

实变第二章总结

Author: Tony Xiang

Full Document can be acquired here:

<https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%202/Chapter2.pdf>

Full Source code can be downloaded here:

<https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%202/Chapter2.tex>

1 引言

测度的四条性质：非负性，可列可加性，平移不变性，可减性.

区间的长度：

$$|I| = \begin{cases} b - a, & I \text{ 为有界区间}, I = (a, b), (a, b], [a, b), [a, b] \\ +\infty, & I \text{ 为无界区间} \end{cases}$$

方体的体积： $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ ，则体积为： $|I| = |I_1| \times |I_2| \times \cdots \times |I_n|$.

只要有一个区间是无界的，整个方体即为无界方体，其体积为 $+\infty$. 另外有 $|\emptyset| = 0$.

规定： $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

2 外测度

开方体覆盖.

外测度：对每个 $A \subset \mathbb{R}^n$ ，令

$$m^*(A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \{I_k : \{I_k\} \text{ 是 } A \text{ 的开方体覆盖}\}.$$

称 $m^*(A)$ 为 A 的 Lebesgue 外测度.

注意： $\forall A \subset \mathbb{R}^n, m^*(A) \geq 0$ (非负性). 若对 A 的任一开方体覆盖 $\{I_k\}$, 有 $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \infty$, 则 $m^*(A) = \infty$. 即 $0 \leq m^*(A) \leq \infty$.

回顾下确界的定义： $a = \inf E$ ，则

- $\forall x \in E, a \leq x$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in E, s.t. \quad x' < a + \varepsilon$.

由此得出外测度的两个事实：

- **事实 1:** $\forall I_k \supset A, s.t. \quad m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$.
- **事实 2:** $m^*(A) < \infty, \forall \varepsilon > 0, \exists I_k \supset A, s.t. \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(A) + \varepsilon$.

注意：事实 2 可以由 ε 的任意性进行改进，如 $\varepsilon \rightarrow \frac{\varepsilon}{2^k}$ ，这是为了无限求和之后仍可保持 ε 。

一个重要的数分定理： 设 $a, b \in \mathbb{R}^1, \forall \varepsilon > 0, s.t. \quad a < b + \varepsilon$ ，则 $a \leq b$ 。

外测度的性质：

- 可数集的外测度为 0. (用 $I_k = (a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}})$ 覆盖 A .)
- $m^*(\emptyset) = 0$.
- 单调性: $A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$. (由事实 1,2 与数分定理可得.)
- 次可列可加性: 对 \mathbb{R}^n 中的任意一列集 $\{I_k\}$ ，有：

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k).$$

(将事实 2 进行改进: $\sum_{i=1}^{\infty} |I_{k,i}| \leq m^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$ ，之后再二重求和即可.)

- 次有限可加性: 对 \mathbb{R}^n 中的任意一列集 $\{I_k\}$ ，有：

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right) \leq \sum_{k=1}^n m^*(I_k).$$

(次可列可加性的推论.)

- 平移不变性: $E \subset \mathbb{R}^n, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, m^*(x_0 + E) = m^*(E), x_0 + E = \{x_0 + x : x \in E\}$.

(由事实 1,2 与对偶的性质证明.)

- 数乘的性质: $E \subset \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, m^*(\lambda E) = |\lambda|^n m^*(E), \lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$. (由事实 1,2 与对偶的性质证明.)

注意：次可列可加性是外测度中“不太好”的性质，它没有集合不相交的条件限制。

$m^*(I) = |I|$, I 为 \mathbb{R}^n 中方体. 这是外测度与体积的对应. (分区间是有限的与区间是无限的两个部分证明，有限部分利用事实 2，有限覆盖定理，外测度的单调性与夹逼定理证明，无限部分取任意大的数 k ，都有 $[a, a+k] \subset [a, +\infty]$ ， $k \leq m^*([a, +\infty])$.)

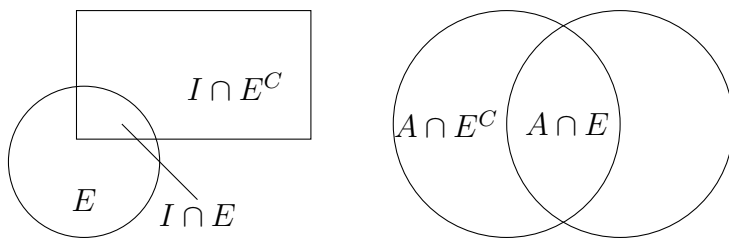
注意：有限覆盖定理指：一族开区间覆盖一个区间 I ，则必能找到有限的区间，将区间 I 覆盖。

3 可测集与测度

3.1 定义与性质

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C) \Leftrightarrow m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^C)$$

Caratheodory 条件： $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$.



可测集： $E \subset \mathbb{R}^n, \forall A \subset \mathbb{R}^n$, Caratheodory 条件成立，称 E 为 Lebesgue 可测集.

可测集的测度：若 E 为 Lebesgue 可测集，则称 $m^*(E)$ 为 E 的 Lebesgue 测度，记为 $m(E)$.

Caratheodory 条件等价于 $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$ 成立.

外测度为零的集合是可测集，称其为零测集.

零测集的子集为可测集.

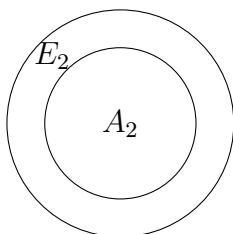
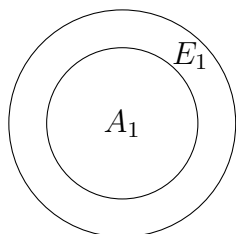
可数集是可测集，且测度为零，特别地， $m(\mathbb{Q}) = 0$.

