

实变第四章总结

Author: Tony Xiang

Full Document can be acquired here:

<https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%204/Chapter4.pdf>

Full Source code can be downloaded here:

<https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%204/Chapter4.tex>

1 Lebesgue 积分的定义

分三步定义:

1.1 非负简单函数的积分:

定义: 设 $f(x) = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}(x)$ 是 E 上的非负简单函数, 其中 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 是 E 的一个可测分割, $a_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, k$. 定义 f 在 E 上的积分为:

$$\int_E f \, dx = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i)$$

$$0 \leq \int_E f \, dx \leq \infty, \text{ 若 } \int_E f \, dx < \infty, \text{ 则 } f \in L(E).$$

注意, 该积分的值不依赖 f 的表达式的选取. 证明可取另一个可测分割 $\{B_j\}$, 则有 $m(A_i) = \sum_{j=1}^l m(A_i \cap B_j), (i = 1, 2, \dots, k), m(B_j) = \sum_{i=1}^k m(A_i \cap B_j), (j = 1, 2, \dots, l), A_i \cap B_j \neq \emptyset, a_i = b_j$, 可得

$$\sum_{i=1}^k a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a_i m(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k b_j m(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^l b_j m(B_j)$$

注意, $\int_{[a,b]} f \, dx$ 为函数 $y = f(x)$ 的下方图形的积分.

性质 (Part 1, f, g 为非负简单函数):

- (特征函数的性质)

$$A \subset E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \int_E \chi_A(x) \, dx = m(A).$$

特别地,

$$\int_E \chi_E(x) \, dx = m(E).$$

- (数乘的性质)

$$\int_E c f \, dx = c \int_E f \, dx \quad (c \geq 0).$$

- (加法的性质)

$$\int_E f + g \, dx = \int_E f \, dx + \int_E g \, dx.$$

- (单调性)

$$f \leq g \text{ a.e.} \Leftrightarrow \int_E f \, dx \leq \int_E g \, dx.$$

第一、二条性质的证明可以直接利用定义，第三条性质可以将两个函数的可测分割记为一样的，然后使用第一条性质，第四条性质有 $m(E_i) > 0, a_i \leq b_i$ ，然后使用定义证明。

注意，Lebesgue 积分充分利用了零测集对于积分值没有影响的特点，所以在表示不等关系的时候，一般使用“几乎处处”的条件就足够了。

1.2 非负可测函数的积分

引理（证明略）：设 $\{f_n\}$ 是 E 上单调递增的非负简单函数列，

- 若 g 是 E 上的非负简单函数，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq g(x)$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, dx \geq \int_E g \, dx$$

- 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), x \in E$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, dx = \sup \left\{ \int_E g \, dx : g \in S^+ E, g \leq f \right\}$$

， $S^+(E)$ 表示 E 上的非负简单函数的全体。

定义：设 f 是 E 上的非负可测函数， f_n 是 E 上的非负可测函数列，且 $f_n \nearrow f$ ，定义 f 在 E 上的积分为：

$$\int_E f \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, dx$$

$$0 \leq \int_E f \, dx \leq \infty, \text{ 若 } \int_E f \, dx < \infty, \text{ 则 } f \in L(E).$$

同样， f 在 E 上的积分值不依赖于 $\{f_n\}$ 的选取。

性质（Part 2, f, g 为非负可测函数）：

- (数乘的性质)

$$\int_E cf \, dx = c \int_E f \, dx \quad (c \geq 0).$$

- (加法的性质)

$$\int_E f + g \, dx = \int_E f \, dx + \int_E g \, dx.$$

- (单调性)

$$f \leq g \text{ a.e.} \Rightarrow \int_E f \, dx \leq \int_E g \, dx.$$

证明：第一条性质显然成立，第二条性质可以用两个非负函数列分别逼近 f 和 g ，第三条性质可以选取适当的 $\{f_n\}, \{g_n\}, f_n \leq g_n, n \geq 1$ ，且有 $f_n \nearrow f, g_n \nearrow g$ ，则有

$$\int_E f \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n \, dx = \int_E g \, dx.$$

1.3 一般可测函数的积分

定义：设 f 是 E 上的可测函数，若 $\int_E f^+ \, dx, \int_E f^- \, dx$ 至少有一个是有限值，则 f 在 E 上的积分存在，且定义为：

$$\int_E f \, dx = \int_E f^+ \, dx - \int_E f^- \, dx.$$

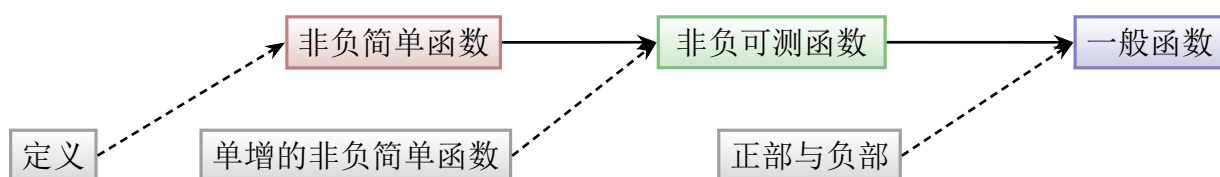
若 $\int_E f^+ \, dx, \int_E f^- \, dx$ 都是有限值，则 $f \in L(E)$. 将 $[a, b]$ 区间上的 Lebesgue 积分记为 $\int_a^b f \, dx$.

