实变第二章总结

Author: Tony Xiang

Full Document can be acquired here:

https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%202/Chapter2.pdf

Full Source code can be downloaded here:

https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%202/Chapter2.tex

1 引言

测度的四条性质：**非负性，可列可加性，平移不变性，可减性**.

区间的长度：

$$|I| = \begin{cases} b-a, & I \text{ 为有界区间}, I=(a,b),(a,b],[a,b),[a,b] \\ +\infty, & I \text{ 为无界区间} \end{cases}$$

方体的体积：$I = I_1 \times I_2 \times \cdots I_n$，则体积为：$|I| = |I_1| \times |I_2| \times \cdots |I_n|$.

只要有一个区间是无界的，整个方体即为无界方体，其体积为 $+\infty$. 另外有 $|\emptyset| = 0$.

规定：$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$，$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

2 外测度

开方体覆盖.

外测度：对每个 $A \subset \mathbb{R}^n$，令

$$m^*(A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \{I_k : \{I_k\} \text{是 } A \text{ 的开方体覆盖}\}.$$

称 $m^*(A)$ 为 A 的 Lebesgue 外测度.

注意:$\forall A \subset \mathbb{R}^n, m^*(A) \geqslant 0$（非负性）. 若对 A 的任一开方体覆盖 $\{I_k\}$，有 $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \infty$，则 $m^*(A) = \infty$. 即 $0 \leqslant m^*(A) \leqslant \infty$.

回顾下确界的定义：$a = \inf E$，则

- $\forall x \in E, a \leqslant x$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in E, s.t. \quad x' < a + \varepsilon$.

由此得出外测度的两个事实：

- **事实 1:** $\forall I_k \supset A, s.t. \quad m^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$.
- **事实 2:** $m^*(A) < \infty, \forall \varepsilon > 0, \exists I_k \supset A, s.t. \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(A) + \varepsilon$.

一个重要的数分定理：设 $a, b \in \mathbb{R}^1, \forall \varepsilon > 0, s.t. \quad a < b + \varepsilon$**，则** $a \leqslant b$**.**

外测度的性质：

- 可数集的外测度为 0.（用 $I_k=(a_k-\frac{\varepsilon}{2^{k+1}},a_k+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}})$ 覆盖 A.）
- $m^*(\emptyset)=0$.
- 单调性：$A\subset B\Rightarrow m^*(A)\leqslant m^*(B)$. (由事实 1,2 与数分定理可得.)
- **次可列可加性**：对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意一列集 $\{I_k\}$，有:

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k)\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k).$$

（将事实 2 进行改进：$\sum_{i=1}^{\infty}|I_{k,i}|\leqslant m^*(A_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}$，之后再二重求和即可.）

- **次有限可加性**：对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意一列集 $\{I_k\}$，有:

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} I_k)\leqslant \sum_{k=1}^{n} m^*(I_k).$$

（次可列可加性的推论.）

- 平移不变性：$E\subset\mathbb{R}^n,\forall x_0\in\mathbb{R}^n,m^*(x_0+E)=m^*(E)$，$x_0+E=\{x_0+x:x\in E\}$.

（由事实 1,2 与对偶的性质证明.）

- 数乘的性质：$E\subset\mathbb{R}^n,\forall\lambda\in\mathbb{R},m^*(\lambda E)=|\lambda|^n m^*(E)$，$\lambda E=\{\lambda x:x\in E\}$.（由事实 1,2 与对偶的性质证明.）

注意：次可列可加性是外测度中“不太好”的性质，它没有集合不相交的条件限制.

$m^*(I)=|I|$，I 为 $\mathbb{R}^n$ 中方体. 这是外测度与体积的对应.（分区间是有限的与区间是无限的两个部分证明，有限部分利用事实 2，有限覆盖定理，外测度的单调性与夹逼定理证明，无限部分取任意大的数 k, 都有 $[a,a+k]\subset[a,+\infty]$，$k\leqslant m^*([a,+\infty])$.）

注意：有限覆盖定理指：一族开区间覆盖一个区间 I，则必能找到有限的区间，将区间 I 覆盖.

3 可测集与测度

3.1 定义与性质

$m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)\Leftrightarrow m^*(I)=m^*(I\cap E)+m^*(I\cap E^C)$

Caratheodory 条件：$m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)$.

可测集：$E\subset\mathbb{R}^n,\forall A\subset\mathbb{R}^n$，Caratheodory 条件成立，称 E 为 Lebesgue 可测集.

可测集的测度：若 E 为 Lebesgue 可测集，则称 $m^*(E)$ 为 E 的 Lebesgue 测度，记为 $m(E)$.

Caratheodory 条件等价于 $m^*(A)\geqslant m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)$ 成立.

外测度为零的集合是可测集，称其为零测集.

零测集的子集为可测集.

可数集是可测集，且测度为零，特别的 $m(\mathbb{Q})=0$).

