

泛函第一二章总结

Author: Tony Xiang

Full Document can be acquired here:

<https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%2056/Chapter56.pdf>

Full Source code can be downloaded here:

<https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%2056/Chapter56.tex>

1 距离空间的基本概念

标量域: \mathbb{K} , 既可以表示实数域, 也可以表示复数域.

距离: $X \neq \emptyset, \forall x, y \in X, \exists d(x, y) \in \mathbb{R}^n, \text{s.t.} :$

- (正定性) $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y;$
- (对称性) $d(x, y) = d(y, x);$
- (三角不等式) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

(X, d) 称为距离空间.

距离空间的例子:

- 欧式空间 \mathbb{K}^n . 可以定义很多距离.

$$d_1(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_2(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$d_3(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

- 连续函数空间 $C[a, b]$. 设 $C[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上连续函数全体. $\forall x = x(t), y = y(t),$

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

- 数列空间 s . 设 s 是实或复数列的全体. $\forall x = (x_i), y = (y_i),$

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

(注: 利用 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$ 证明三角不等式.)

- 可测函数空间 $M(E), m(E) < \infty, M(E)$ 是 E 上可测函数的全体, 将 a.e. 相等的两个函数记为同一元. $\forall x = x(t), y = y(t),$

$$d(x, y) = \int_E \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt$$

(注: 利用 $d(x, y) = 0 \iff x(t) = y(t) \text{ a.e.}$ 证明非负性.)

- 离散距离空间. $X \neq \emptyset, \forall x, y \in X$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

(注: 这说明任意空间都可以定义距离, 但是可能没有实际意义.)

距离空间上集合的距离: X 是距离空间, $A, B \subset X, d(A, B) = \inf d(x, y) : x \in A, y \in B$.

有界集: $A \subset X, \exists x_0 \in X, M > 0, \text{s.t. } \forall x \in A, d(x, x_0) \leq M$.

序列的极限: $\{x_n\}$ 是距离空间 X 的序列, $x \in X$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$, 则称 $\{x_n\}$ 按距离收敛于 x , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

注: 不同空间中的序列在不同意义下的收敛, 通过定义适当的距离, 可以归结为距离空间中序列的按距离收敛.

距离空间的性质 (根据数学分析的思路证明):

- 收敛序列的极限是唯一的;
- 收敛序列是有界的;
- 收敛序列的任一子列仍收敛于同一极限;
- 距离函数是两个变元的连续函数, 即 $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$.

(第四条性质的证明如下: $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, 则 $d(z, y) - d(x, y) \leq d(z, x) = d(x, z)$. 因此 $|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z)$. 这是减法不等式, 故有: $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x, y_n)| + |d(x, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \leq 0$.)

2 赋范空间的基本概念

线性空间: X 是一个非空集, \mathbb{K}^n 是标量域. X 是线性空间, 若

- X 上加法满足交换律, 结合律, 存在唯一的零元, 存在唯一的逆元 (负元).
- X 上数乘满足结合律, 与加法共同满足左右交换率, 且 $1x = x$.

线性子空间: $E \subset X$, 且 E 对 X 上的加法运算和数乘运算封闭, 则 E 是 X 的线性子空间.

线性相关, 线性无关, 线性空间的维数, (注意无穷维线性空间, 线性无关向量组的个数可以任意大), 线性空间的基与坐标.

线性算子: $T : X \rightarrow Y, \forall x_1, x_2 \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$.

由 E 张成的线性子空间:

$$\text{span}(E) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_1, x_2, \dots, x_n \in E, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, n = 1, 2, \dots \right\}$$

线性空间的 (抽象) 例子:

• 数列空间: s 是实或复数列的全体. 定义加法为按坐标相加, 数乘为按坐标数乘.

• 函数空间: X 是实或复函数的全体. $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}, (x+y)(t) = x(t) + y(t), (\alpha x)(t) = \alpha x(t)$.

倍集与线性和集: $\lambda A = \lambda x : x \in A, A+B = x+y : x \in A, y \in B$. (集合可以为单点集)

范数 $\forall x \in X, \exists \|x\| \in \mathbb{R}$, 满足:

- 正定性: $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$;
- 绝对奇性: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$;
- 三角不等式: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

此外还有: $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$.

由范数导出的距离: $d(x, y) = \|x-y\|$.

按范数收敛: $\|x_n - x\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则称 $\{x_n\}$ 按范数收敛于 x . 记号与按距离收敛一致.

距离可由范数导出的充要条件:

- $d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0)$;
- $d(x+z, y+z) = d(x, y)$.

范数的连续性:

- (1) $\|x\|$ 是 X 上的连续函数. 即 $x_n \rightarrow x, \|x_n\| \rightarrow \|x\|$;
- (2) X 上的加法与数乘运算是连续的. $\forall \{x_n\}, \{y_n\} \subset X, \{\alpha_n\} \subset \mathbb{K}, x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, \alpha_n \rightarrow \alpha, x_n + y_n \rightarrow x + y, \alpha_n x_n \rightarrow \alpha x$.

