泛函第一二章总结

Author: Tony Xiang

Full Document can be acquired here:
https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%2056/Chapter56.pdf
Full Source code can be downloaded here:
https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%2056/Chapter56.tex

1 距离空间的基本概念

标量域：$\mathbb{K}$，既可以表示实数域，也可以表示复数域.

距离：$X \neq \emptyset, \forall x, y \in X, \exists d(x,y) \in \mathbb{R}^n$, s.t. :

- （正定性）$d(x,y) \geqslant 0, d(x,y)=0 \iff x=y$；
- （对称性）$d(x,y)=d(y,x)$；
- （三角不等式）$d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

(X,d) 称为距离空间.

距离空间的例子：

- 欧式空间 $\mathbb{K}^n$. 可以定义很多距离.

$$d_1(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_3(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|.$$

- **连续函数空间** $C[a,b]$. 设 $C[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上连续函数全体.$\forall x = x(t), y = y(t)$,

$$d(x,y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$$

- 数列空间 s. 设 s 是实或复数列的全体.$\forall x = (x_i), y = (y_i)$,

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

（注：利用 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$ 证明三角不等式.）

- 可测函数空间 $M(E).m(E) < \infty$，$M(E)$ 是 E 上可测函数的全体，将 a.e. 相等的两个函数记为同一元.$\forall x = x(t), y = y(t)$,

$$d(x,y) = \int_E \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} \, \mathrm{d}t$$

（注：利用 $d(x,y) = 0 \iff x(t) = y(t)$ a.e. 证明非负性.）

- 离散距离空间.$X \neq \emptyset, \forall x, y \in X$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

（注：这说明任意空间都可以定义距离，但是可能没有实际意义.）

距离空间上集合的距离:X 是距离空间,$A, B \subset X, d(A,B) = \inf d(x,y) : x \in A, y \in B$.

有界集：$A \subset X, \exists x_0 \in X, M > 0, \text{s.t.} \forall x \in A, d(x, x_0) \leqslant M$.

序列的极限：$\{x_n\}$ 是距离空间 X 的序列，$x \in X$，若 $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$，则称 $\{x_n\}$ 按距离收敛于 x，记为 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

注：不同空间中的序列在不同意义下的收敛，通过定义适当的距离，可以归结为距离空间中序列的按距离收敛.

距离空间的性质（根据数学分析的思路证明）：

- 收敛序列的极限是唯一的；
- 收敛序列是有界的；
- 收敛序列的任一子列仍收敛于同一极限；
- 距离函数是两个变元的连续函数，即 $x_n \to x, y_n \to y, d(x_n, y_n) \to d(x,y)$.

（第四条性质的证明如下：$\forall x, y, z \in X, d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$，则 $d(z,y) - d(x,y) \leqslant d(z,x) = d(x,z)$. 因此 $|d(x,y) - d(z,y)| \leqslant d(x,z)$. 这是减法不等式，故有：$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \leqslant |d(x_n,y_n) - d(x,y_n)| + |d(x,y_n) - d(x,y)| \leqslant d(x_n,x) + d(y_n,y) \leqslant 0.$）

2 赋范空间的基本概念

线性空间：X 是一个非空集，$\mathbb{K}^n$ 是标量域.X 是线性空间，若

- X 上加法满足交换律，结合律，存在唯一的零元，存在唯一的逆元（负元）.
- X 上数乘满足结合律，与加法共同满足左右交换率，且 $1x = x$.

线性子空间：$E \subset X$，且 E 对 X 上的加法运算和数乘运算封闭，则 E 是 X 的线性子空间.

线性相关，线性无关，线性空间的维数，（注意无穷维线性空间，线性无关向量组的个数可以任意大），线性空间的基与坐标.

线性算子：$T: X \to Y, \forall x_1, x_2 \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$.

由 E 张成的线性子空间：

$$\text{span}(E) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_1, x_2, \cdots, x_n \in E, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}, n = 1, 2, \cdots\}$$

.

线性空间的（抽象）例子：

- 数列空间：s 是实或复数列的全体. 定义的加法为按坐标相加，数乘为按坐标数乘.
- 函数空间：X 是实或复函数的全体.$x,y \in X,\alpha \in \mathbb{K}$，$(x+y)(t)=x(t)+y(t),(\alpha x)(t)=\alpha x(t)$.

倍集与线性和集：$\lambda A=\lambda x:x\in A,A+B=x+y:x\in A,y\in B$.（集合可以为单点集）

范数 $\forall x\in X,\exists \|x\|\in\mathbb{R}$，满足：

- 正定性：$\|x\|\geqslant 0,\|x\|=0 \iff x=0$；
- 绝对奇性：$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|,x\in X,\alpha\in\mathbb{K}$；
- 三角不等式：$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

此外还有：$|\|x\|-\|y\||\leqslant\|x-y\|$.

由范数导出的距离：$d(x,y)=\|x-y\|$.

按范数收敛：$\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)$，则称 $\{x_n\}$ 按范数收敛于 x. 记号与按距离收敛一致.

距离可由范数导出的充要条件：

- $d(\alpha x,0)=|\alpha|d(x,0)$；
- $d(x+z,y+z)=d(x,y)$.

范数的连续性：

- （1）$\|x\|$ 是 X 上的连续函数. 即 $x_n\to x,\|x_n\|\to\|x\|$；
- （2）X 上的加法与数乘运算是连续的.$\forall\{x_n\},\{y_n\}\subset X,\{\alpha_n\}\subset\mathbb{K},x_n\to x,y_n\to y,\alpha_n\to\alpha$，$x_n+y_n\in x+y,\alpha_nx_n\to\alpha x$.

（注：（1）由范数的减法不等式得到，（2）加法的连续性由范数的减法不等式得到，数乘的连续性先需要说明 $\{\alpha_n\}$ 的有界性，然后将式子分解后利用减法不等式与范数的绝对奇性：$\|\alpha_nx_n-\alpha x\|\leqslant|\alpha_n|\|x_n-x\|+|\alpha_n-\alpha|\|x\|$）

赋范空间的例子：

- 欧式空间 $\mathbb{K}^n$. 可以定义很多范数.

$$\|x\|_2=(\sum_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^n x_i$$
$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_n|$$

.

- $C[a,b]$：

$$\|x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|.$$

- c, c_0，收敛的实或复数列的全体，$x = (x_1, x_2, \cdots) \in c$，

$$\|x\| = \sup_{i\geqslant 1} |x_i|.$$

c_0 是收敛于 0 的数列全体，范数定义与 c 上范数定义相同.