基本的可积条件 (Part 3, f, g 为一般函数)：

- $g \in L(E), f(x) \leq g(x), \text{a.e. } x \in E$ 或 $f(x) \geq g(x), \text{a.e. } x \in E$ ， f 在 E 上的积分存在.
- $g \in L(E), |f(x)| \leq g(x), \text{a.e. } x \in E$ ，则 $f \in L(E)$.
- $f \in L(E) \Leftrightarrow |f| \in L(E)$.
- $m(E) < \infty, \exists M, |f| \leq M, f \in L(E)$.

证明：第一条性质有 $f^+(x) \leq g^+(x) \text{ a.e. } x \in E$ 或 $f^-(x) \leq g^-(x) \text{ a.e. } x \in E$ ，然后用积分的单调性可得 $\int_E f^+ \, dx, \int_E f^- \, dx$ 至少有一个是有限值. 第二条性质兼具第一条性质的条件，故有可积性. 第三条性质 $|f| = f^+ + f^-$ ，可得 $\int_E |f| \, dx$ 是有限值 $\Leftrightarrow \int_E f^+ \, dx, \int_E f^- \, dx$ 都是有限值. 第四条性质将 $g(x) = M, x \in E$ 作为控制函数即可证明.

一个通用的证明过程：从非负简单函数到非负可测函数再到一般函数的证明方法.



积分区域的变化与特征函数的关系：设 f 在 E 上的积分存在， A 是 E 的可测子集，则 f 在 A 上的积分存在，且

$$\int_A f \, dx = \int_E f \chi_A \, dx$$

同样有 $f \in L(E) \Rightarrow f \in L(A)$. (证明方法为以上的分三个步骤的方法，第一步按定义证明，将 E 上的可测分割限定到 A 上；第二步取 $f_n \chi_A \nearrow f \chi_A$ ；第三步利用正部和负部处理一般函数)

以上的定理常常用在证明多个积分区域不统一的问题中.

积分的平移不变性: $f(x) \in L(\mathbb{R}^n), h \in \mathbb{R}^n$, 则 $f(x+h) \in L(\mathbb{R}^n)$, 且有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+h) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx.$$

同样可以分三步证明, 其中第一步用到测度的平移不变性. 后面两步类似.

2 积分的初等性质

2.1 线性性

若 $f, g \in L(E)$, 则 $cf, f+g \in L(E)$,

$$\begin{aligned} \int_E cf \, dx &= c \int_E f \, dx \\ \int_E (f+g) \, dx &= \int_E f \, dx + \int_E g \, dx \end{aligned}$$

证明: $f \in L(E) \Rightarrow |f| \in L(E)$, 则

$$\int_E |cf| \, dx = \int_E |c||f| \, dx = |c| \int_E |f| \, dx < \infty.$$

故 $|cf| \in L(E)$, $cf \in L(E)$, 类似有 $|f+g| \leq |f| + |g| \Rightarrow f+g \in L(E)$. 利用

$$(cf)^+ = \begin{cases} cf^+ & c \geq 0 \\ -cf^- & c < 0 \end{cases}$$

$$(cf)^- = \begin{cases} cf^- & c \geq 0 \\ -cf^+ & c < 0 \end{cases}$$

$$\int_E cf \, dx = \int_E cf^+ \, dx - \int_E cf^- \, dx = c \int_E f^+ \, dx - c \int_E f^- \, dx = c \int_E f \, dx.$$

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Rightarrow (f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^-$$

$$\begin{aligned} \int_E (f+g) \, dx &= \int_E (f+g)^+ \, dx - \int_E (f+g)^- \, dx \\ &= \int_E f^+ \, dx - \int_E f^- \, dx + \int_E g^+ \, dx - \int_E g^- \, dx \\ &= \int_E f \, dx + \int_E g \, dx \end{aligned}$$

2.2 对积分域的有限可加性

设 $f \in L(E)$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $E = A_1 \cup A_2$, 则

$$\int_E f \, dx = \int_{A_1} f \, dx + \int_{A_2} f \, dx$$

证明: $f \in L(A_1)$, $f \in L(A_2)$, 得到 $f\chi_{A_1}, f\chi_{A_2} \in L(E)$, 有

$$\int_{A_1} f \, dx + \int_{A_2} f \, dx = \int_E f\chi_{A_1} \, dx + \int_E f\chi_{A_2} \, dx = \int_E (f\chi_{A_1} + f\chi_{A_2}) \, dx = \int_E f \, dx.$$

同样可证有限情况: $f \in L(E)$, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 为 E 的一个可测分割, 则有:

$$\int_E f \, dx = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f \, dx$$

2.3 积分的单调性与不等关系

设 f, g 在 E 上的积分存在, 则:

- $f \leq g \Rightarrow \int_E f \, dx \leq \int_E g \, dx$.
- $f = g \text{ a.e.} \Rightarrow \int_E f \, dx = \int_E g \, dx$.
- $f \geq 0 \text{ a.e.}, A, B \subset E, A \subset B \Rightarrow \int_A f \, dx \leq \int_B f \, dx$.
- $f = 0 \text{ a.e.} \Rightarrow \int_E f \, dx = 0$.
- $m(E) = 0, \forall f(x), x \in E \Rightarrow \int_E f \, dx = 0$
- $f \in L(E), |\int_E f \, dx| \leq \int_E |f| \, dx$.

