实变第三章总结

Author: Tony Xiang

Full Document can be acquired here:

https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%203/Chapter3.pdf

Full Source code can be downloaded here:

https://github.com/T0nyX1ang/RealAnaly-Documents/blob/master/Chapter%203/Chapter3.tex

1 关于无穷的运算

$a \in \mathbb{R}^1$，则：

- 序关系：$-\infty < a < +\infty$.
- 加法：$a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = (\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty)$.
- 减法：$a - (\mp\infty) = (\pm\infty) - (\mp\infty) = (\pm\infty)$.
- 乘法：

$$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} (\pm\infty), & 0 < a < +\infty \\ 0, & a = 0 \\ (\mp\infty), & -\infty < a < 0 \end{cases}$$

.

- 除法：$\frac{a}{\pm\infty} = 0$.
- 绝对值：$|\pm\infty| = +\infty$.
- 未定义：$(\pm\infty) - (\pm\infty)$，$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$，应避免出现.

函数，实值函数.

以下设 $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

2 可测函数的性质

可测集：$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，$f$ 为定义在 E 上的函数，若 $\forall a \in \mathbb{R}^1$，$\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，称 f 为定义在 E 上的 Lebesgue 可测函数.

可测函数的示例：

- 常值函数是可测函数.
- χ_A 是可测函数 $\Leftrightarrow A$ 是可测函数. 特别地，Dirichlet 函数为可测函数.
- 连续函数为可测函数，这说明一个函数的可测性条件并不算强. 证明使用了 $\{x \in E : f(x) > a\} = E \cap G$，$G$ 为开集的结论.
- $[a, b]$ 上的单调函数为可测函数，证明将检验的集合分为区间，单点集和空集三类处理.

可测函数的基本性质：

- f 在 E 上可测，E_1 是 E 的可测子集，则 f 在 E_1 上可测. 证明使用:

$$\{x\in E_1:f(x)>a\}=\{x\in E:f(x)>a\}\cap E_1$$

- E_1,E_2 是 E 的可测子集，$E=E_1\cup E_2$，f 在 E_1 上可测，f 在 E_2 上可测，则 f 在 E 上可测. 证明使用：

$$\{x\in E:f(x)>a\}=\{x\in E_1:f(x)>a\}\cup\{x\in E_2:f(x)>a\}$$

简记符号：$\{x\in E:f(x)>a\}\to E(f>a)$.

可测函数（TFAE）：

- f 是 E 上的可测函数.
- $\forall a\in\mathbb{R}^1,E(f\geqslant a)\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.
- $\forall a\in\mathbb{R}^1,E(f<a)\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.
- $\forall a\in\mathbb{R}^1,E(f\leqslant a)\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.
- $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),f^{-1}(A)\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n),E(f=+\infty)\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

前四条互相证明可以由集合的运算来完成：

$$\begin{aligned}
&E(f\geqslant a)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f>a-\frac{1}{k})\\
&E(f<a)=E-E(f\geqslant a)\\
&E(f\leqslant a)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f<a+\frac{1}{k})\\
&E(f>a)=E-E(f\leqslant a)
\end{aligned}$$

第一条与第五条的互相证明: 从左至右仅需了解即可，从右至左使用:

$$\begin{aligned}
&E(f=+\infty)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f>k)\\
&E(f>a)=E(a<f\leqslant+\infty)=f^{-1}((a,+\infty))\cup E(f=+\infty)
\end{aligned}$$

注：$E(a<f<b),E(a\leqslant f<b),E(a<f<\leqslant b),E(a\leqslant f\leqslant b),E(f=-\infty)$ 均是可测集.

可测函数的运算封闭性：

注：规定若 $f(x),g(x)$ 在某一点 x 处取异号的 ∞ 为值，则规定 $f(x)+g(x)=0$.