- Lebesgue 可积函数空间 $L[a,b]$：将 a.e. 相等的两个函数记为同一元.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x.$$

赋范空间的线性子空间也是赋范空间.

3 L^p 空间与 l^p 空间

3.1 $L^p, 1 \leqslant p < \infty$

定义：E 上的 p 次方可积函数的全体称为 $L^p(E)$.

由于 $|f+g|^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p), (x \in E)$，$f \in L^p(E) \Rightarrow \alpha f \in L^p(E)$.$L^p(E)$ 是线性空间.

范数：

$$\|f\|_p = (\int_E |f|^p \,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}.$$

验证范数的合理性（良定义，此处只验证三角不等式）：

Young 不等式：$\forall a, b \geqslant 0, a, b \in \mathbb{R}, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

（证明利用 $\varphi(x) = \ln x$ 的上凸性质.$\lambda \ln x + (1-\lambda)\ln y \leqslant \ln \lambda x + (1-\lambda)y$，令 $\lambda = \frac{1}{p}, x = a^p, y = b^p$）

Holder 不等式：p, q 条件如上（共轭指标），$f \in L^p(E), g \in L^q(E)$, 则 $fg \in L^1(E)$，且 $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

（证明使用：$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$，对 Young 不等式两边分别积分. 注意存在范数为零的情况单独讨论.）

Minkowski 不等式（L^p 空间范数的三角不等式）：$1 \leqslant \infty, f, g \in L^p(E)$，则 $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

（证明先拆出一个 $|f+g|$，然后分解为 $|f| + |g|$，对这些部分分别使用 Holder 不等式，合并即可. 注意存在范数为零的情况，需要单独讨论.）

按范数收敛：$f_n \xrightarrow{L^p} f, (n \to \infty)$.

$$\frac{1}{m(E)} \int_E |f_n - f|^p \,\mathrm{d}x = \frac{1}{m(E)} \|f_n - f\|_p^p \to 0 (n \to \infty)$$

按范数收敛能够推出按测度收敛.

证明：$\|f_n - f\|_p \to 0$，则 $\forall \varepsilon > 0, n \to \infty$，有

$$m(E(|f_n - f| > \varepsilon)) = m(E(|f_n - f|^p > \varepsilon^p)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p}\int_E |f_n - f|^p \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^p}\|f_n - f\|_p \to 0.$$

由 Risez 定理可知，$f_n \xrightarrow{L^p} f$，则 $\exists\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}, \text{s.t. } f_{n_k} \to f$ a.e.

3.2 $L^\infty(E)$

本性有界：$\exists M > 0, \text{s.t. } |f| \leqslant M$ a.e. 于E.

范数：

$$\|f\|_\infty = \inf\{M : |f| \leqslant M \text{ a.e.}\}.$$

验证范数的合理性（良定义，此处只验证三角不等式）：

$\forall n \geqslant 1, n \in \mathbb{N}, \exists E_n \subset E, m(E_n) = 0$，并且

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \frac{1}{n}(x \in E\backslash E_n).$$

令 $E_0 = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$，则 $m(E_0) = 0$，则 $\forall n \geqslant 1, n \in \mathbb{N}, \exists E_n \subset E, m(E_0) = 0$，令 $n \to \infty$ 得到 $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty(x \in E\backslash E_0)$.，则 $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ a.e..

$|f+g| \leqslant |f| + |g| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ a.e.，因此 $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

与 L^p 空间的关系：$m(E) < \infty$，则 $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty$.（证明略）

Holder 不等式在共轭指标 $p = 1, q = \infty$ 或 $p = \infty, q = 1$ 时均成立.（将无穷范数单独计算后提出积分式即可）

3.3 $l^p, 1 \leqslant p < \infty$

定义：$x = (x_n)$ 是实或复数列. 若 $\sum_{i=1}^\infty |x_n|^p < \infty$，则称 x 是 p 次方可和的.p 次方可和函数的全体称为 l^p.

范数：

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^\infty |x_n|^p))^{\frac{1}{p}}$$

同样有 Holder 不等式与 Minkowski 不等式，条件与结论与之前一致. 按范数定义替代之即可.

3.4 l^∞

定义：l^∞ 是有界数列的全体.

范数：$\forall x=(x_n)\in l^{\infty}$，

$$\|x\|_{\infty}=\sup_{n\geqslant 1}|x_n|.$$

Minkowski 不等式在 $0<p<1$ 上不成立.（实际上是反向）

4 点集，连续映射与可分性

内点，开集，内部，聚点，导集，闭集，闭包，开集的基本性质，导集的等价定义，闭包的等价定义，闭集的等价定义，稠密集，稠密集的等价定义.（注意邻域语言与序列语言的表达，这些定义在实变第一章第六节中均有提及），以下补充疏朗集的等价定义.

疏朗集的等价定义（TFAE）：（$A\subset X$）

- A 是疏朗集.
- 对任一开球 U，$\exists U_1\subset U, \text{s.t.}\, U_1\cap A=\emptyset$.
- 对任一闭球 S，$\exists S_1\subset S, \text{s.t.}\, S_1\cap A=\emptyset$.

（证明：A 是疏朗集等价于对任一开球 $U(x,\varepsilon)$，包含关系 $U(x,\varepsilon)\subset\bar{A}$ 不成立，即存在 $y\in U(x,\varepsilon), \text{s.t.}\, y\neq\bar{A}$，这又等价于 $\exists U(y,\delta)\subset U(x,\varepsilon)\,\text{s.t.}\, U(y,\delta)\cap A=\emptyset$，由于每个开球中包含一个闭球，反之亦然，后两条性质等价.）

映射，单射，满射，双射，像，原像.

连续映射：X,Y 是距离空间，$T:X\to Y, x_0\in X, \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \text{s.t.}\, d(x,x_0)<\delta, d(Tx,Tx_0)<\varepsilon$，则称 T 在点 x_0 处连续，若 T 在 X 上的每一点处连续，则称 T 在 X 上连续.

邻域语言的等价描述：对于 Tx_0 的任一邻域 V，存在 x_0 的邻域 U，使得 $T(U)\subset V$，则称 T 在 X 上连续.

连续的充要条件：X,Y 是距离空间，$T:X\to Y, x_0\in X$，则 T 在 x_0 处连续的充要条件为：$\forall\{x_n\}\subset X, x_n\to x_0, Tx_n\to Tx_0$.（必要性：直接使用 $\varepsilon-N$ 语言证明即可，充分性：用反证法，先用 $\varepsilon-N$ 语言把条件写出来，然后根据 $x_n\to x_0, Tx_n\nrightarrow Tx_0$ 推出矛盾）

连续映射的等价条件（TFAE）：

- T 在 X 上连续.
- $G\subset Y$，G 为开集，$T^{-1}(G)$ 是 X 中的开集.
- $F\subset Y$，F 为闭集，$T^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集.

