实变第三章总结

Author: Tony Xiang

Full Document can be acquired here:

https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%203/Chapter3.pdf

Full Source code can be downloaded here:

https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%203/Chapter3.tex

1 关于无穷的运算

$a \in \mathbb{R}^1$，则：

- 序关系：$-\infty < a < +\infty$.
- 加法：$a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = (\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty)$.
- 减法：$a - (\mp\infty) = (\pm\infty) - (\mp\infty) = (\pm\infty)$.
- 乘法：

$$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} (\pm\infty), & 0 < a < +\infty \\ 0, & a = 0 \\ (\mp\infty), & -\infty < a < 0 \end{cases}$$

.

- 除法：$\frac{a}{\pm\infty} = 0$.
- 绝对值：$|\pm\infty| = +\infty$.
- 未定义：$(\pm\infty) - (\pm\infty)$，$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$，应避免出现.

函数，实值函数.

以下设 $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

2 可测函数的性质

可测集：$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，$f$ 为定义在 E 上的函数，若 $\forall a \in \mathbb{R}^1$，$\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，称 f 为定义在 E 上的 Lebesgue 可测函数.

可测函数的示例：

- 常值函数是可测函数.
- χ_A 是可测函数 $\Leftrightarrow A$ 是可测函数. 特别地，Dirichlet 函数为可测函数.
- 连续函数为可测函数，这说明一个函数的可测性条件并不算强. 证明使用了 $\{x \in E : f(x) > a\} = E \cap G$，$G$ 为开集的结论.
- $[a, b]$ 上的单调函数为可测函数，证明将检验的集合分为区间，单点集和空集三类处理.

可测函数的基本性质：

- f 在 E 上可测，E_1 是 E 的可测子集，则 f 在 E_1 上可测. 证明使用:

$$\{x \in E_1 : f(x) > a\} = \{x \in E : f(x) > a\} \cap E_1$$

- E_1, E_2 是 E 的可测子集，$E = E_1 \cup E_2$，f 在 E_1 上可测，f 在 E_2 上可测，则 f 在 E 上可测. 证明使用：

$$\{x \in E : f(x) > a\} = \{x \in E_1 : f(x) > a\} \cup \{x \in E_2 : f(x) > a\}$$

简记符号：$\{x \in E : f(x) > a\} \to E(f > a)$.

可测函数（TFAE）：

- f 是 E 上的可测函数.
- $\forall a \in \mathbb{R}^1, E(f \geqslant a) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^1, E(f < a) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^1, E(f \leqslant a) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.
- $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), f^{-1}(A) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), E(f = +\infty) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

前四条互相证明可以由集合的运算来完成：

$$\begin{aligned}
E(f \geqslant a) &= \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > a - \frac{1}{k}) \\
E(f < a) &= E - E(f \geqslant a) \\
E(f \leqslant a) &= \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f < a + \frac{1}{k}) \\
E(f > a) &= E - E(f \leqslant a)
\end{aligned}$$

第一条与第五条的互相证明: 从左至右仅需了解即可，从右至左使用:

$$\begin{aligned}
&E(f = +\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > k) \\
&E(f > a) = E(a < f \leqslant +\infty) = f^{-1}((a, +\infty)) \cup E(f = +\infty)
\end{aligned}$$

注：$E(a < f < b), E(a \leqslant f < b), E(a < f <\leqslant b), E(a \leqslant f \leqslant b), E(f = -\infty)$ 均是可测集.

可测函数的运算封闭性：

注：规定若 $f(x), g(x)$ 在某一点 x 处取异号的 ∞ 为值，则规定 $f(x) + g(x) = 0$.

- （对数乘的封闭性）f 在 E 上可测，$c \in \mathbb{R}^1$，则 cf 在 E 上可测. 证明使用下面的

集合分解：

$$E(cf > a) = \begin{cases} E(f > \frac{a}{c}), & c > 0 \\ E(f < \frac{a}{c}), & c < 0 \\ E(0 > a), & c = 0 \end{cases}$$

•（对加法的封闭性）f, g 在 E 上可测，则 $f + g$ 在 E 上可测. 证明先对有限情形使用**有理数的稠密性和有理数集的可列性质**：

$$f(x) + g(x) > a \Leftrightarrow \exists r_n \in \mathbb{Q}^n, (f(x) > r_n) \wedge (g(x) > a - r_n)$$
$$E(f + g > a) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E(f > r_n) \cap E(g > a - r_n))$$

再考虑无限情况：

$$A = (E(f = +\infty) \cap E(g = -\infty)) \cup (E(f = -\infty) \cap E(g = +\infty))$$
$$E(f + g > a) = \{x \in E - A : f(x) + g(x) > a\} \cup \{x \in A : f(x) + g(x) > a\}$$