- （对数乘的封闭性）f 在 E 上可测，$c\in\mathbb{R}^1$，则 cf 在 E 上可测. 证明使用下面的

集合分解：

$$E(cf > a) = \begin{cases} E(f > \frac{a}{c}), & c > 0 \\ E(f < \frac{a}{c}), & c < 0 \\ E(0 > a), & c = 0 \end{cases}$$

•（对加法的封闭性）f, g 在 E 上可测，则 $f+g$ 在 E 上可测. 证明先对有限情形使用**有理数的稠密性和有理数集的可列性质**：

$$f(x)+g(x) > a \Leftrightarrow \exists r_n \in \mathbb{Q}^n, (f(x) > r_n) \wedge (g(x) > a - r_n)$$
$$E(f+g > a) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E(f > r_n) \cap E(g > a - r_n))$$

再考虑无限情况：

$$A = (E(f=+\infty) \cap E(g=-\infty)) \cup (E(f=-\infty) \cap E(g=+\infty))$$
$$E(f+g > a) = \{x \in E - A : f(x)+g(x) > a\} \cup \{x \in A : f(x)+g(x) > a\}$$

•（对乘法的封闭性）f, g 在 E 上可测，则 fg 在 E 上可测. 证明分两步，先证明 f^2 在 E 上可测，再得出题目结论.

$$E(f^2 > a) = \begin{cases} E, & a < 0 \\ E(f > \sqrt{a}) \cup E(f < \sqrt{a}), & a \geqslant 0 \end{cases}$$

$$2fg = (f+g)^2 - (f^2 + g^2)$$

•（对绝对值的封闭性）f 在 E 上可测，则 $|f|$ 在 E 上可测. 证明使用下面的集合分解：

$$E(|f| > a) = \begin{cases} E, & a < 0 \\ E(f > a) \cup E(f < -a), & a \geqslant 0 \end{cases}$$

函数的正部与负部：$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

正部与负部的性质：

•（非负性）$f^+(x) \geqslant 0, f^-(x) \geqslant 0$.

•（计算公式）$f(x) = f^+(x) - f^-(x), |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

•（可测性）$f^+(x), f^-(x)$ 在 E 上可测. 证明可以用集合分解来处理.

$$E(f^+ > a) = \begin{cases} E(f > a), & a \geqslant 0 \\ E, & a < 0 \end{cases}$$

$$E(f^- > a) = \begin{cases} E(f < -a), & a \geqslant 0 \\ E, & a < 0 \end{cases}$$

注意：引入正部与负部的原因是方便之后对积分的处理，即先考虑非负值.

可测函数列的性质：$\{f_n\}$ 是 E 上的可测函数列，则函数

$$\sup_{n\geqslant 1} f_n, \inf_{n\geqslant 1} f_n, \varlimsup_{n\to\infty} f_n, \varliminf_{n\to\infty} f_n \text{在 } E \text{ 上可测.}$$

特别地，$\forall x\in E$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)\text{存在，则其在 } E \text{ 上可测.}$$

证明可以用集合分解来处理：

$$E(\sup_{n\geqslant 1} f_n > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > a)$$

$$E(\inf_{n\geqslant 1} f_n < a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n < a)$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\geqslant 1}\sup_{k\geqslant n} f_k(x)$$

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\geqslant 1}\inf_{k\geqslant n} f_k(x)$$

可测分割：设 $E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 E 的互不相交的可测子集，且 $\bigcup_{i=1}^k A_i$，则称 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 是 E 的一个可测分割.

简单函数：f 是定义在 E 上的函数，若存在 E 的一个可测分割 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 与实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得 $x\in A_i, f(x) = a_i (i = 1, 2, \cdots, k)$，则称 f 是定义在 E 上的简单函数.

$$f\text{是 } E \text{ 上的简单函数} \Leftrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i\chi_{A_i}(x), x\in E$$

简单函数的性质：

- （对数乘的封闭性）f 是简单函数，则 cf 是简单函数. 证明将系数更改即可.
- （对加法的封闭性）f, g 是简单函数，则 $f+g$ 是简单函数. 证明时写出 E 的两个可测分割，做出 $\{A_i\cap B_j\}$ 亦为 E 的可测分割，并有 $f(x)+g(x) = a_i+b_j, x\in A_i\cap B_j$. 注意，这说明给定两个简单函数，**可以设它们的表达式中所对应的 E 的可测分割是一样的.**
- （复合运算的性质）φ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的**实值函数**，则 $\varphi(f(x))$ 是简单函数. 证明直接写出 $\varphi(f(x)) = \sum_{i=1}^k \varphi(a_i)\chi_{A_i}(x)$.

函数列的单调性（仅说明单调增加性）：$\{f_n\}$ 是 E 上的一列非负可测函数，$\forall x\in E, f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant\cdots$，则称函数列 $\{f_n\}$ 是单调增加的. 记为 $\{f_n\}\nearrow$.

