Dinâmica

Prof. José Maciel

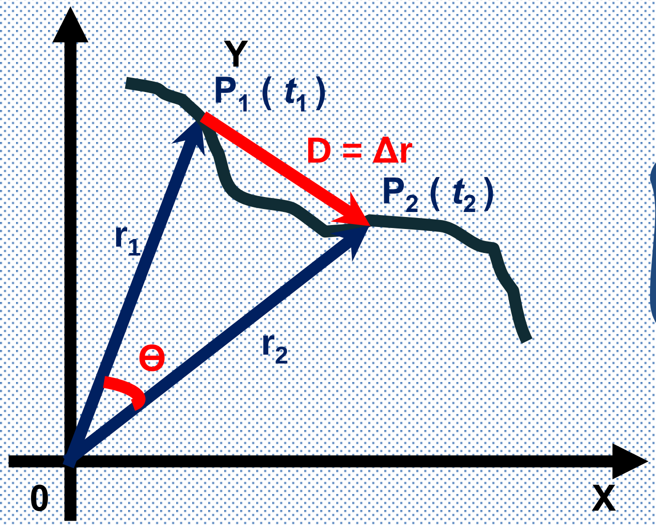
AULA 4

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO DESTA AULA

1. Cinemática Vetorial: deslocamento, velocidade e aceleração;
2. Movimentos Curvilíneos;
3. Lançamento de Projéteis;
4. Derivadas de Funções Vetoriais: componentes retangulares, polares, cilíndricas e esféricas;
5. Exercícios de Revisão.

CINEMÁTICA – ANÁLISE VETORIAL

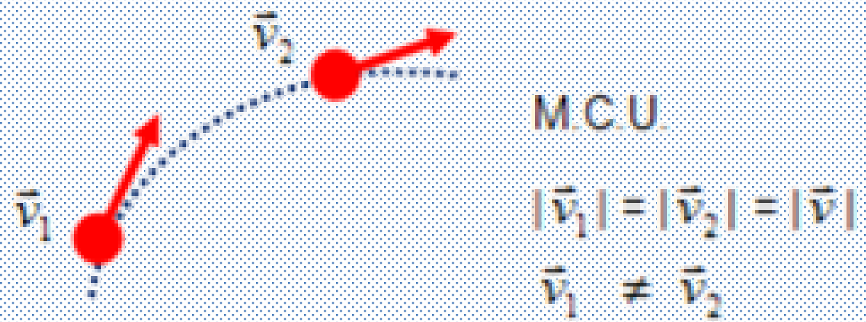
Deslocamento



$$\vec{D} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$D^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2.r_1.r_2.\cos\theta$$

Velocidade Média



- Velocidade Média: $\vec{V}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

- Velocidade Instantânea:

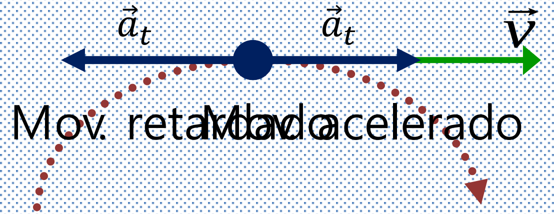
Módulo: valor numérico indicado no velocímetro;

Direção: a mesma direção da reta tangente à trajetória no ponto considerado;

Sentido: o mesmo sentido do movimento.

Aceleração Média

Aceleração Tangencial

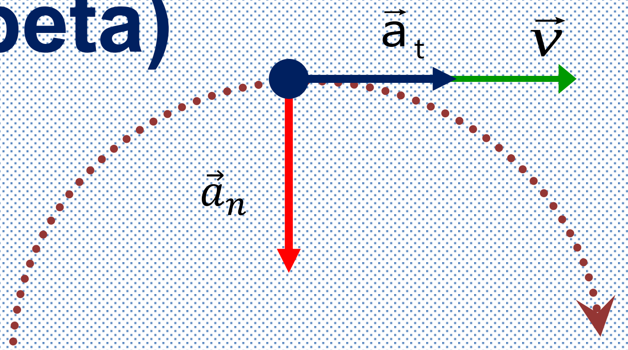


Módulo: igual ao da aceleração escalar $|\vec{a}_t| = |a| = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$

Direção: a mesma direção da reta tangente à trajetória no ponto considerado;

Sentido: 1) ***Acelerado*** - o mesmo sentido do vetor velocidade.
2) ***Retardado*** - o sentido contrário do vetor velocidade.

Aceleração Normal (Centrípeta)



Módulo: é dado por: $|\boldsymbol{a_n}| = \dfrac{\boldsymbol{V^2}}{\boldsymbol{\rho}}$

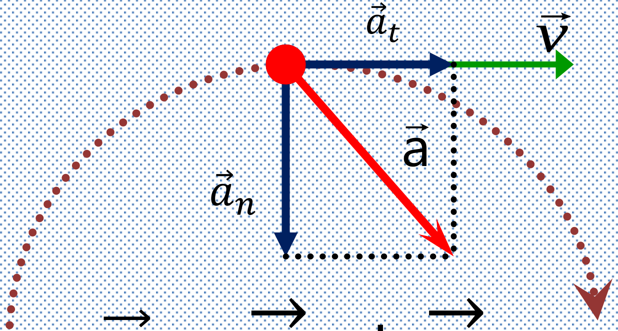
Direção: a mesma direção da reta perpendicular à trajetória no ponto considerado;

Sentido: para o centro da curva.

Se a trajetória é expressa como y = f(x), o **raio da curvatura ρ** em qualquer ponto sobre a trajetória é determinado pela equação

$$\boldsymbol{\rho = \frac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}}$$

Aceleração Instantânea ou Resultante



$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

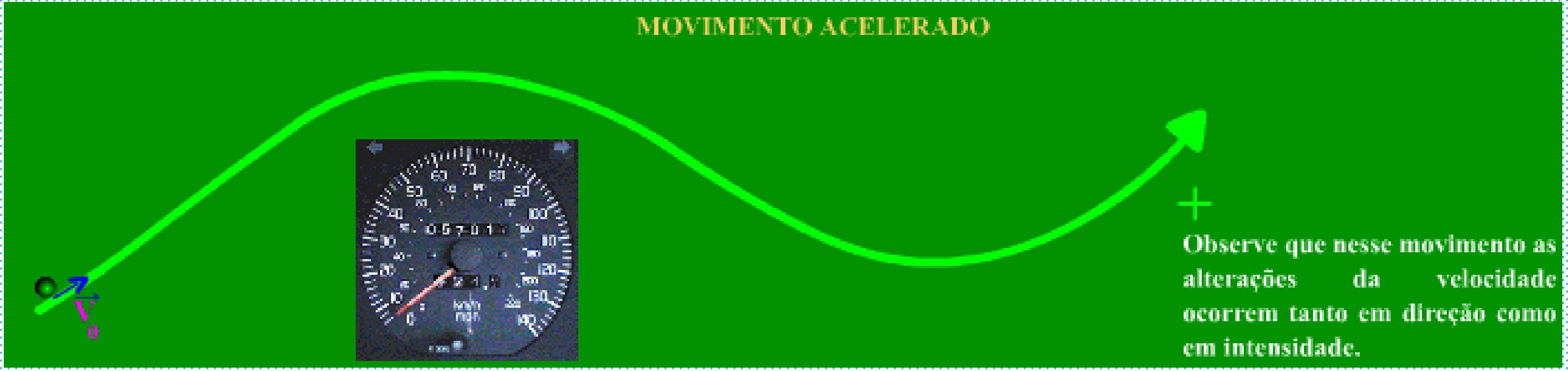
a = (dv/dt) $\mathbf{u_t}$ + (v^2/ρ) $\mathbf{u_n}$

Módulo: é dado por:

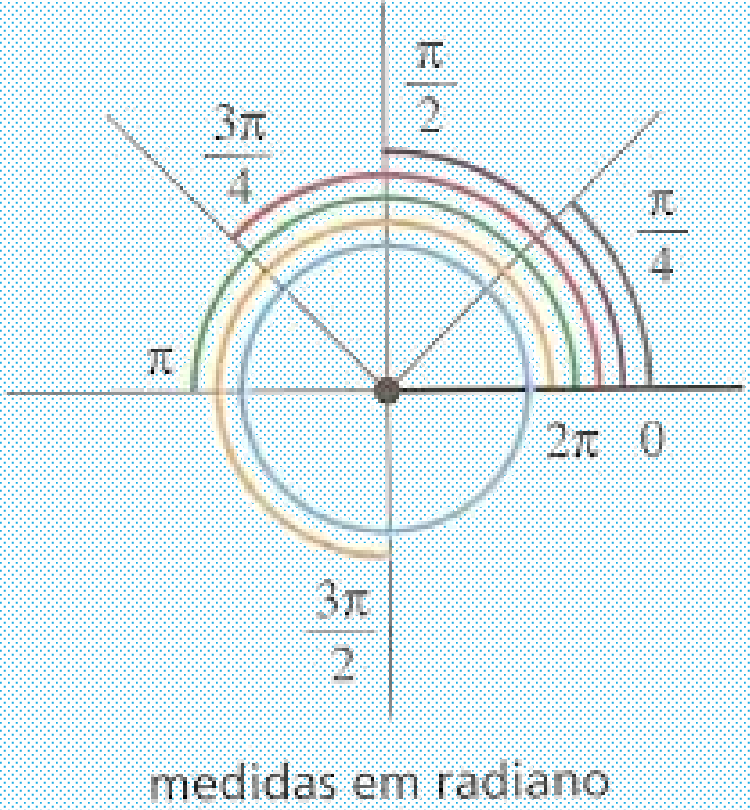
$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

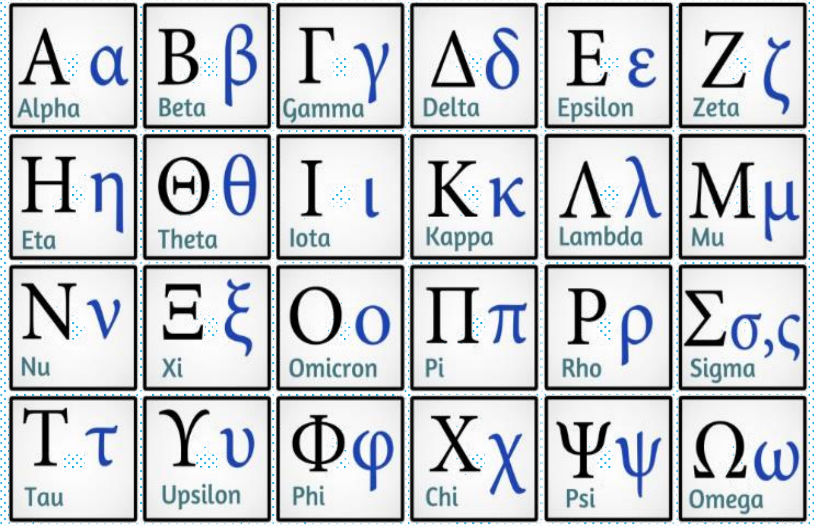
MOVIMENTOS CURVILÍNEOS

Esse movimento pode ser variável, uniforme ou uniformemente variado, assim como no Movimento Retilíneo. Sendo a trajetória do móvel uma curva qualquer, a velocidade vai variar constantemente em direção, em função do tempo, uma vez que o vetor velocidade é sempre tangente à curva no ponto onde se encontra o móvel.



NOÇÃO DE RADIANO



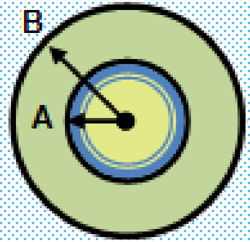


Alfabeto grego e seus símbolos. Foto: ducu59us / Shutterstock.com

Por outro lado, se o movimento for curvilíneo e uniforme, a intensidade da velocidade é constante

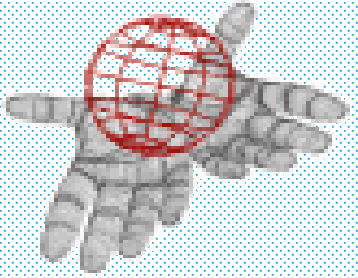
TRANSMISSÃO DE MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

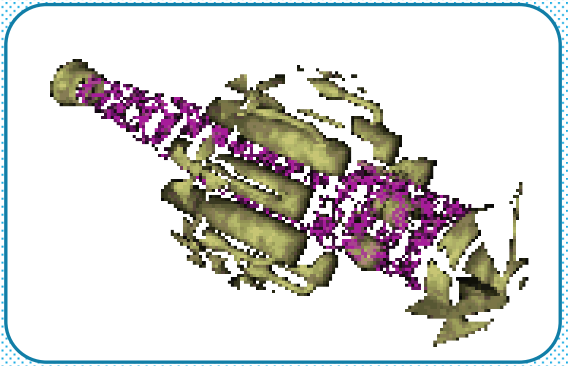
1) Fixando no mesmo eixo os dois discos:



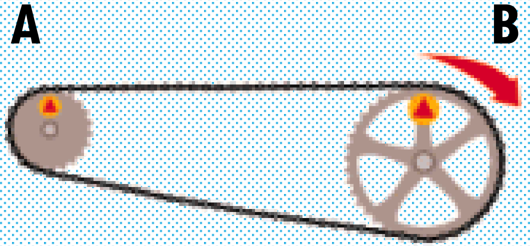
$$\omega_A = \omega_B$$

$$R_B > R_A \Rightarrow V_B > V_A$$



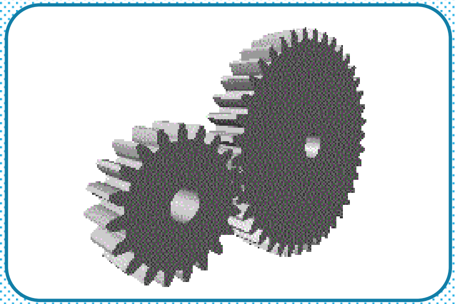


2) Encostando-os ou ligando-os por uma correia ou corrente:



$$V_A = V_B$$

$$R_B > R_A \Rightarrow \omega_B < \omega_A$$



Exemplos Resolvidos

01. Considerando que os movimentos de translação e de rotação do planeta Terra sejam realizados em trajetórias circulares. Sendo o raio da Terra igual a 6,4 milhões de metros e a distância da Terra ao Sol igual a 150 milhões de quilômetros, determine a velocidade tangencial da Terra nesses movimentos.

RESOLUÇÃO

Na translação da Terra: $R = 150 \times 10^6 \times 10^3$ m $= 1{,}5 \times 10^{11}$ m

$T = 1$ ano $= 365$ dias $= 8.760$ h $= 3{,}2 \times 10^7$ s

$\mathbf{V = 2\pi R / T} \Rightarrow V_T = 2\pi\,(1{,}5 \times 10^{11}) / (3{,}2 \times 10^7)$

$\mathbf{V_T \approx 30.000\ m/s \approx 30\ km/s}$

Na rotação da Terra: $R = 6{,}4 \times 10^6$ m

$T = 1$ dia $= 24$ h $= 86.400$ s

$\mathbf{V = 2\pi R / T} \Rightarrow V_R = 2\pi\,(6{,}4 \times 10^6) / (8{,}64 \times 10^4)$

$\mathbf{V_T \approx 465\ m/s}$

- **02.** A parte mais externa de um disco, com 25 m de raio, gira com uma velocidade linear de 15 m/s. O disco começa então a desacelerar uniformemente até parar, em um tempo de 5 s. Determine o módulo da aceleração resultante do disco, em m/s^2, depois de 2,5 s do ínicio do movimento.

