Groupes et graphes : phénomènes de rigidités

Paul-Henry Leemann

10 novembre 2020

Travail en commun avec Mikael de la Salle (ENS Lyon).
Exposé disponible sur
`www.leemann.website/slides/Rigidity.pdf`

Ce dont il est question

Un sujet à l'intersection de

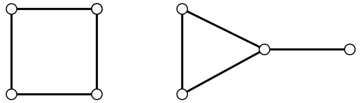
- Théorie géométrique des groupes ;
- Combinatoire et graphes ;
- Probabilités et marches aléatoires.

Théorie géométrique des groupes

- Théorie géométrique des groupes : faire le lien entre des groupes et des espaces géométriques.
- Une représentation du groupe G est un automorphisme $G \to \mathrm{Aut}(V)$ où V est un espace vectoriel.
- Plus généralement, on peut regarder $G \to \mathrm{Aut}(X)$ où X est un *espace géométrique avec de bonnes propriétés*.
- Dans notre cas on va s'intéresse à X un graphe et $G \cong \mathrm{Aut}(X)$.

Graphes

- Un graphe X est constitué d'un ensemble V de sommets et d'un ensemble E d'arrêtes.



- Un graphe X est connexe si pour toute paire de sommets (v, w) il existe un chemin reliant v à w.
- Un graphe X est localement fini si tout sommet n'a qu'un nombre fini d'arrêtes adjacentes.

Une première question

Question

Quels sont les groupes G de type fini, tel qu'il existe un graphe X connexe et localement fini avec $G = \mathrm{Aut}(X)$.

- C'est vrai pour tout groupe de type fini [Groot (1959) et Sabidussi (1960)] ;
- Que se passe-t-il si on met plus de structure sur X ?

Graphes réguliers

Définition

L'action de $\mathrm{Aut}(X)$ sur X est régulière si elle est libre et transitive sur les sommets. C'est-à-dire si pour toute paire de sommets (v, w) il existe un unique automorphisme de X envoyant v sur w.

Question principale

Question

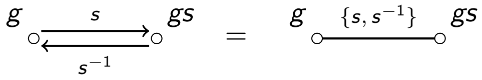
*Quels sont les groupes G de type fini, tel qu'il existe un graphe X connexe et localement fini avec $G = \mathrm{Aut}(X)$ agit **régulièrement** sur X.*

- Dans ce cas X est un graphe de Cayley de G [Sabidussi, 1958].
- Résolu dans les années 70 pour les groupes finis [Imrich, Watkins, Nowitz, Hetzel, Godsil...].
- Résolu pour les produits libres de groupes de type fini [Watkins, 1976].
- Résolu [L. - de la Salle] en 2019-2020 pour les groupes infinis de type finis.

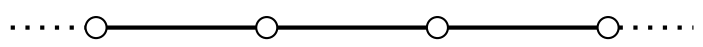
Graphes de Cayley

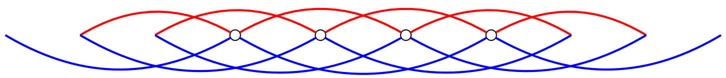
Définition

Soit G un groupe et $S = S^{-1}$ un ensemble de générateurs. Le graphe de Cayley est le graphe avec sommets $V = G$ et avec un arc entre g et gs pour tout $s \in S$:



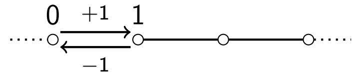
Exemple

- $\mathsf{Cayl}(\mathbf{Z}, \{\pm 1\}) =$ 
- $\mathsf{Cayl}(\mathbf{Z}, \{\pm 2, \pm 3\}) =$



Graphes de Cayley

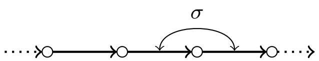
- Chaque arrête est constituée d'une paire d'arcs.
- Chaque arc à une étiquette ($s \in S$).
- La couleur d'une arrête est la paire de ses étiquettes ($\{s, s^{-1}\} \subset S$).

