Rapport d'activité de recherche

Paul-Henry Leemann

1er avril 2020

Au cours de ces dernières années j'ai travaillé en théorie géométrique, combinatoire et asymptotique des groupes ainsi que sur la dynamique et les limites de graphes. J'ai plus précisément orienté mes recherches selon 4 axes principaux, distincts mais non sans liens entre eux. Les graphes de Schreier sont un thème sous-jacent de ces recherches.

Le premier thème de recherche traite de la transitivité des graphes ainsi que des revêtements. Je donne dans [18, 17] une caractérisation algébrique de la transitivité d'un graphe de Schreier et répond partiellement à une conjecture de Benjamini concernant les graphes qui peuvent être revêtu par un graphe de Cayley donné. De manière surprenante, ce sujet est aussi lié aux groupes simples.

Le deuxième thème, très lié au premier, s'intéresse plus particulièrement au phénomène de rigidité dans les graphes de Cayley. Dans [20], nous montrons avec M. de la Salle que la plupart des groupes G de type fini admettent un système de générateurs S tels que le groupe d'automorphismes du graphe de Cayley $\mathrm{Cay}(G,S)$ soit égal à G.

Un troisième thème de recherche concerne les graphes de Bruijn et leurs différentes généralisations. Des physiciens ont récemment montré, [1], que, à la limite, ces graphes partageaient certaines caractéristiques des graphes de Cayley du groupe de l'allumeur de réverbère. Avec mes coauteurs, nous donnons dans [10] une explication satisfaisante à ce phénomène, en terme de limite de graphe. Cela permet de mieux comprendre le comportement des graphes de Bruijn, mais aussi de pouvoir facilement faire des calculs sur le groupe de l'allumeur de réverbère. Au passage, on aborde le produit tensoriel de graphes et certains systèmes dynamiques.

Le dernier thème de recherche part lui de l'étude des sous-groupes du groupe de Grigorchuk, avec une attention toute particulière portée aux sous-groupes faiblement maximaux. D'une part, [2, 17], on montre l'existence de nombreux tels sous-groupes dans tous groupes à branches, d'autre part, [19], je donne une description complètes de ses sous-groupes dans le cas du groupe de Grigorchuk.

1 Revêtements de graphes transitifs et simplicité forte des groupes

Les résultats de cette section font l'objet du chapitre 3 de ma thèse et ont pour l'essentiel été publiés dans [18].

Le point de départ des recherches menées dans cette section a été la question suivante de Benjamini. Existe-t-il un graphe de Cayley d'un groupe infini de type fini (différent de $\mathbf{Z}$) qui ne recouvre aucun autre graphe infini transitif ? Si dans cette question on remplace « graphe transitif » par graphe de Cayley et qu'on demande que le revêtement préserve l'étiquetage (on parlera de *revêtement fort*), alors la réponse est oui. Il suffit de prendre n'importe quel groupe simple (ou plus généralement juste infini) infini et de type fini.

Le cas général est plus compliqué. Une première étape a consisté à montrer que tout graphe transitif et localement fini était un graphe de Schreier d'un produit libre de la forme $F_n * (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{*m}$, où F_n est libre de rang n. Pour ce faire, je montre notamment :

Proposition 1. *Soit Γ un graphe simple, connexe, localement fini, transitif de valence d impaire. Alors Γ admet un couplage parfait.*