RESOLUÇÃO

$R = 25$ m; $V_0 = 15$ m/s; $V = 0$; $\Delta t = 5$ s; $\Delta t' = 2{,}5$ s ► $a_R = ?$ (m/s²)

$\mathbf{V = V_0 + a\,\Delta t}$

$0 = 15 + a\,(5)$ ► $\mathbf{a = -\,3\ m/s^2}$

$\Delta t' = 2{,}5$ s ► $V' = 15 + (-3)\,(2{,}5)$ ► $\mathbf{V' = 7{,}5\ m/s}$

$\mathbf{a_{CP} = V^2 / R}$

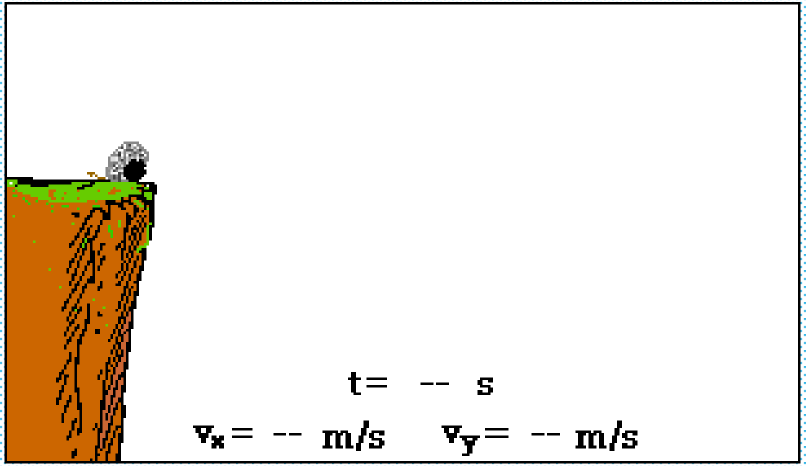
$a_{CP} = 7{,}5^2 / 25$ ► $\mathbf{a_{CP} = 2{,}25\ m/s^2}$

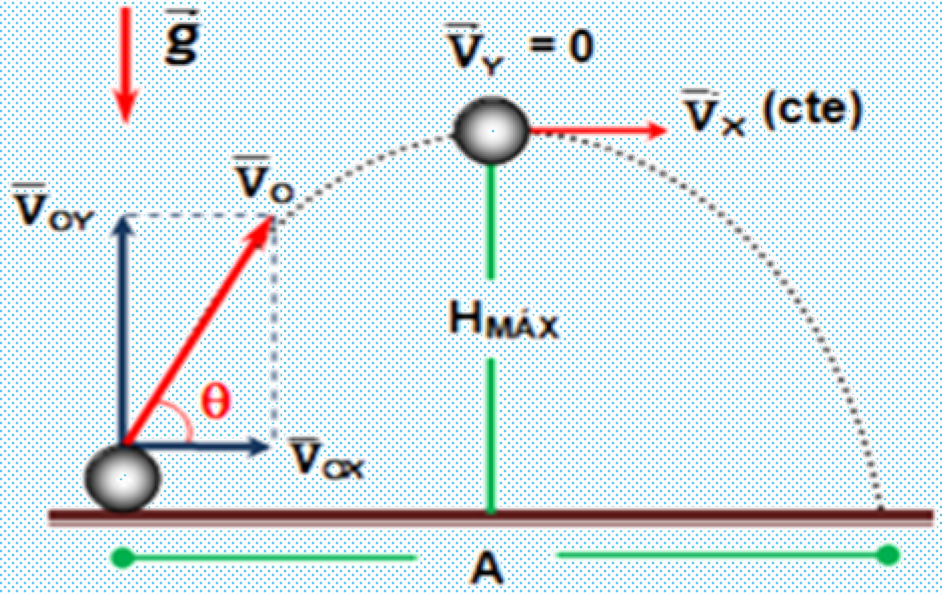
$\mathbf{a_R^2 = a^2 + a_{CP}^2}$

$a_R^2 = (3)^2 + (2{,}25)^2$ ► $\mathbf{a_R = 3{,}75\ m/s^2}$

LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS

LANÇAMENTO OBLÍQUO





Velocidade inicial horizontal: $V_{OX} = V_O.\cos\theta$

Velocidade inicial vertical: $V_{OY} = V_O.\text{sen}\theta$

Direção Horizontal (MU):

Velocidade

$$V_X = V_{OX}(cte)$$

Deslocamento (Alcance)

$$X = V_{OX}.\Delta t$$

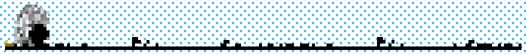
$$A = \frac{V_O^2}{g}\,sen 2\theta$$

Direção Vertical (MUV):

Velocidade

$$V_Y = V_{OY} - gt$$

Deslocamento



$$Y = V_{OY}t - \frac{1}{2}gt^2$$

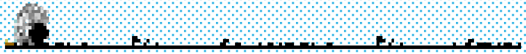
NOTAS:

1) Altura máxima:

$$H = \frac{V_{OY}^2}{2g}$$

2) Tempo de subida:

$$t_S = \frac{V_{OY}}{g}$$

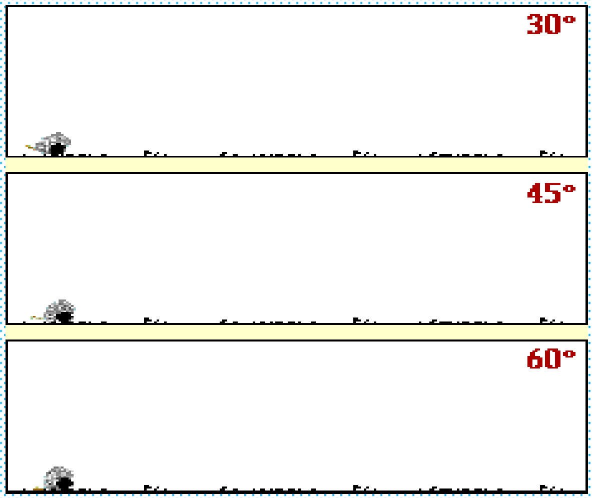


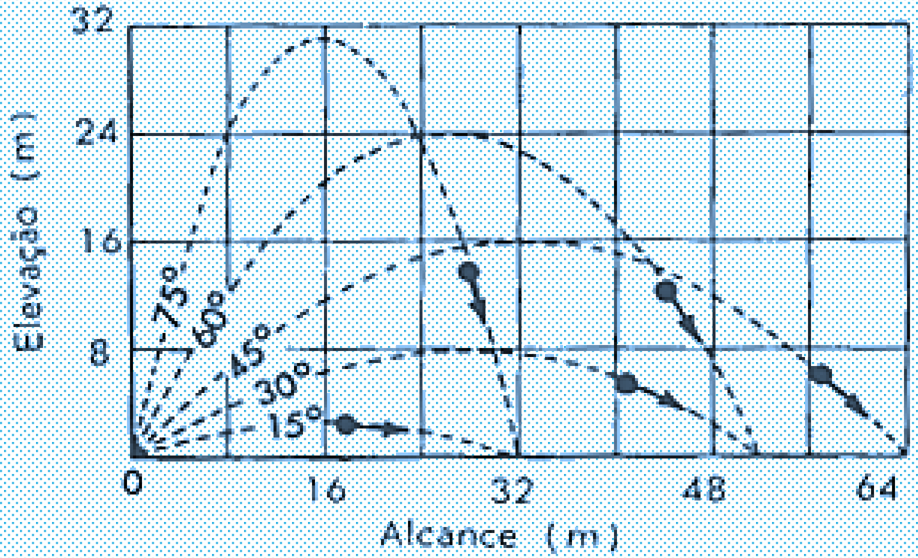
Nunca esqueça!!! No lançamento oblíquo de um projétil no vácuo:

- A única força que age sobre o mesmo é a força peso;
- A única aceleração é a da gravidade;
- O movimento parabólico é composto por dois movimentos independentes;

- Na direção vertical, a projeção do movimento é um MRUV com aceleração igual à da gravidade;
- Na direção horizontal, a projeção do movimento é um MRU;
- No ponto de altura máxima, a componente vertical da velocidade é nula, mas o vetor velocidade não. Neste ponto, a velocidade é mínima e o seu valor é igual ao módulo da componente horizontal;

➤ Para os lançamentos com a mesma velocidade inicial, os ângulos complementares produzem o mesmo alcance



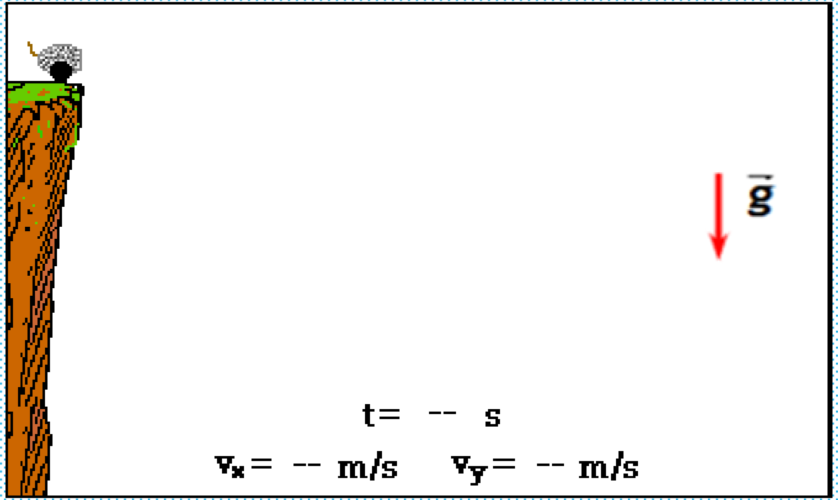


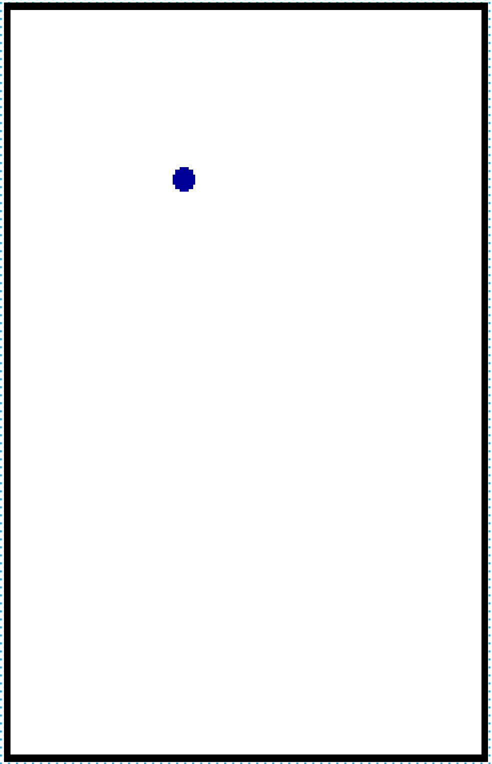
➤ O alcance é máximo quando o ângulo de lançamento é igual a 45° e dado por:

$$A_{MÁX} = \frac{V_O^2}{g}$$

Lançamento Horizontal

Pode-se estudar o lançamento horizontal a uma certa altura, decompondo-o ao longo de um eixo horizontal e outro vertical.





Direção Horizontal (MU):

Velocidade horizontal **Alcance**

$$V_X = V_O (cte)$$

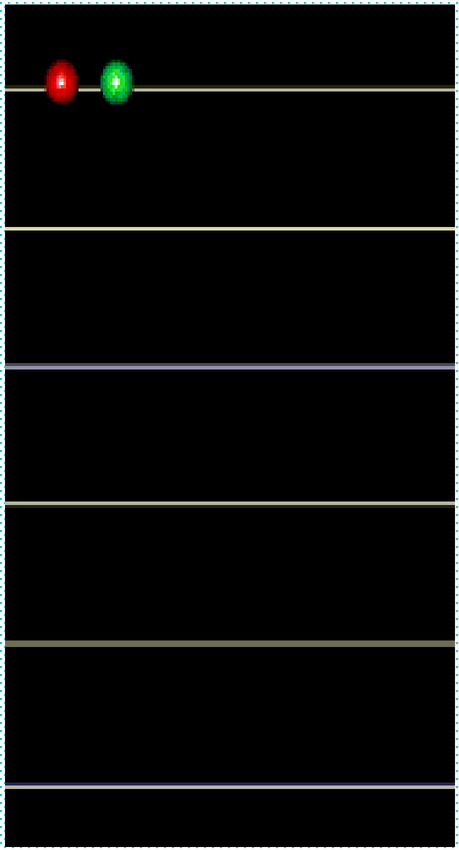
$$X = V_O . \Delta t$$

Direção Vertical (MUV):

Velocidade vertical **Altura na queda**

$$V_Y = gt$$

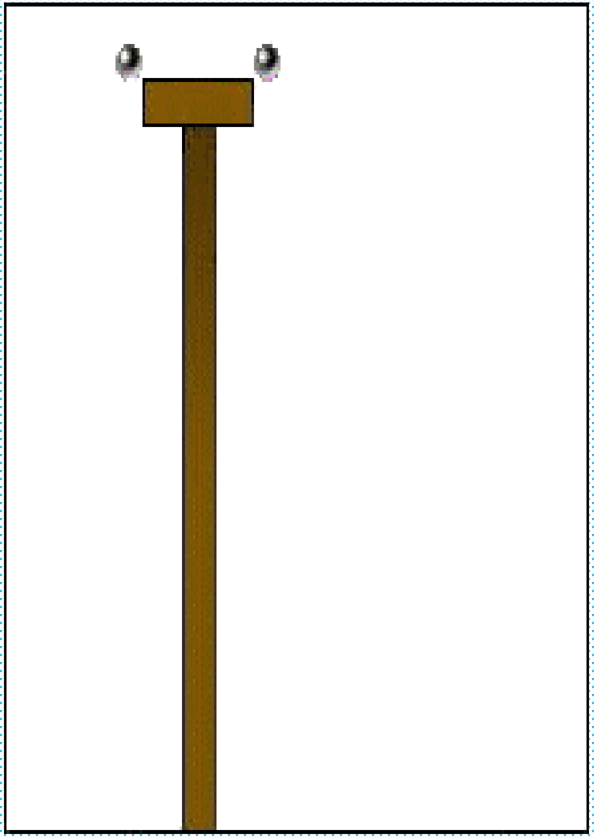
$$Y = \frac{1}{2} g t^2$$



Tempo de queda:

$$t_D = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

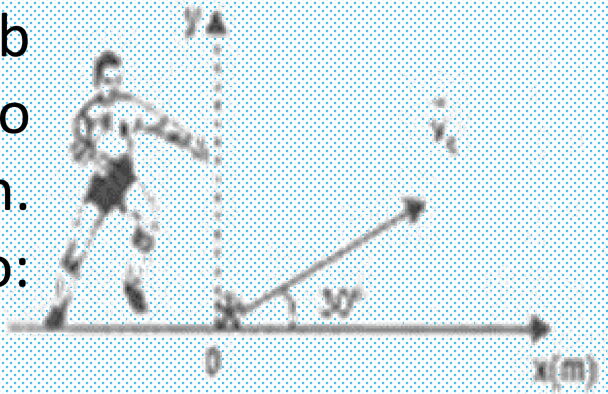
NOTA: No lançamento horizontal, no vácuo, o tempo de queda independe da massa e da velocidade horizontal de lançamento.



Exemplos Resolvidos:

01. Um goleiro, ao cobrar um tiro de meta, chuta a bola do vértice da pequena área, conforme indica a figura a seguir.

Sabendo que a bola foi chutada sob inclinação de 30º com a superfície do campo e que sua velocidade era de 108 km/h. Despreze a resistência do ar e considerando: $g = 10\ m/s^2$. Determine:



a) o valor da altura máxima que a bola atingiu em relação ao plano do campo de futebol.

b) sob que inclinação essa bola deveria ser chutada para que o seu alcance fosse o máximo possível? Justifique matematicamente sua resposta.

RESOLUÇÃO

a) $g = 10\ m/s^2$; $sen\ 30° = 0{,}50$; $cos\ 30° = 0{,}87$;

$V_0 = 108\ km/h \Rightarrow \mathbf{V_0 = 30\ m/s}$

$\mathbf{V_{0X} = V_0.cos\ 30°} \Rightarrow V_{0X} = 30\ (0{,}87) \Rightarrow \mathbf{V_{0X} = 26{,}1\ m/s}$

$\mathbf{V_{0Y} = V_0.sen\ 30°} \Rightarrow V_{0Y} = 30\ (0{,}50) \Rightarrow \mathbf{V_{0Y} = 15\ m/s}$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{V_{OY}^2}}{2\mathbf{g}} \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{15^2}{2(10)} = \frac{225}{20} \Rightarrow \mathbf{H = 11{,}25\ m}$$

RESOLUÇÃO (CONTINUAÇÃO)

b) $t_S = \dfrac{V_{OY}}{g} = \dfrac{V_O\, sen\theta}{g}$

$X = V_{OX}\, \Delta t$

$$\mathrm{sen}(\alpha + \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha . \cos\beta + \mathrm{sen}\,\beta . \cos\alpha$$

$$\alpha = \beta \Rightarrow \mathrm{sen}(\alpha + \alpha) = \mathrm{sen}\,\alpha . \cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha . \cos\alpha$$

$$\mathrm{sen}\,2\alpha = 2\mathrm{sen}\,\alpha . \cos\alpha$$

$$X = V_{OX}\,(2t_S) = (V_O \cos\theta)[2(V_O\, sen\theta / g)]$$

$$X = (V_O^2/g)(2\cos\theta\, sen\theta) \quad \Rightarrow A = \frac{V_O^2}{g}(\mathrm{sen}\,2\theta)$$

$$\mathrm{sen}\,2\theta = 1 \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$A_{MÁX} = \frac{V_O^2}{g}$$

02. Uma esfera rola com velocidade constante de 10 m/s sobre uma mesa horizontal. Ao abandonar a mesa, fica sujeita exclusivamente à ação da gravidade ($g = 10\ m/s^2$), atingindo o solo num ponto situado a 5 m do pé da mesa. Determine:

a) o tempo de queda;

b) a altura da mesa em relação ao solo;

c) o módulo da velocidade da esfera ao chegar ao solo.

RESOLUÇÃO

$V_0 = 10$ m/s; $X = 5$ m; $g = 10$ m/s^2

a) $\mathbf{X = V_0 \cdot \Delta t} \Rightarrow 5 = (10)\,\Delta t \Rightarrow \mathbf{\Delta t = 0{,}5\ s}$

b) $\mathbf{Y} = \frac{1}{2}\mathbf{g}\mathbf{t}^2 \Rightarrow \mathbf{Y} = \frac{1}{2}(10)(0{,}5)^2 = 5(0{,}25) \Rightarrow \mathbf{Y = 1{,}25\ m}$

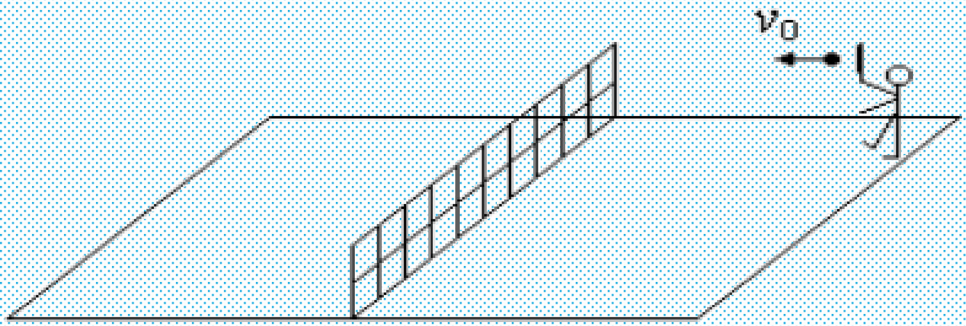
c) $\mathbf{V_X = V_0 = 10\ m/s}$

$\mathbf{V_Y = gt} \Rightarrow V_Y = (10)(0{,}5) \Rightarrow \mathbf{V_Y = 5\ m/s}$

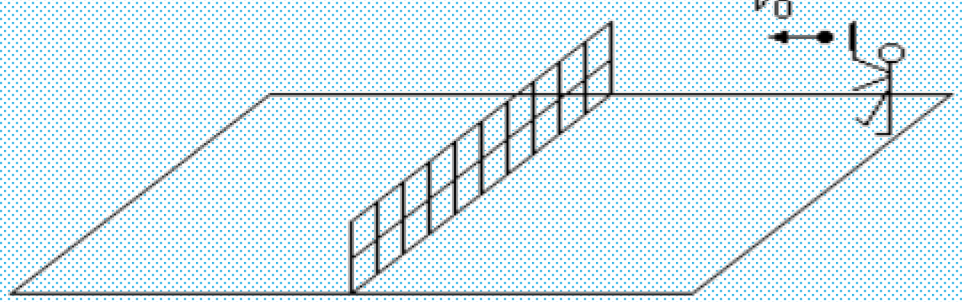
$\mathbf{V_R}^2 = \mathbf{V_X}^2 + \mathbf{V_Y}^2 \Rightarrow \mathbf{V_R}^2 = 10^2 + 5^2 = 100 + 25 = 125$

$\mathbf{V_R = 5\sqrt{5}\ m/s}$

03. Um jogador de tênis quer sacar a bola de tal forma que ela caia na parte adversária da quadra, a 6 metros da rede. Qual o valor da menor velocidade, em m/s, para que isto aconteça? Considere que a bola é lançada horizontalmente do início da quadra, a 2,5 m do chão, e que o comprimento total da quadra é 28 m, sendo dividida ao meio por uma rede. Despreze a resistência do ar e as dimensões da bola. A altura da rede é 1m.



