# Samenvatting Analyse 2

Abby Berkers
Thomas Schouten
Verbeteringen door Jos Maubach

27 juni 2016

# Inleiding

We nemen aan dat $d \in \mathbb{N}_+$. Met [K] wordt het boek van Kosmala aangeduid: W. Kosmala, A friendly introduction to Analysis, 2nd edition, Prentice Hall, ISBN: 0131273167
Mocht je foutjes/opmerkingen/verbeteringen vinden, we zien ze graag op de issue tracker.

# College 15

## Eigenschappen van de norm

Voor alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ en $c \in \mathbb{R}$ moet gelden

(i) $|\mathbf{x}| \geq 0$

(ii) $|\mathbf{x}| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$

(iii) $|c\mathbf{x}| = |c||\mathbf{x}|$ (|norm| = |absolute waarde||norm|)

Als $|\,.\,|$ een norm is dan geldt voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ de

(i) ongelijkheid van *Cauchy-Schwartz*

$$\forall_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d} : \sum_{i=1}^{d} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$$

(ii) *driehoeksongelijkheid*

$$\forall_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d} : |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$$

## Afstand in $\mathbb{R}^d$

**Definitie** (Afstandsfunctie)**.** Een afstandsfunctie $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ heeft de eigenschap dat voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$:

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$$
$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$$
$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \operatorname{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

De meest gebruikte afstandsfunctie in $\mathbb{R}^d$ is $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$

**Definitie** (Bol)**.** Laat $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ en laat $0 < r \in \mathbb{R}$. Dan is de *bol om* $\mathbf{x}$ *met straal* $r$ de verzameling

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d \colon |y - x| < r\}.$$

**Definitie** (Inwendig punt)**.** Zij $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ and $A \subset \mathbb{R}^d$. Dan is $\mathbf{x}$ een *inwendig punt* (*interior point*) van $A$ als er $\exists_{r>0} \colon B(\mathbf{x}, r) \subset A$. In dat geval heten $A$ en $B(\mathbf{x}, r)$ een *omgeving* (*neighbourhood*) van $\mathbf{x}$.

**Definitie** (Inwendige $\mathring{A}$, open verzameling $A$)**.** Het *inwendige* van $A$ is

$$\operatorname{int} A = \mathring{A} = \{x \in A \mid \mathbf{x} \text{ inwendig punt van } A\}.$$

$A$ heet een *open verzameling* als $A = \mathring{A}$ oftewel als

$$\forall_{x\in A} \exists_{R>0} \colon B(x, R) \subset A,$$

oftewel elk punt van $A$ is een inwendig punt.

**Stelling.** (1) Zij $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ een familie van open verzamelingen $A_\alpha \subset \mathbb{R}^d$, met $I$ een indexverzameling. Dan is

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

open.

(2) Zij $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^d$ open. Dan is

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

open.

**Stelling** (Karakterisering voor het inwendige)**.** Zij $A \subset \mathbb{R}^d$. Dan is

$$\operatorname{int} A = \bigcup_{C \subset A, C \text{ open}} C = \bigcup \{C \mid C \subset A \wedge C \text{ is open}\}$$

open. Dit volgt uit Kosmala 10.1.4.

**Definitie** (*Rand*)**.** Zij $A \subset \mathbb{R}^d$. Dan

$$\partial A := \mathbb{R}^d \backslash (\operatorname{int} A \cup \operatorname{int}(\mathbb{R}^d \backslash A))$$

oftewel $x$ is een *randpunt* van $A \iff x$ is geen inwendig punt van $A$ en geen inwendig punt van het complement $\mathbb{R}^d \backslash A$.
**Equivalente definitie.** Als $\mathbf{x}$ een randpunt is dan geldt voor alle $0 < r \in \mathbb{R}$ dat $B(\mathbf{x}, r)$ zowel een punt van $A$ als van $\mathbb{R}^d \backslash A$ bevat.

**Lemma.** Zij $A \subset \mathbb{R}^d$. Elke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ hoort precies in 1 (exclusive or) van de drie verzamelingen

1. $\operatorname{int} A$
2. $\operatorname{int}(\mathbb{R}^d \backslash A)$
3. $\partial A$.

**Voorbeeld.** Zij $A = [0,1]$ dan is $\operatorname{int} A = (0,1)$, $\operatorname{int}(\mathbb{R}^d \backslash A) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ and $\partial A = \{0, 1\}$.

## Stellingen uit het huiswerk

**Stelling.** Zij $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $0 < r \in \mathbb{R}$, dan is $B(\mathbf{x}, r)$ open.

# College 16

## Convergentie in $\mathbb{R}^d$

**Definitie.** Zij $(\mathbf{x}^{(n)}) = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_d^{(1)}), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_d^{(2)}), \ldots$ een rij in $\mathbb{R}^d$ en $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$. Dan heet $(\mathbf{x}^{(n)})$ *convergent* naar $\mathbf{a}$ als

(i) $\left|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{a}\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(ii) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0=n_0(\varepsilon)}\forall_{n\geq n_0} : \left|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{a}\right| < \varepsilon.$

(iii) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0=n_0(\varepsilon)}\forall_{n\geq n_0} : \mathbf{x}^{(n)} \in B(\mathbf{a}, \varepsilon)$

**Stelling** (Limieten voor rijtjes mogen componentsgewijs genomen worden)**.** $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{a} \iff \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = a_i$ voor alle $i = 1, \ldots, d$.

**Definitie** (verdichtingspunt)**.** Zij $A \subset \mathbb{R}^d$. Een punt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ heet *verdichtingspunt* van $A$ als

$$\forall_{R>0} : B(\mathbf{x}, R) \cap A \backslash \{\mathbf{x}\} \neq \emptyset.$$

Dan $A' := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{x} \text{ verdichtingspunt van } A\right\}$ is de verzameling van alle verdichtingspunten van $A$.

**Lemma.** Zij $A \subset \mathbb{R}^d$. Dan $\partial A \subset A \cup A'$.

**Definitie.** $A \subset \mathbb{R}^d$ heet *gesloten* als haar complement open is.

**Valkuil.** Een niet open/gesloten verzameling is in het algemeen niet gesloten/open. Niet alle verzamelingen zijn open of gesloten. Sommige verzamelingen zoals $[0, 1)$ zijn geen van beide en sommige andere verzamelingen zoals $\mathbb{R}$ zijn zowel open als gesloten.

**Stelling** (Karakterisering voor geslotenheid)**.** Zij $A \subset \mathbb{R}^d$. De volgende beweringen zijn equivalent:

(i) $A$ gesloten

(ii) $A' \subset A$

(iii) $\partial A \subset A$

(iv) voor elke convergente rij $(\mathbf{x}^{(n)}) \to \mathbf{x}$ met $\{\mathbf{x}^{(n)}\} \subset A$ geldt dat de limiet $\mathbf{x} \in A$.

**Stelling.** [K] 10.1.6

(i) Zij $\left\{A_\alpha \mid \alpha \in I\right\}$ een familie gesloten verzamelingen $A_\alpha \subset \mathbb{R}^d$ met $I$ een indexverzameling. Dan $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ gesloten.

(ii) Zij $A_1, \ldots, A_n$ gesloten. Dan $\bigcup_{i=1}^n A_i$ gesloten.

**Definitie** (afsluiting)**.** Zij $A \subset \mathbb{R}^d$. De verzameling $\overline{A} := \mathbb{R}^d \backslash (\text{int}(\mathbb{R}^d \backslash A))$ heet de *afsluiting* (*closure*) van $A$.

**Stelling** (Karakterisering van de afsluiting)**.** Zij $A \subset \mathbb{R}^d$. Dan

$$\overline{A} = A \cup \partial A = A \cup A' = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \mid \exists_{\text{rij } (\mathbf{x}^{(n)}) \text{ in } A \text{ met } \mathbf{x}^{(n)} \to \mathbf{z}}\right\}.$$

## Stellingen uit het huiswerk

**Stelling.** Zij $(\mathbf{x}^{(n)})$ een rij in $\mathbb{R}^d, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$. Dan $\mathbf{x}^{(n)} \to \mathbf{a} \implies |\mathbf{x}^{(n)}| \to |\mathbf{a}|$.

**Stelling.** Zij $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d, A \subset \mathbb{R}^d, A \neq \emptyset, \text{dist}(\mathbf{z}, A) := \inf_{\mathbf{x}\in A} |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$. Dan $\overline{A} = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \mid \text{dist}(\mathbf{z}, A) = 0\right\}$.