证明: (1) 若在 E 上, $f \leq g \text{ a.e.}$, 则 $f^+ \leq g^+, f^- \geq g^- \text{ a.e.}$ 则

$$\begin{aligned} \int_E f^+ \, dx &\leq \int_E g^+ \, dx, \int_E f^- \, dx \geq \int_E g^- \, dx \\ \int_E f \, dx &= \int_E f^+ \, dx - \int_E f^- \, dx \leq \int_E g^+ \, dx - \int_E g^- \, dx = \int_E g \, dx. \end{aligned}$$

(2) 由 (1) 的对偶性可得.

(3) 由 $f\chi_A(x) \leq f\chi_B(x), x \in E$ 使用 (1) 的结论即可.

(4) 由 (2) 可得.

(5) 利用 $\int_E f = 0$ 推出 $f = 0 \text{ a.e.}$ 由 (4) 可得.

(6) 对 $-|f| \leq f \leq |f|$ 积分即可.

2.4 Lebesgue 积分的原始定义

设 $m(E) < \infty$, f 是 E 上可测函数, $c \leq f(x) < d, (x \in E), \forall n \in \mathbb{N}^+$, 设 $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ 为 $[c, d]$ 的一个分割, 令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} y_i - y_{i-1}$. 则

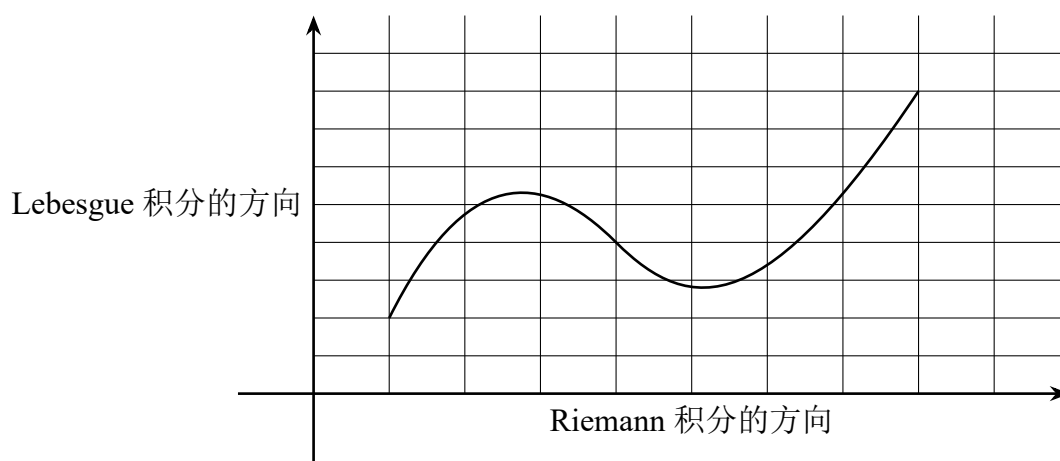
$$\int_E f \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y_{i-1} \cdot m(E(y_{i-1} \leq f < y_i)).$$

证明: f 是有限测度集上的有界可测函数, 则 $f \in L(E)$, 令 $E_i = E(y_{i-1} - y_i)$, ($i = 1, 2, \dots, n$), 则 $\{E_i\}$ 为 E 的一个可测分割, 利用积分的单调性与对积分域的有限可加性, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_{i-1} m(E_i) &= \sum_{i=1}^n \int_{E_i} y_{i-1} dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f dx = \int_E f dx. \\ \int_E f dx &\leq \sum_{i=1}^n y_i m(E_i) \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_E f dx - \sum_{i=1}^n y_{i-1} m(E_i) \leq \sum_{i=1}^n y_i m(E_i) - \sum_{i=1}^n y_{i-1} m(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1}) m(E_i) \leq \lambda m(E) \rightarrow 0. \end{aligned}$$



2.5 Chebyshev 不等式与应用

Chebyshev 不等式: 设 f 是 E 上的可测函数, 则 $\forall \lambda > 0, m(E(|f| \geq \lambda)) = \frac{1}{\lambda} \int_E |f| dx$.

证明: $x \in E(|f| \geq \lambda)$, 有 $\frac{1}{\lambda} |f(x)| \geq 1$.

$$m(E(|f| \geq \lambda)) = \int_{E(|f| \geq \lambda)} 1 dx \leq \frac{1}{\lambda} \int_{E(|f| \geq \lambda)} |f| dx \leq \frac{1}{\lambda} \int_E |f| dx$$

注意, 有时候我们需要使用以下减弱的不等式:

$$m(E(|f| \geq \lambda)) \leq \frac{1}{\lambda} \int_E |f| dx.$$

应用 1: $f \in L(E) \Rightarrow f$ 在 E 上几乎处处有限.