•（对乘法的封闭性）f, g 在 E 上可测，则 fg 在 E 上可测. 证明分两步，先证明 f^2 在 E 上可测，再得出题目结论.

$$E(f^2 > a) = \begin{cases} E, & a < 0 \\ E(f > \sqrt{a}) \cup E(f < \sqrt{a}), & a \geqslant 0 \end{cases}$$

$$2fg = (f + g)^2 - (f^2 + g^2)$$

•（对绝对值的封闭性）f 在 E 上可测，则 $|f|$ 在 E 上可测. 证明使用下面的集合分解：

$$E(|f| > a) = \begin{cases} E, & a < 0 \\ E(f > a) \cup E(f < -a), & a \geqslant 0 \end{cases}$$

函数的正部与负部：$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

正部与负部的性质：

•（非负性）$f^+(x) \geqslant 0, f^-(x) \geqslant 0$.

•（计算公式）$f(x) = f^+(x) - f^-(x), |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

•（可测性）$f^+(x), f^-(x)$ 在 E 上可测. 证明可以用集合分解来处理.

$$E(f^+ > a) = \begin{cases} E(f > a), & a \geqslant 0 \\ E, & a < 0 \end{cases}$$

$$E(f^- > a) = \begin{cases} E(f < -a), & a \geqslant 0 \\ E, & a < 0 \end{cases}$$

注意：引入正部与负部的原因是方便之后对积分的处理，即先考虑非负值.

可测函数列的性质：$\{f_n\}$ 是 E 上的可测函数列，则函数

$$\sup_{n\geqslant 1} f_n, \inf_{n\geqslant 1} f_n, \varlimsup_{n\to\infty} f_n, \varliminf_{n\to\infty} f_n \text{在 } E \text{ 上可测.}$$

特别地，$\forall x \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)\text{存在，则其在 } E \text{ 上可测.}$$

证明可以用集合分解来处理：

$$E(\sup_{n\geqslant 1} f_n > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > a)$$

$$E(\inf_{n\geqslant 1} f_n < a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n < a)$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\geqslant 1}\sup_{k\geqslant n} f_k(x)$$

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\geqslant 1}\inf_{k\geqslant n} f_k(x)$$

可测分割：设 $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 E 的互不相交的可测子集，且 $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$，则称 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 是 E 的一个可测分割.

简单函数：f 是定义在 E 上的函数，若存在 E 的一个可测分割 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 与实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得 $x \in A_i, f(x) = a_i (i = 1, 2, \cdots, k)$，则称 f 是定义在 E 上的简单函数.

$$f\text{是 } E \text{ 上的简单函数} \Leftrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}(x), x \in E$$

简单函数的性质：

- （对数乘的封闭性）f 是简单函数，则 cf 是简单函数. 证明将系数更改即可.
- （对加法的封闭性）f, g 是简单函数，则 $f+g$ 是简单函数. 证明时写出 E 的两个可测分割，做出 $\{A_i \cap B_j\}$ 亦为 E 的可测分割，并有 $f(x)+g(x) = a_i + b_j, x \in A_i \cap B_j$. 注意，这说明给定两个简单函数，**可以设它们的表达式中所对应的 E 的可测分割是一样的.**
- （复合运算的性质）φ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的**实值函数**，则 $\varphi(f(x))$ 是简单函数. 证明直接写出 $\varphi(f(x)) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(a_i)\chi_{A_i}(x)$.

函数列的单调性（仅说明单调增加性）：$\{f_n\}$ 是 E 上的一列非负可测函数，$\forall x \in E, f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant \cdots$，则称函数列 $\{f_n\}$ 是单调增加的. 记为 $\{f_n\} \nearrow$.

逼近定理：设 f 是 E 上的非负可测函数，则存在 E 上的单调增加的非负简单函数列 $\{f_n\}$，使得 $\{f_n\} \nearrow f (n \to \infty)$. 若 f 在 E 上是有界的，则 $f_n \rightrightarrows f$.（证明略）

逼近定理的推论：设 f 是 E 上的非负可测函数，则存在 E 上的非负简单函数列 $\{f_n\}$，使得 $\{f_n\} \to f(n \to \infty), |f_n| \leqslant |f|(n \geqslant 1)$. 若 f 在 E 上是有界的，则 $f_n \rightrightarrows f$. 证明可以将 f 分为正部与负部分别处理然后合并.

可测函数的构造性特征: f 是 E 上的函数, 则 f 可测 $\Leftrightarrow \exists$简单函数列$\{f_n\}, s.t. \{f_n(x)\} \to f(x)(x \in E, n \to \infty)$.

复合函数的可测性：f 是 E 上的实值可测函数，g 是 $\mathbb{R}^1$ 上的连续函数，则 $g(f(x))$ 在 E 上可测. 使用可测函数的构造性特征证明.