(注: (1) 由范数的减法不等式得到, (2) 加法的连续性由范数的减法不等式得到, 数乘的连续性先需要说明 $\{\alpha_n\}$ 的有界性, 然后将式子分解后利用减法不等式与范数的绝对奇性: $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \leq |\alpha_n| \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\|$)

赋范空间的例子:

- 欧式空间 \mathbb{K}^n . 可以定义很多范数.

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- $C[a, b]$:

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

- c, c_0 , 收敛的实或复数列的全体, $x = (x_1, x_2, \dots) \in c$,

$$\|x\| = \sup_{i \geq 1} |x_i|.$$

c_0 是收敛于 0 的数列全体, 范数定义与 c 上范数定义相同.

- Lebesgue 可积函数空间 $L[a, b]$: 将 a.e. 相等的两个函数记为同一元.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| dx.$$

赋范空间的线性子空间也是赋范空间.

3 L^p 空间与 l^p 空间

3.1 $L^p, 1 \leq p < \infty$

定义: E 上的 p 次方可积函数的全体称为 $L^p(E)$.

由于 $|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p), (x \in E), f \in L^p(E) \Rightarrow \alpha f \in L^p(E). L^p(E)$ 是线性空间.

范数:

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

验证范数的合理性 (良定义, 此处只验证三角不等式):

Young 不等式: $\forall a, b \geq 0, a, b \in \mathbb{R}, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$

(证明利用 $\varphi(x) = \ln x$ 的上凸性质. $\lambda \ln x + (1 - \lambda) \ln y \leq \ln \lambda x + (1 - \lambda)y$, 令 $\lambda = \frac{1}{p}, x = a^p, y = b^p$)

Holder 不等式: p, q 条件如上 (共轭指标), $f \in L^p(E), g \in L^q(E)$, 则 $fg \in L^1(E)$, 且 $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$

(证明使用: $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$, 对 Young 不等式两边分别积分. 注意存在范数为零的情况单独讨论.)

Minkowski 不等式 (L^p 空间范数的三角不等式): $1 \leq p < \infty, f, g \in L^p(E)$, 则 $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$

(证明先拆出一个 $|f + g|$, 然后分解为 $|f| + |g|$, 对这些部分分别使用 Holder 不等式, 合并即可. 注意存在范数为零的情况, 需要单独讨论.)

按范数收敛: $f_n \xrightarrow{L^p} f, (n \rightarrow \infty).$

$$\frac{1}{m(E)} \int_E |f_n - f|^p dx = \frac{1}{m(E)} \|f_n - f\|_p^p \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

按范数收敛能够推出按测度收敛.

证明: $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0, n \rightarrow \infty$, 有

$$\begin{aligned} m(E(|f_n - f| > \varepsilon)) &= m(E(|f_n - f|^p > \varepsilon^p)) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_E |f_n - f|^p dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \rightarrow 0. \end{aligned}$$

由 Riesz 定理可知, $f_n \xrightarrow{L^p} f$, 则 $\exists \{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$, s.t. $f_{n_k} \rightarrow f$ a.e.

3.2 $L^\infty(E)$

本性有界: $\exists M > 0$, s.t. $|f| \leq M$ a.e. 于 E .

范数:

$$\|f\|_\infty = \inf\{M : |f| \leq M \text{ a.e.}\}.$$

验证范数的合理性 (良定义, 此处只验证三角不等式):

$\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}, \exists E_n \subset E, m(E_n) = 0$, 并且

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{n} (x \in E \setminus E_n).$$

令 $E_0 = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$, 则 $m(E_0) = 0$, 则 $\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}, \exists E_n \subset E, m(E_n) = 0$, 令 $n \rightarrow \infty$ 得到 $|f(x)| \leq \|f\|_\infty (x \in E \setminus E_0)$, 则 $|f| \leq \|f\|_\infty$ a.e..

$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ a.e., 因此 $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

与 L^p 空间的关系: $m(E) < \infty$, 则 $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$. (证明略)

Holder 不等式在共轭指标 $p = 1, q = \infty$ 或 $p = \infty, q = 1$ 时均成立. (将无穷范数单独计算后提出积分式即可)

3.3 $l^p, 1 \leq p < \infty$

定义: $x = (x_n)$ 是实或复数列. 若 $\sum_{i=1}^\infty |x_n|^p < \infty$, 则称 x 是 p 次方可和的. p 次方可和函数的全体称为 l^p .

范数:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

同样有 Holder 不等式与 Minkowski 不等式, 条件与结论与之前一致. 按范数定义替代之即可.

3.4 l^∞

定义: l^∞ 是有界数列的全体.