$\mathbb{R}^n$ 中的每个方体是可测集，且其测度等于方体的体积.（用 Caratheodory 条件，$J\cap I^C=\bigcap_{i=1}^k I_i$，且这些集合互不相交.）

可测集的性质：

- 若 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 为可测集，则 $\bigcup_{i=1}^k E_k$ 为可测集. 证明在 $k=2$ 时成立，$E=E_1\cup E_2$，$E=E_1\cup(E_2-E_1)=E_1\cup({E_1}^C\cap E_2)$.
- 若 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 为互不相交的可测集,$A_i\subset E_i$,则 $m^*(\bigcup_{i=1}^k A_i)=\sum_{i=1}^k m^*(A_i)$. 证明在 $k=2$ 时成立，$(A_1\cup A_2)\cap E_1=A_1$，$(A_1\cup A_2)\cap {E_1}^C=A_2$.
- 可测集的全体是一个 σ-代数. 首先可测集的全体是一个代数，证明 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 对不相交可列并封闭，利用上一个性质，Caratheodory 条件并进一步取极限即可.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，且包含关系为严格包含. 利用开集构造定理与 Borel 集的定义即可.
- **有限可加性**:$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为互不相交的可测集,则 $m(\bigcup_{i=1}^k A_i)=\sum_{i=1}^k m(A_i)$.（性质 2 中取 $A_i=E_i$）
- **可减性**：$A,B\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n),A\subset B,m(A)<\infty$，则 $m(A-B)=m(A)-m(B)$.（注意 A 的测度是有限的，$B=A\cup(B-A)$，$A\cap(B-A)=\emptyset$）
- **可列可加性**：$\{A_k\}$ 为一列互不相交的可测集，则 $m(\bigcup_{k=1}^\infty A_k)=\sum_{k=1}^\infty m(A_k)$.（取极限，用测度的次可列可加性分别得到正向与反向的不等式）
- **下连续性**：$\{A_k\}$ 为一列单调递增的可测集，则 $m(\bigcup_{k=1}^\infty A_k)=\lim_{k\to\infty} m(A_k)$.（构造不交并 $B_1=A_1,B_k=A_k-A_{k-1}$，测度的可列可加性）
- **上连续性**：$\{A_k\}$ 为一列单调递减的可测集，且 $m(A_1)<\infty$，则 $m(\bigcup_{k=1}^\infty A_k)=\lim_{k\to\infty} m(A_k)$.（令 $B_k=A_1-A_k$ 转化为下连续性的问题，注意证明时会使用可减性，所以上连续性与下连续性不完全相同）
- 平移不变性：$E\subset\mathbb{R}^n,\forall x_0\in\mathbb{R}^n,m(x_0+E)=m(E)$，$x_0+E=\{x_0+x:x\in E\}$.（平移不变性由外测度可知，主要证明 $x_0+E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，使用 $x_0+A\cap E=(x_0+A)\cap(x_0+E),x_0+E^C=(x_0+E)^C$）

注意：测度继承了外测度的所有性质，所以需要对次可列可加性与可列可加性进行区分，可列可加性需要集合相交，次可列可加性不需要.

证明一个集合是可测的方法：

- Caratheodory 条件.
- 证明它是一个 Borel 集.
- 利用可测集的运算间接证明.

3.2 可测集的逼近定理

可测集可以用开集，闭集逼近，可以用 G_δ,F_σ 型集最佳逼近.

- $\forall \varepsilon > 0, \exists$开集$G \supset E, s.t. \quad m(G-E) < \varepsilon.$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists$闭集$F \subset E, s.t. \quad m(E-F) < \varepsilon.$
- $\exists G_\delta$型集$G \supset E, s.t. \quad m(G-E) = 0.$
- $\exists F_\sigma$型集$F \subset E, s.t. \quad m(E-F) = 0.$

逼近定理的证明思路：

- 将 $m(E)$ 分有限与无穷两种情况讨论. 对于有限情况，利用外测度的事实 2，用一列开方体 I_k 覆盖之，作 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$，由测度可减性可知.
- 对于无限情况，先找一列互不相交的可测集 $\{A_k\}, m(A_k) < \infty$ 且 $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，令 $E_k = E \cap A_k$，则 $m(E_k) < \infty$ 且 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$，这样将**无限测度转化至有限情况**. 取 $G_k \supset E_k, s.t. \quad m(G_k - E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$，取 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$，$G - E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\{G_k - E_k\}$. 使用测度单调性与次可列可加性即可.
- 对于第二条，将闭集转化至开集的情况.$E - F = E \cap F^C = \left(E^C\right)^C \cap G = G - E^C, F = G^C$.
- 对于第三条，利用 $\varepsilon \to \frac{1}{k}$ 的转化，将极限转化为集列 G_k，作 $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$，取极限即可，这个方法很重要.
- 对于第四条，利用 $\varepsilon \to \frac{1}{k}$ 的转化，将极限转化为集列 F_k，作 $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$，取极限即可.

注意：对偶性可以简化很多计算.

注意：每个可测集与一个 Borel 集仅相差一个零测集，但是这个差距是集合完备与不完备之间的差距.

$[0,1]$ 间存在不可测集，可以使用 Zermelo 选取公理构造.

附录 A 布置的课后作业

$1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21.$

附录 B 课后作业的讲解