

Kvantová chemie

D. Hollas, O. Svoboda, V. Svoboda, P. Slavíček

7. ledna 2015

Obsah

1	Historický nástin kvantové mechaniky	7
1.1	Úvod	7
1.2	Částice a vlny	7
1.3	Experimenty, které změnily svět	9
1.3.1	Záření absolutně černého tělesa	9
1.3.2	Teorie fotoelektrického jevu	10
1.3.3	Spektrum atomu vodíku	11
1.4	Dualismus vln a částic	12
1.5	Pohybové rovnice kvantově-mechanických částic: Schrödingerova rovnice	13
1.6	Bornova interpretace vlnové funkce	14
1.7	Časově-závislá Schrödingerova rovnice	14
1.8	Relace neurčitosti	15
1.9	Postuláty kvantové mechaniky	15
1.10	Kvantová mechanika pro systém o více částicích	16
2	Matematika kvantové mechaniky	18
2.1	Komplexní čísla	18
2.2	Operátory	22
2.2.1	Co je operátor	22
2.2.2	Operace s operátory	23
2.2.3	Prostory funkcí a Hilbertův prostor	26
2.2.4	Operátory specifických vlastností	27
2.2.5	Postuláty kvantové mechaniky a operátory	29
2.2.6	Maticová reprezentace operátorů	30
3	Základní úlohy kvantové mechaniky	32
3.1	Rozptyl na dvojštěrbíně	32
3.2	Volná částice	33
3.3	Částice v nekonečně hluboké potenciálové jámě	35
3.4	Harmonický oscilátor	37
4	Moment hybnosti	40
4.1	Operátor momentu hybnosti	40
4.2	Vlastní čísla operátorů momentu hybnosti	41
4.3	Operátor momentu hybnosti v polárních souřadnicích	44
4.4	Pohyb částice po kouli	45
4.5	Energie pohybu po kulové sféře	47
5	Elektronový spin	48
5.1	Pojem spinu	48
5.2	Sternův - Gerlachův experiment	49
5.3	Spin a rotace elektronu kolem své osy	50
5.4	Spin v kvantové mechanice	51
5.5	Spin v magnetickém poli	52
6	Problém dvou částic	54
6.1	Pohyb nezávislých částic: metoda separace proměnných	54
6.2	Dvě interagující částice	55

7	Atom vodíku	59
7.1	Obecný úvod	59
7.2	Spektrum energií	59
7.3	Vlnová funkce pro atom vodíku	62
8	Přibližné metody	64
8.1	Variační princip	64
8.1.1	Variační princip v kvantové mechanice	64
8.1.2	Rayleighova-Ritzova metoda	65
8.2	Poruchová teorie	69
9	Více-elektronové atomy	73
9.1	Atom helia	73
9.1.1	Výpočet elektronové energie atomu helia poruchovým přístupem	74
9.1.2	Výpočet elektronové energie atomu helia poruchovým přístupem	75
9.2	Atomy o více než dvou elektronech	76
9.3	Antisymetrie vlnové funkce a Pauliho vylučovací princip	77
9.4	Hartreeho a Hartreeho-Fockova metoda pro více-elektronové atomy	79
9.5	Roothanovy rovnice	82
9.6	Báze atomových orbitalů	83
9.7	Periodicita atomů pohledem kvantové teorie	83
9.8	Sčítání momentu hybnosti a atomové termy	85
9.8.1	Hundova pravidla	86
10	Hartreeho-Fockova metoda	87
11	Kvantová teorie molekul	88
11.1	Molekulový Hamiltonián	88
11.2	Bornova-Oppenheimerova aproximace	89
11.2.1	Bornova-Oppenheimerova aproximace: První pohled	89
11.2.2	Bornova-Oppenheimerova aproximace: Odvození	91
11.2.3	Meze platnosti Bornovy-Oppenheimerovy aproximace	93
12	Vibrace a rotace molekul	94
13	Elektronová struktura molekul	97
13.1	Ion molekuly vodíku	97
13.2	Molekulové orbitály excitovaných stavů	99
13.3	Více-elektronové molekuly	99
13.4	Klasifikace molekulových orbitalů a elektronové termy dvouatomových molekul	101
13.5	Molekulové orbitály víceatomových molekul	102
14	Ab initio metody	105
14.1	Hartreeho-Fockova metoda	105
14.2	Mollerova-Plessetova metoda	105
14.3	Metoda kofigurační interakce	105
14.4	Metody spřažených klastrů	105
14.5	Multireferenční metody	105
14.6	Metody funkcionálu hustoty	106

15 Semiempirické přístupy	108
15.1 Hückelova metoda	108
15.2 Rozšířená Hückelova metoda	111
15.3 Moderní semiempirické metody	111
16 Molekulární vlastnosti	112
16.1 Elektrické vlastnosti molekul	112
16.2 Parciální náboje atomů	113
17 Mezimolekulové interakce	115
17.1 "Klasické" interakce	115
17.2 "Kvantové" interakce	116
17.3 <i>Ab initio</i> výpočty slabých mezimolekulových interakcí	117
17.3.1 Poruchový výpočet: Symetricky adaptovaná poruchová teorie	117
17.3.2 Supramolekulární přístup	118
18 Relativistické efekty	118
18.1 Relativistické efekty v chemii	120
18.2 Kvantově-chemické výpočty relativistických efektů	120

Seznam obrázků

1	Komplexní rovina	8
2	Komplexní rovina	8
3	Komplexní rovina	10
4	Komplexní rovina	11
5	Komplexní rovina	18
6	Goniometrický tvar komplexního čísla	20
7	Vektorový model momentu hybnosti	44
8	Posuvné operátory ve vektorovém modelu	44
9	Sternův - Gerlachův experiment	50
10	Radiální část vlnové funkce	63
11	SCF kolečko	81
12	Výstavbový princip	84
13	Periodicita vlastností prvků	84
14	Atomové termy	86
15	disociace2	89
16	Křivky potenciální energie pro H_2^+ a dvouatomový komplex argonu. Energie v obou případech byly vypočítány řešením stacionární Schrödingerovy rovnice. .	90
17	Závislost potenciální energie na vzájemném otáčení methylových skupin v mole- kule ethanu.	91
18	Vrstevnicový diagram potenciální energie pro reakci $Br + HBr$	91
19	NaCl disociace	93

Literatura

Co číst dále?

Předložený text není ucelenou učebnicí kvantové teorie molekul, nýbrž pouhými sebranými poznámkami k přednáškám. Jednotlivé kapitoly a obsah docela dobře korespondují s látkou probíranou na přednáškách, jde ale pořád toliko o fragmenty žádající si rozšiřující informaci. I přes veškerou snahu může být navíc výklad veden způsobem pro čtenáře málo srozumitelným. Čtenáři proto naléhavě doporučujeme souběžné studium y dalších pramenů. Níže podáváme stručný komentovaný přehled dostupné literatury.

Základy kvantové teorie v chemii

Studium kvantové chemie, tedy aplikace kvantové teorie na chemické otázky, vyžaduje alespoň rámcovou znalost kvantové teorie jako takové. V této části proto zmíníme některé z publikací, které čtenáři pomohou se v základních principech kvantové teorie zorientovat.

- David O. Hayward, *Quantum Mechanics for Chemists* RSC, 2002. Tento rozsahem nevelký text lze doporučit jako první text ke studiu kvantové teorie. Je psát čtivým, srozumitelným jazykem a studentovi-začátečnickovi bude výtečným pomocníkem.
- Peter Atkins, Julio de Paula, *Fyzikální chemie* VŠCHT Praha, 2013. Kvantová chemie je běžnou součástí základních (tj. bakalářských) kurzů fyzikální chemie. Proto nás nepřekvapí, že asi třetina této nejznámější učebnice fyzikální chemie je věnována právě kvantové chemii. Významná část našeho kurzu je právě v Atkinsově učebnici pokryta. Učebnice je zároveň pro začínající studenty a typicky je tak dobře srozumitelná.
- Thomas Engel, *Quantum Chemistry and Spectroscopy* Prentice Hall, 2010. Engelův text je součástí učebnice fyzikální chemie, vyšel ovšem i v samostatném svazku. Jde opět o úvodní kurz. Část věnovaná kvantové teorii se autorovi mimořádně povedla, kniha je velmi pěkně zpracována i po grafické stránce.
-
-
-
-
-

Doplňující a rozšiřující literatura

Mnohé rozšiřující informace nalezne čtenář v učebnicích Atkinse a Engela, o kterých byla řeč výše. V této části okomentujeme pokročilejší texty zaměřené na kvantovou chemii.

- Attila Szabo, Neil S. Ostlund, *Modern Quantum Chemistry* Dover, 1996. Dnes již klasické dílo, které v sevržené podobě popisuje pokročilé metody kvantové chemie. Kniha se dobře čte a doverská edice je také finančně dosažitelná. Z dnešního pohledu možná zarazí nepřítomnost teorie funkcionálu hustoty.
- Ira N. Levine, *Quantum Chemistry* Pearson/Prentice Hall, 2009. Poctivá učebnice kvantové chemie s řadou příkladů. Rozsahem velmi dobře odpovídá přednáškám z kvantové chemie.

- Peter W. Atkins, Ronald S. Friedman, *Molecular Quantum Mechanics* Oxford University Press, 2010. Tato učebnice navazuje na Atkinsův základní kurz fyzikální chemie. Kromě kvantové chemie se čtenář seznámí i s jinými aspekty molekulární kvantové teorie, kupříkladu s teoretickou spektroskopií.
- John P. Lowe, Kirk A. Peterson, *Quantum Chemistry* Elsevier, 2006. Zajímavá učebnice, vhodná zejména pro ty ze čtenářů, kteří si rádi probírané koncepty sami vyzkouší. Autor se hojně věnuje Hückelově teorii, se kterou dokáže překvapivě mnoho.
- Jean-Pierre Launay, Michel Verdaguer, *Electrons in Molecules. From Basic Principle to Molecular Electronics* Oxford University Press, 2014. Kvantová chemie v moderním kontextu vědy o materiálech.
- Rudolf Polák a Rudolf Zahradník, *Kvantová chemie. Základy teorie a aplikace* SNTL, 1985. Klasické česky psané dílo, které se i po letech dobře čte, mimo jiné i díky svižnému slohu.
- Jiří Fišer, *Úvod do kvantové teorie*. Academia, 1983. Kniha vhodná zejména pro ty ze čtenářů, kteří by se rádi seznámili s metodami lineární algebry v kvantové chemii.
- Lubomír Skála, *Kvantová teorie molekul* Univerzita Karlova, 1995. Rozsahem nevelká skripta obsahují detailní a srozumitelný popis základních kvantově-chemických přístupů.

1 Historický nástin kvantové mechaniky

1.1 Úvod

Tento text se zabývá aplikacemi kvantové mechaniky na chemii a je určen studentům čtvrtého ročníku oborů XXXX. U studentů se předpokládá rudimentární znalost kvantové mechaniky, jak ji pochytili z přednášek anorganické chemie, případně Fyziky II či Teoretické chemie. Ukazuje se ovšem užitečným provést jakési rychlé shrnutí základních kvantově-mechanických idejí. Takovýto letmý, pseudohistorický přehled je předmětem první kapitoly.

Kvantová mechanika se dříve také nazývala mechanikou vlnovou. Oba tyto názvy reflektují jisté překvapivé rysy této nové mechaniky, které se zdají být v rozporu s každodenní zkušeností. Přídavné jméno „kvantová“ odkazuje na nespojitost energetických hladin, pojem „vlnový“ pak na podvojný charakter částic, které se za jistých okolností mohou chovat jako vlny. Tyto dva aspekty kvantové mechaniky jsou hluboce provázány.

1.2 Částice a vlny

Pojďme si na začátek zopakovat, jaký je rozdíl mezi částicemi a vlnami. Oba tyto pojmy odkazují na nějakou formou pohybu. Částice představují objekty s definovanou hmotností, polohou a hybností. Polohou a hybností je určen stav částice. Jestliže pro danou částic známe její polohu a hybnost v určitém čase, pak s pomocí pohybových rovnic (kupříkladu Newtonových pohybových rovnic) můžeme určit polohu a hybnost částice v libovolném čase budoucím. Pro částici pohybující se podél osy x v potenciálu $V(x)$ můžeme zapsat pohybovou rovnici zapsat jako:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad (1.1)$$

přičemž řešením bude poloha částice v čase t , $x(t; x_0, p_0)$.

Newtonova rovnice má povahu základního zákona, ve kterém jsou další mechanické zákony obsaženy. Takto můžeme například dokázat zachování energie. Definujme si funkci H , tzv. Hamiltonovu funkci:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V. \quad (1.2)$$

Tato funkce je v principu funkcí času, neboť částice se pohybuje a mění se tak její rychlost (a tedy kinetická energie), stejně jako její poloha (a tedy energie potenciální). Snadno nyní dokážeme, že H se s časem nemění. Bude nás zajímat výraz $\frac{dH}{dt}$. S uvážením, že:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (1.3)$$

a

$$\frac{d(p^2)}{dt} = 2p \frac{dp}{dt} = 2m^2 v \frac{dv}{dt} = 2m^2 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.4)$$

snadno nahlédneme, že:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dx}{dt} \left(m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dx} \right). \quad (1.5)$$

Výraz v závorce je ovšem dle Newtonova zákona (rovnice 1.1) roven nule a tedy i $\frac{dH}{dt}$ je rovno nule. Energie se tudíž v klasické mechanice zachovává. Newtonova mechanika popisující částice (případně některá z ekvivalentních formulací jako jsou formulace Lagrangeova či Hamiltonova) byla historicky mimořádně úspěšná. Za všechny úspěchy můžeme jmenovat například správné předpovědi existence nových planet.

Při pohybu částic se prostorem přenáší hmota, při vlnění se naproti tomu prostorem přenáší energie. Vlna není na rozdíl od částic plně lokalizovatelná. Hlavní rozdíl mezi vlnou a částicí je ale schopnost vln se skládat, jev, který označujeme jako interferenci. Při interferenci je amplituda skládajících se vln rovna součtu jednotlivých amplitud. Pokud mají v daném bodě jednotlivé amplitudy stejné znaménko, pak mluvíme o konstruktivní interferenci. Tam, kde mají amplitudy jednotlivých vln opačná znaménka, dochází k destruktivní interferenci. Takový interferenční obrazec je možné pozorovat například při průchodu světla nebo lehkých částic dvojštěrbinou (viz Obrázek 1). Vlny procházející štěrbinami interferují a na stínítku tak vzniká interferenční obrazec.

Obrázek 1: *Interference vlnění na dvojštěrbině. Do každého bodu na stínítku dopadá světlo z obou štěrbin, dochází k interferenci a na stínítku vznikají světlé a tmavé proužky, tzv. interferenční obrazec.*

Bude užitečné si na začátek zopakovat některé veličiny, které charakterizují vlnění (viz obrázek 2). Vlna je určena velikostí nějaké veličiny (například výšky vodní hladiny či intenzity elektrického pole) měnící se v prostoru a v čase, označme si tuto veličinu $A(x, t)$.

Obrázek 2: *Schematické znázornění vlny.*

V nejjednodušším případě se bude vlna šířit harmonicky ve směru osy x :

$$A(x, t) = A_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right), \quad (1.6)$$

kde λ je tzv. vlnová délka, udávající vzdálenost mezi dvěma maximy vlny pro určitý čas a T je perioda, udávající časový interval mezi dosažením maxima vlny pro určité místo. Reciprokou hodnotu periody T označujeme jako frekvenci $\nu = \frac{1}{T}$. Mezi vlnovou délkou a frekvencí platí vztah:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}. \quad (1.7)$$

K popisu vlny se také používá veličina vlnocet $\tilde{\nu} = c\nu$. Ten nám udává, kolik vln se umístí do 1 m. Často se místo vlnové délky a frekvence setkáváme se zápisem pomocí vlnového čísla k a úhlové frekvence ω :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.8)$$

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (1.9)$$

Postupné vlnění ve směru osy x má pak tvar:

$$A(x, t) = A_0 \sin(kx - \omega t) \quad (1.10)$$

Jak již jsme zmínili výše, patří k základním rysům vlnění jeho skládání. Představme si nyní, že skládáme 2 vlny o stejné frekvenci, které směřují proti sobě:

$$A(x, t) = A_0 [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)]. \quad (1.11)$$

S takovouto situací se setkáváme třeba při rozvlnění struny na kytáře. S využitím vzorců pro sinus součtu úhlů:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (1.12)$$

získáme úpravou:

$$A(x, t) = 2A_0 \sin kx \cos \omega t = A'(x) \cos \omega t \quad (1.13)$$

Vidíme tak, že v tomto případě bude tvar vlny stále stejný a celá vlna bude pouze periodicky růst a klesat. Mluvíme o tzv. stojatém vlnění, které je v chemii velmi důležité. Ukazuje se, že každé vlnění je možné popsat tzv. vlnovou rovnicí:

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2}. \quad (1.14)$$

Z matematického hlediska jde o parciální diferenciální rovnici druhého řádu. Tuto rovnici lze kupříkladu pro popis pohybu struny na kytarě odvodit z Newtonovy mechaniky, v případě elektromagnetického záření pak zase z Maxwellových rovnic.

1.3 Experimenty, které změnily svět

Na konci devatenáctého století se fyzika zdála být skoro dobudována. Objekty světa byly uspokojivě popsány buď Newtonovou mechanikou (částice) či Maxwellovou elektrodynamikou. Velké soubory částic pak zpracovávala statistická fyzika a termodynamika. Ve století dvacátém nicméně došlo k zásadnímu obratu a mnohé jistoty vzaly za své. Níže zběžně popíšeme některé základní experimenty, které lidstvo přivedlo od světa klasického do světa kvantového. Tyto experimenty z různých pohledů ukazovaly na dva základní rysy kvantové mechaniky (a) Kvantování energie (b) Vlnově-částicový dualismus.

1.3.1 Záření absolutně černého tělesa

Absolutně černým tělesem máme na mysli objekt, který pohltí veškeré dopadající záření, žádné záření tedy není odraženo. Může být realizováno třeba dutinou s malým otvorem: světlo mnohokrát narazí na stěny nádoby, takže pravděpodobnost, že by odražené světlo vylétlo štěrbinou zase ven, je mizivá. Černé těleso ale zároveň musí energii vyzařovat, jinak by se v něm hromadila. Badatele zajímalo, jakým způsobem intenzita vyzářeného světla závisí na jeho frekvenci. Experimentálně bylo zjištěno, že hustota záření pro malé frekvence je velmi malá a roste se zvyšující se frekvencí. V závislosti na teplotě pak dosahuje svého maxima a posléze zase klesá.

Při teoretickém modelování předpokládáme, že k vyzařování světla o určité frekvenci dochází při pohybu dipólu oscilujícího s určitou frekvencí. Podobně, jako je tomu u antény vysílače. Tento dipól uváděn do pohybu díky tepelnému pohybu atomů. Z teorie plynul vztah mezi hustotou záření a střední energií oscilátoru při dané teplotě:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{E}_{osc}. \quad (1.15)$$

V klasické mechanice ale platí, že střední energie každého harmonického oscilátoru je nezávislá na frekvenci a rovna kT . To by ale znamenalo, že vyzářená energie poroste se čtvercem frekvence! To je sice pravda pro malé frekvence, ale předpověď naprosto selhává pro frekvence vysoké! Vždyť by to znamenalo, že rozžhavený kámen by měl být intenzivním zdrojem rentgenového záření.

Max Planck přišel s myšlenkou, že souladu s experimentem můžeme dosáhnout za předpokladu, že elektromagnetický oscilátor* nemůže nabývat libovolných hodnot, nýbrž pouze hodnot:

$$E = nh\nu, \quad (1.16)$$

kde h je tzv. Planckova konstanta. Záření pak může být předáváno pouze po minimálních balíčcích $h\nu$, což je nejmenší rozdíl energie mezi dvěma hladinami oscilátoru. Při konečné teplotě je střední hodnota energie oscilátoru rovna:

$$\bar{E}_{osc} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (1.17)$$

* Elektromagnetický oscilátor si můžeme představit jako kladný a záporný náboj spojený pružinkou.

a po dosazení do vztahu 1.15 pak získáme:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (1.18)$$

Tento vztah báječným způsobem souhlasil s experimentem, pokud za hodnotu konstanty h dosadíme číslo $6,624 \cdot 10^{-34}$ J·s. Je třeba ale vidět, že souladu s experimentem bylo dosaženo za použití v té době dosti bláznivých předpokladů. Předně předpokládáme, že pohyb částic je omezen jen na určité hodnoty energie, je kvantován. Za druhé, předpokládáme, že světlo je předáváno do okolí ve formě jakýchsi dále nedělitelných balíčků energie. Není proto nijak podivné, že Planck celou věc nebral příliš vážně. Planckovu představu ale tvůrčím způsobem využil Albert Einstein ve své teorii fotoelektrického jevu, díky které se právem počítá mezi zakladatele kvantové mechaniky.

1.3.2 Teorie fotoelektrického jevu

Základní schéma fotoelektrického jevu je zobrazeno na Obr. 3. V elektrickém obvodu měříme elektrický proud přenášený elektrony, které jsou uvolňovány z ozařovaných kovových destiček. Ze závislosti prošlého fotoelektrického proudu na vloženém napětí můžeme zjistit jednak maximální kinetickou energii vyražených elektronů i jejich celkové množství.

Obrázek 3: Schematické znázornění fotoelektrického jevu. Při ozařování kovu ultrafialovými paprsky jsou z kovu uvolňovány elektrony.

Co bychom předpokládali z hlediska klasické teorie? K vyražení elektronů by mělo dojít světlem každé vlnové délky, pokud bude mít dostatečnou intenzitu. Ukázalo se však, že k průchodu fotoelektrického proudu nedocházelo pro frekvence světla nižší než určitá mezní frekvence ν_0 , charakteristická pro daný kov. Energie vyražených elektronů pak lineárně rostla s frekvencí. Albert Einstein tyto výsledky interpretoval velmi odvážně. Konstatoval, že světlo představuje proud částí o energii $h\nu$ a vyražení elektronu si pak představoval jako srážkový děj mezi touto světelnou částicí a elektronem. Hypotéza musela působit velmi podivně, vždyť Newtonův pohled na světlo jako na proud částic byl již dávno opuštěn a Maxwellova elektrodynamika měla za sebou lecjaký úspěch. Pro závislost kinetické energie elektronů na frekvenci záření by měla platit rovnice:

$$E_{kin} = h\nu - \phi, \quad (1.19)$$

kde $\phi = h\nu_0$ se nazývá výstupní práce.

Jestliže nafitujeme hodnotu experimentální data na rovnici 1.19, získáme hodnotu $h = 6,624 \cdot 10^{-34}$ J·s. Einsteinův balíček energie je charakterizován úplně stejně jako Planckův balíček energie! Einstein šel ve svých úvahách ještě dále. Je-li podle něj světlo částicí, měla by tato částice (později nazvaná foton) také nějakou hybnost. Jelikož se ale pohybuje rychlostí světla, měla by tato hybnost být dána již relativistickým výrazem:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.20)$$

kde m_0 je klidová hmotnost fotonu. Výraz ve jmenovateli je nulový, takže aby hybnost byla rozumné číslo, musí mít foton nutně nulovou klidovou hmotnost. Upravme nyní výraz pro relativistickou hybnost:

$$p^2 c^2 = \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2 c^4 [\frac{v^2}{c^2} - 1]}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -m_0^2 c^4 + m^2 c^2, \quad (1.21)$$

z čehož:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (1.22)$$

Jelikož ale pro foton platí $m_0=0$, tak také:

$$E = pc. \quad (1.23)$$

S použitím Planckova vztahu $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ dostáváme:

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (1.24)$$

Příklad: zpomalení atomů

1.3.3 Spektrum atomu vodíku

V roce 1897 objevil J. J. Thompson elektron a v roce 1911 pak E. Rutherford objevil atomové jádro. Nebylo pak těžké si představit atom jako planetární systém, kde okolo těžkého, nabitého jádra obíhá lehký elektron. Takováto představa má ale ve skutečnosti řadu potíží. Předně není vůbec jasné, proč by takovýto atom měl být stabilní. Nabitá částice by dle klasické teorie měla velmi rychle ztrácet svou energii ve formě záření. Rozžhavené atomy navíc vyzařují světlo jen zcela určitých vlnových délek, tj. atomy mají čárové emisní spektrum, viz. Obr. 4.

Obrázek 4: Čárové emisní spektrum atomu vodíku.

Spektrum atomu vodíku představují řada čar, které je možné sdružit do určitých sérií (Lymanova, Balmerova, Paschenova...). Experimentálně se ukázalo, že vlnčet těchto čar je možné vyjádřit vztahem:

$$\tilde{\nu} = 109680 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \text{ cm}^{-1}. \quad (1.25)$$

Niels Bohr dokázal tento vztah v roce 1913 dát do souvislosti s planetárním modelem atomu. Předpokládal, že se elektron pohybuje po kruhové dráze, na které musí být odstředivá síla rotující částice kompenzována přitažlivou silou elektrostatickou:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}. \quad (1.26)$$

Nyní ale máme nekonečné množství stavů, po kterých se částice mohou pohybovat: podle toho, jakou zvolíme rychlost, musíme zvolit také příslušný poloměr. Bohr ale navíc předpokládal, že moment hybnosti může nabývat pouze hodnot celistvých násobků konstanty $\hbar = \frac{h}{2\pi}$:

$$m_e v r = \hbar n. \quad (1.27)$$

Proč ho něco takového napadlo? Aby to vyšlo! Z podmínky 1.27 vyjádříme rychlost v jako funkci r a dosadíme do podmínky 1.26. Získáme vztah:

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Z m_e e^2} n^2 \quad (1.28)$$

a pro rychlost:

$$v = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{1}{n}. \quad (1.29)$$

Po dosazení do vztahu pro energii dostaneme:

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Z^2 m_e e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13,6 Z^2}{n^2} [\text{eV}]. \quad (1.30)$$

Poloměr, rychlost i energie jsou tedy kvantovány. K přechodu mezi dvěma elektronovými stavy může dojít pouze tehdy, jestliže rozdíl energií počátečního a konečného stavu je roven energii fotonu:

$$E_2 - E_1 = h\nu \quad (1.31)$$

tedy:

$$\frac{Z^2 m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] = h\nu = hc\tilde{\nu} \quad (1.32)$$

Pro vlnčet fotonu tak dostaneme:

$$\tilde{\nu} = \frac{Z^2 m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3 c} \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] = 109680 \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] \quad (1.33)$$

Což je přesně experimentálně pozorovaný vztah! Zdá se tedy, že kvantována není pouze energie, ale také moment hybnosti částice. Kvantování jako by bylo obecným rysem světa molekul.

1.4 Dualismus vln a částic

Einstein svou analýzou fotoelektrického jevu ukázal, že i objekt tak nepochybně vlnový jakým je světlo se za jistých okolností může chovat jako částice. Tato skutečnost je vyjádřena v rovnicích 1.23 a 1.24. V roce 1924 přišel Louis de Broglie s myšlenkou, že vztah 1.24 by se dá číst také opačně: každá hmotná částice s hybností mv je charakterizována vlnovou délkou λ dle vztahu:

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad (1.34)$$

což je tzv. de Broglieův vztah. Sám de Broglie asi příliš netušil, o jakou vlnu by mělo jít. Nicméně jeho vztah sehrál v dalším vývoji kvantové teorie zásadní roli.

De Broglieův vztah umožňuje také interpretovat Bohrovu kvantovou podmínku 1.27. Elektron kolem atomového jádra si pak můžeme představit jako stojaté vlnění, kdy na obvod kruhu je třeba vměstnat celistvý násobek de Broglieových vlnových délek:

$$2\pi r = n \frac{h}{m_e v}, \quad (1.35)$$

tedy:

$$m_e v r = \frac{h}{2\pi} n = \hbar n. \quad (1.36)$$

De Broglieův vztah byl v roce 1928 experimentálně potvrzen experimentem Davissona a Germera, kteří na krystalu niklu pozorovali difrakci elektronových vln.

1.5 Pohybové rovnice kvantově-mechanických částic: Schrödingerova rovnice

Bohrova teorie dokázala opsat atom vodíku, dokázala také alespoň naznačit princip vzniku molekul, ale brzy začalo být zřejmé, že teorie má své limity. Ve dvacátých letech se odehrálo mnoho chytrých pokusů spojit klasickou mechaniku s experimentálním pozorováním kvantování energie, ale průlom přišel až s vytvořením zcela nové, kvantové mechaniky. Ta se na konci dvacátých let objevila ve dvou formách, Heisenbergově maticové mechanice a Schrödingerově vlnové mechanice, i když na první pohled nebylo vůbec zřejmé, že tyto dvě mechaniky mají něco společného. My zde budeme alespoň náznakem sledovat myšlenkový postup Erwina Schrödingera. Na začátku je třeba říci, že kvantová mechanika je založena na postulátech a jako takovou ji nemůžeme odvodit. Můžeme ji pouze uhadnout. To ale neznamená, že bychom neměli žádné indicie. Schrödinger mohl postupovat asi takto. Řekněme, že nás zajímají stacionární stavy částic, například atomů. Ty budou nejspíše popsány stojatou vlnou:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \cos(\omega t). \quad (1.37)$$

Pro všechny vlny platí vlnová rovnice, měla by proto platit i pro vlnu popisující elektron. Tj.:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}. \quad (1.38)$$

Po dosazení ze vztahu 1.37:

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \psi(x) = 0. \quad (1.39)$$

Uvažme nyní, že:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi v}{\lambda} \quad (1.40)$$

a dosaďme za vlnovou délku z de Broglieova vztahu $\lambda = \frac{h}{p}$ a za $\frac{p^2}{2m} = E - V$. Úpravou dostáváme:

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - V(x)] \psi(x) = 0 \quad (1.41)$$

nebo též:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x). \quad (1.42)$$

Což je tzv. bezčasová Schrödingerova rovnice. Kompaktně ji můžeme napsat jako:

$$\hat{H} \psi = E \psi, \quad (1.43)$$

kde symbolem \hat{H} rozumíme operátor:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V. \quad (1.44)$$

Jejím řešením jsou možné hodnoty energie a jím příslušející vlnové funkce. Je to poněkud zvláštní rovnice, neboť má dvě neznámé veličiny, E a funkci ψ . Zdálo by se tedy, že kupříkladu energii si můžeme zvolit a vlnovou funkci k ní dopočítat. Obecně to ale neplatí.

1.6 Bornova interpretace vlnové funkce

Co to vlastně je ona vlnová funkce? Můžeme vyjít z analogie z optiky. Roli vlnové funkce zde hraje kupříkladu vektor intenzity elektrického pole. Intenzita světla v určitém bodě je pak dána jako čtverec intenzity elektrického pole. Vedení touto analogií, můžeme s Maxem Bornem interpretovat vlnovou funkci jako amplitudu pravděpodobnosti. Čtverec vlnové funkce bude mít pak význam hustoty pravděpodobnosti nalezení dané částice v určitém bodě:

$$P(x)dx = |\Psi(x)|^2 dx. \quad (1.45)$$

Z této interpretace pak plyne tzv. normalizační podmínka:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1, \quad (1.46)$$

která říká, že částice musí být někde v prostoru. Tato podmínka vlastně představuje další rovnici, kterou musíme dodat ke Schrödingerově rovnici. Na vlnovou funkci pak s ohledem na obě rovnice klademe několik podmínek:

- Vlnová funkce musí být integrovatelná
- Vlnová funkce musí být spojitá
- Vlnová funkce musí mít spojitě první derivace



Příklad 1

Zadání: Které z funkcí a) - f) mohou být vlnovými funkcemi?

Řešení: a) ne, není spojitá b) ne, není funkce c) ano d) ne, nemá spojitou první derivaci e) ne, není kvadraticky integrovatelná f) ano.

1.7 Časově-závislá Schrödingerova rovnice

Výše jsme si navodili časově-nezávislou Schrödingerovu rovnici, jejímž řešením získáme možné energie, se kterými se částice může pohybovat. Časově-nezávislá Schrödingerova rovnice se dá odvodit z časově závislé Schrödingerovy rovnice:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi. \quad (1.47)$$

Tato rovnice nám ukazuje vývoj stavu v čase. Známe-li vlnovou funkci v nějakém čase t , integrací Schrödingerovy rovnice získáme vlnovou funkci v libovolném čase přístím a minulém. V chemii tato rovnice hraje roli kupříkladu ve spektroskopii: máme molekulu v základním stavu a zajímá nás, v jakém stavu se bude molekula nacházet po „zapnutí“ vnějšího časově-závislého elektromagnetického pole. V dalším výkladu se ovšem s časově-závislou Schrödingerovou rovnicí již příliš setkávat nebudeme.

1.8 Relace neurčitosti

Měření veličin v kvantové mechanice má určitá specifika. Existují skupiny veličin, tzv. komplementární veličiny, které nelze měřit zároveň s libovolnou přesností. K těm patří například dvojice poloha-hybnost či x -ová a y -ová souřadnice momentu hybnosti. Ze Schrödingerovy rovnice se dá dokázat, že:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar, \quad (1.48)$$

kde Δx je neurčitost polohy a Δp je neurčitost hybnosti. Čím přesněji měříme polohu, tím méně přesnou máme hybnost. Důsledkem je mimo jiné neexistence pojmu trajektorie částice v kvantové mechanice a nerozlišitelnost identických částic. Analogický vztah je mezi neurčitostí energie a času:

$$\Delta t \Delta E \geq \hbar, \quad (1.49)$$

což má své důsledky například ve spektroskopii. V daném časovém intervalu Δt jsme schopni změřit energii pouze s přesností ΔE . Pokud bychom měřili energii přesněji, museli bychom zvětšit Δt , což může být doba experimentu nebo doba, po kterou daný stav existuje. Pokud nás tedy zajímají procesy s velmi krátkou dobou života, musíme počítat s velkou neurčitostí energie.

Relace neurčitosti se dají „odvodit“ také z částicové povahy světla. Pokud chceme měřit přesně polohu částice, můžeme ji pozorovat pomocí světla. Nepřesnost měření bude dána vlnovou délkou světla λ , její snižování tak povede ke zvětšování přesnosti. Interakce světla s pozorovaným objektem na druhou stranu povede k předání hybnosti o řádové hodnotě:

$$\Delta p = \frac{h}{\lambda} \quad (1.50)$$

Což povede k neurčitosti měření hybnosti. Zároveň $\Delta x \approx \lambda$. Vynásobením pak získáme vztah:

$$\Delta x \Delta p \approx h, \quad (1.51)$$

který je v souladu s obecnějším vztahem 1.48.



Příklad 2

Zadání: Elektronový svazek má rychlost $1000 \pm 0.01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jak přesně můžeme určit v daném okamžiku polohu elektronu?

Řešení:

Neurčitost hybnosti elektronu je dána vztahem:

$$\Delta p_x = (0.01)(9.11 \cdot 10^{-31}) = 9.11 \cdot 10^{-33} \text{ kg m s}^{-1}$$

Neurčitost polohy je potom dána vztahem:

$$x \geq \frac{\hbar}{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-33}} = 0.0058 \text{ m} = 0.58 \text{ cm}.$$

1.9 Postuláty kvantové mechaniky

Kvantová mechanika je stavěna axiomatically, je tedy založena (podobně jako termodynamika) na sadě tvrzení, které není možné dokázat. Z nich se poté tvoří celá stavba kvantové mechaniky. Pokud by postuláty vedly k důsledkům, jež by byly v rozporu se zkušeností, bylo by třeba se postulátů vzdát.

Tabulka 1: *Klasická mechanika vs Kvantová mechanika*

	klas. mech.	kvant. mech
Stav	\vec{r}, \vec{p}	$\Psi(x, t)$
Pohybové rovnice	$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \nabla V$	$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$
Časově-nezávislé rovnice	$\frac{mv^2}{r} = \vec{F}$	$\hat{H} \psi = E \psi$
Relace neurčitosti	-	$\Delta x \Delta p \geq \hbar$ atp.

1. postulát: Stav kvantově-mechanické soustavy je plně určen vlnovou funkcí $\Psi(x, t_0)$. Pravděpodobnost nalezení částice v elementu dx kolem x_0 je $|\Psi(x_0, t)|^2 dx$

Poznámka 1: Z postulátu vyplývá normalizační podmínka 1.46. Poznámka 2: Na vlnovou podmínku jsou kladeny podmínky viz podkapitola 1.6.

2. postulát: Pro každou měřitelnou veličinu v klasické mechanice (poloha, hybnost) existuje korespondující operátor.

3. postulát: V experimentu je možné změřit pouze hodnoty, které jsou vlastními hodnotami daného operátoru. Poznámka 1: Operátory jsou hermitovské. Pak totiž budou vlastní čísla reálná, což bychom u měřené veličiny očekávali. Poznámka 2: Spolu se Schrödingerem jsme vyspekulovali operátor celkové energie:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V. \quad (1.52)$$

Porovnáním s klasickým výrazem pro energii:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad (1.53)$$

můžeme usuzovat, že operátor pro polohu bude poloha a operátor hybnosti:

$$\hat{p} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.54)$$

$$\hat{x} \rightarrow x \quad (1.55)$$

4. postulát: Jestliže se částice nachází ve stavu popsaném vlnovou funkcí $\Psi(x, t)$, pak sada identických měření veličiny A povede ke střední hodnotě:

$$\langle A \rangle = \frac{\int \Psi^* \hat{A} \Psi dx}{\int \Psi^* \Psi dx}. \quad (1.56)$$

5. postulát: Vývoj kvantově-mechanického stavu se řídí časově-závislou Schrodingerovou rovnicí:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi. \quad (1.57)$$

1.10 Kvantová mechanika pro systém o více částicích

Doposud jsme se zabývali pouze jednou částicí pohybující se ve směru osy x . Schrödingerova rovnice pak má tvar:

$$\hat{H} \psi = E \psi, \quad (1.58)$$

kde

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V. \quad (1.59)$$

Zobecnění na tři dimenze je triviální:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V. \quad (1.60)$$

Zobecnění pro více částic pak v podobném duchu:

$$\hat{H} = \hat{T}_1 + \hat{T}_2 + \hat{T}_3 + \dots + \hat{T}_N + V = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_2 - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_3 - \dots - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_N + V, \quad (1.61)$$

kde:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \quad (1.62)$$



Příklad 3

Zadání: Zapište Hamiltonův operátor pro molekulu H_2^+ .

Řešení:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_A} \Delta_A - \frac{\hbar^2}{2m_B} \Delta_B - \frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_e + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e^2}{(\vec{r}_A - \vec{r}_B)} - \frac{e^2}{(\vec{r}_A - \vec{r}_e)} - \frac{e^2}{(\vec{r}_B - \vec{r}_e)} \right)$$

2 Matematika kvantové mechaniky

V této kapitole se ve stručnosti podíváme na základní matematický aparát, se kterým se setkáváme v kvantové mechanice. Klasická mechanika popisuje stav každé částice pomocí šesti proměnných – tří souřadnic a tří s ní spojených hybností. Tato šestice vytváří bod v tzv. fázovém prostoru. Naproti tomu kvantová mechanika popisuje stav systému (např. částice) pomocí vlnové funkce $\psi(x, y, z, t)$, která je funkcí souřadnic a času. Obecně jde o funkci komplexní a proto si nejprve stručně připomeneme základní pravidla práce s komplexními čísly (viz kapitola 2.1).

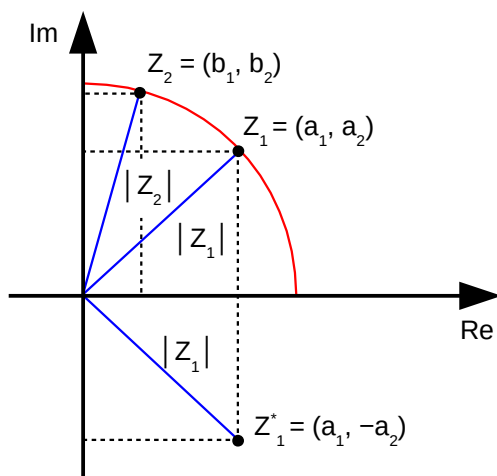
V kvantové mechanice každé měřitelné veličině přiřazujeme operátor. Hodnoty, jichž může měřená veličina nabývat, získáme jako vlastní čísla daného operátoru. Většina úloh v kvantové mechanice vede na řešení vlastního problému daného operátoru. Proto se seznámíme s potřebnými partiemi lineární algebry, jako jsou lineární prostor, operátor, vlastní funkce, vlastní číslo atd. (viz kapitola 2.2).

2.1 Komplexní čísla

Jako komplexní číslo Z označujeme uspořádanou dvojici reálných čísel a_1 a a_2 . Komplexní číslo $Z = (a_1, a_2)$ nejčastěji zapisujeme v tzv. algebraickém tvaru $Z = a_1 + ia_2$, kde i je imaginární jednotka, pro kterou platí $i^2 = -1$. Pro imaginární jednotku můžeme psát $i = \sqrt{-1}$, byť to není matematicky zcela korektní, protože druhá odmocnina ze záporného čísla není definována. Číslo a_1 je reálná část komplexního čísla Z , kterou značíme $\mathbf{Re} Z$. Číslo a_2 je imaginární část komplexního čísla Z , kterou značíme $\mathbf{Im} Z$. Všechna komplexní čísla Z tvoří množinu komplexních čísel \mathbb{C} , proto můžeme psát $Z \in \mathbb{C}$.

Z algebraického tvaru komplexního čísla Z vidíme, že reálná čísla tvoří podmnožinu komplexních čísel a to takových, že pro ně platí $R \equiv Z = a_1 + 0i$, neboli reálné číslo je komplexní číslo ve tvaru $R = (a_1, 0)$. Z tohoto důvodu platí, že množina reálných čísel \mathbb{R} je podmnožinou komplexních čísel \mathbb{C} , což symbolicky zapíšeme jako $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Na druhou stranu komplexní číslo, jehož reálná část je rovna nule $J = (0, a_2)$, kde $a_2 \neq 0$ označujeme jako ryze imaginární číslo.

Komplexní čísla můžeme zobrazit jako body v komplexní rovině, kde kartézskou osu x označujeme jako osu reálných čísel \mathbf{Re} a kartézskou osu y označujeme jako osu ryze imaginární čísel \mathbf{Im} (viz obr. 5).



Obrázek 5: Znárodnění komplexní roviny s vyznačením komplexních čísel. Dále jsou demonstrovány základní operace s komplexními čísly – komplexní sdružení a absolutní hodnota (modul) komplexního čísla.