  $\mathsf{Cayl}(\mathbf{Z}, \{\pm 1\}) =$ 

-
- $G \curvearrowright \mathsf{Cayl}(G, S)$ par multiplication à gauche.
- On a

$$G = \mathrm{Aut}_{\mathrm{et}}(\mathsf{Cayl}(G,S)) \leq \mathrm{Aut}_{\mathrm{coul}}(\mathsf{Cayl}(G,S)) \leq \mathrm{Aut}(\mathsf{Cayl}(G,S)).$$

Example pour $\mathbf{Z}$

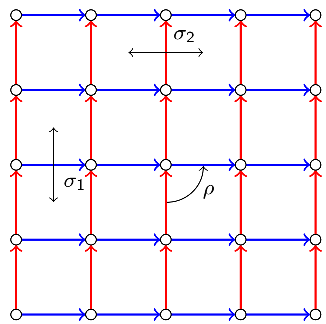


$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{et}}(\mathsf{Cayl}(\mathbf{Z}, S)) = \mathbf{Z}$$

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{coul}}(\mathsf{Cayl}(\mathbf{Z}, S)) = \langle \mathbf{Z}, \sigma \rangle = D_\infty$$

$$\mathrm{Aut}(\mathsf{Cayl}(\mathbf{Z}, S)) = D_\infty$$

Example pour $\mathbf{Z}^2$



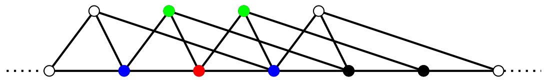
$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{et}}(\mathsf{Cayl}(\mathbf{Z}^2, S)) = \mathbf{Z}^2$$

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{cou}}(\mathsf{Cayl}(\mathbf{Z}^2, S)) = \langle \mathbf{Z}^2, \sigma_1, \sigma_2 \rangle$$

$$\mathrm{Aut}(\mathsf{Cayl}(\mathbf{Z}^2, S)) = \langle \mathbf{Z}^2, \sigma_1, \sigma_2, \rho \rangle$$

Un graphe avec $\mathrm{Aut}(X) = \mathbf{Z}$

On commence avec $X = \mathrm{Cayl}(G, S)$ auquel on ajoute des décorations pour *forcer l'orientation.*



Exercice : trouver X avec $\mathrm{Aut}(X) = \mathbf{Z}^2$.

Question principale (bis repetita)

Question

Quels sont les groupes G de type fini tel qu'il existe un ensemble fini de générateurs S avec $G = \mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G, S))$?

Lorsque $G = \mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G, S))$, on dit que $\mathrm{Cayl}(G, S)$ est une représentation graphique régulière (GRR) et que G est rigide s'il existe un tel S.

Groupes non-rigides

Fait

Si G est abélien et est différent de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$, alors il n'est pas rigide. En effet, l'application $g \mapsto g^{-1}$ est automorphisme de $\mathrm{Cayl}(G, S)$ pour tout S.

Fait

Si G est un groupe dicyclique généralisé, alors il n'est pas rigide. L'application $a \mapsto a, xa \mapsto a^{-1}x^{-1}$ est un automorphisme de $\mathrm{Cayl}(G, S)$ pour tout S.
G est dicyclique généralisé s'il n'est pas abélien et $G = A \sqcup xA$ avec A sous-group abélien, x d'ordre 4 et $xax^{-1} = a^{-1}$ pour tout $a \in A$.
Exemple : $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

Fait

Il existe 13 groupes exceptionnels d'ordre au plus 32 qui ne sont pas rigides (et ni abélien (différent de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}^n$) ni dicyclique généralisé).

Groupes rigides

Théorème (Imrich, Watkins, Nowitz, Hetzel, Godsil..., 1969-1981)

Soit G un groupe fini. Si G n'est ni dicyclique généralisé, ni abélien (différent de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$) ni un des 13 groupes exceptionnels, alors il est rigide.

- Pleins de sous-cas, pas de construction unifiée ;
- Utilise fortement le fait que G est fini (Feit-Thompson, ...).

Théorème (Watkins,1976)

Si $G = G_1 * \cdots * G_n$ est un produit libre de groupes de type finis, alors il est rigide.

Asymptotique

Théorème (Babai-Godsil, 1982)

Si G est un groupe nilpotent, non-abélien, fini d'ordre impaire, alors asymptotiquement presque tous les graphes de Cayley de G sont des GRR.