# College 17

## Compacte verzamelingen in $\mathbb{R}^d$

**Definitie.** Een verzameling $A \subset \mathbb{R}^d$ heet *begrensd* als

$$\exists_{R>0} : A \subset B(\mathbf{0}, R)$$

$$\exists_{R>0}\forall_{\mathbf{x}\in A} : |\mathbf{x}| < R.$$

**Stelling.** [K] 10.1.7 (andere formulering) Zij $A \subset \mathbb{R}^d$. De volgende beweringen zijn equivalent:

(i) Elke rij $\mathbf{x}^{(n)}$ in $A$ heeft een convergente deelrij met limiet $\mathbf{x}^* \in A$.

(ii) $A$ begrensd en gesloten

**Definitie** (overdekking)**.** Zij $A \subset \mathbb{R}^d$. Een familie $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ van verzamelingen $A_\alpha \subset \mathbb{R}^d$ heet een *overdekking* (*cover, covering*) van $A$ als

$$A \subset \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha.$$

- Een overdekking $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ heet *open* als alle $A_\alpha$ open zijn in $\mathbb{R}^d$.
- Een overdekking $B := \{A_\beta \mid \beta \in J\}$ heet een *deeloverdekking* van $A := \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ als $B \subset A$.

**Definitie** (compact)**.** $K \subset \mathbb{R}^d$ heet *compact* als elke open overdekking van $K$ een eindige deeloverdekking bevat.

**Valkuil.** Niet-lege open verzamelingen zijn NOOIT compact.

**Stelling** (Heine-Borel)**.** Zij $K \subset \mathbb{R}^d$. Dan

$$K \text{ compact} \iff K \text{ begrensd en gesloten.}$$

**Stelling.** Zij $A, B$ gesloten, niet leeg, $A\cap B = \emptyset$, $A$ compact. Dan $\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{|a-b| \mid a \in A, b \in B\} > 0$.

**Definitie** (relatief compact)**.** $A \subset \mathbb{R}^d$ heet *relatief compact* $\iff$ $\overline{A}$ compact.

## Stellingen uit het huiswerk

**Stelling.** Zij $A \subset \mathbb{R}^d$. Equivalente beweringen:

(i) $A$ is begrensd

(ii) $\exists_{x\in\mathbb{R}^d}\exists_{R>0} : A \subset B(x, R)$

(iii) $\forall_{x\in\mathbb{R}^d}\exists_{R>0} : A \subset B(x, R)$

(iv) De verzamelingen $\{x_i | x \in A\}, i = 1, \ldots, d$ zijn begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$

(v) De verzameling $\{|x - y| \mid x, y \in A\}$ is begrensd.

**Stelling.** Zij $A \subset \mathbb{R}^d$. Dan

$$A \text{ begrensd} \iff \overline{A} \text{ begrensd} \iff \overline{A} \text{ compact.}$$

**Definitie** (Cauchyrij)**.** Een *Cauchyrij* $(\mathbf{x}^{(n)})$ in $\mathbb{R}^d$ is een rij waarvoor geldt dat

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geq n_0} : |\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(m)}| < \varepsilon.$$

**Stelling.** Elke Cauchyrij $(\mathbf{x}^{(n)}) \subset \mathbb{R}^d$ is convergent in $\mathbb{R}^d$.

# College 18

## Functies $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$: limieten en continuïteit

**Definitie** (Limiet)**.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d, f\colon D \to \mathbb{R}, \mathbf{a} \in D', L \in \mathbb{R}$. De *limiet* (*limit*) van $f(\mathbf{x})$ voor $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(x) = L \iff (\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{\mathbf{x}\in D} : 0 < |\mathbf{x}-\mathbf{a}| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon)\,.$$

**Stelling.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d, f\colon D \to \mathbb{R}, \mathbf{a} \in D', L \in \mathbb{R}$. Dan geldt

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L \iff \text{voor elke rij } (\mathbf{x}^{(n)}) \text{ in } D\backslash\{\mathbf{a}\} \text{ met } \mathbf{x}^{(n)} \to \mathbf{a} \text{ geldt } f(\mathbf{x}^{(n)}) \to L.$$

**Opmerking.** ([K] 10.2.5) De limietstellingen zijn analoog aan 1D.

**Definitie** (*continu te* **a** *voor* $f$)**.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d, \mathbf{a} \in D \cap D', f\colon D \to \mathbb{R}$. $f$ heet continu te **a** als

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) \text{ oftewel als}$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0} : \mathbf{x} \in B(\mathbf{a},\delta) \cap D \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon.$$

**Stelling.** ([K] 10.2.7) $f$ continu te $\mathbf{a} \iff$ (voor elke rij $(\mathbf{x}^{(n)})$ in $D : \mathbf{x}^{(n)} \to \mathbf{a} \implies f(\mathbf{x}^{(n)}) \to f(\mathbf{a})$).

**Stelling.** Betreffende de continuïteit van samengestelde functies. Zij $D \subset \mathbb{R}^d, \mathbf{a} \in D \cap D', f, g\colon D \to \mathbb{R}$, beide continu te **a** en $\mathbf{0} \notin R(g)$. Dan zijn

- $f + g$
- $fg$
- $\dfrac{f}{g}$

continu te **a**.

**Definitie** (*Vectorwaardige functies*)**.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d, \mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}_+$. Dat wil zeggen

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1,\dots,x_d) = \begin{bmatrix} f_1(x_1,\dots,x_d) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_d) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \qquad f_i\colon D \to \mathbb{R}.$$

**Stelling** (Limieten voor functies mogen componentsgewijs genomen worden)**.** Zij $\mathbf{a} \in D'$.

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R}^m &\iff \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = L_i \ (i = 1,\dots,m) \\ &\iff \forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0} : 0 < |\mathbf{x}-\mathbf{a}| < \delta, \mathbf{x} \in D \implies |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon. \end{aligned}$$

**Definitie** (*continu te* **a** *voor* **f**)**.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbf{a} \in D \cap D'$ en $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ een vectorwaardige functie. Dan is **f** continu te **a** als:

$$\begin{aligned} \forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0} : \mathbf{x} \in B(\mathbf{a},\delta)\backslash\{\mathbf{a}\} &\implies |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})| < \varepsilon \\ &\implies \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{f}(\mathbf{a}),\varepsilon). \end{aligned}$$

**Definitie.** De volgende beweringen zijn equivalent: Zij $D \subset \mathbb{R}^d$ het domein van **f**.

(i) **f** continu te **a**

(ii) $f_i$ continu te **a** voor $i = 1,\dots,m$

(iii) voor elke rij $(\mathbf{x}^{(n)})$ in $D$ met $\mathbf{x}^{(n)} \to \mathbf{a}$ geldt $f_i(\mathbf{x}^{(n)}) \to f_i(\mathbf{a}), \quad i = 1, \ldots, m$

(iv) voor elke rij $(\mathbf{x}^{(n)})$ in $D$ met $\mathbf{x}^{(n)} \to \mathbf{a}$ geldt $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(n)}) \to \mathbf{f}(\mathbf{a})$

**Definitie** (*continu te $D \subset \mathbb{R}^d$ voor* $\mathbf{f}$)**.** Laat $D \subset \mathbb{R}^d$. Dan is $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ continu $\iff$ $\mathbf{f}$ is continu te elke $\mathbf{a} \in D \cap D'$.

**Opmerking.** Zij $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ continu en $(\mathbf{x}^{(n)})$ een rij in $D$ met $\mathbf{x}^{(n)} \to \mathbf{x}^* \in D$. Dan $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(n)}) \to \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$.

# College 19

## Eigenschappen van continue functies in $\mathbb{R}^d$

**Stelling** (continue functies en compacte verzamelingen)**.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d$ compact, $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ continu. Dan is

(1) $\mathbf{f}(D)$ compact (continue functies beelden compacte verzamelingen af op compacte verzamelingen)

(2) $\mathbf{f}$ *uniform continu*, oftewel

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta=\delta(\varepsilon)} \forall_{\mathbf{x},\mathbf{z}\in D} : |\mathbf{x}-\mathbf{z}| < \delta \implies |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{z})| < \varepsilon.$$

**Opmerking.** Merk op dat bij uniforme continuïteit $\delta$ niet af mag hangen van $\mathbf{x}$ of $\mathbf{z}$, maar er moet zo'n $\delta$ te vinden zijn voor de hele verzameling.

**Gevolg** (continue functies op compacte verzamelingen nemen een minimum en maximum aan)**.** Stel $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continu en $D$ is compact. Dan is $f$ begrensd en $\exists_{\mathbf{x}^*\in D} : f(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}\in D}\{f(\mathbf{x})\}$.

## Compositie van continue functies

**Stelling.** Zij $\mathbf{f}\colon D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ continu, $\mathbf{g}\colon E \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ continu en $\mathbf{f}(D) \subset E$. Dan $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^l$ continu.