Protože komplexní čísla tvoří komplexní rovinu, není možné je uspořádat podobně jako reálná čísla. Pro porovnávání komplexních čísel je možné zavést absolutní hodnotu komplexního čísla (modul) vztahem

$$|Z| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \quad (2.1)$$

Absolutní hodnota komplexního čísla je reálné nezáporné číslo a platí, že $|Z| = 0$ právě tehdy, když $Z = 0$. Komplexní čísla, která mají stejnou absolutní hodnotu, leží na kružnici o poloměru $r = |Z|$ s počátkem ve středu souřadného systému (v obrázku 5 vyznačena červeně).

Pro komplexní čísla definujeme stejně jako pro čísla reálná tyto operace: sčítání, odčítání, násobení a dělení. Všechny operace zde pro úplnost shrneme. Mějme dvě komplexní čísla $Z_1 = a_1 + ia_2$ a $Z_2 = b_1 + ib_2$ zapsaná pro jednoduchost v algebraickém tvaru.

1. Při sčítání (odčítání) sčítáme (odčítáme) zvlášť reálnou část a zvlášť imaginární část komplexních čísel.

$$Z_1 \pm Z_2 = (a_1 + ia_2) \pm (b_1 + ib_2) = (a_1 \pm b_1) + i(a_2 \pm b_2) \quad (2.2)$$

2. Komplexní čísla násobíme stejně jako dvojčleny. Nesmíme ale zapomenout, že platí vztah $i^2 = -1$.

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + ia_2) \cdot (b_1 + ib_2) = (a_1b_1 - a_2b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \quad (2.3)$$

3. Dělíme tak, že podíl nejprve rozšíříme vhodnou jedničkou, abychom ve jmenovateli dostali reálné číslo. I v oboru komplexních čísel platí, že $b \neq 0$, jinak podíl není definován.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 + ia_2}{b_1 + ib_2} = \frac{a_1 + ia_2}{b_1 + ib_2} \cdot \frac{b_1 - ib_2}{b_1 - ib_2} = \frac{(a_1b_1 + a_2b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{b_1^2 + b_2^2} \quad (2.4)$$

Při počítání s komplexními čísly je výhodné definovat číslo komplexně sdružené ke komplexnímu číslu Z vztahem

$$Z^* = (a_1, a_2)^* = (a_1, -a_2), \quad (2.5)$$

nebo podobně v algebraickém tvaru

$$Z^* = (a_1 + ia_2)^* = a_1 - ia_2. \quad (2.6)$$

Geometrická interpretace komplexního sdružení je následující. Komplexně sdružené číslo Z^* je osově souměrné ke komplexnímu číslu Z podle osy reálných čísel **Re**. Na obrázku 5 je komplexně sdruženo číslo Z_1 . Vynásobíme-li komplexní číslo s číslem k němu komplexně sdruženým, dostaneme kvadrát absolutní hodnoty komplexního čísla, protože

$$\begin{aligned} Z \cdot Z^* &= (a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2)^* = (a_1, a_2) \cdot (a_1, -a_2) = (a_1^2 + a_2^2, a_1a_2 - a_1a_2) = (a_1^2 + a_2^2, 0) = |Z|^2, \\ Z \cdot Z^* &= |Z|^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pro sčítání a násobení komplexních čísel platí asociativní, komutativní a distributivní zákon podobně jako u čísel reálných. Pro komplexně sdružená čísla je možné odvodit následující relace

$$(Z_1 + Z_2)^* = Z_1^* + Z_2^*, \quad (Z_1 Z_2)^* = Z_1^* \cdot Z_2^*, \quad \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^* = \frac{Z_1^*}{Z_2^*}. \quad (2.8)$$

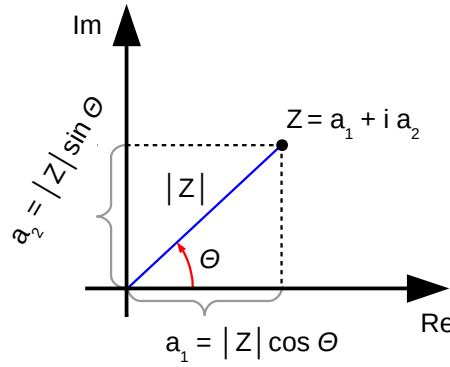
Pro řadu výpočetních aplikací je výhodné komplexní číslo Z zapsat v tzv. goniometrickém tvaru. Ten odvodíme tak, že v komplexní rovině zobrazíme komplexní číslo Z a uděláme pravoúhlé průměty absolutní hodnoty komplexního čísla $|Z|$ do reálné **Re** a imaginární **Im** osy. Označíme-li orientovaný úhel, který svírá průvodič absolutní hodnoty s osou reálných čísel jako θ , můžeme odvodit, že

$$a_1 = |Z| \cos \theta, \quad a_2 = |Z| \sin \theta. \quad (2.9)$$

Dosadíme-li průměty a_1 a a_2 z rovnice (2.9) do algebraického tvaru komplexního čísla $Z = a_1 + ia_2$, pak po drobných úpravách odvodíme goniometrický tvar komplexního čísla

$$\begin{aligned} Z &= a_1 + ia_2 = |Z| \cos \theta + i(|Z| \sin \theta) \\ Z &= |Z|(\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pro větší názornost je odvození goniometrického tvaru komplexního čísla daného vztahem (2.10) graficky znázorněno na obrázku 6.



Obrázek 6: K odvození zápisu komplexního čísla v goniometrickém tvaru.

V kvantové mechanice se nám bude často hodit tzv. Eulerova identita

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (2.11)$$

která je základem komplexní analýzy, oboru matematiky studujícím funkce komplexní proměnné. Pro zájemce nyní dodáváme její odvození. Nejprve si připomeneme Taylorovu rozvoj funkce e^x okolo bodu $x_0 = 0$. Hledaná Taylorova řada je

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (2.12)$$

Pro další použití v odvození si ještě připomeneme Taylorovy rozvoje funkcí $\sin x$ a $\cos x$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (2.13)$$

Čistě formální záměnou $x \equiv i\theta$ ve vztahu (2.12) dostaneme po rozepsání Taylorovu řadu ve tvaru

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (2.14)$$

Přeuspořádáním řady (2.14) a využitím vztahů (2.13) dostaneme

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \dots = \underbrace{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right)}_{\cos \theta} + i \underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)}_{\sin \theta}$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (2.15)$$

což je Eulerova identita, kterou jsme chtěli odvodit. Eulerova identita umožňuje komplexní číslo Z zapsat v tzv. exponenciálním tvaru.

Exponenciální tvar komplexního čísla Z odvodíme tak, že vyjdeme z goniometrického tvaru komplexního čísla (2.10), do kterého dosadíme Eulerovu identitu (2.11)

$$Z = |Z|e^{i\theta}. \quad (2.16)$$

Exponenciální tvar komplexního čísla je obzvlášť šikovný při násobení a dělení komplexních čísel. Pro násobení komplexních čísel $Z_1 = |Z_1|e^{i\theta}$ a $Z_2 = |Z_2|e^{i\phi}$ v exponenciálním tvaru dostaneme

$$Z_1 Z_2 = |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot e^{i(\theta+\phi)}. \quad (2.17)$$

Podobně pro dělení komplexních čísel Z_1 a Z_2 dostaneme

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \cdot e^{i(\theta-\phi)}. \quad (2.18)$$

Zapišeme-li komplexní číslo v exponenciálním tvaru, je intuitivní definovat mocninu komplexního čísla Z . Pro počítání s mocninami platí, že

$$Z^n = |Z|^n e^{in\theta}, \quad (2.19)$$

což je hledaná n -tá mocnina komplexního čísla Z . Dosazením Eulerovy identity (2.11) do rovnice (2.19) můžeme odvodit známou Moivreovu větu

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \text{tj.} \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \quad (2.20)$$

Na závěr kapitoly o komplexních číslech si ukážeme jeden ilustrační příklad, který demonstruje, jak odvozovat různé goniometrické identity pomocí Moivreovy věty.



Příklad 4

Zadání: Odvoďte známé vzorečky pro kosinus a sinus dvojnásobného argumentu

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{a} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta.$$

Řešení: Použijeme Moivreovu větu (2.20) ve tvaru

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

Odtud porovnáním členů s a bez komplexní jednotky dostaneme vzorečky pro kosinus a sinus dvojnásobného argumentu.

2.2 Operátory

2.2.1 Co je operátor

Čtenář je nepochybně intimně seznámen s pojmem funkce. Funkce představuje matematickou operaci, kdy působením na číslo (nezávisle proměnnou) získáme nové číslo (závisle proměnnou). Operátor naproti tomu představuje matematickou operaci, kdy působením na funkci získáme funkci novou. Působením operátoru \hat{O} na funkci f zapíšeme

$$\boxed{\hat{O}f = g}, \quad (2.21)$$

kde výsledkem působení operátoru \hat{O} je nová funkce g . Zapamatujme si, že z definiční rovnice působení operátoru na funkci (2.21) plyne, že pořadí operátoru a funkce, na kterou operátor působí, není libovolné, ale že operátor vždy působí na funkci stojící napravo od operátoru.

Abychom se blíže seznámili s operátory, představme si několik základních typů operátorů. Nejjednodušším operátorem může být operátor

$$\hat{O} = 1,$$

neboli operátor identity nebo také jednotkový operátor. Tento operátor působě na libovolnou funkci f vrátí funkci g takovou, že platí $g = 1 \cdot f$. Dalším jednoduchým operátorem může být například násobení proměnnou x

$$\hat{O} = x.$$

Pakliže tento operátor bude působit na funkci $f = x^2$ dostaneme

$$\hat{O}f = x \cdot f = x \cdot x^2 = x^3 = g.$$

Další důležitou třídou operátorů jsou diferenciální operátory, například

$$\hat{O} = \frac{d}{dx}.$$

Vidíme, že derivaci funkce podle proměnné x můžeme chápat jako působení operátoru derivace \hat{O} na funkci $f(x)$. Názorný příklad působení diferenciálního operátoru uvádí příklad 5.



Příklad 5

Zadání: Nalezněte výsledek působení operátoru $\hat{O} = \frac{d}{dx}$ na funkci $f(x) = \sin x$.

Řešení: Zapíšeme rovnici vyjadřující působení operátoru \hat{O} na funkci $f(x)$ a dostaneme

$$\hat{O}f(x) = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \equiv g(x)$$

Vidíme, že výsledkem působení operátoru \hat{O} na funkci $f(x)$ je nová funkce $g(x) = \cos x$.

V kvantové mechanice operátory reprezentující měřitelné veličiny, například pozici, hybnost, moment hybnosti nebo celkovou energii systému. V kapitole 1 o historickém vývoji kvantové mechaniky jsme se seznámili se Schrödingerovou rovnicí popisující pohyb částice v jedné dimenzi

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \Psi(x) = E\Psi(x), \quad (2.22)$$

Tuto rovnici můžeme přepsat jako operátorovou rovnici, tj. rovnici ve které vystupují operátory

$$\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (2.23)$$

kde \hat{H} je operátor celkové energie systému, tzv. hamiltonián (Hamiltonův operátor). Porovnáním rovnice (2.22) s rovnicí (2.23) odvodíme předpis pro hamiltonián

$$\hat{H} \equiv \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \quad (2.24)$$

V obecném případě pohybu částice v třírozměrném prostoru má Hamiltonův operátor tvar

$$\hat{H} \equiv \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) \right), \quad (2.25)$$

kde symbol Δ zastupuje Laplaceův operátor, který je druhou mocninou operátoru nabla $\Delta = \nabla^2$ a v kartézských souřadnicích má tvar

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.26)$$

Konkrétní tvar hamiltoniánu (2.25) závisí na konkrétní formě potenciální energie $V(x)$. Například v případě vodíkového atomu, kdy se elektron pohybuje v Coulombově poli generovaném protonem bude mít hamiltonián pro elektron tvar

$$\hat{H} \equiv \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right), \quad (2.27)$$

kde e je elementární náboj elektronu, m_e je hmotnost elektronu, ϵ_0 je permitivita vakua a r je vzdálenost protonu a elektronu.

Další hojně se vyskytující operátory jsou operátor hybnosti a operátor polohy

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla, \quad (2.28)$$

$$\hat{r} = \mathbf{r}, \quad (2.29)$$

kde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor v 3D eukleidovském prostoru. Operátory (2.28) a (2.29) jsou zapsané v tzv. souřadnicové reprezentaci, kdy operátor souřadnice je zvolen jako prosté násobení danou souřadnicí.

Vraťme se ještě jednou k rovnici (2.23), ta je totiž speciálním případem třídy rovnic označovaných jako vlastní problém. Mějme operátor \hat{O} a obecnou funkci f , pak rovnice

$$\boxed{\hat{O}f = \lambda f} \quad (2.30)$$

se označuje jako vlastní problém operátoru \hat{O} . Funkci f pak nazýváme vlastní funkce operátoru \hat{O} s vlastním číslem λ . Jinak řečeno vlastní funkce f operátoru \hat{O} je taková funkce, že působí-li na ni operátor \hat{O} , pak výsledkem tohoto působení je funkce f vynásobená číslem λ . V případě rovnice (2.23) je vlastní funkcí operátoru \hat{H} vlnová funkce $\Psi(x)$ s vlastním číslem E , celková energie systému. Vlastní problém operátoru má ústřední postavení v kvantové mechanice, protože řešení většiny úloh znamená hledání vlastních čísel a vlastních funkcí příslušného operátoru.

2.2.2 Operace s operátory

Podobně jako funkce můžeme mezi sebou sčítat, násobit, dělit atd. definujeme tyto operace i pro počítání s operátory. Vyjdeme ze vztahu (2.21), který definuje působení operátoru na funkci f a ve stručnosti si představíme základní operace s operátory.

Součtem dvou operátorů budeme rozumět operátor

$$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B} \quad (2.31)$$

takový, že platí

$$\hat{C}f = (\hat{A} + \hat{B})f = \hat{A}f + \hat{B}f, \quad (2.32)$$

kde f je libovolná testovací funkce. Pod součinem operátorů budeme rozumět operátor

$$\hat{C} = \hat{A}\hat{B} \quad (2.33)$$

takový, že platí

$$\hat{C}f = \hat{A}(\hat{B}f). \quad (2.34)$$

Stejně jako v případě násobení čísel figuruje číslo 1 jako jednotkový prvek vůči násobení, je i v případě operátorového počtu definován jednotkový prvek – jednotkový operátor $\hat{1}$

$$\hat{1}f = f. \quad (2.35)$$

Pomocí definice násobení operátorů (2.33) můžeme definovat kvadrát operátoru

$$\hat{A}^2 = \hat{A}\hat{A}. \quad (2.36)$$

A dále matematickou indukcí můžeme definovat n -tou mocninu operátoru

$$\hat{A}^n f = \hat{A}(\hat{A}^{n-1}f). \quad (2.37)$$

Obecně platí, že násobení operátorů (2.33) není komutativní, to znamená, že neplatí

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}. \quad (2.38)$$

Abychom mohli vyšetřovat komutativnost operátorů, zavádí se nový operátor – komutátor

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (2.39)$$

Když je komutátor dvou operátorů roven nulovému operátoru ($\hat{0}f = 0$)

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{0}, \quad (2.40)$$

říkáme, že operátory \hat{A} a \hat{B} spolu komutují. Když se komutátor nerovná nulovému operátoru, operátory nekomutují.

Jako příklad vyšetřování komutátoru dvou operátorů si spočtíme komutátor mezi operátorem hybnosti (2.28) a souřadnice (2.29). Dostaneme

$$[\hat{r}, \hat{p}] = -i\hbar \mathbf{r} \nabla + i\hbar \nabla \mathbf{r} = i\hbar (\nabla \mathbf{r} - \mathbf{r} \nabla) = i\hbar,$$

kde jsme využili identity z vektorové analýzy $\nabla \mathbf{r} - \mathbf{r} \nabla = \hat{1}$. Abychom ukázali, že tato identita platí, představme si, že řešíme problém pouze v jedné dimenzi a současně si povšimněme, že levá strana identity má tvar komutátoru dvou operátorů. Dále víme, že komutátor je také operátor, který můžeme nechat působit na libovolnou funkci f . Dostaneme

$$\frac{\partial x f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial x} = f + x f' - x f' = f,$$

kde první derivace je derivací součinu dvou funkcí. Odstraněním testovací funkce f dostaneme

$$\frac{\partial x}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial x} = \hat{1},$$

což je vektorová identita, kterou jsme chtěli dokázat.

Jak jsme ukázali v názorném příkladu, výsledkem komutátoru operátoru momentu hybnosti a souřadnice je operátor

$$[\hat{r}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (2.41)$$

který se nerovná nulovému operátoru, proto můžeme shrnout, že operátor hybnosti nekomutuje s operátorem souřadnice.



Příklad 6

Zadání: Určete komutátor operátorů $\hat{A} = \partial/\partial x$ a $\hat{B} = \partial/\partial y$.

Řešení: Sestavíme komutátor $[\hat{A}, \hat{B}]$ a necháme ho působit na testovací funkci $f = f(x, y)$.

Dostaneme

$$[\hat{A}, \hat{B}]f = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \hat{0},$$

kde poslední rovnost je splněna tehdy, když funkce f má spojitě všechny druhé parciální derivace.

Vidíme, že výsledkem působení komutátoru je nulový operátor, proto můžeme uzavřít, že operátory \hat{A} a \hat{B} spolu komutují.

Z definice komutátoru (2.39) vyplývají tři důležité vlastnosti komutátorů. První (antisymetrie)

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}] \quad (2.42)$$

se týká toho, že záleží na pořadí operátorů v komutátoru. To souvisí s tím, že operátory obecně nekomutují. Například platí

$$[\hat{r}, \hat{p}] = i\hbar,$$

ale

$$[\hat{p}, \hat{r}] = -i\hbar.$$

Druhou vlastností je linearita v druhém argumentu

$$[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]. \quad (2.43)$$

Ta souvisí s tím, že komutátor je lineární operátor (viz další kapitola 2.2.4). Třetí vlastnost (linearita)

$$[\alpha \cdot \hat{A}, \hat{B}] = \alpha \cdot [\hat{A}, \hat{B}] \quad (2.44)$$

souvisí s tím, že číslo α můžeme z komutátoru vytknout.

Na závěr této kapitoly uvedeme jedno důležité tvrzení. **Komutují-li spolu dva operátory, tj. $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{0}$, pak nutně mají společné vlastní funkce f .** Tvrzení si dokážeme. Předpokládejme, že máme dva libovolné operátory \hat{A} a \hat{B} , pro které platí

$$\hat{A}f = af$$

a

$$\hat{B}f = bf,$$

neboli operátory mají stejnou vlastní funkci f . Pak můžeme psát

$$\hat{A}\hat{B}f = \hat{A}(bf) = abf$$

a

$$\hat{B}\hat{A}f = \hat{B}(af) = abf,$$

protože čísla a a b komutují vždy. Odečtením předchozích dvou rovnic dostaneme

$$\hat{A}\hat{B}f - \hat{B}\hat{A}f = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})f = [\hat{A}, \hat{B}]f = 0,$$

což je výsledek, který jsme chtěli ukázat. Důkaz tvrzení je tak proveden. ■

2.2.3 Prostory funkcí a Hilbertův prostor

Matematické objekty jako funkce nebo operátory jsou definovány na určitém prostoru \mathcal{V} . Prostor je v matematice definován jako množina prvků, s kterými je možné provádět jisté operace. Ze základního kurzu matematiky znáte lineární vektorový prostor \mathcal{V} s dvěma operacemi, sčítáním $+$ a násobením číslem \cdot , kde prvky prostoru jsou vektory, neboli uspořádané N -tice čísel.

Omezme se nyní v našich úvahách na lineární vektorový prostor \mathbb{R}^3 , který můžeme chápat jako 3D eukleidovský prostor. Pak libovolný vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ můžeme pravoúhle promítnout do tří souřadných os, neboli reprezentovat tento vektor pomocí souboru vektorů souřadných os $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ a $e_3 = (0, 0, 1)$.

Abychom našli tuto reprezentaci, tj. byli schopni vektor \mathbf{v} zapsat pomocí vektorů souřadných os, nejprve určíme velikost průmětu vektoru \mathbf{v} do jednotlivých souřadných os. K tomu nám poslouží skalární součin vektoru \mathbf{v} s vektory souřadných os

$$\langle e_i | \mathbf{v} \rangle = v_i,$$

kde zvolená symbolika pro skalární součin má své opodstatnění, jak uvidíme později. Vektor \mathbf{v} tak můžeme v reprezentaci vektorů souřadných os zapsat jako

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \langle e_i | \mathbf{v} \rangle e_i. \quad (2.45)$$

Vztah (2.45) si zaslouží pár poznámek. Zaprvé si uvědomme, že výsledkem skalárního součinu $\langle e_i | \mathbf{v} \rangle$ je číslo. Za druhé vektor je prvek mající velikost i směr, ve vztahu (2.45) se o velikost „stará“ skalární součin a o směr jednotkové vektory souřadných os.

Vidíme, že abychom vektor \mathbf{v} „zrekonstruovali“ z vektorů reprezentujících osy souřadného systému, musí být tento soubor vektorů $\{e_i\}$ úplný. Tak například, kdyby chyběl vektor e_2 , nikdy bychom nebyli schopni zreprodukovat složku v_2 vektoru \mathbf{v} . Došli jsme k závěru, že úplný soubor vektorů $\{e_i\}$ umožňuje reprezentovat libovolný prvek z daného prostoru.

Úplný soubor vektorů $\{e_i\}$ bývá zvykem označovat za bázi daného prostoru. Báze má několik základních vlastností:

1. počet prvků báze je roven dimenzi prostoru,
2. pro libovolné dva prvky báze platí $\langle e_i | e_j \rangle = 0$, tj. prvky jsou na sebe kolmé – ortogonální.

Obeznamení s lineárními vektorovými prostory můžeme přistoupit k definici prostoru funkcí. Prostor funkcí je prostor prvků, kterými jsou funkce mající jisté vlastnosti. V analogii s vektorovými prostory i zde existuje úplný soubor funkcí, do kterého můžeme rozložit libovolnou funkci prostoru

$$f = \sum_i c_i \varphi_i, \quad (2.46)$$

kde funkce φ_i tvoří úplný soubor funkcí $\{\varphi_i\}$ a c_i jsou rozvojové koeficienty. Příkladem úplného souboru funkcí je například soubor x, x^2, x^3, \dots, x^n .

V kvantové mechanice je ústředním funkčním prostorem Hilbertův prostor, jehož prvky jsou kvadraticky integrovatelné komplexní funkce splňující

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \quad (2.47)$$

a dále je na tomto prostoru definována další vlastnost, skalární součin dvou funkcí

$$\langle f|g \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx, \quad (2.48)$$

kde $*$ značí komplexně sdruženou funkci. Zápis skalárního součinu ve tvaru $\langle f|g \rangle$, kde symbol $\langle f|$ označovaný jako bra-vektor znamená komplexně sdruženou funkci f^* , symbol $|g \rangle$ označovaný jako ket-vektor znamená funkci g a celý uzavřený symbol neboli braket chápeme jako integraci součinu funkcí f^*g , pochází od britského teoretického fyzika P. A. M. Diraca. Tato tzv. braketová notace se v kvantové mechanice hojně využívá pro svou eleganci a úsporné zkrácení zápisu, který by byl jinak velmi složitý.

2.2.4 Operátory specifických vlastností

Kvantová mechanika pracuje výhradně s lineárními operátory, aby byl splněn princip superpozice, tj. jsou-li ψ_1 a ψ_2 vlnové funkce daného systému, pak i funkce $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, kde c_1 a c_2 jsou libovolná komplexní čísla, je vlnovou funkcí uvažovaného systému. Pro lineární operátory platí

$$\hat{A}(\alpha f + \beta g) = \alpha \hat{A}f + \beta \hat{A}g, \quad (2.49)$$

kde α a β jsou obecně komplexní čísla.

Nejdůležitější operátory kvantové mechaniky jsou tzv. Hermitovy operátory \hat{H} definované tak, že působí stejně na obou stranách skalárního součinu (2.48)

$$\int f^* \hat{H} g dx = \int \hat{H}^* f^* g dx, \quad (2.50)$$

což můžeme v braketové notaci zapsat jako

$$\langle \hat{H} f | g \rangle = \langle f | \hat{H} g \rangle.$$

Z definiční rovnice (2.50) Hermitova operátoru vyplývá, že sdružený operátor se rovná původnímu operátoru

$$\hat{H}^* = \hat{H}.$$

Skutečnost, že Hermitovy operátory působí stejně v levé i v pravé straně skalárního součinu, se často značí následovně

$$\langle f | \hat{H} | g \rangle.$$

Centrální pozice Hermitova operátoru \hat{H} říká, že je jen na nás, zda necháme operátor působit v levé nebo pravé straně skalárního součinu.

Nyní se podíváme na několik základních vlastností hermitovských operátorů. První vlastností je, že vlastní čísla hermitovského operátoru jsou reálná

$$h^* = h. \quad (2.51)$$

Tuto vlastnost si dokážeme. Uvažujme vlastní problém hermitovského operátoru

$$\hat{H}\psi = h\psi.$$

Postupujme tak, že nejprve vlastní problém komplexně sdružíme

$$\hat{H}^*\psi^* = h^*\psi^*.$$

Nyní vynásobme zleva komplexně sdružený vlastní problém funkcí ψ a vlastní problém funkcí ψ^* a integrujme, dostaneme

$$\int \psi \hat{H}^* \psi^* dx = h^* \int \psi \psi^* dx = h^*$$

a

$$\int \psi^* \hat{H} \psi dx = h \int \psi^* \psi dx = h.$$

Protože je operátor \hat{H} hermitovský, platí

$$\int \psi \hat{H}^* \psi^* dx = \int \psi^* \hat{H} \psi dx$$

a po odečtení posledních rovnic dostaneme

$$\int \psi \hat{H}^* \psi^* dx - \int \psi^* \hat{H} \psi dx = 0 = h^* - h,$$

a tedy

$$h^* = h,$$

což jsme chtěli dokázat. ■

Dále ukážeme, že vlastní funkce hermitovského operátoru příslušející různým vlastním číslům jsou ortogonální, tj.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_j^* f_i dx = \delta_{ij}}, \quad (2.52)$$

kde symbol δ_{ij} značí Kroneckerovo delta, které nabývá hodnoty 1, když $i = j$ a hodnoty 0, když $i \neq j$. Pomocí braketové symboliky můžeme vztah (2.52) zapsat elegantně ve tvaru

$$\langle f_i | f_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Opět si tvrzení dokážeme. Předpokládejme platnost vztahů

$$\hat{H} \psi_1 = h_1 \psi_1$$

a

$$\hat{H} \psi_2 = h_2 \psi_2,$$

kde $h_1 \neq h_2$. První rovnici vynásobíme zleva ψ_2^* a integrujeme, druhou rovnici vynásobíme zleva ψ_1^* a integrujeme, dostaneme

$$\int \psi_2^* \hat{H} \psi_1 dx = h_1 \int \psi_2^* \psi_1 dx$$

a

$$\int \psi_1^* \hat{H} \psi_2 dx = h_2 \int \psi_1^* \psi_2 dx.$$

Dále komplexně sdružíme například první rovnici a rovnice odečteme

$$0 = (h_1 - h_2) \int \psi_1^* \psi_2 dx.$$

Při úpravách jsme využili toho, že operátor \hat{H} je hermitovský a že hermitovské operátory mají reálná vlastní čísla. Protože podle našeho počátečního předpokladu platí $h_1 \neq h_2$ je zřejmé, že musí platit

$$\int \psi_1^* \psi_2 dx = 0,$$

což jsme chtěli ukázat. Důkaz je tak proveden. ■

Na závěr si uveďme bez důkazu poslední důležitou vlastnost hermitovských operátorů. Soubor vlastních funkcí hermitovského operátoru vytváří úplný soubor bázových funkcí daného Hilbertova prostoru. To znamená, že když platí

$$\hat{H}f_i = h_i f_i \quad \text{pro každé } i,$$

pak libovolnou funkci ψ , můžeme zapsat jako lineární kombinaci

$$\psi = \sum_i c_i f_i,$$

kde c_i jsou rozvojové koeficienty.

2.2.5 Postuláty kvantové mechaniky a operátory

Kvantová mechanika, podobně jako klasická Newtonova mechanika, je založena na několika postulátech shrnutých v kapitole 1. Obsahem druhého postulátu je tvrzení, že **každé fyzikální veličině, kterou můžeme pro danou částici naměřit, je přiřazen operátor, který působí na vlnovou funkci**. Přitom se předpokládá, že operátor je lineární a hermitovský. Hermitita operátoru je nezbytná z hlediska měření fyzikálních veličin, protože podle třetího postulátu **jediné hodnoty, které může měřitelná fyzikální veličina A při jednotlivých měřeních nabývat, jsou vlastní čísla a_n odpovídajícího operátoru \hat{A}** .

Obsahem čtvrtého postulátu je střední hodnota měření veličiny A na kvantově mechanickém souboru. **Je-li systém popsán v okamžiku měření normovanou vlnovou funkcí ψ , pak výsledkem měření na odpovídajícím kvantově mechanickém souboru je střední hodnota veličiny A daná vztahem**

$$\bar{A} = \int \psi^* \hat{A} \psi \, dx, \quad (2.53)$$

kde integrace se provádí přes celý dostupný prostor. V duchu braketové notace můžeme psát

$$\bar{A} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle.$$

Jestliže vlnová funkce ψ je vlastní funkcí hermitovského operátoru \hat{A} s vlastním číslem a pak

$$\bar{A} = \langle \psi | \hat{A} \psi \rangle = \langle \psi | a \psi \rangle = a \langle \psi | \psi \rangle = a. \quad (2.54)$$

Výsledek (2.54) můžeme interpretovat následovně. Připravíme-li systém tak, že je charakterizovaný vlnovou funkcí, která je vlastní funkcí příslušného operátoru \hat{A} , poskytne opakované měření veličiny příslušné k operátoru \hat{A} vždy stejnou hodnotu fyzikální veličiny – vlastní číslo a .

V případě, že se nám nepodaří systém připravit tak, aby byl charakterizovaný vlastní funkcí příslušného operátoru, můžeme vlnovou funkci systému rozvinout do báze příslušného prostoru. Necht ψ je obecná vlnová funkce popisující systém. Vlnovou funkci ψ můžeme rozvinout do vlastních funkcí daného hermitovského operátoru $\psi = \sum c_n \phi_n$, kde $\hat{A} \phi_n = a_n \phi_n$, které tvoří úplný soubor na daném Hilbertově prostoru. Pak pro střední hodnotu platí

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \left\langle \sum_m c_m \phi_m \right| \hat{A} \left| \sum_n c_n \phi_n \right\rangle = \sum_{m,n} c_m^* c_n \langle \phi_m | \hat{A} \phi_n \rangle \\ &= \sum_{m,n} c_m^* c_n \langle \phi_m | a_n \phi_n \rangle = \sum_{m,n} c_m^* c_n a_n \langle \phi_m | \phi_n \rangle. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Protože vlastní funkce hermitovského operátoru jsou ortogonální (viz vztah (2.52)) je skalární součin ve výrazu (2.55) nenulový pouze když $m = n$. Proto se dvojitá suma zredukuje na jednoduchou a výraz (2.55) přejde na jednoduchý tvar

$$\bar{A} = \sum_n c_n^* c_n a_n = \sum_n |c_n|^2 a_n. \quad (2.56)$$

Všimněme si výsledku, který jsme obdrželi. Střední hodnota veličiny na souboru popsaném vlnovou funkcí $\psi = \sum c_n \phi_n$ se počítá jako vážená suma vlastních čísel daného operátoru. Váhami jsou v tomto případě kvadráty rozvojových koeficientů $|c_n|^2$, které mají význam pravděpodobnosti, že při měření na souboru naměříme právě hodnotu a_n .

Je to vztah (2.56), který z kvantové mechaniky dělá pravděpodobnostní teorii. Protože pouze tehdy, když systém připravíme ve stavu, který odpovídá vlastní funkci příslušného operátoru, dostaneme při opakovaném měření té samé veličiny stejný výsledek, přesně podle vztahu (2.54). Ve všech ostatních případech můžeme pouze určit pravděpodobnost toho, že změříme danou hodnotu veličiny, která je určena kvadrátem rozvojových koeficientů vlnové funkce popisující systém do báze vlastních funkcí hermitovského operátoru.

2.2.6 Maticová reprezentace operátorů

Zabývejme se ještě na chvíli rozvojem libovolné funkce do báze daného prostoru, který je dán vztahem (2.46). A pro jednoduchost zápisu adoptujme pro tuto chvíli braketovou notaci. Potom obecnou funkci $|\psi\rangle$ můžeme rozvinout do úplného souboru funkcí $|\varphi_i\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\varphi_i\rangle.$$

Pak pro vlastní problém $\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$ můžeme psát

$$\sum_i c_i \hat{A} |\varphi_i\rangle = a \sum_i c_i |\varphi_i\rangle.$$

Rovnici vynásobme zleva jednou konkrétní funkcí z úplného souboru funkcí, například funkcí $\langle\varphi_m|$

$$\sum_i c_i \langle\varphi_m|\hat{A}|\varphi_i\rangle = a \sum_i c_i \langle\varphi_m|\varphi_i\rangle = a c_m, \quad (2.57)$$

kde jsme využili toho, že úplný soubor funkcí jsou vlastní funkce hermitovského operátoru, které jsou ortogonální, tj. skalární součin $\langle s_m | s_i \rangle$ je nenulový jenom v případě, kdy $m = i$. Výsledkem je, že v sumaci na pravé straně výrazu (2.57) zůstane nenulový jen člen $a c_m$. Dále provedeme substituci

$$A_{mi} \equiv \langle\varphi_m|\hat{A}|\varphi_i\rangle,$$

kde výraz A_{mi} označujeme jako maticový element. Výsledkem je

$$\sum_i A_{mi} c_i = a c_m. \quad (2.58)$$

Rovnici (2.58) můžeme zapsat pro $\forall m$ a výslednou soustavu m -rovníc zapíšeme jako maticovou rovnici

$$\boxed{\mathbb{A}\mathbf{c} = a\mathbf{c}}, \quad (2.59)$$

kde \mathbb{A} je čtvercová matice $(m \times i)$ a \mathbf{c} je sloupcový vektor rozvojových koeficientů.

Došli jsme k důležitému závěru, který si zasluhuje bližší komentář. Pomocí postupu uvedeného výše jsme došli k tomu, že řešení vlastního problému operátoru \hat{A} se redukuje na počítání s maticemi. Vzhledem k tomu, že násobení matic je obecně nekomutativní, mají matice příhodné vlastnosti, aby byly vhodnou reprezentací operátorů. Toho si povšiml jako první německý fyzik Werner Heisenberg a formuloval svou interpretaci kvantové mechaniky, která vešla ve známost jako maticová mechanika.

3 Základní úlohy kvantové mechaniky

V této kapitole se podíváme na řešení Schrödingerovy rovnice pro některé jednoduché situace vedoucí k analyticky řešitelným úlohám. Takových situací, které by byly zároveň fyzikálně zajímavé není mnoho. Proto se při popisu složitějších problémů musíme uchýlit k jistým zjednodušením a aproximacím, kterým se budeme blíže věnovat v kapitole 8.

Nejprve se podíváme na jednoduchý experiment s dvojštěrbinou, který je ve své klasické podobě dobře znám z optiky a na kterém si blíže objasníme význam interferencí v kvantové mechanice. Poté budeme studovat volnou částici. Na tomto triviálním případě si vysvětlíme přístup k řešení úloh pomocí časově nezávislé Schrödingerovy rovnice. Na volnou částici plynule navážeme popisem částice v nekonečně hluboké potenciálové jámě. Zde si vysvětlíme odkud se bere kvantování energie a hybnosti. Na závěr kapitoly se ve stručnosti podíváme na velmi důležitý problém řešení kvantového harmonického oscilátoru, který slouží jako modelový fyzikální systém například pro vibrační pohyby molekul.

3.1 Rozptyl na dvojštěrbině

Z optiky je znám Youngův experiment. Mějme dvojici paralelních štěrbin (dvojštěrbinu), na které dopadá monochromatické záření. Záření prochází dvojštěrbinou a dopadá na stínítko. Výsledkem našeho pozorování bude interferenční obrazec střídajících se světlých a tmavých proužků, které po řadě odpovídají maximům a minimům intenzity dopadajícího světla. Pozorujeme tzv. interferenční obrazec. Maxima odpovídají konstruktivní interferenci, minima naopak interferenci destruktivní. Vysvětlení pozorovaného je následující. Světlo se prostorem šíří jako vlna, jako taková vyplňuje celý dostupný prostor. A tak nás nepřekvapí, že jedna vlna projde v jeden okamžik oběma štěrbinami zároveň. Proto je vlna procházející jednou štěrbinou ovlivněn vlnou z druhé štěrbinou a naopak. Vycházející paprsky spolu interagují, skládají se, což je podstatou pozorované interference.

Proveďme teď stejný experiment jen s tím rozdílem, že na dvojštěrbinu bude dopadat tok klasických částic. Protože částice je podle klasické mechaniky lokální objekt, zdá se být samozřejmé, že v daný okamžik může částice projít jen jednou štěrbinou, nikoliv oběma štěrbinami zároveň. Z klasické mechaniky pak pro intenzitu dopadajících částic vyplývá, že intenzita v daném bodě stínítka je součtem intenzit, které bychom dostali při otevření pouze první nebo druhé štěrbinou

$$I_{12} = I_1 + I_2. \quad (3.1)$$

Rovnice (3.1) vyjadřuje skutečnost, že přítomnost jedné štěrbinou nijak neovlivňuje to, jakým způsobem částice procházejí druhou štěrbinou.

V případě světla (Youngův experiment) je situace složitější, protože jak víme, dochází k interferenci. Tu lze popsat tak, že v daném bodě na stínítku se sčítají intenzity (v případě světla) elektrického pole od obou štěrbin

$$\mathbf{E}_{12} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \quad (3.2)$$

Intenzita světla je úměrná kvadrátu velikosti odpovídající intenzity pole, proto v případě světla dostaneme namísto rovnice (3.1)

$$I_{12} \neq I_1 + I_2. \quad (3.3)$$

Nerovnost ve výrazu (3.3) je důsledkem interference světelných paprsků. Světlo v tomto případě reprezentujeme jako vlnu, takže přítomnost jedné štěrbinou ovlivní průchod světla druhou štěrbinou. Výsledkem je existence interferenčního členu, který způsobí například to, že při otevření obou štěrbin může být intenzita v daném místě nižší než při otevření jen jedné štěrbinou.

Experiment ještě dále pozměňme. Snižujme intenzitu dopadajícího světla natolik, až proti stínítku bude v jeden okamžik dopadat vždy jen jeden foton (kvantum elektromagnetického záření). Při dopadu fotonu na stínítko dojde k ozáření jen jednoho bodu, podobně jako tomu je v případě klasických částic, kde každá může dopadnout jen na jediné místo na stínítku. Ovšem necháme-li experiment probíhat dostatečně dlouho, začne se z jednotlivých bodů na stínítku vytvářet stejný interferenční obrazec, jaký bychom dostali v případě dopadajících světelných vln, analogicky jako v případě Youngovy experimentu. Toto chování nemůžeme vysvětlit jinak, než že i jeden jediný foton je ovlivňován existencí druhé štěrbin, stejně jako monochromatická vlna.

Podobně jako fotony můžeme nechat na stínítko dopadat tok jiných elementárních částic, například neutronů či elektronů. Výsledek bude totožný tomu, který jsme dostali při experimentu s fotony. Pozorované interferenční chování částic nemůžeme vysvětlit pomocí teoretického aparátu klasické fyziky. Podle klasické fyziky projde-li částice jednou štěrbinou, nemá na ni přítomnost druhé štěrbin žádný vliv. Ovšem pozorované interferenční chování částic je experimentálním faktem, který nemůžeme přehlížet. Elegantním řešením je připustit, že částice mají obdobný vlnový charakter jako monochromatické záření. Tento závěr jako první vyslovil Louis de Broglie ve své hypotéze o dualitě částic a vlnění (viz kapitola 1).

U částic tedy můžeme pozorovat kvantověmechanické interference, které lze popsat tak, že každé částici přiřadíme vlnovou funkci $\psi(x, t)$, která je funkcí prostorových souřadnic a času. Přidržíme-li se i nadále analogie s optikou, můžeme hustotu pravděpodobnosti ρ nalezení částice v daném místě x a čase t vyjádřit jako

$$\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2. \quad (3.4)$$

Vzhledem k tomu, že kvadrát vlnové funkce interpretujeme jako pravděpodobnost (viz Bornova pravděpodobnostní interpretace kvantové mechaniky v kapitole 1), musí platit rovnice

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1, \quad (3.5)$$

která vyjadřuje skutečnost, že částice se musí někde vyskytovat. Rovnice (3.5) vyjadřuje tzv. normalizační podmínku.

Pokud zavedeme po řadě pro pravděpodobnosti dopadu částice na stínítko při otevřené první nebo druhé štěrbině označení p_1 a p_2 , pak pravděpodobnost dopadu na dané místo stínítka při obou otevřených štěrbinách se nerovná součtu pravděpodobností p_1 a p_2

$$p_{12} \neq p_1 + p_2, \quad (3.6)$$

ale pravděpodobnost bude záviset na interferenčním členu. Můžeme dokonce dostat výsledek takový, že $p_{12} = 0$, přestože $p_1 \neq 0$ a $p_2 \neq 0$, což vede k minimu intenzity na stínítku (analogie s destruktivní interferencí).