$f \in L(E), |f| \in L(E), A = E(|f| = \infty), A_k = E(|f| \geq k), k = 1, 2, \dots$. 则 $A \subset A_k$. 利用 Chebyshev 不等式得到: $0 \leq m(A) \leq m(A_k) \leq \frac{1}{k} \int_E |f| dx \rightarrow 0, (k \rightarrow \infty), m(A) = 0$.

[另外也可以用测度的上连续性, 在 $n = 1$ 的情况下使用 Chebyshev 不等式.]

应用 2: $f \geq 0$ a.e., $\int_E f \, dx \Rightarrow f = 0$ a.e.

$f \geq 0$ a.e., 故 $m(E(f < 0)) = 0$. $A = E(f > 0)$, $A_k = E(f > \frac{1}{k})$, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 利用 Chebyshev 不等式得到: $0 \leq m(A_k) \leq k \int_E f \, dx = 0$. $m(A_k) = 0$, 由测度的次可列可加性 $m(A) = 0$, 则 $f = 0$ a.e.

[另外也可以用测度的下连续性.]

2.6 积分的绝对连续性

设 $f \in L(E)$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \quad A \subset E, m(A) < \delta, \int_A |f| \, dx < \varepsilon$.

用泛函的方式理解:

$$\lim_{m(A) \rightarrow 0} \int_A |f| \, dx = 0.$$

证明: 设 $f \in L(E)$, 则 $|f| \in L(E)$. $\{g_k\}$ 为非负简单函数列, $g_k \nearrow |f|$. 由积分定义,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k \, dx = \int_E |f| \, dx < \infty.$$

于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0, s.t.$

$$0 \leq \int_E (|f| - g_{k_0}) \, dx = \int_E |f| \, dx - \int_E g_{k_0} \, dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

令 $0 \leq M = \max_{x \in E} g_{k_0}(x) < \infty$, 不妨设 $M > 0$ ($M = 0$ 时显然), 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, 再取 $A \subset E, m(A) < \delta$, 则有

$$\int_E |f| \, dx = \int_A (|f| - g_{k_0}) \, dx + \int_A g_{k_0} \, dx < \frac{\varepsilon}{2} + \int_A M \, dx = \frac{\varepsilon}{2} + Mm(A) < \varepsilon$$

注意, 复值可测函数的积分, 除序关系以外与实值可测函数的性质一致.

3 积分的极限定理

3.1 Levi 单调收敛定理

积分符号与极限符号的运算顺序的交换.

设 $\{f_n\}$ 是 E 上的单调递增的非负可测函数列, f 是 E 上的非负可测函数, 且 $f_n \rightarrow f$ a.e., 则

$$\lim_E \int f_n \, dx = \int_E f \, dx.$$

证明：不妨设 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ 处处成立（因为改变一个零测集上的函数值不影响函数的整体性质，所以可以定义不收敛处的函数值为 0），由积分的单调性得到：

$$\int_E f_n \, dx \leq \int_E f_{n+1} \, dx \leq \int_E f \, dx. (n \geq 1)$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ 存在，并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, dx \leq \int_E f \, dx$.

反过来，设 $\{g_n\}$ 是非负可测函数列，且 $g_n \nearrow f$.

$\forall k \geq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \geq g_k(x), x \in E$.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, dx \geq \int_E g_k \, dx$. 令 $k \rightarrow \infty$ ，可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_n \, dx \geq \int_E f \, dx.$$

推论 1（逐项积分定理）： $\{f_n\}$ 是 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, dx.$$

积分符号与求和符号的运算顺序的交换。

证明：令 $g_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x), (n \geq 1), f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ ，则 $g_n \geq 0, g_n \nearrow f, f$ 是可测的. 利用 Levi 定理，数列的替换与取极限过程，可得：

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_E f_i \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E f_i \, dx.$$

推论 2（积分对积分域的可列可加性）： f 在 E 上的积分存在， $\{E_n\}$ 为 E 的可测分割，则

$$\int_E f \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, dx.$$

证明：

$$\int_E f^+ \, dx = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f^+ \chi_{E_n} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f^+ \chi_{E_n} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^+ \, dx.$$

对负部可证类似结论，由于 f 的积分存在， $\int_E f^+ \, dx, \int_E f^- \, dx$ 至少有一个是有限的，即原命题得证.

3.2 Fatou 引理

设 $\{f_n\}$ 是 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, dx.$$

单增条件减弱，结论随之减弱为不等关系，同时极限的顺序交换变成下极限的顺序交换。（“入不敷出”）

证明：对每个 $n \geq 1$ ，令 $g_n = \inf_{k \geq n} f_k(x), (x \in E)$. 则 $\{g_n\} \nearrow$ ，且 $0 \leq g_n \leq f_n, \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$. 由 Levi 定理得到：

$$\int_E \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n \, dx \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, dx.$$

推论 1：（一致有界的可积性） $f, f_n (n \geq 1)$ 是 E 上的可测函数， $f_n \rightarrow f$ a.e.，若 $\sup_{n \geq 1} \int_E |f_n| \, dx < \infty$ ，则 $f \in L(E)$.