RESOLUÇÃO



$Y = 2{,}5$ m; $g = 10$ m/s^2;

$X = 14 + 6 = 20$ m;

$\mathbf{Y = (½)\ g.t^2}$

$2{,}5 = 1/2(10)\ t^2 \Rightarrow t^2 = 1/2 \Rightarrow \mathbf{t = 1/\sqrt{2}\ s}$

$\mathbf{V_X = V_0\ [cte] \Rightarrow X = V_X\ t}$

$20 = V_0\ (\mathbf{1/\sqrt{2}}) \Rightarrow V_0 = 20\sqrt{2} \approx 20\ (1{,}42)$

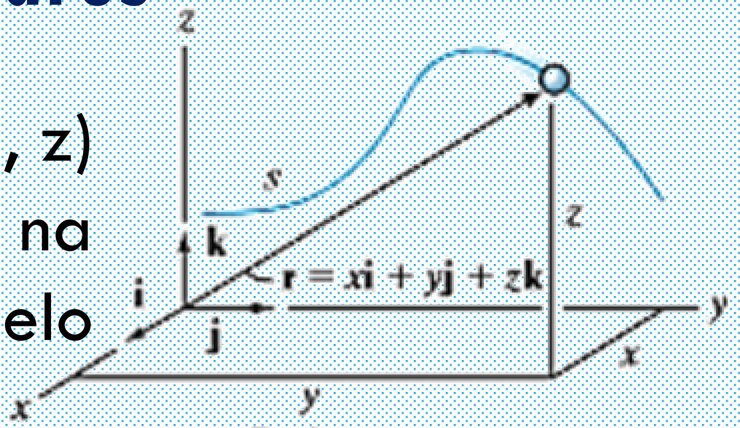
$\mathbf{V_0 = 28{,}4\ m/s}$

Derivadas de Funções Vetoriais:

- Componentes Retangulares

Posição

Se a partícula está em um ponto (x, y, z) sobre a trajetória curva s mostrada na Figura, sua posição é definida pelo vetor posição $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$



Posição

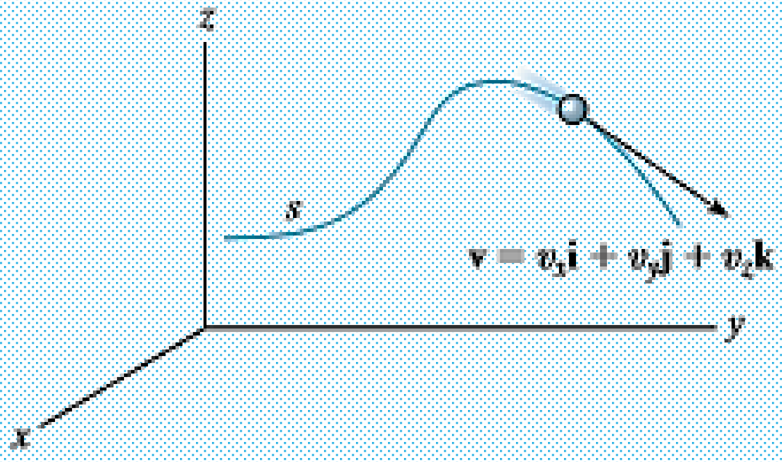
Quando a partícula se move, as componentes x, y, z de **r** serão funções do tempo; ou seja, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, de maneira que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Em qualquer instante, a intensidade de r é definida por: $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

E a direção de **r** é especificada pelo vetor unitário: $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$.

Velocidade

A primeira derivada de **r** em relação ao tempo produz a velocidade da partícula. Por conseguinte,

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$



Velocidade

Em qualquer instante, a intensidade da velocidade é definida por: $v = \sqrt{(v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2)}$

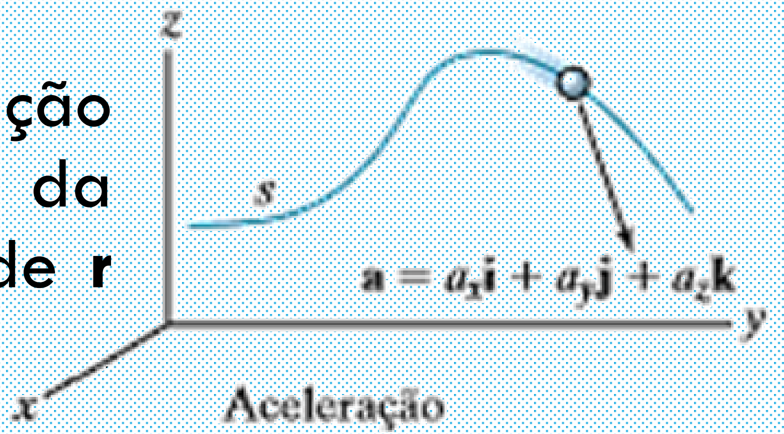
E a direção de **v** é especificada pelo vetor unitário: $\mathbf{u_v} = \mathbf{v}/v$.

Como já discutido, essa direção é sempre tangente à trajetória, como mostrado na Figura.

Aceleração

A primeira derivada de **v** em relação ao tempo produz a aceleração da partícula ou a segunda derivada de **r** em relação ao tempo. Assim,

$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$

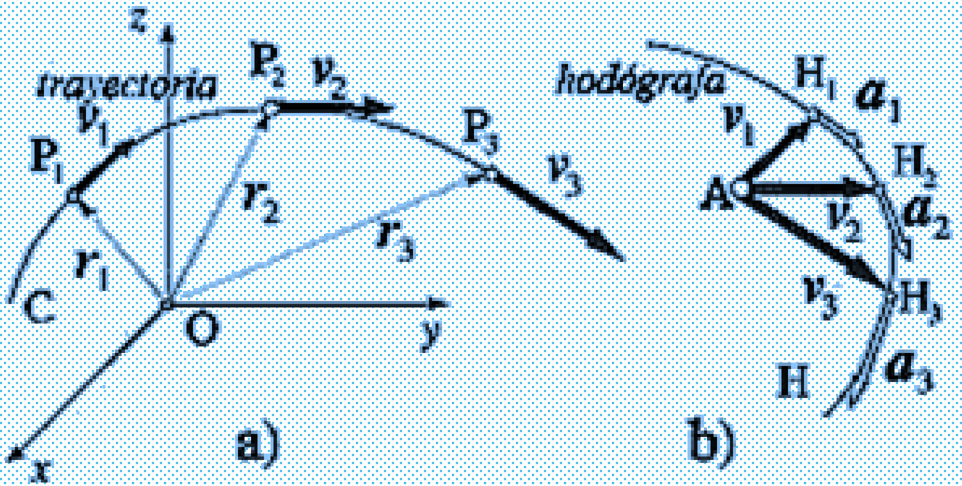


Em qualquer instante, a intensidade da velocidade é definida por: $a = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)}$

E a direção de **a** é especificada pelo vetor unitário: $\mathbf{u_a} = \mathbf{a}/a$.

Visto que **a** representa a taxa de variação temporal tanto na intensidade quanto na direção da velocidade, em geral, **a** não será tangente à trajetória (conforme mostra a Figura).

Hodógrafo - O **hodógrafo** do movimento de uma partícula é a curva descrita pelas extremidades dos vetores velocidade instantânea quando transladados de modo a ter em todos uma mesma origem. William Rowan Hamilton utilizou o hodógrafo como ferramenta de investigação em seus estudos sobre os movimentos dos corpos.

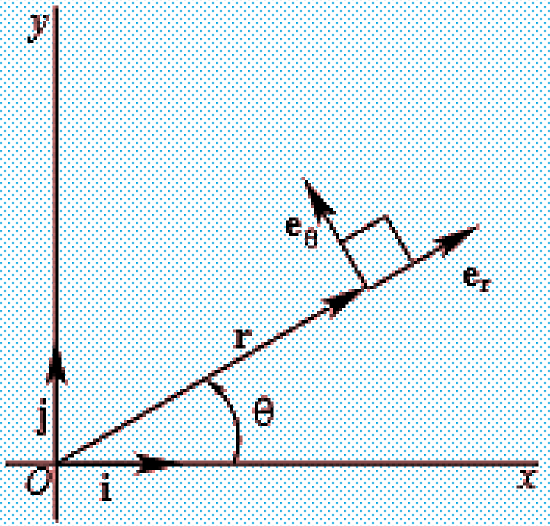


Coordenadas Polares Planas

Velocidade e Aceleração

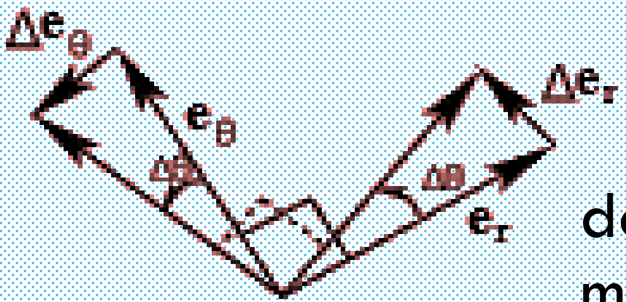
Muitas vezes é conveniente usar coordenadas polares (r, θ) para expressar a posição de uma partícula que se move em um plano. Vetorialmente, a posição da partícula pode ser escrita como o produto da distância radial **r** por um vetor unitário radial **ẽ**$_r$:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$



Quando a partícula se move, ambos **r** e $\tilde{\mathbf{e}}_r$ variam, pois ambos são funções do tempo. Dessa maneira, se forem derivadas em relação ao tempo, tem-se:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$



Para calcular a derivada $d\tilde{\mathbf{e}}_r/dt$, deve-se considerar o diagrama vetorial mostrado na figura ao lado.

Ela mostra que quando a direção de **r** varia de uma quantidade $\Delta\theta$, a mudança correspondente $\Delta\tilde{\mathbf{e}}_r$ no vetor radial unitário será obtido da seguinte maneira: o módulo $|\Delta\tilde{\mathbf{e}}_r|$ é aproximadamente igual a $\Delta\theta$, e a direção de $\Delta\tilde{\mathbf{e}}_r$ é quase perpendicular a $\tilde{\mathbf{e}}_r$.

Introduzindo outro vetor unitário $\tilde{\mathbf{e}}_\theta$ cuja direção é perpendicular a $\tilde{\mathbf{e}}_r$. Então tem-se: $\Delta\tilde{\mathbf{e}}_r = \tilde{\mathbf{e}}_\theta\Delta\theta$

Dividindo-se por Δt e tomando-se o limite, obtém-se:

$$d\tilde{\mathbf{e}}_r/dt = \tilde{\mathbf{e}}_\theta d\theta/dt$$

Para a derivada em relação ao tempo do vetor radial unitário. Da mesma forma, pode-se argumentar que a mudança no vetor $\tilde{\mathbf{e}}_\theta$ é dado pela aproximação:

$$\Delta\tilde{\mathbf{e}}_\theta = -\, \tilde{\mathbf{e}}_r\,\Delta\theta$$

Aqui o sinal negativo é colocado para indicar que a direção da variação $\Delta\tilde{\mathbf{e}}_\theta$ é oposto à direção de $\tilde{\mathbf{e}}_\theta$, como pode ser visto na figura.

Consequentemente, a derivada temporal de $\tilde{e}_\theta$ é dada por:

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\vec{e}_r \frac{d\theta}{dt}$$

Portanto, para a derivada do vetor radial unitário, pode-se finalmente escrever a equação para a velocidade como:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}$$

Então, $\dot{r}$ é o valor da componente radial do vetor velocidade, e $r\dot{\theta}$ é o valor da componente transversal.

Para determinar o vetor aceleração, toma-se a derivada em relação ao tempo do vetor velocidade. Tem-se:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

Determinados os valores de $d\tilde{e}_r/dt$ e $d\tilde{e}_\theta/dt$ leva à seguinte equação para o vetor aceleração em coordenadas polares planas:

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta}$$

(Equação Geral)

Então, o valor da componente radial do vetor aceleração é: $\boxed{a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2}$

e a componente transversal é: $\boxed{a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})}$

Esse resultado mostra, por exemplo, que se uma partícula se move num círculo de raio constante b, então $\dot{r} = 0$, e dessa maneira a componente radial da aceleração tem valor $b\dot{\theta}^2$ e aponta diretamente para o centro da trajetória circular. O valor da componente transversal neste caso é $b\ddot{\theta}$. Por outro lado, se a partícula se move ao longo de uma linha radial fixa, isto é, se θ é constante, então a componente radial se reduz a $\ddot{r}$ e a componente transversal se anula. Se r e θ ambos variam, então a expressão geral dá a aceleração.

Exemplo Resolvido

Uma partícula move-se em uma trajetória espiral dada pelas coordenadas polares: $r = bt^2$ e $\theta = ct$ onde b e c são constantes. Encontre a velocidade e aceleração como função de t.

Resolução:

Dados: $r = bt^2$ e $\theta = ct$

Da equação da velocidade, encontramos: $\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}$

$$\vec{v} = \vec{e}_r \frac{d}{dt}(bt^2) + \vec{e}_\theta (bt^2)\frac{d}{dt}(ct) = (2bt)\vec{e}_r + (bct^2)\vec{e}_\theta$$

Da mesma forma, da equação da aceleração, temos:

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta}$$

$$\vec{a} = \vec{e}_r(2b - bt^2c^2) + \vec{e}_\theta[0 + 2(2bt)c] = b(2 - t^2c^2)\vec{e}_r + 4bct\vec{e}_\theta$$

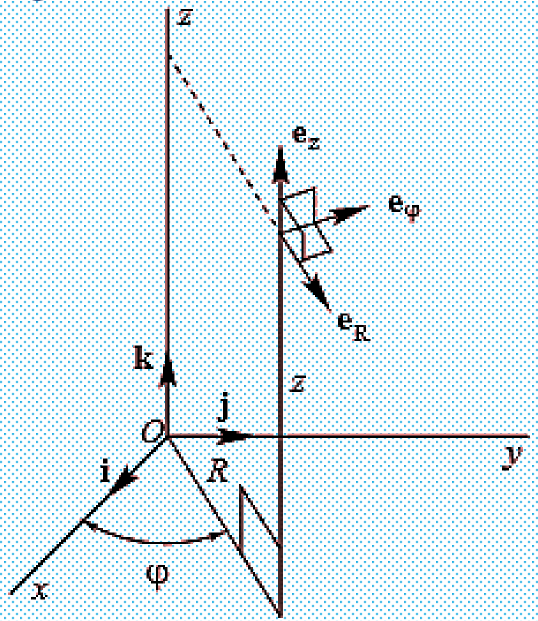
É interessante notar que, neste exemplo, a componente radial da aceleração torna-se negativa para t grande, apesar do raio estar sempre crescendo monotonicamente com o tempo.

Coordenadas Cilíndricas

Velocidade e Aceleração

No caso de movimento tridimensional, a posição de uma partícula pode ser descrita em termos das coordenadas cilíndricas R, ϕ, z. O vetor posição pode então ser escrito na forma

$$\boxed{\vec{r} = R\vec{e}_R + z\vec{e}_z}$$



Vetores unitários para coordenadas cilíndricas.

onde $\tilde{e}_R$ é um vetor radial unitário no plano xy e $\tilde{e}_z$ é um vetor unitário na direção z.

Um terceiro vetor unitário $\tilde{e}_\phi$ é necessário para que os três vetores $\tilde{e}_R$, $\tilde{e}_\phi$ e $\tilde{e}_z$ constituam uma tríade orientada de acordo com a mão direita como ilustrado na Figura.

Nota-se que: $\vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{e}}_z.$

Os vetores velocidade e aceleração são obtidos por diferenciação, como antes. Isto novamente envolverá derivadas de vetor unitários. Um argumento semelhante àquele usado no caso bidimensional mostra que

$$d\vec{e}_R/dt = \vec{e}_\phi \dot{\phi} \text{ e } d\vec{e}_\phi/dt = -\vec{e}_R \dot{\phi}.$$

O vetor unitário $\tilde{e}_z$ não varia sua direção, logo sua derivada relativa ao tempo é zero.