3 可测函数列的收敛

几乎处处成立的性质：$m(\{x \in E : \neg P(x)\}) = 0$，或 $\exists E_0 \subset E, m(E_0) = 0, s.t. \quad x \in E - E_0, P(x)$. 则称 $P(x)$ 在 E 上几乎处处成立，记为 $P(x) a.e.$于E.

几乎处处成立的示例：

- 几乎处处相等：f, g 为 E 上的函数，$m(E(f \neq g)) = 0$，则 $f = g, a.e.$于E.
- 几乎处处有限：f 为 E 上的函数，$m(E(|f| = \infty)) = 0$，则 f 在 E 上几乎处处有限.
- 本性有界：f 为 E 上的函数，$\exists M > 0, m(E(|f| > M)) = 0$，则 f 在 E 上本性有界.

注意几乎处处有限与本性有界的区别, 本性有界的结论更强.

f 在 E 上可测，$f = g, a.e.$于E，则 g 在 E 上可测. 即改变函数在一个零测集上的函数值，不改变函数的可测性. 证明使用以下的集合分解：

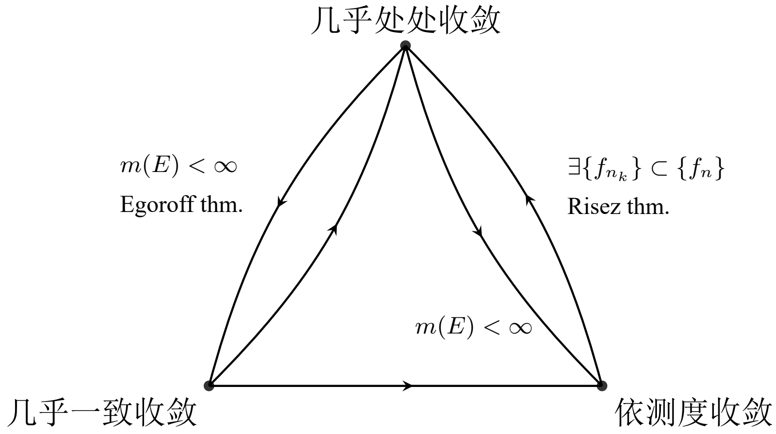
$$\begin{aligned} E(g > a) &= \{x \in E - E_0 : g(x) > a \cup x \in E_0 : g(x) > a\} \\ &= \{x \in E - E_0 : f(x) > a \cup x \in E_0 : g(x) > a\} \end{aligned}$$

可测函数的几种收敛：

- 几乎处处收敛：$\exists E_0 \subset E, m(E_0) = 0, s.t. \quad x \in E - E_0, f_n(x) \to f(x)$，记为 $f_n \to f \quad a.e.$于E.
- 依测度收敛：$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} m(E(|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon)) = 0$，记为 $f_n \xrightarrow{m} f$于E.
- 几乎一致收敛：$\forall \delta > 0, \exists E_\delta \subset E, m(E - E_\delta) < \delta, s.t. \quad f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in E_\delta$，$f_n \to f \quad a.un.$于$E$.

注意：依测度收敛是从整体的角度反映当 $n \to \infty$ 时 $\{f_n\}$ 的变化性态的一种收敛.

几种收敛的相互关系：



Risez 定理的一个应用：$m(E)<\infty$，则：

$$f_n \xrightarrow{m} f \Leftrightarrow \forall\{f_{n_k}\}\subset\{f_n\},\exists\{f_{n_{k'}}\}\subset\{f_{n_k}\},s.t.\quad f_{n_{k'}}\to f\quad a.e.$$

注意：我们期望将依测度收敛转化为几乎处处收敛，因为依测度收敛的形式较为复杂，而几乎处处收敛可以转化为数列的极限来处理，这样就大大地减少了分析的难度.

部分定理的证明写在附录中.

4 可测函数与连续函数的关系

Lusin 定理的引理：设 $F_1,F_2,\cdots,F_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 个互不相交的闭集，$F=\bigcup_{i=1}^k F_i$，则简单函数 $f(x)=\sum_{k=1}^k a_i\chi_{F_i}(x)$ 是 F 上的连续函数. 可以直接按连续性的定义证明：$\delta=d(x_0,\bigcup_{i\neq i_0}F_i),x_0\in\bigcup_{i\neq i_0}F_i$.

Lusin 定理：设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，f 是 E 上 $a.e.$ 有限的可测函数，则 $\forall\delta>0,\exists F_\delta\subset E,F_\delta$为闭集$,s.t.\quad m(E-F_\delta)<\delta$，且 f 是 F_δ 上的连续函数.

注意：此处的连续函数是限制在 F_δ 上的连续函数，并不能保证原函数的连续性.