证明：利用 Fatou 引理：

$$\int_E |f| \, dx = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n| \, dx \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n| \, dx \leq \sup_{n \geq 1} \int_E |f_n| \, dx < \infty.$$

3.3 控制收敛定理

设 $f, f_n (n \geq 1)$ 是 E 上的可测函数，且 $\exists g \in L(E), s.t. \quad |f_n| \leq g$ a.e. ($n \geq 1$). 若在 E 上 $f_n \rightarrow f$ a.e. 或 $f_n \xrightarrow{m} f$ ，则 $f, f_n \in L(E)$ ，并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, dx = \int_E f \, dx.$$

证明：由于在 E 上 $|f_n| \leq g$ a.e. ($n \geq 1$)，因此当 $f_n \rightarrow f$ a.e. 或 $f_n \xrightarrow{m} f$ 时有 $|f| \leq g$ a.e.（依测度收敛要使用 Riesz 定理）由于 $g \in L(E)$ ，可知 $f, f_n \in L(E)$. 由

$$\left| \int_E f_n \, dx - \int_E f \, dx \right| = \left| \int_E (f_n - f) \, dx \right| \leq \int_E |f_n - f| \, dx.$$

下面证一个更强的结论：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| \, dx = 0.$$

分两种情况证明. 先考虑 $f_n \rightarrow f$ a.e. 的情形. 令 $h_n = 2g - |f_n - f|$ ，则 $h_n \geq 0$ a.e.，则 $h_n \geq 0$ a.e. ($n \geq 1$). 对函数列 $\{h_n\}$ 应用 Fatou 引理，可得：

$$\begin{aligned} \int_E 2g \, dx &= \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} (2g - |f_n - f|) \, dx \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E (2g - |f_n - f|) \, dx \\ &= \int_E 2g \, dx - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| \, dx \end{aligned}$$

又有：

$$0 \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| \, dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| \, dx \leq 0$$

故可得加强结论成立.

再考虑 $f_n \xrightarrow{m} f$ 的情形，用反证法. 则 $\exists \varepsilon > 0, \{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}, s.t. \quad \int_E |f_{n_k} - f| \, dx \geq \varepsilon \quad (k \geq 1)$. 由 Riesz 定理， $\exists \{f_{n_{k'}}\} \subset \{f_{n_k}\}, s.t. \quad f_{n_{k'}} \rightarrow f$ a.e. ($k' \rightarrow \infty$)，由上一种情形可得：

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} \int_E |f_{n_{k'}} - f| \, dx = 0.$$

这与假设矛盾，故加强结论成立.

注意：此处的 $\{h_n\}$ 的构造思路是依据 Fatou 引理与非负构造的，为了使极限值得到夹逼，从而在反方向构造函数.

注：若

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_{n_k} - f| dx = 0.$$

成立，则称 $\{f_n\}$ 在 L^1 中收敛于 f ，（或称平均收敛于 f ）.

推论 1：（有界收敛定理） 设 $m(E) < \infty$ ， $f, f_n (n \geq 1)$ 是 E 上的可测函数，且 $\exists M, s.t. |f_n| \leq M \text{ a.e. } (n \geq 1)$. 若在 E 上 $f_n \rightarrow f \text{ a.e.}$ 或 $f_n \xrightarrow{m} f$ ，则 $f, f_n \in L(E)$ ，并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dx = \int_E f dx.$$

证明：令 $g(x) = M$ 作为 $f_n(x)$ 的控制函数，结合 $m(E) < \infty$ 即可.

推论 2：（积分号下求导） 设 f 是定义在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上的实值函数，使得 $\forall y \in [c, d], f(x, y) \in L([a, b])$ ， $\forall (x, y) \in D, f_y'$ 存在，并且存在控制函数 $g(x) \in L([a, b])$ ：

$$|f_y'(x, y)| \leq g(x), (x, y) \in D.$$

则函数 $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ 在 $[c, d]$ 上可导，且

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f_y'(x, y) dx. \quad (1)$$

证明：设 $y \in [c, d]$ ，任取数列 $\{h_n\}$ ，使得 $y + h_n \in [c, d], h_n \rightarrow 0, h_n \neq 0$. 令

$$\varphi_n(x) = \frac{f(x, y + h_n) - f(x, y)}{h_n} \quad (x \in [a, b]).$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f_y'(x, y) \quad (x \in [a, b])$.

由微分中值定理， $x \in [a, b], \forall n \geq 1$,

$$|\varphi_n(x)| = \left| \frac{f(x, y + h_n) - f(x, y)}{h_n} \right| = |f_y'(x, y + \theta h_n)| \leq g(x) \quad (0 < \theta < 1).$$

对 $\{\varphi_n\}$ 使用控制收敛定理，可得：

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(y + h_n) - I(y)}{h_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \int_a^b [f(x, y + h_n) - f(x, y)] dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^b f_y'(x, y) dx. \end{aligned}$$

则积分在 y 处可导，原命题成立.