Étant donné deux sous-groupes A et B d'un groupe, le graphe de Schreier de A revêt fortement celui de B si et seulement si A est contenu dans (un conjugué) de B. Pour répondre à la question de Benjamini, il est donc utile d'avoir une caractérisation algébrique de la transitivité d'un graphe de Schreier. Dans [18], je donne une caractérisation de l'isomorphisme entre deux graphes de Schreier en terme du système de générateur et des sous-groupes. La preuve de cette caractérisation est essentiellement combinatoire. Dans les cas des graphes de degré pair, cette caractérisation peut être reformulée dans des termes purement graphe-théoriques, sans réalisation préalable des graphes comme des graphes de Schreier, et peut être pensé comme un résultat de rigidité à la Mostow. Un corollaire immédiat est la caractérisation de la transitivité d'un graphe de Schreier en fonction du sous-groupe et du système de générateurs. De tels sous-groupes généralisent la notion de sous-groupes normaux et sont appelés *transitif par les longueurs*. Dans [18] et ma thèse, j'en débute l'étude, exhibant en particulier leur dépendance au système de générateurs ou le fait que l'intersection de deux sous-groupes transitifs par les longueurs est toujours transitive par les longueurs. Cette étude permet au passage de donner une nouvelle caractérisation des sous-groupes normaux des groupes de type fini. Ce sont les sous-groupes de G tels que pour tout système de générateurs de taille au plus $\mathrm{rang}(G)+1$, le graphe de Schreier soit transitif.

La notion de sous-groupes transitifs par les longueurs induit une notion de groupe fortement simple : tout groupe ne possédant aucun tels sous-groupes propres non-triviaux. Je prouve que cette notion est strictement plus forte que la simplicité : les groupes alternés A_n ne la satisfont pas pour $n \geq 7$ impair. Finalement, je montre que les monstres de Tarski sont fortement simple[1], pour se faire on utilise le fait que tous leurs sous-groupes non-triviaux sont cyclique d'ordre premier. Ceci permet de répondre partiellement à la question de Benjamini. En effet, par ce qui précède, tout graphe de Cayley d'un monstre de Tarski ne revêt fortement aucun autre graphe infini transitif.

Au passage, dans [18] je montre aussi certaines généralisations du fait que si H est un quotient de G par un sous-groupe fini, alors leur deux graphes de Schreier sont quasi-isométriques.

1. Ils sont même plus que cela : leurs graphes de Schreier ne sont même pas quasi-transitif, et ce pour tout système fini de générateurs.

2 Rigidité des graphes de Cayley

Les résultats de cette section proviennent d'un travail en commun avec M. de la Salle, [20].

Un graphe de Cayley Γ d'un groupe G est une *représentation graphique régulière* si les seuls automorphismes de Γ proviennent de la multiplication à gauche par les éléments de G. De tels graphes ont aussi peu d'automorphismes que possible tout en étant des graphes de Cayley. Les groupes abéliens d'exposant au moins 3 ne possèdent pas de représentation graphique régulière (prendre l'application inverse), de même que les groupes dicycliques généralisés. La question suivante a occupée de nombreux mathématiciens à la fin des années 1970 :

Conjecture 2 (Watkins [25])**.** *Il existe en entier n tel que tout groupe de cardinalité au moins n et qui n'est ni abélien d'exposant au moins 3 ni dicyclique généralisé admet une représentation graphique régulière.*

Plusieurs cas particulier de cette conjecture ont déjà été prouvés. C'est en particulier le cas pour les groupes finis, suite aux travaux de Imrich, Watkins, Nowitz, Hetzel et Godsil dans les années 1970, [14, 5, 27, 22, 26, 24, 15, 16, 13, 6]. De plus, les groupes finis exceptionnels sont complètement compris : il en existe 13, tous de cardinalité au plus 32, cf. [6]. D'autre part, Watkins à démontré [25] que cette conjecture est vrai pour les produits libres de groupes.

Avec M. de la Salle nous avons traité le cas infini, plus précisément nous avons besoin de l'existence d'un élément d'ordre suffisamment grand (possiblement infini).

Théorème 3. *[20] Soit G un groupe de type fini qui n'est ni abélien ni dicyclique généralisé. Si G a un élément d'ordre au moins $(2\operatorname{rank}(G))^{36}$ alors il admet une représentation graphique régulière.*

Pour prouver ce fait, nous explorons deux notions de rigidités. Le graphe $\operatorname{Cay}(G, s)$ est dit *orientation-rigide* si tout automorphisme préservant l'étiquetage des arêtes non-orientées préserve aussi l'étiquetage des arêtes orientées et *couleur-rigide* si tout automorphisme préserve l'étiquetage des arêtes non-orientées. Il est ainsi clair qu'une représentation graphique régulière pour G est un graphe qui est à la fois orientation-rigide et couleur-rigide. Nous montrons tout d'abords que pour un groupe G sont équivalent le fait de n'être ni abélien d'exposant au moins 3 ni dicyclique généralisé et le fait que pour tout ensemble de générateurs S le graphe $\operatorname{Cay}(G, S^{\leq 3})$ est orientation-rigide. Nous montrons ensuite que si G est de type fini engendré par S et possède un élément d'ordre suffisamment grand (dépendant de $|S|$), alors il existe un système de générateurs $S \subset T$ tel que $\operatorname{Cay}(G, T)$ soit couleur-rigide.