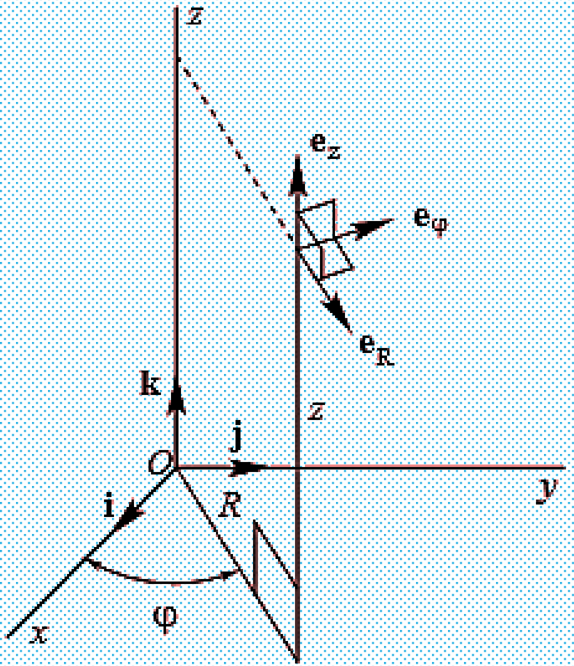
Tendo em vista estes fatos, nota-se facilmente que os vetores velocidade e aceleração são dados pelas relações abaixo:

$$\vec{v} = \dot{R}\vec{e}_R + R\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\vec{e}_R + (2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi})\vec{e}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z$$

Alternativamente, pode-se obter as derivadas dos vetores unitários usando as seguintes equações que relacionam as tríades fixa e girada.

$$\begin{aligned}
\vec{e}_R &= \vec{\imath}\cos\phi + \vec{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\phi \\
\vec{e}_\phi &= -\vec{\imath}\,\mathrm{sen}\,\phi + \vec{\jmath}\cos\phi \\
\vec{e}_z &= \vec{k}
\end{aligned}$$

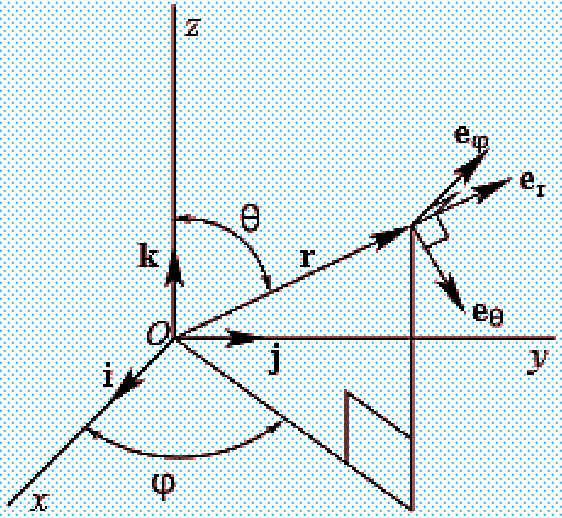


Vetores unitários para coordenadas cilíndricas.

Coordenadas Esféricas

Velocidade e Aceleração

Quando se utiliza as coordenadas esféricas r, θ, ϕ para especificar a posição de uma partícula, escreve-se o vetor posição como o produto da distância radial **r** pelo vetor radial unitário $\tilde{\mathbf{e}}_r$ da mesma maneira que foi feito quando do uso de coordenadas polares planas. Então $\boxed{\vec{r} = r\vec{e}_r}$



Vetores unitários para coordenadas esféricas.

A direção $\tilde{\mathbf{e}}_r$ fica agora especificada por dois ângulos θ e ϕ. Introduzindo mais dois vetores unitários $\tilde{\mathbf{e}}_\phi$ e $\tilde{\mathbf{e}}_\theta$ (Figura).

A velocidade é: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$

O nosso problema seguinte é expressar a derivada d$\tilde{e}_r$ /dt em termos dos vetores unitários da tríade girada. Usando a figura, nota-se que as seguintes relações entre as duas tríades são válidas.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{i}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + \vec{j}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + \vec{k}\cos\theta \\ \vec{e}_\theta &= \vec{i}\cos\theta\cos\phi + \vec{j}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi - \vec{k}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \vec{e}_\phi &= -\vec{i}\,\mathrm{sen}\,\phi + \vec{j}\cos\phi \end{aligned}}$$

Estas equações expressam os vetores unitários da tríade girada em termos da tríade fixa.

Identificando as rotações corretamente, nota-se que as duas transformações são, de fato, idênticas. Diferenciando a primeira equação em relação ao tempo. O resultado é:

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\imath}(\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi) + \vec{\jmath}(\dot{\theta}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi) - \vec{k}\,\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

A seguir, usando as expressões para $\tilde{e}_\phi$ e $\tilde{e}_\theta$, encontra-se que a equação acima se reduz a

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\phi}\vec{e}_\phi\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

As outras duas derivadas são obtidas por procedimento semelhante.

Os resultados são:

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\vec{e}_\phi$$

$$\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\vec{e}_r - \dot{\phi}\cos\theta\vec{e}_\theta$$

O resultado final é: $\boxed{\vec{v} = \vec{e}_r\dot{r} + \vec{e}_\phi r\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + \vec{e}_\theta r\dot{\theta}}$

dando o vetor velocidade em termos de suas componentes na tríade girada. Para encontrar a aceleração, diferenciando a expressão acima em relação ao tempo. Obtém-se

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{e}_r\ddot{r} + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \vec{e}_\phi\frac{d(r\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)}{dt} + r\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} + \vec{e}_\theta\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

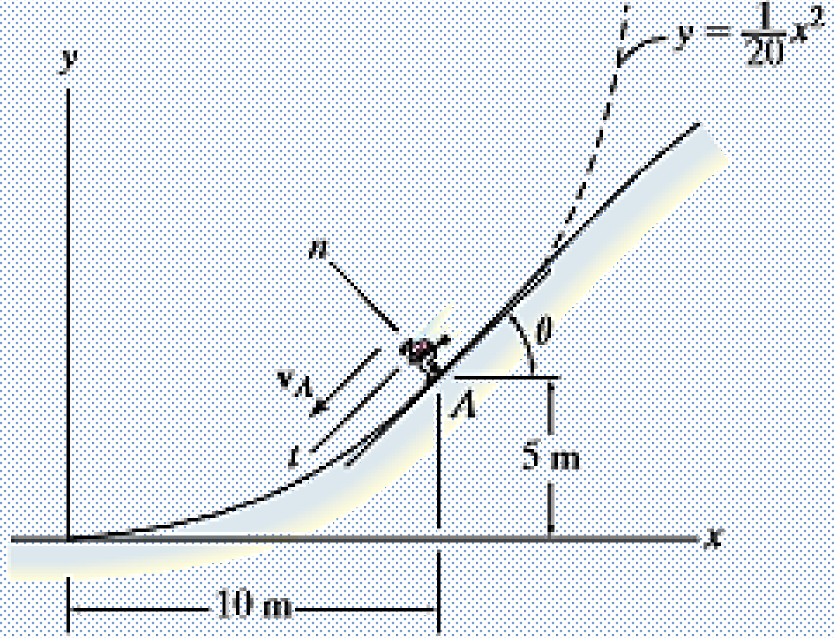
Usando as fórmulas deduzidas anteriormente para as derivadas dos vetores unitários, encontra-se prontamente que a expressão acima para a aceleração se reduz a

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \mathrm{sen}^2\theta - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta + (r\ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\vec{e}_\phi$$

dando o vetor aceleração em termos de suas componentes na tríade $\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{R}}$, $\tilde{\mathbf{e}}_{\theta}$ e $\tilde{\mathbf{e}}_{\phi}$.

Exercícios de Fixação

01. Quando o esquiador alcança o ponto A ao longo da trajetória parabólica mostrada na figura, ele tem uma velocidade escalar de 6 m/s, que está aumentando em 2 m/s^2. Desprezando o tamanho do esquiador no cálculo. Determine a direção de sua velocidade, a direção e a intensidade de sua aceleração nesse instante.



RESOLUÇÃO

Velocidade: Por definição, a velocidade é sempre tangente à trajetória. Visto que $y = 1/20\ x^2$, $dy/dx = 1/10\ x$, então $x = 10$ m, $dy/dx = 1$. Por conseguinte, em A, v faz um ângulo de $\theta = tg^{-1} 1 = 45°$ com o eixo x. Portanto, $\mathbf{v_A = 6\ m/s \ \angle\ 45°}$ **Resposta**

Aceleração: Por definição, a aceleração é determinada a partir de **a** = (dv/dt) **ut** + (v^2/ρ) **un**. Entretanto, é necessário determinar primeiro o raio de curvatura da trajetória em A (10 m, 5 m).

Visto que: $d^2y/dx^2 = 1/10$, então:

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \left.\frac{\left[1 + \left(\frac{1}{10}x\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{1}{10}\right|}\right|_{x=10\text{ m}} = 28{,}28\text{ m}$$

RESOLUÇÃO - Continuação

A aceleração torna-se:

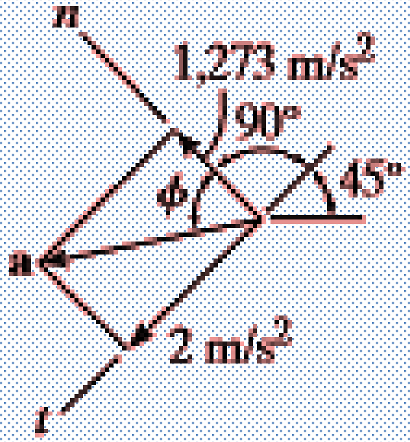
$$\mathbf{a}_A = \dot{v}\mathbf{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{a}_A = 2\mathbf{u}_t + \frac{(6\ \mathrm{m/s})^2}{28{,}28\ \mathrm{m}}\mathbf{u}_n = \{2\mathbf{u}_t + 1{,}273\mathbf{u}_n\}\ \mathrm{m/s^2}$$

Como mostrado na Figura

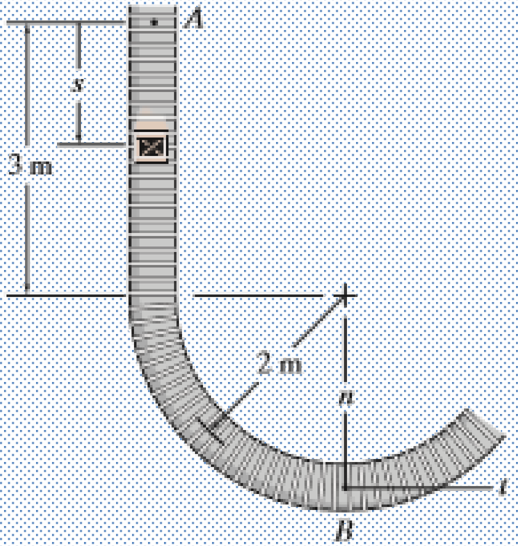
$$a = \sqrt{(2\ \mathrm{m/s^2})^2 + (1{,}273\ \mathrm{m/s^2})^2} = 2{,}37\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{2}{1{,}273} = 57{,}5°$$



Assim, $45° + 90° + 57{,}5° - 180° = 12{,}5°$, de maneira que $a = 2{,}37\ \mathrm{m/s^2}$ $12{,}5°$ *Resposta*

02. As caixas na foto deslocam-se ao longo do transportador industrial. Se uma caixa como mostrado na figura ao lado da foto parte do repouso em A e aumenta sua velocidade escalar de maneira que $a_t = (0{,}2t)\ m/s^2$, em que t é dado em segundos, determine a intensidade de sua aceleração quando ela chega ao ponto B.



RESOLUÇÃO

Aceleração

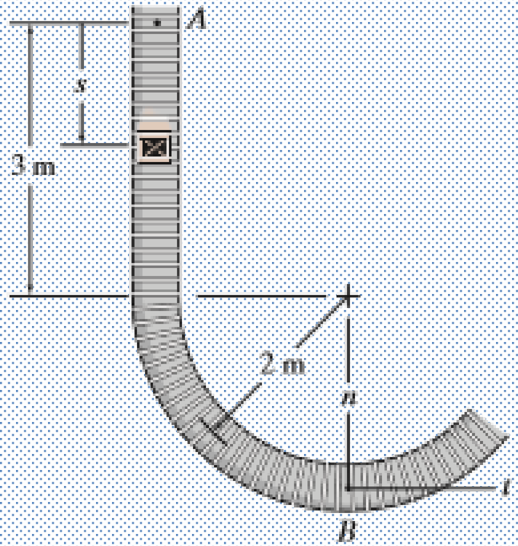
Para determinar as componentes da aceleração $a_t = dv/dt$ e $a_n = v^2/r$, é necessário formular v e dv/dt de maneira que eles possam ser avaliados em B. Visto que $v_A = 0$ quando $t = 0$, então

$$a_t = dv/dt = 0{,}2t \quad (1)$$

$$\int_0^{v} dv = \int_0^{t} 0{,}2t\, dt \quad \Rightarrow \quad v = 0{,}1t^2 \quad (2)$$

RESOLUÇÃO - Continuação

O tempo necessário para a caixa chegar ao ponto B pode ser determinado observando-se que a posição de B é $s_B = 3 + 2\pi(2)/4 = 6{,}142$ m (figura ao lado), e visto que $s_A = 0$ quando $t = 0$, tem-se:



$v = ds/dt = 0{,}1t^2$

$$\int_0^{6{,}142\text{ m}} ds = \int_0^{t_B} 0{,}1t^2 dt$$

$6{,}142\text{ m} = 0{,}0333\, t^3_B \quad ⇨ \quad \mathbf{t_B = 5{,}690\ s}$

RESOLUÇÃO

Substituir nas equações (1) e (2) resulta em

$(a_B)_t = dv_B /dt = 0,2(5,69) = 1,138\ m/s^2$

$v_B = 0,1(5,69)^2 = 3,238\ m/s$

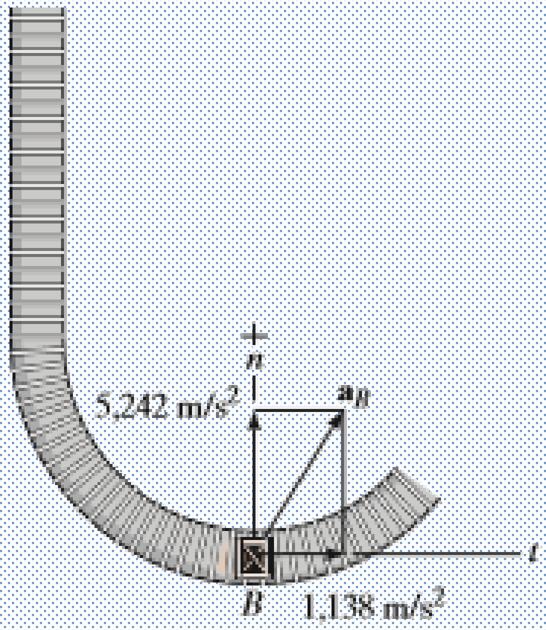
Em B, $\rho_B = 2$ m, de maneira que

$(a_B)_n = v_B^2/\rho_B = (3,238\ m/s)^2 / 2\ m = 5,242\ m/s^2$

A intensidade de a_B (Figura) é, portanto,

$a_B = \sqrt{[(1,138\ m/s^2)^2 + (5,242\ m/s^2)^2]}$

$a_B = 5,36\ m/s^2$ **Resposta**



03. P11.92 - O movimento de uma partícula é definido pelas equações $x = 4t - 2\text{sen } t$ e $y = 4 - 2\cos t$, onde x e y são expressos em milímetros e t é expresso em segundos. Esboce a trajetória da partícula e determine (a) as intensidades da menor e da maior velocidade atingida pela partícula, (b) os instantes de tempo, posição e direção correspondentes à velocidade.