Résultat principal

Théorème (L. - de la Salle, 2019-2020)

Soit G un groupe infini de type fini. Si G n'est ni dicyclique généralisé ni abélien, alors il est rigide. De plus, pour tout ensemble fini de générateurs S, il existe $S \subset T$ fini tel que $\mathrm{Cayl}(G, T)$ *soit un GRR.*

- Que deux sous-cas, idée générale commune ;
- Marche aussi pour les groupes finis avec un élément d'ordre *grand*. En particulier, donne que pour tout entier n il y a seulement un nombre fini de groupes de rang n qui sont exceptionnels.
- Une forme faible de comportement asymptotique.

Idée principale

- Rappel :

$$
\begin{aligned}
G = \mathrm{Aut}_{\mathrm{et}}(\mathrm{Cayl}(G, S)) &\leq \mathrm{Aut}_{\mathrm{coul}}(\mathrm{Cayl}(G, S)) \\
&\leq \mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G, S)).
\end{aligned}
$$

- En partant de S on va construire T et vérifier séparément que chacune des inégalités ci-dessus est en fait une égalité.

Structure de la preuve

Proposition 1

Soit G un groupe qui n'est ni dicyclique généralisé, ni abélien (différent de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$). Alors pour tout ensemble de générateurs S, il existe $S \subset T$ (fini si S est fini) tel que $\mathrm{Aut}_{\mathrm{col}}(\mathrm{Cayl}(G, T))$ *préserve le S-étiquetage.*

Proposition 2

Soit G un groupe infini de type fini. Alors pour tout ensemble fini de générateurs T, il existe $T \subset U$ fini tel que $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G, U))$ *préserve les T-couleurs.*

Proposition 3

Soit $S \subset T \subset U$ comme ci-dessus. Alors $\mathrm{Cayl}(G, U)$ *est un GRR pour G.*

Preuve de la proposition 3

Soit φ un élément de $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G, U))$. Alors φ appartient à $\mathrm{Aut}_{\mathrm{col}}(\mathrm{Cayl}(G, T))$ par la proposition 2 et donc aussi à $\mathrm{Aut}_{\mathrm{et}}(\mathrm{Cayl}(G, S))$ par la proposition 1.
C'est-à-dire qu'il existe $g \in G$ tel que pour tout h, on a $\varphi(h) = gh$.
Soit $h \xrightarrow{u} hu$ un arc de $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G, U))$. Alors les sommets sont envoyés par φ sur gh et ghu. Or dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G, U))$ il existe un unique arc entre gh et ghu et il est étiqueté par u.
On a donc montré que φ est dans $\mathrm{Aut}_{\mathrm{et}}(\mathrm{Cayl}(G, U))$.

Esquisse de preuve de la proposition 1

- Soit G un groupe, $S = S^{-1}$ un ensemble de générateurs et $T = (S \cup S^2 \cup S^3) \setminus \{1\}$.
- On regarde le sous-groupe H de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{col}}(\mathrm{Cayl}(G, T))$ des automorphismes qui fixent le sommet 1_G.
- Ce sont les bijections $\varphi\colon G \to G$ satisfaisant

$$\varphi(1) = 1 \text{ et } \forall g \in G, \forall t \in T, \varphi(gt) \in \varphi(g)\{t, t^{-1}\}$$

- On montre que si H ne fixe pas S, alors G est abélien ou dicyclique généralisé. La preuve est combinatoire et le groupe des quaternions Q_8 joue un rôle important.

Preuve de la proposition 2 : des triangles

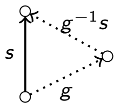
- On va utiliser un invariant géométrique pour différencier une arrête coloriée par $\{s^{\pm 1}\}$ d'un arrête coloriée par $\{t^{\pm 1}\}$: le nombre de triangles auxquelles elles appartiennent.
- Pour $s \in S$, on note $\mathrm{Tr}(s, S)$ le nombre de triangles de $\mathrm{Cayl}(G, S)$ contenant l'arrête $g \overset{s^{\pm 1}}{\text{———}} gs$ (ne dépend pas de g).
- On a toujours $\mathrm{Tr}(s, S) = \mathrm{Tr}(s^{-1}, S)$.