证明：(1) $\Rightarrow$ (2). 设 G 是 Y 中的开集，不妨设 $T^{-1}(G)\neq\emptyset.\forall x_0\in T^{-1}(G)$，由于 $Tx_0\in G$，并且 G 是开集，因此存在 Tx_0 的一个邻域 $V\subset G$，由 T 的连续性，$\exists U(x_0), \text{s.t.}\, T(U)\subset V\subset G$. 于是 $U\subset T^{-1}(G)$. 因此 x_0 是 $T^{-1}(G)$ 的内点，这表明 $T^{-1}(G)$ 是开集. (2) $\Rightarrow$ (1). 设 $x_0\in X$，V 是 Tx_0 的一个邻域. 由于 V 是 Y 中的开集，

$T^{-1}(V)$ 是开集，$x_0 \in T^{-1}(V).\exists U(x_0), \text{s.t.}\, T(U) \subset V$. 则 T 在 x_0 处连续，由 x_0 的任意性得证. (2) $\Leftrightarrow$ (3). 利用 $\forall A \subset Y, T^{-1}(A^C) = (T^{-1}(A))^C$.

空间的可分性：设 X 是距离空间，若在 X 中存在一个**可数的稠密子集**，则称 X 是可分的.

l^p **是可分的**，$A = (r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, \cdots) : r_i \in \mathbb{Q}, n = 1, 2, \cdots$（可列集）. 利用有理数在实数集中的稠密性与收敛数列的余项趋于 0 这两个性质，控制两个元之间的距离.

$C[a,b]$ **是可分的**，$P_0[a,b]$ 是有理系数多项式的全体（可列集），利用 Weierstrass 逼近定理，将 $[a,b]$ 上的连续函数用多项式一致逼近，然后用有理系数多项式逼近普通的多项式，控制两个元之间的距离.

$L^p[a,b], 1 \leqslant p < \infty$ **是可分的**，$P_0[a,b]$ 是有理系数多项式的全体（可列集），首先用简单函数列逼近，然后使用控制收敛定理，用一个简单函数 g 逼近 x，利用 Lusin 定理，用连续函数 h 逼近 g，利用上一部分的结论，使用有理系数多项式 p_0 逼近 h，控制两个元之间的距离.

l^∞ **不是可分的**. 令 $K = x = (x_1, x_2, \cdots) : x_i = 0 \text{或} 1$，则 K 是不可数集（二元数列），$\forall x, y \in K, d(x,y) = 1.A$ 是 l^∞ 的可数子集. 若 A 在 l^∞ 中是稠密的，$U(x, \frac{1}{3})$ 中至少包含 A 中的一个元，由于开球 $U(x, \frac{1}{3})$ 有不可数个，$\exists z \in A, z \in U(x, \frac{1}{3}) \cap U(y, \frac{1}{3})$，此时 $d(x,y) \leqslant \frac{2}{3} \neq 1$，矛盾.

可列集的意义：在可分的空间 X 中选取一个适当的可数的稠密子集，在这个集合上研究，然后取一个极限过程，得到全空间 X 上的相应结论.

5 完备性

Cauchy 序列：$\{x_n\} \subset X, \forall(\text{给定的})\varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{s.t.}\, m, n > N, d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Cauchy 序列的性质：

- 收敛序列是 Cauchy 序列.
- Cauchy 序列是有界的.
- $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列，并且存在一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x，则 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

完备空间：X 是距离空间，若 X 中的每个 Cauchy 序列都是收敛的，则称 X 是完备的. 完备的赋范空间称为 Banach 空间.

$P[a,b]$ 不是完备的.$P[a,b] \subset C[a,b]$. 令 $p_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}, n = 1, 2, \cdots$，则 $p_n \in P[a,b]$，又有 $p_n \to e^t$.（利用 Taylor 展开），因此 $\{p_n\}$ 是 Cauchy 序列，但 $e^t \notin P[a,b]$. 这表明 $\{p_n\}$ 在 $P[a,b]$ 中不收敛.

l^p 是完备的.（仅证明 $p \neq \infty$ 的部分，可以用作证明完备性的模板）

设 $x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots)$ 是 l^p 中，的 Cauchy 序列. 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\text{s.t.}\ m,n>N$，

$$\sum_{i=0}^{\infty}|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|^p=\|x^{(m)}-x^{(n)}\|_p^p<\varepsilon^p.$$

于是对每个**固定的** i，当 $m,n>N$，（N **固定**），

$$|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|\leqslant\|x^{(m)}-x^{(n)}\|_p<\varepsilon.(*)$$

这表明对每个**固定的** i，$\{x_i^{(n)}\}_{n\geqslant1}$ 是 Cauchy 序列，因此 $\{x_i^n\}$ 收敛，设当 $n\to\infty$ 时，$x_i^{(n)}\to x_i,i=1,2,\cdots$，令 $x=(x_1,x_2,\cdots)$. 下面证明 $x\in l^p$ 并且 $x^{(n)}\to x$.（注：从按坐标收敛到按范数收敛）

由 $(*)$ 式得到，$\forall k\geqslant1$，当 $m,n>N$ 时，

$$\sum_{i=1}^{k}|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|^p<\varepsilon^p.$$

固定 N，先令 $m\to\infty$，再令 $k\to\infty$，得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-x_i^{(n)}|^p\leqslant\varepsilon^p.$$

这表明，$x-x^{(n)}\in l^p$，由于 l^p 是线性空间，$x=(x-x^{(n)})+x^{(n)}\in l^p$，且有 $\|x-x^{(n)}\|_p\leqslant\varepsilon$. 因此 $x^{(n)}\to x,n\to\infty$.

c_0,c,l^∞ 均是完备的.

$C[a,b]$ 是完备的. 设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 序列，则 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\text{s.t.}\ m,n>N,\|x_m-x_n\|<\varepsilon$. 于是 $\forall t\in[a,b]$，当 $m,n>N$ 时，

$$|x_m(t)-x_n(t)|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_m(t)-x_n(t)|=\|x_m-x_n\|<\varepsilon.$$

这表明对每个**固定的** $t,\{x_n(t)\}_{n\geqslant1}$ 是 Cauchy 序列. 令 $x(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t),t\in[a,b]$.