Notre méthode nous permet aussi d'obtenir un analogue du théorème 3 pour les graphes dirigés ainsi que des résultats de rigidité sur le graphes revêtu par $\operatorname{Cay}(G, T)$:

Théorème 4 ([20])**.** *Pour tout premier $p > 263$ et tout monstre de Tarski $\mathcal{T}_p$, il existe un ensemble de générateurs T de taille 12 tel que si $\psi\colon \operatorname{Cay}(\mathcal{T}_p, T) \to \Delta$ est un revêtement dont les restrictions sur les boules de taille 1 sont des isomorphismes, alors ou ψ est* *l'identité, ou Δ est infini et l'action de son groupe d'automorphisme sur les sommets à des orbites finies. En particulier, si ψ n'est pas trivial, alors Δ n'est pas transitif, ni même quasi-transitif.*

Finalement, nous obtenons aussi le résultat suivant

Proposition 5. *Soit G un groupe de type fini. Si G possède un élément d'ordre au moins $3 \cdot 10^8 \operatorname{rank}(G)^{12}$ alors il admet un graphe de Cayley avec groupe d'automorphisme discret.*

Cela répond partiellement à

Conjecture 6 ([3])**.** *Tout groupe de type fini admet un graphe de Cayley avec un groupe d'automorphisme discret.*

Remarquons qu'une réponse positive à cette question implique, [3], que tout groupe de présentation finie admet un graphe de Cayley Γ *local-global rigide.* [2]

3 Graphes de Bruijn et généralisations

Une partie des résultats de cette section à fait l'objet d'une publication dans [10] et est un travail en commun avec R. Grigorchuk et T. Nagnibeda. La partie sur la complexité est un travail en commun avec T. Nagnibeda. Finalement, le calcul du nombre d'orbites dans les graphes toile d'araignée ainsi que la partie sur les graphes de Rauzy sont un travail personnel présent dans ma thèse.

Les graphes toile d'araignée on été introduit en 1959 par N. Ikeno pour étudier les réseaux téléphoniques. Dans les années 1990, N. Pippenger à démontré qu'ils possédaient d'intéressantes propriétés de percolations. Dans [1], Balram et Dhar montrent que les mesures spectrales des graphes toile d'araignée $\mathcal{S}_{2,N,M}$ converge, pour N et M tendant ensemble vers l'infini, vers la mesure spectrale du graphe $\mathrm{DL}(2,2)$, le graphe de Cayley du groupe de l'allumeur de réverbère $\mathcal{L}_2 \coloneqq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \wr \mathbf{Z}$. Avec mes coauteurs nous avons montré que ce comportement provient d'un phénomène plus général.

Théorème 7 ([10])**.** *Pour tout k, la limite de Benjamini-Schramm (ou limite faible) des $\mathcal{S}_{k,N,M}$ est $\mathrm{DL}(k,k)$, et ce indépendamment de la manière dont l'on fait tendre N et M vers l'infini.*

La preuve de ce fait se déroule comme suit. Premièrement, on constate que les versions orientées $\vec{\mathcal{S}}_{k,N,M}$ sont isomorphes à des produits tensoriels de cycles $\vec{C}_M$ et de graphe de Bruijn $\vec{\mathcal{B}}_{K,N}$. On travail ensuite sur les produits tensoriels pour montrer qu'il suffit de s'occuper du cas $\vec{\mathcal{B}}_{K,N}$ qui correspond à $M = 1$. Puis on montre que le graphe de Cayley de $\mathcal{L}_k$ est approximé par les graphes de Schreier de son action sur l'arbre enraciné k-régulier. Finalement, on prouve que $\vec{\mathcal{B}}_{K,N}$ est isomorphe au graphe de Schreier de l'action de $\mathcal{L}_k$ sur le N-ème niveau de l'arbre. Pour se faire, on utilise les graphes de lignes.