Preuve de la Proposition 2

- Étant donnée S fini, on va construire $S \subset T$ fini tel que :
  - Pour tout $s \in S$ on a $\mathrm{Tr}(s, T) \geq 7$;
  - Pour tout $t \in T \setminus S$ on a $\mathrm{Tr}(t, T) \leq 6$;
  - Pour tout $s, s' \in S$ on a $\mathrm{Tr}(s, T) = \mathrm{Tr}(s', T)$ si et seulement si $s' = s$ ou $s' = s^{-1}$.
- Pour ce faire, on va montrer un lemme technique qui dit qu'on peut augmenter le nombre de triangles de $s_0 \in S$ sans augmenter le nombre de triangles auquel appartiennent les éléments de $S \setminus \{s_0, s_0^{-1}\}$.
- En appliquant plusieurs fois ce lemme, on a gagné.

Lemme technique

Soit $s \in S$.

- Pour tout $g \in G$, on regarde $S_g = S \cup \{g, g^{-1}, g^{-1}s, s^{-1}g\}$.
- 

- On veut $g \in G$ tel que :
  - On augmente bien les triangles pour s ($\mathrm{Tr}(s, S_g) > \mathrm{Tr}(s, S_g)$) ;
  - $\mathrm{Tr}(g, S_g) \leq 6$ et $\mathrm{Tr}(g^{-1}s, S_g) \leq 6$;
  - On n'augmente pas les triangles pour $t \in S \setminus \{s, s^{-1}\}$.
- Cela nous donne une liste de conditions : $g \notin S$, $s^{-1}g \notin S$, ...

Une condition algébrique

Au final on obtient le critère suivant :
Il existe $F \subset G$ fini tel que si $g, s^{-1}g \notin F$ et $g^2, (s^{-1}g)^2 \notin F$, alors S_g marche.
On note sq: $G \to G, g \mapsto g^2$, ainsi $\mathrm{sq}^{-1}(F)$ est l'ensemble des éléments $g \in G$ tel que $g^2 \in F$.

Dichotomie

Pour la suite de la preuve, on a deux cas :

- G a un élément d'ordre infini (ou d'ordre *suffisamment grand*) ;
- G n'est pas virtuellement abélien.

Rappel : G est virtuellement abélien s'il contient un sous-groupe H d'indice fini et abélien. Par exemple, tout groupe fini est virtuellement abélien.
De plus, si G est virtuellement abélien et de type fini, alors il est fini ou a un élément d'ordre infini.

G a un élément d'ordre infini

Soit $g_0 \in G$ d'ordre infini.

- On ne regarde que les éléments de $\langle g_0 \rangle \cong \mathbf{Z} \leq G$.
- Dans $\mathbf{Z}$, chaque élément a au plus une racine carrée.
- Donc il existe une infinité d'éléments g de $\langle g_0 \rangle$ tel que $g, s^{-1}g \notin F$ et $g^2 \notin F$.
- Avec un peu de travail supplémentaire, on obtient le résultat désiré sauf que lorsqu'on augmente les triangles pour s, on peut peut-être aussi augmenter les triangles pour s^2.
- Si on fait attention à dans quel ordre on applique ce lemme, alors ce n'est pas très grave d'augmenter aussi les triangles pour s^2.

G n'est pas virtuellement abélien

Pour G quelconque et $F \subset G$ fini il est possible que $\mathrm{sq}^{-1}(F)$ soit infini ; on ne peut donc pas appliquer la stratégie précédente telle quelle.
Mais on peut montrer

Proposition 4

Soit G un groupe de type fini qui n'est pas virtuellement abélien. Pour tout $s \in G$ et $F \subseteq G$ fini, l'ensemble $G \setminus (\mathrm{sq}^{-1}(F) \cup s\,\mathrm{sq}^{-1}(F))$ est infini.

Corollaire

Soit G un groupe de type fini qui n'est pas virtuellement abélien. Pour tout $s \in G$ et $F \subseteq G$ fini, il existe $g \in G$ tel que

$$g, s^{-1}g \notin F \quad \text{et} \quad g^2, (s^{-1}g)^2 \notin F.$$

Preuve de la proposition 4

Pour montrer la proposition 4, on utilise :

- Si G est de type fini et pour tout $g \in G$ on a $g^2 = 1$, alors G est fini ;
- Un lemme de Dicman sur les sous-groupes normaux ;
- Des marches aléatoires sur les groupes, dont un résultat de Tointon.

Un lemme de Dicman

Lemme (Dicman)

Soit G un groupe et $F \subset G$ fini. Si tout élément de F a ordre fini et si F est invariant par conjugaison, alors le sous-groupe normal $\langle F \rangle^G$ est fini.