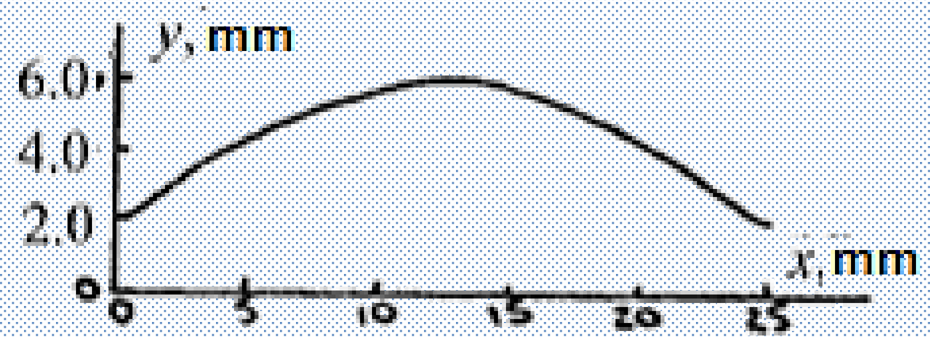
RESOLUÇÃO

Substituindo os valores de t nas equações de x e y resulta na tabela a seguir:

$x = 4t - 2\sin t \quad y = 4 - 2\cos t$

t, s	x, mm	y, mm
0	0	2.0
$\frac{\pi}{2}$	4.28	4.0
π	12.57	6.0
$\frac{3\pi}{2}$	20.8	4.0
2π	25.1	2.0

Assim, pode-se construir um gráfico



(a) $x = 4t - 2\ \text{sent} \qquad y = 4 - 2\ \text{cost}$

$v_x = dx/dt = 4 - 2\ \text{cost}$

$v_y = dy/dt = 2\ \text{sent}$

RESOLUÇÃO - Continuação

Aplicação: $v^2 = v^2_x + v^2_y = (4 - 2\cos t)^2 + (2\,\text{sen}\,t)^2$

$$\mathbf{v^2 = 20 - 16\cos t}$$

para $v_{mín}$ ⇨ $\cos t = 1$, assim: $v^2_{mín} = 4$ ⇨ $\mathbf{v_{mín} = 2\ mm/s}$

para $v_{máx}$ ⇨ $\cos t = -1$, assim: $v^2_{máx} = 36$ ⇨ $\mathbf{v_{máx} = 6\ mm/s}$

(b) Quando: $v = v_{mín}$ ⇨ $\cos t = 1$ ⇨ **$t = 2n\pi$ s**, onde: $n = 0, 1, 2, \ldots$

Portanto: $x = 4(2n\pi) - 2\,\text{sen}\,(2n\pi)$ ⇨ $\mathbf{x = 8n\pi\ mm}$

$y = 4 - 2\,(1)$ ⇨ $\mathbf{y = 2\ mm}$

RESOLUÇÃO - Continuação

Assim: $\mathbf{v_x = 4 - 2\ (1) = 2\ mm/s}$

$\mathbf{v_y = 2\ sen(2n\pi) = 0}$

$\mathbf{\theta v_{mín} = 0 \rightarrow}$

Quando: $v = v_{máx}$ ⇨ $\cos t = -1$ ⇨ $\mathbf{t = (2n + 1)\pi\ s}$, onde: $n = 0, 1, 2, ...$

Portanto: $x = 4(2n + 1)\ \pi - 2\ sent\ (2n + 1)\pi$ ⇨ $\mathbf{x = 4(2n + 1)\pi\ mm}$

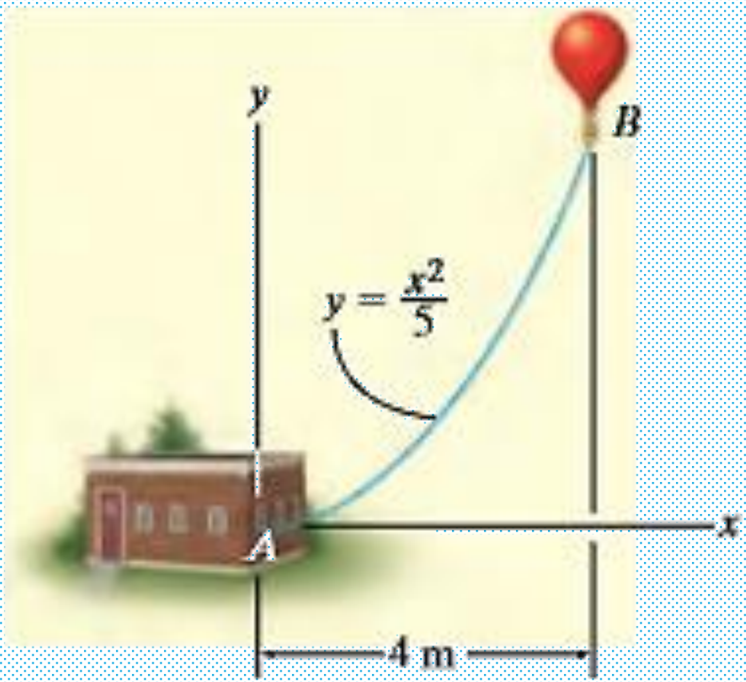
$y = 4 - 2\ (-1)$ ⇨ $\mathbf{y = 6\ mm}$

Assim: $\mathbf{v_x = 4 - 2(-1) = 6\ mm/s}$

$\mathbf{v_y = 2\ sen(2n + 1)\pi = 0}$

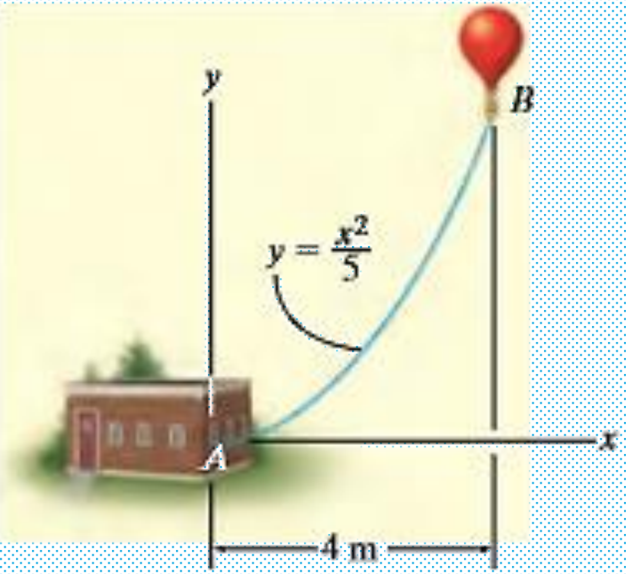
$\mathbf{\theta v_{máx} = 0 \rightarrow}$

04. Em qualquer instante de tempo, a posição horizontal do balão meteorológico mostrado na Figura a seguir é definida por $x = (2t)$ m, em que t é dado em segundos. Se a equação da trajetória é $y = x^2/5$, determine a intensidade e a direção da velocidade e da aceleração quando $t = 2$ s.



RESOLUÇÃO

Velocidade



A componente da velocidade na direção x é $v_x = d/dt\ (2t) = 2$ m/s

Para encontrar a relação entre as componentes da velocidade, deve-se usar a regra da cadeia do cálculo.

Quando t = 2 s, x = 2(2) = 4 m (Figura) e, portanto,

$v_y = d/dt\ (x^2/5) = (2x/5)\ v_x = [2(4)/5]\ (2) = 3{,}20$ m/s

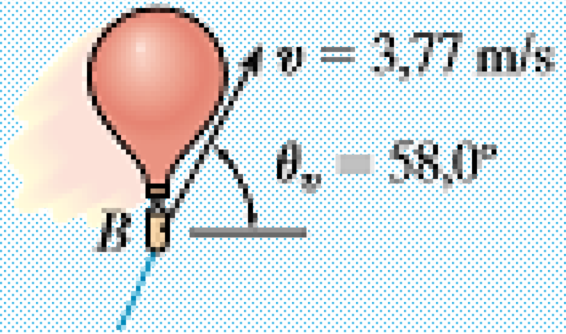
RESOLUÇÃO - Continuação

Quando t = 2 s, a intensidade da velocidade é, portanto,

$v = \sqrt{[(2\ m/s)^2 + (3{,}20\ m/s)^2]} = 3{,}77\ m/s$ Resposta

A direção é tangente à trajetória (Figura), em que

$u_v = tg^{-1}(v_y/v_x) = tg^{-1}\,(3{,}20/2) = 58{,}0°$ Resposta



RESOLUÇÃO - Continuação

Aceleração

A componente da aceleração na direção x é: $a_x = d/dt\ (2) = 0$

Sabendo que: $v_y = d(x^2/5)/dt = 2xv_x/5$.

Para encontrar a relação entre as componentes da aceleração, vamos usar a regra da cadeia do cálculo. Portanto,

$a_y = d(2xv_x/5)/dt = (2/5)\ [(v_x)v_x + x(a_x)] = (2/5)\ [(2)2 + (4)(0)]$

$a_y = 1{,}60\ m/s^2$

Desse modo, $a = \sqrt{[(0)^2 + (1{,}60)^2]}$

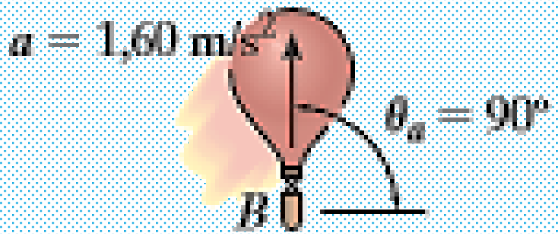
$a = 1{,}60\ m/s^2$ Resposta

RESOLUÇÃO - Continuação

A direção de **a**, como mostrado na Figura, é

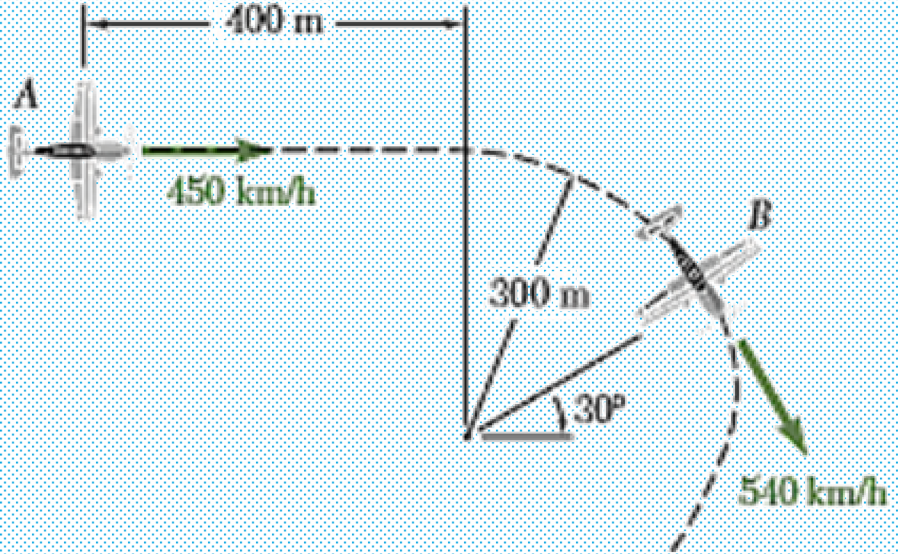
$u_a = tg^{-1}(a_y/a_x) = tg^{-1}(1{,}60/0)$

$u_a = 90{,}0°$ Resposta

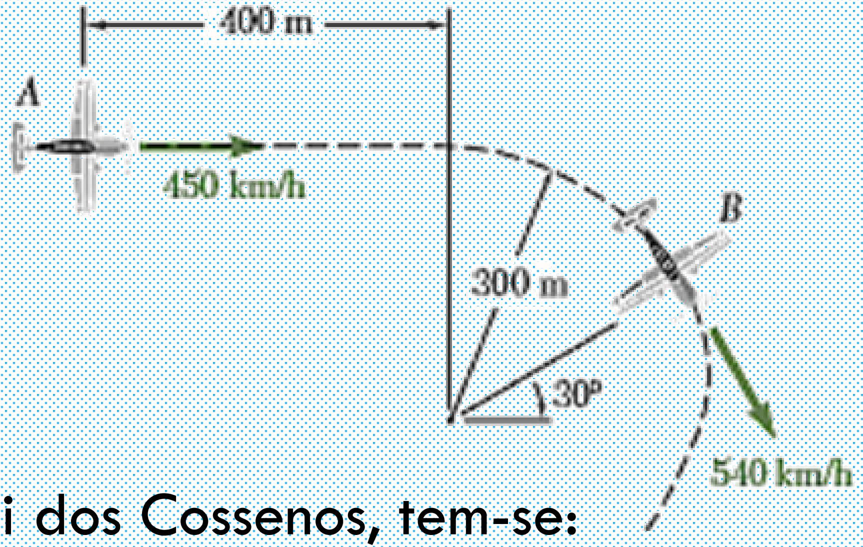


NOTA: também pode-se obter v_y e a_x primeiro expressando $y = f(t) = (2t)^2/5 = 0{,}8t^2$ e, em seguida, tomando sucessivas derivadas em relação ao tempo.

05. 11.140 - Em um dado instante de uma corrida de aeronaves, o avião A está voando horizontalmente em linha reta e sua velocidade escalar aumentada a uma taxa de 8 m/s². O avião B está voando na mesma altitude que o avião A e, à medida que ele contorna um marco, segue uma trajetória circular de 300 m de raio. Sabendo que em um dado instante a velocidade de B começa a decrescer para uma taxa de 3 m/s², determine, para as posições mostradas na figura, (a) a velocidade de B em relação a A, (b) a aceleração de B em relação a A.



RESOLUÇÃO

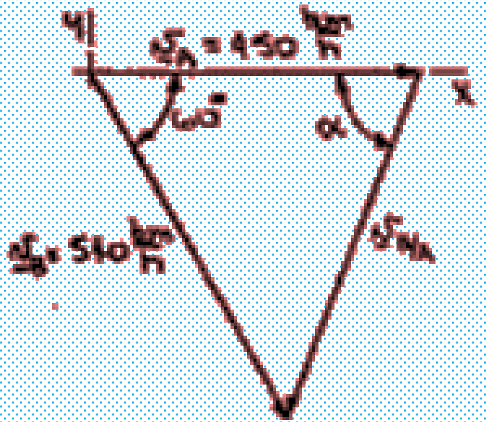


Dados: $v_A = 450$ km/h e

$v_B = 540$ km/h = 150 m/s

(a) Como: $\mathbf{v_B = v_A + v_{B/A}}$

Graficamente:



Aplicando a Lei dos Cossenos, tem-se:

$v_{B/A}^2 = 450^2 + 540^2 - 2(450)(540)\cos 60°$

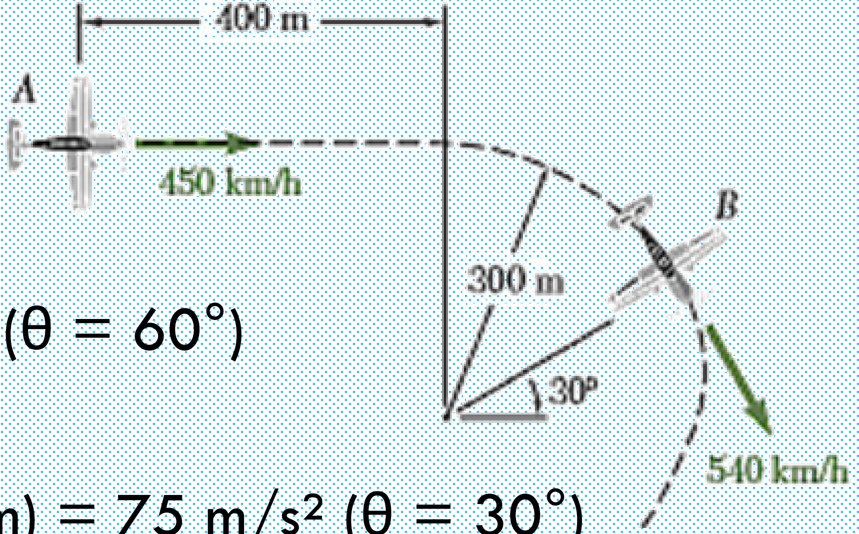
⇨ $\mathbf{v_{B/A} = 501{,}10}$ **km/h**

E aplicando a Lei dos Senos, tem-se:

$540/\text{sen}\alpha = 501{,}1/\text{sen}60°$

⇨ $\boldsymbol{\alpha = 68{,}9°}$

RESOLUÇÃO – Continuação:



Dados: $a_A = 8\ m/s^2$ e $(a_B)_t = 3\ m/s^2$ ($\theta = 60°$)

(b) Como: $(a_B)_n = v_B{}^2/\rho_B$

$$(a_B)_n = (150\ m/s)^2/(300\ m) = 75\ m/s^2 \ (\theta = 30°)$$

Logo: $\mathbf{a_B = (a_B)_t + (a_B)_n}$

$a_B = 3(-\cos60°\ \mathbf{i} + \text{sen}60°\ \mathbf{j}) + 75\ (-\cos30°\ \mathbf{i} - \text{sen}30°\ \mathbf{j})$

$a_B = -(66{,}542\ m/s^2)\ \mathbf{i} - (34{,}902\ m/s^2)\ \mathbf{j}$

RESOLUÇÃO – Continuação:

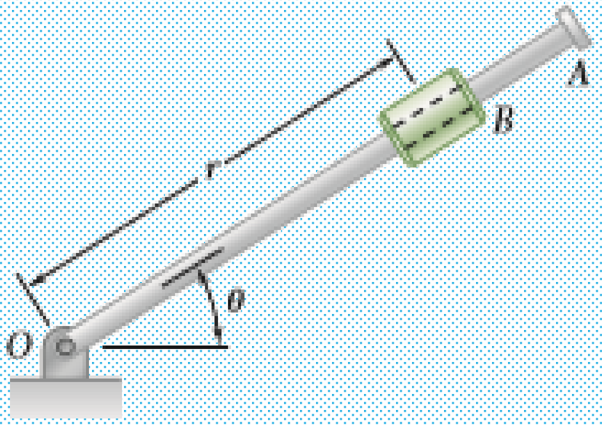
Portanto: $\mathbf{a_B = a_A + a_{B/A}}$

$a_{B/A} = (-66{,}542\ \mathbf{i} - 34{,}902\ \mathbf{j}) - (8\ \mathbf{i})$

$a_{B/A} = -(74{,}542\ m/s^2)\ \mathbf{i} - (34{,}902\ m/s^2)\ \mathbf{j}$

$\mathbf{a_{B/A} = 82{,}2\ m/s^2\ (\theta = 25{,}1°)}$

06. A rotação do braço OA de 0,9 m de comprimento em torno de O é definida pela relação $\theta = 0{,}15t^2$, onde θ está expresso em radianos e t em segundos. O cursor B desliza ao longo do braço de tal maneira que sua distância em relação a O é $r = 0{,}9 - 0{,}12t^2$, onde r é expresso em metros e t em segundos.



Após o braço OA ter girado 30°, determine (a) a velocidade total do cursor, (b) a aceleração total do cursor, e (c) a aceleração relativa do cursor em relação ao braço.

RESOLUÇÃO

Instante t no qual $\theta = 30°$.

Substituindo $\theta = 30° = 0{,}524$ rad na expressão para θ, obtém-se

$\theta = 0{,}15\ t^2 \Rightarrow 0{,}524 = 0{,}15\ t^2 \Rightarrow$ **$t = 1{,}869$ s**

Equações de movimento.

Substituindo $t = 1{,}869$ s nas expressões para r, θ e suas primeiras e segundas derivadas, tem-se

$$
\begin{aligned}
r &= 0{,}9 - 0{,}12t^2 = 0{,}481\ \text{m} & \theta &= 0{,}15t^2 = 0{,}524\ \text{rad} \\
\dot{r} &= -0{,}24t = -0{,}449\ \text{m/s} & \dot{\theta} &= 0{,}30t = 0{,}561\ \text{rad/s} \\
\ddot{r} &= -0{,}24 = -0{,}240\ \text{m/s}^2 & \ddot{\theta} &= 0{,}30 = 0{,}300\ \text{rad/s}^2
\end{aligned}
$$

RESOLUÇÃO - Continuação

a. Velocidade de B.