2. i.e. $\exists r$ tel que si Δ est un graphe dont les r-boules sont isomorphes à celles de Γ, alors Γ revêt Δ.

La structure de produit tensoriel des $\vec{\mathcal{S}}_{k,N,M}$ nous permet aussi de généraliser un argument dû à Delorme et Tillich, [4], afin de calculer la mesure spectrale de $\mathcal{S}_{k,N,M}$. On s'intéresse ensuite rapidement à la complexité (le nombre d'arbres couvrants) des graphes toile d'araignée et à leur fonction zeta spectrale. On montre en particulier que les fonctions zeta des graphes toile d'araignée convergent vers la fonction zeta de $\mathrm{DL}(k,k)$. Ceci nous permet de calculer le déterminant de Fuglede-Kadison de $\mathrm{DL}(k,k)$.

On utilise ensuite la structure de produit tensoriel pour prouver plusieurs résultats sur les graphes toiles d'araignées. Certains sont des généralisations de propriétés connues, mais ce n'est pas le cas de tous. En particulier, on montre que $\mathcal{S}_{k,N,M}$ est isomorphe à deux graphes de Schreier distincts de $\mathcal{L}_k$ (les graphes sous-jacents sont les mêmes, mais l'étiquetage diffère) et on discute de leur transitivité. Je montre que $\mathcal{S}_{k,N,M}$ et $\vec{\mathcal{S}}_{k,N,M}$ sont transitifs si et seulement si $M \geq N$ et donne des bornes sur le nombre d'orbites lorsque $M < N$. Pour ce faire, on utilise essentiellement la structure de produit tensoriel pour les bornes supérieures, et celle de graphe de Schreier pour les bornes inférieures.

Finalement, je discute du cas des graphe de Rauzy qui correspondent à un sous-décalage là où les graphes de Bruijn correspondent au décalage total. Dans ce cadre, les graphes ne sont plus forcément régulier, il est donc impossible d'utiliser des actions de groupes ou des graphes de Schreier dans les preuves. Néanmoins, il est possible de montrer que la limite des graphes de Rauzy est supportée sur des produits horocycliques d'arbres (pas forcément régulier). Les preuves ici consistent à placer les graphes de Rauzy sur les étages d'un arbre non-régulier construit par insertion de digit au milieu (et non à droite), puis d'utiliser Perron-Frobenius. Finalement, des calculs explicites sont faits pour les graphes de Rauzy sur l'alphabet binaire. Le seul cas ne découlant pas immédiatement de ce qui précède est le cas du sous-déplacement de Fibonacci (correspondant au mot interdit $\{11\}$). Dans un projet en cours avec T. Nagnibeda et V. Kaimanovich, nous remplaçons cette dernière partie dans un contexte plus théorique. Cela nous permet d'obtenir une description de la limites des graphes de Rauzy associé à un sous-décalage en terme de l'unique mesure d'entropie maximale associé au dit décalage.

4 Structure des sous-groupes des groupes branchés

Les groupes branchés sont des groupes agissant sur un arbre enraciné tel que les stabilisateurs des sommets soient « gros ». Ils jouent un rôle important (à côté des groupes simples et des groupes héréditairement juste infini) [8] dans la classification des groupes *justes infinis* (les groupes infinis dont tous les quotients propres sont finis). Une des motivations pour étudier de tels groupes est que tout groupe de type fini admet un quotient juste infini. Les groupes auto-similaires apparaissent eux naturellement en dynamique [21] et sont des examples de groupes d'automates. Bien que différentes, ces deux classes de groupes ont une large intersection. Parmi les groupes branchés auto-similaires, on retrouve des groupes de torsion, des groupes sans torsion, des groupes de croissance intermédiaire et des groupes de croissance exponentielle, des groupes moyennables et des groupes non-moyennables. Les groupes branchés auto-similaires sont une source féconde d'exemples et de contre-exemples en théorie géométrique des groupe et l'étude de ces groupes à fait l'objet de beaucoup d'intérêts ces dernières années.