注意：这个问题的证明方法是一种重要的证明思路：当遇到函数极限的问题时，可以考虑先将其转换为数列极限（归结原理），在数列的框架下使用控制收敛定理等工具，然后在将其转换回函数形式（归结原理）.

4 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

4.1 Riemann 积分

• 分割与单调加细: $[a, b]$ 是有界闭区间, 由 $[a, b]$ 上有限个点构成的序列 $\{P_n\}$ 称为 $[a, b]$ 的一个分割, 若 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 如果 $\{P_n\}$ 是 $[a, b]$ 的一系列分割, 使得 $P_n \subset P_{n-1} (n \geq 1)$, 则称 $\{P_n\}$ 是单调加细的.

• 相关记号与说明. f 是 $[a, b]$ 上的有界实值函数, $P = \{x_i\}_{i=0}^n$ 为一个分割, 定义:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$m_i = \inf_{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]}$$

$$M_i = \sup_{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]}$$

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \text{ 为分割 } P \text{ 的细度.}$$

• 上积分与下积分:

$$\int_a^b f \, dx = \sup_{\forall P} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad \overline{\int_a^b f \, dx} = \inf_{\forall P} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

• Riemann 可积的充要条件: 上积分等于下积分. 且若一个函数在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则:

$$\int_a^b f \, dx = \underline{\int_a^b f \, dx} = \overline{\int_a^b f \, dx}.$$

4.2 正常积分的关系

Step 1: 构造 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的桥梁.

$$\int_a^b f \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}, \quad \overline{\int_a^b f \, dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)}.$$

定义函数列 $\{u_n\}, \{U_n\}$ 为: $u_n(a) = m_1^{(n)}, u_n(x) = m_i^{(n)}, x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}], U_n(a) = M_1^{(n)}, U_n(x) = M_i^{(n)}, x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$. 则它们都是阶梯函数, 且 $u_n \nearrow, U_n \searrow, m \leq u_n \leq f \leq U_n \leq M$. 令 $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$. 则 u, U 为有界可测函数, 且 $u(x) \leq f(x) \leq U(x), x \in [a, b]$.

Step 2: 寻找桥梁的性质.

设 f 是 $[a, b]$ 上的有界可测函数, $\{P_n\}$ 是 $[a, b]$ 的一系列单调加细的分割, 且 $\lambda_n \rightarrow 0$. 若 $x_0 \in [a, b]$ 且 x_0 不是任何 $\{P_n\}$ 的分点, 则 $u(x_0) = U(x_0) \Leftrightarrow f$ 在 x_0 处连续.

证明: (\Rightarrow) 设 $u(x_0) = U(x_0)$. 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n(x_0) - u_n(x_0)) = U(x_0) - u(x_0) = 0$. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \text{ s.t. } U_{n_0}(x_0) - u_{n_0}(x_0) < \varepsilon$, 则在 $(x_{i-1}^{(n_0)}, x_i^{(n_0)})$ 上 $|f(x) - f(x_0)| \leq U_{n_0}(x_0) - u_{n_0}(x_0) < \varepsilon$.

(\Leftarrow) f 在 x_0 处连续, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. 取充分大的 n 使得 $\lambda_n < \delta$, 设 $x_0 \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)})$, 则 $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. 于是 $f(x_0) - \varepsilon \leq m_i^{(n)} \leq M_i^{(n)} \leq f(x_0) + \varepsilon$, 即 $U_n(x_0) - u_n(x_0) = M_i^{(n)} - m_i^{(n)} \leq 2\varepsilon$. 令 $n \rightarrow \infty$ 即得证.

Step 3: 找到关系并证明.

设 f 是 $[a, b]$ 上的有界可测函数. 则:

- $f \in R([a, b]) \Leftrightarrow f$ 在 $[a, b]$ 上 a.e. 连续.
- 若 $f \in R([a, b])$, 则 $f \in L([a, b])$, 且 $(R) \int_a^b f \, dx = (L) \int_a^b f \, dx$.

证明: (1) 设 $P_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\} (n \geq 1)$ 是 $[a, b]$ 上的一列单调可测的分割, 且 $\lambda_n \rightarrow 0$. 由有界收敛定理和 u_n, U_n 的关系, 有:

$$\begin{aligned} (L) \int_a^b U \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^b U_n \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)}. \\ (L) \int_a^b u \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^b u_n \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)}. \end{aligned}$$

两式相减, 可得:

$$(L) \int_a^b (U - u) \, dx = \overline{\int_a^b f \, dx} - \underline{\int_a^b f \, dx}.$$

所以 $f \in R([a, b]) \Leftrightarrow (L) \int_a^b (U - u) \, dx = 0 \Leftrightarrow U = u \text{ a.e. } (U - u \geq 0)$.