逼近定理：设 f 是 E 上的非负可测函数，则存在 E 上的单调增加的非负简单函数列 $\{f_n\}$，使得 $\{f_n\}\nearrow f (n\to\infty)$. 若 f 在 E 上是有界的，则 $f_n\rightrightarrows f$.（证明略）

逼近定理的推论：设 f 是 E 上的非负可测函数，则存在 E 上的非负简单函数列 $\{f_n\}$，使得 $\{f_n\} \to f(n \to \infty), |f_n| \leqslant |f|(n \geqslant 1)$. 若 f 在 E 上是有界的，则 $f_n \rightrightarrows f$. 证明可以将 f 分为正部与负部分别处理然后合并.

可测函数的构造性特征: f 是 E 上的函数, 则 f 可测 $\Leftrightarrow \exists$简单函数列$\{f_n\}, s.t. \{f_n(x)\} \to f(x)(x \in E, n \to \infty)$.

复合函数的可测性：f 是 E 上的实值可测函数，g 是 $\mathbb{R}^1$ 上的连续函数，则 $g(f(x))$ 在 E 上可测. 使用可测函数的构造性特征证明.

3 可测函数列的收敛

几乎处处成立的性质：$m(\{x \in E : \neg P(x)\}) = 0$，或 $\exists E_0 \subset E, m(E_0) = 0, s.t. \quad x \in E - E_0, P(x)$. 则称 $P(x)$ 在 E 上几乎处处成立，记为 $P(x) a.e.$于E.

几乎处处成立的示例：

- 几乎处处相等：f, g 为 E 上的函数，$m(E(f \neq g)) = 0$，则 $f = g, a.e.$于E.
- 几乎处处有限：f 为 E 上的函数，$m(E(|f| = \infty)) = 0$，则 f 在 E 上几乎处处有限.
- 本性有界：f 为 E 上的函数，$\exists M > 0, m(E(|f| > M)) = 0$，则 f 在 E 上本性有界.

注意几乎处处有限与本性有界的区别, 本性有界的结论更强.

f 在 E 上可测，$f = g, a.e.$于E，则 g 在 E 上可测. 即改变函数在一个零测集上的函数值，不改变函数的可测性. 证明使用以下的集合分解：

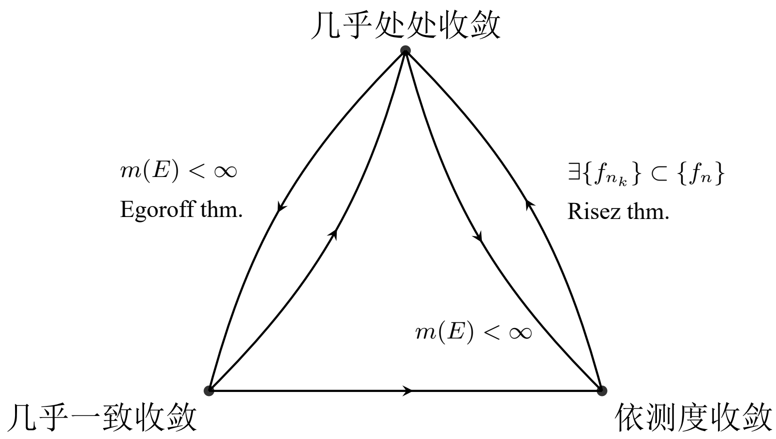
$$\begin{aligned} E(g > a) &= \{x \in E - E_0 : g(x) > a \cup x \in E_0 : g(x) > a\} \\ &= \{x \in E - E_0 : f(x) > a \cup x \in E_0 : g(x) > a\} \end{aligned}$$

可测函数的几种收敛：

- 几乎处处收敛：$\exists E_0 \subset E, m(E_0) = 0, s.t. \quad x \in E - E_0, f_n(x) \to f(x)$，记为 $f_n \to f \quad a.e.$于E.
- 依测度收敛：$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} m(E(|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon)) = 0$，记为 $f_n \xrightarrow{m} f$于E.
- 几乎一致收敛：$\forall \delta > 0, \exists E_\delta \subset E, m(E - E_\delta) < \delta, s.t. \quad f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in E_\delta$，$f_n \to f \quad a.un.$于$E$.

注意：依测度收敛是从整体的角度反映当 $n \to \infty$ 时 $\{f_n\}$ 的变化性态的一种收敛.

