \\ 0, & a = 0 \\ (\mp\infty), & -\infty < a < 0 \end{cases}$$

.

- 除法：$\frac{a}{\pm\infty} = 0$.
- 绝对值：$|\pm\infty| = +\infty$.
- 未定义：$(\pm\infty) - (\pm\infty)$，$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$，应避免出现.

函数，实值函数.

以下设 $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

2 可测函数的性质

可测集：$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，$f$ 为定义在 E 上的函数，若 $\forall a \in \mathbb{R}^1$，$\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，称 f 为定义在 E 上的 Lebesgue 可测函数.

可测函数的示例：

- 常值函数是可测函数.
- χ_A 是可测函数 $\Leftrightarrow A$ 是可测函数. 特别地，Dirichlet 函数为可测函数.
- 连续函数为可测函数，这说明一个函数的可测性条件并不算强. 证明使用了 $\{x \in E : f(x) > a\} = E \cap G$，$G$ 为开集的结论.
- $[a, b]$ 上的单调函数为可测函数，证明将检验的集合分为区间，单点集和空集三类处理.

可测函数的基本性质：

- f 在 E 上可测，E_1 是 E 的可测子集，则 f 在 E_1 上可测. 证明使用:

$$\{x \in E_1 : f(x) > a\} = \{x \in E : f(x) > a\} \cap E_1$$

- E_1, E_2 是 E 的可测子集，$E = E_1 \cup E_2$，f 在 E_1 上可测，f 在 E_2 上可测，则 f 在 E 上可测. 证明使用：

$$\{x \in E : f(x) > a\} = \{x \in E_1 : f(x) > a\} \cup \{x \in E_2 : f(x) > a\}$$

简记符号：$\{x \in E : f(x) > a\} \to E(f > a)$.

可测函数（TFAE）：

- f 是 E 上的可测函数.
- $\forall a \in \mathbb{R}^1, E(f \geqslant a) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^1, E(f < a) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^1, E(f \leqslant a) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.
- $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), f^{-1}(A) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), E(f = +\infty) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

前四条互相证明可以由集合的运算来完成：

$$\begin{aligned}
E(f \geqslant a) &= \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > a - \frac{1}{k}) \\
E(f < a) &= E - E(f \geqslant a) \\
E(f \leqslant a) &= \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f < a + \frac{1}{k}) \\
E(f > a) &= E - E(f \leqslant a)
\end{aligned}$$

第一条与第五条的互相证明: 从左至右仅需了解即可，从右至左使用:

$$\begin{aligned}
E(f = +\infty) &= \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > k) \\
E(f > a) &= E(a < f \leqslant +\infty) = f^{-1}((a, +\infty)) \cup E(f = +\infty)
\end{aligned}$$

注：$E(a < f < b), E(a \leqslant f < b), E(a < f <\leqslant b), E(a \leqslant f \leqslant b), E(f = -\infty)$ 均是可测集.

可测函数的运算封闭性：

注：规定若 $f(x), g(x)$ 在某一点 x 处取异号的 ∞ 为值，则规定 $f(x) + g(x) = 0$.

- （对数乘的封闭性）f 在 E 上可测，$c \in \mathbb{R}^1$，则 cf 在 E 上可测. 证明使用下面的

集合分解：

$$E(cf>a)=\begin{cases}E(f>\frac{a}{c}), & c>0\\ E(f<\frac{a}{c}), & c<0\\ E(0>a), & c=0\end{cases}$$

•（对加法的封闭性）f,g 在 E 上可测，则 $f+g$ 在 E 上可测. 证明先对有限情形使用**有理数的稠密性和有理数集的可列性质**：

$$f(x)+g(x)>a\Leftrightarrow\exists r_n\in\mathbb{Q}^n,(f(x)>r_n)\wedge(g(x)>a-r_n)$$
$$E(f+g>a)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E(f>r_n)\cap E(g>a-r_n))$$

再考虑无限情况：

$$A=(E(f=+\infty)\cap E(g=-\infty))\cup(E(f=-\infty)\cap E(g=+\infty))$$
$$E(f+g>a)=\{x\in E-A:f(x)+g(x)>a\}\cup\{x\in A:f(x)+g(x)>a\}$$

•（对乘法的封闭性）f,g 在 E 上可测，则 fg 在 E 上可测. 证明分两步，先证明 f^2 在 E 上可测，再得出题目结论.

$$E(f^2>a)=\begin{cases}E, & a<0\\ E(f>\sqrt{a})\cup E(f<\sqrt{a}), & a\geqslant 0\end{cases}$$

$$2fg=(f+g)^2-(f^2+g^2)$$

•（对绝对值的封闭性）f 在 E 上可测，则 $|f|$ 在 E 上可测. 证明使用下面的集合分解：

$$E(|f|>a)=\begin{cases}E, & a<0\\ E(f>a)\cup E(f<-a), & a\geqslant 0\end{cases}$$

函数的正部与负部：$f^+(x)=\max\{f(x),0\},f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$.