范数: $\forall x = (x_n) \in l^\infty$,

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|.$$

Minkowski 不等式在 $0 < p < 1$ 上不成立. (实际上是反向)

4 点集, 连续映射与可分性

内点, 开集, 内部, 聚点, 导集, 闭集, 闭包, 开集的基本性质, 导集的等价定义, 闭包的等价定义, 闭集的等价定义, 稠密集, 稠密集的等价定义. (注意邻域语言与序列语言的表达, 这些定义在实变第一章第六节中均有提及), 以下补充疏朗集的等价定义.

疏朗集的等价定义 (TFAE): ($A \subset X$)

- A 是疏朗集.
- 对任一开球 U , $\exists U_1 \subset U$, s.t. $U_1 \cap A = \emptyset$.
- 对任一闭球 S , $\exists S_1 \subset S$, s.t. $S_1 \cap A = \emptyset$.

(证明: A 是疏朗集等价于对任一开球 $U(x, \varepsilon)$, 包含关系 $U(x, \varepsilon) \subset \bar{A}$ 不成立, 即存在 $y \in U(x, \varepsilon)$, s.t. $y \notin \bar{A}$, 这又等价于 $\exists U(y, \delta) \subset U(x, \varepsilon)$ s.t. $U(y, \delta) \cap A = \emptyset$, 由于每个开球中包含一个闭球, 反之亦然, 后两条性质等价.)

映射, 单射, 满射, 双射, 像, 原像.

连续映射: X, Y 是距离空间, $T: X \rightarrow Y, x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. $d(x, x_0) < \delta, d(Tx, Tx_0) < \varepsilon$, 则称 T 在点 x_0 处连续, 若 T 在 X 上的每一点处连续, 则称 T 在 X 上连续.

邻域语言的等价描述: 对于 Tx_0 的任一邻域 V , 存在 x_0 的邻域 U , 使得 $T(U) \subset V$, 则称 T 在 X 上连续.

连续的充要条件: X, Y 是距离空间, $T: X \rightarrow Y, x_0 \in X$, 则 T 在 x_0 处连续的充要条件为: $\forall \{x_n\} \subset X, x_n \rightarrow x_0, Tx_n \rightarrow Tx_0$. (必要性: 直接使用 $\varepsilon - N$ 语言证明即可, 充分性: 用反证法, 先用 $\varepsilon - N$ 语言把条件写出来, 然后根据 $x_n \rightarrow x_0, Tx_n \not\rightarrow Tx_0$ 推出矛盾)

连续映射的等价条件 (TFAE):

- T 在 X 上连续.
- $G \subset Y$, G 为开集, $T^{-1}(G)$ 是 X 中的开集.
- $F \subset Y$, F 为闭集, $T^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集.

证明: (1) \Rightarrow (2). 设 G 是 Y 中的开集, 不妨设 $T^{-1}(G) \neq \emptyset, \forall x_0 \in T^{-1}(G)$, 由于 $Tx_0 \in G$, 并且 G 是开集, 因此存在 Tx_0 的一个邻域 $V \subset G$, 由 T 的连续性, $\exists U(x_0)$, s.t. $T(U) \subset V \subset G$. 于是 $U \subset T^{-1}(G)$. 因此 x_0 是 $T^{-1}(G)$ 的内点, 这表明 $T^{-1}(G)$ 是开集. (2) \Rightarrow (1). 设 $x_0 \in X$, V 是 Tx_0 的一个邻域. 由于 V 是 Y 中的开集,

$T^{-1}(V)$ 是开集, $x_0 \in T^{-1}(V)$. $\exists U(x_0)$, s.t. $T(U) \subset V$. 则 T 在 x_0 处连续, 由 x_0 的任意性得证. (2) \Leftrightarrow (3). 利用 $\forall A \subset Y, T^{-1}(A^C) = (T^{-1}(A))^C$.

空间的可分性: 设 X 是距离空间, 若在 X 中存在一个可数的稠密子集, 则称 X 是可分的.

l^p 是可分的, $A = (r_1, r_2, \dots, r_n, 0, \dots) : r_i \in \mathbb{Q}, n = 1, 2, \dots$ (可列集). 利用有理数在实数集中的稠密性与收敛数列的余项趋于 0 这两个性质, 控制两个元之间的距离.

$C[a, b]$ 是可分的, $P_0[a, b]$ 是有理系数多项式的全体 (可列集), 利用 Weierstrass 逼近定理, 将 $[a, b]$ 上的连续函数用多项式一致逼近, 然后用有理系数多项式逼近普通的多项式, 控制两个元之间的距离.