Tietze 扩张定理：设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集，$f\in C(F),\exists g\in C(\mathbb{R}^n),s.t.\quad x\in F,g(x)=f(x)$，且 $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)|=\sup_{x\in F}|f(x)|$.（证明略）

Lusin 定理的加强形式：设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，f 是 E 上 $a.e.$ 有限的可测函数，则 $\forall\delta>0,\exists g\in C(\mathbb{R}^n),s.t.\quad m(\{x\in E:f(x)\neq g(x)\})<\delta$，且 f 是 F_δ 上的连续函数. 且 $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)|=\sup_{x\in F}|f(x)|$. 证明使用了原有的 Lusin 定理和 Tietze 扩张定理：

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)|\leqslant\sup_{x\in F}|f(x)|\leqslant\sup_{x\in E}|f(x)|.$$

$$\{x\in E:f(x)\neq g(x)\}\subset E-F$$

$$m(\{x\in E:f(x)\neq g(x)\})\leqslant m(E-F)<\delta$$

本节之后的内容不作要求，部分定理的证明写在附录中.

附录 A 布置的课后作业

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18(1), 19, 20(3)(4), 21, 22, 24, 25, 27.$

附录 B 课后作业的讲解

1. 取 $r_k > a, r_k \searrow a$，则 $E(f > a) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(f > r_k)$，反例可以这样构造，记 A为$[0,1]$ 上的不可测集，构造：

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3}, & x \in A \\ \sqrt{2}, & x \in [0,1] - A \end{cases}$$

2. 取 $n_0 > \frac{2}{b-a}$，（这样保证区间长度不会超出范围），利用 $\bigcup_{k=n_0}^{\infty} [\alpha, \beta] = (a, b)$.

3.$\forall a$，有 $E(\frac{1}{g} \geqslant a) = [E(g > 0) \cap (E(ag \leqslant 1))] \cup [E(g < 0) \cap (E(ag > 1))]$.

4.$\forall a$，有 $E(f > a) = [E(|f| > a) \cap E(f \geqslant 0)] \cup [E(|f| < -a) \cap E(f \leqslant 0)]$. 反例可以这样构造，记 A为$[0,1]$ 上的不可测集，构造：

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ -1, & x \in [0,1] - A \end{cases}$$

5. 利用开集构造定理.

6. 利用 Cauchy 收敛准则.

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{m=N}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} E(|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k})$$

.

7. 仿照一维的方法，用简单函数列逼近连续函数.

8. 由可导函数推出连续函数，补充定义 $f(x) = f(b), x > b$（这是为了之后定义的函数列不超出原函数的定义域），然后由导数定义：$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$. 则可构造函数列 $f_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}} \to f(x)$，证之可测. 此时说明了 f 在 $[a,b)$ 上可测，又有 $\{x \in [a,b] : f(x) > c\} = \{x \in [a,b) : f(x) > c\} \cup \{x = b : f(x) > c\}$. 可知 b 点处的值不影响函数的可测性.

9. 证 $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x+h) > a\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\} - h$.

11. 单调递增可以根据定义证明. 取 $t_n > t, t_n \searrow t$，由集列的单调性，$E(f \leqslant t) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f \leqslant t_n)$，再由测度的上连续性，$m(E(f \leqslant t)) = \lim_{n\to\infty} m(E(f \leqslant t_n))$.（由单调函数的性质，只需证明 $t_n \searrow t$ 的情况即可，一般情况下需要说明从任意方向趋近均成立.）

13. 设 $\{r_n\} \subset [a,b], \forall r_n \in \mathbb{Q}^1$. 证明

$$\{x \in E : g(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} x \in E : f(x, r_n) > c.$$

$(\Leftarrow) x \in E$，若 $\exists n, s.t. \quad f(x, r_n) > c$，则 $g(x) \geqslant f(x, r_n) > c$.

$(\Rightarrow) g(x) > c$，则 $\exists y_0 \in [a,b], s.t. \quad g(x) = f(x, y_0)$，由于 $f(x,y)$ 在 y_0 处连续，当 $\exists \delta, d(r_n, y) < \delta, s.t. \quad f(x, r_n) > c$.

14. 用反证法，由连续性 $\exists \delta, E(f \neq g) \supset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，$m(E(f \neq g)) \geqslant m((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = 2\delta > 0$.

16. 将无限的和分成两个部分：有限部分和余项. 这样避免了无限求和的问题.

$$m(E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)) \leqslant \sum_{k=1}^{k_0} m(x \in E_k : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} m(E_k).$$

17(1).$x \in E - E_1 \cap E_2, f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$.

17(2). 用两次 Risez 定理. 注意：第二次所选的子列应当是第一次所选的子列的子列.

18.$\delta \to \frac{1}{k}$. 为了表示方便可以用补集处理.

19. 用 Risez 定理.