## De vastepuntstelling van Banach

**Stelling.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d$. Een afbeelding $\mathbf{F}\colon D \to \mathbb{R}^d$ heet *contraherend* (*contracting*) als

$$\forall_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in D} \exists_{q\in(0,1)} : |\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})|_{\mathbb{R}^d} \leq q|\mathbf{x}-\mathbf{y}|_{\mathbb{R}^d}.$$

**Gevolg.** $\mathbf{F}$ contraherend op $D \subset \mathbb{R}^d \implies \mathbf{F}$ continu op $D$.

**Definitie** (iteratierij)**.** Stel $\mathbf{F}\colon D \to D$, oftewel $\mathbf{F}(D) \subset D$. Kies *startbenadering* $\mathbf{x}^{(0)} \in D$. Dan bestaat de rij $(\mathbf{x}^{(n)})$ gedefinieerd door

$$\mathbf{x}^{(n+1)} := \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)})$$

en heet *iteratierij*.

**Stelling** (vastepuntstelling van Banach)**.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d, \mathbf{F}\colon D \to \mathbb{R}^d$. Veronderstel

(i) $D$ gesloten

(ii) $\mathbf{F}\colon D \to D$ ($\mathbf{F}(D) \subset D$)

(iii) $\mathbf{F}$ contraherend

Dan

(1) $\exists!_{\mathbf{x}^*\in D}$ met $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$.

(2) Voor elke $\mathbf{x}_0 \in D$ convergeert de iteratierij naar $\mathbf{x}^*$.

## Differentieerbare functies van meerdere variabelen

### Partiële functies en partiële afgeleiden

**Definitie** (partiële functies)**.** Zij $D \subset \mathbb{R}^2$ open. $F\colon D \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in D$. De functies

1. $p_b\colon S_b \to \mathbb{R}$, $p_b(x) \coloneqq f(x,b)$
2. $q_a\colon T_a \to \mathbb{R}$, $q_a(y) \coloneqq f(a,y)$

heten *partiële functies*. Alternatieve notatie:

1. $p_b \coloneqq f(\cdot, b)$
2. $q_a \coloneqq f(a, \cdot)$

Let op: $S_b$ en $T_a$ zijn niet gedefinieerd. Voor de hand ligt $S_b = \{b \in \mathbb{R}\colon (x,b) \in D\}$.

**Definitie** (partiëel differentieerbaar)**.** Als $p_b/q_a$ differentieerbaar is in $x = a/y = b$ dan heet $f$ *partieel differentieerbaar* naar $x/y$ in $(a,b)$ en definiëren we

- $\partial_x f(a,b) \coloneqq p_b'(a)$
- $\partial_y f(a,b) \coloneqq q_a'(b)$

**Gevolg** (partiëel differentieerbaar (2))**.** Deze definitie is equivalent met

- $\partial_x f(a,b) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$
- $\partial_y f(a,b) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$

## Stellingen uit het huiswerk

**Stelling.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d$. Een functie $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ heet *Lipschitz-continu* als er een $L > 0$ is zodanig dat

$$\forall_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in D} : |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})|_{\mathbb{R}^m} \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{\mathbb{R}^d}.$$

Elke Lipschitz-continue functie is uniform continu op $D$.

# College 20

## Hogere orde partiële afgeleiden

**Definitie** (inductief)**.** Partiële afgeleiden van orde $k+1$ zijn de partiële afgeleiden van de partiële afgeleiden van orde $k$.

**Stelling** (Schwarz of Clairaut)**.** Neem $D \subset \mathbb{R}^d$ open. Als $f\colon D \to \mathbb{R}$ twee keer continu partieel differentieerbaar in $D$ is dan geldt $\partial_i \partial_j f(\mathbf{a}) = \partial_j \partial_i f(\mathbf{a}) \quad i, j = 1, \ldots, d$ voor alle $\mathbf{a} \in D$.

## Totale differentieerbaarheid

**Definitie** (Fréchet-differentieerbaar)**.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d$ open en $\mathbf{a} \in D$. Als er is een lineaire afbeelding $L_{\mathbf{a}}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + L_{\mathbf{a}}\mathbf{h} + \mathrm{o}(|\mathbf{h}|) \iff \lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L_{\mathbf{a}}\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = 0$$

dan heet $f\colon D \to \mathbb{R}$ *differentieerbaar* (*totaal differentieerbaar*, *Fréchet-differentieerbaar*) te $\mathbf{a} \in D$ en heet $L_{\mathbf{a}}$ **afgeleide van** $f$ **te** $\mathbf{a}$.

**Notatie.** $L_{\mathbf{a}} = f'(\mathbf{a}) = [\partial_1 f, \ldots, \partial_m f](\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{1\times d}$

## De gradiënt

**Stelling** (linearisering, gradiënt en partiële afgeleide)**.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d$ open, $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^d$, differentieerbaar te $\mathbf{a} \in D$. Dan $f$ partieel differentieerbaar te $\mathbf{a}$, en

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \partial_1 \mathbf{f}(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \partial_d \mathbf{f}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \mathbf{f}'(\mathbf{a})^T \in \mathbb{R}^{d\times 1}.$$

**Stelling.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d$, $D$ open. Als $f\colon D \to \mathbb{R}$ differentieerbaar te $\mathbf{a} \in D$ dan is $f$ ook continu te $\mathbf{a}$.

**Definitie.** De functie $p\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

heet de *lineaire approximatie* van $f$ in/rond $\mathbf{a}$.

# College 21

Zij $D \subset \mathbb{R}^d$ open, $\mathbf{a} \in D$, $f\colon D \to \mathbb{R}$.

| | | |
|---|---|---|
| $f$ **partieel differentieerbaar bij a** | | $f$ **totaal differentieerbaar bij a** |
| | $\not\Longrightarrow$ | |
| $\partial_i f(\mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{a})}{\mathbf{h}}$ bestaat | $\Longleftarrow$ | $\frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-f'(\mathbf{a})[\mathbf{h}]}{\lvert\mathbf{h}\rvert} \stackrel{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}{\to} 0$ |
| | $\Longrightarrow$ voorwaarde: part. afg. bestaan en zijn continu in een omgeving van $\mathbf{a}$ | |

**Stelling** (K 10.4.5)**.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar in een omgeving van $\mathbf{a} \in \operatorname{int} D$ en $\partial_i f \quad i = 1, \ldots, d$ continu te $\mathbf{a}$. Dan is $f$ differentieerbaar in $\mathbf{a}$.

## Richtingsafgeleiden

**Definitie** (Richtingsvector)**.** Een vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ met $|\mathbf{u}| = 1$ heet *richtingsvector*.

**Definitie** (Richtingsafgeleide)**.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d$ open, $\mathbf{a} \in D$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ een richtingsvector. Zij $f\colon D \to \mathbb{R}$ differentieerbaar te $\mathbf{a}$. Dan is de *richtingsafgeleide* van $f$ in de richting van $\mathbf{u}$ gegeven door

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} \tag{1}$$

Speciale gevallen:

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_i \implies D_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{a}) = \partial_i f(\mathbf{a})$$

.

**Stelling** (K 10.5.2)**.** Veronderstel de situatie zoals in de definitie hierboven. Dan geldt

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} = (\nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{u}).$$

**Gevolg.** Stel $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$. De functie $f$ $\begin{array}{c}\text{stijgt}\\ \text{daalt}\end{array}$ bij $\mathbf{a}$ het sterkst in de richting $\pm\dfrac{\nabla f(\mathbf{a})}{|\nabla f(\mathbf{a})|}$.

## Differentieerbaarheid van vectorwaardige functies, Jacobimatrix

Zij $D \subset \mathbb{R}^d$ open, $\mathbf{a} \in D$. $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$. $\mathbf{f}$ is differentieerbaar in $\mathbf{a}$ als er een lineaire afbeelding $L_a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bestaat zodanig dat

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + L_a(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{r}(\mathbf{x}) \qquad \text{met } \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} = \mathbf{0} \quad (\lim \text{ in } \mathbb{R}^m!)$$

Coördinaten: $\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$

**Stelling** (en definitie)**.** Situatie als beschreven. $\mathbf{f}$ differentieerbaar in $\mathbf{a}$ $\implies$ alle part afg $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})$ bestaan, en

$$[L_a] = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(\mathbf{a}) & \partial_2 f_1(\mathbf{a}) & \dots & \partial_n f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 f_m(\mathbf{a}) & \partial_1 f_m(\mathbf{a}) & \dots & \partial_n f_m(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \qquad \textbf{\textit{Jacobimatrix}}$$

Dat wil zeggen: $[L_a]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})$.