$L^p[a, b], 1 \leq p < \infty$ 是可分的, $P_0[a, b]$ 是有理系数多项式的全体 (可列集), 首先用简单函数逼近, 然后使用控制收敛定理, 用一个简单函数 g 逼近 x , 利用 Lusin 定理, 用连续函数 h 逼近 g , 利用上一部分的结论, 使用有理系数多项式 p_0 逼近 h , 控制两个元之间的距离.

l^∞ 不是可分的. 令 $K = x = (x_1, x_2, \dots) : x_i = 0 \text{ 或 } 1$, 则 K 是不可数集 (二元数列), $\forall x, y \in K, d(x, y) = 1$. A 是 l^∞ 的可数子集. 若 A 在 l^∞ 中是稠密的, $U(x, \frac{1}{3})$ 中至少包含 A 中的一个元, 由于开球 $U(x, \frac{1}{3})$ 有不可数个, $\exists z \in A, z \in U(x, \frac{1}{3}) \cap U(y, \frac{1}{3})$, 此时 $d(x, y) \leq \frac{2}{3} \neq 1$, 矛盾.

可列集的意义: 在可分的空间 X 中选取一个适当的可数的稠密子集, 在这个集合上研究, 然后取一个极限过程, 得到全空间 X 上的相应结论.

5 完备性

Cauchy 序列: $\{x_n\} \subset X, \forall (\text{给定的}) \varepsilon > 0, \exists N > 0$, s.t. $m, n > N, d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Cauchy 序列的性质:

- 收敛序列是 Cauchy 序列.
- Cauchy 序列是有界的.
- $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列, 并且存在一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x , 则 $\{x_n\}$ 收敛于 x .

完备空间: X 是距离空间, 若 X 中的每个 Cauchy 序列都是收敛的, 则称 X 是完备的. 完备的赋范空间称为 Banach 空间.

$P[a, b]$ 不是完备的. $P[a, b] \subset C[a, b]$. 令 $p_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}, n = 1, 2, \dots$, 则 $p_n \in P[a, b]$, 又有 $p_n \rightarrow e^t$. (利用 Taylor 展开), 因此 $\{p_n\}$ 是 Cauchy 序列, 但 $e^t \notin P[a, b]$. 这表明 $\{p_n\}$ 在 $P[a, b]$ 中不收敛.

l^p 是完备的. (仅证明 $p \neq \infty$ 的部分, 可以用作证明完备性的模板)

设 $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$ 是 l^p 中, 的 Cauchy 序列. 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{s.t. } m, n > N$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}|^p = \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_p^p < \varepsilon^p.$$

于是对每个固定的 i , 当 $m, n > N$, (N 固定),

$$|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| \leq \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_p < \varepsilon. (*)$$

这表明对每个固定的 i , $\{x_i^{(n)}\}_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 序列, 因此 $\{x_i^{(n)}\}$ 收敛, 设当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_i^{(n)} \rightarrow x_i, i = 1, 2, \dots$, 令 $x = (x_1, x_2, \dots)$. 下面证明 $x \in l^p$ 并且 $x^{(n)} \rightarrow x$. (注: 从按坐标收敛到按范数收敛)

由 (*) 式得到, $\forall k \geq 1$, 当 $m, n > N$ 时,

$$\sum_{i=1}^k |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}|^p < \varepsilon^p.$$

固定 N , 先令 $m \rightarrow \infty$, 再令 $k \rightarrow \infty$, 得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_i^{(n)}|^p \leq \varepsilon^p.$$

这表明, $x - x^{(n)} \in l^p$, 由于 l^p 是线性空间, $x = (x - x^{(n)}) + x^{(n)} \in l^p$, 且有 $\|x - x^{(n)}\|_p \leq \varepsilon$. 因此 $x^{(n)} \rightarrow x, n \rightarrow \infty$.

c_0, c, l^∞ 均是完备的.

$C[a, b]$ 是完备的. 设 $\{x_n\}$ 是 $C[a, b]$ 中的 Cauchy 序列, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{s.t. } m, n > N, \|x_m - x_n\| < \varepsilon$. 于是 $\forall t \in [a, b]$, 当 $m, n > N$ 时,

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x_m(t) - x_n(t)| = \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

这表明对每个固定的 t , $\{x_n(t)\}_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 序列. 令 $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t), t \in [a, b]$.

固定 N , 令 $m \rightarrow \infty$. 得到 $|x(t) - x_n(t)| < \varepsilon$. 则 $x_n(t) \rightarrow x(t), x = x(t)$, 且 $\|x - x_n\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - x_n(t)| \leq \varepsilon$, 故 $x_n \rightarrow x$.

$L^p(E), (1 \leq p \leq \infty)$ 均是完备的. (证明略)

纲集: X 是距离空间, $A \subset X$, 若 A 可以表示成为可数个疏朗集的并, 则 A 是第一纲集, 否则 A 是第二纲集.