几种收敛的相互关系：



Risez 定理的一个应用：$m(E)<\infty$，则：

$$f_n \xrightarrow{m} f \Leftrightarrow \forall\{f_{n_k}\}\subset\{f_n\},\exists\{f_{n_{k'}}\}\subset\{f_{n_k}\},s.t.\quad f_{n_{k'}}\to f \quad a.e.$$

注意：我们期望将依测度收敛转化为几乎处处收敛，因为依测度收敛的形式较为复杂，而几乎处处收敛可以转化为数列的极限来处理，这样就大大地减少了分析的难度.

部分定理的证明写在附录中.

4 可测函数与连续函数的关系

Lusin 定理的引理：设 $F_1,F_2,\cdots,F_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 个互不相交的闭集，$F=\bigcup_{i=1}^k F_i$，则简单函数 $f(x)=\sum_{k=1}^k a_i\chi_{F_i}(x)$ 是 F 上的连续函数. 可以直接按连续性的定义证明：$\delta=d(x_0,\bigcup_{i\neq i_0}F_i),x_0\in\bigcup_{i\neq i_0}F_i$.

Lusin 定理：设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，f 是 E 上 $a.e.$ 有限的可测函数，则 $\forall\delta>0,\exists F_\delta\subset E,F_\delta$为闭集$,s.t.\quad m(E-F_\delta)<\delta$，且 f 是 F_δ 上的连续函数.

注意：此处的连续函数是限制在 F_δ 上的连续函数，并不能保证原函数的连续性.

Tietze 扩张定理：设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集，$f\in C(F),\exists g\in C(\mathbb{R}^n),s.t.\quad x\in F,g(x)=f(x)$，且 $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)|=\sup_{x\in F}|f(x)|$.（证明略）

Lusin 定理的加强形式：设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，f 是 E 上 $a.e.$ 有限的可测函数，则 $\forall\delta>0,\exists g\in C(\mathbb{R}^n),s.t.\quad m(\{x\in E:f(x)\neq g(x)\})<\delta$，且 f 是 F_δ 上的连续函数. 且 $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)|=\sup_{x\in F}|f(x)|$. 证明使用了原有的 Lusin 定理和 Tietze 扩张定理：

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)|\leqslant\sup_{x\in F}|f(x)|\leqslant\sup_{x\in E}|f(x)|.$$

$$\{x\in E:f(x)\neq g(x)\}\subset E-F$$

$$m(\{x\in E:f(x)\neq g(x)\})\leqslant m(E-F)<\delta$$

本节之后的内容不作要求，部分定理的证明写在附录中.

附录 A 布置的课后作业

$1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,13,14,15,16,17,18(1),19,20(3)(4),21,22,24,25,27.$

附录 B 课后作业的讲解

附录 C 部分定理的证明与相关反例的构造

C.1 收敛关系的一些相互推导

定理 1 设 $m(E)<\infty$，$f_n\to f\quad a.e.$于E，$\forall\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}m(\bigcup_{k=n}^{\infty}E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon))=0.$$

证明 1 对于给定的 $x_0\in E$，若 $\forall n\geqslant 1,\exists k\geqslant n,s.t.\quad |f_k(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$，则 $f_k(x_0)$ 不收敛于 $f(x_0)$，这表明：

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E(|f_k-f|\geqslant\varepsilon)\subset\{x\in E:f_k(x)\nrightarrow f(x)\}.$$

由于 $f_n\to f\quad a.e.$于E，上式右边的集为零测集，故

$$m(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E(|f_k-f|\geqslant\varepsilon))=0.$$

而 $m(E)<\infty$，由测度的上连续性，有

$$\lim_{n\to\infty}m(\bigcup_{k=n}^{\infty}E(|f_k*f|\geqslant\varepsilon))=m(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E(|f_k-f|\geqslant\varepsilon))=0.$$

定理 2 (Egoroff 定理) 设 $m(E)<\infty$，$f_n\to f\quad a.e.$，则 $f_n\to f\quad a.un.$

证明 2 由定理 1，$\forall k\geqslant 1$，

$$\lim_{n\to\infty}m(\bigcup_{i=n}^{\infty}E(|f_i-f|\geqslant\frac{1}{k}))=0.$$

于是对任意给定的 $\delta>0$，可以依次选取自然数 $k_1,k_2,\cdots,n_k,\cdots,s.t.$

$$m(\bigcup_{i=n}^{\infty}E(|f_i-f|\geqslant\frac{1}{k}))<\frac{\delta}{2^k},k=1,2,\cdots.$$