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \lim_{k\to\infty} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

20(3).$E(|f_n - f| + |g_n - g| \geqslant \varepsilon) \subset E(|f_n - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}) \cup E(|g_n - g| \geqslant \frac{\varepsilon}{2})$

20(4). 用 Risez 定理的应用（书上的定理 3.12），再使用数列极限的乘法. 注意：第二次所选的子列应当是第一次所选的子列的子列.

22. 用 Risez 定理.$f_{n_k}(x) \to f(x) \quad a.e. \Rightarrow f_n(x) \to f(x) \quad a.e.$

24. 令 $E_0 = E(|f| = \infty) = 0.E_{0_n} = E(|f| > n)$，则 $E_{0_n} \searrow, E_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n_0}$. 由测度的上连续性,

$$\lim_{n\to\infty} m(E_0) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{0_n}) = m(E_0) = 0.$$

$\forall \delta > 0 \exists n_0, s.t. m(A_{n_0}) < \delta$，令 $m(E - A) = m(A_{n_0}) < \delta$ 即为所求.

25. 对 F^C 使用开集构造定理，将有限区间端点用线段相连，无限区间用有限的端点处的函数值延拓. 即：

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \quad x \in F \\ \frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i}(x - a_i) + f(a_i), \quad x \in (a_i, b_i) \\ f(a_i), \quad x \in (-\infty, a_i) \\ f(b_i), \quad x \in (b_i, +\infty) \end{cases}$$

27.$\delta \to \frac{1}{k}$. 从而得到 f 在 F 上可测且 $m(E - F) = 0$.

附录 C 一点闲谈

注意，以下内容仅代表本人观点。

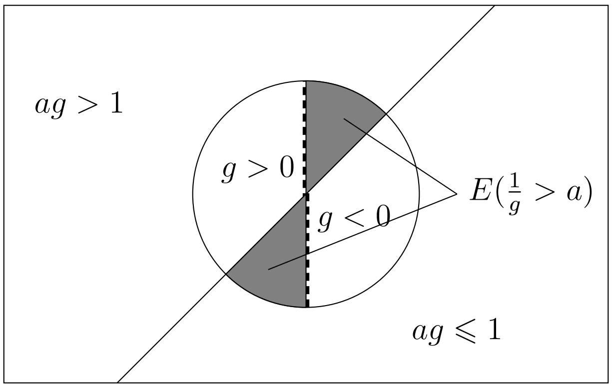
第三章是对可测函数的基本介绍，不涉及抽象测度空间的内容.

有一些有趣的套路，来跟大家分享一下:

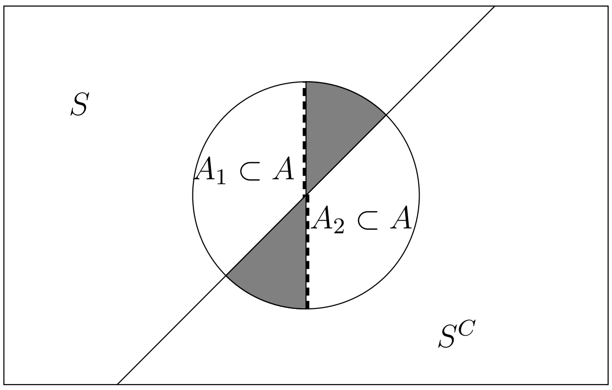
- 为避免对系数的讨论而对集合进行的拆分：例如在证明 g 可测可以推出 $\frac{1}{g}$ 可测，为了避免 a 的符号造成的讨论，我们使用了：$E(\frac{1}{g} > a) = (E(g > 0) \cap E(ag \leqslant 1)) \cup (E(g < 0) \cap E(ag > 1))$ 事实上，上面的式子等价于下面的分类讨论：

$$E(\frac{1}{g} > a) = \begin{cases} E(g > 0) \cap E(g < \frac{1}{a}), \quad a > 0 \\ E(g > 0), \quad a = 0 \\ E(g > 0) \cup (E(g < 0) \cap E(g < \frac{1}{a})), \quad a < 0 \end{cases}$$

改进的方法首先避免了特殊情况的问题，将 $a = 0$ 合并到了 $ag \leqslant 1$ 中. 然后是这个方法的核心部分，分割（以本题为例）：



总结一下这个方法的要点：首先需要两个前提，一是一个性质足够好的集合可以被拆为不相交的两部分，二是全空间可以被分成不相交的两部分，然后需要使得所求的集合满足“两交一并”的形式，这样就能使得相交的子集性质足够好，然后取并集之后的集合也足够好即可. 具体可以看以下的图示：