完备空间的性质:

- (闭球套定理) 设 X 是完备的距离空间, $S_n = \{x : d(x, x_n) \leq r_n (n = 1, 2, \dots)\}$ 是 X 中的一列闭球, 满足 $S_{n+1} \subset S_n, n \geq 1$ 且 S_n 的半径 $r_n \rightarrow 0$, 则 $\exists |x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$. (证明与数分类似, 先证明 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列, 利用完备性与闭集性质, 唯一性可以设存在另一个点 x' , 证明 $d(x, x') = 0$)

• (Baire 纲定理) 完备的距离空间是第二纲集. (证明使用反证法, 将 X 表示成为可数个疏朗集的并, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 根据疏朗集性质构造闭球套, 由 X 的完备性, 存在一个 x 属于这一些疏朗集的交, 但是 $S_n \cap A_n = \emptyset$, 从而导致矛盾)

级数, 部分和, 绝对收敛. (了解即可)

不动点: X 是距离空间, $T: X \rightarrow X, \exists x_0 \in X, \text{s.t. } Tx_0 = x_0$, 则称 x_0 为 T 的一个不动点.

压缩映射: X 是距离空间, $T: X \rightarrow X, \exists 0 \leq \lambda < 1, \text{s.t. } d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y), x, y \in X$. 称 T 是压缩的.

压缩映射是连续的.

压缩映射原理: 完备距离空间上的压缩映射存在唯一的不动点.

证明: 任取 $x_0 \in X$, 令 $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots, x_n = Tx_{n-1}, \dots$.

$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \lambda^n d(x_1, x_0)$. 于是 $\forall n, p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (\lambda^{n+p-1} + \lambda^{n+p-2} + \dots + \lambda^n) d(x_1, x_0) \\ &= \lambda^n (\lambda^{p-1} + \lambda^{p-2} + \dots + 1) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(Tx_0, x_0). \end{aligned}$$

则 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列. 由于 X 是完备的, $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. 由 T 的连续性得到 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_{n-1} = Tx$. 存在性得证.

若另有 $y \in X, \text{s.t. } Ty = y$, 则 $d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) = 0$. 唯一性得证.

注: x_0 经过 T 的 n 次迭代后与 x 的距离估计: $d(x, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(Tx_0, x_0)$.

注: 压缩条件减弱至 $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ 时, 若 X 是闭集, 压缩映射原理仍成立, 否则将不再成立.

应用 (微分方程中的 Picard 定理): 微分方程:

$$\frac{dx}{dy} = f(t, x), x(t_0) = x_0, f \in C(\mathbb{R}^2), \text{ 满足 Lipschitz 条件.}$$

则在 t_0 的某邻域内, 微分方程有唯一的解. (在 $C[a, b]$ 上考虑, 将微分方程转化为积分方程, 做出映射, 并利用 Lipschitz 条件证明它是压缩的即可, 注意要将 $\|x_1 - x_2\|$ 放缩出来)

等距同构: X, Y 是距离空间, 若存在映射 $T: X \rightarrow Y, \text{s.t. } T$ 是双射, 并且对任意 $x_1, x_2 \in X$, 有 $d(Tx_1, Tx_2) = d(x_1, x_2)$, 则称 X, Y 是等距同构的.

完备化空间: 设 (X, d) 是距离空间, 若存在完备的距离空间 (\tilde{X}, \tilde{d}) , 使得 X 与 \tilde{X} 的一个稠密子空间等距同构, 则称 \tilde{X} 是 X 的完备化空间.

若 \tilde{X} 是一个完备的距离空间, 使得 $X \subset \tilde{X}$, 并且 X 在 \tilde{X} 中稠密, 则 \tilde{X} 是 X 的完备化空间.

拓扑同构: 存在 $T: X \rightarrow Y$, 使得 T 是双射和线性的, 并且 $\exists a, b > 0, \text{s.t. } a\|x\| \leq \|Tx\| \leq b\|x\|, x \in X$, 则称 X, Y 是拓扑同构的.

等距同构: 存在 $T: X \rightarrow Y$, 使得 T 是双射和线性的, 并且 $\|Tx\| = \|x\|, x \in X$, 则称 X, Y 是等距同构的.

等距同构可以推出拓扑同构.

范数的等价性: 设 X 是线性空间, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个范数, 称 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是等价的, 若存在常数 $a, b > 0, \text{s.t. } a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1, x \in X$.

两个范数等价时, 以它们为范数构成的赋范空间是拓扑同构的.

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 n 维赋范空间, e_1, e_2, \dots, e_n 是 X 的一组基, 则存在常数 $a, b > 0, \text{s.t. } \forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, 有

$$a\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\| \leq b\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(证明略)

有限维赋范空间的性质:

- 有限维赋范空间上的任意两个范数都是等价的.
- 任意 n 维赋范空间与 \mathbb{K}^n 拓扑同构.
- 有限维赋范空间是完备的, 任何赋范空间的有限维子空间都是闭子空间.

证明: (1) 利用范数的等价性.

(2) 取一组基, 做映射 $T: X \rightarrow \mathbb{K}^n, T(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 在 $a\|x\| \leq \|Tx\| \leq b\|x\|, x \in X$, 由 $\frac{1}{b}\|x\| \leq \|Tx\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{a}\|x\|$.