令

$$E_\delta=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=n_k}^{\infty}E(|f_i-f|<\frac{1}{k}).$$

由 *De Morgan* 公式得，

$$
\begin{aligned}
E - E_\delta &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=n_k}^{\infty} E(|f_i - f| \geqslant \frac{1}{k}) \\
m(E - E_\delta) &= m(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=n_k}^{\infty} E(|f_i - f| \geqslant \frac{1}{k})) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(\bigcup_{i=n_k}^{\infty} E(|f_i - f| \geqslant \frac{1}{k})) \\
&< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.
\end{aligned}
$$

所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists k, s.t. \quad \frac{1}{k} < \varepsilon$. 则当 $i \geqslant n_k, \forall x \in E$,

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

即 $f_n \rightrightarrows f$ 于 E_δ，即 $f_n \rightrightarrows f \quad a.un.$于$E$.

定理 3 设 $m(E) < \infty$，若 $f_n \to f \quad a.e.$，则 $f_n \xrightarrow{m} f$.

证明 3 由定理 1，$\forall \varepsilon > 0$，

$$\lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k - f| \geqslant \varepsilon)) = 0.$$

则由测度单调性，

$$0 \leqslant m(E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)) \leqslant m(\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k - f| \geqslant \varepsilon)).$$

令 $n \to \infty$，得到

$$\lim_{n\to\infty} E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = 0\text{，即} f_n \xrightarrow{m} f.$$

定理 4 (Risez 定理) 若 $f_n \xrightarrow{m} f$，则 $\exists \{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}, s.t. \quad f_{n_k} \to f_n \quad a.e.$

证明 4 $f_n \xrightarrow{m} f$，则 $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0, \exists n \geqslant 1, s.t. \quad n \geqslant N, m(E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)) < \delta$. 于是 $\forall k \in \mathbb{N}^*$，令 $\varepsilon = \frac{1}{k}, \delta = \frac{1}{2^k}$，可以依次选取自然数 $n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots, s.t.$

$$m(E(|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{k})) < \frac{1}{2^k}.$$

下面证明 $f_{n_k} \to f \quad a.e.$
令

$$E_0 = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} E(|f_k - f| \geqslant \frac{1}{k}).$$

对每个 $N=1,2,\cdots$, 有

$$m(E_0)\leqslant m(\bigcup_{k=N}^{\infty}E(|f_{n_k}-f|\leqslant\frac{1}{k}))\leqslant\sum_{k=N}^{\infty}m(E(|f_{n_k}-f|\geqslant\frac{1}{k}))<\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{N-1}}.$$

令 $N\to\infty$，可知 $m(E_0)=0$. 由 *De Morgan* 公式得，

$$E-E_0=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{k=N}^{\infty}E(|f_k-f|\geqslant\frac{1}{k}).$$

所以 $\forall x\in E-E_0,\exists N\geqslant 1,s.t.\quad k\geqslant N$，

$$|f_{n_k}(x)-f(x)|<\frac{1}{k}.$$

故 $f_{n_k}(x)\to f(x)$，则在 E 上 $f_{n_k}\to f\quad a.e.$

定理 5 (Risez 定理的一个应用)

$$f_n\xrightarrow{m}f\Leftrightarrow\forall\{f_{n_k}\}\subset\{f_n\},\exists\{f_{n_{k'}}\}\subset\{f_{n_k}\},s.t.\quad f_{n_{k'}}\to f\quad a.e.$$

证明 5（$\Rightarrow$）设 $f_n\xrightarrow{m}f$，则 $\forall\{f_{n_k}\}\subset\{f_n\}$，$f_{n_k}\xrightarrow{m}f$（直接按照定义证明），由定理 3（*Risez* 定理），$\exists\{f_{n_{k'}}\}\subset\{f_{n_k}\},s.t.\quad f_{n_{k'}}\to f\quad a.e.(k'\to\infty)$.
（$\Leftarrow$）用反证法，若 $\{f_n\}\overset{m}{\nrightarrow}f,\exists\varepsilon>0,s.t.\quad m(E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon))\nrightarrow 0$，于是 $\exists\delta>0,\{f_{n_k}\}\subset\{f_n\},s.t.$

$$m(E(|f_{n_k}-f|\geqslant\varepsilon))\geqslant\delta,\quad k=1,2,\cdots.$$

另一方面，由假设条件，$\exists\{f_{n_{k'}}\}\subset\{f_{n_k}\},s.t.\quad f_{n_{k'}}\to f\quad a.e.$
因为 $m(E)<\infty$，由定理 2，$f_{n_{k'}}\xrightarrow{m}f$，从而得出矛盾. 从而 $f_n\xrightarrow{m}f$.