正部与负部的性质：

•（非负性）$f^+(x)\geqslant 0,f^-(x)\geqslant 0$.

•（计算公式）$f(x)=f^+(x)-f^-(x),|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$.

•（可测性）$f^+(x),f^-(x)$ 在 E 上可测. 证明可以用集合分解来处理.

$$E(f^+>a)=\begin{cases}E(f>a), & a\geqslant 0\\ E, & a<0\end{cases}$$

$$E(f^->a)=\begin{cases}E(f<-a), & a\geqslant 0\\ E, & a<0\end{cases}$$

注意：引入正部与负部的原因是方便之后对积分的处理，即先考虑非负值.

可测函数列的性质：$\{f_n\}$ 是 E 上的可测函数列，则函数

$$\sup_{n\geqslant 1} f_n, \inf_{n\geqslant 1} f_n, \varlimsup_{n\to\infty} f_n, \varliminf_{n\to\infty} f_n\text{在 } E \text{ 上可测.}$$

特别地，$\forall x\in E$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)\text{存在，则其在 } E \text{ 上可测.}$$

证明可以用集合分解来处理：

$$E(\sup_{n\geqslant 1} f_n > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > a)$$

$$E(\inf_{n\geqslant 1} f_n < a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n < a)$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\geqslant 1}\sup_{k\geqslant n} f_k(x)$$

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\geqslant 1}\inf_{k\geqslant n} f_k(x)$$

可测分割：设 $E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 E 的互不相交的可测子集，且 $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$，则称 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 是 E 的一个可测分割.

简单函数：f 是定义在 E 上的函数，若存在 E 的一个可测分割 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 与实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得 $x\in A_i, f(x) = a_i (i = 1, 2, \cdots, k)$，则称 f 是定义在 E 上的简单函数.

$$f\text{是 } E \text{ 上的简单函数} \Leftrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i\chi_{A_i}(x), x\in E$$

简单函数的性质：

- （对数乘的封闭性）f 是简单函数，则 cf 是简单函数. 证明将系数更改即可.
- （对加法的封闭性）f, g 是简单函数，则 $f+g$ 是简单函数. 证明时写出 E 的两个可测分割，做出 $\{A_i\cap B_j\}$ 亦为 E 的可测分割，并有 $f(x)+g(x) = a_i+b_j, x\in A_i\cap B_j$. 注意，这说明给定两个简单函数，**可以设它们的表达式中所对应的 E 的可测分割是一样的.**
- （复合运算的性质）φ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的**实值函数**，则 $\varphi(f(x))$ 是简单函数. 证明直接写出 $\varphi(f(x)) = \sum_{i=1}^{k}\varphi(a_i)\chi_{A_i}(x)$.

函数列的单调性（仅说明单调增加性）：$\{f_n\}$ 是 E 上的一列非负可测函数，$\forall x\in E, f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant\cdots$，则称函数列 $\{f_n\}$ 是单调增加的. 记为 $\{f_n\}\nearrow$.

逼近定理：设 f 是 E 上的非负可测函数，则存在 E 上的单调增加的非负简单函数列 $\{f_n\}$，使得 $\{f_n\}\nearrow f(n\to\infty)$. 若 f 在 E 上是有界的，则 $f_n\rightrightarrows f$.（证明略）

逼近定理的推论：设 f 是 E 上的非负可测函数，则存在 E 上的非负简单函数列 $\{f_n\}$，使得 $\{f_n\} \to f(n \to \infty), |f_n| \leqslant |f|(n \geqslant 1)$. 若 f 在 E 上是有界的，则 $f_n \rightrightarrows f$. 证明可以将 f 分为正部与负部分别处理然后合并.

可测函数的构造性特征: f 是 E 上的函数, 则 f 可测 $\Leftrightarrow \exists$简单函数列$\{f_n\}, s.t. \{f_n(x)\} \to f(x)(x \in E, n \to \infty)$.

复合函数的可测性：f 是 E 上的实值可测函数，g 是 $\mathbb{R}^1$ 上的连续函数，则 $g(f(x))$ 在 E 上可测. 使用可测函数的构造性特征证明.

3 可测函数列的收敛

几乎处处成立的性质：$m(\{x \in E : \neg P(x)\}) = 0$，或 $\exists E_0 \subset E, m(E_0) = 0, s.t. \quad x \in E - E_0, P(x)$. 则称 $P(x)$ 在 E 上几乎处处成立，记为 $P(x) a.e.$于E.

几乎处处成立的示例：

- 几乎处处相等：f, g 为 E 上的函数，$m(E(f \neq g)) = 0$，则 $f = g, a.e.$于E.
- 几乎处处有限：f 为 E 上的函数，$m(E(|f| = \infty)) = 0$，则 f 在 E 上几乎处处有限.
- 本性有界：f 为 E 上的函数，$\exists M > 0, m(E(|f| > M)) = 0$，则 f 在 E 上本性有界.