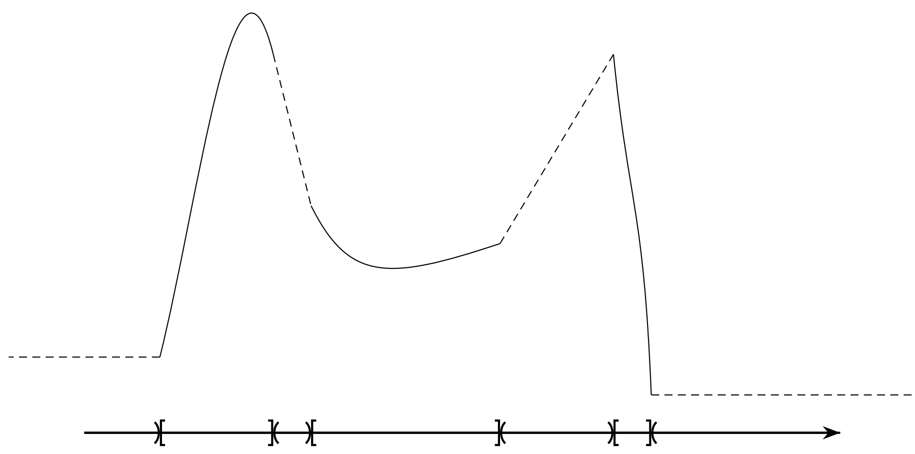


$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$
$$E = (A_1 \cap S) \cup (A_2 \cap S^C)$$

- Risez 定理的应用：**在一个子列之中再取一个子列**，对于**多个函数列**的收敛相当有效. 因为如果对于不同的函数列分别使用不同的子列，这些不同的子列之间可能不存在任何关系，从而无法在不同的子列之间创造联系. 当然在一个子列中取一个子列利用了一个原理，如果 $f_n \xrightarrow{m} f$，则 $\{f_n\}$ 的任意子列也依测度收敛于 f.
- 补集，可列交，可列并与新的集合构造套路：在第二章中，我们曾经提到了可测集的逼近性质，在那个时候，作出 $\varepsilon \to \frac{1}{k}$ 的代换，然后通过可列交可列并的构造，将可测集与 G_δ, F_σ 型集之间的差距变为一个零测集，但是到了第三章，随着三大收敛性质的引入，**一个函数列的主要性质从整个定义域缩小至整个定义域减去一个零测集**，这实际上是第二章的一个补集，所以有时候我们需要构造一个补集来解决一些收敛的问题，然后再用推广的 De Morgan 定理，加上可能会使用的测度的上连续性，下连续性，可列可加性与有限可加性，就可以解决问题了. 当然，有时需要测度有限的条件限制，有时则需要使用一个**新的构造**：$\delta \to \frac{\delta}{2^k}$，这是为了求和之后仍然保持 δ 的大小. 相关示例可以参照**附录 D** 的定理证明中的相关步骤.

还有一些需要注意的点：

- 对于反例的构造（其实应当推广到所有例子的构造），应当**实例化**，也就是在具体的定义域上，说明一个具体的值域，并保证所构造的定义域和值域与数学原理不矛盾.
- 对于例子的构造可以画一个示意图来辅助，但是注意这个示意图需要包含题目要求的全部要素，同时尽量简单. 这时需要注意思维的严谨性. 如习题第 25 题可以这样作图：



- 每个条件都有它的作用，如果存在没有使用的条件，需要注意证明的正确性.
- 注意数分知识在实变中的运用.

补充依测度收敛的一些性质（习题 $17, 20, 21$）：

- $f_n \xrightarrow{m} f, f_n \xrightarrow{m} g \Rightarrow f = g \quad a.e.$

- 一些封闭性质：

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{m} f, g_n \xrightarrow{m} g &\Rightarrow |f_n| \xrightarrow{m} |f| \\ &\Rightarrow cf_n \xrightarrow{m} cf \\ &\Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow{m} f + g \\ (m(E) < \infty) &\Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{m} fg \\ (m(E) < \infty) &\Rightarrow |f_n|^p \xrightarrow{m} |f|^p, p > 0. \end{aligned}$$

附录 D 部分定理的证明与相关反例的构造

D.1 收敛关系的一些相互推导

定理 1 设 $m(E) < \infty$，$f_n \to f \quad a.e.$于E，$\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)) = 0.$$

证明 1 对于给定的 $x_0 \in E$，若 $\forall n \geqslant 1, \exists k \geqslant n, s.t. \quad |f_k(x_0) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$，则 $f_k(x_0)$ 不收敛于 $f(x_0)$，这表明：

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k - f| \geqslant \varepsilon) \subset \{x \in E : f_k(x) \nrightarrow f(x)\}.$$

由于 $f_n \to f \quad a.e.$于E，上式右边的集为零测集，故

$$m(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k - f| \geqslant \varepsilon)) = 0.$$

而 $m(E) < \infty$，由测度的上连续性，有

$$\lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k * f| \geqslant \varepsilon)) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k - f| \geqslant \varepsilon)) = 0.$$