(3) 由 (2) 可知 X 与 \mathbb{K}^n 拓扑同构, $\exists T: X \rightarrow \mathbb{K}^n, T$ 是双射与线性的, $\exists a, b > 0, \text{s.t. } a\|x\| \leq \|Tx\| \leq b\|x\|, x \in X$, 由 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列, $\forall m, n \in \mathbb{N}$,

$\|Tx_m - Tx_n\| = \|T(x_m - x_n)\| \leq b\|x_m - x_n\|$, $\{Tx_n\}$ 是 Cauchy 序列, $\exists y, Tx_n \rightarrow y$, T 是满射, $\exists x \in X \text{ s.t. } Tx = y$, 于是 $\|x_n - x\| \leq \frac{1}{a}\|T(x_n - x)\| = \frac{1}{a}\|Tx_n - y\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 因此 $x_n \rightarrow x$. 这就证明 X 是完备的.

6 紧性

开覆盖: 设 X 是距离空间, $A \subset X$. 若 $\{G_\alpha, \alpha \in I\}$ 是 X 中的一族开集, 使得 $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \supset A$, 则称 $\{G_\alpha$ 是 A 的一个开覆盖.

紧集: 对于 A 的任一开覆盖 $\{G_\alpha, \alpha \in I\}$ 都存在其中的有限个开集仍覆盖 A , 则称 A 是紧集. (对应有限覆盖性质)

列紧集: 若 A 中任一序列都存在收敛的子列, 则称 A 是列紧集. (序列性质)

完全有界集：若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 有限集 $E = x_1, x_2, \dots, x_n, \text{s.t. } \bigcup_{i=1}^n U(x_i, \varepsilon) \supset A$, 则称 A 是完全有界集, 称 E 为 A 的有限 ε -网.

完全有界集是有界集.

(取 $\varepsilon = 1, \exists x_1, x_2, \dots, x_k \in X, \text{s.t. } \bigcup_{i=1}^k U(x_i, 1) \supset A, \forall x \in A, \exists 1 \leq i \leq k, \text{s.t. } x \in U(x_i, 1)$, 于是 $d(x, x_1) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_1) < 1 + \max_{1 \leq i \leq k} d(x_i, x_1)$.)

$A \subset X$, A 是完全有界集的充要条件是 A 中的任一序列必存在 **Cauchy** 子列. (完全有界集的序列语言, 证明略)

列紧集是完全有界集；若 X 是完备的, 则完全有界集是列紧集.

$A \subset X$, A 是紧集的充要条件是 A 中的任一序列必存在收敛于 A 中元的子列. (紧集的序列语言, 证明略)

紧集是列紧集.

紧集是有界闭集. (证明: A 是紧集, 则 A 是列紧集, 则 A 是完全有界集, A 是有界集. $\{x_n\}$ 是 A 中的序列 $x_n \rightarrow x$, 则 $\exists x_{n_k} \subset x_n, \text{s.t. } x_{n_k} \rightarrow y$, 而 $x_n \rightarrow x$, 则 $x = y \in A$, 这表明 A 是闭集.)

在有限维赋范空间中, 有界集是列紧集, 有界闭集是紧集.

证明: 设 X 是 n 维赋范空间. X 与 \mathbb{K}^n 拓扑同构, 即存在 $T: X \rightarrow \mathbb{K}^n, \text{s.t. } T$ 是双射和线性的, 并且存在常数 $a, b > 0, \text{s.t. } a\|x\| \leq \|Tx\| \leq b\|x\|, x \in X$, 设 A 是 X 中的有界集, $\|x\| \leq M, x \in A$. 设 $\{x_n\} \subset A$, 得到 $\|Tx_n\| \leq b\|x_n\| \leq bM, n \leq 1$, 则 $\{Tx_n\}$ 是 \mathbb{K}^n 的有界序列, 根据 Weierstrass 定理, $\exists \{Tx_{n_k}\} \subset \{Tx_n\}, y \in \mathbb{K}^n, \text{s.t. } \|Tx_{n_k} - y\| \rightarrow 0$, 设 $x \in X, \text{s.t. } Tx = y$. 得到 $\|x_{n_k} - x\| \leq \frac{1}{a}\|T(x_{n_k} - x)\| = \frac{1}{a}\|Tx_{n_k} - y\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. 故 $x_{n_k} \rightarrow x$.

再设 A 是有界闭集, A 是列紧集, 故 A 是紧集.

连续函数的性质: 设 A 是距离空间 X 中的紧集, f 是 A 上的连续的实值函数. 则 f 在 A 上有界, 且在 A 上达到上下确界.

证明: 有界性. 若 f 在 A 上无上界, 则 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A, \text{s.t. } f(x_n) > n$. 由于 A 是紧集, $\exists \{x_{n_k}\} \subset x_n, \text{s.t. } x_{n_k} \rightarrow x \in A$. 由于 $f \in C(A), f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$. 但 $f(x_{n_k}) > n_k \rightarrow \infty$, 矛盾. 有界性得证. 记 $a = \sup_{x \in A} f(x)$, 则 $\exists y_n \in A, \text{s.t. } f(y_n) \rightarrow a$. 由于 A 是紧集, $\exists \{y_{n_k}\} \subset y_n \in A$, 又 f 的连续性得到 $f(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = a$.