3.2 Vlná částice

Abychom názorně demonstrovali řešení časově nezávislé Schrödingerovy rovnice

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi = \hat{H}\psi = E\psi, \quad (3.7)$$

začneme s řešením nejjednoduššího možného problému, kterým je vlná částice, tj. částice na kterou nepůsobí žádná síla, tj. $V = 0$. Protože vlná částice se pohybuje volně, nejsou na řešení Schrödingerovy rovnice (3.7) kladeny žádné okrajové podmínky. Uvidíme, že neexistence okrajových podmínek vede k tomu, že energie a hybnost částice nebudou kvantovány.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že částice se může pohybovat pouze v jednom rozměru. Rovnice (3.7) pak přejde do tvaru

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \quad (3.8)$$

kde jsme využili předpoklad, že částice je volná, tj. $V = 0$. Rovnici (3.8) dále upravíme do tvaru

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \psi(x) = 0. \quad (3.9)$$

Protože celková energie volné částice je rovná kinetické energii částice $T = p^2/(2m)$ a protože kinetická energie může být kladná anebo nulová, můžeme pro celkovou energii volné částice psát $E \geq 0$. Vzhledem k této nerovnosti můžeme zavést substituci

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2, \quad (3.10)$$

kde $k \geq 0$ je reálné číslo, obvykle označované jako vlnový vektor. S využitím substituce (3.10) přejde rovnice (3.9) do tvaru

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) \psi(x) = 0, \quad (3.11)$$

což je obyčejná diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Rovnice tohoto typu řešíme metodou charakteristické rovnice – polynomu. V tomto případě je příslušný charakteristický polynom

$$\lambda^2 + k^2 = 0. \quad (3.12)$$

Řešením dostaneme kořeny

$$\lambda_{1,2} = \pm ik. \quad (3.13)$$

Podle předpokladu o řešení můžeme zapsat homogenní řešení rovnice (3.11) ve tvaru

$$\psi(x) = e^{\pm ikx}. \quad (3.14)$$

Působením operátoru hybnosti \hat{p} na vlnovou funkci (3.14) dostaneme

$$\hat{p}\psi(x) = -i\hbar \frac{d\psi(x)}{dx} = \pm \hbar k \psi(x). \quad (3.15)$$

Z rovnosti (3.15) vyplývají vlastní hodnoty hybnosti volné částice ve tvaru

$$p = \pm \hbar k. \quad (3.16)$$

Vlnovou funkci volné částice proto můžeme zapsat jako

$$\psi(x) = e^{-px/(i\hbar)}. \quad (3.17)$$

Vyjádříme-li celkovou energii částice pomocí hybnosti p , dostaneme výraz pro energii ve tvaru

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (3.18)$$

Vidíme, že ani hybnost ani energie volné částice nejsou kvantovány.

Na závěr si shrňme výsledky, ke kterým jsme při odvození došli. Vlnová funkce pro volnou částici je vlastní funkcí hamiltoniánu

$$\hat{H} = \hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \quad (3.19)$$

s vlastní hodnotou neboli energií $E = p^2/(2m)$. Dále víme, že vlnová funkce volné částice je i vlastní funkcí operátoru momentu hybnosti $\hat{p} = -i\hbar(d/dx)$ s vlastní hodnotou $p = \pm\hbar k$. Z toho vyplývá, že komutátor operátorů

$$[\hat{T}, \hat{p}] \quad (3.20)$$

musí být roven nule. Protože operátory spolu komutují (komutátor je nulový), mají společný soubor vlastních vlnových funkcí, a tak lze jednorozměrný pohyb volné částice charakterizovat pomocí dvou kvantových čísel – kinetické energie $E = p^2/(2m)$ a hybnosti p . Dále si všimněme, že de Broglieův vztah mezi vlnovým vektorem a hybností částice jsme zde nemuseli předpokládat, ale že nám vyšel z řešení Schrödingerovy rovnice (3.8) pro volnou částici.

3.3 Částice v nekonečně hluboké potenciálové jámě

Problém částice v nekonečně hluboké jámě nám poslouží jako vzorový příklad kvantověmechanického problému, ve kterém se okrajové podmínky kladené na řešení projeví v kvantování energií a hybností. Uvažujme nejdříve pro jednoduchost jednorozměrný případ, který pak přirozeně rozšíříme na trojrozměrný případ.

Předpokládejme, že v intervalu $\langle 0, a \rangle$ je potenciální energie $V(x)$ rovna nule, tj. $V = 0$. Dále předpokládejme, že mimo tento interval je potenciální energie nekonečná, tj. $V \rightarrow \infty$. Tímto předpokladem jsme si vytvořili potenciální jámu, která je pro částici uvězněnou uvnitř jámy, tj. v intervalu $\langle 0, a \rangle$ neproniknutelná, protože částice nemůže mít nekonečnou hodnotu energie.

Pro vlnovou funkci částice mimo jámu platí

$$\psi(x) = 0 \quad (3.21)$$

pro x takové, že $x < 0$ a $x > a$. Výraz (3.21) je vyjádřením skutečnosti, že částice se mimo potenciálovou jámu nemůže vyskytovat. Když máme vyřešen problém mimo samotnou jámu, zbývá nám vyřešit pohyb částice v jámě. Pro tento případ hledáme řešení Schrödingerovy rovnice

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \quad (3.22)$$

pro hodnoty x takové, že $x \in \langle 0, a \rangle$.

Diferenciální rovnici (3.22) řešíme pomocí charakteristického polynomu ve tvaru

$$\lambda^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0. \quad (3.23)$$

Vzhledem k tomu, že celková energie částice v jámě odpovídá její kinetické energii (v jámě platí $V = 0$), musí pro celkovou energii platit $E \geq 0$. Proto můžeme zavést stejné označení jako v kapitole 3.2 rovnice (3.10). Řešením dostaneme pro λ stejný výsledek jako ve výrazu (3.13). Obecné řešení rovnice (3.22) můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (3.24)$$

kde A a B jsou libovolné komplexní konstanty.

Jedním z postulátů, které kladou podmínky na akceptovatelnost vlnové funkce, je postulát o spojitosti vlnové funkce. Vzhledem k tomu, že mimo interval $\langle 0, a \rangle$ je vlnová funkce nulová (3.21), musí řešení (3.24) splňovat následující okrajové podmínky

$$\psi(0) = 0 \quad (3.25)$$

a

$$\psi(a) = 0. \quad (3.26)$$

První podmínku splníme tak, že položíme $A = -B$, tj. místo obecné vlnové funkce (3.24) vezmeme jen funkci ve tvaru

$$\psi(x) = N \sin(kx), \quad (3.27)$$

kde N je normovací konstanta. Využili jsme přitom Eulerovu identitu. Druhou podmínku (3.26) splníme tak, že položíme

$$ka = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.28)$$

kde n je přirozené číslo – kvantové číslo. V případě $n = 0$ bychom obdrželi řešení $\psi(x) = 0$, které nemá fyzikální význam, neboť částice by se na intervalu $\langle 0, a \rangle$ vůbec nevyskytovala.

Jak jsme předeslali, v případě omezeného pohybu, zde neproniknutelnou potenciálovou bariérou, dospějeme k závěru, že energie i odpovídající vlnový vektor jsou kvantovány

$$k_n = \frac{\pi}{a} n \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.29)$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.30)$$

a že kvantování vyplývá z okrajových podmínek (3.25) a (3.26). Vlnové funkce příslušející energiím daným vztahem (3.30) jsou

$$\psi_n(x) = N \sin \frac{\pi n x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.31)$$

V tento okamžik nám zbývá jedině, určit normovací konstantu N ze vztahu (3.31). Určíme ji tak, že požadujeme, aby se částice nacházela někde uvnitř jámy

$$\int_{x=0}^a |N|^2 \sin^2 \frac{\pi x n}{a} dx = 1, \quad (3.32)$$

který integrací vyřešíme a obdržíme

$$N = \sqrt{\frac{2}{a}} e^{i\alpha}, \quad (3.33)$$

kde α je libovolné reálné číslo. Vidíme, že vlnová funkce $\psi(x)$ je určená až na fázový faktor $\exp(i\alpha)$, který se zpravidla volí roven jedné.

Diskutujme nyní dosažené výsledky. Energie E_n stacionárních stavů (získali jsme je řešením časově nezávislé – stacionární – Schrödingerovy rovnice (3.22)) jsou větší než nula. Stav s energií $E_n = 0$ není pro jámu o konečné šířce a možný. Energetické spektrum, neboli soubor všech energií, je diskrétní a nedegenerované, tj. vlastnímu číslu (energii) přísluší jen jedna vlnová funkce. A konečně, energie E_n jsou úměrné kvadrátu kvantového čísla n^2 .

Vlnové funkce $\psi_n(x)$ pro částici v nekonečné potenciální 1D jámě jsou ortonormální

$$\int_0^a \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx = \delta_{mn}, \quad (3.34)$$

kde δ_{mn} je Kroneckerův symbol, který se rovná jedné, pakliže $m = n$, když $m \neq n$ je roven nule. Výraz (3.34) je jen jiným způsobem zápisu ortonormálnosti dvou funkcí. Vlnové funkce $\psi_n(x)$ dále tvoří úplnou bázi na příslušném Hilbertově prostoru. Počet uzlových bodů, tj. těch kde $\psi_n(x) = 0$ je roven $n - 1$.

Rozšíření na trojrozměrný problém je poměrně intuitivní. Uvažujme potenciální energii $V(x, y, z) = 0$ všude v oblasti $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ a $0 \leq z \leq c$, kde a, b, c jsou rozměry uvažované jámy. Mimo tuto oblast je potenciální energie nekonečná, $V \rightarrow \infty$.

Schrödingerova rovnice pro tento problém je

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z) \quad (3.35)$$

a její řešení je možné hledat ve tvaru (metoda separace proměnných)

$$\psi(x, y, z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z). \quad (3.36)$$

Dále předpokládáme, že celkovou energii můžeme vyjádřit jako součet

$$E = E_x + E_y + E_z. \quad (3.37)$$

Obdobným postupem řešení popsaným pro 1D případ dospějeme k výsledku, že vlnová funkce částice v 3D jámě je

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{\pi x l}{a} \sin \frac{\pi y m}{b} \sin \frac{\pi z n}{c}, \quad l, m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.38)$$

a jí odpovídající energie

$$E_{lmn} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right), \quad l, m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.39)$$

Na rozdíl od 1D případu jsou zde degenerované energetické hladiny. To znamená, že dané energii odpovídá několik lineárně nezávislých vlnových funkcí.

3.4 Harmonický oscilátor

Harmonický, nebo přesněji lineární harmonický oscilátor je jednou z fyzikálně důležitých úloh, pro kterou lze najít analytické řešení Schrödingerovy rovnice. Důležitost lineárního harmonického oscilátoru (LHO) plyne z toho, že jeho potenciální energie odpovídá prvním členům Taylorova rozvoje obecného potenciálu $V(x)$ v okolí minima $x = x_0$

$$V(x) = V(x_0) + \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (3.40)$$

První derivace potenciálu je v minimu rovna nule, navíc omezíme-li se pouze na rozvoj do druhého řádu a zvolíme-li vhodnou referenční hladinu, například odečtením hodnoty $V(x_0)$, vztah (3.40) se zjednoduší do tvaru

$$V(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=x_0} (x - x_0)^2, \quad (3.41)$$

který odpovídá potenciálu LHO. Podobným způsobem můžeme postupovat i v případě více dimenzí nebo u vícečásticových systémů.

Například vhodnou volbou tzv. normálních souřadnic můžeme popisovat pomocí systému nezávislých LHO vibrace víceatomových molekul. Na druhou stranu si musíme být vědomi jistých omezení tohoto modelu. Zásadním omezením je skutečnost, že při zvětšování souřadnice $x \rightarrow \infty$ roste síla $F = -dV/dx$ nade všechny meze, což je nefyzikální závěr. U reálných systémů dojde při překročení jisté mezní výchylky z rovnovážné polohy k disociaci systému, což vede k požadavku, že při $x \rightarrow \infty$ musí potenciál nabývat konečné hodnoty.

Při řešení 1D LHO vyjmeme ze Schrödingerovy rovnice, kde za potenciální energii systému dosadíme potenciál LHO

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \psi(x) = E \psi(x). \quad (3.42)$$

Schrödingerova rovnice (3.42) je diferenciální rovnicí s nelineárními koeficienty u nulté derivace. Tento typ rovnice se řeší tak, že nejprve rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\right)\psi(x) = 0. \quad (3.43)$$

Rovnice ve tvaru (3.43) se dále řeší zavedením bezrozměrných proměnných

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \quad (3.44)$$

a

$$\lambda \equiv \frac{2E}{\hbar\omega}. \quad (3.45)$$

Rovnici (3.43) tak přejde do bezrozměrného tvaru

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi(\xi) = 0. \quad (3.46)$$

Při řešení se dále postupuje tak, že nejprve hledáme asymptotické řešení vlnové funkce ψ pro $\xi \rightarrow \pm\infty$, kdy v rovnici (3.46) můžeme člen s λ zanedbat, protože ve srovnání s ostatními členy je malý. Výsledkem je asymptotické řešení ve tvaru

$$\psi(\xi) = Ae^{-\xi^2/2} + Be^{\xi^2/2}, \quad (3.47)$$

kde A a B jsou libovolné konstanty. Pro znaménko plus ve výrazu (3.47) vlnová funkce diverguje a nelze ji normovat, proto se vlnová funkce $\psi(\xi)$ asymptoticky chová jako funkce

$$\psi(\xi) = Ae^{-\xi^2/2}, \quad (3.48)$$

a tak můžeme řešení rovnice (3.46) hledat ve tvaru

$$\psi(\xi) = v(\xi)e^{-\xi^2/2}, \quad (3.49)$$

kde $v(\xi)$ je zatím neurčená funkce. Dosadíme-li předpokládané řešení (3.49) do rovnice (3.46) dostaneme po malé úpravě diferenciální rovnici

$$v'' - 2\xi v' + (\lambda - 1)v = 0, \quad (3.50)$$

kde čárka naznačuje derivaci podle ξ . Diferenciální rovnice (3.50) se řeší pomocí rozvoje hledané funkce v mocninou řadu, kde nakonec dojdeme k rekurentnímu vztahu mezi koeficienty řady. Aby funkce $v(\xi)$ pro $\xi \rightarrow \pm\infty$ nedivergovala, musí dosud neurčité λ splňovat podmínku

$$\lambda = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.51)$$

S přihlédnutím ke vztahu (3.45) dostaneme pro energii stacionárních stavů

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.52)$$

Vidíme, že kvantování energií je opět dáno okrajovými podmínkami kladenými na uvažovaný systém. Z rovnice (3.52) také plyne, že když za n dosadíme $n = 0$, neboli počítáme energii nulové hladiny LHO, dostaneme

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (3.53)$$

Energie základního stavu je tak nenulová. To je podstatný rozdíl oproti klasické fyzice, kde částice může mít nulovou energii v minimu potenciální energie $V(x)$. Nenulovost energie úzce souvisí s relacemi neurčitosti. Energie (3.53) je někdy označována jako energie nulových kmitů a lze ji například ověřit v případě kmitů krystalové mřížky, kde na rozdíl od klasické fyziky vlivem nenulovosti kmitů, nevymizí rozmazání difrakčního obrazce ani při snižování teploty k absolutní nule $T \rightarrow 0$.

Provedeme-li zpětné dosazení všech použitých substitucí a provedeme-li normalizaci vlnové funkce, získáme vlnové funkce LHO ve tvaru

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \pi^{1/2}}} e^{-(x/x_0)^2/2} H_n(x/x_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.54)$$

kde funkce $H_n(\xi)$ je funkce $v(\xi)$ ze vztahu (3.49) a nazýváme je Hermitovy polynomy

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}. \quad (3.55)$$

4 Moment hybnosti

Momentem hybnosti na první pohled nepůsobí jako téma, které by bylo pro chemika obzvláště palčivé. Ve skutečnosti je ale z kvantové teorie pro chemika málo co důležitějšího. V této kapitole se budeme zabývat výhradně orbitálním moment hybnosti \mathbf{L} , spin odsuneme do kapitoly 5.

Povídání o momentu hybnosti začneme jeho definicí z klasické mechaniky. Vybaveni aparátem základních kvantově mechanických operátorů – polohy a hybnosti, odvodíme operátory pro moment hybnosti a komutační relace mezi nimi. Ukážeme, že když operátory komutují, znamená to, že mají společné vlastní funkce. Toho dále využijeme při řešení vlastního problému operátorů momentu hybnosti.

Pro popis rotačního pohybu nejsou příliš vhodné kartézské souřadnice. Zavedeme si proto vhodnější souřadné systémy a ukážeme, jaké výhody při řešení problémů s momentem hybnosti poskytují.

4.1 Operátor momentu hybnosti

Z klasické fyziky víme, že pohybující se částice o hmotnosti m rychlostí v nese hybnost

$$p = mv. \quad (4.1)$$

Rotace částice je spojena s momentem hybnosti

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (4.2)$$

kde \mathbf{r} je pozice částice vůči zvolenému počátku. Znaménko \times znamená vektorový součin. Vektor momentu hybnosti pak můžeme zapsat ve formě

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}, \quad (4.3)$$

kde \mathbf{i} , \mathbf{j} a \mathbf{k} jsou jednotkové vektory ve směru os x , y a z .

Při odvození kvantově mechanického operátoru momentu hybnosti, vyjdeme z toho, že moment hybnosti \mathbf{L} je vyjádřen pomocí pozice \mathbf{r} a hybnosti \mathbf{p} , pro které známe příslušné operátory (viz vztahy (2.29) a (2.28) v kapitole 2)

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla \quad \text{a} \quad \hat{r} = \mathbf{r}. \quad (4.4)$$

Dosazením operátorů (4.4) do definičního vztahu momentu hybnosti (4.2) získáme operátor hybnosti

$$\boxed{\hat{L} = -i\hbar(\mathbf{r} \times \nabla)}. \quad (4.5)$$

Pro jeho složky plyne z (4.3)

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (4.6)$$

$$\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (4.7)$$

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (4.8)$$

Při odvození komutačních relací mezi složkami momentu hybnosti vyjdeme ze základní komutační relace mezi pozicí a hybností

$$[q, p_q] = i\hbar \quad \text{a} \quad [q, p_n] = \hat{0}, \quad q \neq n, \quad (4.9)$$

kde q i n značí libovolnou složku kartézského prostoru. S využitím vztahů (4.9) odvodíme komutační relace mezi složkami momentu hybnosti

$$[L_x, L_y] = i\hbar \hat{L}_z, \quad [L_y, L_z] = i\hbar \hat{L}_x, \quad [L_z, L_x] = i\hbar \hat{L}_y. \quad (4.10)$$

Protože je moment hybnosti vektor, můžeme definovat, jako u každého vektoru, jeho velikost. V kvantové mechanice je užitečné pracovat s kvadrátem velikost. Definujme kvadrát operátoru momentu hybnosti

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \quad (4.11)$$

a odvoďme komutační relace mezi kvadrátem momentu hybnosti a složkami momentu hybnosti. Protože platí

$$[\hat{A}^2, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{A} + \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}], \quad (4.12)$$

můžeme například pro z -ovou složku momentu hybnosti psát

$$\begin{aligned} [\hat{L}^2, \hat{L}_z] &= [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \hat{L}_z] \stackrel{a}{=} [\hat{L}_x^2, \hat{L}_z] + [\hat{L}_y^2, \hat{L}_z] + [\hat{L}_z^2, \hat{L}_z] = \\ &\stackrel{b}{=} [\hat{L}_x, \hat{L}_z]\hat{L}_x + \hat{L}_x[\hat{L}_x, \hat{L}_z] + [\hat{L}_y, \hat{L}_z]\hat{L}_y + \hat{L}_y[\hat{L}_y, \hat{L}_z] + \hat{0} = \\ &\stackrel{c}{=} -i\hbar \hat{L}_y \hat{L}_x - i\hbar \hat{L}_x \hat{L}_y + i\hbar \hat{L}_x \hat{L}_y + i\hbar \hat{L}_y \hat{L}_x = \hat{0}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Úprava označená jako a plyne z toho, že komutátor je lineární v první argumentu. Úprava b vychází ze vztahu (4.12) a dále z toho, že $[\hat{L}_z^2, \hat{L}_z] = \hat{0}$, protože operátor komutuje sám se sebou vždy. Úprava c je dosazením z dříve odvozených komutačních relací (4.10). Analogicky jako pro z -ovou složku můžeme komutační relace odvodit i pro ostatní složky

$$\boxed{[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = \hat{0}.} \quad (4.14)$$

Vztah (4.14) má zásadní důležitost, určuje maximální možnou informaci, kterou můžeme získat při měření momentu hybnosti kvantové částice, tedy současně můžeme změřit pouze kvadrát velikosti vektoru momentu hybnosti a jednu jeho složku, konvenčně se volí z -ová složka.

4.2 Vlastní čísla operátorů momentu hybnosti

V kapitole 2.2.5 jsme uvedli jeden z postulátů kvantové mechaniky, že měřením dané veličiny získáme vlastní čísla příslušná operátoru, který zastupuje měřenou veličinu. Proto výsledkem měření momentu hybnosti budou vlastní čísla operátoru momentu hybnosti. Vztah (4.14) nám říká, že současně můžeme změřit kvadrát velikosti momentu hybnosti a jeho z -ovou složku. Protože vlastní čísla operátorů jsou určena rovnicí vlastního problému, zapíšeme si příslušné vlastní problémy těchto dvou operátorů

$$\hat{L}^2 Y = cY$$

a

$$\hat{L}_z Y = bY,$$

kde Y je společná vlastní funkce operátorů \hat{L}^2 a \hat{L}_z , protože z kapitoly 2.2.2 víme, že když dva operátory komutují, mají společný soubor vlastních funkcí, b a c jsou vlastní čísla příslušných operátorů. V odvození níže ukážeme, že vlastní čísla operátoru kvadrátu momentu hybnosti jsou

$$c = \hbar^2 l(l+1) \quad \text{kde} \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

a vlastní čísla operátoru z -ové složky momentu hybnosti jsou

$$b = \hbar m \quad \text{kde} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (4.16)$$

Vidíme, že vlastní čísla, tj. měřitelné hodnoty, nemohou být libovolné, ale nabývají konkrétních diskrétních hodnot. Říkáme, že moment hybnosti je kvantován. Působení operátorů momentu hybnosti na vlnovou funkci můžeme zapsat jako

$$\boxed{\hat{L}^2 = \hbar^2 l(l+1)} \quad \text{kde} \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

a

$$\boxed{\hat{L}_z = \hbar m} \quad \text{kde} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (4.18)$$

Nyní si odvodíme relace (4.17) a (4.18). Vraťme se zpět k rovnici (4.14) a zapišme si vlastní problémy příslušných operátorů

$$\hat{L}^2 |lm\rangle = \lambda_l |lm\rangle \quad (\text{O-1})$$

a

$$\hat{L}_z |lm\rangle = m |lm\rangle, \quad (\text{O-2})$$

kde $|lm\rangle$ je v braketové notaci zapsaná vlastní funkce operátorů \hat{L}^2 a \hat{L}_z . Abychom si při odvození usnadnili zápis vztahů, předpokládáme, že pracujeme v takové soustavě jednotek, kde můžeme položit $\hbar = 1$.

Naším cílem je odvodit výrazy pro vlastní čísla λ_l a m . Zavedme nový operátor $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2$, který vznikne přepsáním operátoru kvadrátu momentu hybnosti (4.11). Pak s využitím vztahů (O-1) a (O-2) dostaneme

$$(\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2) |lm\rangle = (\lambda_l - m^2) |lm\rangle. \quad (\text{O-3})$$

Protože vlastní čísla hermitovského operátoru jsou reálná (viz kapitola 2) a protože kvadrát reálného čísla je číslo větší nebo rovno nule, můžeme ze vztahu (O-3) vyvodit, že možné hodnoty m jsou shora i zdola omezené, protože m^2 nemůže být větší než λ_l . Proto existuje minimální a maximální hodnota m , které po řadě označíme jako m_{\min} a m_{\max} .

Dále si definujeme tzv. posuvné operátory

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y \quad \text{a} \quad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y. \quad (\text{O-4})$$

Aplikací rovnic (4.10) a (4.14) odvodíme příslušné komutační relace pro posuvné operátory ve tvaru

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = \hat{0}, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm \hat{L}_\pm. \quad (\text{O-5})$$

Necháme-li působit operátor \hat{L}_\pm na stav $|lm\rangle$ dostaneme

$$\hat{L}^2 \hat{L}_\pm |lm\rangle \stackrel{a}{=} \hat{L}_\pm \hat{L}^2 |lm\rangle = \lambda_l \hat{L}_\pm |lm\rangle \quad (\text{O-6})$$

a

$$\hat{L}_z \hat{L}_\pm |lm\rangle \stackrel{b}{=} (\hat{L}_\pm \hat{L}_z \pm \hat{L}_\pm) |lm\rangle \stackrel{c}{=} (m \pm 1) \hat{L}_\pm |lm\rangle. \quad (\text{O-7})$$

Úprava a vyplývá přímo z příslušného komutátoru (O-5). Úprava b vyplývá také z příslušného komutátoru (O-5), ale již není tak přímočará. Komutátor je potřeba si rozepsat

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \hat{L}_z \hat{L}_\pm - \hat{L}_\pm \hat{L}_z = \pm \hat{L}_\pm. \quad (\text{O-8})$$

Šikovným přeuspořádáním komutátoru (O-8) dostaneme úpravu b . Úpravu c pro přehlednost rozepíšeme

$$(\hat{L}_\pm \hat{L}_z \pm \hat{L}_\pm) |lm\rangle = (\hat{L}_\pm \hat{L}_z) |lm\rangle \pm \hat{L}_\pm |lm\rangle = m \hat{L}_\pm |lm\rangle \pm \hat{L}_\pm |lm\rangle = (m \pm 1) \hat{L}_\pm |lm\rangle. \quad (\text{O-9})$$

Z výrazu (O-6) plyne, že $\hat{L}_\pm |lm\rangle$ je vlastní funkcí operátoru \hat{L}^2 s vlastním číslem λ_l . Ze vztahu (O-7) obdobně dostaneme, že $\hat{L}_\pm |lm\rangle$ je vlastní funkcí operátoru \hat{L}_z s vlastním číslem $m \pm 1$. Schopnost operátorů \hat{L}_\pm měnit hodnotu m o ± 1 jim dala jejich jméno – posuvné.

Protože hodnota m je ohraničená mezi m_{\min} a m_{\max} je logické, že

$$\hat{L}_+ |lm_{\max}\rangle = 0 \quad (\text{O-10})$$

a

$$\hat{L}_- |lm_{\min}\rangle = 0, \quad (\text{O-11})$$

protože ani v jednom případě není možné se posunout na vyšší/nížší hodnotu m než je maximální/minimální hodnota. Z rovnic (O-10) a (O-11) se můžeme vhodnou úpravou, rovnice vždy zleva vynásobíme druhým posuvným operátorem a využijeme identity $\hat{L}_\mp \hat{L}_\pm = \hat{L}^2 - \hat{L}_z(\hat{L}_z \pm 1)$, dostat k rovnicím

$$\lambda_l - m_{\max}(m_{\max} + 1) = 0 \quad \text{a} \quad \lambda_l - m_{\min}(m_{\min} - 1) = 0. \quad (\text{O-12})$$

Jejich spojením dostaneme rovnici

$$m_{\max}^2 - m_{\min}^2 + m_{\max} + m_{\min} = 0. \quad (\text{O-13})$$

Rovnici řešíme jako rovnici pro neznámou m_{\max} . Výsledkem je $m_{\max} = \{-m_{\min}; -1 + m_{\min}\}$. Protože $m_{\max} \geq m_{\min}$, je jediným řešením rovnice (O-13)

$$m_{\max} = -m_{\min}. \quad (\text{O-14})$$

Z rovnice (O-7) víme, že hodnoty m se mění po jedničce. Proto $m_{\max} - m_{\min}$ musí být celé kladné číslo, což můžeme zapsat jako $2l$. Pak platí $m_{\max} - m_{\min} = 2l$ a $m_{\max} + m_{\min} = 0$. Spojením těchto podmínek dostaneme

$$m_{\max} = l, \quad m_{\min} = -l. \quad (\text{O-15})$$

Ze vztahů (O-15) dále plyne, že existuje $2l + 1$ možných hodnot m , $m = -l, \dots, 0, \dots, +l$, pro každou hodnotu l . Když (O-15) dosadíme do rovnice (O-12), odvodíme, že

$$\lambda_l = l(l + 1). \quad (\text{O-16})$$

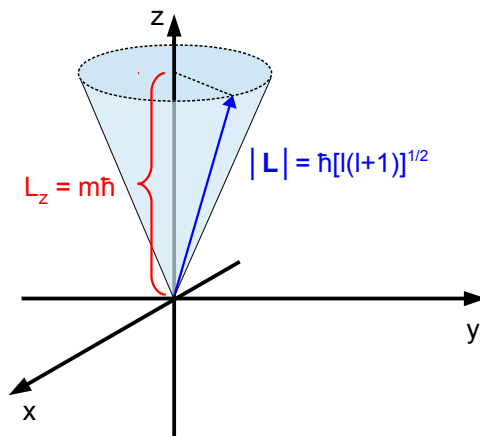
Když se vrátíme zpět ke klasické soustavě jednotek, tj. $\hbar \neq 1$, přejde výraz (O-16) do tvaru

$$\lambda_l = l(l + 1)\hbar^2, \quad (\text{O-17})$$

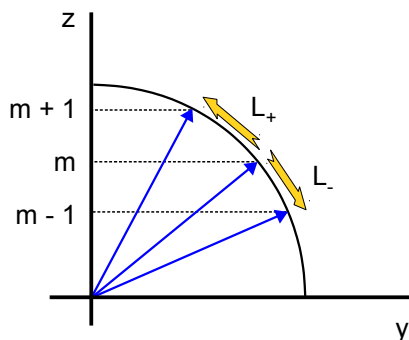
což je výraz (4.15), který jsme chtěli odvodit. ■

Na závěr této kapitoly se zastavme u toho, jak se komutační relace mezi operátory a z nich plynoucí současně měřitelné veličiny, projeví u měření momentu hybnosti. Z komutačních relací (4.10) vidíme, že operátor z -ové složky momentu hybnosti nekomutuje se zbylými dvěma operátory složek momentu hybnosti. To znamená, že současně nemůžeme změřit všechny tři složky vektoru momentu hybnosti. Ale protože operátor z -ové složky momentu hybnosti komutuje s operátorem kvadrátu momentu hybnosti (viz relace (4.14)), můžeme současně změřit jednu složku, typicky z -ovou, vektoru momentu hybnosti a kvadrát velikosti vektoru momentu hybnosti. Grafická reprezentace výše uvedeného se označuje jako vektorový model momentu hybnosti **L**. Vektorový model (obrázek 7) je vhodnou reprezentací prostorového kvantování, tj. faktu, že velikost a prostorová orientace vektoru momentu hybnosti nemůže být libovolná, ale nabývá diskrétních hodnot daných vlastními čísly operátorů \hat{L}^2 a \hat{L}_z .

Na průřezu 3D vektorového modelu, například do roviny zy , si můžeme graficky vysvětlit význam posuvných operátorů (obrázek 8). Operátor \hat{L}_+ posouvá kvantový stav $|lm\rangle$ do nového stavu s hodnotou kvantového čísla m o jedničku větší, tj. stavu $|l(m + 1)\rangle$. Na druhou stranu operátor \hat{L}_- posouvá kvantový stav $|lm\rangle$ do nového stavu s hodnotou kvantového čísla m o jedničku menší, tj. do stavu $|l(m - 1)\rangle$.



Obrázek 7: Vektorový model momentu hybnosti. Protože jednotlivé složky vektoru momentu hybnosti spolu nekomutují, nemůžeme současně změřit více než jednu složku, konvenčně se volí z-ová složka. Ostatní složky, x-ová a y-ová, jsou tudíž neurčené, což se znázorňuje pomocí rotačního kužele. Velikost $|\mathbf{L}|$ vektoru momentu hybnosti komutuje se všemi složkami, proto je současně měřitelná spolu s jednou složkou. To znamená, že o vektoru momentu hybnosti z měření dostaneme údaje o velikosti a průmětu do z-ové osy. Prostorové kvantování momentu hybnosti je pak dáno vlastními čísly operátorů \hat{L}^2 a \hat{L}_z .



Obrázek 8: Činnost posuvných operátorů si můžeme představit tak, že operátor \hat{L}_+ mění kvantový stav $|lm\rangle$ na kvantový stav $|l(m+1)\rangle$ a operátor \hat{L}_- mění kvantový stav $|lm\rangle$ na stav $|l(m-1)\rangle$.

4.3 Operátor momentu hybnosti v polárních souřadnicích

Při popisu daného systému volíme takový souřadný systém, aby byl popis co možná nejjednodušší. V případě přímočarého pohybu je nejvýhodnější souřadný systém pravoúhlých kartézských souřadnic (x, y, z) . Tento systém už ale není vhodný pro popis rotačních pohybů, protože popis křivosti je v něm komplikovaný. Proto byly zavedeny křivočaré systémy souřadnic, které jednoduše popisují rotační pohyby.

Základní soustavou křivočarých souřadnic v 3D prostoru je sférická soustava (r, θ, ϕ) , kde r je vzdálenost bodu od zvoleného počátku, θ je úhel, který svírá průvodič uvažovaného bodu s osou z a ϕ je úhel, který svírá průvodič s osou x . Abychom mohli přejít od kartézského souřadného systému do sférické souřadné soustavy, musíme odvodit transformační rovnice, které jednoznačně určují transformaci souřadnic $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$. Z geometrických úvah odvodíme transformační rovnice

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (4.19)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (4.20)$$

a

$$z = r \cos \theta. \quad (4.21)$$

Obdobně odvodíme transformační rovnice pro inverzní transformaci $(r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (4.22)$$

$$\cos \theta = z/r \quad (4.23)$$

a

$$\tan \phi = y/x. \quad (4.24)$$

Dále nás bude zajímat, jaký způsobem se změní operátory momentu hybnosti, když od kartézských souřadnic přejdeme k souřadnicím sférickým. Protože ve výrazech (4.6), (4.7) a (4.8) pro operátory složek momentu hybnosti vystupují parciální derivace, nejprve si tyto derivace vyjádříme

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \sin \theta \cos \phi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \sin \phi, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \cos \theta, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta \sin \phi}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad (4.26)$$

a

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos \phi}{r \sin \theta}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (4.27)$$

Pomocí vztahů (4.25), (4.26) a (4.27) a pravidlu o derivaci složené funkce odvodíme výrazy pro operátory složek momentu hybnosti ve sférických souřadnicích

$$\hat{L}_x = i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (4.28)$$

$$\hat{L}_y = i\hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (4.29)$$

a

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (4.30)$$

Z rovnice (4.30) vidíme, proč se konvenčně pracuje se z -ovou složkou momentu hybnosti, protože její vyjádření ve sférických souřadnicích je nejjednodušší.

Když máme vyjádřeny jednotlivé operátory složek momentu hybnosti ve sférických souřadnicích, není problém vyjádřit ve sférických souřadnicích i operátor kvadrátu momentu hybnosti

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (4.31)$$

4.4 Pohyb částice po kouli

V tento okamžik máme potřebný aparát k tomu, abychom mohli vyřešit problém pohybu částice s momentem hybnosti. Naším cílem bude nalézt vlastní funkce $\psi(r, \theta, \phi)$ operátorů \hat{L}^2 a \hat{L}_z . Tento jednoduchý problém nám poslouží v kapitole 7, kde budeme řešit vodíkový atom.

Zapišme si nejprve vlastní problémy operátorů \hat{L}^2 a \hat{L}_z

$$\hat{L}^2 \psi(r, \theta, \phi) = l(l+1)\hbar^2 \psi(r, \theta, \phi) \quad (4.32)$$

a

$$\hat{L}_z \psi(r, \theta, \phi) = m\hbar \psi(r, \theta, \phi), \quad (4.33)$$

kde jsme za vlastní čísla dosadili ze vztahů (4.15) a (4.16). Protože operátor \hat{L}^2 ani operátor \hat{L}_z nepůsobí na souřadnici r , můžeme provést následující separaci proměnných

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi), \quad (4.34)$$

kde $R(r)$ je radiální část vlnové funkce a $Y(\theta, \phi)$ je angulární část vlnové funkce, kterou označujeme jako sférické harmoniky. Díky separaci proměnných se problém pohybu částice v 3D prostoru rozpadl na pohyb částice po kulové sféře, popsany pomocí sférické harmoniky a na vyšetření pohybu částice po daném orbitu ve vzdálenosti r od zvoleného počátku, který je popsán radiální částí vlnové funkce. Separace proměnných (4.34) umožňuje zvlášť vyšetřit pohyb po kulové sféře a zvlášť radiální pohyb. V tuto chvíli nás zajímá pouze pohyb po kulové sféře, proto budeme dále pracovat jen s vlnovou funkcí ve tvaru sférické harmoniky $Y(\theta, \phi)$.

Operátor \hat{L}_z působí pouze na souřadnici ϕ (viz vztah (4.30)), proto můžeme předpokládat, že i sférické harmoniky můžeme separovat

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi). \quad (4.35)$$

Vyřešme nejprve vlastní problém (4.33), kde za operátor \hat{L}_z dosadíme ze vztahu (4.30) a dále využijeme separaci proměnných (4.35)

$$-i\hbar\Theta\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = m\hbar\Theta\Phi. \quad (4.36)$$

Rovnici dále upravme

$$-i\frac{d\Phi}{\Phi} = m d\phi \quad (4.37)$$

a dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro $\Phi(\phi)$. Integrací rovnice (4.37) získáme řešení ve tvaru

$$\Phi = Ae^{im\phi}, \quad (4.38)$$

kde A je integrační konstanta. Tu určíme z normovací podmínky

$$\int_0^{2\pi} \Phi^*\Phi d\phi \stackrel{a}{=} A^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 2A^2\pi = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.39)$$

Úprava a plyne z následujícího

$$\Phi^*\Phi = e^{-im\phi}e^{im\phi} = e^0 = 1. \quad (4.40)$$

Integrační meze ve vztahu (4.39) plynou z toho, že ve sférických souřadnicích platí $\phi \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Sférickou harmoniku $Y(\theta, \phi)$ tak můžeme zapsat jako

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) = \Theta(\theta)\frac{1}{2\pi}e^{im\phi}. \quad (4.41)$$

Dosazením sférické harmoniky (4.41) do vlastního problému (4.32) operátoru \hat{L}^2 a řešením vzniknuvší diferenciální rovnice bychom došli k závěru, že se jedná o typ diferenciální rovnice, která se řeší pomocí ortogonálních polynomů, konkrétně pomocí přidružených Legendrových polynomů $S_l^{|m|}(\cos\theta)$. Pak se ukáže, že platí

$$\Theta(\cos\theta) \equiv S_l^{|m|}(\cos\theta). \quad (4.42)$$

Výslednou sférickou harmoniku Y_l^m tak můžeme zapsat ve tvaru

$$\boxed{Y_l^m(\theta, \phi) = N_{lm}S_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}}, \quad (4.43)$$

kde N_{lm} je normovací faktor

$$N_{lm} = \sqrt{\frac{(l - |m|)!(2l + 1)}{4\pi(l + |m|)!}}. \quad (4.44)$$

Závěr našeho snažení je následující. Pohyb částice po kulové sféře můžeme popsat pomocí sférických harmonik, neboli angulární část vlnové funkce $\psi(r, \theta, \phi)$. Sférické harmoniky $Y_l^m(\theta, \phi)$ závisí pouze na úhlech θ a ϕ a jsou parametrizovány dvojicí kvantových čísel l a m . Obecně se jedná o komplexní funkce, na jejichž zobrazení bychom potřebovali 6-ti dimenzionální prostor (jedná se o 3D funkce v komplexní rovině). Proto nezobrazujeme přímo sférické harmoniky, ale jejich lineární kombinace.

4.5 Energie pohybu po kulové sféře

Budeme-li chtít určit energii částice, která se pohybuje po kulové sféře, zapíšeme vlastní problém pro energii, tj. Schrödingerovu rovnici s hamiltoniánem ve tvaru

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2, \quad (4.45)$$

kde předpokládáme, že částice se nepohybuje v žádném potenciálu, tj. $V = 0$. Protože hamiltonián \hat{H} komutuje s operátory \hat{L}^2 a \hat{L}_z , mají tyto operátory společný soubor vlastních funkcí, kterými jsou sférické harmoniky Y_l^m .

Budeme postupovat tak, že si operátor ∇^2 vyjádříme ve sférických souřadnicích

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Lambda^2, \quad (4.46)$$

kde operátor Λ^2 je legendrián, který představuje angulární část operátoru ∇^2

$$\Lambda^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}. \quad (4.47)$$

Protože nás zajímá pouze pohyb po kulové sféře, kde se nemění souřadnice r zredukuje se operátor ∇^2 na Λ^2 . Uvědomíme-li si, že moment setrvačnosti je definován jako $I = mr^2$, můžeme Schrödingerovu rovnici pro pohyb na kulové ploše zapsat jako

$$\Lambda^2 Y_l^m = -\frac{2IE}{\hbar^2} Y_l^m. \quad (4.48)$$

Dále je možné ukázat, že platí

$$\Lambda^2 Y_l^m = -l(l+1)Y_l^m. \quad (4.49)$$

Porovnáním rovnic (4.48) a (4.49) dostaneme pro energii

$$\boxed{E_{lm} = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I}}, \quad (4.50)$$

kde každý energetický stav E_{lm} je $2l + 1$ degenerovaný.

5 Elektronový spin

Elektronový spin je veličina poněkud záhadná, veličina, která nemá obdoby v klasickém světě. Do kvantové mechaniky se spin dostal jako experimentální fakt: z řady experimentů totiž vyplývalo, že kromě orbitálního momentu má elektron ještě nějaký dodatečný moment hybnosti. V nerelativistické kvantové teorii jeho existenci prostě postulujeme. Elektronový spin ovšem přirozeným způsobem vyplynul ze snahy vytvořit relativistickou kvantovou teorii. Toto téma jde však za rámec našeho stručného textu.

5.1 Pojem spinu

Spin je vlastní moment hybnosti částice, kupříkladu elektronu. V následujících oddílech se stručně seznámíme s tím, jak se vlastně na existenci spinu přišlo.

V kapitole 4 jsme se blíže seznámili s orbitálním momentem, který je v klasické fyzice definován vztahem

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (5.1)$$

kde \mathbf{r} je kolmá vzdálenost od osy otáčení a $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ je hybnost. Moment hybnosti \mathbf{L} označujeme jako orbitální z toho důvodu, že objekt, který obíhá okolo daného středu po tzv. orbitu, má nenulový orbitální moment. V případě atomu si můžeme představit elektron, který obíhá kolem atomového jádra. Protože elektron nese elementární náboj e , generuje při svém orbitálním pohybu proudovou smyčku, která vytváří magnetické pole. Sílu takto vzniklého pole měříme pomocí magnetického momentu spojeného s orbitálním momentem hybnosti

$$\mu_L = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{L}. \quad (5.2)$$

Vztah (5.2) je uveden pro případ elektronu – hmotnost m_e a náboj e . Obecně by ve vztahu figurovala hmotnost částice m a náboj částice q .