Une application du lemme de Dicman

Corollaire

Soit G un groupe de type fini, alors G est infini si et seulement si $\mathrm{sq}(G)$ est fini.

Démonstration.

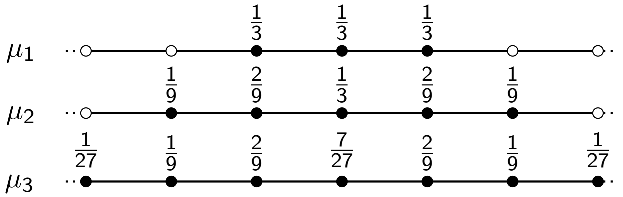
Soit $F = \mathrm{sq}(G)$, c'est un sous-ensemble clos par conjugaison. Si F est fini, alors il ne contient que des éléments d'ordre finis. Le groupe $G/\langle F \rangle^G$ est de type fini et tout ses éléments ont ordre 2, il est donc fini. Mais par Dicman $\langle F \rangle^G$ est fini, et donc G est fini. $\square$

Marches aléatoires sur les sous-groupes

Soit G un groupe de type fini et $S = S^{-1}$ un ensemble fini de générateurs qui contient 1.
Soit μ la probabilité uniforme de choisir un élément de S et $\mu_n = \mu^{*n}$ la marche aléatoire correspondante.

Exemple

$G = \mathbf{Z}$ et $S = \{-1, 0, 1\}$



Un théorème de Tointon

Théorème (Tointon, 2020)

Soit G de type fini, $S = S^{-1}$ fini, générateur, qui contient 1 et μ la probabilité uniforme sur S. Soit g_n et h_n deux réalisations indépendantes de μ_n. Si G n'est pas virtuellement abélien,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(g_n \text{ et } h_n \text{ commutent}) = 0$$

Corollaire (L.-dlS.)

Mêmes hypothèses. Si G n'est pas virtuellement abélien, alors

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(g_n^2 = 1) \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Avec plus de travail, on peut montrer la Proposition 4.

Variations sur un thème

On peut se poser la question de ce qui se passe pour les graphes dirigés. Pour $S \subset G$ pas forcément symétrique, on définit $\overrightarrow{\mathrm{Cayl}}(G, S)$ de manière analogue à $\mathrm{Cayl}(G, S)$.

Question

Quels sont les groupes G de type fini tel qu'il existe S fini et générateur avec $G = \mathrm{Aut}(\overrightarrow{\mathrm{Cayl}}(G, S))$?

- Plus facile que de trouver un GRR ;
- Tous les groupes finis, sauf 5 exceptions (Babai, 1980) ;
- Tous les groupes infinis, mais avec S infini (Babai, 1980) ;
- Tous les groupes infinis de type fini (L.-dlS.).

Variations sur un thème

Question (Babai, 1980)

Quels sont les groupes G de type fini tel qu'il existe S fini, générateur et tel que $S \cap S^{-1} = \emptyset$ avec $G = \mathrm{Aut}(\overrightarrow{\mathrm{Cayl}}(G, S))$?

- La condition $S \cap S^{-1} = \emptyset$ dit que chaque arrête ne peut être parcourue que dans un sens, i.e. on n'a pas  ;
- Si G est diédral généralisé ($G = A \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ avec A abélien), ce n'est pas possible car tout ensemble de générateur contient un élément d'ordre 2 ;
- Tous les groupes finis non diédral généralisé, sauf 11 exceptions (Morris-Spiga, 2018) ;
- Tous les groupes infinis de type fini, sauf les diédraux généralisés (L.-dlS.).

Autres conséquences 1

Corollaire

Tout groupe de type fini admet un graphe de Cayley localement fini dont le groupe d'automorphisme est dénombrable (de manière équivalente dont les stabilisateurs des sommets sont finis).

Cela répond à une conjecture de dIS. et Tessera (2019).

Autres conséquences 2

Un graphe X est LG-rigide s'il existe un entier r tel que si Y est un graphe avec les mêmes boules de rayon r que X, alors X revêt Y.

Corollaire

Tout groupe de présentation finie admet un graphe de Cayley localement fini qui est LG-rigide.

Un groupe qui n'est pas de présentation finie n'admet aucun graphes de Cayley qui soit LG-rigide (dIS-Tessera, 2019). Ainsi le corollaire ci-dessus donne une caractérisation des groupes de type finis.