固定 N，令 $m\to\infty$. 得到 $|x(t)-x_n(t)|<\varepsilon$. 则 $x_n(t)\rightrightarrows x(t),x=x(t)$，且 $\|x-x_n\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-x_n(t)|\leqslant\varepsilon$，故 $x_n\to x$.

$L^p(E),(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 均是完备的.（证明略）

纲集：X 是距离空间，$A\subset X$，若 A 可以表示成为可数个疏朗集的并，则 A 是第一纲集，否则 A 是第二纲集.

完备空间的性质：

- （闭球套定理）设 X 是完备的距离空间，$S_n=x:d(x,x_n)\leqslant r_n(n=1,2,\cdots)$ 是 X 中的一列闭球，满足 $S_{n+1}\subset S_n,n\geqslant1$ 且 S_n 的半径 $r_n\to0$，则 $\exists|x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n$.（证明与数分类似，先证明 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列，利用完备性与闭集性质，唯一性可以设存在另一个点 x'，证明 $d(x,x')=0$）

- （Baire 纲定理）完备的距离空间是第二纲集.（证明使用反证法，将 X 表示成为可数个疏朗集的并，$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，根据疏朗集性质构造闭球套，由 X 的完备性，存在一个 x 属于这一些疏朗集的交，但是 $S_n\cap A_n=\emptyset$，从而导致矛盾）

级数，部分和，绝对收敛.（了解即可）

不动点：X 是距离空间，$T:X\to X,\exists x_0\in X,\text{s.t.}\,Tx_0=x_0$，则称 x_0 为 T 的一个不动点.

压缩映射：X 是距离空间，$T:X\to X$，$\exists 0\leqslant\lambda<1,\text{s.t.}\,d(Tx,Ty)\leqslant\lambda d(x,y),x,y\in X$. 称 T 是压缩的.

压缩映射是连续的.

压缩映射原理：完备距离空间上的压缩映射存在唯一的不动点.

证明：任取 $x_0\in X$，令 $x_1=Tx_0,x_2=Tx_1,\cdots,x_n=Tx_{n-1},\cdots$.

$d(x_{n+1},x_n)=d(Tx_n,Tx_{n-1})\leqslant\lambda d(x_n,x_n-1)\leqslant\cdots\leqslant\lambda^n d(x_1,x_0)$. 于是 $\forall n,p\in\mathbb{N}$，

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+p},x_n)&\leqslant d(x_{n+p},x_{n+p-1})+d(x_{n+p-1},x_{n+p-2})+\cdots+d(x_{n+1},x_n)\\
&\leqslant(\lambda^{n+p-1}+\lambda^{n+p-2}+\cdots+\lambda^n)d(x_1,x_0)\\
&=\lambda^n(\lambda^{p-1}+\lambda^{p-2}+\cdots+1)d(x_1,x_0)\\
&\leqslant\frac{\lambda^n}{1-\lambda}d(Tx_0,x_0).
\end{aligned}
$$

则 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列. 由于 X 是完备的，$\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$. 由 T 的连续性得到 $x=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}Tx_{n-1}=Tx$. 存在性得证.

若另有 $y\in X,\text{s.t.}\,Ty=y$，则 $d(x,y)=d(Tx,Ty)\leqslant\lambda d(x,y)=0$. 唯一性得证.

注：x_0 经过 T 的 n 次迭代后与 x 的距离估计：$d(x,x_n)\leqslant\frac{\lambda^n}{1-\lambda}d(Tx_0,x_0)$.

注：压缩条件减弱至 $d(Tx,Ty)<d(x,y)$ 时，若 X 是闭集，压缩映射原理仍成立，否则将不再成立.

应用（微分方程中的 Picard 定理）：微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=f(t,x),x(t_0)=x_0,f\in C(\mathbb{R}^2),\text{满足 Lipschitz 条件.}$$

则在 t_0 的某邻域内，微分方程有唯一的解.（在 $C[a,b]$ 上考虑，将微分方程转化为积分方程，做出映射，并利用 Lipschitz 条件证明它是压缩的即可，注意要将 $\|x_1-x_2\|$ 放缩出来）

等距同构：X,Y 是距离空间，若存在映射 $T:X\to Y,\text{s.t.}\,T$ 是双射，并且对任意 $x_1,x_2\in X$，有 $d(Tx_1,Tx_2)=d(x_1,x_2)$，则称 X,Y 是等距同构的.

完备化空间：设 (X,d) 是距离空间，若存在完备的距离空间 $(\tilde{X},\tilde{d})$，使得 X 与 $\tilde{X}$ 的一个稠密子空间等距同构，则称 $\tilde{X}$ 是 X 的完备化空间.

若 $\tilde{X}$ 是一个完备的距离空间，使得 $X \subset \tilde{X}$，并且 X 在 $\tilde{X}$ 中稠密，则 $\tilde{X}$ 是 X 的完备化空间.

拓扑同构：存在 $T: X \to Y$，使得 T 是双射和线性的，并且 $\exists a, b > 0, \text{s.t.}\ a\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant b\|x\|, x \in X$，则称 X, Y 是拓扑同构的.

等距同构：存在 $T: X \to Y$，使得 T 是双射和线性的，并且 $\|Tx\| = \|x\|, x \in X$，则称 X, Y 是等距同构的.

等距同构可以推出拓扑同构.

范数的等价性：设 X 是线性空间，$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个范数，称 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是等价的，若存在常数 $a, b > 0, \text{s.t.}\ a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant b\|x\|_1, x \in X$.

两个范数等价时，以它们为范数构成的赋范空间是拓扑同构的.

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 n 维赋范空间，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 X 的一组基，则存在常数 $a, b > 0, \text{s.t.}\ \forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$，有

$$a(\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|x\| \leqslant b(\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

（证明略）

有限维赋范空间的性质：

- 有限维赋范空间上的任意两个范数都是等价的.
- 任意 n 维赋范空间与 $\mathbb{K}^n$ 拓扑同构.
- 有限维赋范空间是完备的，任何赋范空间的有限维子空间都是闭子空间.

证明：（1）利用范数的等价性.

（2）取一组基，做映射 $T: X \to K^n, T(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，在 $a\|x\| \leqslant \|Tx\| b\|x\|, x \in X$，由 $\frac{1}{b}\|x\| \leqslant \|Tx\| = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{a}\|x\|$.