Uvažujme nyní atom, ve kterém rotuje elektron. Takovýto atom může mít nenulový magnetický moment, který jsme schopni změřit například pomocí vychylování směru atomu v nehomogenním magnetickém poli. Potenciální energie interakce magnetického momentu s vnějším magnetickým polem je

$$V_m = -\mu B \cos \theta,$$

kde μ je magnetický moment, B je magnetická indukce vnějšího pole a θ je úhel, který svírají tyto vektory. Dosazením ze vztahu (5.2) dostaneme

$$V_m = \left(\frac{e}{2m_e}\right) LB \cos \theta. \quad (5.3)$$

Význam vnějšího magnetického pole je ten, že určuje experimentálně význačný směr, s jehož pomocí můžeme určit L_z , neboli z -ovou složku momentu hybnosti. Z kapitoly 4 víme, že velikost vektoru momentu hybnosti i jeho z -ová složka jsou kvantovány. Pak pro $\cos \theta$ můžeme odvodit (viz obrázek 7)

$$\cos \theta = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}.$$

Výraz (5.3) tak můžeme přepsat do tvaru

$$V_m = m \left(\frac{e\hbar}{2m_e}\right) B, \quad (5.4)$$

kde jsme využili toho, že platí $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$. Výraz v závorce ve vztahu (5.4) se označuje jako Bohrov magneton a má hodnotu $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$. Vidíme, že ve vnějším magnetickém poli závisí energie elektronu na magnetickém kvantovém čísle m .

Tak například elektronový stav s vedlejším kvantovým číslem $l = 1$ (p-orbital) se ve vnějším magnetickém poli rozštěpí do tří různých stavů s různou energií podle hodnot magnetického kvantového čísla $m = -1, 0, 1$. To vede k rozštěpení původní jediné spektrální čáry v atomovém spektru do tripletu, přičemž vzdálenost mezi čarami závisí na velikosti magnetického pole, tj. magnetické indukci \mathbf{B} . Štěpení spektrálních čar v magnetickém poli se nazývá Zeemanův jev po svém objeviteli holandském fyzikovi Zeemanovi, který ho poprvé pozoroval v roce 1896. Zeemanův jev je tak přímým experimentálním potvrzením prostorového kvantování momentu hybnosti.

Ve skutečnosti se ukázalo, že štěpení atomových hladin v magnetickém poli může být o dost složitější, než předpovídala kvantová mechanika. Toto anomální chování (anomální Zeemanův jev) bylo možno vysvětlit zavedením dodatečného momentu hybnosti elektronu, tedy spinu. Nejjasnější experimentální důkaz existence spinu podal experiment provedený v roce 1922 Otto Sternem a Walterem Gerlachem. Tento experiment si proto probereme důkladněji.

5.2 Sternův - Gerlachův experiment

Experimentální aparatura (viz obrázek 9) Sternova-Gerlachova experimentu sestávala z pícky, ve které se zahřívaly atomy stříbra. Páry stříbra opouštěly pícku malým otvorem a vytvářely paprsek atomů. Paprsek procházel nehomogenním magnetickým polem a dopadal na vhodné stínítko, které sloužilo k vizualizaci výsledků. Předpokladem experimentu je, že atomy stříbra mají nenulový dipólový moment. Atomy s nenulovým dipólovým momentem interagují s nehomogenním magnetickým polem a jsou vychýleny z přímého směru v závislosti na prostorové orientaci magnetického momentu. Zvolme orientaci nehomogenního magnetického pole ve směru osy z . Pak pro sílu, která způsobuje vychýlení atomů z přímé dráhy platí

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (5.5)$$

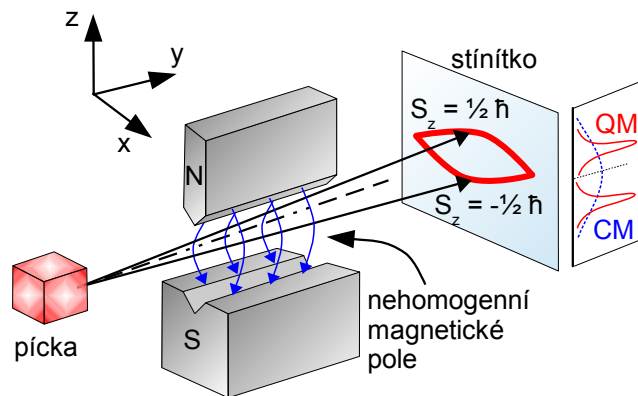
kde $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu_z B_z$ je potenciální energie atomů stříbra v magnetickém poli orientovaném ve směru z -ové osy. Proto

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (5.6)$$

Podle představ klasické fyziky bude magnetický moment stříbrných atomů orientován v prostoru zcela náhodně a jeho průmět do osy z tak bude také nabývat libovolných hodnot od $-|\mu|$ do $|\mu|$. Na stínítku bychom dostali přímou čáru o velikosti ve směru z -ové osy odpovídající dopadům stříbrných atomů. Stříbrné atomy ale dopadaly na stínítko pouze ve dvou bodech, které odpovídaly dipólovému momentu

$$\mu_z = \pm \mu_B, \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}, \quad (5.7)$$

kde μ_B je Bohrov magneton. Stern s Gerlachem byli nadšeni, neboť tento experiment potvrzoval kvantování momentu hybnosti ve směru osy z , jak předpovídala kvantová teorie. Jenže pozornější pohled už ukazuje, že zde něco nesouhlasí. Atomy stříbra mají 47 elektronů, z nichž 46 je spárovaných, a tudíž nepřispívají k orbitálnímu momentu hybnosti. Zbývající 1 nespárovaný elektron má také nulový orbitální moment hybnosti, protože obsazuje $5s$ orbital. Celkový orbitální moment hybnosti atomů stříbra je tedy $\mathbf{L} = 0$, a tak neexistuje žádný magnetický moment vyvolaný tímto momentem hybnosti. Můžeme připustit, že onen nespárovaný elektron se z nějakých důvodů bude nacházet v p orbitalu. V této situaci by se ale měl svazek stříbra rozpadat na tři, nikoliv na dva podsvazky. pozorovaný nenulový magnetický moment atomů stříbra musí být vyvolán dalším momentem hybnosti – spinem. Sternův - Gerlachův experiment tak představuje přímou experimentální metodu umožňující měřit jednu z komponent spinu, v našem případě



Obrázek 9: Schématické zobrazení experimentální aparatury, kterou použili Stern s Gerlachem při experimentu, kterým chtěli prokázat prostorové kvantování orbitálního momentu hybnosti. Ve skutečnosti prokázali existenci spinu, dalšího momentu hybnosti elektronu. Aparatura se skládala z píčky s atomy stříbra, které ze zahřály a opouštěly píčku malým otvorem, přičemž tvořily atomový paprsek. Atomy procházely nehomogenním magnetickým polem a vychylovaly se v závislosti na prostorové orientaci spinu. Po dopadu na stínítko se vytvořily dvě stopy odpovídající dvěma prostorovým projekcím spinu – spin nahoru a spin dolů. Dále je zobrazeno porovnání očekávané distribuce dopadů atomů stříbra na stínítko podle klasické (CM) a kvantové (QM) mechaniky.

z-ovou komponentu. Koncept spinu elektronu byl zaveden až v roce 1925 holandskými fyziky Georgem Uhlenbeckem a Samuelem Goudsmitem, kteří analyzovali atomová spektra. I přesto je Sternův - Gerlachův experiment považován za experimentální důkaz existence elektronového spinu.

5.3 Spin a rotace elektronu kolem své osy

Samotné slovo "spin" je odvozeno z anglického slovesa "to spin", tedy točit se, vířit se, vrtět se. Odkazuje na představu, že spin je moment hybnosti spojený s vlastní rotací částice. Takový výklad je ovšem pochybený. Budeme-li si představovat spin jako moment hybnosti spojený s rotujícím objektem (například pohyb planety Země otáčející se kolem své osy je spojen s momentem hybnosti, můžeme příslušný moment hybnosti určit pomocí vztahu

$$\mathbf{S} = I\omega, \quad (5.8)$$

kde moment hybnosti S nazveme spinovým momentem hybnosti či krátce spinem, I je moment setrvačnosti související s distribucí hmoty objektu okolo osy rotace a ω je úhlová rychlost. Spin je vektorová veličina orientovaná v ose rotace a jeho směr je určen pravidlem pravé ruky. Pakliže je rotující objekt nabitý, jeho rotace opět způsobí vznik magnetického pole. I zde charakterizujeme magnetické pole magnetickým momentem, tentokrát spojeným se spinovým momentem hybnosti

$$\mu_S = \frac{q}{2m}\mathbf{S}, \quad (5.9)$$

kde q je náboj rotujícího tělesa.

Elementární částice jako je elektron jsou bodové částice a nedá se tak mluvit o jejich rotaci. To znamená, že moment setrvačnosti jde k nule, $I \rightarrow 0$, a proto i spin částic se bude blížit nule, $\mathbf{S} \rightarrow 0$. Kdyby tomu tak bylo, elementární částice by neměly žádný dipólový moment související se spinem, což je v rozporu s experimentem. Ve snaze zlepšit tuto neshodu můžeme připustit, že elementární částice jsou velmi malé rotující kuličky. Z experimentů plyne, že poloměry částic

jsou $< 10^{-17}$ m. Aby například elektron s tímto poloměrem měl příslušnou hodnotu svého spinu, musel by rotovat daleko větší rychlostí, než je rychlost světla. Tento rozpor vede k tomu, že klasická mechanika při popisu elementárních částic selhává a musíme jí nahradit kvantovou teorií.

5.4 Spin v kvantové mechanice

Pojďme nyní zavést spin do formalismu kvantové mechaniky. Ze Sternova-Gerlachova experimentu jsme nahlédli, že spin má vlastnosti momentu hybnosti. Pro spin by tak měly platit ty samé vztahy jako pro moment hybnosti. V kapitole (4) jsme dospěli k závěru, že velikost orbitálního momentu hybnosti \mathbf{L} je kvantována

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.10)$$

kde l je vedlejší kvantové číslo. A dále, že jedna ze složek orbitálního momentu hybnosti, řekněme L_z , je také kvantována

$$L_z = m_l \hbar, \quad m_l = -l, \dots, 0, \dots, +l, \quad (5.11)$$

kde m_l je magnetické kvantové číslo. Kvantování složky orbitálního momentu hybnosti je vyjádřením prostorového kvantování, tj. že vektor orbitálního momentu hybnosti může mít jen určité prostorové orientace.

Je logické předpokládat, že pro spin budou platit obdobné relace, jako pro orbitální moment hybnosti. Proto velikost spinového momentu hybnosti \mathbf{S} je kvantována jako

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar, \quad s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots, \quad (5.12)$$

kde s je spinové kvantové číslo, které v případě elektronu má hodnotu $s = 1/2$, a tak velikost spinu elektronu je $S = \sqrt{3/4}\hbar$. Podobně i jedna z komponent spinu, konvenčně S_z , je kvantována

$$S_z = m_s \hbar, \quad m_s = -s, \dots, 0, \dots, +s, \quad (5.13)$$

kde m_s je magnetické spinové kvantové číslo, které v případě elektronu nabývá hodnot $m_s = \pm 1/2$. Elektron se tak může nacházet ve dvou stavech lišících se průmětem momentu hybnosti do osy z , plně v souladu se Sternovým-Gerlachovým experimentem. Vidíme, že vztahy (5.12) a (5.13) pro spin jsou obdobou vztahů (5.10) a (5.11) pro orbitální moment hybnosti s tím rozdílem, že v případě spinu nabývá spinové kvantové číslo s poločíselných hodnot.

V úvodu jsme poznali, že moment hybnosti je příčinou nenulového magnetického momentu (viz vztahy (5.2) a (5.9)). Mezi spinovým momentem a magnetickým momentem platí vztah

$$\mu_S = g_e \frac{e}{2m_e} \mathbf{S}, \quad (5.14)$$

kde g_e je tzv. gyromagnetický poměr, který pro elektron má hodnotu $g_e \doteq 2$. Gyromagnetický poměr je v nerelativistické kvantové mechanice veličinou, která musí být změřena, v rámci relativistické kvantové teorie elektronu je ovšem možné jej vypočítat. Gyromagnetický poměr vyjadřuje podíl magnetického dipólového momentu a orbitálního momentu hybnosti.

Z experimentu vyplývá toliko hodnota velikosti momentu hybnosti a průmětu momentu hybnosti do osy z . Abychom teorii učinili úplnou, můžeme formálně zapsat operátorové rovnice pro operátory spinového momentu \hat{S}^2 a \hat{S}_z . Jednotlivé rovnice jsou

$$\hat{S}^2 \alpha = \hbar^2 s(s+1) \alpha, \quad (5.15)$$

$$\hat{S}_z \beta = \hbar^2 s(s+1) \beta, \quad (5.16)$$

$$\hat{S}_z \alpha = \frac{1}{2} \hbar \alpha, \quad (5.17)$$

$$\hat{S}_z \beta = -\frac{1}{2} \hbar \beta. \quad (5.18)$$

kde α a β jsou tzv. spinové vlnové funkce. Vlnová funkce α nám neříká nic jiného, než je elektron má spin mířící "nahoru", tedy s $m_s = 1/2$, vlnová funkce β má zase spin orientovaný "dolů", tedy je charakterizována spinovým magnetickým číslem $m_s = 1/2$. Formálně tuto skutečnost zapíšeme následujícími rovnicemi:

$$\alpha(m_s = 1/2) = 1, \quad \alpha(m_s = -1/2) = 0 \quad (5.19)$$

a

$$\beta(m_s = 1/2) = 0, \quad \beta(m_s = -1/2) = 1. \quad (5.20)$$

Spinové funkce tak nejsou funkcemi prostorových souřadnic, nýbrž magnetických kvantových čísel. Takto zavedené spinové vlnové funkce jsou normalizované. Například pro α platí

$$\int |\alpha|^2 d\tau \Rightarrow \sum_{-1/2}^{1/2} |\alpha|^2 = \alpha(1/2)\alpha(1/2) + \alpha(-1/2)\alpha(-1/2) = 1 + 0 = 1. \quad (5.21)$$

V rovnici (5.21) značí $d\tau$ integraci přes celý prostor. Protože spinové funkce jsou definovány na diskretních hodnotách spinových magnetických čísel, přejde integrace na sumaci. Suma vyjde jednotková. Stejný závěr bychom dostali v případě spinové vlnové funkce β . Spinové vlnové funkce jsou i ortogonální. Důkaz provedeme následovně

$$\sum_{-1/2}^{1/2} \alpha(m_s)\beta(m_s) = \alpha(1/2)\beta(1/2) + \alpha(-1/2)\beta(-1/2) = 0 + 0 = 0, \quad (5.22)$$

kde máme na paměti, že nutná podmínka ortogonalit vlnových funkcí je, že integrál, v tomto případě suma, přes celý prostor je rovna nule.

Na první pohled může zavedení spinových operátorů a spinových funkcí působit samoúčelně. Ukáže se však, že pro zápis vlnové funkce atomů s více elektrony tyto funkce budeme potřebovat.

5.5 Spin v magnetickém poli

V případě Sternova - Gerlachova experimentu jsme se setkali s tím, že spin elektronu interaguje s vnějším magnetickým polem. Pro potenciální energii této interakce je možné psát

$$U_{int} = -\mu_S \cdot \mathbf{B}, \quad (5.23)$$

kde \mathbf{B} je magnetická indukce vnějšího magnetického pole. Orientujeme-li pole ve směru osy z , tj. $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$, a za dipólový moment dosadíme ze vztahu (5.14) dostaneme pro potenciální energii interakce

$$U_{int} = -\mu_z B_z = -g_e \frac{e}{2m_e} B_z S_z = -g_e \frac{e}{2m_e} B_z m_s \hbar = \gamma B_z \hbar m_s. \quad (5.24)$$

Za z -ovou komponentu spinu jsme dosadili její vlastní hodnotu $S_z = m_s \hbar$ a dále konstanty $(g_e e)/(2m_e)$ jsme zahrnuli do jednoho faktoru γ , který se nazývá g-faktor. Protože kvantové číslo m_s v případě elektronu může nabývat dvou hodnot $\pm 1/2$, dojde ve vnějším magnetickém poli k různě silné interakci elektronů v závislosti na prostorové orientaci jejich spinů. Rozdíl energií daný různou orientací spinu je roven

$$\Delta U_{int} = \gamma B_z \hbar. \quad (5.25)$$

Rovnice (5.25) je základem experimentálních technik EPR (elektronová paramagnetická rezonance) a NMR (nukleární magnetická rezonance) spektroskopie. V případě NMR je nutné uvažovat g-faktor pro sledované jádro

$$\gamma_N = g_N \frac{e}{2m_N}, \quad (5.26)$$

kde m_N a g_N jsou po řadě hmotnost daného jádra a jeho gyromagnetický poměr.

XXX Prosim o doplneni vhodnym prikladem XXXXXX

6 Problém dvou částic

Do této chvíle jsme se zabývali pouze pohybem jedné částice v jednom rozměru. Tušíme přitom, že popis pohybu dvou a více částic (ve dvou a více rozměrech) bude o něco složitější. Pokud nás ale zajímají jen dvě částice, zůstane vše poměrně jednoduché. Řešení problému dvou částic je přitom v chemii velmi důležité. Budeme ho potřebovat při hledání energetických stavů rotující či vibrující molekuly nebo při popisu atomů vodíkového typu.

6.1 Pohyb nezávislých částic: metoda separace proměnných

Uvažujme pohyb dvou částic podél osy x , přičemž předpokládáme, že částice na sebe vzájemně nepůsobí. Hamiltonián pak můžeme zapsat jako součet Hamiltoniánů popisujících na jednotlivé částice:

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \quad (6.1)$$

kde \hat{H}_1 závisí toliko na souřadnici první částice x_1 a \hat{H}_2 pouze na souřadnici druhé částice x_2 . Schrödingerova rovnice pak bude vypadat následovně:

$$(\hat{H}_1 + \hat{H}_2)\psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2) \quad (6.2)$$

Vlnovou funkci pro dvě částice budeme hledat ve tvaru součinu vlnových funkcí popisujících nezávislé částice:

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \quad (6.3)$$

Takovémuto zápisu říkáme separace proměnných. Nejspíše je zřejmé, proč hledáme řešení v tomto tvaru. Vlnová funkce je spojena s pravděpodobností výskytu elektronu. Čtverec vlnové funkce na levé straně rovnice 6.3 nám tak udává pravděpodobnost, že se částice 1 nachází v poloze x_1 a zároveň se částice 2 nachází v poloze x_2 . Pravou stranou rovnice 6.3 pak tvrdíme, že tato pravděpodobnost je rovna pravděpodobnosti, že se částice 1 nachází v poloze x_1 nezávisle na poloze částice 2, násobena pravděpodobností nalezení částice 2 v bodě x_2 bez ohledu na polohu částice 1. Jinými slovy předpokládáme, že oba jevy jsou nezávislé. To je předpoklad rozumný, neboť obě částice na sobě silově nepůsobí. Znovu zdůrazněme, že vlnová funkce ψ_1 závisí pouze na souřadnicích částice 1 a vlnová funkce ψ_2 na souřadnicích částice 2. Nyní přepíšme Schrödingerovu rovnici pomocí vlnové funkce v separovaném tvaru:

$$\hat{H}_1\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \hat{H}_2\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) = E\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \quad (6.4)$$

Hamiltonián první částice působí pouze na první částici. Vlnovou funkci druhé částice tedy můžeme brát jako konstantu. Po vydělení $\psi_1\psi_2$ upravíme Schrödingerovu rovnici na následující tvar:

$$\frac{\hat{H}_1\psi_1(x_1)}{\psi_1(x_1)} + \frac{\hat{H}_2\psi_2(x_2)}{\psi_2(x_2)} = E \quad (6.5)$$

První ze sčítanců na levé straně rovnice 6.5 je funkcí pouze souřadnice x_1 , druhý pak pouze souřadnice x_2 . Součet obou členů musí být přitom konstantní pro každou kombinaci x_1 a x_2 . To obecně není možno splnit jinak než, že oba dva sčítance jsou rovny konstantám, které si označíme jako E_1 a E_2 :

$$\hat{H}_1\psi_1(x_1) = E_1\psi_1(x_1) \quad (6.6)$$

$$\hat{H}_2\psi_2(x_2) = E_2\psi_2(x_2) \quad (6.7)$$

$$E = E_1 + E_2 \quad (6.8)$$

Schrödingerova rovnice pro dvě proměnné se nám tak rozpadla na dvě Schrödingerovy rovnice o jedné proměnné. Místo jedné složité úlohy tak vyřešíme dvě úlohy jednoduché. Energie pohybu obou částic dohromady je dána součtem energií jednotlivých částic a vlnová funkce pro dvě částice je dána součinem dvou jednočásticových vlnových funkcí. Naše úvahy můžeme snadno rozšířit na situaci, kdy se

- jedna částice pohybuje ve dvou rozměrech:

$$\psi(x, y) = \psi_1(x)\psi_2(y) \quad (6.9)$$

- dvě částice pohybují ve třech rozměrech:

$$\psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \psi_1(x_1, y_1, z_1)\psi_2(x_2, y_2, z_2) \quad (6.10)$$

- N částic pohybuje ve třech rozměrech:

$$\psi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_N, y_N, z_N) = \prod_{i=1}^N \psi_i(x_i, y_i, z_i) \quad (6.11)$$

Transformace mnohačásticové (mnohadimenzionální) Schrödingerovy rovnice na řadu jednočásticových Schrödingerových rovnic patří k základním postupům kvantové teorie molekul. V případě pohybu nezávislých částic neprovádíme žádné přiblížení. Technika separace proměnných se ale používá i v případech, kdy pohyb částic striktně nezávislý není.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX ČÁSTICE VE 2D JÁMĚ XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

6.2 Dvě interagující částice

Podívejme se nyní na pohyb dvou částic, které na sebe silově působí, například proton a elektron. Potenciální energie je funkcí souřadnic obou částic. Protože na sebe částice silově působí, nemůžeme nyní bezmyšlenkovitě použít metodu separace proměnných jako v předchozím odstavci. Po určitém úsilí se nám to však přesto podaří. Klíčem bude transformace souřadnic. Použijeme-li kartézské souřadnice, potřebujeme dohromady tři souřadnice pro částici 1 a tři souřadnice pro částici 2. Energetické působení mezi částicemi ale závisí pouze na relativní poloze obou částic. Proto si místo souřadnic $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ vycházejících z počátku soustavy souřadnic zavedeme relativní souřadnice (x, y, z) :

$$x = x_1 - x_2$$

$$y = y_1 - y_2$$

$$z = z_1 - z_2$$

či ve vektorovém zápisu

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

Potenciální energie již není funkcí šesti souřadnic kartézských, ale pouze tří souřadnic relativních.

Zbavili jsme se tak kartézských souřadnic jednotlivých částic při popisu potenciální energie. Nyní se ale musíme vypořádat ještě s energií kinetickou. Kromě relativních souřadnic \mathbf{r} zavedeme ještě souřadnice těžiště \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (6.12)$$

Pohyb obou částic pak můžeme vyjádřit pomocí pohybu těžiště a relativního pohybu obou částic. Kartézské souřadnice \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 si nyní můžeme vyjádřit pomocí souřadnic těžiště \mathbf{R} a vektoru relativní polohy \mathbf{r} :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (6.13)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (6.14)$$

Kinetická energie systému dvou částic je v klasické fyzice definována jako

$$T = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\mathbf{r}}_2|^2 \quad (6.15)$$

Pomocí vztahů 6.13 a 6.14 si můžeme vztah pro kinetickou energii upravit na

$$T = \frac{1}{2} M |\dot{\mathbf{R}}|^2 + \frac{1}{2} \mu |\dot{\mathbf{r}}|^2, \quad (6.16)$$

kde $M = m_1 + m_2$ je celková a μ redukovaná hmotnost definovaná jako

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (6.17)$$

Vztah (6.16) pro kinetickou energii můžeme přepsat pomocí hybností

$$T = \frac{|\mathbf{p}_M|^2}{2M} + \frac{|\mathbf{p}_\mu|^2}{2\mu}, \quad (6.18)$$

kde jsme si zavedli vektory hybnosti spojené s pohybem molekuly jako celku (\mathbf{p}_M) a s relativním pohybem obou částic (\mathbf{p}_μ).

Uvažujme nyní, že potenciální energie je pouze funkcí vzdálenosti obou částic (mluvíme o tzv. centrálním potenciálu)

$$V_\mu = V(r). \quad (6.19)$$

Celkovou energii je pak možné zapsat jako součet členů závisících pouze na souřadnicích a hybnostech těžiště a souřadnicích a hybnostech relativního pohybu obou částic. Při přechodu do kvantové mechaniky dostaneme pro Hamiltonián:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_M^2}{2M} + \frac{\hat{p}_\mu^2}{2\mu} + \hat{V}_\mu \quad (6.20)$$

První člen popisuje translační kinetickou energii, tzn. obě částice urazí stejnou dráhu a vzdálenosti mezi nimi se nemění. Naopak druhý a třetí člen závisí pouze na vzdálenosti obou částic. Získali jsme Hamiltonián, který nám umožňuje provést separaci proměnných, tj. vlnovou funkci nyní můžeme rozdělit část popisující translaci a část popisující relativní pohyb.

$$\psi = \psi_M \psi_\mu \quad (6.21)$$

Schrödingerova rovnice se tak rozpadne na rovnice dvě:

$$\frac{\hat{p}_M^2}{2M}\psi_M = E_M\psi_M \quad (6.22)$$

$$\left(\frac{\hat{p}_\mu^2}{2\mu} + \hat{V}_\mu\right)\psi_\mu = E_\mu\psi_\mu \quad (6.23)$$

a stejně tak energii můžeme rozdělit na příspěvky energie translační a vnitřní (relativní) $E = E_M + E_\mu$. Translační pohyb prozatím ponechme stranou a podívejme se na Schrödingerovu rovnici popisující relativní pohyb dvou částic. Začneme zápisem Hamiltoniánu v kartézských souřadnicích:

$$\hat{H}_\mu = \frac{\hat{p}_\mu^2}{2\mu} + \hat{V}_\mu = \left(\frac{-\hbar^2}{2\mu}\right)\nabla^2 + \hat{V}_\mu = \left(\frac{-\hbar^2}{2\mu}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \hat{V}_\mu. \quad (6.24)$$

kde x, y a z jsou kartézské složky relativních souřadnic. Pokud máme v úmyslu zabývat se pohybem v centrálním poli, není kartézský souřadnicový systém příliš vhodný. Centrální pole se vyznačuje sféricky symetrickým potenciálem, proto je přirozené přejít ke sférickým souřadnicím. V kapitole XXX jsme si odvodili vztah pro Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích, který nyní využijeme:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\cot\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2\hbar^2}\hat{L}^2 \quad (6.25)$$

K zápisu Hamiltoniánu ve sférických souřadnicích jsme tedy použili operátor momentu hybnosti. Z kapitoly XXX víme, že vlastní funkce \hat{L}^2 jsou sférické harmonické funkce. Hamiltonův operátor je zapsán ve tvaru, který umožňuje provést separaci proměnných.

Můžeme si nyní položit otázku, zda Hamiltonián komutuje s \hat{L}^2 , tj. zda platí

$$[\hat{H}, \hat{L}^2] = [\hat{T}, \hat{L}^2] + [\hat{H}, \hat{V}^2] = 0 \quad (6.26)$$

Člen s operátorem kinetické energie se po dosazení z rovnice 6.25 rozpadne na dva členy:

$$[\hat{T}, \hat{L}^2] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{2mr^2}\hat{L}^2, \hat{L}^2\right] = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \hat{L}^2\right] + \frac{1}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\hat{L}^2, \hat{L}^2\right], \quad (6.27)$$

z nichž první člen je nulový, protože operátor \hat{L}^2 nepůsobí na r , a druhý člen je nulový, protože \hat{L}^2 komutuje sám se sebou. Podobně budeme postupovat u komutátoru s operátorem potenciální energie. Potenciální energie u centrálního pole závisí pouze na r , zatímco \hat{L}^2 závisí na ϕ a θ , proto bude i tento komutátor nulový. Tím jsme dokázali, že Hamiltonián u systému s centrálním polem komutuje s \hat{L}^2 . Podobně bychom dokázali, že

$$[\hat{H}, L_z] = 0. \quad (6.28)$$

Hamiltonián tedy komutuje jak se čtvercem operátoru momentu hybnosti, tak s jeho z-tovou složkou. To především znamená, že při pohybu dvou částic v centrálním potenciálu se zachovává hybnost i její z-tová složka.

Tvar Hamiltoniánu 6.24 nám umožňuje zapsat vlnovou funkci v polárních souřadnicích ve tvaru součinu sférické harmonické funkce a nějaké doposud neurčené radiální vlnové funkce:

$$\psi = R(r)Y_l^m(\theta, \psi) \quad (6.29)$$

Takto definovanou vlnovou funkcií nyní dosadíme do Schrödingerovy rovnice, kde je Hamiltonián vyjádřen podle rovnic 6.24 a 6.25.

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi = & -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{2}{r} \right) R(r)Y_l^m(\theta, \psi) + \\ & + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2 \hbar^2} \hat{L}^2 R(r)Y_l^m(\theta, \psi) + \hat{V}R(r)Y_l^m(\theta, \psi) = ER(r)Y_l^m(\theta, \psi).\end{aligned}\tag{6.30}$$

Po vydělení $Y_l^m(\theta, \psi)$ a aplikaci \hat{L}^2 posléze dostaneme tzv. radiální Schrödingerovu rovnici:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(R'' + \frac{2}{r}R' \right) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}R + \hat{V}R = ER.\tag{6.31}$$

7 Atom vodíku

Správné řešení atomu vodíku je jedním z velkých vítězství kvantové mechaniky. Podle klasické fyziky náboj, který se pohybuje se zrychlením (elektron obíhající vodíkové jádro – proton), by měl vyzařovat elektromagnetické záření. To ve svém důsledku vede ke ztrátě energie a elektron by nakonec spadl na atomové jádro a došlo by k jaderné reakci mezi elektronem a protonem. Atom vodíku by tak byl nestabilní, s dobou života řádově 1 ps. Ovšem to nepozorujeme. Proč jsou atomy, počínaje atomem vodíku stabilní, vysvětluje až kvantová mechanika.

7.1 Obecný úvod

Řešit atom vodíku znamená nalézt řešení Schrödingerovy rovnice s příslušným hamiltoniánem

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}, \quad (7.1)$$

kde předpokládáme, že elektron o hmotnosti m_e se pohybuje v coulombickém poli nehybného jádra – protonu. Kdybychom chtěli uvažovat i pohyb jádra, řešili bychom dvoučásticovou Schrödingerovu rovnici tak jako v kapitole 6. Příslušná Schrödingerova rovnici by šla separovat, zvlášť na relativní pohyb elektronu a protonu a zvlášť na pohyb celé soustavy. Rovnice, která by popisovala relativní pohyb, by měla tvar rovnice (7.1), kde hmotnost elektronu by byla nahrazena redukovanou hmotností μ soustavy jádro plus elektron. Při řešení také nebudeme uvažovat spin elektronu.

Vzhledem k tomu, že coulombický potenciál v rovnici (7.1) jde k nule pro $r \rightarrow \infty$, jsou nevázané stavy vodíku s energií $E \geq 0$ nekvantované a odpovídají spojitému spektru energií. Stavy s energií $E < 0$ jsou vázané a kvantované, protože pro ně platí podmínka $\psi(r) \rightarrow 0$ pro $r \rightarrow \infty$ vyplývající z coulombického potenciálu.

Problém řešení atomu vodíku má kulovou symetrii, proto je výhodné pracovat ve sférických souřadnicích (r, θ, ϕ) . Z hamiltoniánu (7.1) vidíme, že coulombický potenciál závisí pouze na radiální souřadnici r , jde o pohyb v centrálním poli. Proto kvadrát momentu hybnosti a z -ová složka momentu hybnosti komutují s hamiltoniánem (viz kapitola 6). Atom vodíku tak můžeme popsat vlnovou funkcí

$$\psi(r, \theta, \phi) = \psi_{nlm}(r, \theta, \phi), \quad (7.2)$$

kde vlnová funkce je charakterizována trojicí kvantových čísel n, l, m . Kvantová čísla l a m jsme poznali v kapitole 4. Kvantové číslo n odpovídá kvantování v radiálním směru a plyne z coulombického potenciálu v rovnici (7.1). Vzhledem k tomu, že potenciál závisí pouze na r , bude energie vázaných stavů atomu vodíku záviset pouze na kvantovém čísle n

$$E = E_n. \quad (7.3)$$

7.2 Spektrum energií

Začneme tím, že zapíšeme Schrödingerovu rovnici s hamiltoniánem (7.1) ve sférických souřadnicích

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \psi = E \psi. \quad (7.4)$$

Dále využijeme toho, že víme, že hamiltonián komutuje s kvadrátem momentu hybnosti a z -ovou komponentou momentu hybnosti. Protože dva posledně jmenované operátory nezávisí na proměnné r můžeme předpokládat separaci vlnové funkce (7.2) ve tvaru

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi), \quad (7.5)$$

kde $R(r)$ je radiální část vlnové funkce a $Y_l^m(\theta, \phi)$ jsou sférické harmoniky, se kterými jsme se seznámili v kapitole 4. S využitím separace proměnných a po malé úpravě (viz kapitola 6) dostaneme radiální Schrödingerovu rovnici ve tvaru

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} R = ER. \quad (7.6)$$

Při řešení radiální Schrödingerovy rovnice budeme postupovat tak, že nejprve zavedeme substituci $u = rR(r)$. Rovnice (7.6) tak přejde na tvar

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_e r^2} \right] u = -\frac{2m_e E}{\hbar^2} u. \quad (7.7)$$

Abychom rovnici dále zjednodušili zavedeme následující substituce

$$a = \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}, \quad b = l(l+1), \quad \lambda^2 = \frac{2m_e E}{\hbar^2}, \quad (7.8)$$

kde předpokládáme, že $E < 0$, protože řešíme vázané stavy. Rovnice (7.7) se dále zjednoduší na tvar

$$u'' + \left(\frac{a}{r} - \frac{b}{r^2} \right) u = \lambda^2 u, \quad (7.9)$$

kde $u'' = d^2u/dr^2$.

Nejprve vyřešíme rovnici (7.9) pro případ, že $r \rightarrow \infty$, neboli asymptotické chování. Když je r velké, přejde rovnice (7.9) na tvar

$$u'' \simeq \lambda^2 u, \quad (7.10)$$

kde symbolem \simeq zdůrazňujeme, že řešení je přibližné a platí pouze v limitě $r \rightarrow \infty$. Řešením této rovnice dostaneme

$$u \simeq e^{\pm\lambda r}. \quad (7.11)$$

Aby u mohla vystupovat jako vlnová funkce, musí splňovat podmínku $u \rightarrow 0$ pro $r \rightarrow \infty$, protože jinak by nebylo možné funkci u normalizovat (nebyla by kvadraticky integrovatelná). Proto fyzikálně smysluplným řešením je pouze

$$u \simeq e^{-\lambda r}. \quad (7.12)$$

Dále budeme předpokládat, že funkci u můžeme zapsat jako

$$u = L(r)e^{-\lambda r}, \quad (7.13)$$

kde $L(r)$ je polynomická funkce v r . Substitucí předpokladu (7.13) do rovnice (7.9) dostaneme (pozor, funkci u musíme derivovat podle pravidla o derivaci součinu funkcí)

$$L'' - 2\lambda L' + \left(\frac{a}{r} - \frac{b}{r^2} \right) L = 0. \quad (7.14)$$

Řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru

$$L(r) = \sum_n c_n r^n, \quad (7.15)$$

což po dosazení poskytne rovnici

$$\sum_n c_n \{ [n(n-1) - b] r^{n-2} - (2n\lambda - a) r^{n-1} \} = 0. \quad (7.16)$$

Suma v rovnici (7.16) musí být rovna nule pro všechny hodnoty r^n . To bude splněno jen když bude platit rekurentní vztah mezi koeficienty

$$c_{n+1} = \left(\frac{2n\lambda - a}{n(n+1) - b} \right) c_n. \quad (7.17)$$

Aby tato řada vedla k normalizované vlnové funkci u , musíme požadovat, aby řada přešla na polynom, tj. aby všechny koeficienty c_n od dané hodnoty n byly nulové. To se stane jen tehdy, když čitatel v (7.17) bude pro dané n roven nule

$$2n\lambda = a. \quad (7.18)$$

Dosazením výsledku (7.18) do substituce (7.8) dostaneme pro hodnoty energie

$$E_n = -\frac{e^4 m_e}{32\hbar^2 \pi^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.19)$$

a kde znaménko mínus plyne z toho, že řešíme vázané stavy, pro které platí $E < 0$, což je v souladu s tím, že na ionizaci atomu ve vázaných stavech je potřeba dodat energii, například formou elektromagnetického záření. Zavedeme-li Bohrovův atomový poloměr, který je dán vztahem

$$a_B = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \quad (7.20)$$

a dosadíme-li ho do rovnice (7.19) dostaneme

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2a_B} \frac{1}{n^2}. \quad (7.21)$$

Vidíme, že energie atomu vodíku závisí pouze na jediném kvantovém čísle n , které je spojeno s radiálním pohybem. Kvantové číslo n označujeme jako hlavní kvantové číslo. Máme-li zadanou hodnotu kvantového čísla n , nemůže být hodnota vedlejšího kvantového čísla l libovolná, ale je určená relací

$$l = 0, \dots, n-1. \quad (7.22)$$

Současně magnetické kvantové číslo m nabývá hodnot

$$m = -l, \dots, 0, \dots, +l. \quad (7.23)$$

Série tří kvantových čísel parametrizuje daný kvantový stav. Povšimněme si skutečnosti, že pohyb ve 3D prostoru je popsán trojicí kvantových čísel, obdobně jako v případě třírozměrné jámy v kapitole 3.

Energie základního stavu E_1 není degenerována, protože je popsána kvantovými čísly $n = 1, l = m = 0$, a její číselná hodnota se rovná $-1 \text{ Ry} = -13,605 \text{ eV}$. Energetická jednotka Rydberg (Ry) je definována jako

$$\text{Ry} = \frac{e^4 m_e}{32\hbar^2 \pi^2 \epsilon_0^2} \quad (7.24)$$

a spolu s Bohrovým atomovým poloměrem tvoří přirozené jednotky při popisu atomů.

Vyšší energetické stavy atomu vodíku E_n , $n = 2, 3, 4, \dots$ jsou degenerované, protože jim přísluší více hodnot kvantových čísel l a m . Pro každé l máme celkem $2l + 1$ hodnot m . Proto pro degeneraci hladiny E_n dostaneme

$$g_n = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2. \quad (7.25)$$

Dále si můžeme všimnout toho, že energetické hladiny spektra vodíku nejsou od sebe vzdáleny ekvidistantně, jak tomu bylo v případě harmonického oscilátoru, ale že vzdálenosti jednotlivých hladin se k sobě blíží, když s energií jdeme k disociačnímu limitu, tj. $E_n = 0$.

O tom, že je spektrum vodíku složené z diskretních hladin svědčí i spektroskopická měření. Příčinou čárových atomových spekter je právě diskretní charakter energetických hladin. Aby došlo k přechodu elektronu mezi hladinami f a i musí dojít k absorpci nebo emisi fotonu o frekvenci dané Planckovým zákonem

$$\nu = \frac{|E_f - E_i|}{h}. \quad (7.26)$$

Podle toho jaká je hodnota kvantového čísla n , ze které pozorovaný přechod vychází, dělíme přechody do několika sérií: $n = 1$ odpovídá Lymanově sérii v UV oblasti, $n = 2$ odpovídá Balmerově sérii ve viditelné oblasti a např. $n = 3$ odpovídá Paschenově sérii v IČ oblasti.

7.3 Vlnová funkce pro atom vodíku

Z rekurentního vztahu (7.17) můžeme dostat i vyjádření radiální části vlnové funkce $R_{nl}(\xi)$ ve tvaru

$$R_{nl}(\xi) = N_{nl} e^{-\xi/2} \xi^l L_{n+l}^{2l+1}(\xi), \quad (7.27)$$

kde

$$\xi = \frac{2r}{na_B} \quad (7.28)$$

a $L_{n+l}^{2l+1}(\xi)$ jsou přidružené Laguerrovy polynomy. Normovací koeficient je roven

$$N_{nl} = \left[\left(\frac{2}{na_B} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3} \right]^{1/2}. \quad (7.29)$$

Několik normovaných radiálních částí vlnových funkcí zde uvedeme

$$R_{10}(r) = \left(\frac{1}{a_B} \right)^{3/2} 2e^{-r/a_B}, \quad (7.30)$$

$$R_{20}(r) = \left(\frac{1}{2a_B} \right)^{3/2} \left(2 - \frac{r}{a_B} \right) e^{-r/2a_B}, \quad (7.31)$$

a

$$R_{21}(r) = \left(\frac{1}{2a_B} \right)^{3/2} \frac{r}{a_B \sqrt{3}} e^{-r/2a_B}. \quad (7.32)$$

Funkce jsou zobrazeny na obrázku 10.

Celková vlnová funkce vázaných stavů atomu vodíku je součinem radiální části vlnové funkce a sférických harmonik

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (7.33)$$

a tvoří pro $n = 1, 2, 3, \dots$, $l = 0, \dots, n-1$ a $m = -l, \dots, +l$ úplný ortonormální systém funkcí, do kterého je možné rozvinout řešení nečasové Schrödingerovy rovnice pro vázané stavy.