Formellement, si T est un arbre enraciné d-régulier (la racine a degré d et tous les autres sommets $d+1$), un sous-groupe $G \leq \mathrm{Aut}(T)$ est *branché* si l'action induite $G \curvearrowright \partial T$ sur le bord de l'arbre est minimal et si pour tout n le sous-groupe

$$\prod_{v \text{ à distance } n \text{ de la racine}} \mathrm{Rist}_G(v)$$

a indice fini dans G, où $\mathrm{Rist}_G(v) = \bigcap_{w \text{ n'est pas un descendant de } v} \mathrm{Stab}_G(w)$ est le *stabilisateur rigide* de v, c'est-à-dire sous-groupe des éléments de G agissant trivialement en-dehors de T_v l'ensemble des descendants de v.

Parmi les exemples populaires de groupes branchés auto-similaires, on retrouve le premier groupe de Grigorchuk $\mathcal{G}$ (qui agit sur T_2 l'arbre 2-régulier). Il s'agit du premier exemple de groupe de croissance intermédiaire (répondant à une question de Milnor, 1968) ainsi que de groupe moyennable mais non-élémentairement moyennable (répondant à une question de Day, 1957) [9, 7]. La structure des sous-groupes de $\mathcal{G}$ a été étudiée par plusieurs auteurs. On connait ainsi les stabilisateurs des sommets de T_2 et des points du bord ∂T_2, les stabilisateurs rigides, les centralisateurs, les sous-groupes de petit indice [11, 17] et les sous-groupes maximaux (qui sont 7, tous d'indice 2 par [23]).

L'étape suivante est l'étude des *sous-groupes faiblement maximaux*, c'est-à-dire des sous-groupes maximaux parmi les sous-groupes d'indice infini. Le point de départ de cet étude est la démonstration par Bartholdi et Grigorchuk que dans un groupe branché, tous les sous-groupes paraboliques (les stabilisateurs des points de ∂T) sont faiblement maximaux, infinis et distincts. En partant de là, plusieurs problèmes naturels se présentent. Existe-t-il d'autres sous-groupes faiblement maximaux ? Si oui, ont-ils de bonnes propriétés, et est-il possible de les classer ?

Avec K. Bou-Rabee et T. Nagnibeda nous avons montré

Théorème 8 ([2])**.** *Soit G un groupe branché. Alors tout sous-groupe fini Q de G est contenu dans un nombre non-dénombrable de sous-groupes faiblement maximaux.*

En particulier, pour le groupe de Grigorchuk ou les groupes spinaux généralisés, si on prend $Q = \langle a \rangle$ on obtient qu'il existe un nombre non-dénombrable de sous-groupes faiblement maximaux qui ne sont pas paraboliques. En effet, a ne stabilisant aucun rayon il ne peut pas être contenu dans des sous-groupes paraboliques. La preuve pour Q quelconque est un argument diagonal et possède des similitudes avec la preuve de Margulis et Soĭfer pour l'existence d'un nombre non-dénombrable de sous-groupes maximaux d'indices infinis dans les groupes linéaires non virtuellement résoluble. On suppose qu'il n'existe qu'un nombre dénombrable de sous-groupes faiblement maximaux $(W_i)_{i\geq 1}$. Il s'agit de trouver un groupe $H = H_1$ ayant de « bonnes propriétés » et un élément g_1 n'appartenant pas à W_1 tel que $H_2 \coloneqq \langle H_1, g_1\rangle$ ait toujours ces fameuses bonnes propriétés. Au final, on obtient $H = \bigcup_i H_i$ un sous-groupe d'indice infini qui n'est contenu dans aucun des W_i, d'où la contradiction. Dans le cas particulier des groupes branchés, une des « bonnes propriétés » est que $\mathrm{Stab}_{H_i}(n)$ fixe un sous-arbre, pour un certain n qui ne dépend pas de i. Ceci assure que H_i soit d'indice infini. Il reste ensuite à vérifier qu'on peut toujours trouver g_i et itérer le processus. Au passage, nous prouvons que les sous-groupes faiblement maximaux dans un groupe de torsion sont auto-normalisant (égal à leur normalisateur).