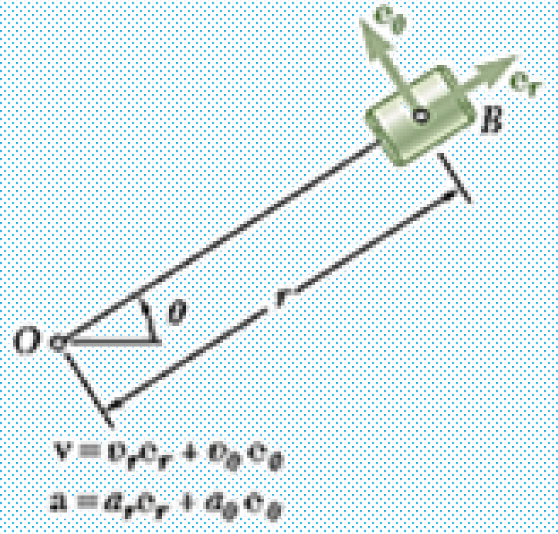
Usando a Equação $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, obtemos os valores de v_r e v_θ quando t = 1,869 s.

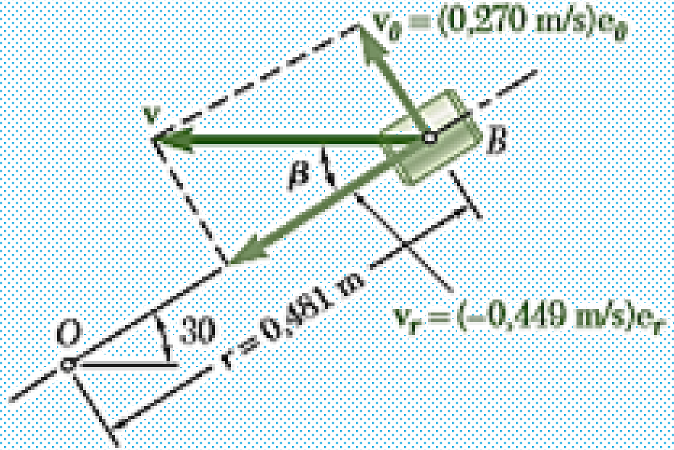
$$v_r = \dot{r} = -0{,}449 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = 0{,}481(0{,}561) = 0{,}270 \text{ m/s}$$

Resolvendo o triângulo retângulo mostrado na figura, obtém-se a intensidade e direção da velocidade,

$$\mathbf{v} = 0{,}524 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad \beta = 31°$$





RESOLUÇÃO - Continuação

b. Aceleração de B.

Usando $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$, obtém-se

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 =$ - 0,240 – 0,481(0,561)²

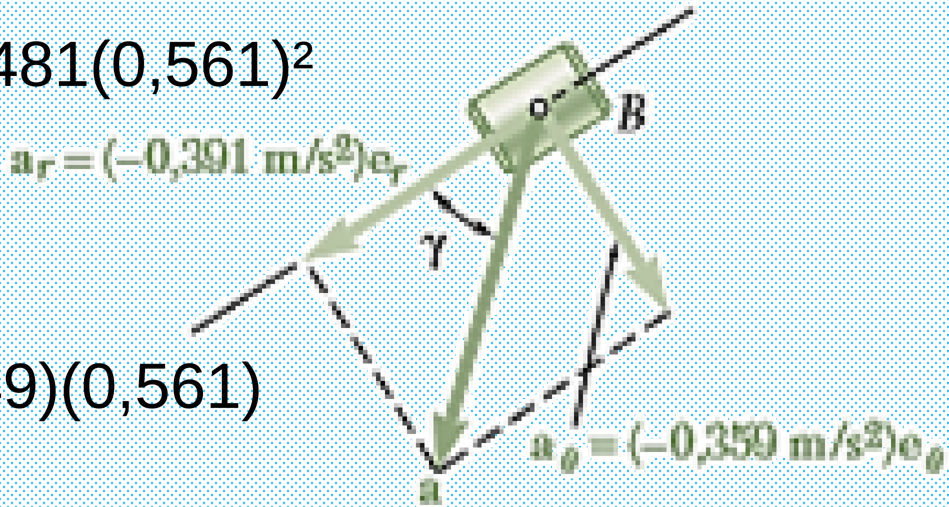
$\boldsymbol{a_r}$ **= - 0,391 m/s²**

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

$a_\theta =$ 0,481(0,300) + 2(-0,449)(0,561)

$\boldsymbol{a_\theta}$ **= - 0,359 m/s²**

$\boldsymbol{a}$ **= 0,531 m/s²** e **γ = 42,6°**



RESOLUÇÃO - Continuação

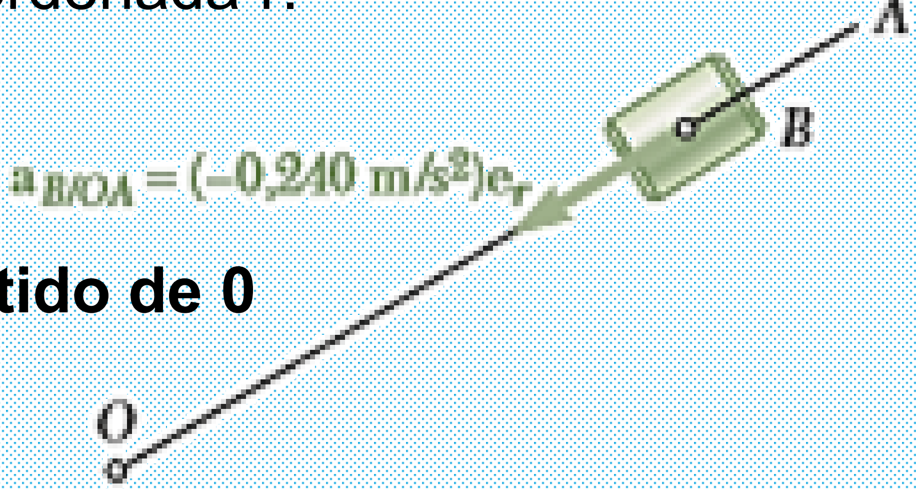
c. Aceleração de B em relação ao braço OA.

Nota-se que o movimento do cursor em relação ao braço é retilíneo e definido pela coordenada r.

Escreve-se:

$a_{B/0A} = \ddot{r} = -\ 0{,}240\ m/s^2$

$\boldsymbol{a_{B/0A}}$ **= 0,240 m/s² no sentido de 0**

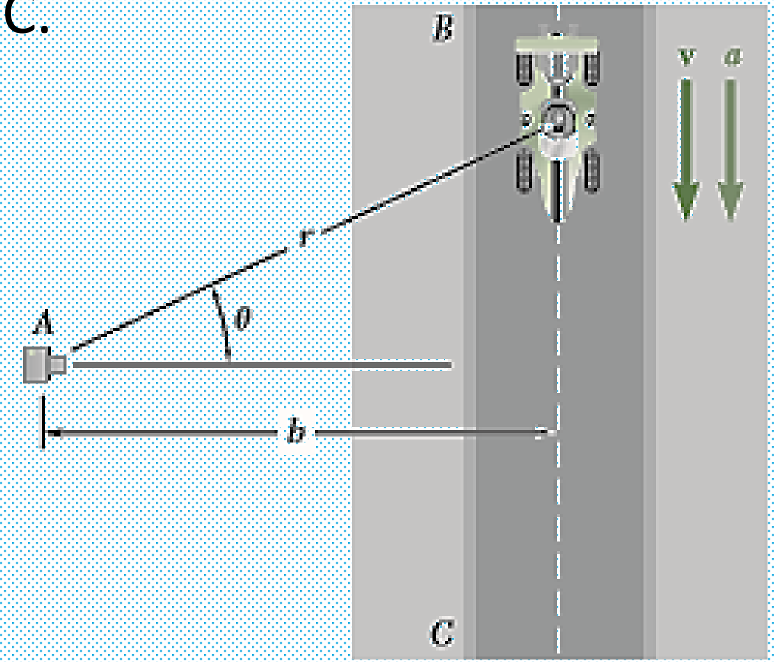


07. 11.167 e 168 - Para o estudo do desempenho de um carro de corrida posiciona-se uma câmera filmadora de alta velocidade no ponto A. A câmera é montada em um mecanismo que possibilita que ela grave o movimento do carro à medida que ele percorre a trajetória reta BC.

Determine:

(a) a velocidade escalar do carro em termos de $b\theta$ e $\dot{\theta}$.

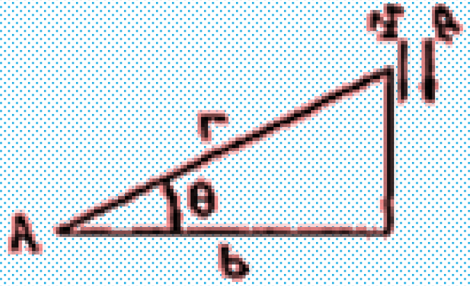
(b) a intensidade da aceleração do carro de corrida do em termos de θ, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$.



RESOLUÇÃO

(a) Tem-se que $r = b/\cos\theta \Rightarrow \dot{r} = b\dot{\theta}\ \text{sen}\theta/\cos^2\theta$

Como: $\mathbf{v^2 = v_r^2 + v_B^2} = (\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2$



$v^2 = (b\dot{\theta}\ \text{sen}\theta/\cos^2\theta)^2 + (b\dot{\theta}/\cos\theta)^2$

$v^2 = (b^2\dot{\theta}^2/\cos^2\theta)[(\text{sen}^2\theta/\cos^2\theta) + 1]$

$v^2 = (b^2\dot{\theta}^2/\cos^4\theta) \Rightarrow v = \pm\ b\dot{\theta}/\cos^2\theta$

Como as posições do carro mostradas na figura, tem-se θ *decrescente, assim, a raiz negativa é a escolhida, portanto:*

$$\mathbf{v = -\, b\dot{\theta}/\cos^2\theta}$$

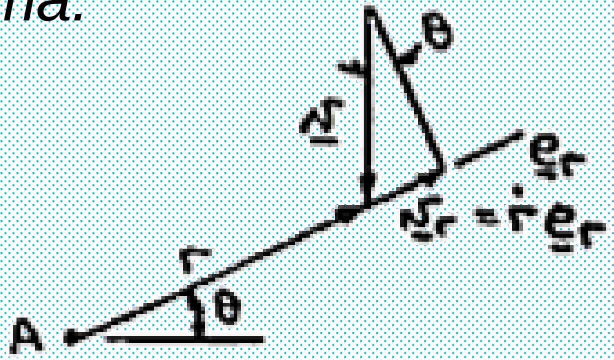
RESOLUÇÃO – Continuação:

Outra maneira:

Conforme mostrado no diagrama:

$\dot{r} = -v \, \text{sen}\theta = b\dot{\theta} \, \text{sen}\theta/\cos^2\theta$

⇨ $\boldsymbol{v = -\, b\dot{\theta}/\cos^2\theta}$



RESOLUÇÃO – Continuação:

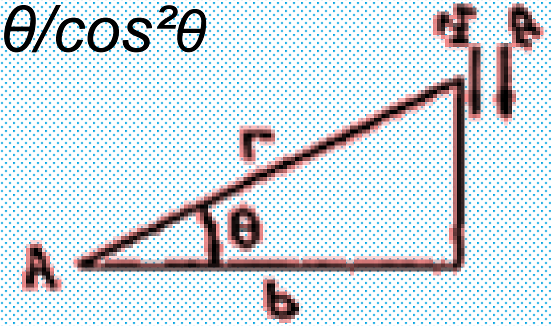
(b) Tem-se que $r = b/\cos\theta \Rightarrow \dot{r} = b\dot{\theta}\ \mathrm{sen}\theta/\cos^2\theta$

Como: $a = dv/dt$ e $v = -\ b\dot{\theta}/\cos^2\theta$

Tem-se: $a = d(-b\dot{\theta}/\cos^2\theta)/dt$

$a = -b[\ddot{\theta}\cos^2\theta - \dot{\theta}(-2\dot{\theta}\cos\theta\ \mathrm{sen}\theta)]/\cos^4\theta$

⇨ $\mathbf{a = (-b/\cos^2\theta)(\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2\ \mathrm{tg}\theta)}$



RESOLUÇÃO – Continuação:

Outra maneira: $\boldsymbol{a^2 = a_r^2 + a_\theta^2}$

Onde: $\mathbf{a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2}$

$a_r = b[(\ddot{\theta}\text{sen}\theta/\cos^2\theta) + \dot{\theta}^2(1 + \text{sen}^2\theta)/\cos^2\theta] – (b\dot{\theta}^2/\cos\theta)$

$a_r = (b/\cos^2\theta)\ (\ddot{\theta}\ \text{sen}\theta + 2\dot{\theta}^2\ \text{sen}^2\theta/\cos\theta)$

$\mathbf{a_r = (b\ sen\theta/cos^2\theta)\ (\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2\ tg\theta)}$

RESOLUÇÃO – Continuação:

E, tem-se: $\mathbf{a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}}$

$$a_\theta = b\ddot{\theta}/\cos\theta + 2(b\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta/\cos^2\theta)$$

$$\mathbf{a_\theta = b(\cos\theta/\cos^2\theta)\ (\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2\ \mathrm{tg}\theta)}$$

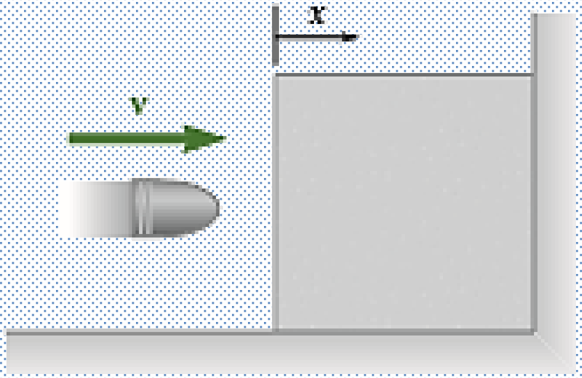
Então: $a = \pm\ (b/\cos^2\theta)\ ((\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2\ \mathrm{tg}\theta)\ [(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2]^{1/2}$

Como as posições do carro mostradas na figura, $\ddot{\theta}$ é negativo, para a ser positiva, a raiz negativa é a escolhida, portanto:

$$\mathbf{a = -\ (b/\cos^2\theta)\ (\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2\ \mathrm{tg}\theta)}$$

Exercícios de Revisão

01. 11.184 - Um projétil entra em um meio resistente em $x = 0$ com uma velocidade inicial $v_0 = 270$ m/s e percorre 100 mm antes de entrar em repouso. Considerando que a velocidade do projétil é definida pela relação $v = v_0 - kx$, onde v é expressa em m/s e x é em metros, determine: (a) a aceleração inicial do projétil, (b) o tempo requerido para que o projétil penetre 97,5 mm no meio resistente.



RESOLUÇÃO

Dados: x = 100 mm = 0,1 m e v = 0

Como: $v = v_0 - kx \Rightarrow 0 = (270\ m/s) - k\,(0,1) \Rightarrow$ **$k = 2700\ s^{-1}$**

(a) $a = dv/dt = d(v_0 - kx)/dt = -kv$

Para $t = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow a = -k\,(v_0 - kx) = -(2700)\,[270 - 2700(0)]$

$\Rightarrow$ **$a = -729\ km/s^2$**

(b) $v = dx/dt = v_0 - kx$

Para $t = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \int_0^x \frac{dx}{v_0 - kx} = \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{k}\left[\ln(v_0 - kx)\right]_0^x = t$

$$t = \frac{1}{k}\, ln\left(\frac{v_0}{v_0 - kx}\right) = \frac{1}{k}\, ln\left(\frac{1}{1 - \frac{k}{v_0}x}\right) = \frac{1}{2700}\ln\left[\frac{1}{1 - \frac{2700}{270}(0,0975)}\right]$$

$\Rightarrow$ **$t = 1,366\ ms$**

02. A posição de uma partícula que se desloca ao longo de uma linha reta é definida pela relação $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$, onde x é expresso em metros e t em segundos. Determine:

(a) o instante em que a velocidade será zero,

(b) a posição e a distância percorrida pela partícula nesse instante,

(c) a aceleração da partícula nesse instante e

(d) a distância percorrida pela partícula de $t = 4$ s a $t = 6$ s

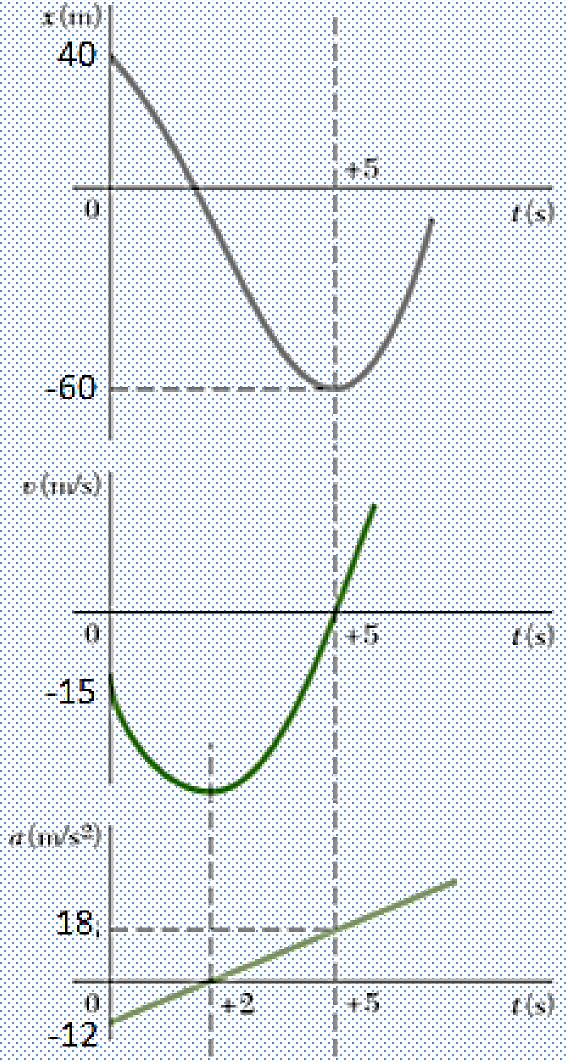
RESOLUÇÃO

- As equações do movimento são:
  $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$
  $\mathbf{v = dx/dt = 3t^2 - 12t - 15}$
  $\mathbf{a = dv/dt = 6t - 12}$

(a) Instante em que $v = 0$

$$3t^2 - 12t - 15 = 0 \Rightarrow \mathbf{t = -1\ s\ e\ t = +5\ s}$$

Somente a raiz $t = +5$ s corresponde a um instante após o movimento ter-se iniciado: para $t < 5$ s, $v < 0$, a partícula se move no sentido negativo; para $t > 5$ s, $v > 0$, a partícula se desloca no sentido positivo.