Pravděpodobnost nalezení elektronu v objemovém elementu $(r, r+dr)$, $(\theta, \theta+d\theta)$ a $(\phi, \phi+d\phi)$ je rovna

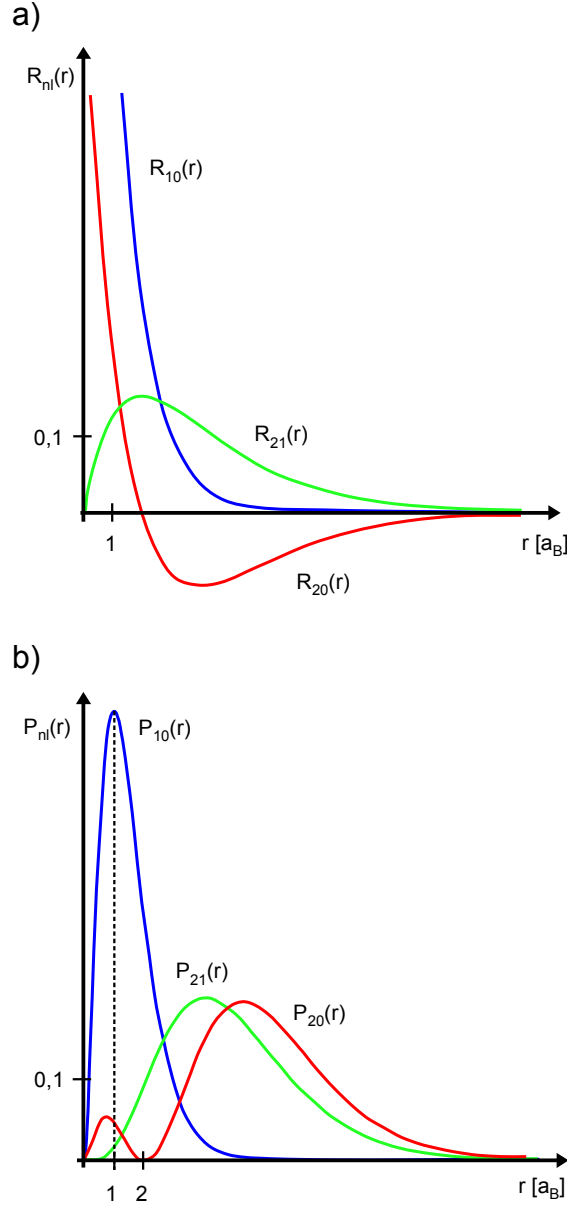
$$dp(r, \theta, \phi) = |\psi_{nlm}(r, \theta, \phi)|^2 r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi. \quad (7.34)$$

Integrací vztahu (7.34) přes celý prostorový úhel získáme pravděpodobnost nalezení elektronu v oblasti mezi $(r, r+dr)$

$$dp(r) = |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr, \quad (7.35)$$

kde výraz $P_{nl}(r) = |R_{nl}(r)|^2 r^2$ označujeme jako radiální hustotu pravděpodobnosti. Obdobně pro pravděpodobnost nalezení elektronu v určitém prostorovém úhlu $(\theta, \theta + d\theta)$ a $(\phi, \phi + d\phi)$ získáme vztah

$$dp(\theta, \phi) = |Y_l^m(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (7.36)$$



Obrázek 10: Na panelu a) jsou vyneseny 3 radiální části vlnové funkce R_{10} , R_{20} a R_{21} pro atom vodíku v závislosti na souřadnici r , která je udaná v jednotkách Bohrova poloměru a_B . Na panelu b) jsou vyneseny radiální hustoty pravděpodobnosti P_{10} , P_{20} a P_{21} . Pověšimněme si, že základní stav atomu vodíku P_{10} má maximum hustoty ve vzdálenosti Bohrova poloměru a_B .

8 Přibližné metody

V minulých oddílech jsme si ukázali řešení Schrödingerovy rovnice pro některé jednoduché případy. Analyticky řešitelných úloh je ale velmi málo. Obecně nejsme schopni (ani v klasické mechanice) řešit úlohy s více než dvěma částicemi. Jsme pak odkázáni na řešení přibližná. V této kapitole si představíme nejdůležitější přibližné přístupy, se kterými se v kvantové chemii setkáváme.

8.1 Variační princip

Přírodní zákony mohou být často formulovány různými způsoby. Principy klasické mechaniky lze například formulovat pomocí soustavy diferenciálních rovnic (např. Newtonových), ale stejně platný je tzv. princip minimálního účinku. Podobně zákony klasické optiky můžeme formulovat pomocí zákonů odrazu a lomu, ale stejně dobře pomocí tzv. Fermatova principu, dle kterého se paprsek mezi dvěma body pohybuje po dráze, na které stráví nejkratší čas. Fermatův princip je příkladem variačního principu. S variačním principem se hojně setkáváme také v kvantové mechanice.

8.1.1 Variační princip v kvantové mechanice

Dle variačního teorému je vlastní hodnota Hamiltoniánu pro jakoukoli přibližnou normovanou vlnovou funkci větší nebo rovna energii základního stavu systému:

$$\int \phi^* \hat{H} \phi d\tau \geq E_0, \quad (8.1)$$

kde ϕ je přibližná vlnová funkce a E_0 energie základního stavu. Toto tvrzení je nesmírně užitečné. Představme si, že jsme nějakým způsobem odhadli přibližné řešení Schrödingerovy rovnice. Variační princip nám umožní rozhodnout, zda toto naše řešení je lepší nebo horší než nějaké jiné přibližné řešení: správnější bude řešení s nižší energií. Jak uvidíme níže, variační princip nám navíc umožňuje přibližné řešení efektivně nalézt.

Ukažme si nyní, že variační princip je ekvivalentní se Schrödingerovou rovnicí. Neznámou vlnovou funkci můžeme zapsat ve tvaru lineární kombinace vlastních funkcí Hamiltonova operátoru:

$$\phi = \sum_k c_k \psi_k. \quad (8.2)$$

Připomeňme si zde, že vlastní funkce Hamiltonova operátoru vytváří úplný soubor funkcí, takže výše uvedený rozvoj můžeme určitě udělat. Rozvoj nyní dosadíme do levé strany rovnice 8.1:

$$\int \phi^* \hat{H} \phi d\tau = \int \left(\sum_k c_k^* \psi_k^* \hat{H} \sum_l c_l \psi_l \right) d\tau = \sum_k \sum_l c_k^* c_l \int \psi_k^* \hat{H} \psi_l d\tau = \sum_k \sum_l c_k^* c_l E_k \delta_{kl}. \quad (8.3)$$

Rovnici si nyní můžeme přepsat do jednoduššího tvaru:

$$\int \phi^* \hat{H} \phi d\tau = \sum_k |c_k|^2 E_k. \quad (8.4)$$

Protože je naše funkce ϕ normovaná, platí $\sum_k |c_k|^2 = 1$. Z definice přitom platí, že $E_0 \leq E_1 \leq E_2$ atd. Tudíž výraz 8.4 bude určitě větší než E_0 , což není nic jiného než variační teorém.

Při praktickém použití uvažujeme většinou přibližnou vlnovou funkci závisající na několika parametrech. Minimalizace variačního integrálu

$$\epsilon = \frac{\int \phi^* \hat{H} \phi d\tau}{\int \phi^* \phi d\tau} \geq E_0 \quad (8.5)$$

vůči těmto parametrům pak umožní nalezení jejich optimálních hodnot. Jmenovatel ve výše uvedeném výrazu je samozřejmě pro normované funkce ϕ jednotkový.



Příklad 7

Použití variačního principu si ukážeme na příkladu jednorozměrné potenciálové jámy. Analytické řešení této úlohy vede k hodnotám energie $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$. Přibližná vlnová funkce musí splňovat okrajové podmínky, tedy $\phi(0) = 0$ a $\phi(L) = 0$. Nejjednodušší takovou funkcí bude nejspíš kvadratická funkce. Nechť má tedy přibližná funkce ϕ následující tvar:

$$\phi = x(L - x).$$

Funkce ϕ není normovaná, proto nejprve určíme normu:

$$N = \int_0^L \phi^* \phi dx = \int_0^L (x(L - x))^2 dx = \frac{L^5}{30}$$

Normovaná přibližná funkce tedy vypadá následovně,

$$\sqrt{\frac{30}{L^5}} x(L - x).$$

Připomeňme si ještě, jak vypadá Hamiltonián pro částici v jednodimenzionální potenciálové jámě:

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}.$$

Nyní můžeme uplatnit vztah 8.1:

$$E_k = \int \phi^* \hat{H} \phi dx = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{30}{L^5} \int_0^L x(L - x) \left(\frac{d^2[x(L - x)]}{dx^2} \right) dx$$

Po vyčíslení dostaneme:

$$E_k = \frac{5h^2}{4\pi^2 mL^2} \geq \frac{h^2}{8mL^2} = E_0.$$

Na konkrétním příkladu jsme si tak ukázali platnost variačního teorému.

8.1.2 Rayleighova-Ritzova metoda

V kvantové chemii je užitečné hledat řešení jako lineární kombinaci předem definovaných funkcí a optimalizovat pouze příspěvky jednotlivých bázeových funkcí k celkové vlnové funkci, tj. optimalizovat tzv. rozvojové koeficienty. Tak v chemii jsme si kupříkladu navykli hledat molekulové orbitály jako lineární kombinace atomových orbitalů. Zapišme tedy vlnovou funkci pomocí lineární kombinace bázeových funkcí:

$$\phi = \sum_k c_k f_k, \quad (8.6)$$

kde f_k je sada nám známých vhodných funkcí a c_k jsou rozvojové koeficienty. Ty budeme variačně optimalizovat. Takto definovanou vlnovou funkci nyní dosadíme do výrazu variačního integrálu, 8.5:

$$\epsilon = \frac{\int \sum_k c_k f_k \hat{H} \sum_l c_l f_l d\tau}{\int \sum_k c_k f_k \sum_l c_l f_l d\tau} = \frac{\sum_{k,l} c_k c_l \int f_k \hat{H} f_l d\tau}{\sum_{k,l} c_k c_l \int f_k f_l d\tau}. \quad (8.7)$$

Definujme si nyní matici překryvu S :

$$S_{kl} = \int f_k f_l d\tau \quad (8.8)$$

a Hamiltonovu matici H

$$H_{kl} = \int f_k \hat{H} f_l d\tau, \quad (8.9)$$

Variační integrál pak nabude tvaru:

$$\epsilon = \frac{\sum_{k,l} c_k c_l H_{kl}}{\sum_{k,l} c_k c_l S_{kl}}. \quad (8.10)$$

Nejlepší řešení dostaneme pro funkci, pro který bude variační integrál minimální. To vede k podmínce:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial c_i} = 0. \quad (8.11)$$

Derivaci čitatele si rozepíšeme následovně:

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k,l} c_k c_l H_{kl} = \sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial c_i} (c_k c_l H_{kl}) = \sum_{k,l} \left(\frac{\partial c_k}{\partial c_i} c_l H_{kl} + \frac{\partial c_l}{\partial c_i} c_k H_{kl} \right) \quad (8.12)$$

Derivace jednotlivých členů se dále zjednoduší, uvažujeme-li:

$$\frac{\partial c_k}{\partial c_i} = \delta_{ki}. \quad (8.13)$$

Dostaneme tak konečný výraz pro derivaci čitatele z rovnice 8.11:

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k,l} c_k c_l H_{kl} = \sum_k c_k H_{ki} + \sum_l c_l H_{li}. \quad (8.14)$$

Použitím posledního vztahu a uplatněním vztahu pro derivaci podílu nakonec dostaneme upravený tvar rovnice 8.11:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial c_i} = \frac{\sum_k c_k H_{ki} + \sum_l c_l H_{li}}{\sum_{k,l} c_k c_l S_{kl}} - \frac{(\sum_k c_k S_{ki} + \sum_l c_l S_{li}) \sum_{k,l} c_k c_l H_{kl}}{\left(\sum_{k,l} c_k c_l \right)^2} \quad (8.15)$$

Protože hledáme minimum funkce, položíme variační integrál roven nule (použili jsme znovu definice variačního integrálu 8.7):

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial c_i} = \frac{\sum_k c_k (H_{ik} - \epsilon S_{ik}) + \sum_l c_l (H_{li} - \epsilon S_{li})}{\sum_{k,l} c_k c_l} = 0 \quad (8.16)$$

Jelikož na označení sčítacího indexu v sumě nezáleží, změní se poslední výraz na

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial c_i} = \frac{2 \sum_k c_k (H_{ik} - \epsilon S_{ik})}{\sum_{k,l} c_k c_l} = 0 \quad (8.17)$$

Derivace bude nulová, pokud je nulový čítatel. Tím dostáváme soustavu tzv. sekulárních rovnic:

$$\sum_k c_k (H_{ik} - \epsilon S_{ik}) = 0 \quad (8.18)$$

Jde o soustavu lineárních rovnic, jejímž řešením jsou rozvojové koeficienty c_k . To ovšem za předpokladu, že známe ϵ . To je ale hodnota, kterou hledáme! Všimněme si, že jedno řešení známe okamžitě $c_k = 0$. Jde o tzv. triviální řešení. To nás ale nezajímá, nulové řešení totiž nepředstavuje vlnovou funkci. Lineární algebra nás učí, že soustava rovnic s nulovou pravou stranou má netriviální řešení pouze tehdy, jestliže je determinant soustavy (v tomto případě sekulární determinant) nulový:

$$|H_{ik} - \epsilon S_{ik}| = 0 \quad (8.19)$$

Sekulární determinant představuje algebraickou rovnici pro neznámou hodnotu ϵ . Pro rozvoj vlnové funkce do dvou bázevých funkcí půjde o rovnici kvadratickou, pro rozsáhlejší rozvoje půjde o rovnice vyšších řádů.



Příklad 8

Použití variačního principu si ukážeme na zápisu molekulového orbitalu homodiatomika (např. H_2) jako lineární kombinace dvou atomových orbitalů (A a B) ležících na jednotlivých atomech:

$$\phi = c_A \chi_A + c_B \chi_B.$$

Nyní si můžeme vyčíslit maticové elementy H_{kl} a S_{kl} :

$$\begin{aligned} H_{AB} &= \int \chi_A \hat{H} \chi_B d\tau \\ H_{AA} &= \int \chi_A \hat{H} \chi_A d\tau = H_{BB} \\ S_{AB} &= \int \chi_A \chi_B d\tau \end{aligned}$$

Dalším krokem bude sestavení sekulárního determinantu:

$$\begin{vmatrix} H_{AA} - \epsilon & H_{AB} - \epsilon S_{AB} \\ H_{AB} - \epsilon S_{AB} & H_{BB} - \epsilon \end{vmatrix} = 0.$$

Sekulární determinant posléze vyřešíme a dostaneme vztah pro ϵ :

$$\epsilon_{1,2} = \frac{H_{AA} \pm H_{AB}}{1 \pm S_{AB}}.$$

Dále vyřešíme sekulární rovnice:

$$\begin{aligned} c_A(H_{AA} - \epsilon S_{AA}) + c_B(H_{AB} - \epsilon S_{AB}) &= c_A(H_{AA} - \epsilon) + c_B(H_{AB} - \epsilon S_{AB}) = 0 \\ c_A(H_{BA} - \epsilon S_{BA}) + c_B(H_{BB} - \epsilon S_{BB}) &= c_A(H_{AB} - \epsilon S_{AB}) + c_B(H_{AA} - \epsilon) = 0. \end{aligned}$$

Do sekulárních rovnic si dosadíme vztahy za $\epsilon_{1,2}$ a po vyčíslení dostaneme pro $c_A = c_B$ (pro ϵ_1) a $c_A = -c_B$ (pro ϵ_2). Ze dvou atomových orbitalů tedy dostaneme vazebný molekulový orbital ϕ_1 :

$$\phi_1 = c_A(\chi_A + \chi_B)$$

a antivazebný molekulový orbital ϕ_2 :

$$\phi_2 = c_A(\chi_A - \chi_B).$$



Příklad 9

Jednodimenzionální potenciálovou jámu si nyní vyřešíme i pomocí báze rozvoje 8.6. Vlnovou funkci definujeme ve tvaru $\phi = c_1 x^2(L - x) + c_2 x(L - x)^2$. Postup je následující:

- Spočítáme všechny integrály $H_{k,l}$ a $S_{k,l}$
- Položíme sekulární determinant roven nule a vypočítáme energie ϵ
- Pro každou hodnotu ϵ vypočítáme rozvojové koeficienty ze sekulárních rovnic

Příklad vyřešený v programu Mathematica je dostupný na webových stránkách předmětu.

8.2 Poruchová teorie

Předpokládejme, že řešíme Schrödingerovy rovnici pro nějaký složitý problém:

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n, \quad (8.20)$$

Známe přitom řešení jednoduššího problému, který se od původního problému moc neliší:

$$\hat{H}^{(0)}\psi_n^{(0)} = E_n^{(0)}\psi_n^{(0)}. \quad (8.21)$$

Jinými slovy, od jednoduchého problému přejdeme k problému složitějšímu přidáním malé poruchy. K řešení problémů tohoto typu používáme poruchovou teorii.



Příklad 10

Chceme popsat vibraci molekuly v anharmonickém potenciálu s kubickým a kvartickým členem:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2 + cx^3 + dx^4$$

Přičemž jsme schopni vyřešit problém pro harmonický potenciál:

$$\hat{H}^{(0)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2.$$

Hamiltonián harmonického systému tak reprezentuje neporušený systém a kubické a kvartické členy jsou malá porucha:

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + cx^3 + dx^4. \quad (8.22)$$

Doufáme přitom, že se řešení pro systém s neporušený systém nebude dramaticky lišit od plného řešení, které získáme malou korekcí neporušeného řešení.

Obecně si tedy Hamiltonián definujeme pomocí přibližného Hamiltoniánu a poruchy:

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \lambda \hat{H}', \quad (8.23)$$

přičemž λ je parametr sloužící k postupnému zapnutí poruchy ($\lambda = 0$ znamená, že máme neporušený systém, $\lambda = 1$ je naopak plně zapnutá porucha).

Protože Hamiltonián závisí na poruchovém parametru λ , bude na poruše záviset také vlnová funkce a energie. Vlnovou funkci a energii si rozepíšeme ve formě Taylorova rozvoje okolo poruchového parametru:

$$\psi_n = \psi_n^{(0)} + \lambda \psi_n^{(1)} + \lambda^2 \psi_n^{(2)} + \dots \quad (8.24)$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \quad (8.25)$$

V dalším odvození budeme pracovat s tím, že vlnová funkce neporušeného systému $\psi_n^{(0)}$ je normalizovaná:

$$\langle \psi_n^{(0)} | \psi_n^{(0)} \rangle = 1. \quad (8.26)$$

Místo uvažování normalizované vlnové funkce se všemi poruchami budeme uvažovat následující normalizační relaci:

$$\langle \psi_n^{(0)} | \psi_n \rangle = 1. \quad (8.27)$$

Tímto způsobem nebude celková poruchová vlnová funkce normalizovaná. To ale nevadí, protože vynásobení vlnové funkce konstantou (normou) nemá vliv na hodnotu energie ze Schrödingerovy rovnice $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$. Nyní do normalizační podmínky (8.27) dosadíme poruchovou vlnovou funkci 8.24:

$$1 = \langle \psi_n^{(0)} | \psi_n^{(0)} \rangle + \lambda \langle \psi_n^{(0)} | \psi_n^{(1)} \rangle + \lambda^2 \langle \psi_n^{(0)} | \psi_n^{(2)} \rangle + \dots \quad (8.28)$$

První člen pravé strany poslední rovnice je jednotkový, protože vlnová funkce neporušeného systému je normalizovaná. Proto musí být další členy nulové:

$$\langle \psi_n^{(0)} | \psi_n^{(1)} \rangle = 0 \quad (8.29)$$

$$\langle \psi_n^{(0)} | \psi_n^{(2)} \rangle = 0. \quad (8.30)$$

Nyní si Hamiltonián, energii i vlnovou funkci dosadíme do Schrödingerovy rovnice:

$$\begin{aligned} & (\hat{H}^{(0)} + \lambda \hat{H}') (\psi_n^{(0)} + \lambda \psi_n^{(1)} + \lambda^2 \psi_n^{(2)} + \dots) = \\ & = (E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots) (\psi_n^{(0)} + \lambda \psi_n^{(1)} + \lambda^2 \psi_n^{(2)} + \dots) \end{aligned} \quad (8.31)$$

Vytkneme-li z poslední rovnice člen λ^n , můžeme si nyní rovnici přepsat do následujícího tvaru:

$$\begin{aligned} & \lambda^0 (\hat{H}^{(0)} \psi_n^{(0)} - E_n^{(0)} \psi_n^{(0)}) + \lambda^1 (\hat{H}^{(0)} \psi_n^{(1)} + \hat{H}' \psi_n^{(0)} - E_n^{(0)} \psi_n^{(1)} - E_n^{(1)} \psi_n^{(0)}) + \\ & + \lambda^2 (\hat{H}^{(0)} \psi_n^{(2)} + \hat{H}' \psi_n^{(1)} + E_n^{(0)} \psi_n^{(2)} - E_n^{(1)} \psi_n^{(1)} - E_n^{(2)} \psi_n^{(0)}) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Vzhledem k tomu, že rovnice musí platit pro libovolnou hodnotu parametru λ , musí se každá závorka zároveň rovnat nule. Schrödingerova rovnice se tedy rozpadá na následující rovnice:

$$\hat{H}^{(0)} \psi_n^{(0)} = E_n^{(0)} \psi_n^{(0)} \quad (8.33)$$

$$(\hat{H}^{(0)} - E_n^{(0)}) \psi_n^{(1)} = (E_n^{(1)} - \hat{H}') \psi_n^{(0)} \quad (8.34)$$

$$(\hat{H}^{(0)} - E_n^{(0)}) \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} \psi_n^{(0)} + (E_n^{(1)} - \hat{H}') \psi_n^{(1)} \quad (8.35)$$

Nyní si odvodíme, jak bude vypadat korekce k energii z prvního řádu poruchové metody. Využijeme rovnice 8.34 Předpokládejme, že funkce $\psi_n^{(0)}$ tvoří úplnou bázi. Rovnici 8.34 nyní vynásobíme komplexně sdruženou funkcí $\psi_m^{(0)*}$ a přepíšeme do braketové notace:

$$\left\langle \psi_m^{(0)} | \hat{H}^{(0)} | \psi_n^{(1)} \right\rangle - E_n^{(0)} \left\langle \psi_m^{(0)} | \psi_n^{(1)} \right\rangle = E_n^{(1)} \left\langle \psi_m^{(0)} | \psi_n^{(0)} \right\rangle - \left\langle \psi_m^{(0)} | \hat{H}' | \psi_n^{(0)} \right\rangle. \quad (8.36)$$

První člen v předchozí rovnici si můžeme upravit s využitím hermiticity operátoru $\hat{H}^{(0)}$:

$$\left\langle \psi_m^{(0)} | \hat{H}^{(0)} | \psi_n^{(1)} \right\rangle = \int \psi_m^{(0)*} \hat{H}^{(0)} \psi_n^{(1)} d\tau = \int \psi_n^{(1)} \hat{H}^{(0)} \psi_m^{(0)*} d\tau = E_m^{(0)} \left\langle \psi_m^{(0)} | \psi_n^{(1)} \right\rangle. \quad (8.37)$$

Rovnice 8.36 pak přejde na tvar

$$(E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) \left\langle \psi_m^{(0)} | \psi_n^{(1)} \right\rangle = E_n^{(1)} \left\langle \psi_m^{(0)} | \psi_n^{(0)} \right\rangle - \left\langle \psi_m^{(0)} | \hat{H}' | \psi_n^{(0)} \right\rangle. \quad (8.38)$$

Nyní mohou nastavit dva případy:

- $m = n$: Pokud $m = n$, dostaneme okamžitě korekci k energii:

$$E_n^{(1)} = \left\langle \psi_n^{(0)} | \hat{H}' | \psi_n^{(0)} \right\rangle \quad (8.39)$$

Porucha energie v prvním stupni tedy odpovídá poruše zprůměrované přes neporušenou vlnovou funkci.

- $m \neq n$: rovnice 8.38 v tomto případě přejde na tvar

$$(E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) \left\langle \psi_m^{(0)} | \psi_n^{(1)} \right\rangle = - \left\langle \psi_m^{(0)} | \hat{H}' | \psi_n^{(0)} \right\rangle. \quad (8.40)$$

Poruchu ve vlnové funkci prvního řádu si vyjádříme jako lineární kombinaci báзовých funkcí:

$$\psi_n^{(1)} = \sum_i c_i \psi_i^{(0)}, \quad (8.41)$$

dále dostaneme

$$(E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) \sum_i c_i \left\langle \psi_m^{(0)} | \psi_i^{(0)} \right\rangle = - \left\langle \psi_m^{(0)} | \hat{H}' | \psi_n^{(0)} \right\rangle \quad (8.42)$$

a po úpravě

$$(E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) c_m = - \left\langle \psi_m^{(0)} | \hat{H}' | \psi_n^{(0)} \right\rangle. \quad (8.43)$$

Korekci prvního řádu k vlnové funkci tedy dostaneme pomocí následujícího vztahu

$$\psi_n^{(1)} = \sum_m \frac{\left\langle \psi_m^{(0)} | \hat{H}' | \psi_n^{(0)} \right\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)}. \quad (8.44)$$

Podobným způsobem, jaký jsme si zde ukázali pro korekce prvního řádu k energii a vlnové funkci lze odvodit i vztahy pro vyšší řády poruchové energie. Zde uvedeme pouze konečný vztah pro energii s poruchou druhého řádu:

$$E_n \approx E_n^{(0)} + H'_{nn} + \sum_{m \neq n} \frac{|H'_{mn}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}, \quad (8.45)$$

kde $H'_{mn} = \langle \psi_m^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle$. Jistý problém zde představuje skutečnost, že k výpočtu poruchové energie potřebujeme znát celé spektrum (tj. energii základního i všech excitovaných stavů) energií neporušeného systému. To je v mnoha případech značně nepraktický požadavek. Pokud víme, jak energie systému přibližně vypadají, můžeme v některých případech nahradit sumu ve jmenovateli rovnice 8.45 průměrnou excitační energií a dospět k uzavírací aproximaci (??? CLOSURE APPROXIMATION), která dále zjednoduší tvar rovnice pro energii.

Poslední problém, jemuž jsme se zde nevěnovali jsou degenerované stavy. Pro degenerované stavy poruchová teorie, jak jsme si ji zde formulovali neplatí, protože člen $E_m^{(0)} - E_n^{(0)}$ bude nulový a vztahy pro rozvojové koeficienty c_i budou divergovat. Pro degenerované vztahy existuje mírně odlišná formulace poruchové teorie, kterou je možné najít v odborné literatuře.

9 Více-elektronové atomy

Atom vodíku je asi nejsložitější soustava, kterou jsme schopni analyticky přesně vyřešit. Tato situace je pro chemika pochopitelně málo uspokojivá. Pomocí kvantové teorie bychom chtěli zkoumat vlastnosti atomů a molekul, ve kterých se pohybuje mnoho elektronů! Příslušné Schrödingerovy rovnice jsou ale příliš komplikované, takže nejsme schopni najít řešení analytické a bohužel ani řešení numericky přesné. Nezbyvá nám proto než se vydat do kalných vod přibližných metod. Řešení Schrödingerovy rovnice pro atom vodíku nám nicméně poskytne dobrý základ, ze kterého je možné se odrazit k přibližnému řešení problému více-elektronových atomů. Základní postupy si můžeme ukázat již na „nejjednodušším složitém atomu“, atomu helia.

9.1 Atom helia

V atomu helia na sebe působí tři částice, jádro helia s protonovým (resp. nábojovým) číslem $Z = 2$ a dva elektrony. Nebude nám tudíž zatěžko napsat pro helium hamiltonián

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}(\Delta_{e_1} + \Delta_{e_2}) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2e^2}{r_1} + \frac{2e^2}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_{12}}, \quad (9.1)$$

kde hamiltonián zapisujeme v souřadnicové soustavě umístěné do jádra helia.

$$\Delta_{e_1} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_{e_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_{e_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_{e_1}^2}$$

je Laplaceův operátor prvního elektronu popisující kinetickou energii prvního elektronu,

$$\Delta_{e_2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_{e_2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_{e_2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_{e_2}^2}$$

je Laplaceův operátor příslušející druhému elektronu, r_1 je vzdálenost mezi jádrem helia a prvním elektronem, r_2 je vzdálenost mezi jádrem helia a druhým elektronem, a r_{12} je vzdálenost mezi oběma elektrony. Schrödingerova rovnice je v tomto případě parciální diferenciální rovnice druhého řádu, jejímž řešením je (vlnová) funkce šesti proměnných, kupříkladu kartézských souřadnic obou elektronů x_1, y_1, z_1, x_2, y_2 a z_2 nebo sférických souřadnic těchto elektronů $r_1, \theta_1, \phi_1, r_2, \theta_2, \phi_2$. Bohužel, ani v jedné sadě souřadnice se nám nepodaří hamiltonián separovat, nemůžeme jej napsat jako součet členů záviselých na souřadnicích pouze jednoho elektronu a členů záviselých pouze na souřadnicích elektronu druhého. Hamiltonián můžeme zapsat následujícím způsobem

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{12} \quad (9.2)$$

kde hamiltonián

$$\hat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta_1 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_1} \quad (9.3)$$

působí toliko na souřadnice prvního elektronu a hamiltonián

$$\hat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta_2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_2} \quad (9.4)$$

pouze na souřadnice elektronu druhého. Problém působí člen popisující odpuzování mezi elektrony

$$\hat{H}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (9.5)$$

Pokud bychom mohli zanedbat tento člen, byla by situace růžová. Celkovou vlnovou funkci pak snadno zapíšeme jako součin dvou vlnových funkcí ϕ_1 a ϕ_2 (metoda separace proměnných, srov. rovnici XX v kapitole XXX):

$$\psi = \phi_1 \cdot \phi_2, \quad (9.6)$$

přičemž ϕ_1 závisí pouze na souřadnicích prvního elektronu a je dána řešením rovnice

$$\hat{H}_1 \phi_1 = E_1 \phi_1. \quad (9.7)$$

Tato rovnice ale není než Schrödingerova rovnice pro atom vodíkového typu! Její řešení tudíž známe:

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{Zr_1}{a_0}}, \quad (9.8)$$

kde Bohrov poloměr lze vyjádřit pomocí fundamentálních fyzikálních konstant:

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}. \quad (9.9)$$

Analogické vztahy platí pro vlnovou funkci ϕ_2 , takže celkovou vlnovou funkci můžeme napsat jako

$$\psi = \phi_1 \cdot \phi_2 = \frac{1}{\pi} \frac{Z^3}{a_0^3} e^{-\frac{Zr_1}{a_0}} e^{-\frac{Zr_2}{a_0}}. \quad (9.10)$$

Energie atomu helia při zanedbání členu (9.5) (tedy při zanedbání odpuzování elektronů) je pak dána vztahem

$$E = E_1 + E_2 = -13,6 \left(\frac{Z^2}{n^2} + \frac{Z^2}{n^2} \right) \text{ eV} = -13,6 \cdot 8 \text{ eV} = -108,8 \text{ eV}. \quad (9.11)$$

Tato hodnota je po čertech vzdálena od hodnoty změřené experimentálně (-79 eV). Čtenář může být navíc znejistěn skutečností, že vypočítaná hodnota je nižší než hodnota experimentální. Neprotiví se tento výsledek variačnímu principu? Po bližším ohledání zjistíme, že nikoliv. Variační princip praví, že energie vypočítaná s přibližnou vlnovou funkcí pomocí správného hamiltoniánu je vždy vyšší než energie skutečná. Naše zjednodušení ale nespočívalo v nalezení přibližné vlnové funkce pro přesný hamiltonián, nýbrž v nalezení přesného řešení pro přibližný hamiltonián.

Z předchozího výpočtu vyplývá, že mezi-elektronové odpuzování v našich úvahách zanedbat nemůžeme. V následujících oddílech si ukážeme, kterak elektronovou energii atomu helia vypočítat s využitím dvou cest, pomocí poruchového i variačního přístupu.

9.1.1 Výpočet elektronové energie atomu helia poruchovým přístupem

V poruchové teorii předpokládáme, že jsme schopni nalézt řešení pro přibližný hamiltonián $\hat{H}^{(0)}$ a pomocí tohoto řešení pak hledáme řešení pro přesný hamiltonián $\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}'$. Zvolme si jako hamiltonián nultého řádu součet

$$\hat{H}^{(0)} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \quad (9.12)$$

ve kterém je zanedbána mezi-elektronové odpuzování. Řešení pro tento systém známe. Korekce prvního řádu pro energii (srov. oddíl 8.2, vztah (8.39)) je pak dána jako

$$E^{(1)} = \int \psi^{(0)} \hat{H}' \psi^{(0)} d\tau, \quad (9.13)$$

což v našem případě konkrétně znamená šesti-dimenzionální integraci přes (sférické) souřadnice obou elektronů

$$E^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^6 e^2}{\pi^2 a_0^6} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{Zr_1}{a_0}} e^{-\frac{Zr_2}{a_0}} \frac{1}{r_{12}} r_1^2 \sin\theta_1 r_2^2 \sin\theta_2 dr_1 dr_2 d\theta_1 d\theta_2 d\phi_1 d\phi_2, \quad (9.14)$$

kde jsme za $\psi^{(0)}$ dosadili ze vztahu (9.10). Výrazy $r_1^2 \sin\theta_1$ a $r_2^2 \sin\theta_2$ představují Jakobián transformace z kartézských do sférických souřadnic.

Vyčíslení tohoto integrálu je poněkud svízelné, ale proveditelné. Po provedení získáme korekci prvního řádu. Celková energie v rámci poruchové metody prvního řádu je tak

$$E = E^{(0)} + E^{(1)} = -108,8 + 34 = -74,8 \text{ eV}. \quad (9.15)$$

Souhlas s experimentem již tedy není úplně špatný! V poruchovém metodě bychom mohli pokračovat do vyšších řádů. Pro helium vychází korekce vyšších řádů

$$\begin{aligned} E^{(2)} &= -4,29 \text{ eV} \\ E^{(3)} &= 0,12 \text{ eV} \end{aligned}$$

Postupně tak v rámci poruchové metody konvergujeme k experimentální hodnotě.

9.1.2 Výpočet elektronové energie atomu helia poruchovým přístupem

Při variačním řešení potřebujeme najít nějakou přibližnou (ale rozumnou) vlnovou funkci, která má nedourčené parametry. Vyjděme z funkce ve tvaru

$$\Phi = \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z'}{a_0} \right)^3 e^{-\frac{Z'r_1}{a_0}} e^{-\frac{Z'r_2}{a_0}}. \quad (9.16)$$

Tato funkce vypadá jako vlnová funkce atomu helia, ve kterém se elektrony neodpužují. Místo nábojového čísla $Z = 2$ máme ale nyní ve funkci neurčený parametr Z' . Fyzikálně si můžeme představit, že díky přítomnosti druhého elektronu „vidí“ první elektron jádro o menším náboji, než jaký skutečně má. Jinými slovy, elektrony stíní atomové jádro. Hodnotu parametru Z' , tj. efektivního náboje jádra, je třeba určit na základě minimalizace energie vzhledem k parametrům zkusmé funkce.

Musíme začít vyjádření funkcionál energie, tj. závislosti energie na konkrétní formě zkusmé funkce. Začneme tím, že si hamiltonián (9.1) napíšeme v mazané formě

$$\hat{H} = \underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} (\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \right]}_{\hat{H}'_0} + (Z' - Z) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} + (Z' - Z) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}, \quad (9.17)$$

kdy přitom pro hamiltonián \hat{H}'_0 zjevně platí

$$\hat{H}'_0 \Phi = E' \Phi, \quad (9.18)$$

kde

$$E' = -\frac{2(Z')^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}.$$

Pro funkcionál energie pak platí

$$E = \int \Phi^* \hat{H} \Phi d\tau = E' + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[(Z' - Z) \int \frac{\Phi^* \Phi}{r_1} d\tau + (Z' - Z) \int \frac{\Phi^* \Phi}{r_2} d\tau + \int \frac{\Phi^* \Phi}{r_{12}} d\tau \right], \quad (9.19)$$

což po lehce otravném vyčíslení integrálů vede k výrazu

$$E = \left((Z')^2 - 2ZZ' + \frac{5}{8}Z' \right) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}. \quad (9.20)$$

Všimněme si, že ve funkcionálu energie nám vystupuje jak nábojové číslo Z (z hamiltoniánu, nejde o variační parametr), tak efektivní nábojové číslo Z' . Optimální hodnotu Z' nalezneme jako minimum funkcionálu energie, tj. položením derivace tohoto funkcionálu nule:

$$2Z' - 2Z + \frac{5}{8} = 0$$

z čehož po dosazení $Z = 2$

$$Z' = 1,6875.$$

Po dosazení optimální hodnoty Z' do funkcionálu energie dostaneme hodnotu

$$E = \left((1,6875)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1,6875 + \frac{5}{8} \cdot 1,6875 \right) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} = -77,48 \text{ eV}. \quad (9.21)$$

To je však již hodnota energie, která je ve velmi slušném souladu s experimentem. Mohli bychom tuto hodnotu ještě nějak vylepšit? Nepochybně mohli, ale potřebovali bychom již složitější tvar zkusmé funkce Φ . Její současná forma předpokládá nezávislý pohyb obou elektronů, zanedbává korelaci jejich pohybů. Pokročilejší metody elektronové struktury musí jít za rámec této aproximace. O tom se dozvíme více v oddílu o metodách popisu elektronové struktury molekul.

9.2 Atomy o více než dvou elektronech

Poté, co jsme se naladili úspěchem kvantových výpočtů pro atom helia, můžeme být v pokušení uplatnit celý postup i na další atomy. Vezměmež si třeba atom lithia. Zde zkusmou vlnovou funkci budeme hledat jako

$$\Phi = \phi_1 \phi_2 \phi_3, \quad (9.22)$$

přičemž ϕ_i bude podobně jako v případě helia dáno jako

$$\phi_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z'}{a_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{Z' r_i}{a_0}}. \quad (9.23)$$

Výpočet vede k energii lithia -230 eV . Experimentální hodnota je ovšem pouze $-203,5 \text{ eV}$. Tento výsledek se jeví být v přímém rozporu s variačním principem. Zjevně je něco špatně, buď s variačním principem nebo s přírodou. Řada čtenářů asi tuší, že problém nastal ignorováním Pauliho vylučovacího principu. Vlnovou funkci předpokládáme ve formě

$$\psi = 1s(1)1s(2)1s(3) \quad (9.24)$$

neboli

$$1s^3.$$

To není symbol, se kterým bychom se v učebnicích chemie setkávali. Je třeba na tomto místě ale připomenout, že s Pauliho principem kvantová mechanika až do této chvíle nepočítala. Je třeba si o něm říci více.

9.3 Antisymetrie vlnové funkce a Pauliho vylučovací princip

Pauliho vylučovací princip zná většina studentů již ze střední školy. Zhruba řečeno nám tvrdí, že dva elektrony se v atomu (či v molekule, pevné látce a kdekoli jinde) nemohou nacházet ve stejném kvantovém stavu. Wolfgang Pauli tento princip formuloval na základě studia atomových spekter jako experimentální skutečnost. Později se teprve objevila souvislost mezi Pauliho vylučovacím principem a obecnými vlastnostmi mnoha-částicové vlnové funkce.

Kvantově-mechanické částice (jako jsou elektrony) jsou nerozlišitelné, nemůžeme je „obarvit“ a sledovat, jak se pohybují. Je to důsledek relací neurčitosti. Pokud bychom pohyb nějaké částice chtěli sledovat, potřebovali bychom vědět polohu částice v daném čase, ale také její rychlost. Ta nám totiž řekne, kde příslušnou částici můžeme očekávat v následujícím okamžiku. Obojí informaci ale zároveň nemůžeme získat s libovolnou přesností, nemá tak smysl mluvit o trajektorii částice a částice nemůžeme rozlišit. Nemůžeme nijak poznat, pokud se dva elektrony prohodí. V jazyku kvantové mechaniky nerozlišitelnost částic vyjádříme vztahem

$$|\psi(1, 2)|^2 = |\psi(2, 1)|^2. \quad (9.25)$$

Tato rovnice nám říká, že pravděpodobnost, že se na místě A bude nacházet první částice a na místě B druhá částice, musí být stejná, jako pravděpodobnost nalezení částice 1 na místě B a částice 2 na místě A. Tato identita může být realizovaná dvěma způsoby:

$$\psi(1, 2) = \psi(2, 1) \quad (9.26)$$

a

$$\psi(1, 2) = -\psi(2, 1). \quad (9.27)$$

V prvním případě říkáme, že vlnová funkce je symetrická vůči permutaci dvou částic. Částice, které splňují toto pravidlo, se nazývají Boseho částice nebo prostě bosony. Ukazuje se, že jde o částice s celočíselnou hodnotou spinu a že pro tyto částice neplatí Pauliho vylučovací princip (viz dále). Naproti tomu částice s vlnovou funkcí antisymetrickou vůči permutaci částic nazýváme Fermiho částicemi (nebo fermiony). Fermiony mají poločíselný spin a Pauliho vylučovací princip pro ně platí. K bosonům náleží kupříkladu foton, k fermionům pak elektron. To, zda je daná částice fermion nebo boson, je dáno experimentálně. V kvantové mechanice tuto skutečnost zavádíme jako postulát.

Postulát číslo 6: Při záměně dvou elektronů musí vlnová funkce změnit znaménko. (Spinově-statistický postulát)

Ukažme si nyní souvislost mezi antisymetrií vlnové funkce vylučovacím principem. Představme si elektrony, které jsou charakterizovány polohou a průmětem spinu do osy z :

$$q_i = (\vec{r}_i, m_{s,i}). \quad (9.28)$$

Jelikož jde o fermiony, musí platit

$$\psi(q_1, q_2, q_3, \dots q_N) = -\psi(q_2, q_1, q_3, \dots q_N). \quad (9.29)$$

Uvažme nyní situaci, kdy oba elektrony mají přesně stejnou polohu a také stejnou hodnotu projekce spinu, jinými slovy $q_1 = q_2$. Předchozí rovnice pak nabývá tvaru

$$\psi(q_1, q_1, q_3, \dots q_N) = -\psi(q_1, q_1, q_3, \dots q_N), \quad (9.30)$$

z čehož ale okamžitě plyne

$$\psi(q_1, q_1, q_3, \dots q_N) = 0 \quad (9.31)$$

Pravděpodobnost, že by se dva elektrony se stejnou projekcí spinu do osy z (nadále budeme užívat výrazu „se stejným spinem“) mohly nacházet na stejném místě je nulová. Toto "odpuzování" elektronů nesouvisí s elektrostatickými silami, je přímým důsledkem antisymetrie vlnové funkce. Mluvíme o Pauliho repulzi.

V našem výkladu atomu helia jsme s výhodou hledali řešení Schrödingerovy rovnice ve tvaru součinu

$$\psi(1, 2, \dots N) = \phi_1(1)\phi_2(2) \dots \phi_N(N), \quad (9.32)$$

který pro případ dvou elektronů

$$\psi(1, 2) = \phi_1(1)\phi_2(2).$$

Takto zapsaná vlnová funkce ale není antisymetrická (dokonce ani ne symetrická, permutací elektronů získáme úplně jinou funkci). Nejjednodušší funkce ve tvaru součinu jedno elektronových funkcí bude mít následující tvar:

$$\psi(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(1)\phi_2(2) - \phi_1(2)\phi_2(1)]. \quad (9.33)$$

kde faktor $1/\sqrt{2}$ přidáváme z důvodů normalizace.