定理 2 (Egoroff 定理) 设 $m(E) < \infty$，$f_n \to f \quad a.e.$，则 $f_n \to f \quad a.un.$

证明 2 由定理 1，$\forall k \geqslant 1$，

$$\lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{i=n}^{\infty} E(|f_i - f| \geqslant \frac{1}{k})) = 0.$$

于是对任意给定的 $\delta > 0$，可以依次选取自然数 $k_1, k_2, \cdots, n_k, \cdots, s.t.$

$$m(\bigcup_{i=n}^{\infty} E(|f_i - f| \geqslant \frac{1}{k})) < \frac{\delta}{2^k}, k = 1, 2, \cdots.$$

令
$$E_\delta=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=n_k}^{\infty}E(|f_i-f|<\frac{1}{k}).$$

由 *De Morgan* 公式得，
$$E-E_\delta=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=n_k}^{\infty}E(|f_i-f|\geqslant\frac{1}{k})$$
$$\begin{aligned}m(E-E_\delta)&=m(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=n_k}^{\infty}E(|f_i-f|\geqslant\frac{1}{k}))\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(\bigcup_{i=n_k}^{\infty}E(|f_i-f|\geqslant\frac{1}{k}))\\&<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^k}=\delta.\end{aligned}$$

所以 $\forall\varepsilon>0,\exists k,s.t.\quad\frac{1}{k}<\varepsilon$. 则当 $i\geqslant n_k,\forall x\in E$,
$$|f_i(x)-f(x)|<\frac{1}{k}<\varepsilon.$$

即 $f_n\rightrightarrows f$ 于 E_δ，即 $f_n\rightrightarrows f\quad a.un.$于$E$.

定理 3 设 $m(E)<\infty$，若 $f_n\to f\quad a.e.$，则 $f_n\xrightarrow{m}f$.

证明 3 由定理 1，$\forall\varepsilon>0$，
$$\lim_{n\to\infty}m(\bigcup_{k=n}^{\infty}E(|f_k-f|\geqslant\varepsilon))=0.$$

则由测度单调性，
$$0\leqslant m(E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon))\leqslant m(\bigcup_{k=n}^{\infty}E(|f_k-f|\geqslant\varepsilon)).$$

令 $n\to\infty$，得到
$$\lim_{n\to\infty}E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)=0\text{，即}f_n\xrightarrow{m}f.$$

定理 4 (Risez 定理) 若 $f_n\xrightarrow{m}f$，则 $\exists\{f_{n_k}\}\subset\{f_n\},s.t.\quad f_{n_k}\to f_n\quad a.e.$

证明 4 $f_n\xrightarrow{m}f$，则 $\forall\varepsilon>0,\delta>0,\exists n\geqslant1,s.t.\quad n\geqslant N,m(E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon))<\delta$. 于是 $\forall k\in\mathbb{N}^*$，令 $\varepsilon=\frac{1}{k},\delta=\frac{1}{2^k}$，可以依次选取自然数 $n_1,n_2,\cdots,n_k,\cdots,s.t.$
$$m(E(|f_{n_k}-f|\geqslant\frac{1}{k}))<\frac{1}{2^k}.$$

下面证明 $f_{n_k} \to f \quad a.e.$
令
$$E_0 = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} E(|f_k - f| \geqslant \frac{1}{k}).$$
对每个 $N = 1, 2, \cdots$, 有
$$m(E_0) \leqslant m(\bigcup_{k=N}^{\infty} E(|f_{n_k} - f| \leqslant \frac{1}{k})) \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} m(E(|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{k})) < \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{N-1}}.$$
令 $N \to \infty$，可知 $m(E_0) = 0$. 由 *De Morgan* 公式得，
$$E - E_0 = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} E(|f_k - f| \geqslant \frac{1}{k}).$$
所以 $\forall x \in E - E_0, \exists N \geqslant 1, s.t. \quad k \geqslant N$，
$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}.$$
故 $f_{n_k}(x) \to f(x)$，则在 E 上 $f_{n_k} \to f \quad a.e.$

定理 5 (Risez 定理的一个应用)

$$f_n \xrightarrow{m} f \Leftrightarrow \forall \{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}, \exists \{f_{n_{k'}}\} \subset \{f_{n_k}\}, s.t. \quad f_{n_{k'}} \to f \quad a.e.$$

证明 5（$\Rightarrow$）设 $f_n \xrightarrow{m} f$，则 $\forall \{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$，$f_{n_k} \xrightarrow{m} f$（直接按照定义证明），由定理 3（*Risez* 定理），$\exists \{f_{n_{k'}}\} \subset \{f_{n_k}\}, s.t. \quad f_{n_{k'}} \to f \quad a.e.(k' \to \infty)$.
（$\Leftarrow$）用反证法，若 $\{f_n\} \overset{m}{\nrightarrow} f$，$\exists \varepsilon > 0, s.t. \quad m(E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)) \nrightarrow 0$，于是 $\exists \delta > 0, \{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}, s.t.$
$$m(E(|f_{n_k} - f| \geqslant \varepsilon)) \geqslant \delta, \quad k = 1, 2, \cdots.$$
另一方面，由假设条件，$\exists \{f_{n_{k'}}\} \subset \{f_{n_k}\}, s.t. \quad f_{n_{k'}} \to f \quad a.e.$
因为 $m(E) < \infty$，由定理 2，$f_{n_{k'}} \xrightarrow{m} f$，从而得出矛盾. 从而 $f_n \xrightarrow{m} f$.