**Notatie.** $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})$, $\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(\mathbf{a})$, $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$.
Om te onthouden:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dots & (\nabla f_1)^\top & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & (\nabla f_m)^\top & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \mathbf{f} & \dots & \partial_n \mathbf{f} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

## Stellingen uit het huiswerk

**Stelling.** Zij $D \subseteq \mathbb{R}^d$ open, $f \colon D \to \mathbb{R}^m$ met coördinaatvoorstelling $f = (f_1, \dots, f_m)$ waarbij $f_i \colon D \to \mathbb{R}$. Zij $\mathbf{a} \in D$. Dan

(1) $f$ differentieerbaar in $\mathbf{a}$ $\iff$ alle $f_i$ differentieerbaar in $\mathbf{a}$.

(2) Alle eerste orde part afg $\partial_j f_i$ bestaan in een omgeving van $\mathbf{a}$ en zijn continu bij $\mathbf{a}$, dan is $f$ differentieerbaar bij $\mathbf{a}$.

**Stelling.** Zij $A$ een $(m, n)$-matrix en zij $\mathbf{f} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeven door $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Dan is $\mathbf{f}$ differentieerbaar op $\mathbb{R}^n$ en $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A$.

# College 22

## Kettingregel

**Stelling.** Zij $\mathbf{g}\colon D \to E$ differentieerbaar in $\mathbf{a} \in D$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $\mathbf{f}\colon E \to \mathbb{R}^k$ differentieerbaar in $\mathbf{g}(\mathbf{a})$, $\mathbf{g}(D) \subseteq E$, $E \subseteq \mathbb{R}^m$ open.
Dan $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}\colon D \to \mathbb{R}^k$ is differentieerbaar bij $\mathbf{a}$, en

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a})) \circ D\mathbf{g}(\mathbf{a}).$$

**Voorbeeld** (Onthouden)**.** Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, differentieerbaar. Zij $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Dan

$$(f \circ \mathbf{g})(t) = f(x(t), y(t)).$$

Dan volgt uit de kettingregel dat $f \circ \mathbf{g}$ differentieerbaar is en $\frac{df}{dt} = \frac{\partial_f}{\partial_x} \cdot \frac{\partial_x}{\partial_t} + \frac{\partial_f}{\partial_y} \cdot \frac{\partial_y}{\partial_t}$. Dit is te onthouden door in onderstaande boom alle paden van $f$ naar $t$ te volgen.

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & \mathrm{f} \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ \mathrm{x} \arrow[d, no head] & & \mathrm{y} \arrow[d, no head] \\ \mathrm{t} & & \mathrm{t} \end{tikzcd}$$

**Gevolg.** en **definitie.** Zij $f\colon D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.
$S_c = \{\mathbf{x} \in D | f(\mathbf{x}) = c\}$ heet een *niveaulijn, niveauoppervlak, niveauverzameling.*
Zij $I$ een interval, $\mathbf{g}\colon I \to S_c$ differentieerbaar, dan $f(\mathbf{g}(t)) = c \ \forall_{t \in I}$.

**Opmerking.** Kettingregel $\implies$ $(\nabla f(\mathbf{g}(t)), \mathbf{g}'(t)) = 0$, ofwel de gradiënt $\perp$ raakvlak, niveauverzameling, niveaulijnen.

## Kettingregel en richtingsafgeleiden

**Definitie.** *Richtingsafgeleide (ook als* $|\mathbf{v}| \neq 1$*)* Zij $f$ voldoende vaak continu differentieerbaar, $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_d) \in \mathbb{R}^d$ vast.
Dan is

$$D^2_{\mathbf{v}} f = (v_1\partial_1 + ... + v_d\partial_d)(v_1\partial_1 + ... + v_d\partial_d)f = \sum_{i,j=1}^{d} v_i v_j \partial_{ij} f$$

$$D^k_{\mathbf{v}} f = \sum_{i_1,...,i_k=1}^{d} v_{i_1,...,v_{i_k}} \partial_{i_1,...,i_k} f$$

**Notatie. Multi-indices** $\alpha \in \mathbb{N}^d = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \sum \alpha_i$
zodat

$$D^k_v f = \sum_{|\alpha|=k} v^\alpha \partial^\alpha f.$$

met $\alpha_j = \#\{i_k | i_k = j\}$, $v^\alpha = v_1^{\alpha_1}, ..., v_d^{\alpha_k}$, $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1}, ..., \partial_d^{\alpha_d} f$

## Stelling van *Taylor* met meerdere variabelen

**Stelling.** Zij $D \subset \mathbb{R}^d$ open, $\mathbf{x}_0 \in D$ z.d.d. $B(\mathbf{x}_0, n) \subset D$, $n \in \mathbb{N}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ $n+1$ keer continu differentieerbaar.
Dan als $h \in \mathbb{R}^d$, $|h| < n$ : ( $\implies$ $x_0 + h \in B(x_0, n)$)

$$\exists_{\Theta \in (0,1)} : f(x_0 + h) = f(x_0) + D_h f(x_0) + \frac{1}{2} D_h^2 f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} D_h^n f(x_0)$$

($D_h$ is richtingsafgeleide richting $h$, $\Theta$ is tussenpunt) met $R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} D_h^{n+1} f(x_0 + \Theta h)$.

**Taylor in multi-indexnotatie**

$$T_{x_0}(x_0 + h) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) h^\alpha$$

met $\alpha! = \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_d!$ .

**Voorbeeld.**

$$\begin{aligned}
T_{(a,b)}(x, y) = {} & f(a, b) \\
& + \partial_x f(a, b)(x - a) + \partial_y f(a, b)(y - b) \\
& + \frac{1}{2}(\partial_{xx} f(a, b)(x - a)^2 + 2\partial_{xy} f(a, b)(x - a)(y - b) + \partial_{yy} f(a, b)(y - b)^2) \\
& \vdots
\end{aligned}$$

# College 23

## *Impliciete functiestelling*, impliciet differentieren

Lokale oplosbaarheid van vergelijking in de vorm $\mathbf{F}(x, y) = 0$. $\quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

**Stelling** (K 10.6.9 — Impliciete functiestelling voor twee variabelen)**.** Zij $D \subset \mathbb{R}^2$ open, $(x_0, y_0) \in D, \mathbf{F}\colon D \to \mathbb{R}^2$ differentieerbaar, partiele afgeleiden $\partial_x \mathbf{F}, \partial_y \mathbf{F}$ continu op $D$.
Veronderstel: $\mathbf{F}(x_0, y_0) = 0 \qquad \partial_y \mathbf{F}(x_0, y_0) \neq 0$.
Dan is er

een open omgeving $U \subset D$ van $(x_0, y_0)$

een open omgeving $I \subset \mathbb{R}$ van $x_0$

$g\colon I \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar

z.d.d.

$(x, g(x)) \in U \qquad \forall_{x \in I}$

$((x, y) \in U \wedge \mathbf{F}(x, y) = 0) \iff y = g(x)$

### 'Impliciete functies' in meer variabelen

Los stelsels van $m$ vergelijkingen op naar $m$ variabelen $(y_1, \ldots, y_m) = \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ afhankelijk van $(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{array}\right\} \implies \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \text{ in } \mathbb{R}^m \qquad D \subset \mathbb{R}^{n+m}, \mathbf{F}\colon D \to \mathbb{R}^m$$

**Stelling** (Impliciete functiestelling algemeen)**.** Zij $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ open, $(x_0, y_0) \in D$ differentieerbaar, alle partiële afgeleiden continu. $(\partial_{x_i} F_j, \partial_{y_k} F_j \quad i = 1, \ldots, n \quad j, k = 1, \ldots, m)$. Zij ook $\mathbf{F}(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, $\partial_y \mathbf{F}(x_0, y_0)$ regulier, inverteerbaar ($m \times m$-Jacobimatrix).
Dan is er

een omgeving $U$ van $(x_0, y_0)$ in $\mathbb{R}^{n+m}$

een open omgeving $V$ van $x_0$ in $\mathbb{R}^n$

een afbeelding $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^m$ continu differentieerbaar

z.d.d. $((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \wedge \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0) \iff \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$.

### 'Impliciet differentiëren'

$\mathbf{F}(x, \varphi(x)) = \mathbf{0}$. Differentiëren naar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$D_x \mathbf{F}(x, \varphi(x)) + D_y \mathbf{F}(x, \varphi(x)) D_x \varphi(x) = 0 \implies D_x \varphi(x) = -(D_y \mathbf{F}(x, \varphi(x)))^{-1} D_x \mathbf{F}(x, \varphi(x)).$$

## Stellingen uit het huiswerk

**Stelling.** (Hogere differentieerbaarheid van impliciete functies) Laat $I, J$ twee open intervallen in $\mathbb{R}$ zijn. Zij $F\colon I \times J \to \mathbb{R}$ differentieerbaar met continue partiële afgeleiden. Zij verder $\partial_y F(x, y) \neq 0$ voor $(x, y) \in I \times J$. Zij $g\colon I \to J$ differentieerbaar en

$$F(x, g(x)) = 0.$$

Als $F$ $k$ keer continu differentieerbaar is (d.w.z. alle partiële afgeleiden tot en met orde $k$ zijn continu differentieerbaar in $I \times J$) dan is ook $g$ $k$ keer continu differentieerbaar.