Vlnová funkce dvou elektronů popsaných stejnou jedno-elektronovou funkcí (tj. stejným orbitalem $\phi_1 = \phi_2$) ale nezbytně musí být identicky rovna nule:

$$\psi(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(1)\phi_1(2) - \phi_1(2)\phi_1(1)] = 0. \quad (9.34)$$

Právě toto tvrzení známe z chemických učebnic jako Pauliho vylučovací princip. Zde vidíme, že tento původně na základě spektroskopických experimentů odvozený princip úzce souvisí s antisymetrií vlnové funkce.

Zmiňme na tomto místě, že jedno-elektronová vlnová funkce ϕ má svou prostorovou část χ a spinovou část α β :

$$\phi = \chi \cdot \alpha \text{ nebo } \phi = \chi \cdot \beta. \quad (9.35)$$

Mluvíme pak o tzv. spinorbitálu. Vlnová funkce atomu helia v základním stavu by pak vypadala takto:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 1s \cdot \alpha \\ \phi_2 &= 1s \cdot \beta \\ \psi &= \frac{1}{\sqrt{2}} [1s(1)\alpha(1)1s(2)\beta(2) - 1s(2)\alpha(2)1s(1)\beta(1)] = \frac{1}{\sqrt{2}} 1s(1)1s(2) [\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1)]. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Celková vlnová funkce je tak dána součinem prostorové části a části spinové. V hamiltoniánu se ale spin nevyskytuje a my nakonec řešíme Schrödingerovu rovnici pouze pro prostorovou část vlnové funkce:

$$\hat{H}1s(1)1s(2) = E1s(1)1s(2). \quad (9.37)$$

Na našich předchozích výpočtech se tak nic nezměnilo. V případě obecné mnoha-elektronové vlnové funkce spin ignorovat nemůžeme a díky tomu má třeba tripletní stav jinou energii než stav singletní.

Nejjednodušší obecný tvar antisymetrické vlnové funkce pro N -elektronový systém získáme ve formě tzv. Slaterova determinantu:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(1) & \phi_1(2) & \cdots & \phi_1(N) \\ \phi_2(1) & \phi_2(2) & \cdots & \phi_2(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_N(1) & \phi_N(2) & \cdots & \phi_N(N) \end{vmatrix}. \quad (9.38)$$

Díky vlastnostem determinantu je antisymetrie vlnové funkce automaticky zajištěna. Tvar vlnové funkce (9.33) je speciálním případem Slaterova determinantu pro $N = 2$. Pro atom lithia bychom zapsali Slaterův determinant ve tvaru

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 1s1\alpha(1) & 1s(2)\alpha(2) & 1s(3)\alpha(3) \\ 1s1\beta(1) & 1s(2)\beta(2) & 1s(3)\beta(3) \\ 2s1\alpha(1) & 2s(2)\alpha(2) & 2s(3)\alpha(3) \end{vmatrix}. \quad (9.39)$$

Zde již ovšem nemůžeme vlnovou funkci zapsat jako součin prostorové a spinové části. Když nyní budeme v této formě hledat energii atomu lithia v rámci poruchového přístupu, získáme

$$\begin{aligned} E^{(0)} &= E_{1s} + E_{1s} + E_{2s} = -275,5 \text{ eV} \\ E^{(1)} &= \langle \psi^{(0)} | \hat{H}' | \psi^{(0)} \rangle = 83,5 \text{ eV} \\ E &= E^{(0)} + E^{(1)} = -192 \text{ eV}, \end{aligned}$$

kde

$$\hat{H}' = \left(\frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}} \right) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}.$$

Variačním řešením pak získáme energii

$$E = -201,2 \text{ eV}.$$

Tedy hodnotu vyšší v porovnání s hodnotou experimentální.

9.4 Hartreeho a Hartreeho-Fockova metoda pro více-elektronové atomy

Zformulujeme nyní obecný způsob, který nám umožní systematickým způsobem řešit Schrödingerovu rovnici pro N -elektronový atom (a obecně N -elektronovou molekulu) pomocí variačního principu. Budeme promýšlet opět případ atomu helia, rozšíření na více-elektronové atomy je ale přímočaré.

V předchozích oddílech jsme viděli, že je rozumné hledat vlnovou funkci atomu helia ve formě součinu:

$$\psi = g_1(r_1, \theta_1, \phi_1)g_2(r_2, \theta_2, \phi_2). \quad (9.40)$$

Z pohledu teorie pravděpodobnosti nám tato rovnice říká, že pohyb prvního a druhého elektronu je nezávislý. Ne že by se ty dva elektrony „necítily“, nicméně předpokládáme, že elektron „cítí“ jenom průměrné pole generované druhým elektronem. Jelikož se v tomto oddíle zabýváme atomy, budeme pro jednoelektronové vlnové funkce g_1 a g_2 předpokládat tvar

$$g_1 = h_1(r_1)Y_{l_1}^{m_1}(\theta_1, \phi_1) \quad (9.41)$$

$$g_2 = h_2(r_2)Y_{l_2}^{m_2}(\theta_2, \phi_2), \quad (9.42)$$

kde Y_l^m jsou sférické harmonické funkce. Předpokládejme nyní, že nám někdo prozradil tvar jedno-elektronové vlnové funkce g_2 a nám zbývá dopočítat vlnovou funkci g_1 . První elektron se bude pohybovat v elektrostatickém poli jádra helia a dále na něj bude působit druhý elektron, jehož rozložení v prostoru ale díky znalosti vlnové funkce g_2 známe. Můžeme tak předpokládat, že se bude pohybovat v efektivním potenciálu

$$\tilde{V}_1(r_1, \theta_1, \phi_1) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{|g_2|^2}{r_{12}} d\tau - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_1}. \quad (9.43)$$

Udělejme ještě jedno další přiblížení, totiž to, že zprůměrujeme tento potenciál přes úhlové souřadnice a budeme předpokládat, že se elektron pohybuje v centrálním poli

$$V_1(r_1) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi V_1(r_1, \theta_1, \phi_1) \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1}. \quad (9.44)$$

Vlnovou funkci g_1 pak nalezneme řešením jedno-elektronové Schrödingerovy rovnice

$$\underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_1 + V_1(r_1) \right]}_{\hat{h}_1} g_1 = \varepsilon_1 g_1. \quad (9.45)$$

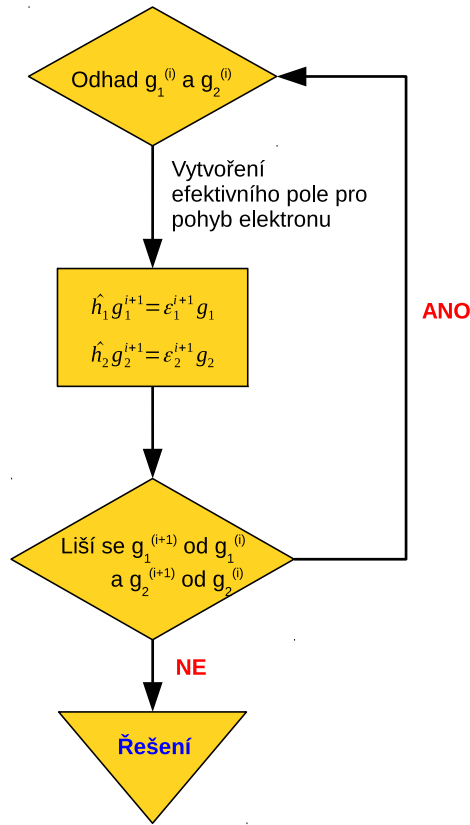
Takovouto rovnici už jsme schopni řešit, byť by se tak dělo numerickými metodami. Navíc jde o rovnici s centrálně-symetrickým potenciálem, takže bude platit

$$[\hat{H}, \hat{L}^2] = [\hat{H}, \hat{L}_z] = 0 \quad (9.46)$$

a velikost momentu hybnosti i projekce momentu hybnosti do jedné z os se budou zachovávat. Kvantová čísla l a m budou tudíž „dobrá kvantová čísla“. Jedno-elektronové vlnové funkce budou i tentokrát charakterizovány kvantovými čísly n , l a m , nicméně nebudou již platit degenerace mezi hladinami o stejném hlavním kvantovém čísle n .

Máme ale jednu potíž. Celou dobu předpokládáme, že známe vlnovou funkci g_2 . Jenže my ji ve skutečnosti neznáme! V rovnici (9.45) se nám tak objevuje neznámá funkce g_2 . Mohli bychom celou úvahu provést i naopak, budeme předpokládat, že známe vlnovou funkci g_1 a budeme se snažit vypočítat vlnovou funkci g_2 . Dostaneme tak soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé funkce, g_1 a g_2 . Jde o složitou soustavu integro-diferenciálních (a k tomu nelineárních) rovnic. Řešení pak hledáme iterativním způsobem, pomocí tzv. metody samo-souhlasného pole (SCF, z angl. *Self-Consistent Field*). Výpočet začneme hrubým odhadem tvaru vlnových funkcí g_1 a g_2 . Pomocí těchto odhadů vlnových funkcí určíme efektivní pole, ve kterých se oba elektrony pohybují (jinými slovy použijeme tyto funkce ke konstrukci jedno-elektronových hamiltoniánů v rovnici (9.45)). Vyřešením rovnice (9.45) získáme novou sadu funkcí g_1 a g_2 . Celé kolečko se může opakovat, do doby, než se funkce již dále nemění (viz Obr. 11).

Předvedený postup představuje tzv. Hartreeho metodu. Naše „odvození“ bylo heuristické, ke stejnému výsledku bychom ale došli s použitím variačního počtu. Obecně v Hartreeho metodě předpokládáme zkusmou vlnovou funkci ve tvaru součinu N jedno-elektronových vlnových funkcí



Obrázek 11: Řešení Hartreeho a Hartreeho-Fockových rovnice se prakticky provádí iterativním způsobem.

$$\Phi = q_1 q_2 q_3 \dots q_N. \quad (9.47)$$

Každý z elektronů se pak pohybuje v efektivním potenciálu

$$V_1(r_1, \theta_1, \phi_1) = \sum_{j=2}^N \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{|q_j|^2}{r_{1j}} d\tau_j - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_1}. \quad (9.48)$$

Pro každý z orbitalů g_i pak řešíme jedno-elektronovou Schrödingerovu rovnici ve tvaru

$$\hat{h}_i g_i = \epsilon_i g_i \quad (9.49)$$

Jak vypočítáme celkovou energii? Naivně bychom se mohli domnívat, že stačí sečíst energie jednotlivých elektronů $E = \sum_i \epsilon_i$. udělali bychom ale chybu, energie ϵ_1 v sobě zahrnuje coulombovské odpuzování s druhým až N -tým elektronem. Energie interakce mezi prvním a druhým elektronem se ale vyskytuje i ve členu ϵ_2 . Mezi-elektronovou repulzi bychom tak započítali dvakrát. Celková energie bude proto dána vztahem:

$$E = \sum_{i=1}^N \epsilon_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \int \int \frac{|g_i(i)|^2 |g_j(j)|^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} d\tau_i d\tau_j = \sum_{i=1}^N \epsilon_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N J_{ij}, \quad (9.50)$$

kde druhý člene představuje odpuzování mezi dvěma oblaky elektronů, který odečítáme, aby nebyl započítán dvakrát.

Hartreeho metoda je bohužel pro elektrony nepoužitelná. V minulé kapitole jsme si vysvětlili, že vlnová funkce popisující elektrony musí být antisymetrická vůči permutaci elektronů. Musíme ji tedy zapsat ve formě Slaterova determinantu:

$$\Phi = \frac{1}{N!} \begin{vmatrix} g_1(1)\alpha(1) & g_1(2)\alpha(2) & \cdots & g_1(N)\alpha(N) \\ g_2(1)\beta(1) & g_2(2)\beta(2) & \cdots & g_2(N)\beta(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_N(1)\beta(1) & g_N(2)\beta(2) & \cdots & g_N(N)\beta(N) \end{vmatrix}. \quad (9.51)$$

Tvar jedno-elektronových vlnových funkcí (orbitalů) určíme opět pomocí variační počtu, který nás znovu dovede k soustavě jedno-elektronových Schrödingerových rovnic, k tzv. Fockovým rovnicím:

$$\hat{F}\phi_i = \varepsilon_i\phi_i, \quad (9.52)$$

kde se ovšem kromě coulombovských členů vyskytují i tzv. výměnné členy (více viz v kapitole XXX). Mluvíme o tzv. Hartreeho-Fockových rovnicích. Celkovou energii vypočítáme podobně jako v Hartreeho metodě:

$$E = \sum_i^N \varepsilon_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N (J_{ij} - \delta_{ms_i, ms_j} K_{ij}), \quad (9.53)$$

kde ke coulombovskému integrálu J_{ij} přidanému už v Hartreeho metodě se přidává ještě výměnný integrál

$$K_{ij} = \int \int g_j^*(\vec{r}_1) g_i^*(\vec{r}_2) \frac{1}{r_{12}} g_i(\vec{r}_1) g_j(\vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2. \quad (9.54)$$

9.5 Roothanovy rovnice

Jednoelektronové funkce g_j (tedy atomové orbitály více-elektronových atomů) většinou hledáme ve formě lineární kombinace nějakých známých funkcí χ_i :

$$g_j = \sum_i c_{ij} \chi_i. \quad (9.55)$$

Výhoda je zřejmá, nemusíme hledat neznámé funkce g_j , ale pouze neznámá čísla c_{ij} . Místo soustavy nelineárních integro-diferenciálních rovnic (Fockových rovnic) řešíme pouze soustavu (nelineárních) algebraických rovnic. Jde o nám již dobře známé sekulární rovnice

$$\sum_j (F_{ij} - \varepsilon S_{ij}) c_j = 0 \quad (9.56)$$

resp. ve vektorovém zápisu

$$\mathbf{F}\vec{c} = \mathbf{S}\vec{c}. \quad (9.57)$$

Podmínkou netriviálního řešení je nulová hodnota sekulárního determinantu

$$\det|\mathbf{F} - \varepsilon\mathbf{S}| = 0, \quad (9.58)$$

z čehož dostaneme možné hodnoty energií.

Výše uvedené rovnice se nazývají rovnicemi Roothanovými.

9.6 Báze atomových orbitalů

Množinu funkcí χ_i nazýváme bázi atomových orbitalů. Tyto funkce mohou být například:

- Orbitaly atomů vodíkového typu. Bohužel tyto funkce jsou pro vyšší hodnoty hlavních kvantových čísel dosti komplikované. Navíc je třeba řada integrálů provádět numericky.
- Orbitaly tzv. Slaterova typu (STO, z angl. *Slater Type Orbitals*). Jde o exponenciální funkce

$$\chi(r) = (2\xi)^{n+\frac{1}{2}} [(2n)!]^{-1/2} r^{n-1} e^{-\xi r}. \quad (9.59)$$

Na rozdíl od funkcí vodíkového typu nemají STO radiální uzly. Hlavně ale nejsou všechny typy integrálů s těmito funkcemi analyticky vypočitatelné.

- Gaussovske funkce. Tyto funkce mají tvar

$$\chi(r) = N r^n e^{-a(r-r_A)^2}. \quad (9.60)$$

Nespornou výhodou gaussovských funkcí je skutečnost, že součin dvou gaussiánů je zase gaussián, jenom lokalizovaný na spojnici původních dvou gaussiánů. Všechny maticové elementy jsou analyticky vypočitatelné. Samozřejmě tyto funkce mají i své nevýhody (například nesprávné asymptotické chování), používá se proto lineární kombinace gaussovských funkcí.

Z praktického hlediska je užitečné seznámit se ještě s některými pojmy:

- Minimální báze. V minimální bázi jsou obsaženy pouze funkce popisující orbitaly obsazené pouze v základním stavu stavu příslušného atomu. Minimální báze pro atom helia tak obsahuje pouze funkce popisující 1s orbitaly.
- Rozšířená báze. Tato báze obsahuje funkce jdoucí za rámec minimální báze. Například tzv. polarizační funkce (funkce s vyšším kvantovým číslem) či funkce difúzní, tj. funkce s velmi malým exponentem. Tyto funkce jsou důležité kupříkladu pro popis aniontů nebo pro popis slabých mezimolekulárních interakcí.

Značení bází atomových orbitalů není nikterak systematické a je zapleveleno historickým vývojem oboru. Z pohledu uživatele je užitečné mít přehled o často užívaných zkratkách, jako STO-3G, 6-31g* či aug-cc-pVDZ. Laskavého čtenáře v té oblasti odkazujeme kupříkladu na XXXX. **PSnote: Otazka, zda se o tomto nevypindat více. A nebo odkazat na nekterou z referencnich prirucek, kam se ale asi nikdo nepodiva**

9.7 Periodicita atomů pohledem kvantové teorie

Periodický zákon říká, že vlastnosti prvků jsou periodickou funkcí jeho protonového čísla. Tento zákon byl formulován dlouho před vznikem kvantové mechaniky (a také dlouho před objevením atomového jádra). Kvantová mechanika dává periodickému zákonu novou interpretaci a na periodickou tabulku nahlíží jako na kvantově-mechanickou strukturu. V tomto oddíle si kvantově-mechanický pohled na periodicitu vlastností prvků stručně shrneme.

Zopakujme si nejdříve, jakým způsobem jsou staveny z elektronů a jader atomy. Základním principům porozumíme v rámci Hartreeho-Fockovy teorie. Většinou se jako se základními principy setkáme s následujícími pojmy

- Výstavbový princip. U atomů vodíkového typu je energie jedno-elektronového stavu dána výhradně hlavním kvantovým číslem n . V atomech je již degenerace různých stavů se stejným kvantovým číslem sejmuta. Pořadí jednoelektronových stavů, které typicky nalézáme u neutrálních atomů, nazýváme výstavbovým principem. Podotkněme ovšem, že výstavbový princip není nenarušitelné dogma a pořadí orbitalů je obecně v různých atomech a iontech různé, viz Obr. 12.

Obrázek 12: *Pořadí orbitalů, které typicky nacházíme v neutrálních atomech, se nazývá výstavbovým principem*

- Pauliho vylučovací princip. Zcela fundamentální princip, bez něj by periodická tabulka neexistovala, všechny prvky by v základním stavu byly jenom různě vypasené atomy vodíku.
- Pravidlo maximální multiplicity. O Hundových pravidlech bude řečeno více dále.

Z Fockových rovnic také vyplývá tzv. Koopmansův teorém, dle kterého ionizační energie i -tého elektronu IE_i rovna orbitální energii příslušného elektronu ϵ_i (až na znaménko)

$$IE_i = -\epsilon_i \quad (9.61)$$

a orbitální energie nejnižšího neobsazeného elektronu (LUMO elektronu, z angl. *Lowest Unoccupied Molecular Orbital*) je zase rovna elektronové afinitě

$$EA = -\epsilon_{\text{LUMO}}. \quad (9.62)$$

Pojďme se nyní podívat, jak se vyvíjí s protonovým číslem kupříkladu ionizační energie nejvýše obsazeného elektronu (HOMO elektronu, z angl. *Highest Occupied Molecular Orbital*). Pro atom vodíkového typu by platilo

$$IE \sim \frac{(Z')^2}{n^2}. \quad (9.63)$$

Vnitřní elektrony ale velmi efektivně stíní náboj jádra, takže HOMO elektron cítí náboj zmenšený o počet elektronů ve vnitřních slupkách. Jestliže se budeme pohybovat v periodě od lithia k neonu, očekávali bychom rostoucí ionizační energii: roste totiž protonové číslo a náboj jádra není ještě stíněn. Jestliže ale od neonu přejdeme k sodíku, vzroste najednou skokově hlavní kvantové číslo n a navíc efektivní protonové číslo se zmenší díky stínění náboje jádra vnitřními elektrony. Ionizační energie by se proto měla spíše blížit lithiu nežli neonu. To skutečně pozorujeme (pohleď, čtenáři, na Obrázek 13). Podobné úvahy vysvětlí i periodické změny poloměru atomů, který je pro jedno-elektronové atomy dán vztahem

$$R \sim \frac{n^2}{Z'}, \quad (9.64)$$

či třeba periodicitu elektronegativity, kterou můžeme dle Mullikena definovat jako

$$\chi = 0,187(IE + EA) + 0,17. \quad (9.65)$$

Obrázek 13: *Ionizační energie, elektronové afinity či poloměry atomů se s protonovým číslem periodicky mění. Tato periodicitu je důsledkem základních kvantově-mechanických zákonů.*

9.8 Sčítání momentu hybnosti a atomové termy

Jedno-elektronové atomy jsou charakterizovány nejen energií, ale také hodnotou velikosti momentu hybnosti (kvantové číslo l) a projekcí momentu hybnosti do určité osy (konvenčně do osy z , kvantové číslo m). Jestliže studujeme atomy s více elektrony, mohlo a mělo by nás zajímat, jakým způsobem se momenty hybností jednotlivých elektronů sčítají do celkového momentu hybnosti.

Celkový moment hybnosti \vec{L} by měl splňovat kvantově-mechanická pravidla jako jakýkoliv jiný moment hybnosti. Pro jeho velikost tak bude platit

$$|\vec{L}| = \hbar\sqrt{L(L+1)} \quad (9.66)$$

a pro projekci do směru osy z pak

$$L_z = \hbar M. \quad (9.67)$$

Uvažme případ dvou elektronů, z nichž každý se nachází v p orbitalu a je tedy charakterizován kvantovým číslem $l = 1$.

$$\begin{aligned} l_1 &= 1 \\ l_2 &= 1 \end{aligned}$$

Hodnota momentu hybnosti ve směru osy z se pak může buďto sčítat a nebo odčítat. Udělejme si následující tabulku

m_1	m_2			
		-1	0	1
-1		-2	-1	0
0		-1	0	1
1		0	1	2

Vidíme, že bude existovat stav, pro který kvantové číslo M určující projekci celkového momentu hybnosti do osy z nabývá hodnoty 2. Tomu ale odpovídá stav s velikostí momentu hybnosti daného kvantovým číslem $L = 2$. K tomuto kvantovému číslu ovšem přísluší ještě hodnoty $M = +1, 0, -1, -2$. V tabulce nám tedy zbývají hodnoty $M = -1, 0, 0, 1$. Je zjevné, že tedy musí existovat i stav s hodnotou $L = 1$. Tomu odpovídají hodnoty $M = -1, 0, 1$. Zbývá tedy ještě $M = 0$, čemuž odpovídá $L = 0$. Vidíme tedy, že ze dvou elektronů ve stavu $l = 1$ můžeme dostat $L = 2, 1, 0$.

Tuto naši úvahu můžeme zobecnit. Máme-li dva elektrony ve stavu l_1 a l_2 , pak celkový moment hybnosti může nabývat hodnot

$$L = |l_1 - l_2|, \dots, l_1 + l_2. \quad (9.68)$$

Stejným způsobem můžeme sčítat také celkový orbitální moment \vec{L} a celkový spinový moment \vec{S} do celkového momentu $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Pro kvantové číslo J bude platit

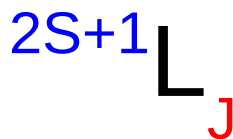
$$J = |L - S|, \dots, L + S. \quad (9.69)$$

Stav atomu potom zapisujeme pomocí tzv. atomového termu

XXXXX Příklad 1: Sodíkový dubletXXXXX

XXXX Příklad 2: Stavy atomu uhlíku XXX

Musíme mít ovšem na paměti, že ne všechny součty jsou v atomech možné (díky Pauliho vylučovacímu principu).



Obrázek 14: Symbol používaný pro vyjádření stavu mnoho-elektronového atomu

9.8.1 Hundova pravidla

Pořadí jednotlivých atomových termů dle energie je dáno tzv. Hundovými pravidly. Níže uvádíme jejich přehled.

- Term s maximální multiplicitou má nejnižší energii.
- Je-li multiplicita dvou termů stejná, pak nižší energii má term s vyšší hodnotou L .
- Je-li multiplicita i L dvou termů stejná, pak pro slupky méně než z poloviny zaplněné má nižší energii stav s nižším J .

XXXXX Příklad: Asi zase seradit atom uhlíku? XXXXXX

V nerelativistické kvantové mechanice by se energie stavů lišících se pouze hodnotou celkového momentu hybnosti J neměla lišit. Rozdíl energií je způsoben tzv. spin-orbitální vazbou. Zhruba řečeno, elektron rotující kolem jádra generuje magnetické pole. Spin elektronu je vůči tomuto poli různým způsobem orientován a tím je ovlivněna i jeho energie. V hamiltoniánu tak přibývá člen

$$\hat{H}_{SO} = \xi \hat{L} \hat{S}. \quad (9.70)$$

Parametr ξ představuje pro lehká jádra jenom velmi malý člen, Ten však rychle roste a pro těžká jádra je třeba tento jev brát v potaz. Sčítání momentů hybnosti se dá provádět dvojím způsobem

- L-S vazba (Russelova-Saundersova). Zde nejdříve sčítáme orbitální moment hybnosti pro celý atom, zvláště spinový moment pro celý atom a teprve na konci sečteme oba momenty. Uplatňuje se v situacích, kdy je mezi-elektronová repulze významnějším efektem v porovnání se spin-orbitální vazbou.
- j-j vazba. Zde nejdříve sčítáme orbitální a spinový moment pro jednotlivé elektrony a sčítáme teprve výsledný moment hybnosti.

10 Hartreeho-Fockova metoda

11 Kvantová teorie molekul

Popis molekul v rámci kvantové teorie je ústředním tématem kvantové chemie. Na rozdíl od atomů nejsou molekuly centrálně symetrické, což výpočty jejich vlastností komplikuje. V důsledku nižší symetrie se tak například v molekulách při elektronovém pohybu nezachovává moment hybnosti. V případě molekul se musíme kromě pohybu elektronů vyrovnat také s pohyby atomových jader. Atomová jádra jsou daleko těžší než elektrony, takže jejich popis na kvantové úrovni není vždy nezbytně nutný. Je ovšem třeba vědět, jaká jsou omezení klasického pohledu na atomová jádra. Díky rozdílné hmotnosti jader a elektronů můžeme pohyb atomových jader a elektronů (často) oddělit. To je podstatou tzv. Bornovy-Oppenheimerovy aproximace vedoucí ke konceptu hyperplochy potenciální energie. Tento koncept je pro chemika důležitý natolik, že si možná ani neuvědomí jeho přibližnou povahu.

11.1 Molekulový Hamiltonián

Nemělo by nám již být zatěžko zapsat pro molekulu hamiltonián. Ten musí obsáhnout všechny molekulové interakce mezi jádry a elektrony. Při zanedbání relativistických efektů nabývá následující tvar:

$$\hat{H} = \hat{T}_R + \hat{T}_r + \hat{V}_{nn} + \hat{V}_{nr} + \hat{V}_{rr}, \quad (11.1)$$

kde \hat{T}_R je operátor kinetická energie jader:

$$\hat{T}_R = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m_{n,i}} \Delta_i, \quad (11.2)$$

\hat{T}_r operátor kinetická energie elektronů:

$$\hat{T}_r = \sum_j -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_j, \quad (11.3)$$

\hat{V}_{nn} popisuje coulombovské odpuzování mezi jádry:

$$\hat{V}_{nn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_{i' > i} \frac{Z_i Z_{i'} e^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i'}|}, \quad (11.4)$$

\hat{V}_{nr} popisuje přitahování mezi jádry a elektrony:

$$\hat{V}_{nr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_j \frac{Z_i e^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (11.5)$$

a \hat{V}_{rr} popisuje odpuzování mezi elektrony:

$$\hat{V}_{rr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \sum_{j' > j} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|}. \quad (11.6)$$

Ve výše uvedených výrazech jsou \mathbf{R}_i a \mathbf{r}_j symboly pro polohové vektory pro jádro i a elektron j , Z_i pak značí náboj jádra i . Naším úkolem je vyřešit Schrödingerovu rovnici

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (11.7)$$

kde vlnová funkce ψ je funkcí jak souřadnic elektronů, tak souřadnic atomových jader.

11.2 Bornova-Oppenheimerova aproximace

Přesné řešení Schrödingerovy rovnice s molekulovým hamiltoniánem je mimořádně komplikované. Situaci nám ale hodně zjednoduší oddělení pohybu elektronů a atomových jader v rámci Bornovy-Oppenheimerovy aproximace (BOA). Nejprve se na BOA podíváme stručně s nadhledem, poté již budeme matematicky rigoróznější.

11.2.1 Bornova-Oppenheimerova aproximace: První pohled

I nejlehčí atomové jádro (proton) je přibližně 1800krát těžší než elektron. Pohybuje se proto také mnohem pomaleji než elektron. Kvantový elektron tak v každé chvíli vidí v podstatě stojící, klasická atomová jádra. Pro každou geometrii jader můžeme proto vyřešit elektronovou Schrödingerovu rovnici a vypočítat příslušnou energii, se kterou se elektrony v molekule v dané geometrii pohybují:

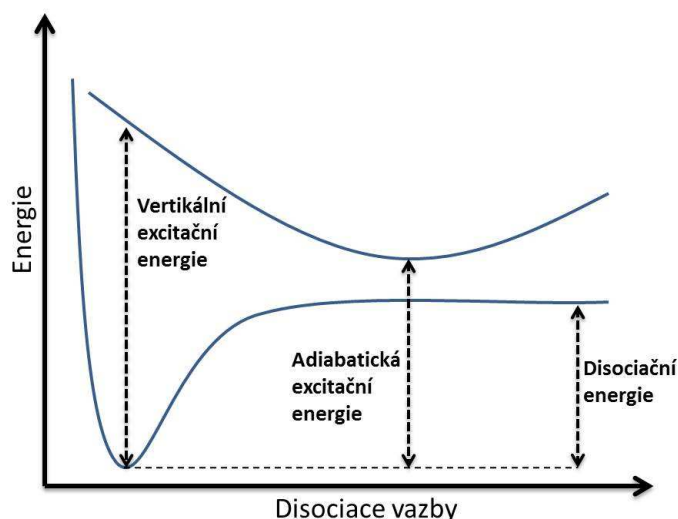
$$\hat{H}_{el}\psi_{el} = E_{el}\psi_{el}, \quad (11.8)$$

kde \hat{H}_{el} je elektronový Hamiltonián:

$$\hat{H}_{el} = \hat{T}_r + \hat{V}_{nr} + \hat{V}_{rr} + \hat{V}_{nn} \quad (11.9)$$

a E_{el} je elektronová energie (energie, se kterou se v molekule pohybují elektrony, tato energie v sobě většinou zahrnuje i coulombovské odpuzování mezi atomovými jádry). ψ_{el} je pak elektronová vlnová funkce. Ta je funkcí souřadnic elektronů \mathbf{r}_j , parametricky je ale závislá i na souřadnicích atomových jader. Pojmem „parametrická závislost“ máme na mysli, že elektronová vlnová funkce bude jiná pro každou geometrii \mathbf{R}_i a pro každou geometrii spočítáme také jinou elektronovou energii E_{el} .

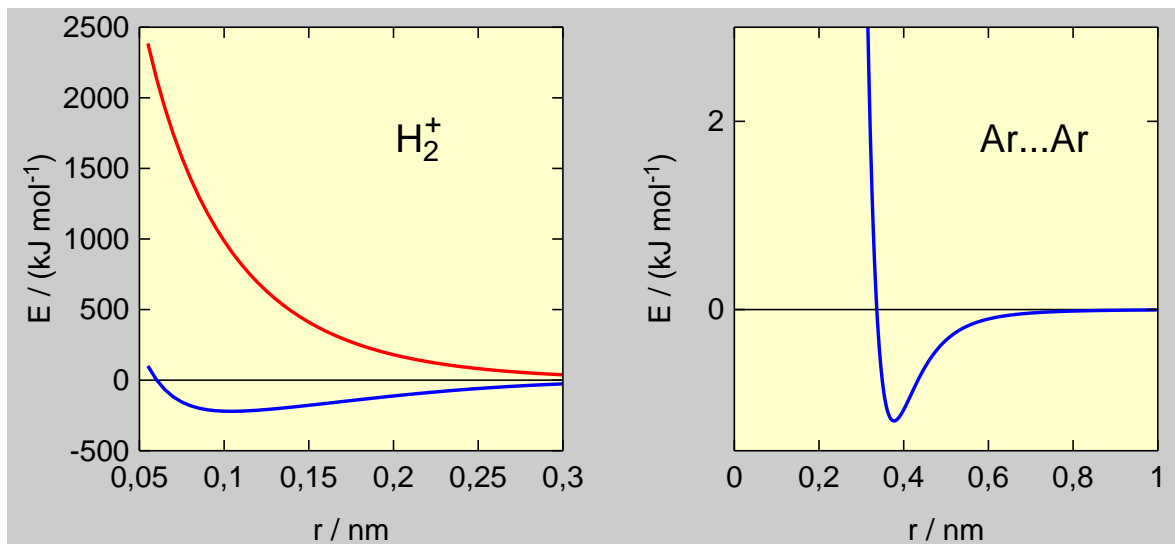
Závislost elektronové energie na souřadnicích atomových jader se pro dvouatomové molekuly nazývá křivkou potenciální energie, pro víceatomové molekuly potom hyperplochou potenciální energie. Hyperplocha potenciální energie je ústřední pojem teoretické chemie, který dává chemikovi jasnou představu o struktuře a reaktivitě molekul.



Obrázek 15: Co lze vyčíst z hyperplochy potenciální energie

Obr. 15 znázorňuje křivku potenciální energie pro obecný případ dvouatomové molekuly. Křivky jsou vykresleny pro dva elektronové stavy. Na těchto křivkách jsou vyznačeny rovnovážné geometrie v základním a v excitovaném stavu a některé významné energetické údaje.

Hyperplochu potenciální energie si nyní ukážeme na několika konkrétních příkladech. Obr. 16 zobrazuje hyperplochy potenciálních energií pro H_2^+ a dvouatomový komplex argonu. Hyperplocha (nebo v tomto případě křivka) potenciální energie nám říká, jak na sebe působí atomy či molekuly. Podívejme se nejprve křivku potenciální energie H_2^+ . Modrá křivka zobrazující základní elektronový stav má minimum ve vzdálenosti kolem 0,1 nm. Tato vzdálenost odpovídá rovnovážné geometrii molekuly H_2^+ . Červená křivka znázorňující elektronově excitovaný stav naopak žádné minimum nemá. Energie tohoto stavu je tím nižší, čím jsou atomy vodíku dále od sebe. Z této křivky vidíme, že molekula H_2^+ se v excitovaném stavu rozpadne.



Obrázek 16: Křivky potenciální energie pro H_2^+ a dvouatomový komplex argonu. Energie v obou případech byly vypočítány řešením stacionární Schrödingerovy rovnice.

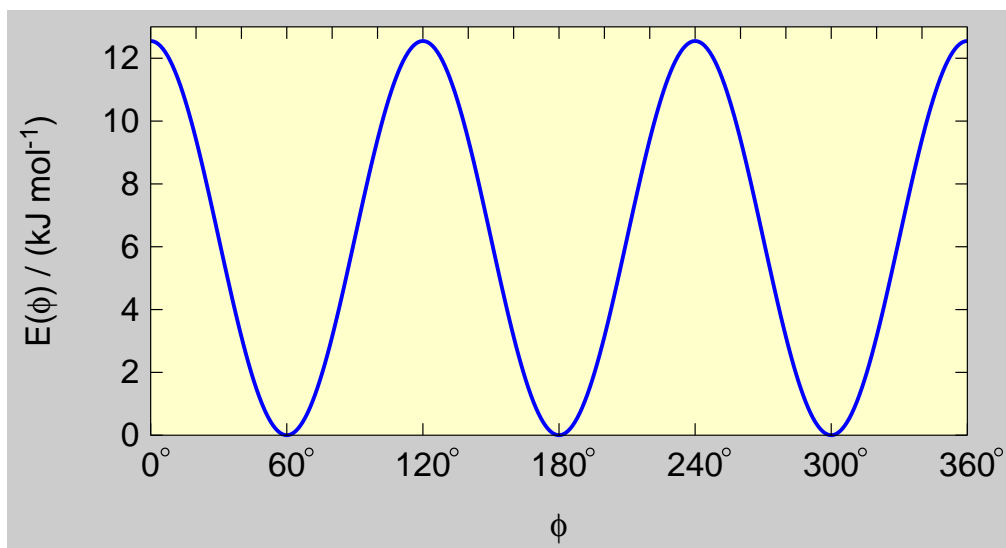
Druhý obrázek znázorňuje dva atomy argonu. Ze střední školy si všichni pamatujeme, že vzácné plyny netvoří dvouatomové molekuly. Křivka potenciální energie argonu nicméně vykazuje minimum. Nejde však o chemickou vazbu. Všimněme si, že energetické minimum pro argon je mnohem dále než minimum pro H_2^+ . Navíc, podíváme-li se na energetickou osu, všimneme si, že minimum u argonu není ani zdaleka tak hluboké jako bylo v případě H_2^+ . Argon vskutku netvoří chemické vazby, ale je stabilizován pouze slabými nekovalentními interakcemi, konkrétně tzv. disperzními silami.

Další příklad si vypůjčíme ze základního kurzu organické chemie. Molekula ethanu obsahuje dvě methylové skupiny. Pokud jednu methylovou skupinu otočíme, bude se měnit potenciální energie (tj. elektronová energie) této molekuly. Dva limitní příklady nazýváme zákrytová a nezákrytová konformace. Obr. 17 ukazuje energetiku otáčení methylové skupiny, přičemž všechny energie byly opět vypočítány řešením stacionární Schrödingerovy rovnice.

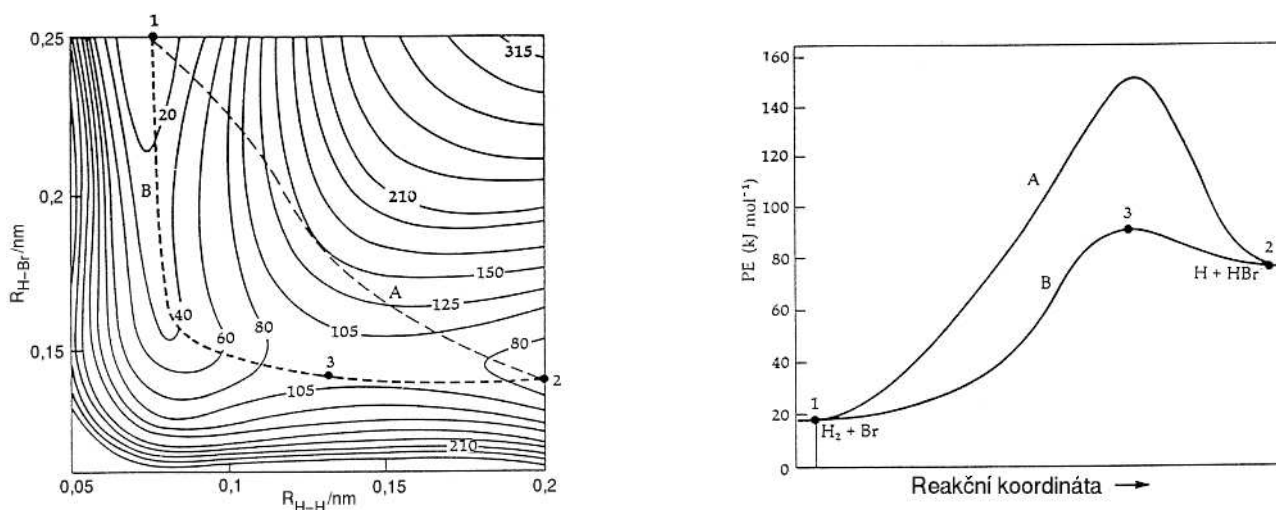
Poslední příklad nám ukáže, že pojem hyperplocha potenciální energie je důležitý také v chemické kinetice. Podívejme se na vznik bromovodíku podle následující reakce:



kde se přenes atom vodíku k bromu, jedna chemická vazba zanikne a druhá vznikne. Elektronová energie systému o třech atomech závisí na třech souřadnicích, což již ve dvou rozměrech neznázorníme. Vybereme si proto jenom dvě souřadnice, vzdálenost mezi dvěma atomy vodíku a vzdálenost mezi atomem vodíku a atomem bromu. Závislost energie na geometrii pak znázorníme pomocí vrstevnicového diagramu (viz obr. 18). Údaje ve vrstevnicovém diagramu odečítáme podobně jako v mapě. Analogicky také hledáme nejméně náročnou cestu od reak-



Obrázek 17: Závislost potenciální energie na vzájemném otáčení methylových skupin v molekule ethanu.



Obrázek 18: Vrstevnicový diagram potenciální energie pro reakci $\text{Br} + \text{HBr}$.

tantů k produktů, tj. údolím reaktantů přes sedlo k údolí produktů (obrázek znázorňuje ještě jinou, energeticky náročnější konkurenční reakční cestu). Takovéto reakční cestě říkáme reakční koordináta. V pravé části obrázku pak vidíme energetický profil reakce podél této reakční koordináty.