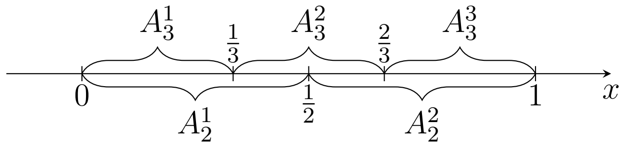
D.2 相关反例的构造

例 1 (几乎处处收敛不能推出依测度收敛) $\forall n \in \mathbb{R}^*$, 令
$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, n] \\ 0, & x \in (n, \infty). \end{cases}$$
$f_n \to 1, a.e.$于$[0, n)$，但 $f_n \overset{m}{\nrightarrow} 1$.

例 2 (依测度收敛不能推出几乎处处收敛) $\forall n \in \mathbb{N}^*$，将区间 $[0,1]$ 分为 n 个等长的小区间，记

$$A_n^i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}], i = 1, 2, \cdots, n.$$

将 $\{A_n^i\}$ 按照下图所示的顺序 $A_1^1, A_2^1, A_2^2, A_3^1, A_3^2, A_3^3, \cdots$ 重新编号记为 $\{E_n\}$,显然 $m(E_n) \to 0, n \to \infty$，令 $f_n(x) = \chi_{E_n}(x), x \in [0,1]$.



对任意 $\varepsilon > 0$，（不妨设 $\varepsilon < 1$），由于 $n \to \infty$，$m(E(|f_n| \geqslant \varepsilon)) = m(E_n) \to 0$. $f_n \xrightarrow{m} 0$, 于$[0,1]$，但 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上处处不收敛. 因为有无限个 n 使得 $f_n(x_0) = 1$，又有无限个 n 使得 $f_n(x_0) = 0$.

D. 3 Lusin 定理

定理 6 (Lusin 定理) 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，f 是 E 上 $a.e.$ 有限的可测函数，则 $\forall \delta > 0, \exists F_\delta \subset E, F_\delta$为闭集$, s.t.\quad m(E - F_\delta) < \delta$，且 f 是 F_δ 上的连续函数.

证明 6 分两步证明.
第 1 **步**：先设 f 为简单函数，即

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}(x),$$

其中 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 是 E 的一个可测分割. 由可测集的逼近定理，$\forall \delta > 0, i = 1, 2, \cdots, k$，$\exists F_i \subset E_i$，$F_i$ 为闭集，使得

$$m(E_i - F_i) < \frac{\delta}{2^k}, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

令

$$F_\delta = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$$

，则 F_δ 是 E 的闭子集，且

$$m(E - F_\delta) = m(\bigcup_{i=1}^{k}(E_i - F_i)) = \sum_{i=1}^{k} m(E_i - F_i) < \delta.$$

$$f(x)|_{F_\delta} = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{F_i}(x)，且\ f \in C(F_\delta).$$

第 2 步：一般情形. 设 f 是 E 上 *a.e.* 有限的可测函数. 由于 $E(|f|=\infty)=0$，记之为 E_0，则这个零测集不会影响 $m(E-F_\delta)<\delta$. 所以我们可以设 f 是处处有限的. 若令

$$g(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}\text{，逆变换为：}f(x)=\frac{g(x)}{1-|g(x)|}.$$

则 g 是有界可测函数，并且若 $g\in C(F_\delta)$，$f\in C(F_\delta)$. 故不妨设 f 有界. 则由**第 1 步**的结论可知 $\exists\{f_k\}, f_k \rightrightarrows f$ 于$E.\forall\delta>0,\forall f_k,\exists F_k\subset E$，$F_k$ 为闭集，*s.t.* $f_k\in C(F_k)$，且 $m(F-F_k)<\frac{\delta}{2^k}$.

令

$$F_\delta=\bigcap_{i=1}^{k}F_i,$$

则 F_δ 是 E 的闭子集，且

$$m(E-F_\delta)=m(\bigcup_{k=1}^{\infty}E-F_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(E-F_k)<\delta.$$

由于 $f_k\in C(F_\delta)$，且 $f_k\rightrightarrows f$ 于F_δ. 所以 $f|_{F_\delta}\in C(F_\delta)$.