# College 24

## Integraalrekening

### Riemann integreerbare functies

**Definitie.** Zij $[a, b]$ een gesloten interval.

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \text{ met } a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

heet een *partitie* van $[a, b]$.

**Notatie.** $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ met $k = 1 \ldots n$ is de lengte van een deelinterval.
$|P| = \max\{\Delta x_k \mid k = 1 \ldots n\}$ is de *norm/fijnheid* van P, een maat voor hoe precies de benadering is.

**Definitie.** Een partitie $Q$ van $[a, b]$ heet *fijner dan*/een *verfijning van $P$* als $Q \supseteq P$.

**Lemma.** Zij $Q$, $P$ partities van $[a, b]$.

(i) Als $Q \supseteq P$ dan $|Q| \leq |P|$.

(ii) Voor twee willekeurige partities $P_1$ en $P_2$ bestaat er een partitie $Q$ die fijner is dan $P_1$ en fijner is dan $P_2$.

**Definitie.** Zij $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ begrensd, $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ een partitie van $[a, b]$, dan

$$M_k(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$m_k(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k \text{ heet } \textit{Darboux-ondersom} \text{ van } f \text{ op } P$$
$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k \text{ heet } \textit{Darboux-bovensom} \text{ van } f \text{ op } P$$

Zij $C_k \in [x_1, \ldots, x_k]$ met $k = 1, \ldots, n$, $c = (c_k)$,

$$S(p, f, c) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \text{ is } \textit{Riemannsom.}$$

**Lemma.** Zij $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ begrensd, $P$, $c$ als boven, dan

(i) $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)(b - a) \leq L(P, f) \leq S(p, f, c) \leq U(p, f) \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)(b - a)$

(ii) $L(P, f + g) \geq L(P, f) + L(P, g)$
$U(P, f + g) \leq U(P, f) + U(P, g)$

(iii) Zij $Q \supseteq P$ een fijnere partitie, $j = \#Q - \#P$ (waarbij $\#P$ het aantal elementen aanduidt), dan

$$L(P, f) \leq L(Q, f) \leq L(P, f) + 2j \|f\|_\infty |P|$$
$$U(P, f) \geq U(Q, f) \geq U(P, f) - 2j \|f\|_\infty |P|$$

(iv) Zij $R$ een willekeurige partitie, dan $L(P, f) \leq U(R, f)$.

**Definitie.** Het getal

$$\sup\{L(P,f) \mid \text{P partitie van } [a,b]\} =: \underline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

heet een *onderintegraal* van $f$ op $[a,b]$.

**Opmerking.** Dit getal bestaat altijd, ook bij niet-integreerbare functies!

$$\inf\{U(P,f) \mid \text{P partitie van } [a,b]\} =: \overline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

heet *bovenintegraal* van $f$ op $[a,b]$.

**Gevolg.**

$$\underline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} \leq \overline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

**Definitie.** $f$ heet *Riemann-integreerbaar* op $[a,b]$ als

$$\underline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \overline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x},$$

en dit getal heet *Riemann integraal* van $f$ op $[a,b]$.

**Notatie.**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \;\; R[a,b] = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ Riemann-integreerbaar}\}$$

**Stelling** ([K] 6.2.1, karakterisering integreerbaarheid)**.** Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ begrensd, dan

$$f \in R[a,b] \iff \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\text{Partitie P}} : U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon.$$

**Stelling** ([K] 6.2.2)**.** Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stijgend. Dan is $f$ Riemann-integreerbaar.

**Opmerking.** $f$ hoeft niet continu te zijn!

## Stellingen uit het huiswerk

**Stelling.** Zij $[c,d] \subseteq [a,b]$ en $f \in R[a,b]$. Dan

$$f\big|_{[c,d]} \in R[c,d].$$

# College 25

**Stelling** ([K] 6.2.3)**.**

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continu } \implies f \in R[a,b].$$

## Benadering door Riemannsommen

**Stelling.** $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ begrensd,

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta=\delta(\varepsilon,f)>0} : P \text{ partitie}, |P| < \delta \implies 0 \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - L(P,f) < \varepsilon$$
$$\text{en } 0 \le U(P,f) - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

**Opmerking.** $f$ hoeft niet Riemann-integreerbaar te zijn!

**Stelling** (Riemannsommen approximeren integralen)**.** Zij $f \in R[a,b]$, dan

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta=\delta(\varepsilon,f)>0} : P \text{ partitie}, |P| < \delta \implies \left|S(P,f,c) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

**Stelling** ([K] 6.3.1)**.** De verzameling $R[a,b]$ vormt een vectorruimte t.o.v. puntsgewijze optelling en vermenigvuldiging met scalairen, en $Int$
$: R[a,b] \to \mathbb{R}$ gegeven door $Int(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ is een lineaire afbeelding.

**Gevolg.**

$$f,g \in R[a,b] \implies f+g \in R[a,b]$$
$$c \in \mathbb{R}, f \in R[a,b] \implies cf \in R[a,b]$$

**Stelling** ([K] 6.3.3, deelintervallen)**.** Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ begrensd, $c \in [a,b]$, dan

$$f \in R[a,b] \iff (f\big|_{[a,c]} \in R[a,c] \wedge f\big|_{[c,b]} \in R[c,b]) \text{ en}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

## Hoofdstelling van de calculus (en moderne kunst en cultuur)

**Stelling** ([K] 6.4.4, Hoofdstelling van de calculus versie 1)**.** Zij $f \in R[a,b]$. Definieer $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ door

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dan

(i) is $F$ goed gedefinieerd

(ii) is $F$ uniform continu op $[a,b]$

(iii) Zij $c \in [a,b]$, $f$ continu in $c$. Dan $F$ differentieerbaar in $c$, $F'(c) = f(c)$.

**Gevolg.** Elke continue functie op $[a, b]$ heeft een primitieve gegeven door

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

In het kort. Als $f$ continu, dan

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

**Lemma.** Zij $f \in R[a, b]$, $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Verder zij $c \in [a, b]$, $f$ continu in $c$. Dan

$$\sup_{x\in[c,c+h]} f(x) \xrightarrow{h\downarrow 0} f(c) \qquad \sup_{x\in[c+h,c]} f(x) \xrightarrow{h\uparrow 0} f(c)$$

$$\inf_{x\in[c,c+h]} f(x) \xrightarrow{h\downarrow 0} f(c) \qquad \inf_{x\in[c+h,c]} f(x) \xrightarrow{h\uparrow 0} f(c)$$

**Stelling** (Hoofdstelling van de calculus, versie 2)**.** Zij $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar, $F' = f$. Dan

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

## Stellingen uit het huiswerk

**Stelling.** Zij $f, \tilde{f}\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ begrensd en zodanig dat

$$f(x) = \tilde{f}(x) \qquad \forall_{x\in[a,b]\setminus\{z_1,\ldots,z_m\}}$$

voor een eindig aantal punten $z_1, \ldots, z_m \in [a, b]$. Dan

$$f \in R[a, b] \iff \tilde{f} \in R[a, b]$$

en er geldt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Stelling** (Positiviteit van de integraal)**.** Zij $f \in R[a, b]$ en $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$. Dan

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

**Stelling** (Monotonie van de integraal)**.** Zij $f, g \in R[a, b]$ en $f(x) \geq g(x)$ voor alle $x \in [a, b]$. Dan

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Stelling.** Zij $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ begrensd en stuksgewijs continu. Dan $f \in R[a, b]$.

**Stelling.** Zij $f \in R[a, b]$ en zij $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Dan is er een interval $I \subset [a, b]$ met positieve lengte en een $\varepsilon > 0$ zodanig dat $f(x) > \varepsilon$ voor alle $x \in I$.

## College 26

### Integraalrekening in $\mathbb{R}^d$

We bekijken hier de $\mathbb{R}^2$, voor hogere dimensies gaat dit analoog.

**Definitie.** Het *volume* van de *rechthoek* $R = [a,b] \times [c,d]$ is $\mathrm{Vol}(R) = (b-a)(d-c)$.

**Stelling.** Zij $P_1$ de partitie $x_0, \dots x_n$ van $[a,b]$ en $P_2$ de partitie $x_0, \dots x_m$ van $[c,d]$. Dan bestaat de *partitie van R* $P = P_1 \times P_2$ bestaande uit de *deelrechthoeken*

$$R = \cup_{i=1,j=1}^{i=n,j=m} A_{ij}$$

waar $A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Volgens de vorige definitie is $\mathrm{Vol}(A_{ij}) = \mathrm{opp}(A_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \Delta x_i \Delta x_j$.