Hyperplocha potenciální energie je smysluplný pojem pouze pokud je pohyb atomových jader a elektronů je nezávislý. Matematicky tuto nezávislost formulujeme tak, že celkovou vlnovou funkci zapíšeme jako součin vlnové funkce elektronů (ψ_{el}) a vlnové funkce jader (χ)

$$\psi = \chi(\mathbf{R})\psi_{el}(\mathbf{r}; \mathbf{R}). \quad (11.11)$$

11.2.2 Bornova-Oppenheimerova aproximace: Odvození

Vyjdeme z elektronového hamiltoniánu, který popisuje elektrony pro stojící jádra v konkrétní geometrii \mathbf{R}_i :

$$\hat{H}_{el} = \hat{T}_r + \hat{V}_{nr} + \hat{V}_{rr} + \hat{V}_{nn}.$$

Elektronový hamiltonián působí toliko na funkce souřadnic elektronů (přičemž ale tento elektronový hamiltonián je různý pro různé souřadnice jader \mathbf{R}_i). Vyřešme nejdříve pro každou z možných geometrií elektronovou Schrödingerovu rovnici :

$$\hat{H}_{el}\psi_{el}^{(i)} = E_{el}^{(i)}\psi_{el}^{(i)}. \quad (11.12)$$

Znovu připomeňme, že řešením je vlnová funkce souřadnic elektronů parametricky závislá na souřadnicích jader

$$\psi_{el}^{(i)} = \psi_{el}^{(i)}(\mathbf{r}; \mathbf{R}). \quad (11.13)$$

Pod pojmem „parametrická závislost“ máme na mysli, že vlnová funkce je různá pro různé souřadnice jader, přičemž ale čtverec vlnové funkce nemá význam hustoty pravděpodobnosti nalezení jader v určité geometrii \mathbf{R}_i . Sada vlastních funkcí elektronového hamiltoniánu vytváří úplný soubor funkcí a můžeme tedy každou funkci souřadnic elektronů rozvinout do báze vlastních funkcí elektronového hamiltoniánu. Můžeme to učinit i pro celkovou vlnovou funkci:

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \sum_i \chi_i(\mathbf{R})\psi_{el}^{(i)}(\mathbf{r}; \mathbf{R}), \quad (11.14)$$

kde $\chi_i(\mathbf{R})$ jsou rozvojové koeficienty, které závisí na poloze jader. Doposud jsme se nedopustili žádné aproximace. Dosadíme tedy vlnovou funkci $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ do Schrödingerovy rovnice $\hat{H}\psi = E\psi$, jejíž levou stranu si dále upravíme:

$$\hat{H}\psi = \sum_i (\hat{T}_R + \hat{H}_{el})\chi_i\psi_{el}^{(i)} = \sum_i \left[\hat{T}_R(\chi_i\psi_{el}^{(i)}) + \chi_i E_{el}^{(i)}\psi_{el}^{(i)} \right]. \quad (11.15)$$

Nyní si upravíme první člen pravé strany poslední rovnice. Výklad zjednodušíme tím, že budeme uvažovat operátor kinetické energie pouze v jednom rozměru, tj.

$$\hat{T}_R = \frac{-\hbar^2}{2m_R} \frac{d^2}{dR^2}.$$

Nyní se zaměříme na působení operátoru kinetické energie jader:

$$\hat{T}_R\chi_i\psi_{el}^{(i)} = \frac{\hbar^2}{2m_R} \left(\psi_{el}^{(i)} \frac{d^2\chi_i}{dR^2} + 2 \frac{d\chi_i}{dR} \frac{d\psi_{el}^{(i)}}{dR} + \chi_i \frac{d^2\psi_{el}^{(i)}}{dR^2} \right) \quad (11.16)$$

Na tomto místě se dopustíme aproximace: zanedbáme poslední dva členy z rovnice 11.16, tedy

$$\hat{T}_R\chi_i\psi_{el}^{(i)} \approx \frac{\hbar^2}{2m_R} \psi_{el}^{(i)} \frac{d^2\chi_i}{dR^2}. \quad (11.17)$$

Z odvození Bornovy-Oppenheimerovy aproximace jasně vidíme, že obecně bude platit tím lépe, čím méně se bude elektronová vlnová funkce měnit s geometrií. Můžeme hned nabýt podezření, že pro rychle se pohybující jádra by Bornova-Oppenheimerova aproximace nemusela fungovat úplně dobře.

Vraťme se ještě k rovnici 11.15. Rovnici nejprve vynásobíme komplexně sdruženou elektronovou vlnovou funkcí $\psi_{el}^{(j)*}$ a následně prointegrujeme přes souřadnice elektronů r :

$$\sum_i \left[\hat{T}_R(\chi_i\psi_{el}^{(i)}) + \chi_i E_{el}^{(i)}\psi_{el}^{(i)} \right] = E \sum_i \psi_{el}^{(i)} \chi_i \quad / \cdot \psi_{el}^{(j)*}, / \int d\tau \quad (11.18)$$

Schrödingerova rovnice (v jedné dimenzi) nabude tvaru:

$$\sum_i \left[\hat{T}_R\chi_i \int \psi_{el}^{(j)*} \psi_{el}^{(i)} d\tau + \chi_i E_{el}^{(i)} \int \psi_{el}^{(j)*} \psi_{el}^{(i)} d\tau \right] = E \sum_i \int \psi_{el}^{(j)*} \psi_{el}^{(i)} \chi_i d\tau. \quad (11.19)$$

Vzhledem k tomu, že elektronové vlnové funkce jsou ortonormální, rovnice se zjednoduší na následující tvar:

$$\sum_i \left[\hat{T}_R \chi_i \delta_{ij} + \chi_i E_{el}^{(i)} \delta_{ij} \right] = E \sum_i \int \delta_{ij} \chi_i. \quad (11.20)$$

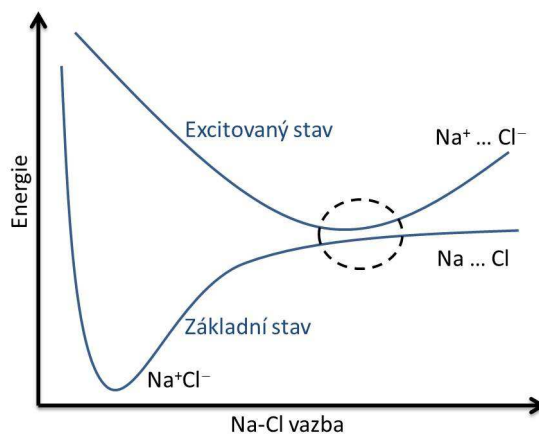
Kroneckerovo δ nám nakonec vybere pouze členy pro $i = j$:

$$\left(\hat{T}_R + E_{el}^{(j)} \right) \chi_j = E \chi_j \quad (11.21)$$

Rovnice 11.21 představuje Schrödingerovu rovnici pro jádra. Vidíme, že jádra se pohybují v potenciálu daného elektronovou energií pro jednotlivé geometrie.

11.2.3 Meze platnosti Bornovy-Oppenheimerovy aproximace

Není těžké nalézt příklady, kdy Bornova-Oppenheimerova aproximace selhává. Vezměme si molekulu chloridu sodného (viz obr. 19). NaCl je v základním stavu vázána iontovou vazbou, minimum základního stavu si tedy můžeme přibližně popsat jako $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$. Když od sebe oddalujeme atomy chloru a sodíku, roste energie, až dojde k rozpadu chemické vazby. Molekula se může rozpadnout dvěma způsoby, na Na^+ a Cl^- nebo na Na a Cl, přičemž jedna limita odpovídá základnímu a druhá excitovanému stavu. Nyní uvažujme, že molekulu chloridu sodného excitujeme. Kovalentně vázaný excitovaný stav v geometrii globálního minima není stabilní a bude se proto rozpadat. Tento rozpad by se dle Bornovy-Oppenheimerovy aproximace měl odehrávat na jedné křivce potenciální energie a výsledkem by tak měly být ionty $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$. Ve skutečnosti vzniknou oba produkty, jak iontový, tak kovalentní. V oblasti křížení stavů se totiž elektronová vlnová funkce s mezijadernou vzdáleností dramaticky mění a druhý a třetí člen v rovnici 11.16 proto není možno zanedbat.



Obrázek 19: Ukázka selhání Bornovy-Oppenheimerovy aproximace

12 Vibrace a rotace molekul

Obecná molekula může konat translační, vibrační nebo rotační pohyby. V této kapitole si ukážeme pouze nejjednodušší příklad, totiž popis vibrace a rotace dvouatomové molekuly.

V minulé kapitole jsme si ukázali Schrödingerovu rovnici pro jádra (11.21):

$$\left(\hat{T}_R + E_{el}^{(j)}\right) \chi_j = E \chi_j.$$

Pro zjednodušení budeme v následujícím textu uvažovat platnost Bornovy-Oppenheimerovy aproximace a dále pouze základní elektronový stav molekuly:

$$\left(\hat{T}_R + E_{el}\right) \chi_j = E \chi_j.$$

Jelikož uvažujeme dvouatomovou molekulu, bude elektronová energie E_{el} pouze funkcí vzdálenosti dvou jader (označme je jako α a β)

$$E_{el} = E_{el}(\mathbf{R}_\alpha - \mathbf{R}_\beta),$$

ne na jejich orientaci. Dalším krokem v našem výkladu by bylo přeformulování kinetické energie na kinetickou energii těžiště molekuly a kinetickou energii odpovídající relativnímu pohybu molekuly. Celý postup je popsán v kapitole o problému dvou částic. Zde si uvedeme pouze dvě konečné rovnice, ke kterým bychom se dostali:

$$\hat{H}_{tr} \psi_{tr}(R) = E_{tr} \psi_{tr}(R) \quad (12.1)$$

$$\hat{H}_{int} \psi_{int}(r) = E_{int} \psi_{int}(r) \quad (12.2)$$

$$E = E_{tr} + E_{int}, \quad (12.3)$$

přičemž první rovnice (12.1) popisuje translaci molekuly jako celku a druhá (12.2) její relativní pohyb, tedy vibraci nebo rotaci. Translaci jsme se věnovali v kapitole XX, nyní se v dalším výkladu budeme věnovat vibracím a rotacím. Rovnici 12.2 představující vnitřní problém si můžeme rozepsat následovně:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\mathbf{r}} + E_{el}(r) \right] \psi_{int} = E_{int} \psi_{int} \quad (12.4)$$

Tato rovnice představuje molekulu v centrálním potenciálu. Také centrálnímu potenciálu jsme se věnovali v kapitole s problémem dvou částic. Ukázali jsme si, že řešení hledáme ve tvaru součinu sférické harmonické funkce a radiální vlnové funkce

$$\psi_{int}(r, \theta, \psi) = R(r) Y_l^m(\theta, \psi). \quad (12.5)$$

Takovouto vlnovou funkci můžeme dosadit do Schrödingerovy rovnice a posléze vydělit sférickým harmonikem, abychom dostali radiální Schrödingerovu rovnici:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(R'' + \frac{2}{r} R' \right) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} R + \hat{V} R = E_{int} R, \quad (12.6)$$

kterou si dále zjednodušíme zavedením substitute

$$F(r) = r R(r)$$

na

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} F'' + \left[E_{el} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] F = E_{int} F. \quad (12.7)$$

Poslední rovnici je možné zjednodušit, zavedeme-li si dvě aproximace.

- Nejprve použijeme Taylorův rozvoj do druhého řádu pro vyjádření elektronové energie:

$$E_{el} \approx E_{el}(R_{ekv}) + \left(\frac{dE_{el}}{dr} \right) (r - R_{ekv}) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 E_{el}}{dr^2} \right) (r - R_{ekv})^2, \quad (12.8)$$

kde první člen určuje pouze relativní hladinu energie, a proto si můžeme zvolit $E_{el}(R_{ekv}) = 0$. Druhý člen je nulový, protože se nacházíme v minimu a teprve třetí člen bude nenulový. Zavedeme-li si substituci

$$k = \left(\frac{d^2 E_{el}}{dr^2} \right) \\ x = r - R_{ekv},$$

můžeme Taylorův rozvoj energie přepsat na následující tvar:

$$E_{el} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 E_{el}}{dr^2} \right) (r - R_{ekv})^2 = \frac{1}{2} k x^2. \quad (12.9)$$

- Dále bychom si udělali Taylorův rozvoj ještě pro druhý člen v závorce rovnice 12.7:

$$\left(\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu} \right) \frac{1}{r^2} = \left(\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu} \right) \left[\frac{1}{R_{ekv}^2} - \frac{2}{R_{ekv}^3} (r - R_{ekv}) + \frac{3}{R_{ekv}^4} (r - R_{ekv})^2 + \dots \right], \quad (12.10)$$

ze kterého budeme v tomto případě uvažovat pouze nultý člen:

$$\left(\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu} \right) \frac{1}{r^2} \approx \left(\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu} \right) \frac{1}{R_{ekv}^2} \quad (12.11)$$

Uvažujeme-li tyto dvě aproximace, rovnice 12.7 přejde na

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} F'' + \left[\frac{1}{2} k x^2 + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu R_{ekv}^2} \right] F = E_{int} F \quad (12.12)$$

a po změně pořadí členů na

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} F'' + \frac{1}{2} k x^2 F = \left(E_{int} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu R_{ekv}^2} \right) F. \quad (12.13)$$

Poslední rovnice je rovnicí pro jednodimenzionální harmonický oscilátor. Přepíšme si ji ještě zavedením

$$E' = E_{int} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu R_{ekv}^2}$$

na

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} F'' + \frac{1}{2} k x^2 F = E' F. \quad (12.14)$$

Protože víme, jak vypadá energie harmonického oscilátoru, můžeme dále psát

$$E' = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu, \quad (12.15)$$

kde $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$. Při uvažování těchto vztahů dostaneme konečný vztah pro vnitřní energii, tedy

$$E_{int} \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_{ekv}^2}. \quad (12.16)$$

Dva členy v poslední rovnici zastupují harmonický oscilátor (vibrace) a tuhý rotor (rotace). V průběhu odvození jsme použili aproximací harmonického oscilátoru a tuhého rotoru. Obě aproximace mají své limity. Harmonický oscilátor např. předpokládá, že vibrační hladiny jsou ekvidistantní a nedokáže také popsat disociaci vazby. Místo harmonického oscilátoru je možné použít oscilátoru Morseova

$$E_{el} = D_e \left[1 - e^{a(r-R_{ekv})}\right], \quad (12.17)$$

který už pracuje s disociací vazby (disociační energie je D_e a a parametr vztahující se k šířce potenciálu, $a = \sqrt{\frac{k}{2D_e}}$). Pokud bychom chtěli vibrace a rotace popsat ještě přesněji, bylo by třeba uvažovat Coriolisovy interakce, tedy skutečnost, že vibrační a rotační pohyb není nezávislý.

13 Elektronová struktura molekul

Ústředním úkolem kvantové chemie po zavedení Bornovy-Oppenheimerovy aproximace je výpočet elektronové energie molekul:

(13.1)

kde elektronová energie závisí na konkrétní geometrii molekuly, tj. na souřadnicích atomových jader **XXXXX**. V této kapitole probereme řešení rovnice **XXX** pro dvouatomové molekuly. Začneme přitom nejjednodušší molekulou, totiž iontem molekuly vodíku H_2^+ .

13.1 Ion molekuly vodíku

OBR: Geometrie iontu molekuly vodíku?

Ion molekuly vodíku je tvořen dvěma jádry (konkrétně protony), označme si je jako jádra A a B a jedním elektronem, viz Obr. **XXX**. Pro takovýto útvar nám není zatěžko napsat elektronový hamiltonián:

(13.2)

kde **XX** je Laplaceův operátor v souřadnicích elektronu, r_A je vzdálenost elektronu k jádru A a r_B je vzdálenost elektronu k jádru B.[†] Nadále bude poněkud pohodlnější pracovat v soustavě atomových jednotek, ve kterých $\hbar = m_e = e = 4\pi\epsilon = 0$. Hamiltonián pak nabude tvaru

(13.3)

Elektronovou Schrödingerovu rovnici s tímto Hamiltoniánem je možné řešit analyticky. Nás ale bude zajímat řešení přibližné, takové, které budeme moci využít i pro složitější molekuly. Můžeme se docela dobře odrazit z naší znalosti elektronové struktury atomů. Kdybychom měli v blízkosti elektronu pouze jádro A, pak bychom řešení znali: vlnová funkce by byla dána atomovým orbitalem vodíku $1s_A$. Stejně tak kdyby se elektron pohyboval v blízkosti jádra B a jádro A se v okolí vůbec nevyskytovalo, pak by exaktním řešením byl orbital $1s_B$. Připomeňme, že atomové orbitaly $1s_A$ a $1s_B$ jsou matematickými funkcemi souřadnic elektronů, konkrétně

(13.4)

kde pro jádro vodíku o nábojovém čísle $Z = 1$ je $k = 1$ (pro elektron v poli jádra He^+ je pak $k = 2$ atd.). Pokud obě jádra hodně daleko od sebe, pak přesné řešení bude dáno jako

(13.5)

Uvažme situaci, kdy se elektron nachází v blízkosti jádra A. Hodnota vlnové funkce $1s_B$ pak pro velké vzdálenosti r_{AB} bude zanedbatelná a tento elektron je pak v zásadě popsán orbitalem $1s_A$, chová se tedy jako elektron atomu A. A nebo se elektron nachází v blízkosti jádra B a pak se chová jako elektron atomu B. My budeme předpokládat, že tuto formu vlnové funkce můžeme použít pro všechny mezi-jaderné vzdálenosti. Výraz **XXXX** představuje zkusmou vlnovou funkci ve smyslu variačního principu: tato funkce je závislá na rozvojových koeficientech

[†]V elektronovém hamiltoniánu může, ale nemusí být přidán člen popisující coulombovské odpuzování mezi jádry. Z pohledu elektronové vlnové funkce totiž tento člen představuje konstantu. Zde mezijadernou repulzi vynecháváme

c_A a c_B , které musíme určit minimalizací funkcionálu energie. [‡] Tento tvar vlnové funkce je zárodkem metody označované zkratkou MO-LCAO (z angl. *Molecular Orbitals - Linear Combination of Atomic Orbitals*). Hledáme totiž vlnovou funkci jednoho elektronu pohybujícího se v molekule (tedy hledáme tzv. molekulový orbital) ve formě lineární kombinace atomových orbitalů. To je klasický příklad lineárního funkcionálu, který vede k sekulárním rovnicím, se kterými jsme se již několikrát setkali:

$$(13.6)$$

kde coulombovský integrál H_{AA} a H_{BB} , rezonanční integrál H_{AB} a překryvový integrál S_{AB} mají v našem případě tvar

$$(13.7)$$

Podmínkou netriviálního řešení sekulárních rovnic je nulovost sekulárního determinantu

$$(13.8)$$

což vede k dvěma možným hodnotám energie (uvažme přitom, že hodnota rezonančního integrálu H_{AB} je záporná)

$$(13.9)$$

Jestliže dosadíme energii E_1 zpět do sekulárních rovnic, získáme podmínku

$$(13.10)$$

Pokud do sekulárních rovnic dosadíme za energii hodnotu E_2 , získáme podmínku

$$(13.11)$$

Hodnoty rozvojových koeficientů se tak v absolutní hodnotě musí rovnat, lišit se může pouze jejich znaménko. To jsme ani nemuseli počítat z variačního principu, neboť to plyne přímo ze symetrie problému. Máme tak dvojí řešení, pro základní stav s energií E_1 je řešením molekulový orbital jako součet atomových orbitalů

$$(13.12)$$

Mluvíme o tzv. vazebném orbitalu. Pro excitovaný stav s energií E_2 je řešením Schrödingerovy rovnice rozdíl těchto atomových orbitalů:

$$(13.13)$$

zde mluvíme o antivazebném orbitalu. Obrázek **XXX** vysvětluje toto označení. Ve vazebném orbitalu je maximum elektronové hustoty soustředěno do oblasti mezi atomovými jádry. Takovéto uspořádání podporuje přibližování atomových jader. Na druhou stranu v antivazebném orbitalu elektrony mezi jádry příliš nejsou a obě jádra se tak od sebe odpuzují. [§]

OBRAZEK XXX Vazebný a antivazebný orbital iontu molekuly vodíku.

[‡]Jako variační parametr můžeme použít také parametr k . Ten je spojen s nábojovým číslem. Je jasné, že pro disociovanou strukturu s velkou mezijadernou vzdáleností r_{AB} bude optimální hodnota $k = 1$, budeme skutečně popisovat atom vodíku. Pokud ale obě jádra přiblížíme na velmi malou vzdálenost, vlnová funkce se bude blížit orbitalu $1s$ iontu atomu helia a tedy $k = 2$

[§]Obrázek by mohl vzbuzovat dojem, že primární hnací silou chemické vazby je elektrostatické stínění odpuzivé interakce mezi jádry. To je ale přinejmenším nepřesné. Hlavním tahounem poklesu energie při vzniku vazby je pokles kinetické energie elektronů.

Z rovnice XXX můžeme do grafu snadno vynést energie E_1 a E_2 v závislosti na mezijaderné vzdálenosti R . Přidáme-li ještě mezijadernou repulzi $1/R$, získáme křivky zobrazené na Obr. XXX.

Obr. XXX: Potenciálové křivky dvou nejnižších stavů iontu molekuly vodíku.

Pro úplnost zbývá ještě doplnit, že konkrétní hodnotu rozvojového koeficientu c_A získáme z normalizační podmínky

$$(13.14)$$

a vlnová funkce tak má tvar

$$(13.15)$$

13.2 Molekulové orbitály excitovaných stavů

Výpočet elektronové energie iontu molekuly vodíku představený v minulé kapitole je pouze velmi přibližný. Jak bychom jej mohli vylepšit? Jedna z možností by byla považovat parametr k za variační parametr. To je ale matematicky poněkud obtížnější úkol, neměli bychom pak již lineární funkcional. Jinou, fyzikálně dobře motivovanou, možností je rozvinout molekulové orbitály do rozsáhlejší množiny atomových orbitalů, například uvažovat elektron pohybující se ne pouze v základním stavu atomu vodíku, ale i v jeho stavech excitovaných. Mohli bychom například psát:

$$(13.16)$$

Takovýto rozvoj zvýší flexibilitu vlnové funkce. Sekulární rovnice nyní již představují soustavu deseti rovnic pro deset neznámých rozvojových koeficientů. Pořád ale jde o soustavu lineárních rovnic, které jsou snadno řešitelné. Na místo dvou stavů ale nyní získáme stavů 10. V základním stavu získáme řešením funkci, jejímž dominantním členem bude součet $1s_A + 1s_B$, ale v určité malé míře budou k řešení přispívat i orbitály $2s_A$, $(2p_0)_A$, $2s_B$ či $(2p_0)_B$, v excitovaných stavech se začnou výrazněji uplatňovat i vyšší atomové orbitály. Při kombinování atomových orbitalů do orbitalů molekulových bude platit

- V jednom molekulovém orbitalu se budou výrazněji uplatňovat pouze atomové orbitály o podobné energii. To vyplývá jednak z matematiky celého problému, jednak i ze selského rozumu. Jestliže se elektron v atomu A pohybuje s určitou energií, nemůžeme asi čekat, že se v blízkosti atomu B jeho energie závratně změní.
- Kombinují se toliko atomové orbitály o stejné symetrii vůči prvkům symetrie dané molekuly. Nebude se tak kombinovat orbital $1s_A$ s orbitalem $(2p_1)_B$, neboť tyto orbitály mají nulový překryv. Díky tomu můžeme řešit zvlášť sekulární problém pro σ a π elektrony:

$$(13.17)$$

13.3 Více-elektronové molekuly

Není asi snadné nadchnout chemika pro otázky spojené s iontem molekuly vodíku. Skutečně, skoro vše, o chemika zajímá, má elektronů více. Mohou nám nějak výše uvedené úvahy pomoci při řešení otázek spojenými s více-elektronovými molekulami? Ano, může. V rámci Hartreeho-Fockovy aproximace totiž N -elektronovou Schrödingerovu rovnici

(13.18)

redukujeme na N jednoelektronových Fockových rovnic pro jednotlivé elektrony

(13.19)

Fockovy rovnice obsahují složitější operátor než ten, se kterým jsme se setkali při řešení iontu molekuly vodíku, vše co bylo řečeno ale platí i pro molekulové orbitály více-elektronových molekul. Stále tak hledáme molekulové orbitály ϕ jako lineární kombinace atomových orbitalů χ

(13.20)

přičemž rozvojové koeficienty c_i získáváme pomocí variačního principu. Výsledky takovýchto výpočtů jsou důvěrně známé každému pečlivějšímu čtenáři základních učebnic anorganické chemie. Uplatňují se přitom dvě výše zmíněná pravidla o kombinování orbitalů. Není cílem této přednášky dopodrobna opakovat celý tak důvěrně známý příběh. Pro připomenutí však čtenáře odkazujeme na Obr. XX zobrazující elektronové hladiny v homonukleárních diatomických molekulách.

Obr. XXX Jednoelektronové stavy v homonukleárních diatomických molekulách.

Připomeňme také, že s výše uvedenými orbitálními diagramy je spojen pojem řád vazby, definovaný jako

(13.21)

který nám říká, "kolikrát násobná" je příslušná vazba. Tak například vidíme, že molekula dusíku je vázána trojnásobnou vazbou. Taktéž by nám neměla uniknout překvapivá prediktivní síla kvalitativní teorie molekulových orbitalů. Z diagramu pro molekulu O_2 kupříkladu hned vidíme, že tato molekula by měla být paramagnetická, neboť představuje dle Hundova pravidla biradikál, má totiž dva nepárové elektrony.

PSNOTE: Nevim, zda se zde nerozpindat více

Zatím jsme se dívali pouze na diatomické molekuly tvořené dvěma stejnými atomy (homonukleární diatomika. Nic nám ale nebrání hledat molekulové orbitály popisující pohyb elektronů v diatomických molekulách s nestejnými atomy. podívejme se na případ molekuly NO. energie 2p orbitalu atomu dusíku je -15 eV, energie 2p orbitalu atomu kyslíku je -17 eV. Orbitální diagram pak vypadá takto

Obr. XXXX: Orbitální diagram molekuly NO. Znázorněny jsou pouze interakce 2p orbitalů.

Jelikož je energie atomu dusíku nižší, budou MO vazebných orbitalů tvořeny z větší míry právě orbitály atomu N a na tom tak bude soustředěn větší záporný náboj. Všimněme si také, že molekula NO představuje dle tohoto schématu radikál.

Podívejme se ještě na jeden případ, na molekulu fluorovodíku. Elektron v 1s orbitalu atomu vodíku má energii -13,6 eV, elektron v 2p orbitalu atomu fluoru má hodnotu -17,4 eV. Orbitální diagram pak bude vypadat takto

Obr. XXXX: Orbitální diagram molekuly HF.

S 1s orbitalem atomu vodíku se ze symetrických důvodů může kombinovat pouze jediný z 2p orbitalů atomu fluoru. Zbylé dva orbitály se vazby neúčastní, nejsou vazebné, ani antivazebné, nýbrž nevazebné. Opět vidíme, že vazebný orbital bude mít větší příspěvek od atomu fluoru, konkrétně

$$(13.22)$$

naopak antivazebný orbital bude mít větší příspěvek od atomu vodíku

$$(13.23)$$

jelikož v základním stavu elektrony nevazebný orbital nezaplňují, bude větší elektronová hustota lokalizovaná na atomu fluoru a ten tak bude mít záporný parciální náboj. Tento typ úvah je základem tzv. Mullikenovy populační analýzy, o které na přednášce bude řeč ještě později.

Na závěr tohoto oddílu si ještě zopakujeme, jakým způsobem přistupujeme k řešení N -elektronovou Schrödingerovy rovnice v rámci přístupu MO-LCAO. Předpokládáme, že známe řešení pro orbitály atomů vodíkového typu (tyto funkce přitom mohou obsahovat určité variační parametry). Jejich uspořádáním do Slaterova determinantu vytvoříme mnohaelektronovou vlnovou funkci a v rámci metody Hartreeho-Focka tak vypočítáme elektronovou energii atomů. Jednoelektronové vlnové funkce atomů vodíkového typu můžeme v rámci přístupu MO-LCAO zkombinovat do molekulových orbitalů, ze kterých pak vytvoříme opět mnohaelektronovou vlnovou funkci uspořádáním do Slaterova determinantu, viz. Obr. XXX.

Obr. XXX: Metoda MO-LCAO

13.4 Klasifikace molekulových orbitalů a elektronové termy dvouatomových molekul

Jednoelektronové vlnové funkce molekul, tj. molekulové orbitály, můžeme klasifikovat s ohledem na chování vlnové funkce vůči prvkům symetrie molekul. Všechny diatomické molekuly mají nekonečně četnou osu symetrie C_∞ . Homonukleární diatomika mají navíc střed symetrie.

Z hlediska chování vlnové funkce vůči ose symetrie C_∞ mluvíme o

- Orbitalu σ , jestliže rotace kolem osy C_∞ ponechá orbital nezměněn.
- Orbitalu π , jestliže je osa C_∞ obsažena v jedné uzlové rovině (tj. v rovině, ve které je hodnota vlnové funkce nulová)
- Orbitalu δ , jestliže je osa C_∞ obsažena ve dvou uzlových rovinách.

A takto bychom mohli pokračovat dále. Z hlediska středu symetrie můžeme orbitály klasifikovat jako

- g (údajně z něm. *gerade*), kdy operace zrcadlení dle středu symetrie nemění znaménko vlnové funkce
- u (údajně z něm. *ungerade*), kdy operace zrcadlení dle středu symetrie mění znaménko vlnové funkce

Na obrázku XX je klasifikace orbitalů znázorněna na několika příkladech.

Obr. XX: Příklad klasifikace molekulových orbitalů

Pojďme se ještě zamyslet nad otázkou, zda klasifikace dle orbitalů dle symetrie nemá ještě nějaký hlubší význam. Symetrie je obvykle znakem zachování určité fyzikální veličiny. U molekul už nemůžeme předpokládat zachování momentu hybnosti jako u atomů, neboť elektrony v molekulách se nepohybují v centrálním poli. Molekuly mají pořád ještě válcovou symetrii a zachovává se tak průmět momentu hybnosti do osy z , L_z . Zavedeme-li si nyní kvantové číslo $\lambda = |m|$, kde $m = 0, +1, +2$ atd. můžeme udělat následující přiřazení

(13.24)

Ve víceelektronových molekulách se moment hybnosti ve směru osy z může sčítat. Celkové magnetické kvantové číslo M_L víceelektronové molekuly je pak dáno prostým součtem magnetických kvantových čísel m jednotlivých elektronů. Zavádíme pak kvantové číslo

(13.25)

a opět zavádíme značení

(13.26)

Příklad: Mějme konfiguraci $\sigma\sigma$, pak možné stavy této molekuly jsou

XXXXX

Pro stavy $\pi\pi$ jsou možné stavy

XXXXX

Můžeme pak ještě uvažovat celkový moment hybnosti daný součtem orbitálního a spinového momentu molekuly. Odpovídající kvantové číslo nabývá hodnot

(13.27)

Příklad: Molekula ve stavu $^4\Pi$ se může nacházet ve stavech

XXXXXX

Energetické rozštěpení těchto stavů je pro prvky o malém protonovém čísle velmi malé, je dáno pouze spi-orbitální interakcí, o které již byla řeč dříve.

13.5 Molekulové orbitály víceatomových molekul

Doposud jsme diskutovali pouze diatomické molekuly. Elektronovou energii můžeme ale prostřednictvím Hartreeho-Fockovy metody stejně dobře hledat i pro molekuly víceatomové. Opět budeme hledat molekulové orbitály jako lineární kombinaci atomových orbitalů. Tyto molekulové orbitály nemůžeme již klasifikovat s ohledem na chování vůči ose symetrie C_∞ , neboť obecně molekuly takovouto symetrii nevykazují. I nižší symetrie ale mohou sloužit k označování molekulových orbitalů. Příklad molekulových orbitalů víceatomové molekuly lze najít na Obr. XXX.

Obr. XXX: Molekulové orbitály molekuly vody.

Všimněme si, že v případě molekuly vody není tak úplně snadné říci, zda je o orbital vazebný či antivazebný. Příslušné molekulové orbitály jsou totiž delokalizovány přes celou molekulu. Rozhodně se nedá říci, že určitý molekulový orbital náležel určité vazbě. Pro chemika to není úplně komfortní situace. od dob Lewisových je zvyklý si chemickou vazbu představovat jako sdílený elektronový pár. Tento pár by se pak dle chemického pohledu měl nacházet někde mezi dvěma atomy, jako je tou v případě diatomických molekul.

Tomuto pohledu v principu není obtížné vyjít vstříc. Orbitály jsou totiž pouze pomocnými veličinami, fyzikálně pozorovatelné veličiny závisí toliko na celkové vlnové funkci. Každá transformace orbitalu taková, že zanechá vlnovou funkci až na znaménko netknutou je proto možná. Jak taková povolená transformace má vypadat? Zavedme si tzv. unitární matici vztahem

$$(13.28)$$

Potom bude nutně platit

$$(13.29)$$

Z čehož ale vyplývá, že

$$(13.30)$$

kde λ je libovolné číslo. Nyní si definujeme matici

$$(13.31)$$

Harteeho-Fockova vlnová funkce je pak dána jako

$$(13.32)$$

Mějme nyní transformovanou sadu orbitalů

$$(13.33)$$

A v této sadě napíšeme Slaterův determinant

$$(13.34)$$

Z čehož

$$(13.35)$$

Pro reálné funkce faktor $e^{i\lambda}$ neznamená než změnu znaménka.

$$(13.36)$$

Vidíme tedy, že jakákoliv unitární transformace orbitalů nevede k závažné změně vlnové funkce. Transformovaná sada orbitalů je stejně dobrou sadou jako ta původní. Nikdo nám proto nemůže zabránit ve vytvoření sady atomových orbitalů, která v případě tetraedrického uspořádání vazeb jako v případě molekuly vody poveden ke čtyřem orbitalům mířícím do vrcholu tetraedru

$$(13.37)$$

Tyto tzv. hybridní orbitály je možné využít ke konstrukci molekulových orbitalů molekuly vody (či kupříkladu molekuly methanu). Získané orbitály se budou nacházet v oblasti vazeb. Jde ale o změnu víceméně kosmetickou a není žádoucí pojem hybridizace přeceňovat. Poznamenejme, že původní, tzv. kanonické, orbitály jsou v jistém smyslu "fyzikálnější", neboť pouze pro ně (a nikoliv pro hybridní orbitály) platí Koopmansův teorém.[¶]

[¶]K diskuzi o hybridních orbitalech odkazujeme na starší článek A. Sadleje a R. Zahradníka *Jsou chemické jevy podmíněné hybridizací?* Chem. Listy **1981**, 75, 561-562, stejně jako na nedávnou zajímavou výměnu názorů iniciovanou textem A. Grushowa *"Is It Time To retire the Hybrid Atomic Orbital?"* J. Chem. Educ. **2011**, 88, 860-862

14 Ab initio metody

Doteď jsme se zabývali převážně základy kvantové teorie. Většinu toho jsme si byli schopni odvodit a vypočítat analyticky. Pokud ale chceme kvantovou teorii aplikovat na něco více než atomy, neobejdeme se bez počítače, který za nás bude počítat složité rovnice.

Naprosto základní úlohou kvantového chemika je řešení elektronové Schrödingerovy rovnice XX pro danou molekulu. Existují v zásadě tři přístupy k tomuto problému. Buď se snažíme tuto rovnici řešit přímo pomocí chytrých aproximací (např. pomocí HF metody) a bez dodatečných umělých parametrů. Tyto metody se nazývají *ab initio* (latinsky „od počátku“, jelikož k jejich aplikaci nám stačí znát pouze základní fyzikální konstanty jako je hmotnost a náboj elektronu nebo Planckova konstanta. Další třídou jsou semiempirické metody, které jsou již více aproximativní a obsahují parametry, jejichž hodnoty se získávají buď z experimentálních dat nebo z přesnějších *ab initio* výpočtů. Poslední přístupem jsou metody založené na takzvané teorii funkcionálu hustoty (Density Functional Theory — DFT). Tento přístup je fundamentálně odlišný od předchozích dvou, jelikož není založen na hledání vlnové funkce. Místo toho se soustředí na mnohem jednodušší veličinu – elektronovou hustotu. DFT metoda je často řazena mezi *ab initio* metody, jelikož v principu vede k přesnému řešení a praktická přesnost je taktéž na úrovni *ab initio* metod. Na druhou stranu ale většina DFT metod obsahuje několik empirických parametrů, které se fitují na experimentální data. Proto si DFT probereme ve zvláštní kapitole.

V této kapitole se zaměříme na *ab initio* metody. Nejjednodušší *ab initio* metodou je metoda Hartree–Fockova, která již byla představena v kapitole o víceelektronových atomech. V praxi se dnes používá spíše méně, ale stále slouží jako odrazový můstek pro většinu ostatních přesnějších *ab initio* metod, tudíž si ji zde zopakujeme a dále rozšíříme.

14.1 Hartreeho–Fockova metoda

14.2 Mollerova–Plessetova metoda

14.3 Metoda konfigurací interakce

$$\Psi_{CI} = c_0 \Psi_0 + \sum_a \sum_m c_a^m \Psi_a^m + \sum_{ab} c_{ab}^{mn} \Psi_{ab}^{mn} + \dots \quad (14.1)$$

První člen je HF řešení, druhý člen odpovídá monoexcitacím, a druhý člen odpovídá biexcitacím atd. Jak nyní určíme koeficienty c ? Stačí nám k tomu variační princip. Jelikož vlnová funkce na těchto koeficientech závisí lineárně, aplikací variačního principu dostaneme již dříve zmíněné sekulární rovnice.

14.4 Metody spřažených klastrů

Excitační operátor.

$$T_1 \Psi_0 = \sum_{a=1}^N \sum_{m=n+1}^{\infty} t_a^m \Psi_a^m \quad (14.2)$$

14.5 Multireferenční metody

Základní stav molekuly vodíku můžeme popsat následujícím Slaterovým determinantem:

$$\Psi(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \sigma_g(1)\alpha(1) & \sigma_g(2)\alpha(2) \\ \sigma_g(2)\beta(2) & \sigma_g(2)\beta(2) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_g(1)\sigma_g(2)(\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1)) \quad (14.3)$$

14.6 Metody funkcionálu hustoty

Nejprve úvod: pojem funkcionálu

$$F[] =$$

Podobně jako funkce můžeme derivovat, podobná operace existuje i pro funkcionály, říká se jí variace funkcionálu. Když děláme derivaci funkce, tak se vlastně díváme, co se děje se závisle proměnnou, když trochu změním závisle proměnnou. U variace je to podobné. Zajímá nás, jak se změní hodnota funkcionálu, když mírně změním naši funkci. Přesná definice je složitější a neuvádíme ji zde. Bude ale pro nás důležité, že pro variace platí podobné vztahy, jako pro derivace. Dá se například ukázat, že v minimu funkcionálu je jeho variace nulová.

Pro příklad funkcionálu nemusíme chodit daleko, stačí se podívat, jak vypadá funkcionál energie v kvantové mechanice.

$$E[\psi] = \int \psi^* \hat{H} \psi d\tau$$

Variační princip pak můžeme napsat jednoduše pomocí variace tohoto funkcionálu:

$$\delta E = 0$$

$$\rho = N \int |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)|^2 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_n \quad (14.4)$$

Vlastnosti:

- Pokud zintegrujeme elektronovou hustotu přes celý prostor, dostaneme počet elektronů v systému.

$$\int \rho d\mathbf{r} = N \quad (14.5)$$

- V poloze jader má elektronová hustota maxima, pro které se dá ukázat...
-

$$\lim_{r_i \rightarrow 0} \left[\frac{\delta}{\delta r} + 2Z_A \right] \rho(r) = 0 \quad (14.6)$$

Pojďme si napsat ještě jednou elektronový Hamiltonián molekuly s N elektrony. Vynecháme člen popisující repulzi jader, jelikož ten je stejně v rámci BO aproximace konstantní.

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N -\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{r_{ij}} - \sum_{i=1}^N \sum_{A=1}^K \frac{Z_A}{r_{iA}} \quad (14.7)$$

Formálně můžeme funkcionál energie napsat následovně:

$$E = \int \psi^* \hat{H} \psi d\tau = \int \psi^* \hat{T} \psi d\tau + \int \psi^* \hat{V}_{el} \psi d\tau + \int \psi^* \nu_{ext} \psi d\tau = T[\rho] + V_{ee}[\rho] + V_{ne}[\rho] \quad (14.8)$$

Funkcionál energie jsme tedy rozdělili na funkcionál kinetické energie elektronů, funkcionál repulze elektronů a funkcionál interakce elektronů s jádery. Jelikož externí potenciál ν_{ext} nezávisí na polohách elektronů, můžeme si posledně jmenovaný funkcionál jednoduše přepsat do tvaru, ve kterém již vystupuje elektronová hustota:

$$V_{ne} = \int \psi^* \nu_{ext} \psi d\tau = \int \rho(\mathbf{r}) \nu_{ext}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (14.9)$$

2. HK teorém Předpokládejme, že pro daný externí potenciál $\nu_{ext,0}$ je správná elektronová hustota ρ_0 . Pak pro jakoukoli funkci ρ bude platit:

$$E[\rho_0] < E[\rho]$$

Důkaz: Z prvního HK teoremu plyne, že každá funkce ρ jednoznačně definuje externí potenciál (který je odlišný od $v_{ext,0}$), a tudíž i nějakou vlnovou funkci ψ . Pokud ale pro tuto vlnovou funkci vyčíslíme energii, pak nám z již známého variačního principu plyne:

$$E' = \int \psi'^* \hat{H} \psi' d\tau = E[\rho] > E_0 = E_0[\rho_0], \quad (14.10)$$

což jsme chtěli dokázat.

Kohn-Shamovy rovnice

Aproximace lokální hustoty

LDA (Local density Approximation)

$$E_{xc}^{LDA} = \int \rho(\mathbf{r}) V_{xc}(\rho(\mathbf{r})) d\mathbf{r} \quad (14.11)$$

$$V_{xc}(\rho) = V_x(\rho) + V_c(\rho) \quad (14.12)$$

Pro výměnný člen platí pro homogenní plyn následující vztah:

$$V_x(\rho) = -\frac{3}{4} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} \quad (14.13)$$

Pro korelační energii UEG nelze získat analytický výraz. Příslušné výpočty lze ale provést numericky a výsledek poté nafitovat. Výsledný korelační funkcionál je znám jako VWN (dle pánů Vosko-Wilk-Nusair).

LSDA.... $E_{xc} = E_{xc}[\rho_\alpha \rho_\beta]$

GGA

$$E_{xc}^{GGA} = \int \rho(\mathbf{r}) f(\rho, \Delta\rho) d\mathbf{r} \quad (14.14)$$

Becke: B88, LYP (Lee-Yang-Parr), kombinace: BP86, BLYP, PBE
meta-GGA

Hybridní funkcionály

$$E_X^{exact} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_{ij} \quad (14.15)$$

B3LYP:

$$E_{xc}^{B3LYP} = (1 - a_0 - a_x) E_x^{LDA} + a_0 E_x^{exact} + a_x E_x^{B88} + (1 - a_c) E_c^{VWN} + a_c E_c^{LYP} \quad (14.16)$$

$a_0 = 0,2$; $a_x = 0,72$; $a_c = 0,81$

PBE0 (25 %), BMK, BHandHLYP (50 %)

Long-range corrected funkcionály Mělo by platit, že $\lim_{V_x \rightarrow \infty} = \frac{1}{r}$

Disperzní korekce

Grimmeho empirická korekce

$$E_{vdw} = -s_6 \sum c_{ij} r_{ij}^{-6} \quad (14.17)$$

Koeficient s_6 závisí na použitém funkcionálu, zatímco koeficienty c_{ij} závisí na typu interagujících atomů.