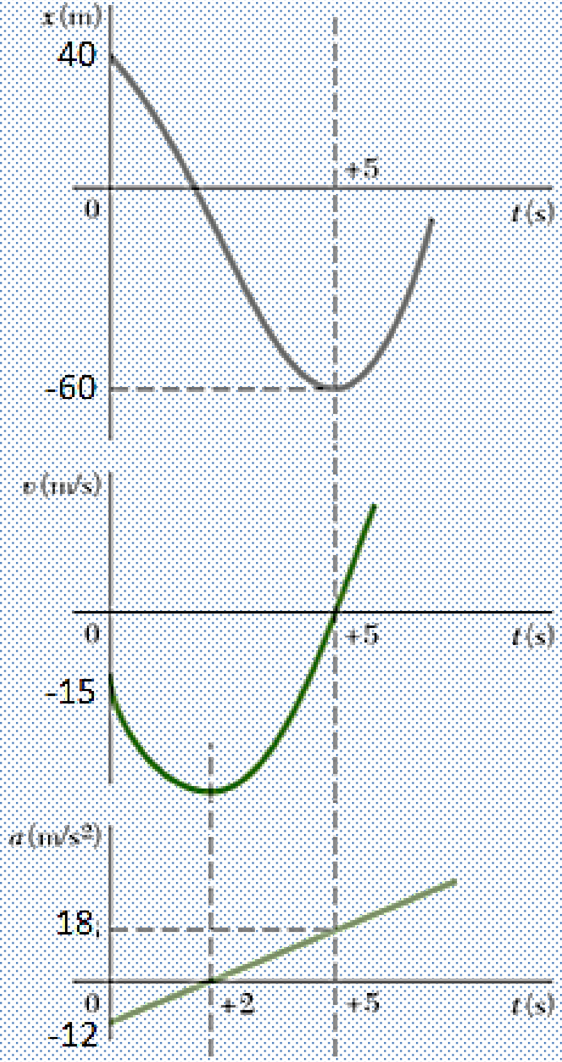
RESOLUÇÃO – Continuação:

(b) Posição e distância percorrida quando $v = 0$, tem-se: $x_5 = (5)^3 - 6(5)^2 - 15(5) + 40$
⇨ $x_5 = - 60$ m

A posição inicial para $t = 0$ era $x_0 = +40$ m.

Como $v \neq 0$ durante o intervalo de $t = 0$ a $t = 5$ s, tem-se que a distância percorrida é: $\Delta x = x_5 - x_0 = - 60 \text{ m} - 40 \text{ m} = - 100$ m

Assim, a distância percorrida corresponde a **Δx = 100 m no sentido negativo.**

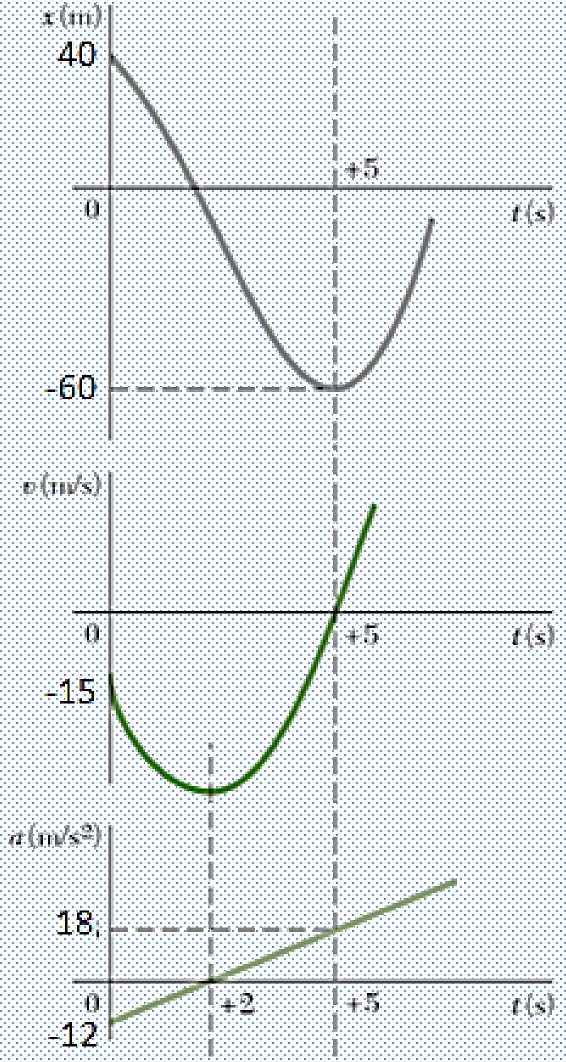


RESOLUÇÃO – Continuação:

(c) Aceleração quando v = 0. Substituímos t = + 5 s na equação da aceleração:

$a_5 = 6(5) - 12$ ⇨ $\mathbf{a_5 = +18\ m/s^2}$

(d) Distância percorrida de t = 4 s a t = 6 s. A partícula se desloca no sentido negativo de t = 4 s para t = 5 s e no sentido positivo de t = 5 s para t = 6 s; portanto, a distância percorrida durante cada um desses intervalos de tempo será calculada separadamente.



RESOLUÇÃO – Continuação:

De $t = 4$ s a $t = 5$ s: ⇨ $x_5 = -60$ m

$x_4 = (4)^3 - 6(4)^2 - 15(4) + 40 = -52$ m

Distância percorrida $\Delta x = x_5 - x_4 = -60 \text{ m} - (-52 \text{ m}) = -8$ m

$\Delta x = 8$ m no sentido negativo

De $t = 5$ s a $t = 6$ s: ⇨ $x_5 = -60$ m

$x_6 = (6)^3 - 6(6)^2 - 15(6) + 40 = -50$ m

Distância percorrida $\Delta x = x_6 - x_5 = -50 \text{ m} - (-60 \text{ m})$

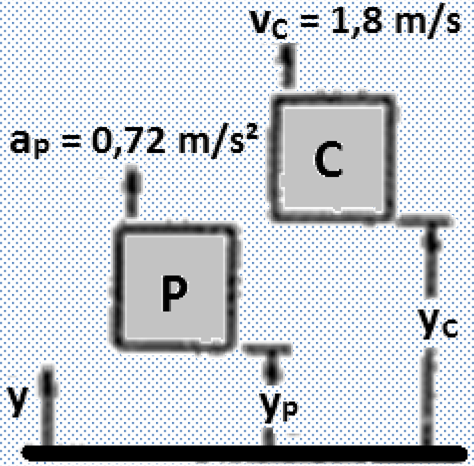
$\Delta x = +10$ m $= 10$ m no sentido positivo

Portanto, a distância total percorrida de $t = 4$ s a $t = 6$ s é:

$\Delta x_{total} = 8 \text{ m} + 10 \text{ m} = 18$ m

03. 11.185 - Um elevador de carga subindo com velocidade constante de 1,8 m/s passa por um elevador de passageiros que está parado. Quatro segundos depois, o elevador de passageiros começa a subir com uma aceleração constante de 0,72 m/s². Determine (a) quando e onde os elevadores estarão na mesma altura, (b) a velocidade escalar do elevador de passageiros naquele instante.

RESOLUÇÃO



(a) $t \geq 0$: $\mathbf{y_C = 0 + v_C\, t}$

$t \geq 4$ s: $\mathbf{y_P = 0 + 0\,(t-4) + \tfrac{1}{2}\, a_P\,(t-4)^2}$

Quando: $\mathbf{y_C = y_P}$ ⇨ $1,8\,t = \tfrac{1}{2}\,(0,72)\,(t-4)^2$

$t^2 - 13t + 16 = 0$ ⇨ $t = 1,3765$ s e $t = 11,6235$ s

Como $t \geq 4$ s: **t = 11,6235 s** ⇨ $y_C = (1,8 \text{ m/s})(11,6235 \text{ s})$

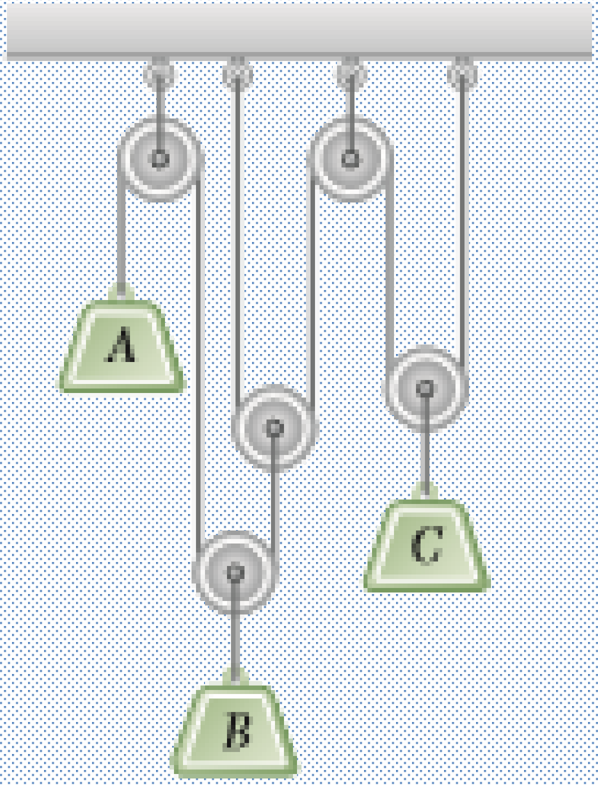
⇨ $\mathbf{y_C = y_P = 20,922 \text{ m}}$

(b) $t \geq 4$ s: $\mathbf{v_P = 0 + a_P\,(t-4)}$

Quando: $t = 11,6235$ s ⇨ $v_P = (0,72 \text{ m/s}^2)\,[(11,6235 - 4)\text{s}]$

⇨ $\mathbf{v_P = 5,489 \text{ m/s}}$

04. 11.186 - O bloco C parte do repouso em t = 0 e move-se para cima com aceleração constante de 25 mm/s². Sabendo que o bloco A move-se para baixo com velocidade constante de 75 mm/s, determine (a) o instante no qual a velocidade do bloco B é zero, (b) a posição do bloco B correspondente.

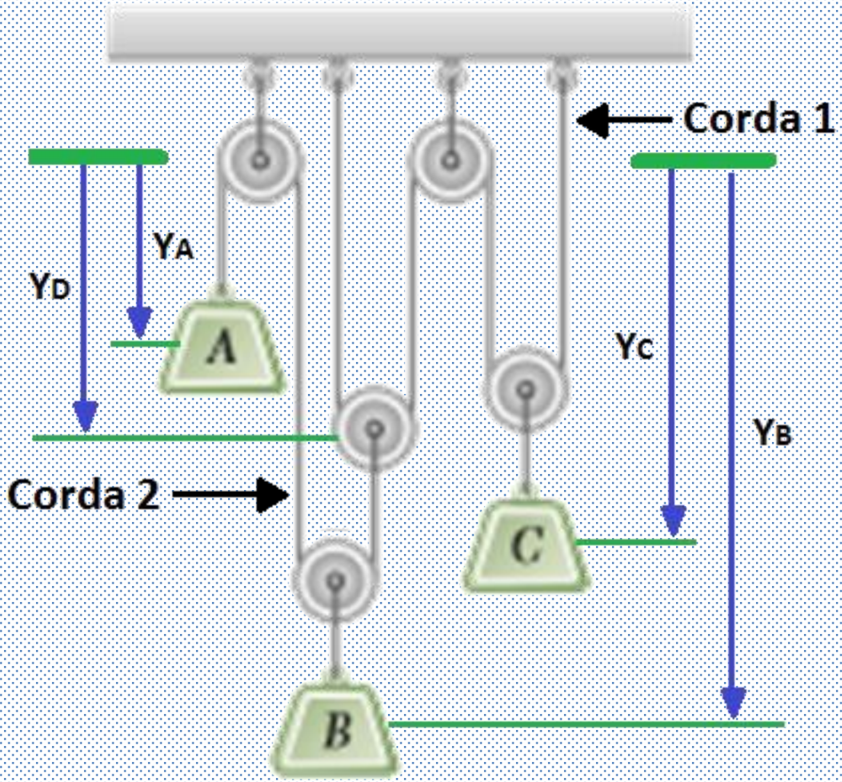


RESOLUÇÃO

Os segmentos das cordas, mostrado na figura ao lado, permanecem com o comprimento constante e não têm de ser considerados quando os blocos se movem. Os comprimentos restantes das cordas, l_1 e l_2, podem ser expressos como:

$$2y_C + 2y_D = l_1$$

$$y_A + y_B + (y_B - y_D) = l_2$$



RESOLUÇÃO – Continuação:

Calculando-se a derivada temporal de cada expressão, obtêm-se:

$$\mathbf{v_D = -v_C}$$

$$\mathbf{v_A + 2v_B - v_D = 0 \quad \Rightarrow \quad v_A + 2v_B + v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad a_A + 2a_B + a_C = 0}$$

Sendo: $(v_C)_0 = 0$, $(v_A)_0 = 75$ mm/s

Tem-se: $(v_B)_0 = -\frac{1}{2}\,[(v_A)_0 + (v_C)_0] = -\frac{1}{2}\,[75 + 0]$

⇨ $\mathbf{(v_B)_0 = -37{,}5}$ **mm/s**

Sendo: $a_A = 0$, $a_C = -25$ mm/s^2

Tem-se: $a_B = -\frac{1}{2}\,(a_A + a_C) = -\frac{1}{2}\,(0 - 25)$

⇨ $\mathbf{a_B = 12{,}5}$ **mm/s^2**

RESOLUÇÃO – Continuação:

Equações de velocidade e da posição para o bloco B são:

$\mathbf{v_B = (v_B)_0 + a_B t}$ ⇨ $v_B = -37{,}5 + 12{,}5t$

$\mathbf{\Delta y_B = (v_B)_0\, t + ½\, a_B\, t^2}$ ⇨ $\Delta y_B = -37{,}5\, t + 6{,}25t^2$

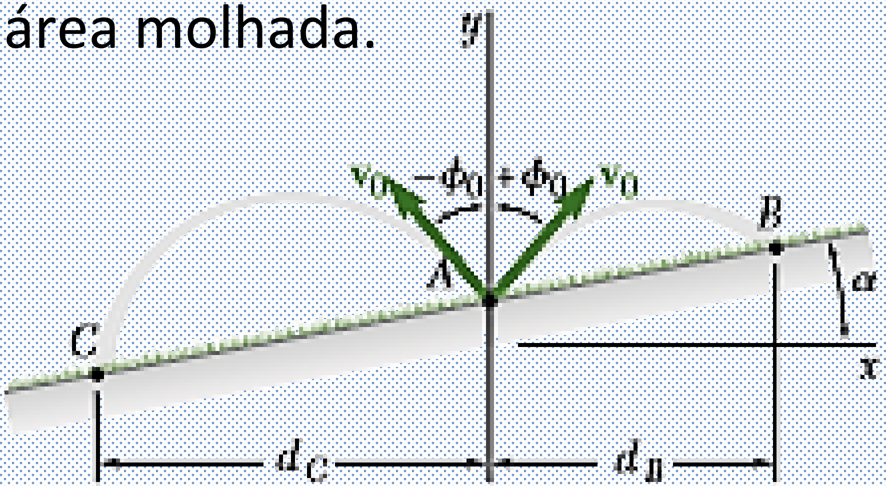
(a) Sendo: $v_B = 0$ ⇨ $0 = -37{,}5 + 12{,}5t$

⇨ $\mathbf{t = 3{,}0\ s}$

(b) Sendo: $t = 3{,}0$ s ⇨ $\Delta y_B = -37{,}5\,(3) + 6{,}25(3)^2$

⇨ $\mathbf{\Delta y_B = -\ 56{,}25\ mm}$

05. 11.188 - Um irrigador de água oscilante é colocado no ponto A de uma inclinação que forma um ângulo α com a horizontal, conforme mostrado na figura a seguir. O irrigador libera água com uma velocidade v_0 em um ângulo ϕ com a vertical que varia se $+\phi_0$ até $-\phi_0$. Sabendo que v_0 = 9 m/s, ϕ_0 = 40° e α = 10°, determine a distância horizontal entre o irrigador e os pontos B e C que definem a área molhada.