**Definitie.** De *fijnheid in* $\mathbb{R}^2$ van een partitie $P$ is de maximale *diameter*

$$\max_{i=1\dots n, j=1\dots m} \{\mathrm{diam}(A_{ij})\},$$

waar voor een rechthoek $A_{ij}$ we definiëren $\mathrm{diam}(A_{ij}) = \max\{x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1}\}$.

**Definitie.** Zij $R = [a,b] \times [c,d]$ een rechthoek, $P = P_1 \times P_2$ een partitie, $R = \bigcup A_{ij}$, $f\colon R \to \mathbb{R}$ begrensd. Definiëer voor alle $i = 1 \dots n$ en alle $j = 1 \dots m$:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \inf_{x \in A_{ij}} \{f(x)\} \\ M_{ij} &= \sup_{x \in A_{ij}} \{f(x)\} \end{aligned}$$

**Definitie.** Kies $c_{ij} \in A_{ij}$, $c = (c_{ij})$, $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots m$. Dan is

$$S(P, f, c) \coloneqq \sum_i \sum_j f(c_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

een *Riemannsom in* $\mathbb{R}^2$. Verder kan met behulp van bovenstaande definities aangetoond worden dat:

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \text{ is een } \textit{ondersom in } \mathbb{R}^2$$
$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \text{ is een } \textit{bovensom in } \mathbb{R}^2$$

**Definitie.** Zij

$$\left.\begin{aligned} P &= P_1 \times P_2 \\ Q &= Q_1 \times Q_2 \end{aligned}\right\} \text{ twee partities voor } R,$$

met de deelrechthoeken $A_{ij} \subset P$ en $D_{ij} \subset Q$. $Q$ heet *fijner dan (in* $\mathbb{R}^2$*)* $P$ als

$$\forall_{D_{ij}} \exists A_{kl} : D_{ij} \subset A_{kl}.$$

**Stelling.** Zij $P = P_1 \times P_2$, $T = T_1 \times T_2$ twee partities van $R$. Dan is er een partitie $Q$ fijner dan $P$ en fijner dan $T$, namelijk $Q = (P_1 \cup T_1) \times (P_2 \cup T_2)$.

**Definitie.**

$$\underline{\iint_R} f = \sup\{L(P,f) \mid P \text{ partitie van } R\}$$

heet een *onderintegraal in* $\mathbb{R}^2$, en

$$\overline{\iint_R} f = \inf\{U(P,f) \mid P \text{ partitie van } R\}$$

heet een *bovenintegraal in* $\mathbb{R}^2$.

**Definitie.** $f$ heet *Riemann-integreerbaar op* $R$ als

$$\underline{\iint_R} f = \overline{\iint_R} f =: \iint_R f.$$

**Stelling.** De volgende beweringen zijn equivalent.

(i) $f$ Riemann-integreerbaar

(ii) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\text{Partitie } P} : U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$.

Als deze waar zijn, dan

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta(\varepsilon,f)} : \text{Als } P \text{ partitie met } |P| < \delta \text{ dan } \left| S(P,f,c) - \iint_R f \right| < \varepsilon$$

voor alle Riemannsommen van $P$.

**Stelling.** $f\colon R \to \mathbb{R}$ continu $\implies$ $f$ Riemann-integreerbaar.

**Notatie.** $\mathcal{R}(R) = \{f\colon R \to \mathbb{R} \mid f \text{ Riemann-integreerbaar}\}$ is een vectorruimte, met de integraal een lineaire afbeelding.

**Stelling.** Als $f, g \in \mathcal{R}(R)$ en $f \geq g$ op $R$ dan $\iint_R f \geq \iint_R g$.

**Stelling.** Als $f \in \mathcal{R}(R)$ dan $|f| \in \mathcal{R}(R)$ en $\left|\iint_R f\right| \leq \iint_R |f|$.

## Berekening van integralen in $\mathbb{R}^d$

Opnieuw bekijken we hier $d = 2$, hogere dimensies gaan analoog.

**Stelling** (van *Fubini* ([K] 11.2.2))**.** Zij $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$, $f\colon R \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar. Definieer voor $x \in [a,b]$: $h^{(x)}\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ door $h^{(x)} = f(x,\cdot)$. Veronderstel $h^{(x)} \in \mathcal{R}[c,d]$ voor alle $x \in [a,b]$. Zij $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$g(x) = \int_c^d h^{(x)}(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Dan $g \in \mathcal{R}[a,b]$, en

$$\iint_R f = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

**Opmerking.** Indien ook $f(\cdot,y) \in \mathcal{R}[a,b]$ voor alle $y \in [c,d]$ dan

$$\iint_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

## Integratie op algemene gebieden

**Definitie.** Zij $D \subset \mathbb{R}^2$ begrensd, $f\colon D \to \mathbb{R}$ begrensd. Zij $R$ een rechthoek zodanig dat $D \subset R$. Definieer $\iint_D f := \iint_R F$ met

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

## Stellingen uit het huiswerk

**Stelling** ([K] 11.1.10)**.** Zij $f\colon R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continu op een rechthoek $R = [a,b] \times [c,d]$. Dan bestaat er een punt $(x_0, y_0) \in R$ waarbij

$$\iint_R f = f(x_0, y_0)(b-a)(d-c)\,.$$

**Stelling** ([K] 11.2.6a)**.** Zij $f_{xy}$ Riemann-integreerbaar is op een rechthoek $R = [a,b] \times [c,d]$. Dan

$$\iint_R f_{xy} = f(a,c) - f(a,d) + f(b,d) - f(b,c)\,.$$

**Stelling** ([K] 11.2.7a)**.** Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ en $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ beide Riemann-integreerbaar. Zij verder gegeven de rechthoek $R = [a,b] \times [c,d]$. Dan

$$\iint_R f(x)g(y) = \left[\int_a^b f\right]\left[\int_c^d g\right]\,.$$

**Stelling.** Zij $f(x,y)$ een begrensde functie op een rechthoek $R = [a,b] \times [c,d]$. Zij verder $R = R_1 \cup R_2$, waar $R_1$ en $R_2$ twee rechthoeken zijn met $\operatorname{int} R_1 \cap \operatorname{int} R_2 = \emptyset$.
Dan geldt dat de functie $f$ Riemann-integreerbaar is op $R$ dan en slechts dan als $f$ Riemann-integreerbaar is op zowel $R_1$ als $R_2$. In het geval dat $f$ Riemann-integreerbaar is op $R$ geldt dan

$$\iint_R f = \iint_{R_1} f + \iint_{R_2} f\,.$$

**Stelling.** Zij $B \subset \mathbb{R}^2$ een rechthoekgebied. Als $\{A_1, \ldots, A_N\}$ een familie van rechthoekgebieden $A_i \subset \mathbb{R}^2$ is die $B$ overdekken dan

$$\sum_{i=1}^{N} \operatorname{Vol} A_i \geq \operatorname{Vol} B\,.$$

# College 27

**Valkuil.** Let op met de grens van de binnenste integraal, deze grens hangt af van de variabele van de buitenste integraal.

**Definitie.** $A \subset \mathbb{R}^2$ heeft *Jordaninhoud nul*, $A$ heet een *nulverzameling* als voor alle $\varepsilon > 0$ er eindig veel rechthoekgebieden $R_1, \ldots, R_n$ zijn z.d.d.

(i) $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} R_i$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Vol}(R_i) < \varepsilon$.

$\mathrm{Vol}(R_i)$ is gedefinieerd als

$$\mathrm{Vol}(R_i) = \mathrm{Opp}(R_i) = (d_i - c_i)(b_i - a_i) \qquad \text{met } R_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i).$$

**Stelling** (Differentieerbare krommen hebben Jordaninhoud nul)**.** Zij $I = [a, b]$ een compact interval, $\varphi \colon I \to \mathbb{R}^2$ Lipschitz-continu, d.w.z

$$\exists_{L>o} \forall_{s,t \in I} : |\varphi(s) - \varphi(t)| \leq L|s - t|$$

Dan heeft $C = \{\varphi(t) \mid t \in I\}$ Jordaninhoud nul.

**Opmerking.** Zij $\varphi \colon I \to \mathbb{R}^2$ continu differentieerbaar, dan is $\varphi$ Lipschitz-continu.

**Stelling** ([K] 11.3.3)**.** Zij $R = [a, ] \times [c, d]$ een rechthoekgebied, $f \colon R \to \mathbb{R}$ begrensd. Veronderstel dat $f$ discontinu is op een verzameling van Jordaninhoud nul. Dan is $f$ Riemann-integreerbaar op $R$.