Dans [2], nous montrons aussi qu'il existe des sous-groupes faiblement maximaux vivant aussi bas que l'on veut dans l'arbre. Plus précisément : pour tout sommet v de l'arbre, il existe un sous-groupe faiblement maximal W_v tel que W_v stabilise v, mais ne stabilise aucun sommet situé sur un niveau plus bas.

Dans ma thèse, je démontre aussi une légère amélioration du résultat de Margulis et Soĭfer pour le cas spécifiques des groupes libres non-abéliens. Dans ce cas, il existe un continuum de sous-groupes maximaux d'indice infini. Le « gain » par rapport à la version non-dénombrable est faible (voir nul si l'on croit à l'hypothèse du continu), mais le réel avantage réside dans la preuve qui est bien plus courte et facile à comprendre que celle du cas générale. En effet, puisque tout graphe $2d$-régulier est un graphe de Schreier du groupe F_d, l'existence de sous-groupes maximaux d'indice infinis revient à trouver des graphes infinis $2d$-régulier qui ne revêtent fortement aucun graphe, a part eux-mêmes et la rose. Ce dernier critère est relativement aisé à vérifier.

À la fin de ma thèse j'investigue rapidement les graphes de Schreier des sous-groupes de $\mathcal{G}$, montrant en particulier qu'il existe des sous-groupes faiblement maximaux dont le graphe de Schreier n'est pas isomorphe, même en oubliant l'étiquetage, au graphe de Schreier d'un sous-groupe parabolique.

Finalement, dans un travail récent [19] j'identifie deux familles de sous-groupes faiblement maximaux dans les groupes branchés. La première famille est une généralisation des sous-groupes paraboliques et consiste en les stabilisateurs (ensemblistes) $\mathrm{Stab}_G(C)$ de fermés non-ouvert C du bord ∂T de l'arbre tel que $\mathrm{Stab}_G(C)$ agit minimalement sur C. Ces sous-groupes, que j'appelle *paraboliques généralisés* partagent de nombreuses propriétés avec les sous-groupes paraboliques. La deuxième famille contient les sous-groupes faiblement maximaux avec une *structure à blocs*. Heuristiquement, un sous-groupe de G a une structure à blocs si, à indice fini près, il est un produit de copies de G (certaines inclues diagonalement). Dans un travail en préparation [12], nous démontrons avec R. Grigorchuk et T. Nagnibeda que pour le groupe de Grigorchuk, les sous-groupes avec une structure à blocs coincident avec les sous-groupes de type fini. Grâce à cela, je peux démontrer le résultat de classification suivant :

Théorème 9 ([19])**.** *Soit $\mathcal{G}$ le groupe de Grigorchuk. Les sous-groupes faiblement maximaux de $\mathcal{G}$ appartiennent à l'une des deux classes suivantes : paraboliques généralisés et faiblement maximaux avec une structure à blocs. Ces deux classes admettent de nombreuses caractérisations, comme montré dans la table 1.*

En fait, les résultat de [19] ne concernent pas seulement le groupe de Grigorchuk, mais plus généralement les groupes branchés auto-réplicants ayant la *propriétés d'induction des sous-groupes* (que nous ne définirons pas explicitement ici). Le principal résultat de [12] est le suivant :

Théorème 10 ([12])**.** *Soit G un groupe branché et auto-réplicant. Alors G à la propriété d'induction des sous-groupes si et seulement si ses sous-groupes de type fini coincident avec ses sous-groupes avec une structure à blocs.*

parabolique généralisé	structure à blocs
pas de type fini	de type fini
$\forall v$: $\mathrm{Rist}_W(v)$ est infini	$\exists v$: $\mathrm{Rist}_W(v) = \{1\}$
$W \curvearrowright \partial T$ a une infinité de fermetures d'orbites	$W \curvearrowright \partial T$ a un nombre fini de fermetures d'orbites
$\forall n \exists v \in \mathcal{L}_n : [\pi_v(\mathcal{G}) : \pi_v(W)]$ est infini	$\exists n \forall v \in \mathcal{L}_n : [\pi_v(\mathcal{G}) : \pi_v(W)]$ est fini