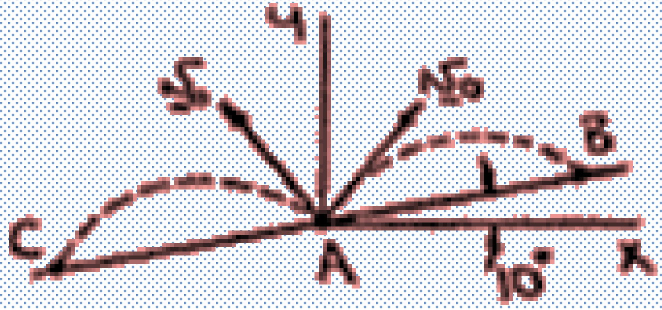
RESOLUÇÃO

Componentes da Velocidade:

$(v_0)_x = v_0\ \text{sen}\phi = (9)\ \text{sen}\phi$ e $(v_0)_y = v_0 \cos\phi = (9) \cos\phi$

Inclinação CAB (veja a figura):

$y = x\ \text{tg}\ 10°$



Na direção horizontal (MU):

$x = 0 + (v_0)_x\ t = (9\ \text{sen}\phi)t$ ou $t = x/(9\ \text{sen}\phi)$

Na direção vertical (MUV):

$y = 0 + (v_0)_y\ t - ½\ gt^2 = (9 \cos\phi)t - ½\ gt^2$

RESOLUÇÃO – Continuação:

Substituindo t na equação, tem-se:

$y = (9\ \cos\phi)[x/(9\ \text{sen}\phi)] - ½\ g\ [x/(9\ \text{sen}\phi)]^2$

$y = (x/\text{tg}\phi) - [(9{,}81/162)\ (x^2/\text{sen}^2\phi)]$

No ponto B: $\phi = 40°$ e $x = d_B$

$d_B\ \text{tg}\ 10° = (d_B/\text{tg}\ 40°) - [(0{,}0606)\ (d_B^2/\text{sen}^2\ 40°)]$

$- 1{,}0154\ d_B = - 0{,}1466\ d_B^2$ ⇨ $\mathbf{d_B = 6{,}93\ m}$

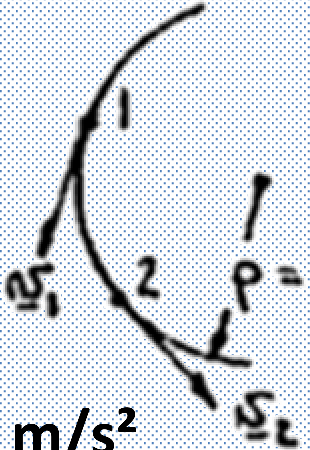
No ponto C: $\phi = - 40°$ e $x = - d_C$

$- d_C\ \text{tg}\ 10° = (- d_C/\text{tg}\ {-40°}) - (0{,}0606)\ [(-d_C)^2/\text{sen}^2\ {-40°}]$

$- 1{,}3681\ d_C = - 0{,}1467\ d_C^2$ ⇨ $\mathbf{d_C = - 9{,}33\ m}$

06. 11.190 - O motorista de um automóvel diminui sua velocidade escalar numa taxa constante de 72 km/h para 48 km/h em uma distância de 225 m ao longo de uma curva de raio 450 m. Determine a intensidade da aceleração total do automóvel depois que o automóvel tiver percorrido 150 m ao longo da curva.

RESOLUÇÃO



Dados: v_1 = 72 km/h = 20 m/s

v_2 = 48 km/h = 13,33 m/s

Como: $(v_2)^2 = (v_1)^2 + 2a_t\,(s - s_1)$

$(13{,}33)^2 = (20)^2 + 2a_t\,(225)$ ⇨ $\mathbf{a_t = -\,0{,}494\ m/s^2}$

Quando Δs = 150 m, tem-se:

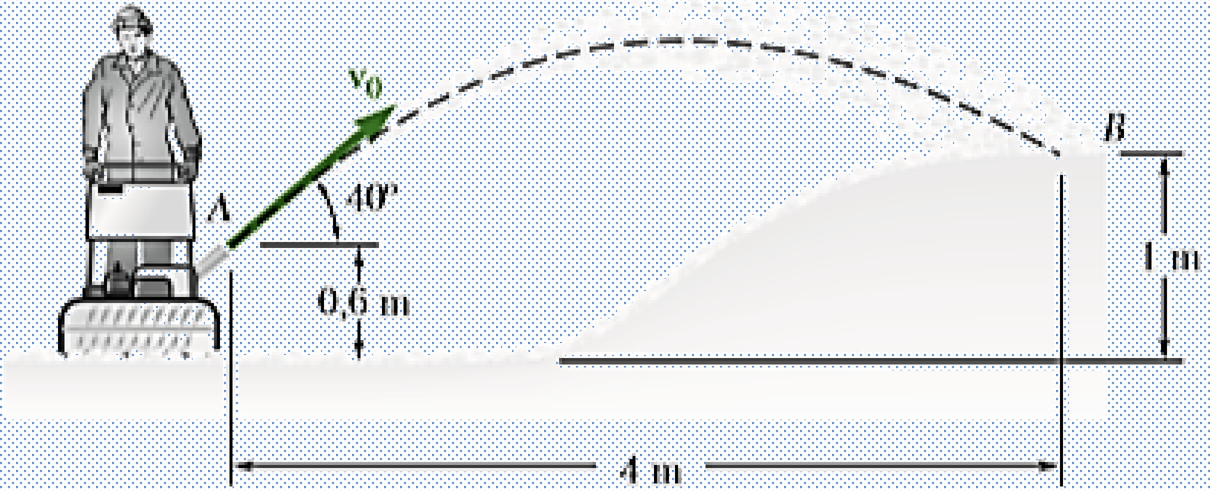
$v^2 = (20)^2 + 2(-0{,}494)\,(150) = 251{,}8\ m^2/s^2$

Como: $\mathbf{a_n = v^2/\rho}$ = 251,8/450 ⇨ $\mathbf{a_n = 0{,}56\ m/s^2}$

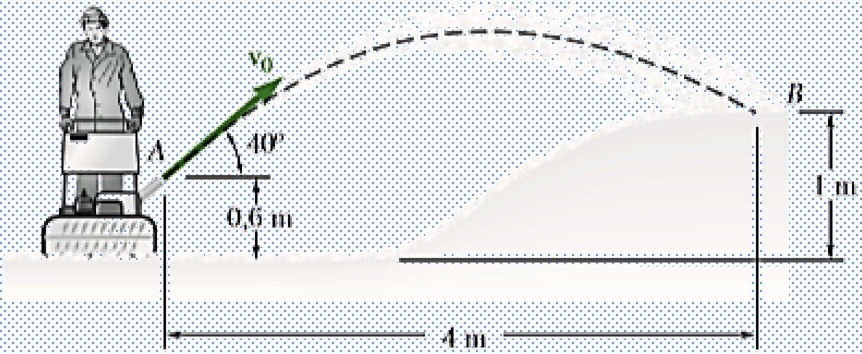
Assim: $\mathbf{a^2 = (a_t)^2 + (a_n)^2} = (-\,0{,}494)^2 + (0{,}56)^2$

⇨ $\mathbf{a = 0{,}75\ m/s^2}$

07. 11.191 - Um morador usa o removedor de neve para limpar a entrada de sua garagem. Sabendo que a neve é lançada a um ângulo médio de 40° com a horizontal, determine a velocidade inicial v_0 da neve.



RESOLUÇÃO



Dados: $(v_x)_0 = (v_0)\cos 40°$

$(v_y)_0 = (v_0)\,\text{sen}40°$

Na direção horizontal (MU):

$x = 0 + (v_0)_x\, t \;\Rightarrow\; 4 = (v_0 \cos 40°)t_B \;\Rightarrow\; t_B = 4/(v_0 \cos 40°)$

Na direção vertical (MUV):

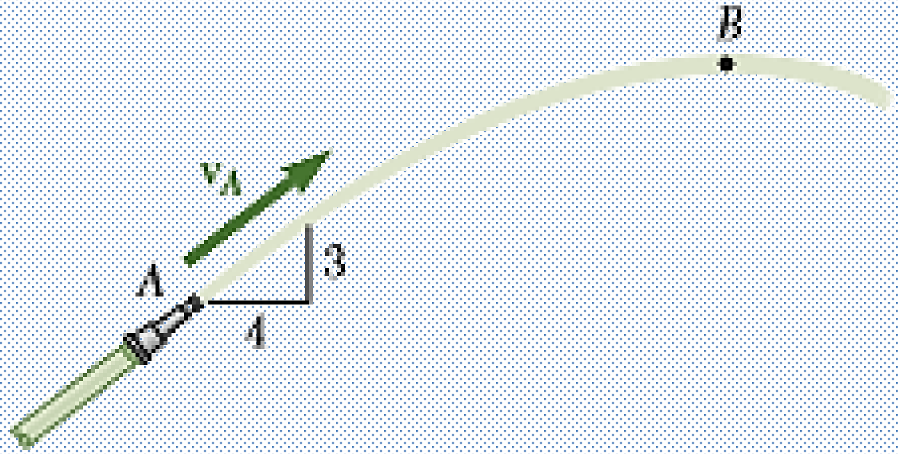
$y = y_0 + (v_0)_y\, t - ½\, gt^2 \;\Rightarrow\; 1 = 0{,}6 + (v_0\, \text{sen}40°)t_B - ½\,(9{,}81)t_B^2$

Substituindo t_B, tem-se:

$0{,}4 = (v_0\, \text{sen}40°)[4/(v_0 \cos 40°)] - ½\,(9{,}81)[4/(v_0 \cos 40°)]^2$

$v_0^2 = (78{,}48)/[(4\text{tg}40° - 0{,}4)(\cos^2 40°)] \Rightarrow$ **$v_0 = 6{,}73$ m/s**

08. 11.192 - A partir de medições de uma fotografia, verificou-se que o fluxo de água mostrado na figura deixa o bocal em A e tem raio de curvatura de 25 m. Determine (a) a velocidade inicial v_A do fluxo, (b) o raio da curvatura do fluxo se ele alcança sua altura máxima em B.



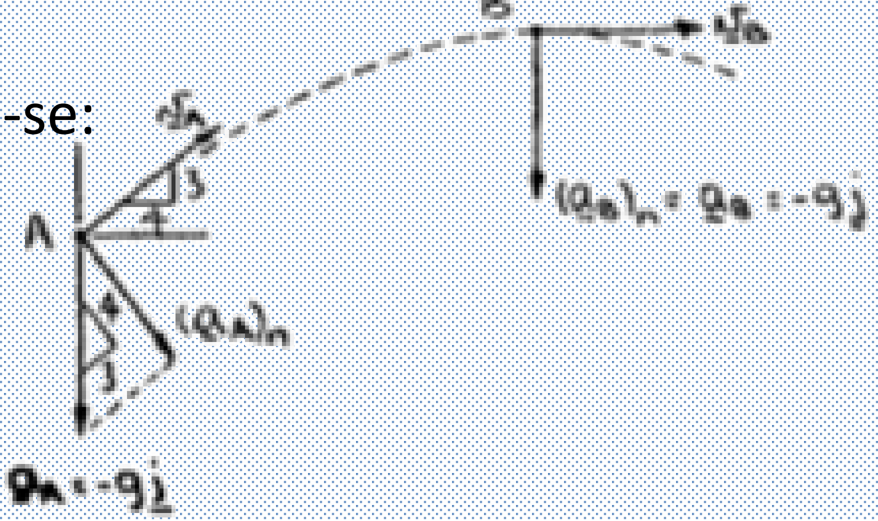
RESOLUÇÃO

(a) Por definição, $\mathbf{(a_A)_n = (v_A)^2/\rho_A}$

Conforme mostrado na figura, tem-se:

$(v_A)^2 = [(4/5)\ (9{,}81\ m/s^2)]\ (25\ m)$

$\mathbf{v_A = 14{,}0071\ m/s\ \ \measuredangle\ 36{,}9^\circ}$



(b) Por definição, $(a_B)_n = (v_B)^2/\rho_B$

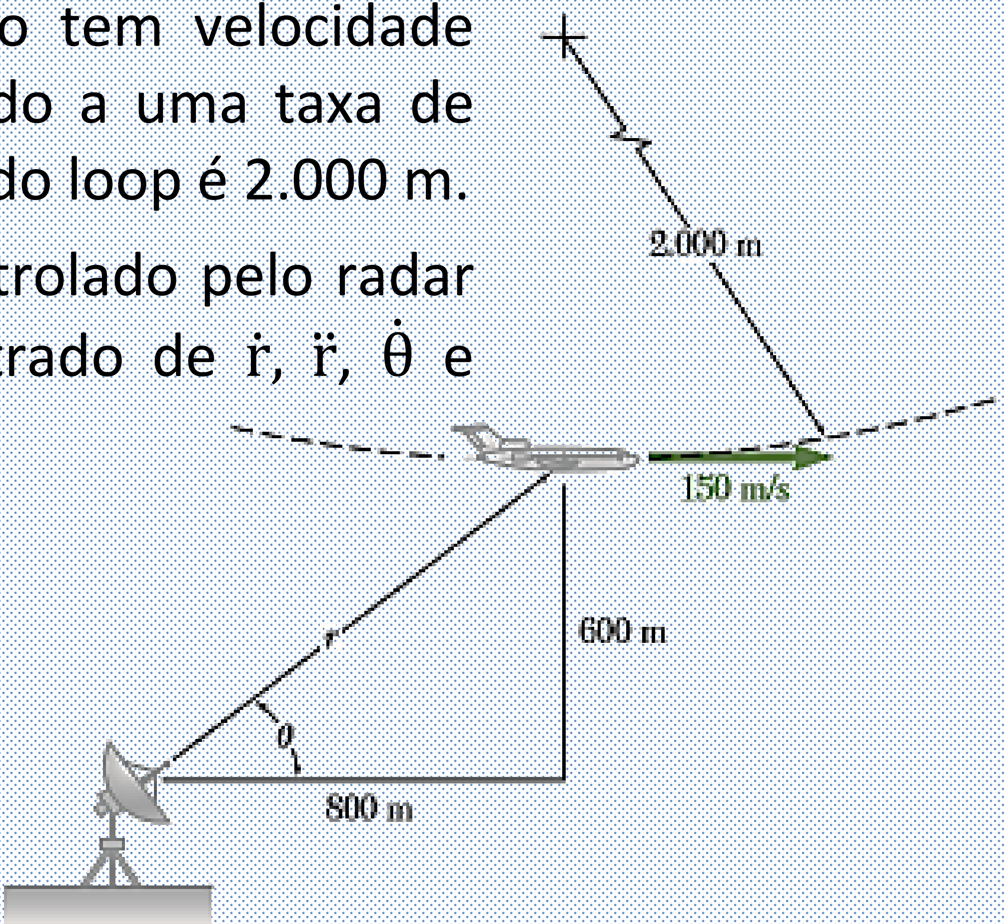
Assim: $v_B = (v_A)_x = (4/5)\ (v_A)$

Logo: $\rho_B = [(4/5)\ (14{,}0071\ m/s)]^2/9{,}81\ m/s^2$

$\mathbf{\rho_B = 12{,}80\ m}$

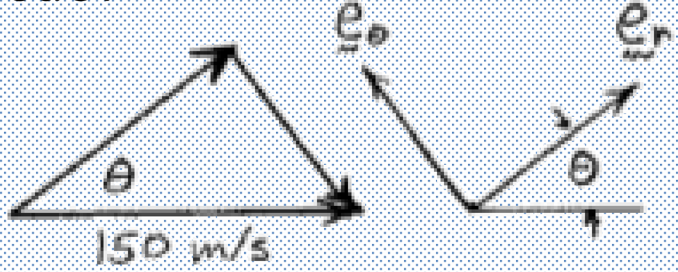
09. 11.193 - Na parte baixa do loop em um plano vertical, um aeroplano tem velocidade de 150 m/s e está acelerando a uma taxa de 25 m/s². O raio de curvatura do loop é 2.000 m.

O aeroplano está sendo controlado pelo radar em O. Qual é o valor registrado de $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ para esse instante?



RESOLUÇÃO

Por definição, as coordenadas polares são:



r = $\sqrt{(800)^2 + (600)^2} = 1000\ m$

$\theta = tg^{-1}\left(\frac{600}{800}\right)$ = 36,87°

Conforme mostrado na figura, o cálculo das velocidades é dado por:

v = 150 m/s →

v_r = 150 cosθ = 120 m/s ⇨ $\mathbf{v_r = \dot{r}}$ ⇨ $\mathbf{\dot{r}}$ **= 120 m/s**

v_θ = - 150 senθ = - 90 m/s ⇨ $\mathbf{v_\theta = r\dot{\theta}}$ ⇨ $\dot{\theta} = v_\theta / r$ = - 90/1000

⇨ $\mathbf{\dot{\theta}}$ **= - 0,0900 rad/s**

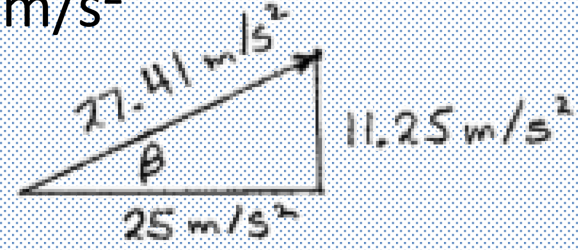
RESOLUÇÃO – Continuação:

Já para aceleração, tem-se : $a_t = 25\ m/s^2 \rightarrow$

$\mathbf{a_n = v^2/\rho}$ ⇨ $a_n = (150)^2/2000 = 11{,}25\ m/s^2$

$\mathbf{a = 27{,}41\ m/s^2 \ \measuredangle\ 24{,}23^\circ}$

(Conforme mostrado na figura)



Sendo $\beta = 24{,}23°$, tem-se: $\mathbf{\theta - \beta = 12{,}64°}$

Assim, pode-se determinar:

$a_r = a \cos(\theta - \beta) = 27{,}41 \cos 12{,}64° = 26{,}74\ m/s^2$

$a_\theta = -\ a \operatorname{sen}(\theta - \beta) = -\ 27{,}41 \operatorname{sen} 12{,}64° = -\ 6{,}00\ m/s^2$

RESOLUÇÃO – Continuação:

Cálculo das acelerações:

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = a_r + r\dot{\theta}^2$

$\ddot{r} = 26{,}74 + (1000)\,(0{,}0900)^2$

$\Rightarrow$ **$\ddot{r} = 34{,}84$ m/s²**

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = (a_\theta - 2\dot{r}\dot{\theta})/r$

$\ddot{\theta} = [-\,6{,}00 - (2)(120)(-0{,}0900)]/1000$

$\Rightarrow$ **$\ddot{\theta} = -\,0{,}0156$ rad/s²**