Dvojitě hybridní funkcionály S.Grimme

$$E_{xc}^{hybrid} = a_1 E_x^{GGA} + (1 - a_1) E_x^{EXACT} + a_2 E_c^{GGA} \quad (14.18)$$

Pro tento tvar se vyřeší KS rovnice a získají KS orbitály. Z těchto orbitalů se poté vypočítá MP2 korekce ze vzorečku XX a přidá se k E_{xc}^{hybrid}

$$E_{xc}^{DH} = E_{xc}^{hybrid} + (1 - a_2) E_c^{KS-MP2} \quad (14.19)$$

Příkladem může být B2LYP s parametry $a_1 = 0,47$ a $a_2 = 0,73$

15 Semiempirické přístupy

V této kapitole se podíváme na skupinu semiempirických metod. Ačkoli semiempirické metody také vycházejí z řešení elektronové Schrödingerovy rovnice (odtud přízvisko *semi*), jejich rovnice obsahují dodatečné parametry, jejichž hodnoty se typicky získávají z přesnějších *ab initio* výpočtů nebo se z experimentálních dat (odtud *empirické*).

Aproximace, které tyto metody využívají, můžeme rozdělit do dvou skupin. V první řadě, většina semiempirických metod nevychází z přesného molekulárního hamiltoniánu XX, ale určitého efektivního hamiltoniánu, ve kterém jsou zanedbány některé členy. Většina semiempirických metod se například soustředí pouze na valenční elektrony (příspěvek ostatních elektronů je brán jako konstanta), což celkový hamiltonián systému značně zjednoduší.

Po určení hamiltoniánu se při odvození typické semiempirické metody postupuje obdobně jako při odvození HF rovnic. Zvolíme si konkrétní tvar vlnové funkce a zvolíme bázi (metoda MO-LCAO) a aplikací variačního principu odvodíme pracovní rovnice. V tomto kroku ale u semiempirických metod dojde k dalšímu zjednodušení. Buď můžeme některé členy z rovnic úplně zanedbat a položit rovno nule, anebo je můžeme považovat za konstantu, jejíž hodnotu určíme tak, aby nám to vycházelo.

Motivací k vývoji semiempirických metod bylo zmenšení výpočetních nároků *ab initio* metod s pokud možno co nejmenším ovlivněním přesnosti. Nicméně i metody, které byly kvantitativně nepřesné, se ukázaly jako velmi užitečné, neboť dovolily kvalitativní pochopení zákonitostí chemických vazeb a jiných vlastností molekul. Na jednu takovou metodu, která nám dala známé pravidlo „ $4n + 2$ “ pro určení aromaticity, se nyní podíváme.

15.1 Hückelova metoda

Hückelova metoda (dále jen HM) je historicky první a asi i nejjednodušší semiempirická metoda. Pro rozumné molekuly je pro použití této metody potřeba doslova jen tužka a papír. Její jednoduchost spočívá v tom, že se soustředí pouze na π vazebné elektrony, tedy elektrony v molekulových orbitalech složených z atomových p orbitalů. Její použití je tudíž omezeno na planární systémy s vícenásobnými vazbami.

Hamiltonián HM metody má následující tvar:

$$H_{HMO} = \sum h_{i,eff}^{\pi} \quad (15.1)$$

kde $h_{i,eff}^{\pi}$ je jedoelektronový potenciál π elektronu, který v sobě obsahuje jak kinetickou energii, tak interakce s ostatními elektrony. Z toho zřejmé, že elektrony jsou považovány za nezávislé. (to je zásadní rozdíl oproti metodě HF, ve které je nezávislost elektronů vyjádřena „pouze“ tvarem vlnové funkce). Konkrétní tvar těchto efektivních elektronových hamiltoniánů není specifikován a bere se pouze jako parametr metody.

Dalším krokem je výběr báze. V případě metody HM to budou p_z orbitaly všech uhlíkových atomů.

$$\psi = \sum_i c_i \phi_i \quad (15.2)$$

Tím převedeme problém najít vlnové funkce na jednodušší problém najít koeficientů c_i . Pokud tuto vlnovou funkci dosadíme do SCHR s Hamiltoniánem ?? a aplikujeme variační princip, dostaneme sadu sekulárních rovnic. Z nich poté obdržíme sekulární determinant:

$$|\mathbf{H} - \epsilon \mathbf{S}| = 0 \quad (15.3)$$

Pro lepší ilustraci budeme nadále uvažovat výpočet pro molekulu butadienu. Naše báze se tedy bude skládat ze čtyř p_z orbitalů.

Aplikací variačního principu poté dostaneme následující sekulární rovnice:

$$\begin{vmatrix} H_{11} - \epsilon S_{11} & H_{21} - \epsilon S_{21} & H_{31} - \epsilon S_{31} & H_{41} - \epsilon S_{41} \\ H_{12} - \epsilon S_{12} & H_{22} - \epsilon S_{22} & H_{32} - \epsilon S_{32} & H_{42} - \epsilon S_{42} \\ H_{13} - \epsilon S_{13} & H_{23} - \epsilon S_{23} & H_{33} - \epsilon S_{33} & H_{43} - \epsilon S_{43} \\ H_{14} - \epsilon S_{14} & H_{24} - \epsilon S_{24} & H_{34} - \epsilon S_{34} & H_{44} - \epsilon S_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (15.4)$$

Nyní bychom měli spočítat integrály H_{ij} a S_{ij} , které v principu závisí na geometrii systému. V rámci Hückelovy aproximace na ně ale pohlížíme jako na parametry metody a naložíme s nimi takto:

- zanedbáme překryvové integrály mezi AO na různých atomech tj. $S_{ij} = \delta_{ij}$;
- integrály $H_{ii} = \alpha$ těmto integrálům říkáme coulombovské integrály
- integrály H_{ij} položíme rovno nule, pokud orbitály nepatří sousedním atomům. Nenulové integrály položíme rovno parametru β a nazýváme je rezonančními integrály.

Takto zjednodušené rovnice poté vyřešíme. Nejprve najdeme vlastní čísla přes sekulární determinant a následně určíme koeficienty c_i . V případě butadienu bude sekulární determinant vypadat následovně:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \epsilon & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha - \epsilon & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - \epsilon & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha - \epsilon \end{vmatrix} = 0 \quad (15.5)$$

Ve druhém kroku jsme determinant vydělili β a zavedli substituci $x = \frac{\alpha - \epsilon}{\beta}$. Nyní rozvojem determinantu podle prvního řádku dostaneme:

$$x \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \quad (15.6)$$

Tuto kvartickou rovnici můžeme naštěstí převést na kvadratickou pomocí substituce $y = x^2$ a dostaneme:

$$y^2 - 3y + 1 = 0; \quad y_1 = 2,62; \quad y_2 = 0,382 \quad (15.7)$$

a tedy

$$x_{1,2} = 1,62; x_{3,4} = 0,62$$

Z toho vyplývají následující hodnoty energií:

$$\epsilon_1 = \alpha + 1,62\beta$$

$$\epsilon_2 = \alpha + 0,62\beta$$

$$\epsilon_3 = \alpha - 0,62\beta$$

$$\epsilon_4 = \alpha - 1,62\beta$$

Zpětným dosazením do sekulárních rovnic bychom poté dopočítali koeficienty c_i a tím získali molekulové orbitály. Ty potom obsadíme elektrony v souladu s Pauliho vylučovacím principem a celkovou energii dostaneme jako součet orbitálních energií. Jak nyní získáme parametry α a β ? Vyjdeme z experimentálních dat. Parametr α má jednoduchou fyzikální interpretaci; jedná se o ionizační energii atomového orbitalu p_z , která je experimentálně známá. Důležitější je parametr β , který určuje vzájemnou separaci molekulových orbitalů. Můžeme jej získat v zásadě dvěma způsoby:

1. Ze spektroskopických dat. Parametr zvolíme tak, aby nám seděly zvolené elektronové přechody (podrobnosti viz níže). Například fitováním na molekulu naftalenu získáme hodnotu $\beta = 3,48$.
2. Z termochemických dat. K tomu se využívá konceptu delokalizační energie dvojných vazeb. Tuto energii můžeme experimentálně naměřit například pomocí hydrogenačního tepla. Její teoretický výpočet v rámci HM si ukážeme níže.

Spektroskopie metodou HM

Jak můžeme pomocí HM spočítat excitační energii? Prostě formálně excitujeme jeden elektron z obsazeného do neobsazeného orbitalu a potom spočítáme celkovou energii a od ní odečteme celkovou energii základního stavu. Pokud budeme chtít spočítat nejnižší excitační energii butadienu, přesuneme jeden elektron z orbitalu 3 do orbitalu 2. Výsledná energie potom bude:

$$\Delta E = \epsilon_3 - \epsilon_4 = 1,24\beta = \frac{hc}{\nu}$$

Vlnová délka excitujícího záření potom vyjde 287 nm, zatímco experimentální hodnota je kolem 200 nm. Soulad to není ideální, ale není ani tragický, na to že jsme jej získali tak jednoduše. HM také správně zachycuje experimentální fakt, že excitační energie se snižuje se zvyšující se délkou řetězce obsahující konjugované dvojné vazby.

Delokalizační energie

Z organické chemie si ještě možná vzpomeneme, že konjugované dvojné vazby mají jiné vlastnosti než vazby izolované. Tuto delokalizaci můžeme vyjádřit pomocí delokalizační energie.

Pokud by se dvojné vazby vzájemně neovlivňovali, tak by mělo platit, že HM energie n krát-konjugovaného systému by se rovnala n -násobku energie ethenu, který má dvojnou vazbu jen jednu. Delokalizační energie je dána právě rozdílem v těchto energiích.

Pojďme si vše ukázat na příkladě butadienu, jehož energii již známe. Musíme tedy dopočítat ethen, pro který nám vyjde následující sekulární determinant.

$$\begin{vmatrix} \alpha - \epsilon & \beta \\ \beta & \alpha - \epsilon \end{vmatrix} = 0 \quad (15.8)$$

z čehož nám vyjde

$$(\alpha - \epsilon)^2 = \beta^2$$

$$\alpha - \epsilon = \pm\beta\epsilon_{1,2} = \alpha \pm \beta$$

Pro butadien poté vyjde delokalizační energie $E_D = 0,472\beta = 35,4 \text{ kJ/mol}$. Experimentálně můžeme míru delokalizace určit pomocí hydrogenačních tepel a opět to vztáhnout vůči ethanu. Hydrogenační teplo ethanu (tj. entalpie reakce ethan + H_2 = ethen) je $-136,94 \text{ kJ/mol}$, zatímco hydrogenační teplo butadienu je -240 kJ/mol . Experimentální delokalizační energie je tedy:

$$E_D^{exp} = 2 \cdot 139,9 - 240 = 33,8 \text{ kJ/mol},$$

což je v dobrém souladu s námi vypočtenou hodnotou.

Cyklické systémy a aromaticita

Asi největším úspěchem HM bylo vysvětlení aromaticity cyklických molekul. Například pro benzen dává HM následující strukturu molekulových orbitalů: Pokud bychom nyní zkoušeli počítat delokalizační energii pro různý počet elektronů, zjistili bychom, že má maximum pro šest elektronů, tedy pokud plně zaplníme všechny vazebné orbitály.

Pokud bychom spočítali HM metodou obecně pro cyklické uhlovodíky, došli bychom ke známému Hückelovu pravidlu $4n + 2$. Z diagramu pro benzen je patrné, že pro $4n + 1$ elektronů bychom měli radikál, zatímco pro $4n$ elektronů bychom měli dokonce biradikál.



Příklad 11

Zadání: Jak to bude s aromaticitou cyklopropenylového radikálu? A co cyklopentadienylový radikál?

Resení: V cyklopropenylu máme tři elektrony v p_z orbitalech, stabilnější tedy bude cyklopropenylový kation. Podobně tomu je u cyklopentadienylu máme elektronů pět, stabilnější bude cyklopentadienylový anion, který se opravdu často vyskytuje jako ligand v komplexech kovů.

obrazek

15.2 Rozšířená Hückelova metoda

Hlavním vylepšením rozšířené Hückelovy metody (RHM) je zahrnutí π -elektronové aproximace. Stále používáme jednoelektronový Hamiltonián a molekulové orbitály rozvíjíme podobně jako v rovnici 15.2, ale zahrnujeme všechny valenční orbitály. Atom uhlíku tedy do báze přispěje atomovými orbitály $2s$, $2p_x$, $2p_y$ a $2p_z$. Zde jsou další pravidla pro RHM:

- Hodnotu Coulombických integrálů opět aproximujeme ionizační energií daného orbitalu.

$$H_{ii} = -I_i$$

- Hodnoty překryvových integrálů se nezanedbávají, ale počítají se explicitně.
- Hodnoty rezonančních integrálů se získají z následujícího vztahu:

$$H_{ij} = \frac{1}{2}K(I_i + I_j)S_{ij}, \quad (15.9)$$

kde K je empirická konstanta, která má obvykle hodnotu 1,75.

Opět řešíme sekulární rovnice XX, ale tentokrát již matice H nebude obsahovat žádné nuly (pokud náhodou není $S_{ij} = 0$ ze symetrických důvodů). Jelikož počítáme explicitně překryvové integrály, tak řešení závisí na konkrétní geometrii molekuly. Tato metoda se tedy dá použít k minimalizaci geometrie, ale výsledky často nejsou příliš kvalitní (například molekula vody vychází jako lineární).

Podobně jako v původní Hückelově metodě tvar sekulárních rovnic nezávisí na řešení, a tudíž není třeba iterovat. Rozšířená Hückelova metoda se proto i nyní rutinně využívá v kvantově chemických programech k prvotnímu nástřelu vlnové funkce.

15.3 Moderní semiempirické metody

Modernější semiempirické metody již ve svém hamiltoniánu nezanedbávají mezielektronovou repulzi. Hamiltonián je potom téměř totožný s HF Hamiltoniánem, akorát se soustředíme stále jen na valenční elektrony. Tyto metody poté iterativně řeší Roothanovy rovnice. Největším žroutem výpočetního času jsou dvoelektronové integrály (viz rovnice XX), a proto se právě pro ně zavádí další aproximace.

Asi nejjednodušší metodou z této třídy je metoda CNDO (Complete Neglect of Differential Overlap), která zavádí následující aproximaci pro všechny dvojice různých orbitalů:

$$\phi_i(\mathbf{r})\phi_j(\mathbf{r})d\mathbf{r} = 0 \quad i \neq j \quad (15.10)$$

To vede k tomu, že většina dvoelektronových integrálů bude nulová, kromě integrálů typu (ii|ii). Méně drastickou aproximaci představuje metoda INDO (Intermediate Neglect of Differential Overlap), která výše uvedený vztah neaplikuje na dvoelektronové integrály, ve kterých jsou všechny čtyři orbitály na stejném atomu. Obě metody byly vyvinuty ve skupině J. Popla a byly parametrizovány tak, aby výsledky odpovídaly *ab initio* HF výpočtům pro minimální bázi.

Jiný přístup zvolil M. Dewar, který semiempirické metody začal parametrizovat tak, aby odpovídaly experimentálním hodnotám, a tím dosáhl přesnosti často větší než HF metoda. Metody AM1 (Austin model 1), PM3 (parametric model 3) a jejich novější verze PM6 a PM7 jsou využívány a rozvíjeny dodnes (jejich implementace je k nalezení například ve volně dostupném programu MOPAC).

Kromě výše zmíněných metod existuje také hojně využívaná semiempirická metoda založená na DFT, takzvaná DFTB (DFT Tight Binding).

16 Molekulární vlastnosti

Experimentálně molekuly charakterizujeme pomocí nejrůznějších vlastností: můžeme změřit třeba NMR posuny, elektrické či magnetické parametry či třeba jejich optickou otáčivost. Tyto molekulární vlastnosti musí být v principu možné vypočítat metodami kvantové chemie. V duchu axiomatiky kvantové teorie musí být přitom všechny vlastnosti molekul nějakým způsobem získatelné z vlnové funkce. V našich úvahách jsme se doteď soustředili na jednu konkrétní veličinu, na energii. Tu vypočítáme přímo ze Schrödingerovy rovnice snadno jako

(16.1)

Energie je veličina prvořadě důležitosti, představuje klíč ke struktuře molekul, termodynamice chemických reakcí či k celé spektroskopii. Mohou nás ale ale zajímat libovolné jiné veličiny, například obecně veličina A , které přísluší operátor \hat{A} . Střední naměřená hodnota této veličiny je pak dána jako

(16.2)

V této krátké kapitole se podíváme na některé molekulární vlastnosti.

16.1 Elektrické vlastnosti molekul

Na nabitě částice silově působí elektrické pole. Uvažme nyní neutrální molekulu. V ní je nějakým způsobem rozložený náboj, toto rozložení náboje v prostoru je dáno elektronovou hustotou $\rho(\vec{r})$ a náboji jednotlivých jader $q_I = Z_I e$. Sečteme-li celkovou hustotu náboje přes celý prostor, dostaneme pro neutrální molekulu nulovou hodnotu. I na neutrální molekulu ale vnější elektrické pole působí, neboť náboj v ní není rozložen rovnoměrně. Tak v molekule HCl je o něco více elektronové hustoty soustředěno kolem chlóru než kolem vodíku a z elektrického hlediska pak na molekulu chlorovodíku můžeme pohlížet jako na soustavu $\delta+... \delta-$ ve vzdálenosti r . Říkáme, že molekula HCl má nenulový dipólový moment daný vztahem

(16.3)

kde q je náboj a r je vzdálenost mezi náboji.

Jak bychom mohli dipólový moment molekuly vypočítat? Uvažme jakoukoliv molekulu v určitém geometrii (tj. s určitými polohami atomových jader). V této molekule se pohybují elektrony, každý z nich má okamžitou polohu \vec{r} . okamžitá hodnota vektoru dipólového momentu pro dané uspořádání elektronů je dáno jako

(16.4)

kde e je elementární náboj elektronu, \vec{r}_i je poloha i -tého elektronu, Z_I je nábojové číslo I -tého atomového jádra a \vec{R}_I je poloha I -tého atomového jádra. Chceme-li nyní získat dipólový moment molekuly, musíme hodnotu dipólového momentu pro danou konfiguraci váhovat pravděpodobností, že daná konfigurace nastane. Jinými slovy, musíme vypočítat střední hodnotu dipólového momentu

(16.5)

Vidíme tak, že ze znalosti vlnové funkce přímo získáme i hodnotu dipólového momentu molekuly. Stejným způsobem bychom získali třeba také kvadrupólový moment molekuly, který vykazuje například molekula oxidu uhličitého, která má jinak nulový dipólový moment. Podívejme se ještě na jinou vlastnost molekuly, na polarizovatelnost α . Tato veličina nám říká, jak je molekula citlivá na vnější elektrické pole. V molekula se po vložení do elektrického pole o intenzitě \vec{E} indukuje dipólový moment

(16.6)

přičemž konstantou úměrnosti je právě polarizovatelnost α (tento vztah platí toliko pro malé intenzity pole). Vidíme nyní, jakým způsobem bychom polarizovatelnost mohli najít: vypočítali bychom dipólový moment molekuly v elektrickém poli a molekuly bez elektrického pole. Rozdíl těchto dipólových momentů by po vydělení intenzitou elektrického pole poskytl hodnotu polarizovatelnosti. Sluší se dodat, že ve skutečnosti se polarizovatelnost počítá ještě jednodušeji a dvou výpočtů není potřeba. Tento detail jde však za rámec tohoto úvodního textu. Za malý komentář stojí také fakt, že polarizovatelnost představuje obecně tenzor, tj. matici a nikoliv pouhé číslo. Elektrické pole orientované například ve směru osy z může totiž indukovat i dipólový moment ve směru osy x či y . Jak je to možné? Představme si třeba elektron, jehož pohyb je omezen na pohyb po šroubovici. Elektrické pole ve směru osy šroubovice vyvolá částečně i pohyb elektronu ve směru na šroubovici kolmý.

Podobným způsobem jako jsme vypočítali z elektronové vlnové funkce dipólový moment či polarizovatelnost můžeme v principu vypočítat jakoukoliv vlastnost molekuly, od NMR či EPR parametrů, přes geometrie molekuly, jejich vodivosti či spektrální vlastnosti.

16.2 Parciální náboje atomů

V předchozím oddíle jsme prohlásili, že v molekule HCl je na atomu chlóru parciální záporný náboj a na atomu vodíku naopak parciální kladný náboj. Dokáže kvantová chemie tyto náboje vypočítat? To je poněkud delikátnější otázka než se zdá. Na rozdíl od dipólového momentu totiž parciální náboj na atomech nepředstavuje dobře definovanou, měřitelnou veličinu. Parciální náboj nám sděluje, kolik elektronů "patří" atomu chlóru. Jenže to hodně záleží na tom, "kam až sahá Krakonošovo", tedy jakou část prohlásíme za příslušnou atomu chlóru a jakou část za přiléhající vodíku. Existují tudíž různé způsoby, jak parciální náboje na molekulách vypočítat. Mluvíme o tzv. populační analýze, neboť se snažíme vypočítat populaci elektronů příslušející určitému atomu.

Nejrozšířenější metodou populační analýzy je tzv. Mullikenova populační analýza. Uvažme vlnovou funkci v rámci metody Hartreeho-Focka. Ta je dána jako antisymetrizovaný součin molekulových orbitalů

(16.7)

přičemž molekulární orbital ϕ_j můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci atomových orbitalů:

(16.8)

kde chi_r představuje atomový orbital a c_{jr} představuje rozvojový koeficient, který nám říká, jak moc přispívá atomový orbital chi_r do molekulového orbitalu ϕ_j . Z "účetních" důvodů si tento rozvoj napíšeme ještě pomocí jiného indexu

(16.9)

Trik Mullikenova přístupu spočívá v tom, že u atomových orbitalů víme, jakému atomu přísluší. Můžeme proto sečíst příspěvky jednotlivých atomových orbitalů do celkové vlnové funkce a tím zjistit, jak moc do vlnové funkce přispívá určitý atom. Celkový počet elektronů N můžeme napsat jako

(16.10)

což můžeme rozepsat jako příspěvky členů pocházejících od jednotlivých atomů

(16.11)

kde $S_{rs} = XXX$ je překryvový integrál mezi atomovými orbitaly chi_r a chi_s . V posledním členu rovnice **XXX** se mísí příspěvky od atomu k a od některého jiného z atomů, tento příspěvek v Mullikenově přístupu rozdělíme rovnoměrně mezi oba atomy. Veličina N_k představuje elektronovou populaci na daném atomu. Parciální náboj q_k pak získáme jako rozdíl nábojového čísla atomového jádra Z_k a elektronové populace N_k

(16.12)

Příklad:

Mullikenovu populační analýzu můžeme snadno provést v rámci Hückelovy metody. Zde je situace obzvláště jednoduchá, neboť překryvové integrály $S_{rs} = 0$. Vlnové funkce dvou nejvyšších obsazených stavů v molekule butadienu jsou dány jako

(16.13)

kde χ_1, χ_2, χ_3 a χ_4 představuje $2p_z$ orbitály jednotlivých atomů uhlíku. Vztah **XXX** se zde mění na jednoduchou formuli

(16.14)

kde n_j je obsazovací číslo j -tého molekulového orbitalu a c_{jk} je příslušný rozvojový koeficient. Elektronová populace na prvním atomu uhlíku je dána jako

(16.15)

a podobně pro ostatní atomy

(16.16)

Vidíme tedy, že všechny atomy mají π elektronovou populaci stejnou, čtyři π elektrony se rovnoměrně rozdělily mezi atomy. To není moc zajímavý výsledek, ale pojďme vlnovou funkci analyzovat dále. Definujme si řád vazby jako

(16.17)

Pak vidíme, že π elektronový řád vazby mezi prvním a druhým atomem uhlíku je

(16.18)

a mezi druhým a třetím atomem pak

(16.19)

Celkový řád vazby (po přičtení 1 za sigma vazbu) je tak 1,89 pro vazby mezi prvním a druhým atomem a 1,44 za vazbu mezi druhým a třetím atomem. Charakter jednotlivých vazeb je tak značně odlišný.

Mullikenova populační analýza má samozřejmě své problémy. Výrazně závisí na volbě báze. Je snadné si představit bázi, která vůbec nebude lokalizovaná na atomech. Mullikenova analýza pak poskytne nulové populace elektronů na atomech, což zjevně nedává smysl. Mullikenova analýza proto dobře funguje pro menší báze, pro větší a difúznější báze je poněkud nespolehlivá. Náboje na atomech ale můžeme vypočítat i jiným způsobem. Můžeme třeba vyžít skutečnosti, že dipólový moment fyzikální veličinou je. Můžeme pak nastavit parciální náboje takovým způsobem, abych dostali vypočítaný dipólový moment. Podobná technika založená na fitování elektrostatického potenciálu generovaného molekulou se nazývá CHELP (z angl. *Charges from Electrostatic Potential*). Tento přístup je dosti spolehlivý a v praktickém použití jej lze doporučit

17 Mezimolekulové interakce

Molekuly na sebe navzájem působí. Důkazů pro to máme více než dost. Pokud by se molekuly na větší vzdálenosti nepřitahovaly, byl by náš svět tvořen jen neposednými molekulami plynů. Naproti tomu pokud by se molekuly na krátkou vzdálenost neodpuzovaly, tak bychom se okamžitě propadli skrze podlahu a nebylo by nám zatěžko procházet zdi. O povaze odpudivých a přitažlivých sil začalo být poněkud více jasno od dob Johanneše Diderika van der Waalse a jeho studia kondenzace plynů. Často proto nyní mluvíme o van der waalsovských interakcích jako synonymu slabých mezimolekulových interakcí. Proč se částice přitahují a proč se odpuzují? A jak silně na sebe částice působí? I tuto informaci nám poskytne kvantová chemie.

Před tím, než si stručně něco řekneme o *ab initio* výpočtech slabých mezimolekulových interakcí si provedeme jejich stručnou inventuru. Rozdělíme si je na "klasické" interakce a na interakce "kvantové"

17.1 "Klasické" interakce

Pod pojmem "klasické" interakce máme na mysli působení vysvětlitelně elektrostatickými silami. Patří sem například

- **Interakce náboj-náboj.** Dva ionty, jeden s nábojem q_i a druhý s nábojem q_j na sebe dle Coulombova zákona působí silou

(17.1)

XXX OBRAZEK XXXX

- **Interakce dipól-dipól.** Dvě molekuly s nenulovým dipólovým momentem na sebe působí interakční energií

(17.2)

kde μ_i a μ_j jsou dipólové momenty jednotlivých molekul. Všimněme si, že tato interakce vyhasíná se vzdáleností podstatně rychleji než interakce ion-ion. I tento vzorec bychom při troše snahy odvodili z Coulombova zákona.

XXX OBRAZEK XXXX

- **Interakce dipól-indukovaný dipól.** I zcela neutrální molekula bez jakýchkoliv elektrických momentů je přitahována k molekule, která má náboj nebo třeba dipól. V neutrální molekule se totiž indukuje dipólový moment, který zpětně působí na indukující dipólový moment interakcí typu dipól-dipól. Interakční energie je pak dána jako

(17.3)

XXX OBRAZEK XXXX

kde α_2 je polarizovatelnost neutrální molekuly a μ_1 je dipólový moment elektricky aktivní molekuly.

Podobným způsobem bychom mohli naleznout vztahy pro interakce ion-dipól, dipól-kvadrupól či třeba kvadrupól-indukovaný kvadrupól. Všechny tyto interakce lze snadno pochopit na základě fyziky 19. století, kvantové mechaniky zde netřeba. Na druhou stranu ani jedna z těchto interakcí nevysvětluje, proč kondenzuje do kapalného či pevného stavu kupř. argon, který je prost všech elektrických momentů. Nevíme také pořád, proč nejsme schopni projít zdí.

17.2 "Kvantové" interakce

Budeme uvažovat dva typy inherentně kvantových interakcí, (Pauliho) repulzi a disperzní interakci.

- **Repulzní interakce.**

Dva atomy helia přiblížené na velmi krátkou vzdálenost se začnou odpuzovat. Proč tomu tak je? Na první pohled by se mohlo zdát, že hlavně proto, že se do velké blízkosti dostávají dvě jádra helia, každé z nich dvojnásobně nabitě. To ale není vše, ba není to vůbec to hlavní: na druhou stranu si totiž elektrony vychutnávají přítomnost kladného náboje. Hlavní problém je v Pauliho vylučovacím principu. V každém z atomů helia se oba elektrony nachází v 1s orbitalu. Pokud se ale snažíme ze dvou atomů udělat jenom jeden, tak čtyři elektrony se již ve stejném 1s orbitalu nacházet nemohou. Energie tak díky Pauliho repulzi roste. Tato repulze závisí na překryvu mezi příslušnými orbitály a můžeme ji proto dobře reprezentovat exponenciální funkcí:

(17.4)

- **Disperzní interakce.**

Jde o přitažlivou interakci, která působí mezi libovolnými dvěma atomy. Někdy se mluví také o Londonově interakci, dle v Německu narozeného amerického fyzika Fritze Londona. Jaká je podstata této síly? Díky energii nulového bodu v kvantové mechanice nikdy neutichá pohyb. Elektron v atomu tak neustále kmitá a v každé chvíli má určitý okamžitý dipólový moment. tento dipólový moment ale indukuje dipólový moment v sousedním atomu a oba atomy se tak přitahují interakcí okamžitý dipól-indukovaný dipól. Fritz London odvodil pro tuto interakci přibližný vztah

(17.5)

kde I_A a I_B jsou ionizační energie na sebe působících molekul A a B a analogicky α_1 a α_2 jsou polarizovatelnosti těchto molekul.

17.3 *Ab initio* výpočty slabých mezimolekulových interakcí

V minulých oddílech jsme si představily celou řadu vztahů, které popisují jednotlivé typy slabých mezimolekulových interakcí. Na první pohled tak vše vypadá růžově. Stačí nám vypočítat si metodami kvantové chemie vlastnosti jednotlivých molekul, tedy jejich náboj, dipólový případně vyšší momenty, polarizovatelnost či ionizační energii a poté s použitím vztahů **XXX** až **XXX** snadno dopočítáme, jak na sebe molekuly působí. Bohužel pro složitější molekuly takto postupovat nelze a je třeba interakční energii pro vzájemné působení molekul vypočítat přímo. Popíšeme si nyní dvě možné strategie takového výpočtu.

17.3.1 Poruchový výpočet: Symetricky adaptovaná poruchová teorie

Slabé mezimolekulové interakce v sobě obsahují ono návodné adjektivum "slabé". Interakce mezi dvěma molekulami tedy může být nahlížena jako malá porucha při pohybu elektronů v jednotlivých atomech. Podívejme se na jednoduchý případ dvou atomů helia v určité vzdálenosti.

XXX OBRAZEK XXXX

Elektronový hamiltonián můžeme zapsat jako

(17.6)

což lze rozepsat jako

(17.7)

Řešení rovnice

(17.8)

kde

(17.9)

je známé

(17.10)

kde ψ_A je vlnová funkce prvního atomu helia a ψ_B je vlnová funkce druhého atomu helia. Interakční energii pak můžeme vypočítat v rámci poruchové teorie jako

(17.11)

Vypadá to vše jednoduše, ale bohužel je tam zádrhel. Vlnová funkce **XXX** není antisymetrická vůči záměně elektronů mezi oběma atomy helia. Je třeba celý postup upravit, mluvíme pak o symetricky adaptované poruchové teorii (SAPT, z angl. *Symmetry Adapted Perturbation Theory*).

17.3.2 Supramolekulární přístup

V rámci supramolekulárního výpočtu vyjádříme interakční energii jako rozdíl energie molekulárního komplexu E_{AB} a energií jednotlivých komponent E_A a E_B :

$$(17.12)$$

Přístup je to velmi přímočarý a zdá se, že nemůže zklamat. Má ale své problémy. Energie molekul nikdy nepočítáme přesně, ale vždy v rámci nějaké přibližné metody. I ty nejnáročnější přístupy poskytují pro realistické systémy hodnoty energií, které se v absolutní hodnotě od skutečné hodnoty značně liší. Naštěstí větší část chyby se při výpočtu komplexu a komponent vzájemně vyruší, v chemii nám totiž většinou jde pouze o rozdíly energií. V případě slabých mezimolekulových sil nicméně počítáme velmi malou energii jako rozdíl velikých (a skoro stejných) čísel, "snažíme se zjistit hmotnost kapitána jako rozdíl hmotnosti kapitána s parníkem a samotného parníku". V takovém případě se začnou uplatňovat i jinak zanedbatelné efekty.

Jedním z problémů je tzv. superpoziční chyba. Jde o následující problém. Pokud provádíme variační výpočet, tak víme, že čím větší báze, tím nižší energie. Jestliže nyní provádíme výpočet molekulového komplexu A...B, tak molekula A v komplexu může při výpočtu využít i bázevých funkcí poskytnutých molekulou B. Dojde ke snížení energie, které není dáno fyzikální interakcí, ale jde toliko o matematický artefakt. Komplex se pak jeví stabilnější než ve skutečnosti je. Tento defekt odstraňujeme tzv. *counterpoise* korekcí. Interakční energii komplexu vyjádříme jako

$$(17.13)$$

kde $E_{A,[B]}$ je energie atomu A vypočítaná za přítomnosti báze atomu B a $E_{B,[A]}$ je energie atomu B vypočítaná za přítomnosti báze atomu A. Vyvážíme tak neférovou výhodu, které se dostalo atomům a a B v komplexu A...B.

18 Relativistické efekty

V kapitole XX jsme se seznámili s různými metodami, kterými můžeme řešit Schrödingerovu rovnici. Mohli jsem tak nabýt dojmu, že kupříkladu metoda úplné konfigurační interakce představuje svatý grál kvantové chemie, který nás dovede rovnou k "pravdě". Ve skutečnosti ani energie a vlnová funkce vypočítaná metodou konfigurační interakce s nekonečnou jednoelektronovou bází neposkytne přesnou hodnotu energie. Základním problémem je zanedbání relativistických efektů. Mluvíme-li v této kapitole o teorii relativity, máme tím na mysli speciální teorii relativity, která nás zpravuje o mechanice částic pohybujících se rychlostí blízkou rychlosti světla. Dozvídáme se z ní kupříkladu, že základní parametr každé hmotné částice, totiž její hmotnost m , závisí na rychlosti pohybu této částice:

$$(18.1)$$

kde m_0 je klidová hmotnost částice, v její rychlost a c je rychlost světla ve vakuu. Měli bychom se v chemii vůbec trápit relativistickými efekty? Odpověď nám naznačí následující příklad.

Příklad

Odhadněte hmotnost m elektronu v atomu vodíku a v 1s orbitalu atomu rtuti.

Řešení: K odhadu použijeme výraz pro rychlost z Bohrovy teorie atomů vodíkového typu

$$(18.2)$$

kde Z je nábojové číslo jádra, n je hlavní kvantové číslo, c je rychlost světla ve vakuu a α je tzv. konstanta jemné struktury mající hodnotu $1/137$. V případě rtuti jde jen o hrubý odhad, jádro rtuti bude stíněno i zbylými ostatními elektrony. V případě 1s orbitalu půjde ale o stínění nevýznamné. Pro vodík tak dostáváme rychlost

(18.3)

a pro rtuť s $Z = 80$

(18.4)

Takže zatímco u atomu vodíku se hmotnost téměř nezmění, u těžších atomů už musíme brát relativistické efekty nejspíše vážně. Změna hmotnosti elektronu totiž jistě povede k odlišnému chování jednotlivých orbitalů.

Pro popis relativistických efektů je nutné vytvořit rovnici, která je v souladu jak s postuláty kvantové mechaniky, tak s teorií relativity. V klasické, nerelativistické mechanice je energie volné částice dána jako

(18.5)

čemuž odpovídá hamiltonián

(18.6)

a časově-závislá Schrödingerova rovnice

(18.7)

Mohli bychom být v pokušení vyjít nyní s relativistického výrazu pro energii

(18.8)

a s použitím stejných pravidel (E nahradíme $XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX$ a p $XXXXXXX$) bychom získali tzv. Kleinovu-Gordonovu rovnici

(18.9)

Bohužel se ukazuje, že v této rovnici se nezachovává počet částic. Není ji možné použít pro popis fermionů (hodí se však pro popis bosonů). Správnou rovnici pro elektron formuloval Paul Dirac. Vyšel opět z rovnice **XX** a svou geniální intuicí dospěl k závěru, že elektron je popsán nikoliv jednou vlnovou funkcí, ale rovnou uspořádanou čtveřicí vlnových funkcí:

(18.10)

které se pak řídí Diracovou rovnicí formálně připomínající rovnici Schrödingerovu:

(18.11)

kde α a β představují matice rozměru 4×4 . **Nedat je sem explicitne? Je mozne predelat 4x4?** Jednotlivé komponenty vlnové funkce odpovídají elektronu se spinem α a β a pozitronu se spinem α a β . Dirac tak ukázal, že požadavek na kompatibilitu mezi kvantovou mechanikou a teorií relativity vede automaticky k elektronovému spinu a také k existenci antičástic.

18.1 Relativistické efekty v chemii

Relativistické efekty můžeme rozdělit do dvou základních skupin.

- Skalární relativistické efekty. Jde o efekty spojené s rozdílným relativistickým výrazem pro energii a tedy s rozdílnou hmotností elektronu. Nejde tedy o jevy, které by souvisely s tím, že vlnová funkce má čtyři komponenty.

Elektron má díky relativitě větší hmotnost. Můžeme tak očekávat, že se díky tomu elektron bude chovat klasičtěji, bude se pohybovat blíže k atomovému jádru. V případě s a p orbitalů tak bude docházet ke kontrakci orbitalů ^{||} Díky kontrakci s a p orbitalů je ale na druhou stranu jádro lépe stíněno. Elektrony v d a f orbitalech proto pociťují menší efektivní náboj a díky tomu dochází k jejich expanzi. Tyto jevy mají rozličné projevy v chemii. Například v případě zlata dochází ke stabilizaci elektronů v 6s orbitalu a k ionizaci dochází z 5d orbitalů. Vznikají tak trivalentní nebo pentavalentní ionty zlata. Díky relativistickým efektům jsou také stabilnější vyšší oxidační stavy kovů, takže může existovat kupříkladu i ion IrO_4^+ , který obsahuje iridium v formálním oxidačním stavu +IX. Dochází také k určitému zkrácení vazebné délky, částečně relativistickým efektem je i lanthanoidová kontrakce. Jedině díky relativitě můžeme využívat v automobilech olověných akumulátorů. Olovo má elektronovou konfiguraci $6s^2 6p^2$. Elektrony v těchto orbitalech jsou relativisticky stabilizované, díky čemuž má olovo v oxidačním stupni +IV vyšší energii. To však v důsledku vede k větší změně Gibbsovy energie v elektrodové reakci odehrávající se v akumulátorech:

(18.12)

Bez zahrnutí relativistických efektů by zlato nebylo žluté a rtuť by nebyla kapalná. S relativitou se zkrátka v chemii setkáváme docela často.

- Relativistické efekty spojené se spinem. Zde máme na mysli především tzv. spin-orbitální interakci, o které již byla řeč v kapitole **XXX**. Tento efekt se projeví korekcí k nerelativistickému hamiltoniánu

(18.13)

kde \vec{L} je orbitální moment a \vec{S} je spinový moment elektronu. Spin-orbitální interakce se opět uplatňuje zejména pro těžší atomy. Způsobuje rozštěpení mezi energetickými hladinami, pro těžší prvky často značné.

18.2 Kvantově-chemické výpočty relativistických efektů

Při výpočtech zahrnujících efekty spojené s teorií relativity bychom mohli vyjít z Diracovy rovnice. Ta ovšem popisuje pohyb pouze jednoho elektronu. Je proto třeba přidat člen popisující interakci mezi elektrony. Mohli bychom k Diracovu členu přidat coulombické odpuzování mezi elektrony. Takovýto přístup ale není relativisticky plně konzistentní. Mimo jiné předpokládáme, že k interakci mezi elektrony dochází okamžitě, což při konečné rychlosti světla není pravda. Lepším přístupem je konstrukce tzv. Diracova-Coulombova-Breitova hamiltoniánu

(18.14)

kde **XXX** je jednočásticový Diracův hamiltonián

^{||}Tento pojem nelze zaměňovat s relativistickou kontrakcí délek.

(18.15)

a dvou-částicový člen je dán jako součet coulombického a Breitova členu

(18.16)

Rovnici tohoto typu pro čtyř-komponentovou vlnovou funkci můžeme dále zjednodušovat. Je snadné se zbavit dvou komponent popisujících pozitrony. Často se také používají ryze rovnice popisující pouze skalární relativistické efekty, například v rámci přístupu ZORA (a angl. *Zero Order Relativistic Approximation*).

Pragmatickou cestou k zahrnutí relativistických efektů je použití tzv. efektivních relativistických pseudopotenciálů pro vnitřní elektrony (ECP, z angl. *Effective Core Pseudopotential*). Relativistické příspěvky jsou totiž významné zejména pro elektrony vnitřních slupek, valenční elektrony se pohybují daleko pomaleji, neboť jejich interakce s atomovými jádry je již hodně stíněna právě vnitřními elektrony. Chemika ale vnitřní elektrony obvykle mnoho nezajímají, chemické reakce představují děje ve valenční sféře. Můžeme proto vnitřní elektrony nahradit vhodně zvoleným potenciálem, který simuluje vnitřní elektrony. Tento potenciál si jednou pro vždy nastavíme pro daný atom s pomocí plně relativistického výpočtu a pak jej můžeme volně použít pro libovolné molekuly, jejíž je daný atom součástí. Získáme tak kvalitnější výsledek a navíc jako bonus je výpočet časově méně náročný, neboť vnitřní elektrony již do výpočtů nezahrnujeme.

Oblast relativistické kvantové chemie představuje intenzivní předmět současného výzkumu a není v možnostech tohoto textu se této otázce do detailu věnovat. Zájemce můžeme odkázat na dva výtečné přehledné články pod Pekky Pykköho. P. Pykkö, *Relativistic Effects in Chemistry: More Common Than You Thought*. Annu. Rev. Phys. Chem. 2012, 63, 45-64 a P. Pykkö, JP Desclaux, *Relativity and the Periodic Systems of Elements* Acc. Chem. Res. 1979, 51, 276-281.

Seznam zkratek

HF	Hartreeho-Fockova metoda
PES	povrch potenciální energie (Potential Energy Surface)