7 有界线性算子的基本概念

线性算子, 线性泛函.

T 是线性算子, 则 $N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$ 为 T 的零空间, $R(T) = \{Tx : x \in X\}$ 为 T 的值域. 它们分别是 X, Y 的线性子空间.

线性算子和线性泛函的例子:

X 是 n 维线性空间, e_1, e_2, \dots, e_n 是 X 的一组基, $A = (a_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 阶矩阵, 定义算子:

$$T: X \rightarrow X, T\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n y_i e_i, y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, i = 1, 2, \dots, n.$$

则 T 是线性算子, 反过来, 设 $T: X \rightarrow X$ 是线性算子, 则 Te_j 必是 e_1, e_2, \dots, e_n 的线性组合, 设 $Te_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i, j = 1, 2, \dots, n$. 当 $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ 时,

$$\begin{aligned} y = Tx &= \sum_{i=1}^n y_i e_i = \sum_{j=1}^n x_j Te_j \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j e_i \end{aligned}$$

则 X 上的线性算子与 $n \times n$ 阶矩阵一一对应.

定义泛函:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

则 f 是 X 上的线性泛函, 记 $a_i = f(e_i)$, 则

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

则 X 上的线性泛函与 \mathbb{K}^n 中的向量一一对应.

设 $K(s, t)$ 是 $[a, b] \times [a, b]$ 上的可测函数, 满足 $M = \left(\int_a^b \left(\int_a^b |K(s, t)|^2 dt\right) ds\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$. 对任意 $x \in L^2[a, b]$, 令

$$\begin{aligned} (Tx)(s) &= \int_a^b K(s, t)x(t) dt \\ f(x) &= \int_a^b x(t) dt. \end{aligned}$$

分别为 $L^2[a, b]$ 上的线性算子 (第二类 Fredholm 积分算子) 和线性泛函. 由 Holder 不等式,

$$\begin{aligned} \int_a^b |(Tx)(s)|^2 ds &= \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t)x(t) dt \right|^2 ds \\ &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(s, t)|^2 dt \right) \int_a^b |x(t)|^2 dt ds \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b |K(s, t)|^2 dt \right) ds \int_a^b |x(t)|^2 dt \\ &= M^2 \|x\|_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

故 $Tx \in L^2[a, b]$. 由积分的线性性知道 T 是线性的. 同样由 Holder 不等式,

$$\int_a^b |x(t)| dt \leq \left(\int_a^b 1 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b-a} \|x\|_2.$$

故 f 是 $L^2[a, b]$ 上的线性泛函.

算子的有界性: X, Y 是赋范空间, $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子, 若 T 将 X 中的每个有界集都映射为 Y 中的有界集, 则称 T 是有界的.

有界线性算子的等价定义 (TFAE):

- (1) T 是有界的;
- (2) $\exists c > 0$, s.t. $\|Tx\| \leq c\|x\|, x \in X$;
- (3) T 在 X 上连续.

证明: (1) \Rightarrow (2). 由于 $S = \{x : \|x\| \leq 1\}$ 是 X 中的有界集, T 是有界的, $T(S)$ 是 Y 中的有界集. $\exists c > 0$, s.t. $\forall x \in S, \|Tx\| \leq c, \forall x \in X, x \neq 0, \frac{x}{\|x\|} \in S$, 故

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\| \frac{1}{\|x\|} Tx \right\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq c$$

因此 $\|Tx\| \leq c\|x\|, x \in X$.

(2) \Rightarrow (3). 设 $\{x_n\} \subset X, x_n \rightarrow x$, 由于 T 是线性的, 因此 $0 \leq \|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq c\|x_n - x\| \rightarrow 0$. 因此 $Tx_n \rightarrow Tx$. 连续性得证.

(3) \Rightarrow (1). 若 T 不是有界的, 则存在 X 中的有界集 A , 使得 $T(A)$ 不是有界的. $\exists M > 0, \{x_n\} \subset A$, s.t. $\|x_n\| \leq M, n \geq 1$, 但是 $\|Tx_n\| > n$, 令 $x'_n = \frac{x_n}{\sqrt{n}}, n \geq 1$, 则 $x'_n \rightarrow 0$, 则 $x'_n \rightarrow 0$. 由于 T 连续, 应有 $Tx'_n \rightarrow T(0) = 0$, 但是

$$\|Tx'_n\| = \left\| T\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right) \right\| = \frac{\|Tx_n\|}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} \rightarrow \infty.$$

矛盾, 因此 T 有界.

有界性通常可以由 Holder 不等式放缩得到.

第二型 Fredholm 积分算子, 有限维赋范空间上的算子是有界的.