**Definitie.** Een verzameling $D \subset \mathbb{R}^d$ heet *Jordan-meetbaar* (of *Jordanverzameling*) als

- $D$ is begrensd
- $\partial D$ heeft Jordaninhoud nul.

Dan is $\iint_D f$ goed gedefinieerd indien

- $f \colon D \to \mathbb{R}$ bijvoorbeeld continu
- $D$ is een Jordanverzameling

**Definitie.** Zij $D$ een Jordanverzameling. Dan

$$\mathrm{Vol} D := \iint_D 1.$$

## Stellingen uit het huiswerk

**Stelling.** Elke cirkelschijf in $\mathbb{R}^2$ is een Jordanverzameling.

**Stelling.** Een begrensde, gesloten verzameling $P \subset \mathbb{R}^2$ zodanig dat $\partial P$ de vereniging is van eindig veel lijnstukken heet een polygoongebied. Elk polygoongebied in $\mathbb{R}^2$ is een Jordanverzameling.

**Stelling.** Zij $A \subset \mathbb{R}^2$ begrensd, als $A$ een inwendig punt heeft dan is $A$ geen nulverzameling.

**Stelling.** Zij $I$ een compact interval en de functie $\varphi \colon I \to \mathbb{R}^2$ continu differentieerbaar, dan is $\varphi$ Lipschitz-continu.

# College 28

## Transformatiestelling voor meervoudige integralen

**("Change of variables formula")**
In dit college zullen we een integratiegebied beschrijven met behulp van andere dan carthesische coördinaten.

**Stelling** (*Transformatiestelling* voor integralen)**.** Zij

- $V \subset \mathbb{R}^d$ open,
- $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^d$ continu differentieerbaar en injectief,
- $E \subset V$ een Jordanverzameling met $\overline{E} \subset V$,
- $f\colon \varphi(E) \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar,
- $f \circ \varphi\colon E \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar,
- de Jacobiaan $\det D\varphi \neq 0$ met uitzondering van een nulverzameling.

Dan

$$\iint_{\varphi(E)} f = \iint_E (f \circ \varphi)|\det D\varphi|\,.$$

**Voorbeeld** (*Poolcoördinaten*)**.**

$$\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}\,.$$

**Voorbeeld** (*Cilindercoördinaten*)**.**

$$\varphi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}\,.$$

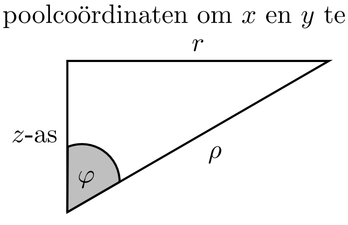
$$\iiint_{\varphi(E)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,.$$

**Voorbeeld** (*Bolcoördinaten*)**.** Deze coördinaten hebben breedte $\varphi$ en lengte $\theta$, dus $\varphi$ is de hoek ten opzichte van de $z$-as en $\theta$ de hoek ten opzichte van de $x$-as.

$$\varphi(\rho,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \rho\sin\theta\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\,.$$

$$\iiint_{\varphi(E)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_E f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Om dit te onthouden, gebruik poolcoördinaten en druk $r$ uit in $\rho$ en $\varphi$, zodat $r = \rho\sin\varphi$, en vul deze in, in poolcoördinaten om $x$ en $y$ te krijgen. Vind de $z$-coördinaat op dezelfde manier zodat $z = \rho\cos\varphi$.



**Onthoud**

| | |
|---|---|
| 2D: | "$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$" |
| 3D cilindercoördinaten: | "$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$" |
| 3D bolcoördinaten: | " $= \rho^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$" |

**Stelling** (*Bell curve*)**.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,.$$

## Stellingen uit het huiswerk

**Stelling.** Zij $D, D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^d$ drie Jordanverzamelingen met $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Zij $f$ continu en begrensd op $D$. Dan is $f$ integreerbaar op $D_1$ en $D_2$, en

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f\,.$$

# Tips van Aart

**Belangrijke begrippen analyse 2 week 15.**

**bol, ball** $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x-a| < r\}$, de open bol rond $a$ met straal $r$ (in dimensie $d$). $|x-a|$ is de afstand tussen de punten $a$ en $x$, als $d=1$ is dit hetzelfde als de absolute waarde. Kosmala zou schrijven $\|\vec{x}-\vec{a}\|$.

**inwendig punt, interior point** $a \in A$ heet inwendig punt als er een $r > 0$ is met $B(a,r) \subseteq A$ (voor mij zijn $\subseteq$ en $\subset$ gelijkwaardig). Een inwendig punt behoort noodzakelijk tot de verzameling.

**open, inwendige, interior** $\operatorname{int} A$, het inwendige van $A$ is de verzameling inwendige punten van $A$. $A$ heet open als $A = \operatorname{int} A$.

**rand, boundary** Punt $a$ heet een randpunt van $A$ als voor elke $r > 0$ de bol $B(a,r)$ zowel punten in $A$ als punten niet in $A$ bevat, de rand van $A$ geven we aan met $\partial A$. Een randpunt hoeft niet tot de verzameling te behoren.

**Belangrijke begrippen analyse 2 week 16.**

**verdichtingspunt, accumulation point** Punt $a$ is *verdichtingspunt* van verzameling $A$ als voor alle $r > 0$, $B(a,r)$ een punt van $A$ bevat *verschillend* van $a$. $A'$ is de collectie verdichtingspunten. Een verdichtingspunt hoeft niet tot de verzameling te behoren.

**afsluiting, closure** De afsluiting $\overline{A}$ is $A$ samen met zijn verdichtingspunten, het is ook $A$ samen met zijn rand $\partial A$. $A$ heet gesloten (closed) als hij gelijk is aan zijn afsluiting, dus als hij al zijn verdichtingspunten bevat, dus als de rand van $A$ in $A$ zit. $A$ is altijd bevat in zijn afsluiting.

**rijen en limieten** $x^{(n)} \to a$ betekent $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$, oftewel:
voor elke $\varepsilon > 0$ geldt dat de bol $B(a,\varepsilon)$ voor zekere $N$ alle $x^{(n)}$ bevat waarvoor $n > N$. Oftewel:
$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |x^{(n)} - a| < \varepsilon$.
Als de rij $x^{(n)}$ een limiet heeft dan heet de rij *convergent*.

**infimum en supremum** Als $A \subset \mathbb{R}$ niet leeg is en van onderen begrensd, dan betekent $m = \inf A$ dat
(i) $m \leq a$ voor alle $a \in A$;
(ii) $m$ is maximaal met betrekking tot eigenschap (i), oftewel:
voor elke $\varepsilon > 0$ is er een $a \in A$ met $a < m + \varepsilon$.
Conventies: Als $A$ niet naar beneden begrensd is zeggen ook wel $\inf A = -\infty$. Als $A = \emptyset$ dan zeggen we ook wel $\inf A = \infty$.
Verzin zelf wat $M = \sup A$ betekent.

**Belangrijke begrippen analyse 2 week 17.**

**begrensd, bounded** $A$ heet begrensd als er een $r$ is met $|a| < r$ voor alle $a \in A$ (dus $A \subseteq B(0,r)$).

**(open) overdekking, cover** Een collectie (open) verzamelingen $A_i$, $i \in I$ ($I$ staat hier voor een verzameling indices) heet (open) overdekking van $A$ als $A \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, dus voor elke $a \in A$ is er een $i \in I$ met $a \in A_i$. Als $J$ een eindige deelverzameling is van $I$ en als ook $A \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$, dan is dit een eindige deeloverdekking.

**compact** $A$ heet compact als *elke* open overdekking van $A$ een eindige deeloverdekking heeft. Een compacte verzamelingen (in $\mathbb{R}^d$) is gesloten *en* begrensd, dit is 'eenvoudig', omgekeerd is elke gesloten begrensde verzameling compact, dit is niet eenvoudig. 'Veel' uitspraken die waar zijn voor eindige verzamelingen, en onwaar voor willekeurige oneindige verzamelingen, zijn wel waar voor compacte verzamelingen.

**Belangrijke begrippen analyse 2 week 18.**

**limiet** Als $a$ een verdichtingspunt is van $A$, het domein van de functie $f$, dan betekent $\lim_{x\to a} f(x) = L$: voor elke $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zodat als $x \in A \setminus \{a\}$ en $|x - a| < \delta$, dan $|f(x) - L| < \varepsilon$.

**hoogtelijnen** Voor level curves: aarzel niet Mathematica te gebruiken.

**tip limieten** Voor limieten: probeer zoveel mogelijk de insluitstelling te gebruiken. Ook Taylorreeksen zijn vaak nuttig.