Table 1 – Les deux classes de sous-groupes faiblement maximaux du groupe de Grigorchuk. Ici $\pi_v(\mathcal{G}) = \pi_v(\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(v))$ est la projection (aussi appelée section) des éléments de $\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(v)$ sur le groupe des automorphismes du sous-arbre enraciné à v alors que $\mathcal{L}_n$ dénote le n-ème level de l'arbre (l'ensemble des sommets à distance n de la racine).

Références

[1] Ajit C. Balram et Deepak Dhar. « Non-perturbative corrections to mean-field critical behavior : the spherical model on a spider-web graph ». In : *J. Phys. A* 45.12 (2012), p. 125006, 14. issn : 1751-8113. doi : 10.1088/1751-8113/45/12/125006. url : http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/45/12/125006 (cf. p. 1, 4).

[2] Khalid Bou-Rabee, Paul-Henry Leemann et Tatiana Nagnibeda. « Weakly maximal subgroups in regular branch groups ». In : *J. Algebra* 455 (2016), p. 347-357. issn : 0021-8693. doi : 10.1016/j.jalgebra.2016.02.009. url : http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.02.009 (cf. p. 1, 6, 7).

[3] Mikael de la Salle et Romain Tessera. « Characterizing a vertex-transitive graph by a large ball ». In : *J. Topol.* 12.3 (2019), p. 705-743 (cf. p. 4).

[4] Charles Delorme et Jean-Pierre Tillich. « The spectrum of de Bruijn and Kautz graphs ». In : *European J. Combin.* 19.3 (1998), p. 307-319. issn : 0195-6698. doi : 10.1006/eujc.1997.0183. url : http://dx.doi.org/10.1006/eujc.1997.0183 (cf. p. 5).

[5] P. Erdős et A. Rényi, éd. *Combinatorial theory and its applications. I-III.* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 4. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1970, Vol I : 390 pp., Vol. II : i–iv and pp. 395-799, Vol III : i–iii and pp. 803-1201 (cf. p. 3).

[6] Christopher D. Godsil. « GRRs for nonsolvable groups ». In : *Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II (Szeged, 1978).* T. 25. Colloq. Math. Soc. János Bolyai. North-Holland, Amsterdam-New York, 1981, p. 221-239 (cf. p. 3).

[7] Rostislav I. Grigorchuk. « Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means ». In : *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 48.5 (1984), p. 939-985. issn : 0373-2436 (cf. p. 6).

[8] Rostislav I. GRIGORCHUK. « Just infinite branch groups ». In : *New horizons in pro-p groups*. T. 184. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000, p. 121-179 (cf. p. 5).

[9] Rostislav I. GRIGORCHUK. « On Burnside's problem on periodic groups ». In : *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 14.1 (1980), p. 53-54. ISSN : 0374-1990 (cf. p. 6).

[10] Rostislav I. GRIGORCHUK, Paul-Henry LEEMANN et Tatiana NAGNIBEDA. « Lamplighter groups, de Brujin graphs, spider-web graphs and their spectra ». In : *J. Phys. A* 49.20 (2016), p. 205004, 35. ISSN : 1751-8113. DOI : 10.1088/1751-8113/49/20/205004. URL : http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/49/20/205004 (cf. p. 1, 4).

[11] Rostislav I. GRIGORCHUK et John S. WILSON. « A structural property concerning abstract commensurability of subgroups ». In : *J. London Math. Soc. (2)* 68.3 (2003), p. 671-682. ISSN : 0024-6107. DOI : 10.1112/S0024610703004745. URL : http://dx.doi.org/10.1112/S0024610703004745 (cf. p. 6).