无界的线性算子的例子: $C^{(1)}[0, 1]$ 上的微分算子 $D: C^{(1)}[0, 1] \rightarrow C[0, 1], (Dx)(t) = x'(t)$. 取 $x_n(t) = t^n, n = 1, 2, \dots$, 则 $\forall n, x_n \in C^{(1)}[0, 1], \|x_n\| = 1, \|Dx_n\| = \max_{0 \leq t \leq 1} nt^{n-1} = n, n = 1, 2, \dots$

算子范数: X, Y 是赋范空间, $T: X \rightarrow Y$ 是有界线性算子, 算子范数为:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

f 是 X 上的有界线性泛函, 范数为:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

算子范数的等价定义: $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$

证明:

$$\begin{aligned}\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| &\leq \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x \neq 0} \|T(\frac{x}{\|x\|})\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|\end{aligned}$$

范数的性质: $\|Tx\| \leq \|T\|\|X\|, x \in X$. 同时, 若 $c > 0$, s.t. $\|Tx\| \leq c\|X\|$, 则有 $\|T\| \leq c$.

符号函数: $x \in \mathbb{R}^1$, 则

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{\bar{x}}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

符号函数的性质: $x \operatorname{sgn} x = |x|, |\operatorname{sgn} x| \leq 1$.

算子范数的计算: (两个方向放缩)

设数列 $a = (a_i) \in l^1$, $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, x \in l^\infty$ 为定义在 l^∞ 上的泛函.

显然 f 是线性的. $\forall x = (x_i) \in l^\infty$, 有

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i x_i| \leq |a_i| \sup_{i \geq 1} |x_i| = \|a\|_1 \|x\|_\infty.$$

这表明 f 有界, 且 $\|f\| \leq \|a\|_1$, 另一方面, 令 $x^{(0)} = (\operatorname{sgn} a_1, \operatorname{sgn} a_2, \dots) \in l^\infty$, 并且 $\|x^{(0)}\|_\infty \leq 1$. 由于

$$|f(x^{(0)})| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^{(0)} \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \operatorname{sgn} a_i \right| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \|a\|_1.$$

因此 $\|f\| \geq \|a\|_1$, 综上所述 $\|f\| = \|a\|_1$.

若 f 视作 c_0 上的泛函, 正向不等式与上述证明一致, 反向不等式: $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}$, s.t. $\sum_{i=1}^k a_i > \|a\|_1 - \varepsilon$, 取 $x^{(0)} = (\operatorname{sgn} a_1, \operatorname{sgn} a_2, \dots, \operatorname{sgn} a_k, 0, \dots) \in c_0$, 并且 $\|x^{(0)}\|_\infty \leq 1$. 由于

$$|f(x^{(0)})| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^{(0)} \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \operatorname{sgn} a_i \right| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \|a\|_1 - \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, $\|f\| \geq \|a\|_1$, 综上所述 $\|f\| = \|a\|_1$.

有界线性算子的空间: 用 $B(X, Y)$ 表示从 X 到 Y 的有界线性算子的全体. $\forall A, B \in B(X, Y), \alpha \in \mathbb{K}$, 定义:

$$(A + B)x = Ax + Bx, (\alpha A)x = \alpha Ax, x \in X.$$

又 $\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|$, 因此 $A + B$ 是有界的, 且有 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

验证该范数是良定义的:

- $\| \cdot \| \leq \|0\|$, 并且 $A = 0 \Rightarrow \|A\| = 0$, 若 $\|A\| = 0$, 则 $Ax = 0, x \in X$ (算子范数的不等式), 则 $A = 0$.

- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \|\alpha A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(\alpha A)x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\alpha| \|Ax\| = \alpha \|A\|$.

- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ 由之前的式子可得.

若 Y 是 Banach 空间, 则 $B(X, Y)$ 是 Banach 空间.

证明: 设 $\{T_n\}$ 是 $B(X, Y)$ 中的 Cauchy 序列, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{s.t. } m, n > N, \|T_m - T_n\| < \varepsilon$. 于是 $\forall x \in X, m, n > N$,

$$\|T_m x - T_n x\| = \|(T_m - T_n)x\| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| < \varepsilon \|x\|.$$

这表明 $\{T_n x\}$ 是 Y 中的 Cauchy 序列, 由于 Y 是完备的, $\{T_n x\}$ 收敛, $\forall x \in X$, 令 $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$, 则 T 是 X 到 Y 的线性算子, 固定 $n > N$, 令 $m \rightarrow \infty$, 得到 $\|(T - T_n)x\| = \|Tx - T_n x\| \leq \varepsilon \|x\|, x \in X$.

上式表明 $T - T_n \in B(X, Y)$. 由于 $B(X, Y)$ 是线性空间, $T = (T - T_n) + T_n \in B(X, Y)$, 且 $\|T - T_n\| \leq \varepsilon$. 故 $B(X, Y)$ 是完备的.