（3）由（2）可知 X 与 $\mathbb{K}^n$ 拓扑同构，$\exists T: X \to \mathbb{K}^n, T$ 是双射与线性的，$\exists a, b > 0, \text{s.t.}\ a\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant b\|x\|, x \in X$，由 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列，$\forall m, n \in \mathbb{K}^n$，

$\|Tx_m - Tx_n\| = \|T(x_m - x_n)\| \leqslant b\|x_m - x_n\|$，$\{Tx_n\}$ 是 Cauchy 序列，$\exists y, Tx_n \to y$，T 是满射，$\exists x \in X\ \text{s.t.}\ Tx = y$，于是 $\|x_n - x\| \leqslant \frac{1}{a}\|T(x_n - x)\| = \frac{1}{a}\|Tx_n - y\| \to 0, n \to \infty$，因此 $x_n \to x$. 这就证明 X 是完备的.

6 紧性

开覆盖：设 X 是距离空间，$A \subset X$. 若 $\{G_\alpha, \alpha \in I\}$ 是 X 中的一族开集，使得 $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \supset A$，则称 $\{G_\alpha$ 是 A 的一个开覆盖.

紧集：对于 A 的任一开覆盖 $\{G_\alpha, \alpha \in I\}$ 都存在其中的有限个开集仍覆盖 A，则称 A 是紧集.（对应有限覆盖性质）

列紧集：若 A 中任一序列都存在收敛的子列，则称 A 是列紧集.（序列性质）

完全有界集：若对 $\forall\varepsilon>0,\exists$有限集$E=x_1,x_2,\cdots,x_n,\text{s.t.}\bigcup_{i=1}^k U(x_i,\varepsilon)\supset A$，则称 A 是完全有界集，称 E 为 A 的有限 $\varepsilon-$ 网.

完全有界集是有界集.

（取 $\varepsilon=1,\exists x_1,x_2,\cdots,x_k\in X,\text{s.t.}\bigcup_{i=1}^k U(x_i,1)\supset A$，$\forall x\in A,\exists 1\leqslant i\leqslant k,\text{s.t.}\, x\in U(x_i,1)$，于是 $d(x,x_1)\leqslant d(x,x_i)+d(x_i,x_1)<1+\max_{1\leqslant i\leqslant k}d(x_i,x_1)$.）

$A\subset X$，A 是完全有界集的充要条件是 A 中的任一序列必存在 Cauchy 子列.（完全有界集的序列语言，证明略）

列紧集是完全有界集；若 X 是完备的，则完全有界集是列紧集.

$A\subset X$，A 是紧集的充要条件是 A 中的任一序列必存在收敛于 A 中元的子列.（紧集的序列语言，证明略）

紧集是列紧集.

紧集是有界闭集.（证明：A 是紧集，则 A 是列紧集，则 A 是完全有界集，A 是有界集.$\{x_n\}$ 是 A 中的序列 $x_n\to x$，则 $\exists x_{n_k}\subset x_n,\text{s.t.}\, x_{n_k}\to y$，而 $x_n\to x$，则 $x=y\in A$，这表明 A 是闭集.）

在有限维赋范空间中，有界集是列紧集，有界闭集是紧集.

证明：设 X 是 n 维赋范空间.X 与 $\mathbb{K}^n$ 拓扑同构，即存在 $T:X\to\mathbb{K}^n,\text{s.t.}\, T$ 是双射和线性的，并且存在常数 $a,b>0,\text{s.t.}\, a\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant b\|x\|,x\in X$，设 A 是 X 中的有界集，$\|x\|\leqslant M,x\in A$. 设 $\{x_n\}\subset A$，得到 $\|Tx_n\|\leqslant b\|x_n\|\leqslant bM,n\leqslant 1$，则 $\{Tx_n\}$ 是 $\mathbb{K}^n$ 的有界序列，根据 Weierstrass 定理，$\exists\{Tx_{n_k}\}\subset\{Tx_n\},y\in\mathbb{K}^n,\text{s.t.}\,\|Tx_{n_k}-y\|\to 0$，设 $x\in X,\text{s.t.}\, Tx=y$. 得到 $\|x_{n_k}-x\|\leqslant\frac{1}{a}\|T(x_{n_k}-x)\|=\frac{1}{a}\|Tx_{n_k}-y\|\to 0,n\to\infty$. 故 $x_{n_k}\to x$.

再设 A 是有界闭集，A 是列紧集，故 A 是紧集.

连续函数的性质：设 A 是距离空间 X 中的紧集，f 是 A 上的连续的实值函数. 则 f 在 A 上有界，且在 A 上达到上下确界.

证明：有界性. 若 f 在 A 上无上界，则 $\forall n\in\mathbb{N},\exists x_n\in A,\text{s.t.}\, f(x_n)>n$. 由于 A 是紧集，$\exists\{x_{n_k}\}\subset x_n,\text{s.t.}\, x_{n_k}\to x\in A$. 由于 $f\in C(A),f(x_{n_k})\to f(x)$. 但 $f(x_{n_k})>n_k\to\infty$，矛盾. 有界性得证. 记 $a=\sup_{x\in A}f(x)$，则 $\exists y_n\in A\,\text{s.t.}\, f(y_n)\to a$. 由于 A 是紧集，$\exists\{y_{n_k}\}\subset y\in A$，又 f 的连续性得到 $f(y)=\lim_{k\to\infty}f(y_{n_k})=a$.

7 有界线性算子的基本概念

线性算子，线性泛函.

T 是线性算子，则 $N(T)=x\in X:Tx=0$ 为 T 的零空间，$R(T)=Tx:x\in X$ 为 T 的值域. 它们分别是 X,Y 的线性子空间.

线性算子和线性泛函的例子：

X 是 n 维线性空间，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 X 的一组基，$A = (a_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 阶矩阵，定义算子：

$$T : X \to X, T(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i, y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = 1, 2, \cdots, n.$$

则 T 是线性算子，反过来，设 $T : X \to X$ 是线性算子，则 Te_j 必是 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的线性组合，设 $Te_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, j = 1, 2, \cdots, n$. 当 $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ 时，

$$\begin{aligned} y = Tx &= \sum_{i=1}^{n} y_j e_i = \sum_{j=1}^{n} x_j T e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j e_i \end{aligned}$$

则 X 上的线性算子与 $n \times n$ 阶矩阵一一对应.

定义泛函：

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

则 f 是 X 上的线性泛函，记 $a_i = f(e_i)$，则

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

则 X 上的线性泛函与 $\mathbb{K}^n$ 中的向量一一对应.