**Som Kosmala** 10.2.9: onderscheid de gevallen $x \neq y$ en $x = y$.

**Belangrijke begrippen analyse 2 week 19.**

**Uniform continu** Voor elke $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zodanig dat voor elke $a$ en $b$ in het domein van $f$ geldt $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$ als $|a - b| < \delta$.

**Banach** Als $f : D \to D(\subset \mathbb{R}^d)$ een contractie is en $D$ gesloten, dan is er een uniek vast punt $p$ (dus waarvoor $f(p) = p$), en voor elke $x \in D$ convergeert de rij $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ naar dit punt $p$.
$f$ heet contractie op $D$ als er een $q < 1$ is met $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ voor alle $x, y \in D$.

**Belangrijke begrippen analyse 2 week 20.**

**Partiële afgeleiden** $\partial_x f(a,b) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$. Iets dergelijks voor $\partial_y$ en voor functies van (nog) meer variabelen. Beetje verwarrend: met $\partial_{xy} f$ of ook $f_{xy}$ bedoelen we $\partial_y(\partial_x f)$, we differentieren hier dus *eerst* naar $x$ en dan naar $y$ (voor *fatsoenlijke* functies maakt de volgorde overigens niet uit).

**Differentieerbaar** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is differentieerbaar in $(a,b)$ als er getallen $m_1$ en $m_2$ zijn met $f(a+h, b+k) = f(a,b) + m_1 h + m_2 k + \varepsilon\sqrt{h^2 + k^2}$ waarbij $\varepsilon \to 0$ als $(h,k) \to (0,0)$. hier zijn $m_1$ en $m_2$ de partiële afgeleiden $\partial_x f(a,b)$ en $\partial_y$. Het beginstuk heet de linearisering van $f$ rond $(a,b)$ en geeft de vergelijking van het raakvlak. Iets dergelijks voor meer variabelen.

**Belangrijke begrippen analyse 2 week 22.**

**Jacobiaan** Als $(f_1, f_2, \ldots, f_n) = f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ differentieerbaar is in het punt $a = (a_1, \ldots, a_d)$ dan wordt de afgeleide $Df(a)$ gegeven door de $(n \times d)$ Jacobiaan $M_{ij} = \partial_j f_i(a)$. Er geldt $f(a+h) = f(a) + Mh + \varepsilon\|h\|$, waar $\varepsilon$ een vector is met limiet $\mathbf{0}$ als $\|h\| \to 0$.

**Kettingregel** Als $x(t), y(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to R$ en $z = f(x(t), y(t))$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Als $x(t,s), y(t,s) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en $z = f(x,y)$ dan

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

**Taylor (rond 0), drie variabelen** $f(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$T(h,k,l) = f(\mathbf{0}) + f_x(\mathbf{0})h + f_y k + f_z l + \frac{1}{2} f_{xx} h^2 + f_{xy} hk + \cdots + \frac{1}{6} f_{xxx} h^3 + \frac{1}{2} f_{xxy} h^2 k + f_{xyz} hkl + \cdots.$$

**Belangrijk begrip analyse 2 week 23.**

**Impliciete functiestelling** $F : D \to \mathbb{R}^m$ met $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ en $F(x_0, y_0) = 0$ en $D_y F(x_0, *)$ inverteerbaar in $* = y_0$, dan zijn er open $U \ni (x_0, y_0)$ en $V \ni x_0$ en differentieerbare b $g : V \to \mathbb{R}^m$, met
(i) $x \in V$, $y \in \mathbb{R}^m : y = g(x) \Leftrightarrow ((x, y) \in U \wedge F(x, y) = 0)$.
(ii) $x \in V$: $Dg(x) = -[D_y F(x, g(x))]^{-1} D_x F(x, y)$.

Dus hier zijn $D_y F(x, *)$ en $D_x F(*, y)$ de Jacobianen van de afbeeldingen $F(x, *) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ en $F(*, y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dus $D_y$ is een $m \times m$ matrix en $D_x$ is een $m \times n$ matrix.

# Appendix: LaTeX tips

**Opmerking.** Deze tips hebben deels betrekking op de hier gebruikte macro's.

## Beste allemaal

Mijn complimenten – dit is de eerste keer dat "m'n" studenten alle lecture notes in LaTeXtypen. Prima job!

Ik heb in het `.tex` bestand definities toegevoegd – geen aktie noodzakelijk – tussen "start nieuwe macros" en "einde nieuwe macros" die het typewerk sterk kunnen vergemakkelijken. "Makkelijk" is smaakafhankelijk.

Ik stel voor – maar dat hoeft vanzelfsprekend niet – dat "jullie" de typografie aanpassen aan wat in de Analyse/Calculus gebruikelijk is – een deel heb ik al als voorbeeld voorgedaan in de brontekst van dit bestand:

- In plaats van de letter x, y en z **die vectoren zijn in dit** `.tex` **bestand**, type `\x`, `\y` en `\z`: $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$
- Voor alle vectoren zoals **a**, **b** etc: Type `\a`, `\b`, etc
- In plaats van de letter 0 type voor nulvectoren `\zero`: $\mathbf{0}$
- In plaats van `|x|` type `\abs{x}`: $|x|$
- In plaats van `|\x|` type `\abs{\x}`: $|\mathbf{x}|$
- In plaats van `x^{(n)}` type `x\up{n}`: $x^{(n)}$
- In plaats van `\x^{(n)}` type `\x\up{n}`: $\mathbf{x}^{(n)}$
- In plaats van `\iff` type `\iff`: $\iff$
- In plaats van `\implies` type `\implies`: $\implies$
- In plaats van `\mathbb{R}` type `\reals`: $\mathbb{R}$ (heb ik al vervangen)
- In plaats van `\mathbb{N}` type `\naturals`: $\mathbb{N}$ (heb ik al vervangen)
- In plaats van : type `\:`: $x\colon y$
- Voor verzamelingen type bv `\set{1,2,3}`: $\{1, 2, 3\}$
- Voor rode tekst gebruik `\red{word 1 and 2}` type `\red{word 1 and 2}`: word 1 and 2
- Voor groene tekst gebruik `\grn{word 1 and 2}` type `\grn{word 1 and 2}`: word 1 and 2
- Voor blauwe tekst gebruik `\blu{word 1 and 2}` type `\blu{word 1 and 2}`: word 1 and 2
- Het `\blu{...}` kleuren commando kan geen `\verb$...$` constructie bevatten.
- De langere variant `\{\color{blue}...}` kan wel `\verb$...$` in de . . . bevatten!
- De langere variant `\{\color{red}...}` kan wel `\verb$...$` in de . . . bevatten!
- De langere variant `\{\color{green}...}` kan wel `\verb$...$` in de . . . bevatten!
- In plaats van `\define` type `\begin{define}[onderwerp] ..... \end{define}`: zie voorbeelden in dit `.tex` bestand
- Om een `woord` in de index te plaatsen, type `\indx{woord}` – het verschijnt dan "slanted" in de `.pdf`

- In LaTeX zijn de braces `{...}` de LaTeX groep-open en LaTeX groep-sluit operatoren – en daarom niet zichtbaar in de tekst. Om ze zichtbaar te maken moet je `\lbrace` resp. `\rbrace` typen of – minder slim als je LaTeX beter kent type je `\{` resp. `\}`.
- Als je zulke braces (`\{\}`, `()`, `[]`) groot genoeg wilt hebben dan type je `\left\lbrace ... \right\rbrace`:

  $$\left\{ \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \right\}.$$

  Een minder alternatief – alleen te snappen met meer LaTeX kennis is `\big\{` ipv. `\left\rbrace`.
- Als je in het `.pdf` wilt kunnen klikken op secties om daarnaar toe te springen includeer dan `\usepackage{hyperref}` – heb ik al gedaan – dit package was al wel geincludeerd maar het automatisch springen was uitgeschakeld.
- De definities van `\intr` en `\distr` heb ik aangepast – dat valt niet op maar daar komt later voordeel van
- De `\AA` geeft niet de gewenst "interior" notatie – daarom heb ik `\AA` aangepast aan de LaTeX standaard om $\mathring{A}$ te geven
- In plaats van `\lim_{n\to\infty}` type de kortere LaTeX standaard `\lim_{n\to\infty}`: $\lim_{n\to\infty}$
- De bold – vetgedrukte – vectoren veranderen in underline vectoren door 1 regel te wijzigen!
- In math mode – tussen dollars en `\[\]` gebruik `\ldots` voor enumeraties zoals `1,2,\ldots,d`: $1, 2, \ldots, d$ – gebruik `\dots` alleen in text mode, of bij enumeraties met symbolen zoals $+$ of $<$: `1+2+\dots+d`: $1 + 2 + \cdots + d$.

Ik stel voor dat jullie deze tips verhuizen naar de appendix voor de volgende generatie – die appendix heb ik toegevoegd.

Groet,
Jos.

# Index