注意几乎处处有限与本性有界的区别, 本性有界的结论更强.

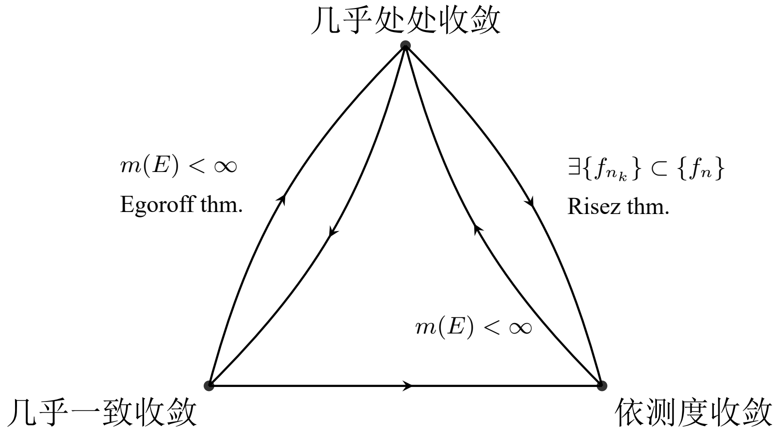
f 在 E 上可测，$f = g, a.e.$于E，则 g 在 E 上可测. 即改变函数在一个零测集上的函数值，不改变函数的可测性. 证明使用以下的集合分解：

$$
\begin{aligned}
E(g > a) &= \{x \in E - E_0 : g(x) > a \cup x \in E_0 : g(x) > a\} \\
&= \{x \in E - E_0 : f(x) > a \cup x \in E_0 : g(x) > a\}
\end{aligned}
$$

可测函数的几种收敛:

- 几乎处处收敛：$\exists E_0 \subset E, m(E_0) = 0, s.t. \quad x \in E - E_0, f_n(x) \to f(x)$，记为 $f_n \to f \quad a.e.$于E.
- 依测度收敛：$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} m(E(|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon)) = 0$，记为 $f_n \xrightarrow{m} f$于E.
- 几乎一致收敛：$\forall \delta > 0, \exists E_\delta \subset E, m(E - E_\delta) < \delta, s.t. \quad f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in E_\delta$，$f_n \to f \quad 5a.un.$于$E$.

几种收敛的相互关系:



Risez 定理的一个应用：$m(E)<\infty$，则：

$$f_n \xrightarrow{m} f \Leftrightarrow \forall\{f_{n_k}\}\subset\{f_n\}, \exists\{f_{n_{k'}}\}\subset\{f_{n_k}\}, s.t. \quad f_{n_{k'}}\to f \quad a.e.$$

注意：我们期望将依测度收敛转化为几乎处处收敛，因为依测度收敛的形式较为复杂，而几乎处处收敛可以转化为数列的极限来处理，这样就大大地减少了分析的难度.

部分定理的证明写在附录中.

4 可测函数与连续函数的关系

Lusin 定理的引理：设 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 个互不相交的闭集，$F=\bigcup_{i=1}^k F_i$，则简单函数 $f(x)=\sum_{k=1}^k a_i\chi_{F_i}(x)$ 是 F 上的连续函数. 可以直接按连续性的定义证明：$\delta=d(x_0, \bigcup_{i\neq i_0}F_i), x_0\in\bigcup_{i\neq i_0}F_i$.

Lusin 定理：设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，f 是 E 上 $a.e.$ 有限的可测函数，则 $\forall\delta>0, \exists F_\delta\subset E, F_\delta$为闭集$, s.t. \quad m(E-F_\delta)<\delta$，且 f 是 F_δ 上的连续函数.

注意：此处的连续函数是限制在 F_δ 上的连续函数，并不能保证原函数的连续性.

Tietze 扩张定理：设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集，$f\in C(F), \exists g\in C(\mathbb{R}^n), s.t. \quad x\in F, g(x)=f(x)$，且 $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)|=\sup_{x\in F}|f(x)|$.（证明略）

Lusin 定理的加强形式：设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，f 是 E 上 $a.e.$ 有限的可测函数，则 $\forall\delta>0, \exists g\in C(\mathbb{R}^n), s.t. \quad m(\{x\in E: f(x)\neq g(x)\})<\delta$，且 f 是 F_δ 上的连续函数. 且 $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)|=\sup_{x\in F}|f(x)|$. 证明使用了原有的 Lusin 定理和 Tietze 扩张定理：

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)|\leqslant\sup_{x\in F}|f(x)|\leqslant\sup_{x\in E}|f(x)|.$$

$$\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}\subset E-F$$

$$m(\{x\in E: f(x)\neq g(x)\})\leqslant m(E-F)<\delta$$

本节之后的内容不作要求，部分定理的证明写在附录中.

附录 A 布置的课后作业

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18(1), 19, 20(3)(4), 21, 22, 24, 25, 27.$

附录 B 课后作业的讲解

附录 C 部分定理的证明与相关反例的构造