设 $K(s,t)$ 是 $[a,b] \times [a,b]$ 上的可测函数，满足 $M = (\int_a^b (\int_a^b |K(s,t)|^2 \,\mathrm{d}t) \,\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} < \infty$. 对任意 $x \in L^2[a,b]$，令

$$\begin{aligned} (Tx)(s) &= \int_a^b K(s,t) x(t) \,\mathrm{d}t \\ f(x) &= \int_a^b x(t) \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

分别为 $L^2[a,b]$ 上的线性算子（第二类 Fredholm 积分算子）和线性泛函. 由 Holder 不等式，

$$\begin{aligned} \int_a^b |(Tx)(s)|^2 \,\mathrm{d}s &= \int_a^b |\int_a^b K(s,t) x(t) \,\mathrm{d}t|^2 \,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_a^b (\int_a^b |K(s,t)|^2 \,\mathrm{d}t \int_a^b |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t) \,\mathrm{d}s \\ &= \int_a^b (\int_a^b |K(s,t)|^2 \,\mathrm{d}t) \,\mathrm{d}s \int_a^b |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t \\ &= M^2 \|x\|_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

故 $Tx \in L^2[a,b]$. 由积分的线性性知道 T 是线性的. 同样由 Holder 不等式，

$$\int_a^b |x(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (\int_a^b 1\,\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}(\int_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b-a}\|x\|_2^2.$$

故 f 是 $L^2[a,b]$ 上的线性泛函.

算子的有界性：X,Y 是赋范空间，$T:X\to Y$ 是线性算子，若 T 将 X 中的每个有界集都映射为 Y 中的有界集，则称 T 是有界的.

有界线性算子的等价定义（TFAE）：

- （1）T 是有界的；
- （2）$\exists c>0, \text{s.t.}\ \|Tx\|\leqslant c\|x\|, x\in X$；
- （3）T 在 X 上连续.

证明：(1) $\Rightarrow$ (2). 由于 $S=x:\|x\|\leqslant 1$ 是 X 中的有界集，T 是有界的，$T(S)$ 是 Y 中的有界集.$\exists c>0, \text{s.t.}\ \forall x\in S, \|Tx\|\leqslant c$,$\forall x\in X, x\neq 0, \frac{x}{\|x\|}\in X$，故

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|\frac{1}{\|x\|}Tx\| = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leqslant c$$

因此 $\|Tx\|\leqslant c\|x\|, x\in X$.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 $\{x_n\}\subset X, x_n\to x$，由于 T 是线性的，因此 $0\leqslant \|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\|\leqslant c\|x_n - x\|\to 0$. 因此 $Tx_n\to Tx$. 连续性得证.

(3) $\Rightarrow$ (1). 若 T 不是有界的，则存在 X 中的有界集 A，使得 $T(A)$ 不是有界的.$\exists M>0, \{x_n\}\subset A, \text{s.t.}\ \|x_n\|\leqslant M, n\geqslant 1$，但是 $\|Tx_n\|>n$，**令** $x_n' = \frac{x_n}{\sqrt{n}}, n\geqslant 1$，则 $x_n'\to 0$，则 $x_n'\to 0$. 由于 T 连续，应有 $Tx_n'\to T(0)=0$，但是

$$\|Tx_n'\| = \|T(\frac{x_n}{\sqrt{n}})\| = \frac{\|Tx_n\|}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}\to\infty.$$

矛盾，因此 T 有界.

有界性通常可以由 Holder 不等式放缩得到.

第二型 Fredholm 积分算子，**有限维**赋范空间上的算子是有界的.

无界的线性算子的例子：$C^{(1)}[0,1]$ 上的微分算子 $D:C^{(1)}[0,1]\to C[0,1], (Dx)(t) = x'(t)$. 取 $x_n(t)=t^n, n=1,2,\cdots$,则 $\forall n, x_n\in C^{(1)}[0,1], \|x_n\|=1, \|Dx_n\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} nt^{n-1} = n, n=1,2,\cdots$

算子范数：X,Y 是赋范空间，$T:X\to Y$ 是有界线性算子，算子范数为：

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|.$$

f 是 X 上的有界线性泛函，范数为：

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|.$$

算子范数的等价定义：$\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$.

证明：

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1,x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$
$$=\sup_{x\neq 0}\|T(\frac{x}{\|x\|})\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|$$

范数的性质：$\|Tx\|\leqslant\|T\|\|X\|,x\in X$. 同时，若 $c>0,\text{s.t.}\,\|Tx\|\leqslant c\|X\|$，则有 $\|T\|\leqslant c$.

符号函数：$x\in\mathbb{K}^1$，则

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}\frac{\bar{x}}{|x|},x\neq 0\\ 0,x=0.\end{cases}$$

符号函数的性质：$x\operatorname{sgn}x=|x|,|\operatorname{sgn}x|\leqslant 1$.

算子范数的计算：（两个方向放缩）

设数列 $a=(a_i)\in l^1$，$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i,x\in l^\infty$ 为定义在 l^∞ 上的泛函.

显然 f 是**线性的**.$\forall x=(x_i)\in l^\infty$，有

$$|f(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|a_ix_i|\leqslant|a_i|\sup_{i\geqslant 1}|x_i|=\|a\|_1\|x\|_\infty.$$

这表明 f 有界，且 $\|f\|\leqslant\|a\|_1$，另一方面，令 $x^{(0)}=(\operatorname{sgn}a_1,\operatorname{sgn}a_2,\cdots)\in l^\infty$，并且 $\|x^{(0)}\|_\infty\leqslant 1$. 由于

$$|f(x^0)|=|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i^{(0)}|=|\sum_{i=1}^{\infty}a_i\operatorname{sgn}a_i|=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|=\|a\|_1.$$

因此 $\|f\|\geqslant\|a\|_1$，综上所述 $\|f\|=\|a\|_1$.

若 f 视作 c_0 上的泛函，正向不等式与上述证明一致，反向不等式：$\forall\varepsilon>0,\exists k\in\mathbb{N},\text{s.t.}\sum_{i=1}^{k}a_i>\|a\|_1-\varepsilon$，取 $x^{(0)}=(\operatorname{sgn}a_1,\operatorname{sgn}a_2,\cdots,\operatorname{sgn}a_k,0,\cdots)\in c_0$，并且 $\|x^{(0)}\|_\infty\leqslant 1$. 由于

$$|f(x^0)|=|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i^{(0)}|=|\sum_{i=1}^{\infty}a_i\operatorname{sgn}a_i|=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|=\|a\|_1-\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，$\|f\|\geqslant\|a\|_1$，综上所述 $\|f\|=\|a\|_1$.