[12] Rostistlav I. GRIGORCHUK, Paul-Henry LEEMANN et Tatiana NAGNIBEDA. « Finitely generated subgroups of the first Grigorchuk group and of the Gupta-Sidki 3-group ». In preparation (cf. p. 7).

[13] D. HETZEL. « Über reguläre graphische Darstellung von auflösbaren Gruppen ». Thèse de doct. Technische Universität Berlin, 1976 (cf. p. 3).

[14] Wilfried IMRICH. « Graphen mit transitiver Automorphismengruppe ». In : *Monatsh. Math.* 73 (1969), p. 341-347. DOI : 10.1007/BF01298984. URL : https://doi.org/10.1007/BF01298984 (cf. p. 3).

[15] Wilfried IMRICH. « On graphs with regular groups ». In : *J. Combinatorial Theory Ser. B* 19.2 (1975), p. 174-180 (cf. p. 3).

[16] Wilfried IMRICH et Mark E. WATKINS. « On automorphism groups of Cayley graphs ». In : *Period. Math. Hungar.* 7.3-4 (1976), p. 243-258. ISSN : 0031-5303. DOI : 10.1007/BF02017943. URL : https://doi.org/10.1007/BF02017943 (cf. p. 3).

[17] Paul-Henry LEEMANN. « On Subgroups and Schreier Graphs of Finitely Generated Groups ». Thèse de doct. Université de Genève, 2016 (cf. p. 1, 6).

[18] Paul-Henry LEEMANN. « Schreir graphs : Transitivity and coverings ». In : *Internat. J. Algebra Comput.* 26.1 (2016), p. 69-93. ISSN : 0218-1967. DOI : 10.1142/\-S021819671650003X. URL : http://dx.doi.org/10.1142/S021819671650003X (cf. p. 1, 2).

[19] Paul-Henry LEEMANN. « Weakly maximal subgroups of branch groups ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :1910.06399 (oct. 2019), arXiv :1910.06399. arXiv : 1910.06399 [math.GR] (cf. p. 1, 7).

[20] Paul-Henry LEEMANN et Mikael DE LA SALLE. « Cayley graphs with few automorphisms ». In : *arXiv e-prints* (2018) (cf. p. 1, 3).

[21] Volodymyr Nekrashevych. *Self-similar groups*. T. 117. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005, p. xii+231. isbn : 0-8218-3831-8. doi : 10.1090/surv/117. url : http://dx.doi.org/10.1090/surv/117 (cf. p. 5).

[22] Lewis A. Nowitz et Mark E. Watkins. « Graphical regular representations of non-abelian groups. I, II ». In : *Canad. J. Math.* 24 (1972), 993-1008, ibid. 24 (1972), 1009-1018. issn : 0008-414X. doi : 10.4153/CJM-1972-101-5. url : https://doi-org.acces.bibliotheque-diderot.fr/10.4153/CJM-1972-101-5 (cf. p. 3).

[23] Ekaterina L. Pervova. « Everywhere dense subgroups of a group of tree automorphisms ». In : *Tr. Mat. Inst. Steklova* 231.Din. Sist., Avtom. i Beskon. Gruppy (2000), p. 356-367. issn : 0371-9685 (cf. p. 6).

[24] Mark E. Watkins. « Graphical regular representations of alternating, symmetric, and miscellaneous small groups ». In : *Aequationes Math.* 11 (1974), p. 40-50. issn : 0001-9054. doi : 10.1007/BF01837731. url : https://doi.org/10.1007/BF01837731 (cf. p. 3).

[25] Mark E. Watkins. « Graphical regular representations of free products of groups ». In : *J. Combinatorial Theory Ser. B* 21.1 (1976), p. 47-56 (cf. p. 3).

[26] Mark E. Watkins. « On graphical regular representations of $C_n \times Q$ ». In : (1972), 305-311. Lecture Notes in Math., Vol. 303 (cf. p. 3).

[27] Mark E. Watkins. « On the action of non-Abelian groups on graphs ». In : *J. Combinatorial Theory Ser. B* 11 (1971), p. 95-104 (cf. p. 3).