\mathbb{R}^n 中的每个方体是可测集，且其测度等于方体的体积. (用 Caratheodory 条件， $J \cap I^C = \bigcap_{i=1}^k I_i$ ，且这些集合互不相交.)

可测集的性质：

- 若 E_1, E_2, \dots, E_n 为可测集，则 $\bigcup_{i=1}^k E_k$ 为可测集. 证明在 $k = 2$ 时成立， $E = E_1 \cup E_2$ ， $E = E_1 \cup (E_2 - E_1) = E_1 \cup (E_1^C \cap E_2)$.

- 若 E_1, E_2, \dots, E_n 为互不相交的可测集， $A_i \subset E_i$ ，则 $m^*(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k m^*(A_i)$. 证明在 $k = 2$ 时成立， $(A_1 \cup A_2) \cap E_1 = A_1$ ， $(A_1 \cup A_2) \cap E_1^C = A_2$.



$$(A_1 \cup A_2) \cap E_1 = A_1$$

$$(A_1 \cup A_2) \cap E_1^C = A_2$$

- 可测集的全体是一个 σ -代数. 首先可测集的全体是一个代数，证明 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 对不相交可列并封闭，利用上一个性质，Caratheodory 条件并进一步取极限即可.

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ，且包含关系为严格包含. 利用开集构造定理与 Borel 集的定义即可.

- 有限可加性：** A_1, A_2, \dots, A_n 为互不相交的可测集，则 $m(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k m(A_i)$. (性质 2 中取 $A_i = E_i$)

- 可减性：** $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), A \subset B, m(A) < \infty$ ，则 $m(A - B) = m(A) - m(B)$. (注意 A 的测度是有限的， $B = A \cup (B - A)$ ， $A \cap (B - A) = \emptyset$)

- 可列可加性：** $\{A_k\}$ 为一列互不相交的可测集，则 $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$. (取极限，用测度的次可列可加性分别得到正向与反向的不等式)

• **下连续性**: $\{A_k\}$ 为一列单调递增的可测集, 则 $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$.
(构造不交并 $B_1 = A_1, B_k = A_k - A_{k-1}$, 测度的可列可加性)

• **上连续性**: $\{A_k\}$ 为一列单调递减的可测集, 且 $m(A_1) < \infty$, 则 $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$. (令 $B_k = A_1 - A_k$ 转化为下连续性的问题, 注意证明时会使用可减性, 所以上连续性与下连续性不完全相同)

• **平移不变性**: $E \subset \mathbb{R}^n, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, m(x_0 + E) = m(E), x_0 + E = \{x_0 + x : x \in E\}$.
(平移不变性由外测度可知, 主要证明 $x_0 + E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, 使用 $x_0 + A \cap E = (x_0 + A) \cap (x_0 + E), x_0 + E^C = (x_0 + E)^C$)

注意: 测度继承了外测度的所有性质, 所以需要对次可列可加性与可列可加性进行区分, 可列可加性需要集合相交, 次可列可加性不需要.

证明一个集合是可测的方法:

- Caratheodory 条件.
- 证明它是一个 Borel 集.
- 利用可测集的运算间接证明.

3.2 可测集的逼近定理

可测集可以用开集, 闭集逼近, 可以用 G_δ, F_σ 型集最佳逼近.

- $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 开集 $G \supset E, s.t. \quad m(G - E) < \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 闭集 $F \subset E, s.t. \quad m(E - F) < \varepsilon$.
- $\exists G_\delta$ 型集 $G \supset E, s.t. \quad m(G - E) = 0$.
- $\exists F_\sigma$ 型集 $F \subset E, s.t. \quad m(E - F) = 0$.

逼近定理的证明思路:

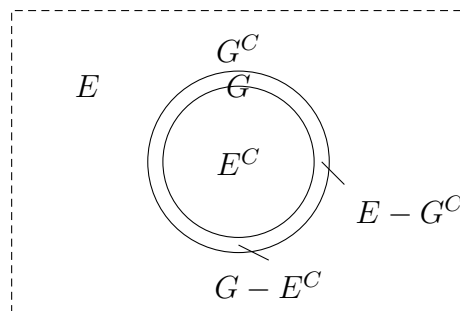
• 将 $m(E)$ 分有限与无穷两种情况讨论. 对于有限情况, 利用外测度的事实 2, 用一系列开方体 I_k 覆盖之, 作 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 由测度可减性可知.

• 对于无限情况, 先找一系列互不相交的可测集 $\{A_k\}, m(A_k) < \infty$ 且 $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 令 $E_k = E \cap A_k$, 则 $m(E_k) < \infty$ 且 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, 这样将无限测度转化至有限情况. 取 $G_k \supset E_k, s.t. \quad m(G_k - E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, 取 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k, G - E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{G_k - E_k\}$. 使用测度单调性与次可列可加性即可.

• 对于第二条, 将闭集转化至开集的情况. $E - F = E \cap F^C = (E^C)^C \cap G = G - E^C, F = G^C$.

• 对于第三条, 利用 $\varepsilon \rightarrow \frac{1}{k}$ 的转化, 将极限转化为集列 $\{G_k\}$, 作 $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, 取极限即可, 这个方法很重要.

• 对于第四条, 利用 $\varepsilon \rightarrow \frac{1}{k}$ 的转化, 将极限转化为集列 $\{F_k\}$, 作 $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, 取极限即可.



$$F = G^C$$

$$E - F = G - E^C$$

注意：对偶性可以简化很多计算.

注意：每个可测集与一个 **Borel** 集仅相差一个零测集，但是这个差距是集合完备与不完备之间的差距.

$[0, 1]$ 间存在不可测集，可以使用 Zermelo 选取公理构造.

附录 A 布置的课后作业

1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21.

附录 B 课后作业的讲解