有界线性算子的空间：用 $B(X,Y)$ 表示从 X 到 Y 的有界线性算子的全体.$\forall A,B\in B(X,Y),\alpha\in\mathbb{K}$，定义：

$$(A+B)x=Ax+Bx,(\alpha A)x=\alpha Ax,x\in X.$$

又 $\|(A+B)x\|=\|Ax+Bx\|\leqslant\|Ax\|+\|Bx\|\leqslant(\|A\|+\|B\|)\|X\|$，因此 $A+B$ 是有界的，且有 $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$.

验证该范数是良定义的：

- $\| \leqslant \|0$，并且 $A=0 \Rightarrow \|A\|=0$，若 $\|A\|=0$，则 $Ax=0, x\in X$（算子范数的不等式），则 $A=0$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}$，$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|(\alpha A)x\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\alpha|\|Ax\| = \alpha\|A\|$.
- $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$ 由之前的式子可得.

若 Y 是 Banach 空间，则 $B(X,Y)$ 是 Banach 空间.

证明：设 $\{T_n\}$ 是 $B(X,Y)$ 中的 Cauchy 序列，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{s.t.}\, m,n > N, \|T_m - T_n\| < \varepsilon$. 于是 $\forall x \in X, m,n > N$，

$$\|T_m x - T_n x\| = \|(T_m - T_n)x\| \leqslant \|T_m - T_n\|\|x\| < \varepsilon\|x\|.$$

这表明 $\{Tx_n\}$ 是 Y 中的 Cauchy 序列，由于 Y 是完备的，$\{T_n x\}$ 收敛，$\forall x \in X$，令 $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$，则 T 是 X 到 Y 的线性算子，固定 $n > N$，令 $m \to \infty$，得到 $\|(T-T_n)x\| = \|Tx - T_n x\| \leqslant \varepsilon\|x\|, x \in X$.

上式表明 $T - T_n \in B(X,Y)$. 由于 $B(X,Y)$ 是线性空间,$T = (T-T_n) + T_n \in B(X,Y)$，且 $\|T - T_n\| \leqslant \varepsilon$. 故 $B(X,Y)$ 是完备的.

附录 A 布置的课后作业

第一章：$1,2,3,4,6,9,13,14,16,18,19,22,23,24,29,31,32,33,35,39,41,42,43$.

第二章：$1,2,4,5,6$.

附录 B 课后作业的讲解

第一章：

2.（$\Rightarrow$）即 $\lim_{n\to\infty} d(x^{(n)},x) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1+|x_i^{(n)} - x_i|} = 0$. 利用 $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ 的单增与 $\varepsilon - N$ 语言即可证明.

（$\Leftarrow$）将待求式分为两部分，一部分由于级数的性质能够取得很小，另一部分由于按坐标收敛的性质能够取得很小. 即：

$$d(x^{(n)},x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1+|x_i^{(n)} - x_i|} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1+|x_i^{(n)} - x_i|}$$

4.（1）$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \iff \frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}} = 1$，用 Holder 不等式.（2）设 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{t}$，则 $\frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{1}{1}$，利用（1）与 Holder 不等式.

6.（1）将级数分成两部分，对 $|x_n| < 1$ 的部分（由足够大的 N 取得），将 $|x_n|_2^p$ 放缩成 $|x_n|_1^p$. 其余部分是有限求和，不需要放缩.（2）将函数分成两部分：$|f| \leqslant 1$ 和 $|f| > 1$，后一部分放缩为 L^{p_1} 空间的积分，前一部分直接放缩为 $m(E)$.

9. 注意要对 p 分情况讨论，但基本思想都是将依测度收敛转化为依坐标收敛，然后用极限的保号性.

13. 证明 $\bar{E}$ 对加法和数乘运算封闭.

16. 令 $G_n=\bigcup_{x\in F}U(x,\frac{1}{n})$. 则 G_n 是开集.$\forall x\in F,x\in G_n,F\subset G_n,F\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$.$\forall x\notin F,d(x,F)=\delta>0$，取 $N>0$ s.t. $\frac{1}{N}<\delta$，则 $x\notin G_N$（否则 $\exists y\in F,\text{s.t.}\,d(x,F)\leqslant d(x,y)\leqslant\frac{1}{N}<d(x,F)$），故 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$.

18.$y\in Y$，由于 T 是满射，$\exists x\in X,\text{s.t.}\,Tx=y$. 由于 A 在 X 中稠密，$\exists\{x_n\}\subset A,x_n\to x$，由于 T 连续，$y_n=T_{x_n}\to T_x=y$. 这就证明了 $T(A)$ 在 Y 中稠密.

19.（c）令 $A=\{(r_1,r_2,\cdots,r_n,r,r,\cdots):r_i,r\in\mathbb{Q}\}$.$x=(x_i)\in c,\lim_{n\to\infty}x_i=a.$，取有理数分别逼近 x_i,a 即可.

22.（1）设 A 是完备子集，设 $x_n\subset A,x_n\to x$，因而是 Cauchy 序列，故存在 $y\in A,\text{s.t.}\,x_n\to y$，已知 $x_n\to x$，由极限唯一性 $x=y\in A$.（2）设 X 是完备的，$\{x^{(n)}\}$ 是 A 中的 Cauchy 序列，由于 X 完备，$\exists\{x_n\}\subset A,\text{s.t.}\,x_n\to x\in A$，则 A 是完备的.

23.（c_0）依坐标收敛部分可以仿照书上完成，另一部分需要先通过固定 i，得到 $|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|<\varepsilon$，然后固定 $n>N$，取 $m\to\infty$，得到 $\sup x-x_i^{(n)}\leqslant\varepsilon$. 最后对固定的 $x^{(n)}<c_0$，$\exists N_1,\text{s.t.}\,\forall i>N_1,|x_i^{(n)}|<\varepsilon$. 证明 $x\in c_0,x^{(n)}\to x$ 即可.

29. 令 $f(x)=d(x,Tx),x\in\mathbb{K}$. 则可以使用距离函数的连续性得到 f 的连续性. 设 $f(x_0)=\min_{x\in K}f(x),Tx_0\neq x_0$，则 $f(Tx_0)=d(Tx_0,T(Tx_0))<d(x_0,Tx_0)=f(x_0)$，与 $f(x_0)$ 的最小性矛盾. 反例可以使用 $Tx=x+\frac{1}{x},x\in[1,\infty)$.

31. 令 $T:C[a,b]\to C[a,b],(Tx)(t)=\lambda\int_a^bK(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s+\varphi(t)$. 证明它是压缩的.