设 A 是分割序列 $\{P_n\}$ 的分点的全体, 则 $m(A) = 0$. 再令 B 是 f 的间断点的全体. $x \notin A, U(x) = u(x) \Leftrightarrow f$ 在 x 处连续. 从而 $f \in R([a, b]) \Leftrightarrow f$ 在 $[a, b]$ 上 a.e. 连续.

(2) 首先可得 $f = u \text{ a.e.}$, f 在 $[a, b]$ 上是可测的. 由 f 的有界性可知 $f \in L([a, b])$. 故有:

$$(L) \int_a^b f \, dx = (L) \int_a^b u \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)} = (R) \int_a^b f \, dx.$$

注意: Lebesgue 积分的可积函数类严格大于 Riemann 积分的可积函数类.

4.3 与广义 Riemann 积分的关系

设 $\forall b > a$, f 在 $[a, b]$ 上有界并且几乎处处连续, 则 $f \in L([a, \infty)) \Leftrightarrow (R) \int_a^b f \, dx$ 绝对收敛. 且当 $(R) \int_a^b f \, dx$ 绝对收敛时, 有

$$(R) \int_a^\infty f \, dx = (L) \int_a^\infty f \, dx.$$

证明: $\forall b > a$, f 在 $[a, b]$ 上有界并且几乎处处连续 (正常积分), 可知 $f \in R([a, b]), f \in L([a, b])$. 因此 f 在 $[a, \infty)$ 上是可测的, $\forall n \geq a, n \in \mathbb{N}^+$, 构造 f 的截尾函数列 $f_n(x) =$

$f(x)\chi_{[a,n]}(x)$, 则 f 是可测函数列, 且 $f_n(x) \rightarrow f(x) (x \in [a, \infty))$, $f_n \nearrow$. 由 Levi 定理与正常积分的关系, 可知

$$\begin{aligned} (R) \int_a^\infty |f| dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^n |f| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^n |f| dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{[a, \infty)} |f_n| dx = (L) \int_a^\infty |f| dx. \end{aligned}$$

因此 $f \in L[a, \infty) \Leftrightarrow (R) \int_a^\infty f dx$ 绝对收敛. 注意到 $|f_n| \leq |f| (n \geq 1)$. 利用控制收敛定理与以上的类似方法, 得到:

$$(R) \int_a^\infty f dx = (L) \int_a^\infty f dx.$$

注意: 非绝对收敛的 Riemann 广义积分不是 Lebesgue 可积的. 如 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

$\int_a^b f dx$ 在 Riemann 正常积分和绝对收敛的广义 Riemann 积分时与 Lebesgue 积分等价 (注意 f 的有界性).

4.4 应用

Lebesgue 积分用于理论证明, Riemann 积分用于计算.

应用的两种形式:

- 计算积分型函数列的极限, 用控制收敛定理即可, 重点在于寻找一个合适的可测函数, 使得能够把原函数控制住, 还要 Riemann 可积.
- 计算原函数无法表示的积分, 先用级数展开, 然后用逐项积分定理, 重点在于基本级数展开式的使用与级数收敛域的控制, 同时还要构造非负可测的函数列, 因为逐项积分定理是由 Levi 定理推出.

5 Fubini 定理

Fubini 定理讨论的是累次积分的换序问题.

一般形式: 若 $f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数则对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^p$, $f(x, y)$ 作为 y 的函数在 \mathbb{R}^q 上可测, $g(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy$ 在 \mathbb{R}^p 上可测, 并且:

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy \right) dx.$$

将非负可测函数这一条件改为可积函数, 得到的可测结论改为可积, 上述定理依然成立.

方体形式: $I \subset \mathbb{R}^p, J \subset \mathbb{R}^q$ 为方体. 若 $f(x, y)$ 是 $I \times J$ 上的非负可测函数或可积函数, 则:

$$\int_{I \times J} f(x, y) dx dy = \int_I dx \int_J f(x, y) dy = \int_J dy \int_I f(x, y) dx.$$

上述定理一般不用在实际计算中, 实际计算使用以下的推论.

$I \subset \mathbb{R}^p, J \subset \mathbb{R}^q$ 为方体.

推论: $I \subset \mathbb{R}^p, J \subset \mathbb{R}^q$ 为方体. 若 $f(x, y)$ 是 $I \times J$ 上的可测函数, 且以下两式中至少有一个成立:

$$\int_E dx \int_J |f(x, y)| dy < \infty, \int_J dy \int_I |f(x, y)| dx < \infty.$$

则下式成立:

$$\int_{I \times J} f(x, y) dx dy = \int_I dx \int_J f(x, y) dy = \int_J dy \int_I f(x, y) dx.$$

附录 A 布置的课后作业

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35.

