实变第一章总结

1 集合与集合的运算

集合的表示：列举法，描述法.

子集，真子集.

幂集: $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$, 若 $|X| = n$，则 $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

集合的有限交，并，差，余.

相对差集：$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$，若 $A\Delta B = \emptyset$，$A = B$.

集族，集列：若对 $\forall \alpha \in I$ 都对应一个集 A_α，则称 $\{A_n\}_{\alpha \in I}$ 为集族. 若 $I = \mathbb{N}$，则称 $\{A_n\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ 为集列.

集合的可列交：

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{\exists \alpha \in I, s.t. \quad x \in A_\alpha\}$$

.

集合的可列并：

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

.

可列交与可列并的性质：交换律，结合律，分配律.

De Morgan 公式：

$$(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^C = \bigcap_{\alpha \in I} {A_\alpha}^C$$
$$(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^C = \bigcup_{\alpha \in I} {A_\alpha}^C$$

集合的表示：根据所给条件由内向外进行表示. 一般等价转化为：$\forall : \bigcap$，$\exists : \bigcup$. 通过对**指标依赖的分析**，依次将极限定义转化为集合符号的定义。

直积：有序 n 元组全体构成的集：$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n\}$

集列的极限：

上极限：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} = \{x : x\text{属于}A_n\text{中的无限多个}\}$$

.

下极限：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} = \{x : x\text{至多不属于}A_n\text{中的有限多个}\}$$

.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \subset \underline{\lim_{n\to\infty}}$$

若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} = \underline{\lim_{n\to\infty}}$$

则称 $\{A_n\}$ 存在极限，记

$$A \xlongequal{def} \overline{\lim_{n\to\infty}} = \underline{\lim_{n\to\infty}}$$

集列极限的表示：上极限先变大再变小，下极限先变小再变大.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

单调集列必存在极限，且：

$$\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad A_n\text{单调递减}$$

$$\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad A_n\text{单调递增}$$

2 映射，可列集，基数

映射，值域，定义域，像，原像，函数，单射，满射，双射，逆映射，反函数，复合映射，延拓，限制.

特征函数 (示性函数)：

$A \subset X$，

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

特征函数的性质.

特征函数能够表示分段函数，可以看作对函数的一种“粘连”：

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\chi_{A_i}(x)$$

其中 $\{A_n\}$ 为不相交的子集，并且 X 为它们的并集.$f_i(x)$ 为定义在 $\{A_i\}$ 上的函数。

集合的对等关系：A，B 是两个非空集合，若 $\exists\phi : A \to B, \phi$为双射，则 A，B 对等，记为 $A \sim B$. 且 $\emptyset \sim \emptyset$.

集合的对等关系满足自反性，对称性与传递性.

3 集类

4 $\mathbb{R}^n$ 中的点集