32. 令 $T:L^2[a,b]\to L^2[a,b],(Tx)(t)=\int_a^bK(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s+a(t)$，利用 Holder 不等式证明它是压缩的.

33. 令 $x^{(n)}=(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,0,\cdots)\in c_{00},x=(1,\frac{1}{2},\cdots)$，则 $x^{(n)}\to x\notin c_{00}$. 不完备性得证. 完备化空间为 c_0，设 $x=(x_i)\in c_0,\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim_{i\to\infty}x_i=0,\exists N,\text{s.t.}\,i>N,|x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. 令 $y=(x_1,x_2,\cdots,x_N,0,0,\cdots)$，则 $\|x-y\|=\sup_{i\geqslant1}|x_i-y_i|=\sup_{i\geqslant N}|x_i|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. 即 $y\in U(x,\varepsilon)$. 即 c_{00} 在 c_0 中稠密.

35.$\|f\|_2,\|f\|_3$ 等价.$\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1(1+x)|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^12|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$，开根号即可.

$\|f\|_2,\|f\|_1$ 不等价. 取 $f_n(t)=n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(t)$. 则 $\|f\|_1=1,\|f\|_2=n$. 不存在 $c,\text{s.t.}\,\|f\|_2\leqslant c\|f\|_1$.

39. 取 $T(A)$ 中任一序列 $\{y_n\}$. 则 $\exists\{x_n\}\subset A,\text{s.t.}\,Tx_n=y_n$. 由于 A 是紧集，$\exists\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\},\text{s.t.}\,x_{n_k}\to x\in A$. 由于 T 连续，$Tx_{n_k}\to Tx\in T(A)$.$T(A)$ 是紧集.

41.$\{x_n\}$ 是 X 中的一个 Cauchy 序列，其子序列为 Cauchy 序列，故 A 为 X 中的完全有界集，则 A 是列紧集. 故 $\exists\{x_{n_k}\}\subset x_n,x_{n_k}\to x$，由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列，$x_n\to x\in X,n\to\infty$. 则 X 是完备的.

42.$\{z_n\}\subset A+B, z_n\to z.$，可设 $z_n=a_n+b_n, a_n\in A, b_n\in B$. 由于 A 是紧集，$\exists\{a_{n_k}\}\subset\{a_n\}, a_{n_k}\to a\in A$，由闭集的性质 $b_{n_k}=z_{n_k}-a_{n_k}\to(z-a)\in B. z=(z-a)+a\in A+B$.

43.（1）假设 $d(A,B)=0$，$d(A,B)=\inf\{d(x,y): x\in A, y\in B\}, d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}. \exists\{x_n\}\in A,\{y_n\}\in B, \text{s.t.} \lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0. A$ 是紧集，$\exists\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}, x_{n_k}\to x_n\in A, d(y_{n_k},x)\leqslant d(y_{n_k},x_{n_k})+d(x_{n_k},x)\to 0$，则 $\lim_{n\to\infty}y_{n_k}, B$ 为闭集，$x\in B, x\in A\cap B\neq\emptyset$. 矛盾.（2）取 $y=0; y=\frac{1}{x}, x>0$.

第二章：

2.（$\Rightarrow$）T 有界，假设 $A\subset X$ 是完全有界集，设 $\{y_n\}$ 是 $T(A)$ 中的序列，则 $\exists\{x_n\}\subset T(A), Tx_n=y_n$. 则 $\{x_n\}\subset A, \exists$Cauchy 子列 $\{x_{n_k}\}$，$\|Tx_{n_{k_1}}-Tx_{n_{k_2}}\|=\|T(x_{n_{k_1}}-Tx_{n_{k_2}})\|\leqslant c\|x_{n_{k_1}-x_{n_{k_2}}}\|$. 所以 $\{Tx_{n_k}\}$ 为 Cauchy 序列，即 $\{y_n\}$ 为 $\{Ty_n\}$ 的 Cauchy 序列.

（$\Leftarrow$）用反证法，假设 T 无界，则存在有界序列 $\{x_n\}$，不妨设 $\|x_n\|\leqslant M, n\geqslant 1, \text{s.t.} \|Tx_n\|>n$. 令 $z_n=\frac{x_n}{\sqrt{n}}$. 则 $\|z_n\|=\frac{1}{\sqrt{n}}\|x_n\|\to 0$. 令 $A=\{z_1,z_2,\cdots\}$ 则 A 为完全有界集. 而 $\|Tz_n\|=\|T(\frac{x_n}{\sqrt{n}})\|=\frac{1}{\sqrt{n}}\|Tx_n\|>\sqrt{n}\to\infty$. 则 $\{Tz_n\}$ 不有界，则也不完全有界，矛盾. 则 T 有界.

4.$\forall x=(x_i)\in l^p, \|Tx\|_p=(\sum_{i=1}^{\infty}|a_ix_i|^p)^{\frac{1}{p}}\leqslant(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{i\geqslant 1}|a_i||x_i|^p)^{\frac{1}{p}}=\|a\|_\infty\|x\|_p.$，反向不等式，由 $\forall\varepsilon>0, \exists n_0, \text{s.t.} |a_{n_0}|>\|a\|_\infty-\varepsilon$. 可设 $x^{(0)}=(0,0,\cdots,0,\operatorname{sgn}a_{n_0})\in l^p$. 证明 $\|Tx^{(0)}\|_p=|a_{n_0}|>\|a\|_\infty-\varepsilon$ 即可.

5.$|f(x)|=|\int_0^{\frac{1}{2}}x(t)\,\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)\,\mathrm{d}t|\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}x(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\|x\|$. 反向不等式可设：

$$x_n(t)=\begin{cases}1, \quad x\in[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}]\\ \frac{1}{n}(\frac{1}{2}-x), \quad x\in(\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}]\\ -1, \quad x\in(\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1].\end{cases}$$

可得 $|f(x_\varepsilon)|=1-2\varepsilon, \varepsilon\to 0$ 即可.

6.（1）正向不等式用 Holder 放缩，反向不等式构造：$x_0(t)=\sqrt{3}(t)$.（2）正向不等式由 $t\leqslant 1$ 直接放缩，反向不等式构造：$x_\varepsilon(t)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\chi_{[1-\varepsilon,1](t)}$，有 $\|Tx_\varepsilon\|_2=(\frac{1}{\varepsilon}\int_{1-\varepsilon}^1 t^2\,\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}\geqslant(\frac{1}{\varepsilon}\int_{1-\varepsilon}^1 1-\varepsilon^2\,\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}=1-\varepsilon$.