附录 B 课后作业的讲解

$$1. \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(x) \geq q, \int_0^1 \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(x) dx \geq \int_0^1 q dx.$$

$$3. E = E(|f| \geq 2) \cup E(|f| \leq 2). \text{ 分段处理. 注意 } \ln 3 > 1.$$

$$4. E = E(|f| \geq \delta) \cup E(|f| \leq \delta). \text{ 分段处理. } \delta \text{ 由 } f'(0) \text{ 给出.}$$

$$6. E(f > \frac{1}{k}) \nearrow, \text{ 有 } E(f > 0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(f > \frac{1}{k}). \text{ 取测度后取极限可得:}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(E(f \geq \frac{1}{k})) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E(f \geq \frac{1}{k})) = m(E) > 0.$$

于是可以得出极限的性质:

$$\exists k_0 \text{ s.t. } m(E(f \geq \frac{1}{k_0})) > 0.$$

最后再考察积分:

$$\int_E f dx \geq \int_{E(f \geq \frac{1}{k_0})} f dx \geq \int_{E(f \geq \frac{1}{k_0})} \frac{1}{k_0} dx > 0.$$

$$7. \text{ 即证 } m(E(f \neq g)) = 0. \text{ 不妨设 } f > g. \text{ 用第六题结论.}$$

9. 利用积分的绝对连续性, 注意组织 ε, δ 的使用顺序, 按极限定义证明即可. 反方向使用放缩即可.

11. 构造函数, 利用介值定理:

$$\varphi(x) = \int_{[a, x) \cap E} f dx (a \leq x < b).$$

12. 先可将几乎处处有限设成处处有限的函数. 然后记 $A_n = m(n \leq |f| < n+1)$, 利用:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)m(A_n) &= \sum_{n=0}^{\infty} nm(A_n) + m(E) < \infty. \\ \sum_{n=0}^{\infty} nm(A_n) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} |f| dx = \int_E |f| dx < \infty.\end{aligned}$$

14. 令 $f_n = f \chi_{E_n} \geq 0 \nearrow$, 则 $f_n \rightarrow f (n \rightarrow \infty)$. 用 Levi 定理. 也可以用积分对积分域的可列可加性.

15. 类似第一题的方法:

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E \chi_{A_n}(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty.$$

16. 注意 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ 可能无定义, 需要先证明它是有定义的. 令 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$. 则有 $\int_E g dx = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| dx < \infty$. 则有 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ a.e. 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a.e. 收敛. 然后使用控制收敛定理.

17. 将下极限转化为子列, 然后使用 Riesz 定理与 Fatou 定理.

18. 将 $g = f - f_n + |f - f_n|$ 作为控制函数, $0 \leq g \leq 2f$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f - f_n| dx$.

19. $(\Rightarrow) f_n \xrightarrow{m} 0 \Rightarrow \frac{|f_n|}{|f_n|+1} \xrightarrow{m} 0$. 利用测度有限的条件与有限收敛定理.

(\Leftarrow) 利用 $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$ 的单调性, 可得:

$$m(E(|f_n| \geq \varepsilon)) \leq m(E(\frac{|f_n|}{|f_n|+1} \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon})) \leq \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} \int_E \frac{|f_n|}{|f_n|+1} dx.$$

21. 归结原理与 Lebesgue 控制收敛定理. 控制函数取为:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in E(f \leq 1) \\ f(x) & x \in E(f > 1). \end{cases}$$

25. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 设 $|f(x)| \leq M, x \in [a, b]$. 因为 $g(x)$ 在 \mathbb{R}^1 上连续. 故 $g(u)$ 在 $[-M, M]$ 上有界. 设 $|g(u)| \leq K, u \in [-M, M]$. 则当 $x \in [a, b], |g(f(x))| \leq K$. 故 $g(f(x))$ 在 $[a, b]$ 上有界. 然后使用 Riemann 可积的条件.

27. 利用积分的单调性与此处的非负性即可. (可以不用控制收敛定理)

29. f, g 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 故存在 $[a, b]$ 的一个零测集 E_0 , 使得 $f, g \in C([a, b] - E_0)$. 由于 f, g 在 $[a, b]$ 的有理数集上相等, $\forall x \in [a, b] - E_0, \exists x_n \subset \mathbb{Q} \text{ s.t. } x_n \rightarrow x$. 于是 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x)$.

30. 控制函数为: (第一部分用到了均值不等式: $nx \leq \frac{1}{2}(1 + n^2 x^2)$)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{2x} & (x \leq 1) \\ \frac{\sqrt{x}}{x^2} & (x > 1). \end{cases}$$

附录 C 一点闲谈

注意，以下内容仅代表本人观点。

第四章是对 Lebesgue 积分的基本介绍，不涉及抽象测度空间的内容。

有一些有趣的套路，来跟大家分享一下：

- 对于一般函数的证明有一个（非常花时间的）通法：即先说明非负简单函数，再说明非负可测函数，最后说明一般函数。
- 将下极限转化为子列非常有用。
- 关于控制函数的选择有一些比较好的方法：使用不等式放缩；构造分段函数，在不同的区间上分别控制。
- 使用归结原理使得函数极限转为数列极限。然后使用相关定理。
- 可以使用特征函数与 Lebesgue 积分来证明测度的一些问题。

还有一些需要注意的点：

- 注意慎用小于号，因尽量采用小于等于号。
- 注意定理使用的条件，如 Riemann 可积的大条件中需要被积函数有界。
- 注意使用一个公式时，需要验证这个公式是否已经定义。