C.2 相关反例的构造

例 1 (几乎处处收敛不能推出依测度收敛) $\forall n\in\mathbb{R}^*$, 令

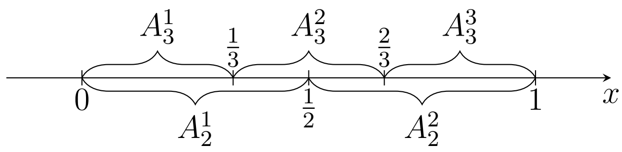
$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,n]\\ 0, & x\in(n,\infty).\end{cases}$$

$f_n\to 1,a.e.$于$[0,n)$，但 $f_n\overset{m}{\nrightarrow}1$.

例 2 (依测度收敛不能推出几乎处处收敛) $\forall n\in\mathbb{N}^*$，将区间 $[0,1]$ 分为 n 个等长的小区间，记

$$A_n^i=[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}],i=1,2,\cdots,n.$$

将 $\{A_n^i\}$ 按照下图所示的顺序 $A_1^1,A_2^1,A_2^2,A_3^1,A_3^2,A_3^3,\cdots$ 重新编号记为 $\{E_n\}$,显然 $m(E_n)\to 0,n\to\infty$，令 $f_n(x)=\chi_{E_n}(x),x\in[0,1]$.



对任意 $\varepsilon > 0$，（不妨设 $\varepsilon < 1$），由于 $n \to \infty$，$m(E(|f_n| \geqslant \varepsilon)) = m(E_n) \to 0$. $f_n \xrightarrow{m} 0$, 于$[0,1]$，但 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上处处不收敛. 因为有无限个 n 使得 $f_n(x_0) = 1$，又有无限个 n 使得 $f_n(x_0) = 0$.

C.3 Lusin 定理

定理 6 (Lusin 定理) 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，f 是 E 上 $a.e.$ 有限的可测函数，则 $\forall \delta > 0, \exists F_\delta \subset E, F_\delta$为闭集$, s.t. \quad m(E - F_\delta) < \delta$，且 f 是 F_δ 上的连续函数.

证明 6 分两步证明.
第 1 **步**：先设 f 为简单函数，即

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}(x),$$

其中 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 是 E 的一个可测分割. 由可测集的逼近定理，$\forall \delta > 0, i = 1, 2, \cdots, k$，$\exists F_i \subset E_i$，$F_i$ 为闭集，使得

$$m(E_i - F_i) < \frac{\delta}{2^k}, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

令

$$F_\delta = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$$

，则 F_δ 是 E 的闭子集，且

$$m(E - F_\delta) = m(\bigcup_{i=1}^{k}(E_i - F_i)) = \sum_{i=1}^{k} m(E_i - F_i) < \delta.$$

$$f(x)|_{F_\delta} = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{F_i}(x)\text{，且 } f \in C(F_\delta).$$

第 2 **步**：一般情形. 设 f 是 E 上 $a.e.$ 有限的可测函数. 由于 $E(|f| = \infty) = 0$，记之为 E_0，则这个零测集不会影响 $m(E - F_\delta) < \delta$. 所以我们可以设 f 是处处有限的. 若令

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}\text{，逆变换为：} f(x) = \frac{g(x)}{1 - |g(x)|}.$$

则 g 是有界可测函数，并且若 $g \in C(F_\delta)$，$f \in C(F_\delta)$. 故不妨设 f 有界. 则由**第** 1 **步**的结论可知 $\exists \{f_k\}, f_k \rightrightarrows f$于$E. \forall \delta > 0, \forall f_k, \exists F_k \subset E$，$F_k$ 为闭集，$s.t.$ $f_k \in C(F_k)$，且

$m(F-F_k)<\frac{\delta}{2^k}$.
令
$$F_\delta=\bigcap_{i=1}^{k}F_i,$$
则 F_δ 是 E 的闭子集，且
$$m(E-F_\delta)=m(\bigcup_{k=1}^{\infty}E-F_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(E-F_k)<\delta.$$
由于 $f_k\in C(F_\delta)$，且 $f_k\rightrightarrows f$于F_δ. 所以 $f|_{F_\delta}\in C(F_\delta)$.